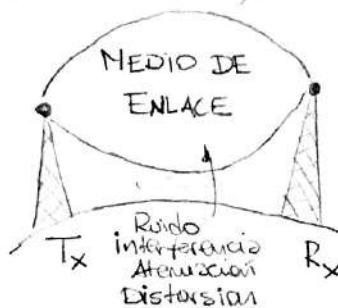


MEDIOS DE ENLACE (Marcos Leon)

UNIDAD 1 = SPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

Introducción:



- Líneas de transmisión
- Espacio libre
- fibras ópticas
- Guía de Ondas

- Nos definen el medio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \rightarrow \text{Permeabilidad magnética} \left[\frac{\text{H}}{\text{m}} \right] \\ \epsilon \rightarrow \text{Constante dielectrica o permitividad} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right] \\ \sigma \rightarrow \text{Conductividad} \left[\frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \right] \end{array} \right.$$

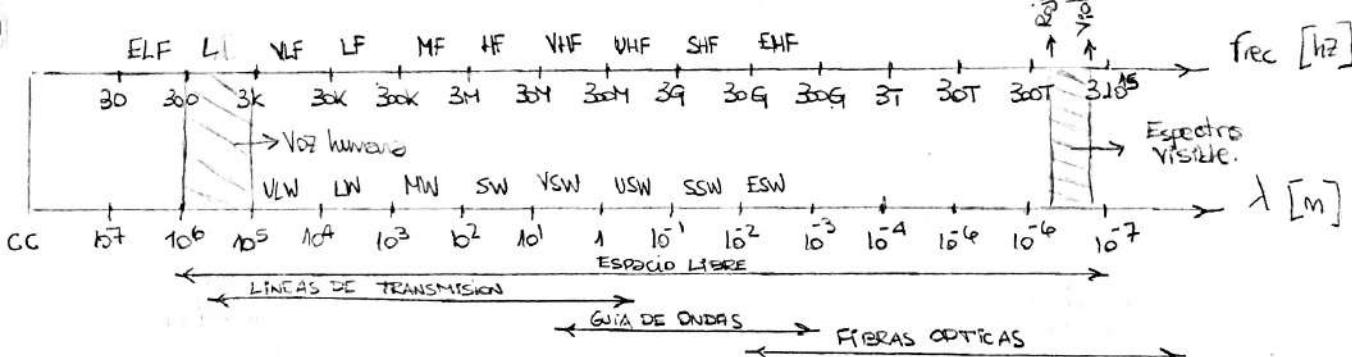
- En el vacío:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \\ \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^{-9}} \text{ F/m} \\ \sigma = 0 \end{array} \right. \quad N_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$\mu, \epsilon, \sigma, \text{ freq}$ → Comportamiento del medio

(Conductor, no conductor, dielectrico)

Especro electromagnético:



AM: 520 kHz - 1600 kHz → 120 canales 9 kHz.

FM: 88 MHz - 108 MHz → 40 canales 300 kHz.

Televisión VHF: 54 MHz - 216 MHz → 12 canales de 6 MHz. [#2 - #13]

Televisión UHF: 470 MHz - 890 MHz → 70 canales de 6 MHz. [#14 - #83]

Microondas: 300 MHz - 300 GHz.

- Color rojo: $4,61 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.
- Color Violeta: $7,31 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \rightarrow \text{longitud de onda [m]} \\ F \rightarrow \text{frecuencia [Hz]} \\ C \rightarrow \text{Velocidad de la luz [m/s]} \end{array} \right.$$

$$\lambda = \frac{C}{F}$$

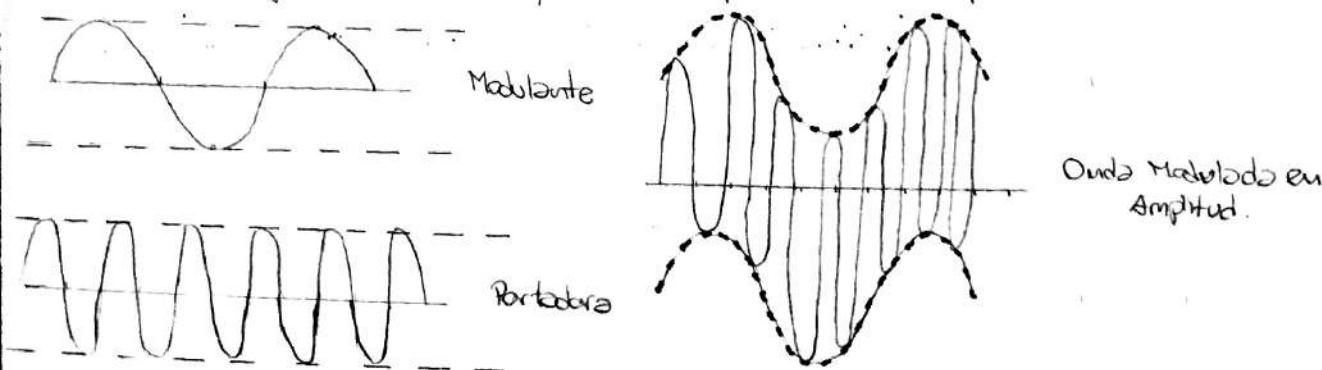
Modulación:

Proceso de imprimir información mediante una señal denominada modulante en una onda de alta frecuencia denominada portadora.

tipos
Modulación frecuencia.
Modulación fase.
Modulación Amplitud.

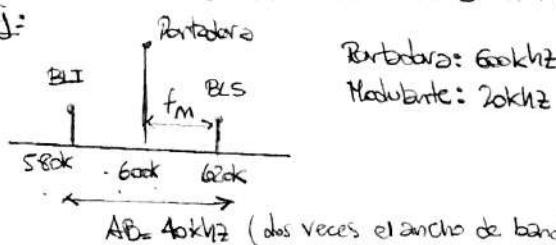
Modulación en Amplitud (AM):

Cambiamos la amplitud de la señal portadora en función de la amplitud de la modulante (información).



El AB de una señal modulada en amplitud dependerá del ancho de banda de la señal modulante.

Ej:



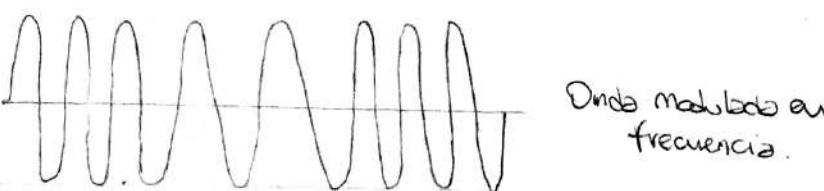
Las frecuencias que se transmiten en AM son las más bajas y el ancho de banda fijado por el CCIR es de 9 kHz por canal.
 $\therefore 520\text{ kHz} - 1600\text{ kHz} \rightarrow 120$ canales de 9 kHz

esta profundidad de penetración o índice de modulación $m = A_m/A_c$ debe ser $m \leq 1$ para que no exista distorsión.

La mayor parte de la potencia se usa para transmitir la portadora. En el mejor de los casos con $m=1$ las bandas laterales son $1/4$ que la portadora.

Modulación en frecuencia (FM):

Consiste en variar la frecuencia de la portadora al ritmo de la modulante. La desviación de frecuencia de la portadora se da con la variación de la amplitud de la modulada.

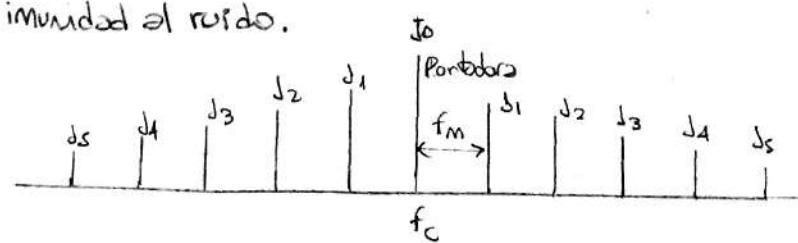


Ej: - Portadora 1000 kHz
 $\Delta f = 15\text{ kHz} / \pm 1\text{ V}$
 $A_m = 1\text{ V}$
 $AB = 30\text{ kHz}$ (985 kHz - 1015 kHz)

El ancho de banda depende de la desviación de frecuencia de la portadora, pero también depende de la frecuencia de la modulante. AB generalmente es 10 veces la frecuencia de la señal de audio. Para transmitir música en alta fidelidad (20 kHz) necesitamos un AB de 200 kHz por canal. Es por ello que FM ocupa de 88 MHz - 108 MHz en el espectro. En EEUU la separación de canales es de 200 kHz y en Europa 300 kHz.

Una consecuencia de la modulación en frecuencia es la aparición de infinitas bandas laterales, ocupando un AB infinito. A medida que nos alejamos de la portadora la amplitud se reduce rápidamente por lo que podemos tomar un determinado número de componentes reduciendo el AB de la señal y manteniendo la alta fidelidad.

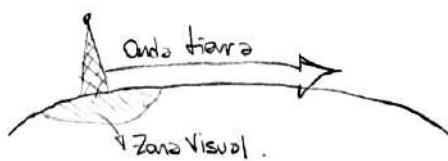
Una ventaja de FM es su inmunidad al ruido.



- Propagación de las Ondas:

* Onda de tierra:

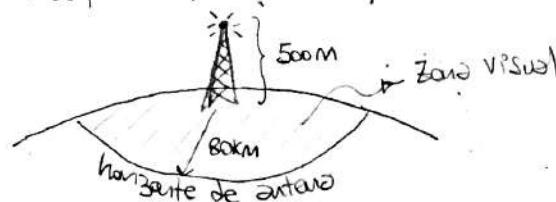
Viven siguiendo la orografía del terreno que pone condiciones estables. Se atenúa a medida que aumenta la frecuencia.



- OL → ideal, mayor alcance.
- OM → menor alcance.
- OC → se atenúa rápidamente.

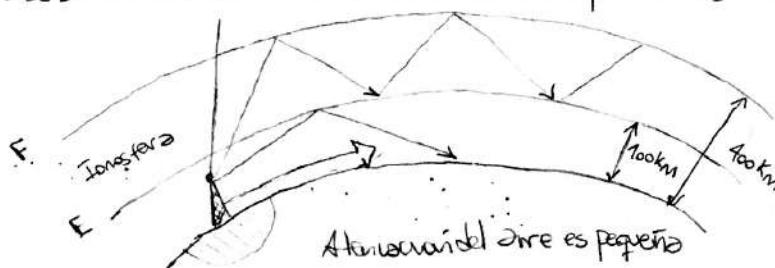
* Onda visual o directa:

Possen un alcance limitado, altas frecuencias y las antenas deben estar elevadas.



