

## ALGUNOS PUNTOS RELACIONADOS CON EL ANALIZADOR DE FOURIER

### 1. FORMA DE ONDA MUESTREADA

En un sistema de muestreo, la forma de onda en el dominio del tiempo (Fig. 1a) es multiplicada por la función muestreo (Fig. 1b) para producir la onda muestreada (Fig. 1c). La función muestreo se muestra como una serie de funciones impulso, espaciadas a  $T = 1/f_s$ .

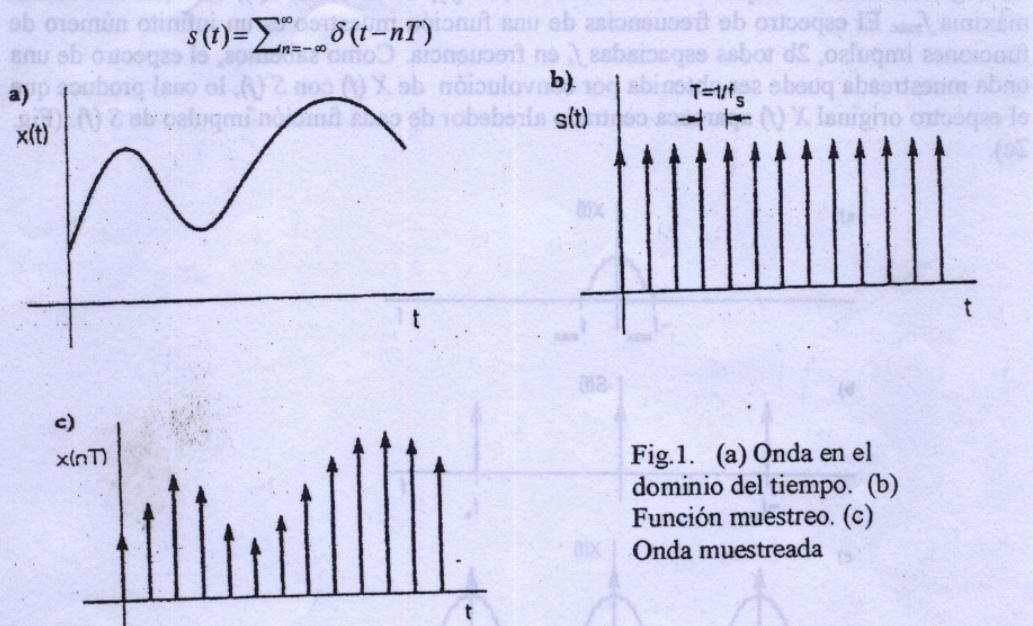


Fig.1. (a) Onda en el dominio del tiempo. (b) Función muestreo. (c) Onda muestreada

Cuando estas funciones impulso son multiplicadas con la forma de onda original, se producen una serie de nuevas funciones impulso cada una en concordancia con la amplitud de la forma de onda original.

$$x(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT)$$

La onda analógica muestreada es convertida, mediante un ADC en una secuencia de números digitales. La salida del conversor es un registro de números que representan la forma de onda muestreada. La versión muestreada y digitalizada siguen reteniendo la forma y la información contenida en la onda no muestreada, si el régimen de muestreado es suficientemente alto.

### 2. TEOREMA DE MUESTREO

La onda debe ser muestreada lo suficiente para producir un registro de tiempo digitalizado que represente fielmente la forma de onda original. El *teorema de muestreo* establece que

una señal base debe ser muestreada a un régimen mayor que el doble de la frecuencia más elevada presente en la señal. El mínimo régimen de la frecuencia aceptable se denomina *régimen de Nyquist*. Así

La Fig. 2a muestra el espectro de frecuencias,  $X(f)$ , de la señal  $x(t)$ , con una frecuencia máxima  $f_{\max}$ . El espectro de frecuencias de una función muestreo es un infinito número de funciones impulsos, 2b todas espaciadas  $f_s$  en frecuencia. Como sabemos, el espectro de una onda muestreada puede ser obtenida por convolución de  $X(f)$  con  $S(f)$ , lo cual produce que el espectro original  $X(f)$  aparezca centrado alrededor de cada función impulso de  $S(f)$ . (Fig. 2c).