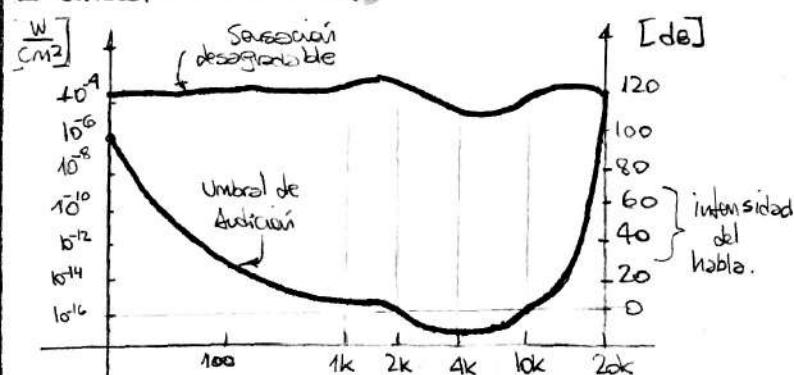
* Onda espacio:

La ionosfera (sus capas E=100km y F=200-400km) funcionan como espejos y forman una guía de onda. Las condiciones de este medio son muy variables (hora del día, estación del año, clima).



- OL → impredecibles.
- OM →
 - dia: se pierde
 - Noche: gran alcance porque se eleva la ionosfera.
- OC →
 - dia: se reciben mejor las bandas de 16, 19, 25, 31 M
 - Noche: el resto de las bandas.
 - frec. Críticas: se pierden

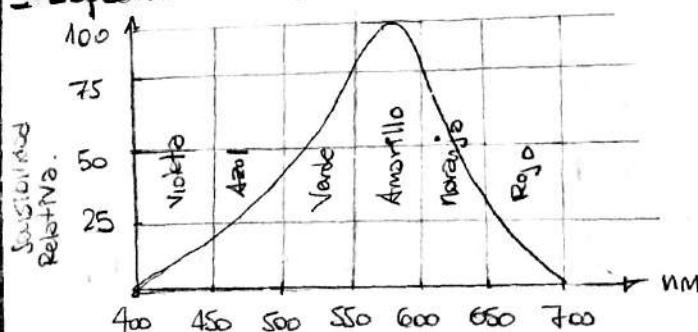
- Úmbrales de audición:



Ondas Sonoras 20 Hz - 20 kHz

$$\text{Intensidad en dB} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

- Espectro Visible:



UNIDAD 2 : ECUACIONES DE MAXWELL

Sistemas de Coordenadas :

* Rectangulares :

$$P(x_1, y_1, z)$$

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

* Cilindricas :

$$P(\rho, \theta, z)$$

$$dV = d\rho \cdot \rho d\theta \cdot dz$$

* Esfericas

$$P(\rho, \theta, \phi)$$

$$dV = d\rho \cdot \rho \sin \theta \cdot d\phi$$

* Cilindricas \leftrightarrow Rectangulares

$$x = \rho \cos \theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$z = z$$

* Esfericas \leftrightarrow Rectangulares

$$x = \rho \cos \theta \cdot \cos \phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = \rho \sin \theta \cdot \cos \phi$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = \rho \sin \phi$$

$$\phi = \sin^{-1} \frac{z}{\rho}$$

Generalizados	$dV(v_1, v_2, v_3)$	h_1	dv_1	h_2	dv_2	h_3	dv_3
Rectangulares	$dV(x_1, y_1, z)$	1	dx	1	dy	1	dz
Cilindricos	$dV(\rho, \theta, z)$	1	$d\rho$	ρ	$d\theta$	1	dz
Esfericos	$dV(\rho, \theta, \phi)$	1	$d\rho$	ρ	$d\theta$	$\rho \sin \theta$	$d\phi$

Campos escalares y vectoriales:

Escalares: función que asigna a cada punto del espacio una magnitud para cada instante de tiempo.

Vectoriales: función que asigna a cada punto del espacio un vector en cada instante de tiempo.

Gradiente, Divergencia y rotor:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \rightarrow \text{Nabla - operador diferencial.}$$

- Gradiente: el Gradiente de una función escalar es un vector cuya magnitud y dirección es el de la máxima derivada direccional. Indica la dirección de máximo crecimiento de la función.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \rightarrow \text{Es un vector}$$

- Divergencia: diferencia entre el flujo que entra y sale de una superficie cerrada.

$$\nabla \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}) \quad \text{Producto escalar}$$

$$\begin{cases} \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = \cos 0 = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \cos 90 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \rightarrow \text{Es un número (función escalar)}$$

- Rotor: variación del flujo en el sentido perpendicular al de avance.

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \rightarrow \text{Es un vector}$$

Teorema de la divergencia y teorema de Stokes:

- Teorema de la divergencia: igualdad entre una superficie cerrada y un volumen.

$$\oint_S \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_V \nabla \cdot \bar{F} dV \quad (\text{La superficie cerrada s delimita el volumen})$$

- Teorema de Stokes: igualdad entre una curva cerrada y una superficie

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_S \nabla \times \bar{F} \cdot d\bar{s} \quad (\text{la curva cerrada c delimita la superficie})$$

Identidades vectoriales:

- Operador Laplaciano: $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \Rightarrow \nabla^2 \bar{V} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}$ → Es un numero (función escalar)

- Rotacional de un gradiente: $\nabla \times (\nabla \cdot \bar{V}) = 0$

- Divergencia de un rotacional: $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{V}) = 0$ ↓ Gradiente de la divergencia

- Rotacional de un rotacional: $\nabla \times (\nabla \times \bar{V}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \bar{V}) - \nabla^2 \bar{V}$

- Divergencia de un producto vectorial: $\nabla \cdot (\bar{F} \times \bar{V}) = \bar{V} \cdot (\nabla \times \bar{F}) - \bar{F} \cdot (\nabla \times \bar{V})$

Ley de Coulomb:

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

[N] \propto 1

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad \left[\frac{N}{Coul} = \frac{V}{M} \right]$$

Fuerza por unidad de carga.

Ley de trabajo eléctrico:

$$\oint_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l} = V_b - V_a$$

diferencia de potencial.

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

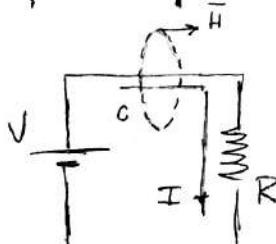
camino cerrado. Conservación del potencial. ($V_b = V_a$)

Aplicando teorema de Stokes:

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_S \nabla \times \bar{E} \cdot d\bar{s} = 0 \Rightarrow \nabla \times \bar{E} = 0$$

El campo eléctrico es irrotacional y conservativo.

Ley de Ampere:



Corriente Continua

$$\therefore \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I$$

Aplicando Stokes:

$$I = \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S \nabla \times \bar{H} \cdot d\bar{s}$$

$$I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} \quad \bar{J} \neq \text{densidad superficial de corriente}$$

$$\bar{J} = \frac{I}{\text{Sup}} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

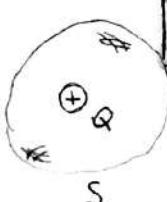
$$I [A/m]$$

$$\therefore \int_S \nabla \times \bar{H} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s} \Rightarrow \nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

Ecuación de densidad de continuidad eléctrica

Ley de Gauss para campo eléctrico:

$$Q = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{D} \cdot d\bar{s} \quad \text{dado } \bar{D} = \epsilon \bar{E} \rightarrow \text{densidad de desplazamiento eléctrico}$$



Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \nabla \cdot \bar{D} dV \quad \text{Como } Q = \int_V \rho dV \text{ donde } \rho \left[\frac{Coul}{m^3} \right] \rightarrow \text{densidad volumétrica de carga}$$

$$\therefore \int_V \nabla \cdot \bar{D} dV = \int_V \rho dV \Rightarrow \nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot \epsilon \bar{E} = \rho$$

Ley de Gauss para el campo magnético

$$\oint_S \mu\bar{H} d\bar{s} = \oint_S \bar{B} d\bar{s} = 0 \quad \text{dado que } \bar{B} = \mu\bar{H} \rightarrow \text{Densidad de flujo magnético [Wb]}$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \bar{B} d\bar{s} = \int_V \nabla \cdot \bar{B} dV = 0 \quad \therefore \quad \nabla \cdot \bar{B} = \nabla \cdot (\mu\bar{H}) = 0$$

No existen monopoles magnéticos.
Las líneas de flujo se cierran sobre sí mismas.

Resumen Ecuaciones de campos estáticos.: (Corriente continua?)

Forma integral

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

Forma Vectorial

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

$$[\nabla \cdot \bar{J} = 0]$$

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q$$

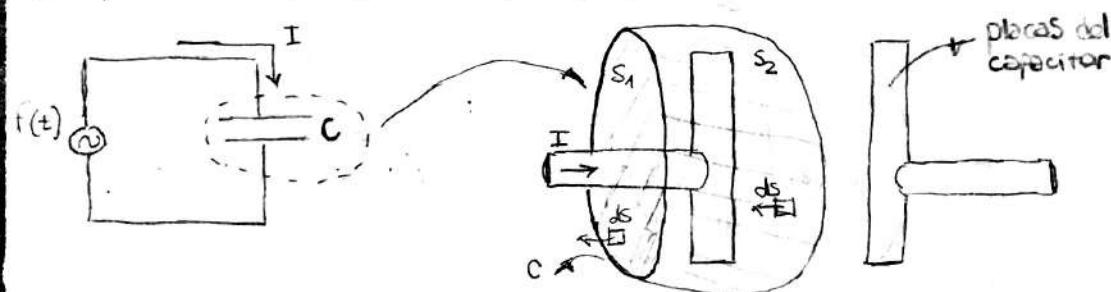
$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad \text{o} \quad \nabla \cdot (\epsilon\bar{E}) = \rho$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla \cdot (\mu\bar{H}) = 0$$

Ecuaciones de Maxwell

Maxwell analizó el mismo circuito (para una fuente variable en el tiempo) que utilizó Ampere para remplazar la resistencia por un capacitor.



$$\left. \begin{aligned} \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} &= \int_{S_1} \bar{J} \cdot d\bar{s}_1 = I \\ \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} &= \int_{S_2} \bar{J} \cdot d\bar{s}_2 = 0 \end{aligned} \right\} \text{incompatibilidad de la ley de Ampere. Las ecuaciones se contradicen.}$$

$S_1 + S_2$ forman una superficie cerrada (unida por C) :

$$\oint_{S_1 + S_2} \bar{J} \cdot d\bar{s} \neq 0 \quad \text{La corriente neta transportada a través de la superficie cerrada } S_1 + S_2 \text{ no es nula pq la carga se acumula en las placas del capacitor.}$$