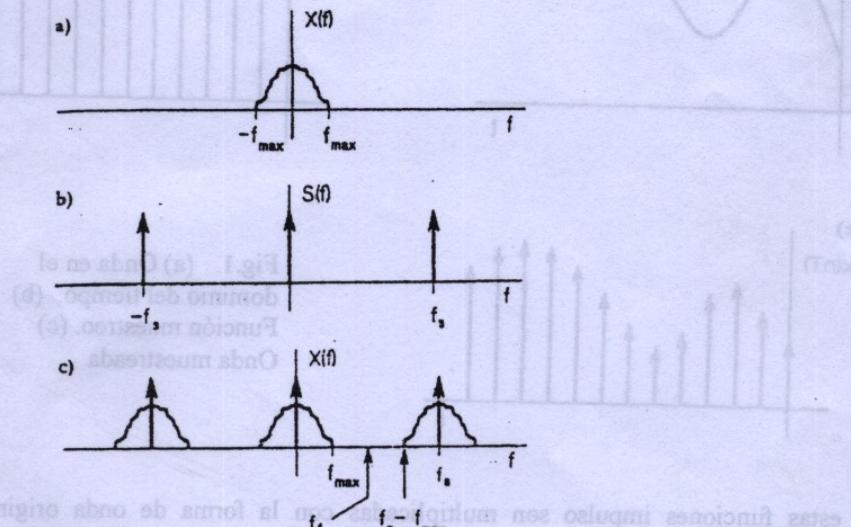


Fig 2. (a) Espectro de una onda no muestreada. (b) Espectro de la función de muestreo.  
(c) Espectro de la onda muestreada.

Este tipo de espectro se encuentra siempre en los sistemas muestreados-la banda base se repite a múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo. Obsérvese que el espectro entre 0 y  $f_s$  es simétrico respecto  $f_s/2$ , que también se denomina *frecuencia de plegado*,  $f_f$ . La señal original puede ser recuperada aplicando un filtro pasa bajos con una frecuencia de corte  $f_f$ , siempre y cuando que las frecuencias contenidas centradas alrededor de  $f_s$  no invadan la señal base. Matemáticamente

$$f_s - f_{\max} > f_f$$

lo cual es simplemente la reformulación del teorema de muestreo, ya que

$$f_s - f_{\max} > f_s / 2$$

*frecuencias de muestreo más alta que la señal de entrada. El filtro pasa bajas pasa las señales de la banda base. Tampoco se muestrean las señales de la banda superior. Para las señales de la banda base se realizan muestreos más rápidos. Esto es necesario para que la señal sea continua. El sistema de muestreo es analógico.*

$$f_s / 2 > f_{\max}$$

*frecuencias de muestreo más alta que la señal de entrada. El filtro pasa bajas pasa las señales de la banda base. Tampoco se muestrean las señales de la banda superior. Para las señales de la banda base se realizan muestreos más rápidos. Esto es necesario para que la señal sea continua. El sistema de muestreo es analógico.*

$$f_s > 2 f_{\max}$$

*frecuencias de muestreo más alta que la señal de entrada. El filtro pasa bajas pasa las señales de la banda base. Tampoco se muestrean las señales de la banda superior. Para las señales de la banda base se realizan muestreos más rápidos. Esto es necesario para que la señal sea continua. El sistema de muestreo es analógico.*

La Fig. 3 muestra los espectros de dos señales muestreadas, una que responde al teorema de muestreo y la otra que lo viola. Tengamos en cuenta que cuando el teorema de muestreo es violentado, se presentan frecuencias indeseables por debajo de  $f_f$ . Este fenómeno es conocido como *alias* o *distorsión encimada*, ya que estas componentes de frecuencia indeseadas aparecen por debajo de otra frecuencia (banda base).