$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = -I$ (I y $d\bar{s}$ son opuestos $\Rightarrow \cos 180^\circ = -1$) \therefore Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = \int_V \nabla \cdot \bar{J} dV = -I \quad \text{Como } I = \frac{dQ}{dt} \quad \wedge \quad Q = \int_V \rho dV \quad \wedge \quad \rho = \nabla \cdot \bar{D} \quad \therefore I = \frac{d}{dt} \int_V \nabla \cdot \bar{D} dV = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) dV$$

$$\therefore \int_V \nabla \cdot \bar{J} dV = - \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) dV \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = 0}$$

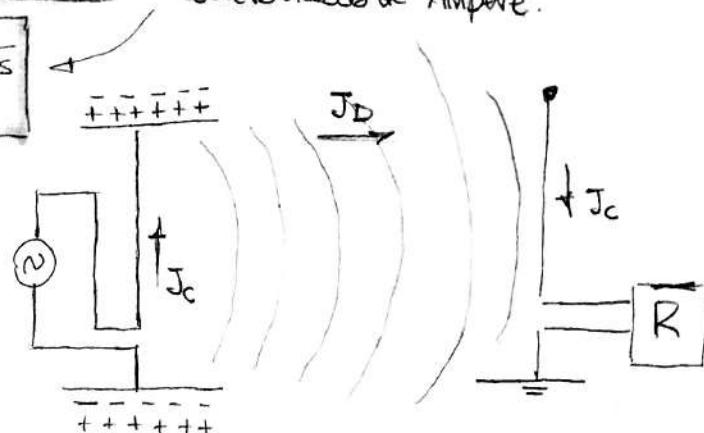
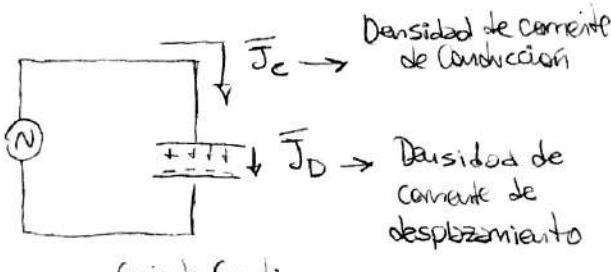
div. de un rotor
 $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ (Identidad) \rightarrow Esto tiene q ser el rotor de algo

Ecuación de continuidad de Maxwell

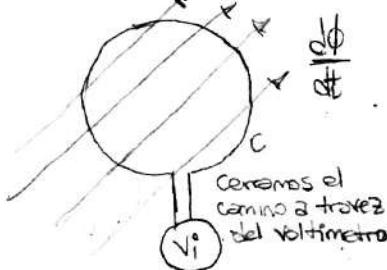
$$\therefore \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0$$

$$\therefore \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_c + \vec{J}_D \quad \leftarrow 1^{\circ} \text{ Ecación de Maxwell o ley Generalizada de Ampere.$$

$$\oint_C \vec{H} d\ell = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s} = \int_S \left(\epsilon \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$



$\oint_C \vec{E} d\ell = 0$. Maxwell toma el camino C (espira), le pone un Voltímetro y lo somete a un flujo magnético variable



$$\oint_C \vec{E} d\ell = -\frac{d\phi}{dt} = V_i \quad \wedge \quad \phi = \int_S \vec{B} d\vec{s} \wedge \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\oint_C \vec{E} d\ell = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{s} = -\mu \int_S \frac{d\vec{H}}{dt} d\vec{s} \quad \leftarrow 2^{\circ} \text{ Ecación de Maxwell o ley de Faraday Integral.}$$

Aplicando el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{E} d\ell = \int_S \nabla \times \vec{E} d\vec{s} \Rightarrow \int_S \nabla \times \vec{E} d\vec{s} = -\mu \int_S \frac{d\vec{H}}{dt} d\vec{s} \quad \therefore$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$(\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \sigma \vec{E})$$

Resumen Ecaciones de Maxwell

La forma integral podemos aplicarla siempre a la forma vectorial solo en medios continuos.

UNIDAD 3 : CONDICIONES DE CONTORNO

Analizaremos las condiciones que cumplen los campos en la frontera que separa dos medios. Los medios deben ser lineales \therefore debe ser homogéneo, isotropo, pasivo y continuo.

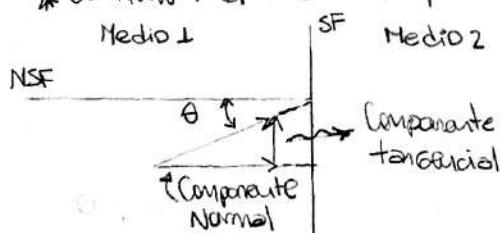
* homogéneo: μ, ϵ, σ cte y reales

* Pasivo: No existe ningún generador de cargas eléctricas.

* Isotropo:

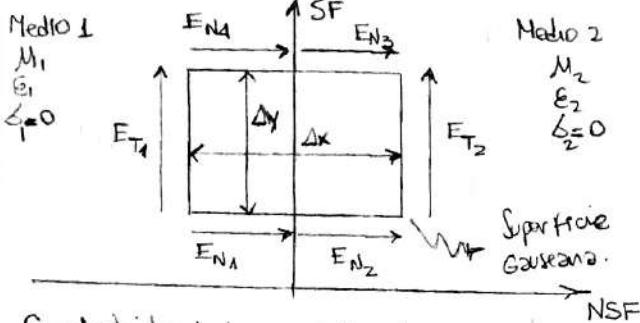
$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{J} \parallel \vec{E} \end{cases}$$

* Continuo: el medio no posee discontinuidades.



Componente tangencial de \vec{E} (Dielectrico-Dielectrico)

Como estamos tratando de dos medios, quiere decir que el medio no sera continuo \therefore usamos las ecuaciones de Maxwell en su forma integral.



Con el objeto de tener E los dos medios deben ser dielectricos. ($\epsilon = 0$)

De la 2º ecuación de Maxwell:

$$\oint_C \vec{E} d\ell = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ds$$

$$\oint_C \vec{E} d\ell = E_{N1} \cdot \frac{\Delta x}{2} + E_{N2} \cdot \frac{\Delta x}{2} + E_{T2} \cdot \Delta y - E_{N3} \frac{\Delta x}{2} - E_{N4} \frac{\Delta x}{2} - E_{T1} \Delta y$$

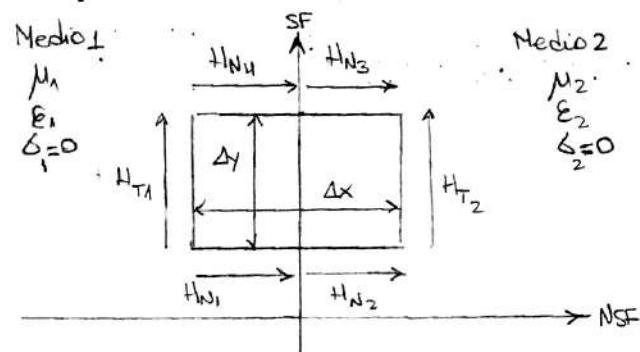
$$\therefore (E_{N1} + E_{N2} - E_{N3} - E_{N4}) \frac{\Delta x}{2} + (E_{T2} - E_{T1}) \Delta y = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

Haciendo $\Delta x \rightarrow 0$, nos queda:

$$\Delta y (E_{T2} - E_{T1}) = 0 \Rightarrow E_{T1} = E_{T2}$$

Componente tangencial de \vec{E} es continuo.

Componente tangencial de \vec{H} (Dielectrico-Dielectrico)



De la 1º ecuación de Maxwell:

$$\oint_C \vec{H} d\ell = \int_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) ds$$

$$\oint_C \vec{H} d\ell = H_{N1} \frac{\Delta x}{2} + H_{N2} \frac{\Delta x}{2} + H_{T2} \Delta y - H_{N3} \frac{\Delta x}{2} - H_{N4} \frac{\Delta x}{2} - H_{T1} \Delta y$$

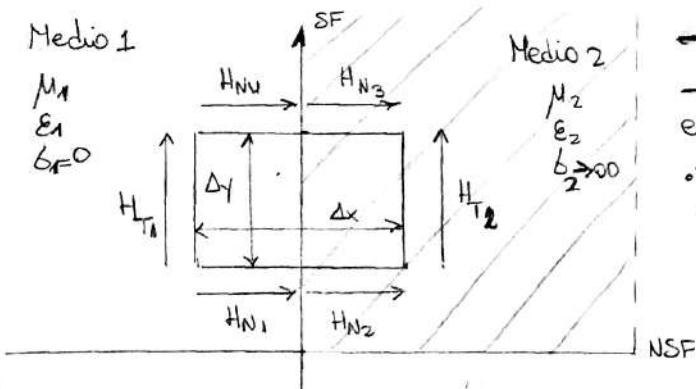
$$\therefore (H_{N1} + H_{N2} - H_{N3} - H_{N4}) \frac{\Delta x}{2} + (H_{T2} - H_{T1}) \Delta y = \left(\bar{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y$$

Haciendo $\Delta x \rightarrow 0$, tenemos:

$$\Delta y (H_{T2} - H_{T1}) = 0 \Rightarrow H_{T1} = H_{T2}$$

Componente tangencial de \vec{H} es continuo.

Campo tangencial de \vec{H} (Dielectrico-Conductor)



- En un medio conductor $\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$. B_T es discontinuo
- $\sigma_2 = \infty \wedge J_C = f(t) \therefore$ la profundidad de penetración o efecto skinning es cero (relación inversa a σ y frecuencia de la onda)
- \therefore En un tiempo muy corto 10^{-9} s (tiempo de relajación) la densidad de corriente \bar{J}_C se transforma en densidad de corriente lineal en la superficie \bar{J}_{CS} (en cc. $J_{CS} = 0$)

$$\bar{J}_C = \frac{I}{\Delta x \Delta y} \quad \wedge \quad \bar{J}_{CS} = \frac{I}{\Delta y} \quad \therefore \quad \bar{J}_C = \frac{\bar{J}_{CS}}{\Delta x}$$

de la 1º ecuación de Maxwell:

$$\oint_C \vec{H} d\ell = \int_S \left(\bar{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) ds = \int_S (\bar{J}_C + \bar{J}_D) ds$$

$$\oint_C \vec{H} d\ell = H_{N1} \frac{\Delta x}{2} + H_{N2} \frac{\Delta x}{2} + H_{T1} \Delta y - H_{N3} \frac{\Delta x}{2} - H_{N4} \frac{\Delta x}{2} - H_{T4} \Delta y$$

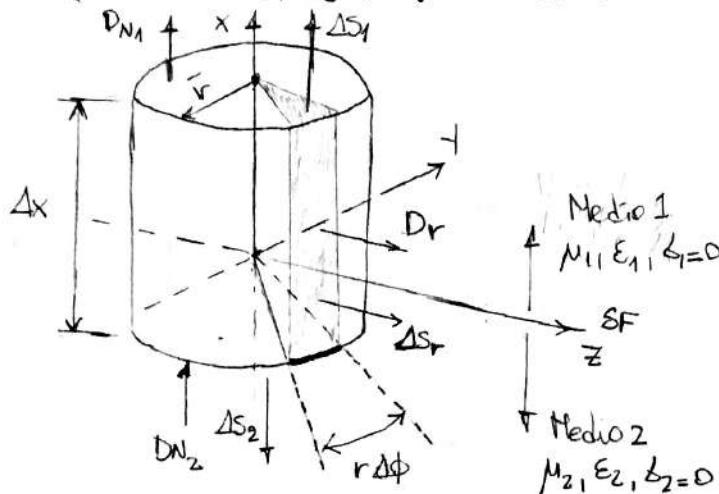
$$\therefore (H_{N1} + H_{N2} - H_{N3} - H_{N4}) \frac{\Delta x}{2} + (H_{T2} - H_{T1}) \Delta y = \frac{\bar{J}_{CS}}{\Delta x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \Delta x \Delta y$$

Haciendo $\Delta x \rightarrow 0$ y $H_{T2} = 0$ (debido a que $\vec{E} = 0$ en el conductor):

$$-H_{T1} \Delta y = \bar{J}_{CS} \Delta y \Rightarrow -H_{T1} = \bar{J}_{CS}$$

La componente tangencial de \vec{H} es discontinua, en el medio conductor aparece una densidad de corriente lineal en la superficie.

Componente normal de \bar{D} (Dielectrico - Dielectrico)



De la 3^o ecuación de Maxwell:

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q \quad \wedge \quad Q = \int_V \rho \cdot dv$$

$$-DN_2 \Delta S_2 + Dr \Delta S_r + DN_1 \Delta S_1 = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s}$$

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S \quad \wedge \quad \Delta S_r = \Delta x \cdot r \Delta \phi \therefore$$

$$(-DN_2 + DN_1) \Delta S + Dr \cdot r \Delta \phi \Delta x = \rho \Delta S \Delta x$$

Haciendo $\Delta x \rightarrow 0$, tenemos:

$$(-DN_2 + DN_1) \Delta S = 0 \Rightarrow \boxed{DN_1 = DN_2}$$

Componente normal de \bar{D}
es continua.

Componente normal de \bar{D} (Dielectrico - Conducto)

Sucede lo mismo que en el caso de la componente tangencial de \bar{H} . Las cargas se acumulan en la superficie generando así una densidad de carga superficial ρ_s . Tomamos la misma figura anterior pero con el medio 2 $N_2, \epsilon_2, \delta_2 = \infty$.

De la 3^o ecuación de Maxwell:

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q \quad \wedge \quad Q = \int_V \rho \cdot dv \quad \wedge \quad \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta x} = \frac{\rho_s}{\Delta x} \quad \therefore \rho_s = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$$

$$-DN_2 \Delta S_2 + Dr \Delta S_r + DN_1 \Delta S_1 = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} \quad \text{haciendo } \Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S, \Delta S_r = \Delta x \cdot r \Delta \phi \quad \wedge \quad \rho = \frac{\rho_s}{\Delta x}$$

$$(-DN_2 + DN_1) \Delta S + Dr \Delta x \cdot r \cdot \Delta \phi = \frac{\rho_s}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta x$$

Haciendo $\Delta x \rightarrow 0$ y recordando que en el conductor $E = 0 \rightarrow \bar{D} = 0$

$$DN_1 \cdot \Delta S = \rho_s \cdot \Delta S \Rightarrow \boxed{DN_1 = \rho_s}$$

La componente normal de \bar{D}
es discontinua. En el con-
ducto aparece ρ_s .

Componente normal de \bar{B} (Dielectrico - Dielectrico)

Tomando la misma figura: De la 4^o ecuación de Maxwell:

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \quad \therefore$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = -BN_2 \Delta S_2 + Br \Delta S_r + BN_1 \Delta S_1 = 0 \quad \text{haciendo } \Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S \quad \wedge \quad \Delta S_r = \Delta x \cdot r \cdot \Delta \phi$$

$$(-BN_2 + BN_1) \Delta S + Br \Delta x \cdot r \cdot \Delta \phi = 0 \quad \therefore \text{haciendo } \Delta x \rightarrow 0$$

$$-BN_2 + BN_1 = 0 \Rightarrow \boxed{BN_1 = BN_2}$$

Componente normal de \bar{B}
es continua.

Ecuación de Maxwell

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_S \frac{d\bar{E}}{dt} \cdot d\bar{s}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 0 \quad | \quad \delta_1 = 0, \delta_2 = \infty$$

$$E_{T1} = E_{T2}$$

$$\oint_S \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S (\bar{J} + \frac{d\bar{D}}{dt}) \cdot d\bar{s}$$

$$H_{T1} = H_{T2}$$

$$H_{T1} = \bar{E} \cdot s$$

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q$$

$$DN_1 = DN_2$$

$$DN_1 = \rho_s$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$$

$$BN_1 = BN_2$$

Resumen de Ec. de Maxwell
y condiciones de Contorno.

UNIDAD 4 : ECUACIÓN DE ONDA ELECTROMAGNETICA

Obtención de la ecuación de Helmholtz:



Trabajamos en un medio lineal (es decir homogéneo, isotropo, pasivo y continuo) El medio no tiene cargas libres entonces la densidad volumétrica de carga y la densidad de corriente son cero.

$$\begin{aligned} & \text{1º Condición: } \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = P = 0 \\ & \text{Condición: } \vec{J} = \epsilon \vec{E} = 0 \quad (\delta=0 \text{ Medio dielectrico}) \end{aligned}$$

→ Medio PASIVO

• Tomamos la 2º ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{aplicando rotar a ambos lados, tenemos}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \quad \text{como } \nabla \times \vec{H} = \delta \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore -\nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

1º Ecuación de Helmholtz.

• Tomamos la 1º ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \delta \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Aplicando rotar a ambos miembros.}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \times \left(\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \quad \text{como } \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\therefore -\nabla^2 \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$

2º Ecuación de Helmholtz.

Una Onda es plana cuando se propaga en una sola dirección. Ondas de este tipo se encuentran solo a una distancia muy grande de Generador. (2º Condición). Tomando la 1º ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{como } \nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z})$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{E} = \left(\underbrace{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}}_0 \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) \hat{z}$$

Por Condición de onda plana tomamos una sola dirección y una sola componente

$$\therefore \vec{E} = f(z, t) \hat{x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0} \quad \text{La solución a esta ecuación es la ecuación de Onda.}$$

Tomando la segunda ecuación de Helmholtz y procediendo de forma similar:

$$\vec{H} = f(z, t) \hat{y} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ecuaciones} \\ \text{de} \\ \text{Helmholtz.} \end{array} \right.$$

Ecuación de Onda: (forma fasorial)

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \bar{H} = \delta \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \end{array} \right\} \text{Haciendo } \bar{E} = E_0 e^{j\omega t} \wedge \bar{H} = H_0 e^{j\omega t} \quad \therefore \text{sustituyendo en } ① \text{ y } ②$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = j\omega E_0 e^{j\omega t} \wedge \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = j\omega H_0 e^{j\omega t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times H_0 e^{j\omega t} = \delta \cdot E_0 e^{j\omega t} + \varepsilon j\omega E_0 e^{j\omega t} = (\delta + j\omega \varepsilon) E_0 e^{j\omega t} \\ \nabla \times E_0 e^{j\omega t} = -j\omega \mu H_0 e^{j\omega t} \end{array} \right\} \text{Primera y segunda ecuación de Maxwell en forma fasorial}$$

Tomando el rotar de ②, queremos encontrar una expresión que sea todo en función de \bar{E} :

$$\nabla \times (\nabla \times E_0 e^{j\omega t}) = -j\omega \mu (\nabla \times H_0 e^{j\omega t}) = -j\omega \mu (\delta + j\omega \varepsilon) E_0 e^{j\omega t} = -j^2 E_0 e^{j\omega t} \quad \text{por ser medio libre de cargas}$$

$$\text{Como } \nabla \times (\nabla \times \bar{F}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{F}) - \nabla^2 \bar{F} \quad \therefore \nabla \times (\nabla \times E_0 e^{j\omega t}) = \nabla(\nabla \cdot E_0 e^{j\omega t}) - \nabla^2 E_0 e^{j\omega t} = -j^2 E_0 e^{j\omega t}$$

$$-\nabla^2 E_0 e^{j\omega t} = -j^2 E_0 e^{j\omega t}$$

$E_0 = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$. Como hicimos en las Ec. de Helmholtz anteriormente de los 9 términos que nos genera el Laplaciano tomamos una sola componente y una sola dirección. (onda plana)

$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2 E_x e^{j\omega t}}{\partial z^2} - j^2 E_x e^{j\omega t} = 0}$$

Ec. de Helmholtz en forma fasorial.

La solución a esta ecuación, es la ecuación de Onda:

$$E_x(z, t) = (C_1 e^{-\alpha z} + C_2 e^{\alpha z}) e^{j\omega t} \quad \delta = \alpha + j\beta$$

$$\delta = \sqrt{j\omega \mu (\delta + j\omega \varepsilon)} = \alpha + j\beta \quad \begin{array}{l} \text{de esta rel.} \\ \text{despejamos } \alpha \\ \text{y } \beta. \end{array}$$

α cte. de fase.
 β cte. de attenuación.
 $j\delta$ de propagación.