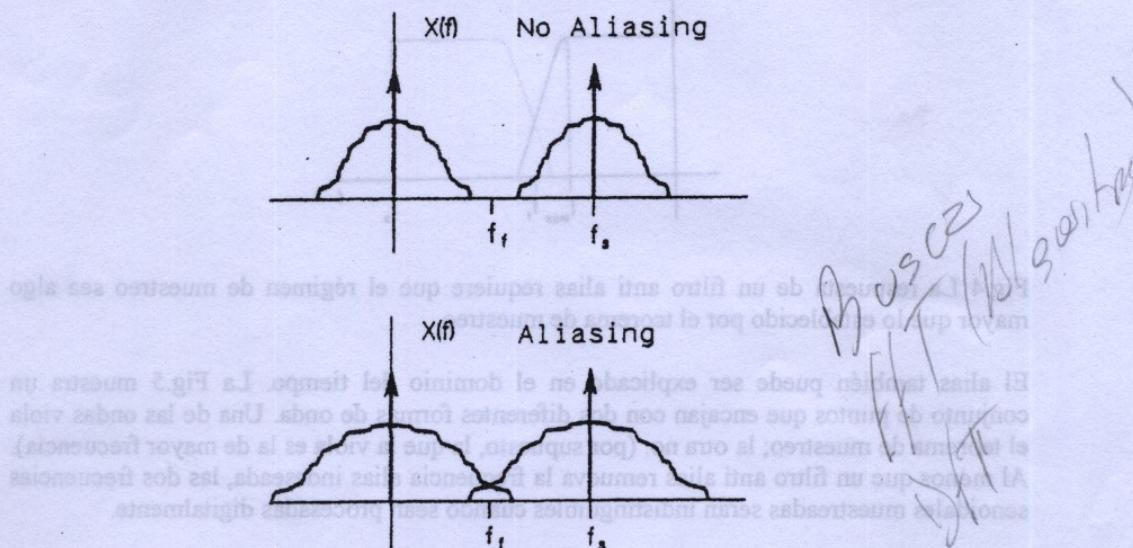


Fig. 3. El alias se produce cuando el régimen de muestreo no es suficientemente elevado.

Para evitar la distorsión encimada en un analizador de Fourier, dos son las condiciones que se deben cumplir:

1. La señal de entrada debe estar limitada en la banda. En otras palabras, debe existir una  $f_{\max}$  por encima de la cual no se presenten componentes de frecuencia (en la práctica esas componentes de frecuencia por encima de  $f_{\max}$  pueden existir, pero deben estar lo suficientemente atenuadas de manera que no afecten la medición). Esto se realiza comúnmente insertando un filtro anti alias en el paso de la señal.
2. La señal de entrada debe ser muestreada a un régimen que satisfaga el teorema de muestreo.

La frecuencia de muestreo requerida por el teorema de muestreo es el valor teórico mínimo requerido para reconstruir la señal apropiadamente. En la práctica, es necesario usar una

frecuencia de muestreo algo mayor que este valor. La Fig.4 muestra la respuesta de frecuencia de un filtro pasa bajos práctico. El filtro tendrá una pendiente finita por encima de la frecuencia de corte,  $f_{máx}$ . También se muestra la respuesta espejo del filtro por encima de la frecuencia de plegado. Esta respuesta representa la posibilidad de una frecuencia alias se haga presente en el filtro anti alias. El sistema se diseña de manera que la frecuencia de plegado (y la frecuencia de muestreo) sean lo suficientemente elevadas como para que el filtro anti alias pueda caer sin afectar. De esta manera,  $f_{máx}$ , la frecuencia más elevada que el analizador puede medir, debe ser significativamente más baja que  $f_s$ . Para la implementación de filtros prácticos,  $f_s$  es de 2,5 a 4 veces mayor que  $f_{máx}$ .

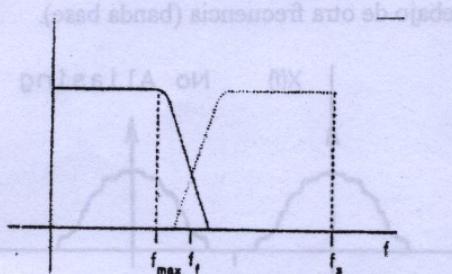


Fig.4 La respuesta de un filtro anti alias requiere que el régimen de muestreo sea algo mayor que lo establecido por el teorema de muestreo.

El alias también puede ser explicado en el dominio del tiempo. La Fig.5 muestra un conjunto de puntos que encajan con dos diferentes formas de onda. Una de las ondas viola el teorema de muestreo; la otra no. (por supuesto, la que la viola es la de mayor frecuencia). Al menos que un filtro anti alias remueva la frecuencia alias indeseada, las dos frecuencias senoidales muestreadas serán indistinguibles cuando sean procesadas digitalmente.