∴ Sustituyendo α por su equivalente:

$$E_x(z, t) = [C_1 e^{-(\alpha+j\beta)z} + C_2 e^{(\alpha+j\beta)z}] e^{j\omega t} = C_1 e^{-\alpha z} \cdot e^{j(wt-\beta z)} + C_2 e^{\alpha z} \cdot e^{j(wt+\beta z)}$$

(Como $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ y tomando la parte real por ser el medio homogéneo:

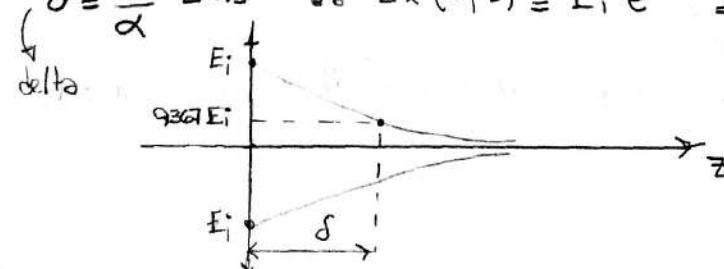
$$E_x(z, t) = \underbrace{C_1 e^{-\alpha z} \cdot \cos(wt - \beta z)}_{\text{Onda Incidente}} + \underbrace{C_2 e^{\alpha z} \cdot \cos(wt + \beta z)}_{\text{Onda Reflejada}} \quad \text{Considerando } C_1 = E_i, C_2 = E_r, \text{ y desfase inicial}$$

$$E_x(z, t) = E_i e^{-\alpha z} \cos(wt - \beta z + \phi) + E_r e^{\alpha z} \cos(wt + \beta z + \phi)$$

Ecuación de Onda para el campo eléctrico.

Constante de profundidad de penetración:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} [\text{m}] \quad \therefore E_x(z, t) = E_i e^{-\alpha z} = E_i e^{-\frac{\alpha z}{\delta}} = E_i e^{-\frac{1}{\delta}} = E_i e^{-1} = 0,3678 E_i$$



Nos indica a qué distancia la onda se atenua el 36,78%.

Obtención de la ecuación de \vec{H} :

$$\nabla \times E_0 e^{j\omega t} = -j\omega \mu H_0 e^{j\omega t} \quad 2^{\text{a}} \text{ ecuación de Maxwell en forma tensorial}$$

$$\therefore H_0 e^{j\omega t} = \frac{-1}{j\omega \mu} \nabla \times (E_0 e^{j\omega t}) = \frac{-1}{j\omega \mu} \cdot \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{-1}{j\omega \mu} \frac{\partial (E_x e^{j\omega t})}{\partial z} \hat{y}$$

↑ tomamos una sola dirección y una sola componente.

$$\text{como } E_x(z, t) = (E_i e^{-\delta z} + E_r e^{\delta z}) e^{j\omega t}$$

$$H_0 e^{j\omega t} = \frac{-1}{j\omega \mu} \frac{\partial (E_x e^{j\omega t})}{\partial z} \hat{y} \Rightarrow H_0 = \frac{-1}{j\omega \mu} \frac{\partial (E_x)}{\partial z} \hat{y}$$

$$\therefore \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = (-\delta E_i e^{-\delta z} + \delta E_r e^{\delta z}) e^{j\omega t} = \gamma (E_i e^{-\delta z} - E_r e^{\delta z}) e^{j\omega t}$$

$$\therefore H_y(z, t) = \frac{\gamma}{j\omega \mu} (E_i e^{-\delta z} - E_r e^{\delta z}) e^{j\omega t}$$

$$\therefore H_y(z, t) = \frac{1}{j\omega \mu} (E_i e^{-\delta z} - E_r e^{\delta z}) e^{j\omega t} \quad \text{etc}$$

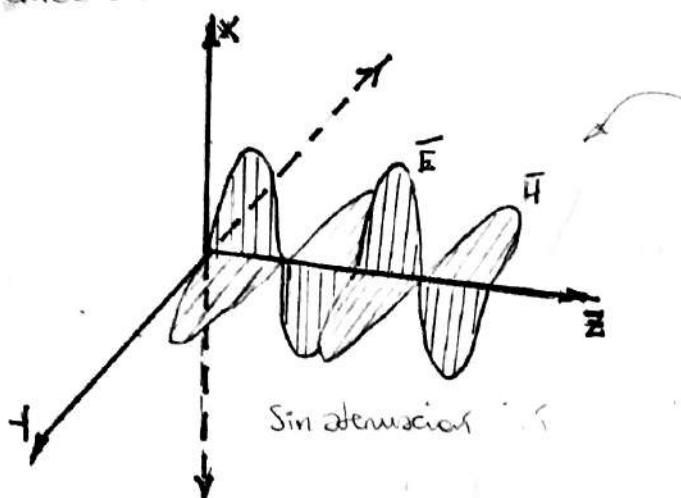
definimos la impedancia intrínseca del medio como $\eta = \frac{j\omega \mu}{\gamma} \wedge H_i = \frac{E_i}{\eta} \wedge H_r = \frac{E_r}{\eta}$

$$\therefore H_y(z, t) = (H_i e^{-\delta z} - H_r e^{\delta z}) e^{j\omega t} \quad \text{recordando } \gamma = \alpha + j\beta \wedge \text{ tomando la parte real del fasor mas un desfase } \phi.$$

$$\therefore H_y(z, t) = H_i e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi) + H_r e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi)$$

Ecuación de Onda para el campo magnético

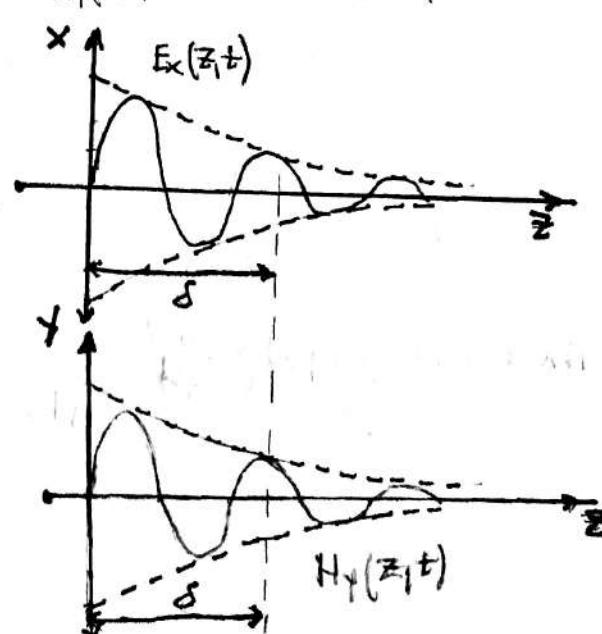
La ecuación de onda completa es $E_x(z, t) \wedge H_y(z, t)$. El producto vectorial $\vec{E} \times \vec{H}$ nos da la dirección de avance de la onda.



Onda en un medio lineal.

$$E_x(z, t) = E_i e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y(z, t) = H_i e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$



Calculo de la impedancia intrínseca del medio:

$$\eta \rightarrow f(\mu, \epsilon, \delta, \text{fre})$$

$$\eta = \frac{j\omega M}{\delta^2} \text{ como } \delta^2 = j\omega\mu(\delta + j\omega\epsilon) \quad \therefore \eta = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega M(\delta + j\omega\epsilon)}} = \sqrt{\frac{(j\omega M)^2}{j\omega\mu(\delta + j\omega\epsilon)}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega M}{j\omega\epsilon\left(\frac{\delta}{j\omega\epsilon} + 1\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{M}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - j\frac{\delta}{\omega\epsilon}}} \quad 1 - j\frac{\delta}{\omega\epsilon} \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega\epsilon}\right)^2} \cdot e^{j\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\delta}{\omega\epsilon}} \text{ complejo en forma fasorial.}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{M}{\epsilon}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega\epsilon}\right)^2} \cdot e^{j\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\delta}{\omega\epsilon}}} = \frac{\sqrt{\frac{M}{\epsilon}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega\epsilon}\right)^2}} \cdot e^{-j\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\delta}{\omega\epsilon}}$$

haciendo $F.D = \frac{\delta}{\omega\epsilon}$ y $\tan^{-1}\theta = \tan^{-1}(F.D)$

$$\therefore \boxed{\eta = \frac{\sqrt{\frac{M}{\epsilon}}}{\sqrt{1 + F.D^2}} \cdot e^{-j\frac{1}{2}\tan^{-1}F.D}}$$

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\frac{M}{\epsilon}}}{\sqrt{1 + F.D^2}} \quad \text{y} \quad \Theta\eta = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} F.D; \quad |\eta| = \sqrt{\frac{M\epsilon}{\epsilon_0}} = 5775 \Omega$$

$F.D \rightarrow$ Factor de disipación. Nos indica si el medio se comporta como un conductor o no. Variando la frecuencia, el medio se ve a comportar como conductor o dielectrónico.

$$F.D = \frac{\Xi_c}{\Xi_d} = \frac{\epsilon}{\omega\epsilon\mu} = \frac{\delta}{\omega\epsilon} \quad \begin{array}{l} F.D > 1 \text{ conductor} \\ F.D < 1 \text{ Dielectrónico} \end{array}$$

Constante de atenuación y Constante de fase:

Recordando que $\delta' = \alpha + j\beta$ y $\delta'^2 = j\omega\mu(\delta + j\omega\epsilon)$, tenemos:

$$j\omega\mu(\delta + j\omega\epsilon) = (\alpha + j\beta)^2 \Rightarrow j\omega\mu\delta - \omega^2\mu\epsilon = \alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 \Rightarrow -\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\delta = (\alpha^2 - \beta^2) + j2\alpha\beta$$

Igualando parte real y parte imaginaria:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\epsilon \quad (1) \\ 2\alpha\beta = \omega\mu\delta \quad (2) \end{array} \right.$$

despejamos α de la (2) y sustituimos en (1):

$$\alpha = \frac{\omega\mu\delta}{2\beta} \quad \therefore \left(\frac{\omega\mu\delta}{2\beta} \right)^2 - \beta^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0 \quad \text{multiplicamos por } -\beta^2 \text{ y reordenamos}$$

$$\beta^4 - \beta^2\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\omega\mu\delta}{2} \right)^2 = 0 \quad \therefore \text{aplicando Baskara}$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \right)^2 + \left(\frac{\omega\mu\delta}{2} \right)^2} \quad \text{tomaremos solo la parte positiva la negativa no se cumple físicamente.}$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\omega\mu\delta}{\omega^2\mu\epsilon} \right)^2 \right]} = \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} + \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega\epsilon} \right)^2} \quad \boxed{\beta^2 = \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} + \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega\epsilon} \right)^2} \quad (3)}$$

$$\therefore \boxed{\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega\epsilon} \right)^2} \right]}} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right] \quad \text{constante de fase.}$$

Tomando ③ y sustituyéndolo en ① tenemos:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} + \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega \epsilon}\right)^2} - \omega^2 \mu \epsilon = -\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} + \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega \epsilon}\right)^2}$$

$$\therefore \alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega \epsilon}\right)^2} \right]} \quad \left[\frac{\text{Neper}}{\text{m}} \right] \quad \text{Constante de atenuación.}$$

- Para el caso de un medio sin cargas libres ($\delta=0$):

$$\beta|_{\delta=0} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \text{Como } N_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \lambda \cdot f \Rightarrow \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{1}{\lambda f}$$

$$\therefore \beta = \frac{\omega}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda f} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

Propagación de ondas en un buen dielectro:

Para este caso $1 > \frac{\delta}{\omega \epsilon}$, tenemos (falta demostración)

$$N_p = N_0 \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \quad \text{Se reduce ligeramente la velocidad de propagación de la onda.}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \left(1 + j \frac{1}{2} \frac{\delta}{\omega \epsilon} \right) \quad \text{Se añade un componente reactivo a la impedancia.}$$

Propagación de la onda en un buen conductor:

para el caso $1 \leq \frac{\delta}{\omega \epsilon}$, tenemos (falta demostración):

$$N_p = \sqrt{\frac{2\omega}{\delta \mu}} \quad \text{debido a que } \beta \text{ es muy grande la velocidad de propagación será muy pequeña en el conductor.}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\delta}} \cdot |45^\circ| \quad \text{Es pequeña y tiene componente reactiva muy pequeña.}$$

UNIDAD 5 : POLARIZACIÓN .

Definición de polarización de Onda:

Se entiende por polarización de una onda plana uniforme, al comportamiento temporal de la intensidad de campo eléctrico \vec{E} en un punto fijo del espacio. Para una onda plana uniforme que viaja en el sentido \hat{z} con vectores \vec{E} y \vec{H} situados en el plano $x-y$, podemos tener componentes de \vec{E} en x solamente, en y solamente o en x e y :-

$$E(z,t) = E_0 (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi).e$$

$$E_x(z,t) = \hat{i} \cdot E_0 \cos \phi \cos (wt - \beta z + \phi_x)$$

$$E_y(z,t) = \hat{j} \cdot E_0 \sin \phi \cos (wt - \beta z + \phi_y)$$

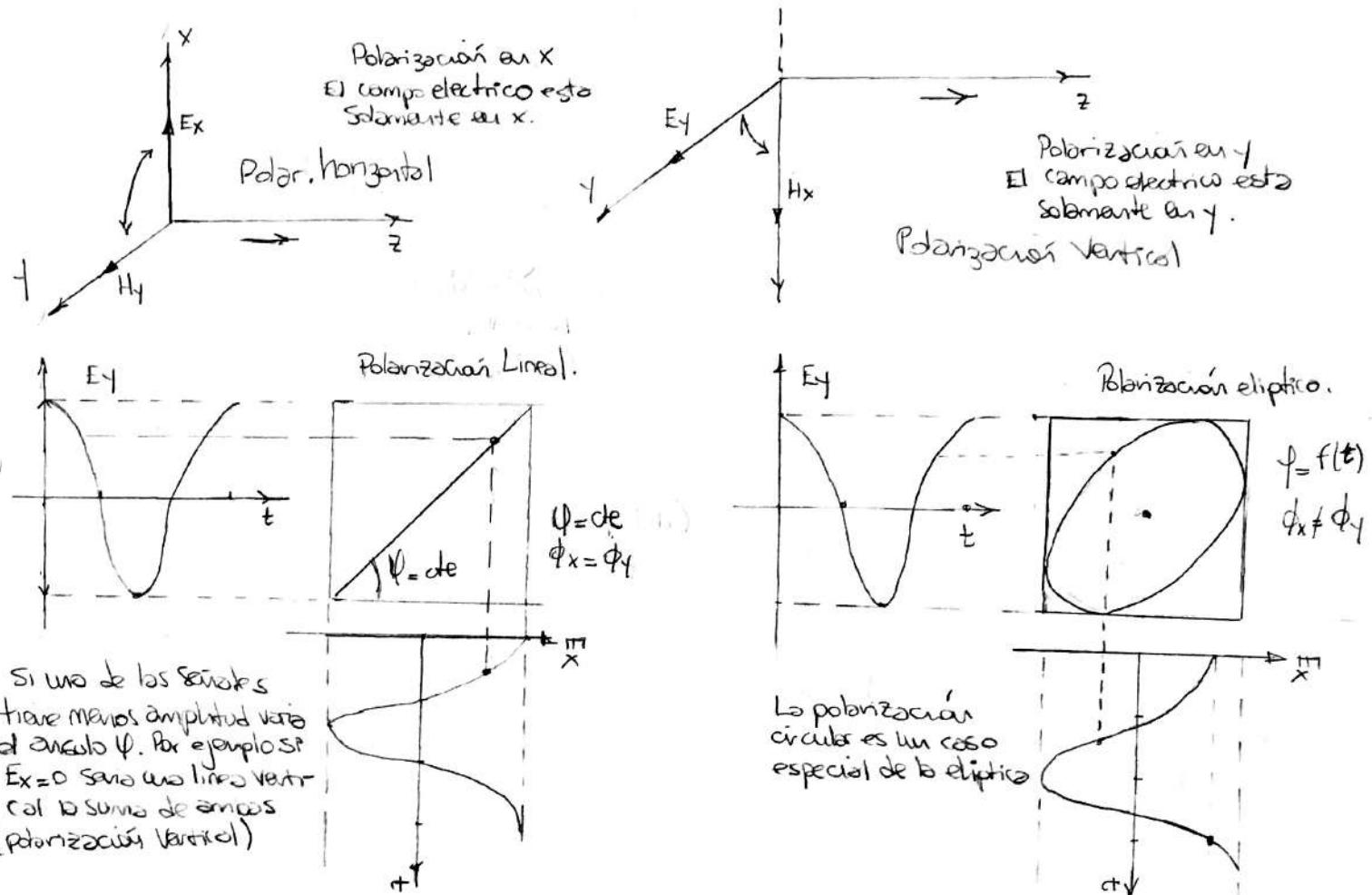
$$j(wt - \beta z + \phi_x + \phi_y)$$

E_0 es un vector complejo.
 $P = \frac{E_y}{E_x}$ Razón de polarización

dicho esto, los tipos de polarización serán:

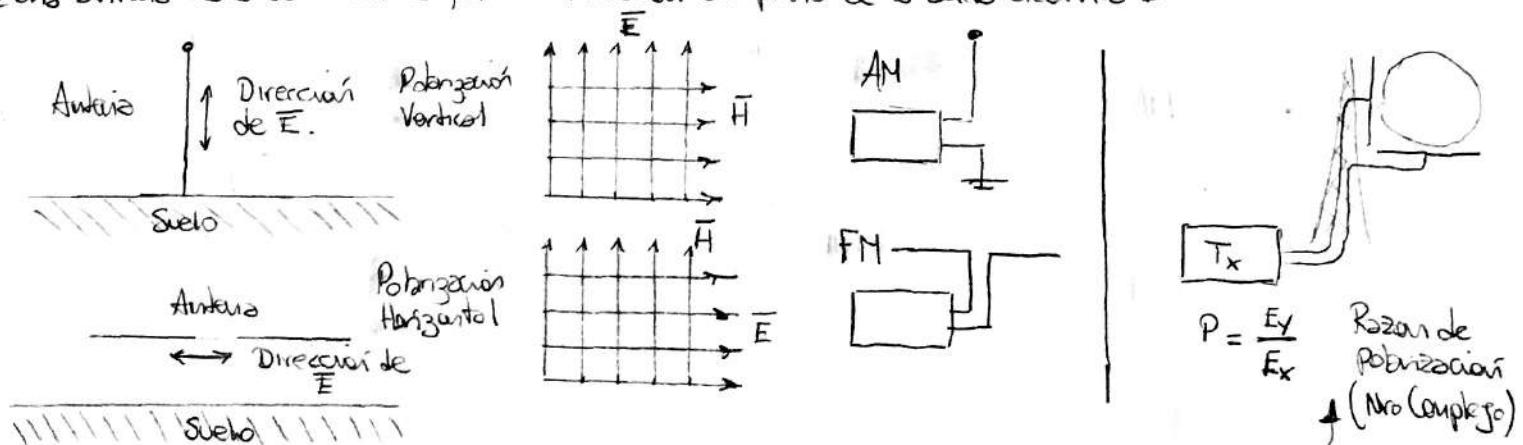
- 1.) Polarización lineal $\Rightarrow \phi_x = \phi_y$ $\psi = \text{cte}$. E_x y E_y están en fase
- 2.) Polarización elíptica $\Rightarrow \phi_x \neq \phi_y$ $\psi = f(t)$. E_x y E_y están desfasados
- 3.) Polarización Circular $\Rightarrow \phi_x \pm \phi_y = \pm 90^\circ$, $|E_x| = |E_y|$; E_x y E_y están desfasados.

Como el campo eléctrico es paralelo al conductor se toma como referencia en la polarización.



Polarización de una antena:

Se refiere a la dirección de los campos magnéticos y eléctricos de dicha antena. La polarización de una antena está determinada por la dirección del plano de la onda eléctrica \vec{E} .



Existen antenas que辐射 con otros tipos de polarización inclinada, elíptica y Circular. Para la recepción de una onda polarizada verticalmente se necesita una antena Vertical (similar para horizontal). Se puede producir una onda de cualquier polarización convirtiendo ondas radiadas por un par de antenas dipolo cruzadas.

UNIDAD 6 : VECTOR DE POYNTING

Teorema de Poynting :

Los Ondas electromagnéticas tienen dos propósitos enviar información y transmitir energía. Tomando la 1^a ecuación de Maxwell en forma vectorial :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{J}_c = \nabla \times \vec{H} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \left[\frac{A}{m^2} \right] \text{ multiplicando ambos miembros por } \vec{E}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J}_c = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \left[\frac{V}{m} \right] \left[\frac{A}{m^2} \right] = \left[\frac{W}{m^3} \right] \text{ (wattos por unidad de volumen)}$$

Tomando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

$$\therefore \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} \Rightarrow \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \therefore \text{Sustituyendo}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J}_c = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ como } \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J}_c = -\mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \text{ como } -\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial \vec{H}^2}{\partial t} \text{ y } \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{E} \cdot \vec{J}_c = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial \vec{H}^2}{\partial t} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 + \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

densidad de energía magnética

densidad de energía eléctrica

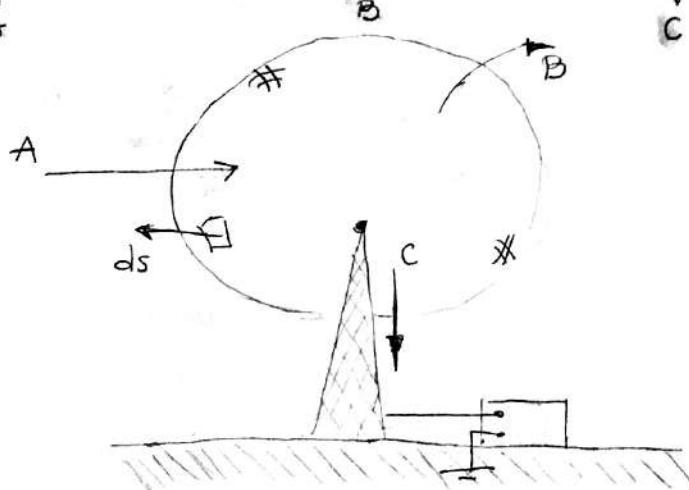
Hay que eliminar el m^3 para que nos de W \therefore integramos :

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_c dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 + \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) dV - \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV [W]$$

Por el teorema de la divergencia $\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV \therefore$ Sustituyendo y recordando

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 + \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}_c dV$$

Demonstración de la Conservación de potencia.