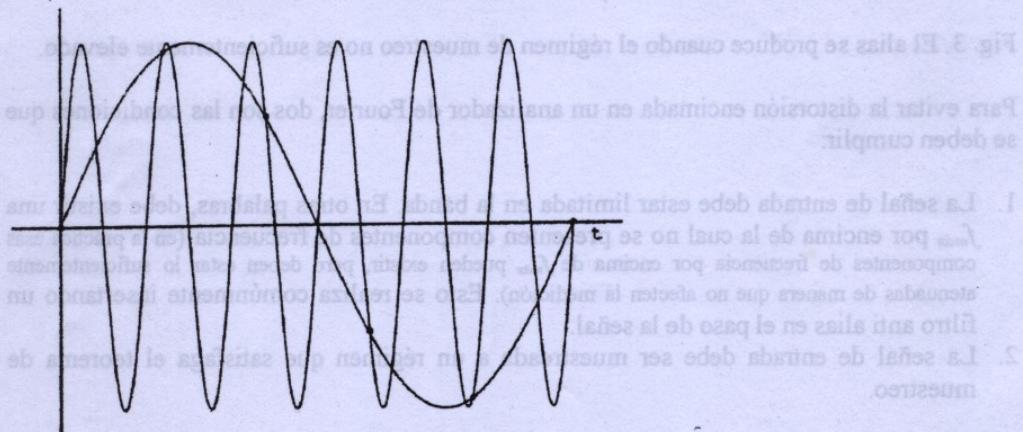


Fig. 5. Alias en el dominio del tiempo

### 3.. PROPIEDADES DE LA FFT

Un registro de tiempo de  $N$  muestras de longitud, es la entrada, y el espectro de frecuencias de  $N$  muestras de longitud, es la salida. Recordemos que  $N$  suele ser restringido a una potencia de 2 a fin de simplificar el trabajo de cálculo de la FFT. Un valor típico para la longitud del registro suele ser 1024 puntos.

El espectro de frecuencias producido por la FFT es simétrico alrededor de la frecuencia de plegamiento ( $f_f = f_s / 2$ ). pliegado

De esta manera, la primera mitad del registro de salida es redundante con la segunda mitad y solo son retenidos los puntos de muestreo numerados desde el 0 hasta  $N / 2$ .

Esto significa que la longitud efectiva del registro de salida es  $(N / 2) + 1$  puntos. Estos son puntos complejos (real +  $j$  imaginario) que contienen tanto la información de magnitud como la de fase.

Prácticamente, la salida de la FFT contiene  $(N / 2) + 1$  puntos, extendiéndose desde 0 hasta  $f_f$ . Generalmente no todos los puntos son desplegados, ya que el filtro anti alias empieza a caer antes de  $f_f$ .

Una configuración común de 1024 muestras en el registro de tiempo, que produzca 513 puntos complejos en el dominio de la frecuencia, podría desplegar 401 puntos.

Los  $N / 2$  (o algo así) puntos en el dominio de las frecuencias se los refiere generalmente como bins y numerados de 0 a  $N / 2$  (P.e., 0 a 512 para  $N = 1024$ ).

Estos bins son equivalentes a los filtros/ detectores individuales de los analizadores de bancos de filtros, centrados cada uno de estos en cada bin.

El bin 0 contiene el nivel de DC de la señal de entrada.

Los bins se encuentran igualmente espaciados en frecuencia, con el escalón de frecuencia,  $f_{esc}$ , igual a la recíproca de la longitud del registro de tiempo.

$$f_{esc} = 1 / \text{longitud del registro de tiempo}$$

La longitud del registro de tiempo puede ser determinado de la frecuencia de muestreo y del número de puntos de muestras en el registro de tiempo

$$f_{esc} = f_s / N$$

La frecuencia asociada con cada bin está dada por

$$f_n = n f_s / N$$

donde  $n$  es el número del bin

La frecuencia del último bin, que contiene la máxima frecuencia de salida del FFT, es de  $f_s / 2$ . Por lo tanto, el rango de frecuencia de un FFT es de 0 a  $f_s / 2$ . ( Nótese que intencionalmente esta frecuencia no es denominada  $f_{max}$ , la que es reservada para el límite

superior de la frecuencia del instrumento y que puede no ser la misma que el último bin de la FFT)

Supongamos que un ciclo de una señal senoidal cae exactamente en el registro de tiempo, como se indica en la Fig.6. Esta onda senoidal será mostrada en el bin 1 de la salida de la FFT.

Si la frecuencia de la onda se duplica, entonces dos ciclos caerán en el registro de tiempo, y su energía aparecerá en el bin 2.

Triplicando la frecuencia original de la onda, tendrímos una respuesta en el dominio de las frecuencias en el bin 3, y así sucesivamente.

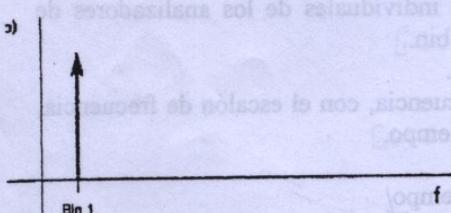
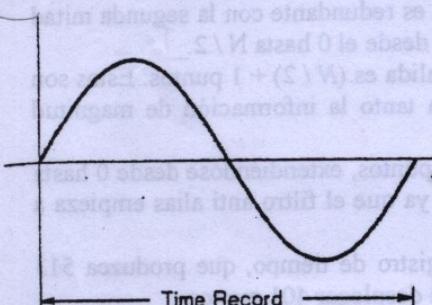


Fig. 6 a) Una onda senoidal que cae exactamente en un registro de tiempo  
b) La linea espectral muestra en el bin 1 la salida de la FFT

#### 4. CONTROL DEL RANGO DE FRECUENCIA (SPAN)

EL FFT es inherentemente un transformador de la banda base. En otras palabras, el rango de frecuencias del FFT siempre arranca en 0 Hz y se extiende a alguna frecuencia máxima  $f_s / 2$ .

Esto puede ser una limitación significativa en las situaciones de medición donde necesita ser analizada, una banda de frecuencias angostas (que no arranque de DC).

Por ejemplo, supongamos que un FFT tenga una frecuencia de muestreo  $f_s = 256$  KHz. El rango de frecuencias de la FFT será de 128 KHz ( $f_s / 2$ ). Si  $N = 1024$ , la resolución de frecuencia será  $f_s / N = 250$  Hz. Las líneas espectrales que se encuentren más juntas que 250 Hz no podrán resolverse. (esta es una aproximación ya que la resolución de frecuencia también depende de la función ventana)

Una forma de incrementar la resolución de frecuencia es el de incrementar  $N$ , el número de muestras en el registro de tiempo, que también incrementa el número de bins a la salida del FFT.

Desafortunadamente, esto incrementa del tamaño de los conjuntos con que la FFT tiene que tratar y en concordantemente incrementa el tiempo de cálculo.

El tiempo de cálculo del algoritmo de la FFT limita a menudo el comportamiento de del instrumento (en la forma del régimen actualización de la pantalla), de manera que el aumento del tamaño del FFT es muchas veces no deseable.

Si se reduce  $f_s$ , también se incrementa la resolución pero a expensas de reducir el límite superior de frecuencia de la FFT y automáticamente el ancho de banda del instrumento. Esta posibilidad vale la pena tenerla por cuanto da al usuario control sobre la resolución de frecuencia y el rango de frecuencias del instrumento.

A medida que se reduce el régimen de muestreo, se debe reducir la frecuencia de corte y el filtro anti alias, porque de lo contrario se ha de producir alias. Se puede utilizar un conjunto de filtros seleccionables, pero es más económico implementar filtros digitales adicionales. Un *filtro digital por décadas* decrece simultáneamente el ancho de banda de la señal y el régimen de muestreo (Fig. 7).

El régimen de muestreo dentro del filtro digital es  $f_s$ , mientras que mientras que el régimen de muestro fuera del filtro es  $f_s/n$ , donde  $n$  es el *factor decimal*, siendo este un número entero. Similamente, el ancho de banda a la entrada del filtro es  $BW$  y el ancho de banda a la salida es  $BW/n$ .