$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow \text{Potencia suministrada (entrante)} \\ B \rightarrow \text{Potencia entretenida} \\ C \rightarrow \text{Potencia consumida.} \end{array} \right.$

La potencia entrante es igual a la potencia entretenida mas la potencia consumida.

Siendo el Vector de Poynting $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} [W/m^2]$ al ser multiplicado escalarmente por la superficie curvada nos da la potencia entregada al volumen. \vec{P} es perpendicular a \vec{H} y \vec{E} y su dirección es la del avance de la onda.

Vector de Poynting, función del tiempo y del espacio:

dado la ecuación de onda plana en forma fasorial:

$$\bar{E}_x(z,t) = E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad [V/m]$$

$$\bar{H}_y(z,t) = H_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \quad [A/m] \Rightarrow \bar{P}(z,t) = \bar{E}_x(z,t) \times \bar{H}_y(z,t) = |\bar{E}_x(z,t)| |\bar{H}_y(z,t)| \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$\text{Como } \bar{E} \perp \bar{H} \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 1 \Rightarrow |\bar{P}(z,t)| = |\bar{E}(z,t)| |\bar{H}(z,t)|$$

- Análisis respecto del tiempo.

$$|\bar{P}(z,t)| = |E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}| \cdot |H_0 e^{j(\omega t - \beta z)}| \text{ Como la potencia solo corresponde a la parte real}$$

$$\operatorname{Re} |\bar{P}(z,t)| = |E_0 \cos(\omega t - \beta z)| \cdot |H_0 \cos(\omega t - \beta z)| = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - \beta z)$$

El tiempo solo es variable. Tomamos el valor medio:

$$\operatorname{Re} |\bar{P}(t)| = E_0 H_0 \frac{1}{T} \int_0^T [\cos^2(\omega t - \beta z)] dt \text{ Como } \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\operatorname{Re} |\bar{P}(t)| = E_0 H_0 \frac{1}{2T} \underbrace{\int_0^T dt}_{T} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^T \cos 2(\omega t - \beta z) dt}_{0} \Rightarrow \operatorname{Re} |\bar{P}(t)| = \frac{E_0 H_0}{2} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

- Análisis respecto del espacio:

Usando solo la parte que se propaga o se consume, obtenemos:

$$\operatorname{Re} |\bar{P}(z)| = |E_0 e^{-j\beta z}| \cdot |H_0 e^{-j\beta z}| \Rightarrow \operatorname{Re} |\bar{P}(z)| = E_0 H_0 \cdot e^{-j2\beta z} \quad [W/m^2]$$

■ Velocidad por densidad de energía: (densidad de potencia transportada)

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (b=0) \quad \gamma \quad W = W_E + W_H = \frac{1}{2} (\epsilon \bar{E}^2 + \mu \bar{H}^2) \quad \left[\frac{Joule}{m^3} \right]$$

Multiplicando estas dos ecuaciones tendremos la densidad de potencia transportada.

$$P_f = N_p \cdot W = \frac{1}{2\sqrt{\mu \epsilon}} (\mu \bar{H}^2 + \epsilon \bar{E}^2) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \bar{H}^2 + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \bar{E}^2 \right) \text{ Como } \eta = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}_{b=0} = \frac{\bar{E}}{\bar{H}} \quad [sr]$$

$$P_f = \frac{1}{2} \left(\bar{H} \eta \cdot \bar{H} + \frac{\bar{E}}{\eta} \bar{E} \right) = \frac{1}{2} (\bar{H} \bar{E} + \bar{E} \bar{H}) \Rightarrow P_f = \bar{E} \bar{H}$$

Es la magnitud de \bar{P} :-
la OEM llevará una densidad de
potencia P_f en los frentes de
onda.

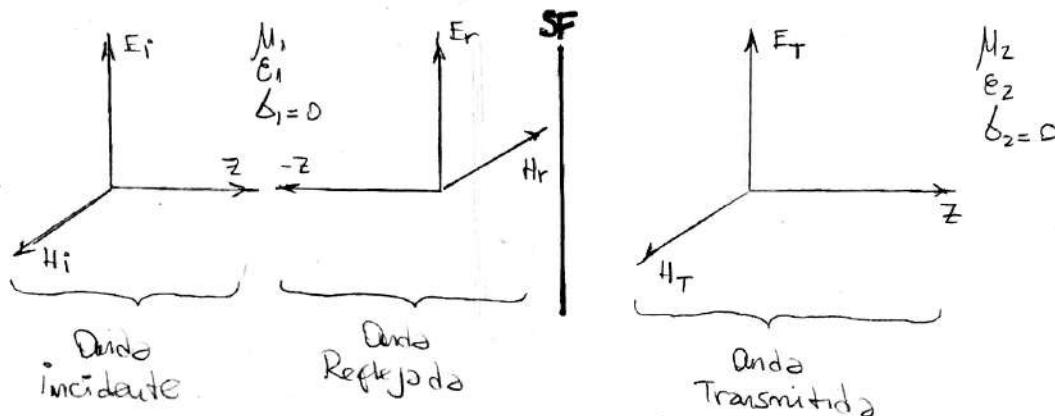
UNIDAD 7 : Reflexión normal entre dos medios dielectricos

Coeficientes:

Una onda plana incide normalmente sobre la superficie plana de un dielectrico perfecto, parte de la onda se transmite y parte se refleja. Un dielectrico perfecto es aquel que $\sigma = 0$ de manera que no haya perdida ni absorción de potencia en la propagación de la onda a través suyo. Recordando condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{T_1} &= \bar{E}_{T_2} \\ \bar{H}_{T_1} &= \bar{H}_{T_2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{tangenciales} \\ \text{normales} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{n1} &= \bar{D}_{n2} \\ \bar{B}_{n1} &= \bar{B}_{n2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{normales} \\ \text{normales} \end{array} \right\}$$



- donde :

- los impedancias serán:

$$\bar{E}_i + \bar{E}_r = \bar{E}_T \quad ①$$

$$\bar{H}_i + \bar{H}_r = \bar{H}_T \quad ②$$

$$\frac{\bar{E}_i}{\bar{H}_i} = \eta_1 = \sqrt{\frac{M_1}{\epsilon_1}} \quad ③$$

$$\frac{\bar{E}_r}{\bar{H}_r} = -\eta_1 = -\sqrt{\frac{M_1}{\epsilon_1}} \quad ④$$

$$\frac{\bar{E}_T}{\bar{H}_T} = \eta_2 = \sqrt{\frac{M_2}{\epsilon_2}} \quad ⑤$$

Coeficiente de reflexión de \bar{E} (Γ_E):

$$\text{de } ③: \bar{H}_i = \frac{\bar{E}_i}{\eta_1} \quad \text{de } ④: \bar{H}_r = -\frac{\bar{E}_r}{\eta_1} \quad \text{de } ⑤: \bar{H}_T = \frac{\bar{E}_T}{\eta_2} \quad \text{reemplazando en } ② \text{ queda}$$

$$\frac{\bar{E}_i}{\eta_1} - \frac{\bar{E}_r}{\eta_1} = \frac{\bar{E}_T}{\eta_2} \Rightarrow \frac{\bar{E}_i - \bar{E}_r}{\eta_1} = \frac{\bar{E}_T}{\eta_2} = \frac{\bar{E}_i + \bar{E}_r}{\eta_2} \Rightarrow \bar{E}_i \eta_2 - \bar{E}_r \eta_2 = \bar{E}_i \eta_1 + \bar{E}_r \eta_1$$

$$\bar{E}_i (\eta_2 - \eta_1) = \bar{E}_r (\eta_1 + \eta_2) \Rightarrow \boxed{\Gamma_E = \frac{\bar{E}_r}{\bar{E}_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}}$$

razón entre E_i e E_r

Coeficiente de reflexión de \bar{H} (Γ_H):

$$\Gamma_H = \frac{\bar{H}_r}{\bar{H}_i} = \frac{-\frac{\bar{E}_r}{\eta_1}}{\frac{\bar{E}_i}{\eta_1}} = \frac{-\bar{E}_r}{\bar{E}_i} = \boxed{\Gamma_H = \frac{-\bar{E}_r}{\bar{E}_i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}}$$

Coeficiente de refracción de \bar{E} (T_E):

Cociente entre \bar{E} transmitido sobre el incidente:

$$T_E = \frac{\bar{E}_T}{\bar{E}_i} = \frac{\bar{E}_i + \bar{E}_r}{\bar{E}_i} = 1 + \frac{\bar{E}_r}{\bar{E}_i} = 1 + \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 + n_2 + n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \Rightarrow T_E = \frac{\bar{E}_T}{\bar{E}_i} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\boxed{T_E = \frac{\bar{E}_T}{\bar{E}_i} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}}$$

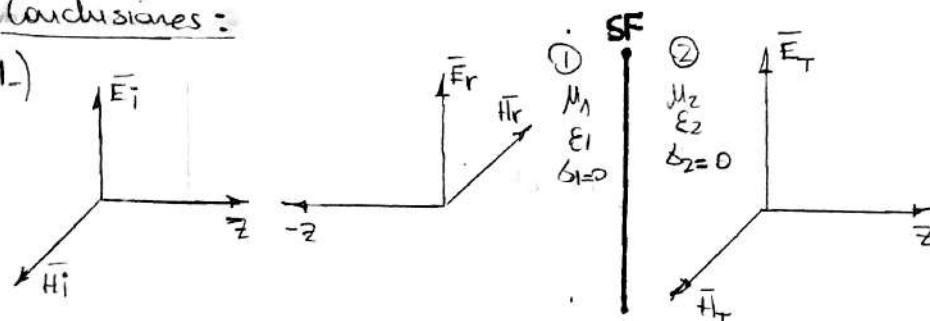
Coeficiente de refracción de \bar{H} (T_H):

$$T_H = \frac{\bar{H}_T}{\bar{H}_i} = \frac{\bar{H}_i + \bar{H}_r}{\bar{H}_i} = 1 + \frac{\bar{H}_r}{\bar{H}_i} = 1 + \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 + n_2 + n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow T_H = \frac{\bar{H}_T}{\bar{H}_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\boxed{T_H = \frac{\bar{H}_T}{\bar{H}_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$

Conclusiones:

1.)