El filtro digital provee protección del alias mientras se reduce el régimen de muestreo de manera tal que la resolución de frecuencia de la FFT se incrementa. Aún se requiere el filtro analógico anti alias, ya que el filtro digital es en si mismo un sistema de muestreo que debe ser protegido del alias.

El filtro analógico protege al instrumento en su *span* de frecuencias más amplio, operando a  $f_s$ . Los filtros digitales se colocan después de la protección del filtro analógico y se utilizan cuando el usuario selecciona rangos de frecuencias más angostos.

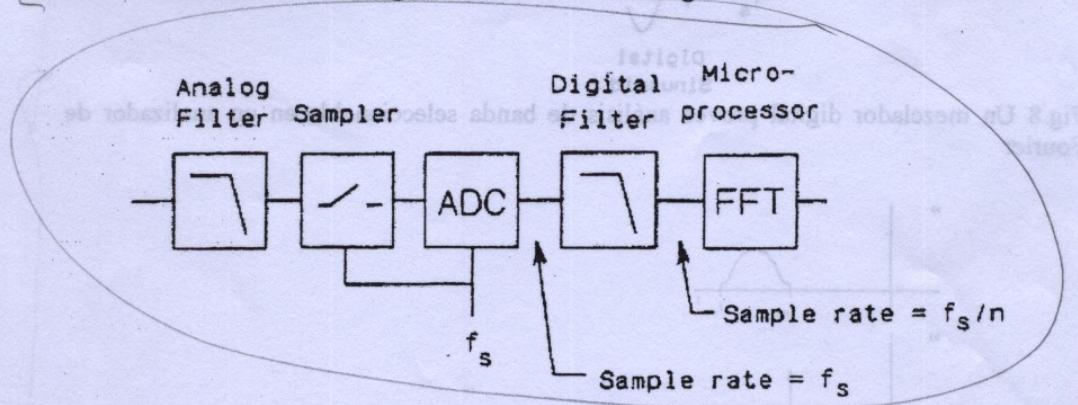


Fig. 8 Filtros digitales por décadas son normalmente utilizados para reducir el régimen de muestreo en la FFT

## 5. ANÁLISIS SELECCIONABLE DE BANDA

Variando el régimen de muestreo, el rango de frecuencias del analizador puede ser controlado pero el arranque de frecuencia del *span* es siempre DC. La resolución de frecuencia puede ser incrementada arbitrariamente pero a expensas de una menor frecuencia máxima. El *análisis seleccionable de banda* (también conocida como *zoom*) permite al operador reducir el rango de frecuencia mientras se mantiene constante la frecuencia central. En otras palabras, el rango de frecuencias desplegado no se limita a comenzar a DC. Esto es útil porque se puede analizar bandas muy angostas fuera de DC.

El análisis seleccionable de banda se realiza variando el diagrama en bloques (Fig. 8). La salida del ADC es multiplicada por una senoide digital, la que al mezclarse disminuye la frecuencia similar a lo que ocurre en un receptor superheterodino o en un analizador de espectro de barrido. El rango de frecuencias de interés (Fig. 9) es mezclado con una senoide compleja en el centro de la frecuencia, lo que provoca que el rango de frecuencia se mezcle hacia abajo a la banda base. El filtro digital es configurado para el span apropiado usando el factor por décadas apropiado.

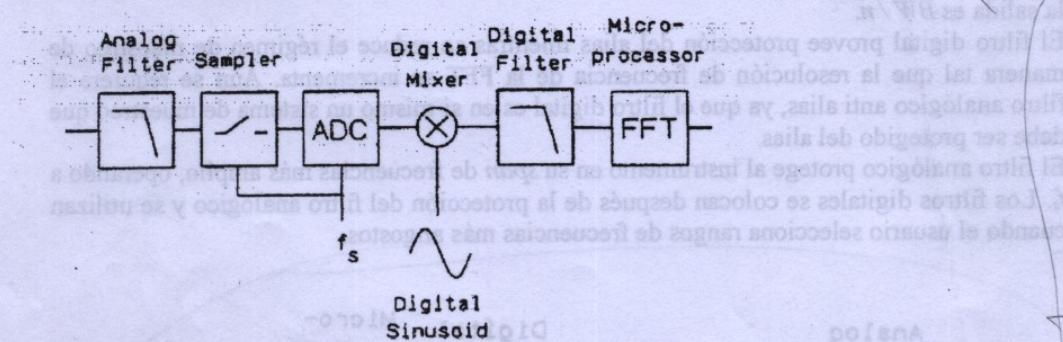


Fig.8 Un mezclador digital provee análisis de banda seleccionable en un analizador de Fourier

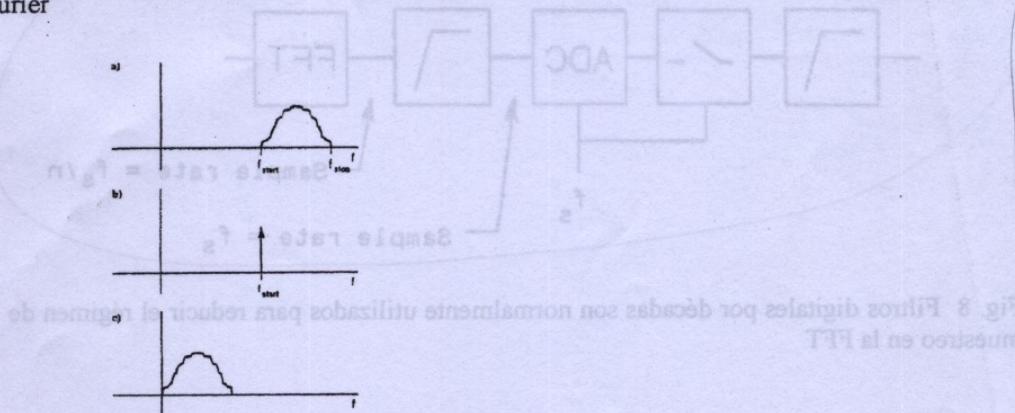


Fig.9 a). El espectro de la señal a ser medido  
 b). El espectro del oscilador digital  
 c). La versión de la frecuencia trasladada del espectro original

La salida del filtro digital pasa por la FFT para la obtención del espectro de frecuencias. El ancho de banda del filtro digital puede ser reducido significativamente, produciendo rangos de frecuencia hasta de tan solo 1 Hz.

## 6. MEDICIONES DE FASE

Hasta aquí, solo hemos analizado las magnitudes de una señal en el dominio de las frecuencias. Sin embargo, el análisis de las mallas requiere que tanto de la magnitud como de la fase sean medidas. Ya hemos mencionado que la salida de la FFT es un conjunto de puntos complejos que contienen la información de tanto fase como de magnitud. Este hecho hace que el analizador de FFT pueda realizar una verdadera medición de una malla eléctrica.

En la medición de la malla, la información de fase es la respuesta de fase del dispositivo que se mide. Más precisamente, es la diferencia de fase (en función de la frecuencia) entre la aplicación simultánea del estímulo y respuesta medida. Muchos analizadores de FFT tienen dos canales de entrada con lo que pueden medir simultáneamente la entrada y la salida del dispositivo bajo prueba. En este caso, la respuesta en frecuencia del dispositivo es la diferencia de fase entre los dos canales.

En las mediciones de espectro, la utilidad de la información de fase es menos obvio. Como la fase es un concepto relativo, uno se pregunta "¿la fase respecto de qué?".

La fase desplegada en el analizador de FFT depende de la posición relativa de la onda en el registro de tiempo. Si se produce una diferencia de fase en el TR, la respuesta en la pantalla será de 90°. Muchos analizadores, proveen, al igual que los osciloscopios, posibilidades de gatillado a fin de obtener un cierto control sobre el registro de tiempo. Si se utiliza esta posibilidad, se puede entonces estabilizar la fase de una señal en particular. Esto, por ejemplo, que las fases de las armónicas sean comparadas con la fundamental. Si no se utiliza el gatillado, el analizador adquirirá un registro de tiempo cuando esté listo, lo cual no se encontrará en correlación con la señal de entrada. En este caso, la fase de la señal variará en forma aleatoria de una medición a otra. Se puede hacer uso de la fases relativas entre múltiples señales presentes en un registro de tiempo simple, como podría ser una señal modulada.

Nota: Estos apuntes han sido realizados en base a los libros *Spectrum and Network Measurements* y *Electronics Test Instruments* de Robert A. Witte (Agilent Technologies)

↓  
Buscas y Lees