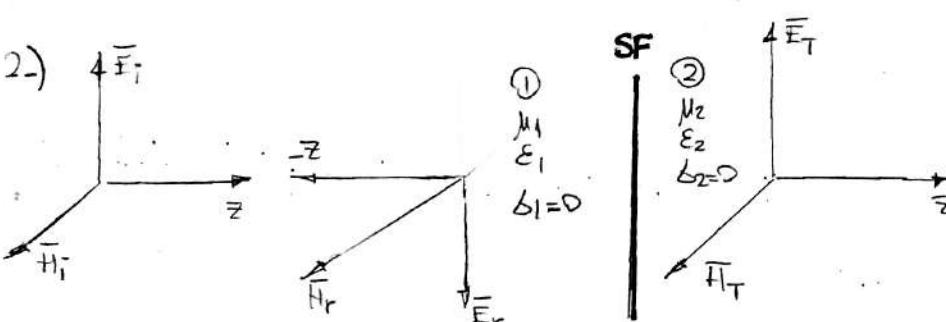


$$n_2 > n_1$$

$$\Gamma_E = \frac{E_r}{E_i} > 0$$

$$\Gamma_H = \frac{H_r}{H_i} < 0$$

2.)



$$n_1 > n_2$$

$$\Gamma_E = \frac{E_r}{E_i} < 0$$

$$\Gamma_H = \frac{H_r}{H_i} > 0$$

3.) Si $n_1 = n_2 \Rightarrow \Gamma_E = \Gamma_H = 0$ No hay reflexión.

Impedancia de campo:

Es la relación entre el campo eléctrico total y el campo magnético total. En cualquier dielectrónico $\delta=0 \Rightarrow \delta' = j\beta \Rightarrow$

$$E_x(z) = E_i e^{-j\beta z} + E_r e^{+j\beta z} = E_i e^{-j\beta z} + E_r e^{j\beta z} = E_i e^{-j\beta z} \left(1 + \frac{E_r e^{j\beta z}}{E_i e^{-j\beta z}} \right)$$

$$E_x(z) = E_i e^{-j\beta z} \left(1 + \frac{E_r}{E_i} e^{j2\beta z} \right) = E_i e^{-j\beta z} [1 + \Gamma_E(z)]$$

$$\text{donde } \boxed{\Gamma_E(z) = \frac{E_r}{E_i} e^{j2\beta z}}$$

Es el Coeficiente de reflexión complejo del campo \bar{E} .

∴ los campos \bar{E} y \bar{H} pueden expresarse como:

$$E_x(z) = E_i e^{-j\beta z} [1 + \Gamma_E(z)]$$

$$H_y(z) = \frac{E_i}{\eta} e^{-j\beta z} [1 - \Gamma_E(z)] \Rightarrow \Gamma_H(z) = -\Gamma_E(z)$$

$$Z(z) = \frac{I_x(z)}{H_y(z)} = \frac{E_i e^{-j\beta z} [1 + \Gamma_E(z)]}{E_r e^{j\beta z} [1 - \Gamma_E(z)]} \Rightarrow Z(z) = n_1 \frac{1 + \Gamma_E(z)}{1 - \Gamma_E(z)}$$

Impedancia de campo en función de $\Gamma_E(z)$.

desarrollando un poco más:

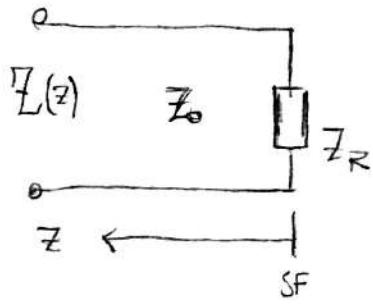
$$Z_1(z) = n_1 \cdot \frac{1 + \frac{E_r}{E_i} e^{j2\beta z}}{1 - \frac{E_r}{E_i} e^{j2\beta z}} = n_1 \cdot \frac{\frac{e^{j\beta z} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} e^{-j\beta z}}{e^{j\beta z} - \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} e^{-j\beta z}}}{n_2 + n_1} = n_1 \cdot \frac{e^{j\beta z} (n_1 + n_2) + e^{-j\beta z} (n_2 - n_1)}{e^{j\beta z} (n_2 + n_1) - e^{-j\beta z} (n_2 - n_1)}$$

$$Z_1(z) = n_1 \cdot \frac{n_1 e^{j\beta z} + n_2 e^{j\beta z} + n_2 e^{-j\beta z} - n_1 e^{-j\beta z}}{n_2 e^{j\beta z} + n_1 e^{j\beta z} - n_2 e^{-j\beta z} + n_1 e^{-j\beta z}} = n_1 \cdot \frac{n_2 (e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}) + n_1 (e^{j\beta z} - e^{-j\beta z})}{n_2 (e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}) + n_1 (e^{j\beta z} + e^{-j\beta z})}$$

$$Z(z) = n_1 \cdot \frac{2n_2 \cos(\beta z) + j2n_1 \operatorname{Sen}(\beta z)}{j2n_2 \operatorname{Sen}(\beta z) + 2n_1 \cos(\beta z)} \Rightarrow Z(z) = n_1 \frac{n_2 + jn_1 \operatorname{tg}(\beta z)}{n_1 + jn_2 \operatorname{tg}(\beta z)}$$

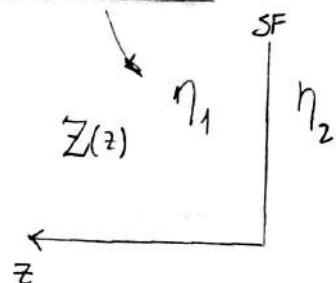
Impedancia de campo en función de n_1 , n_2

impedancia de campo para una línea de transmisión:



$n_1 = Z_0 \rightarrow$ impedancia característica

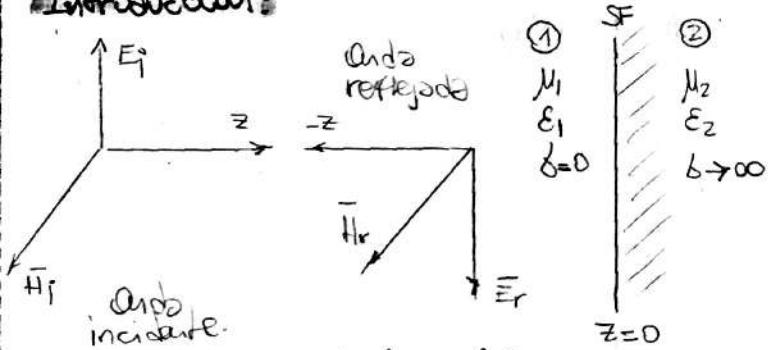
$n_2 = Z_R \rightarrow$ impedancia de carga.



$$Z_1(z) = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \operatorname{tg}(\beta z)}{Z_0 + jZ_R \operatorname{tg}(\beta z)}$$

UNIDAD 8 : REFLEXIÓN NORMAL SOBRE UN CONDUCTOR

Introducción:

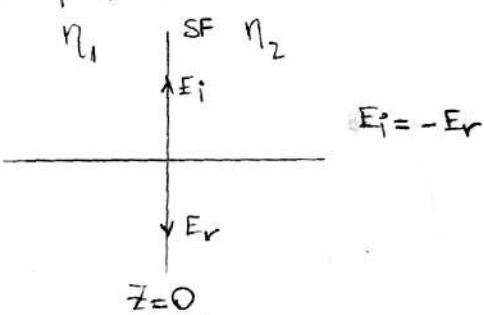


Como no puede haber pérdidas en el interior de un conductor perfecto no puede absorber energía. \therefore En el caso de una onda plana propagándose en el aire que incide normalmente en la superficie de un conductor perfecto, esta se refleja totalmente. Las amplitudes de \bar{E} y \bar{H} de la onda reflejada son las mismas que la onda incidente. \bar{E} y \bar{H} son cero en el interior del conductor.

Cálculo del campo eléctrico total:

$$E_{xT}(z) = E_i e^{-j\beta z} + E_r e^{j\beta z} \quad \delta = \alpha + j\beta \operatorname{cosec} \theta = 0 \Leftrightarrow \delta = j\beta$$

En la Superficie de frontera $E_{T1} = E_{T2} = 0$, por lo que en la SF ($z=0$) tendremos:



La componente tangencial debe ser continua al atravesarse la superficie límite de medios. Y \bar{E} es cero en el interior del conductor esto requiere que la suma de los campos eléctricos de la onda incidente y reflejada sea cero en $z=0$.

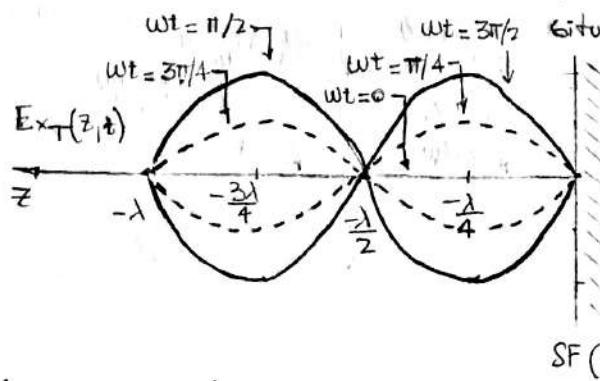
E_r tiene fase inversa a E_i al reflejarse

$$E_{x_T}(z) = E_i e^{-j\beta z} - E_i e^{+j\beta z} = -E_i (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = -2j E_i \operatorname{sen}(\beta z)$$

En función del tiempo y del espacio será:

$$E_{x_T}(z,t) = \operatorname{Re}[-2j E_i \operatorname{sen}(\beta z) \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[-2j \operatorname{sen} \beta z \cdot \cos \omega t + 2E_i \operatorname{sen} \beta z \cdot \operatorname{sen} \omega t]$$

$$\therefore E_{x_T}(z,t) = 2E_i \operatorname{sen}(\beta z) \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$



Es una onda estacionaria que no se desplaza. Es paro en la SF y a múltiplos de media longitud de Onda. Tiene valores máximos doble de la onda incidente a múltiplos impares de cuartos de longitud de onda.

Conductor perfecto.

En una onda progresiva los max y min cambian de posición con el tiempo, en una onda estacionaria los Max y min no varían de posición.

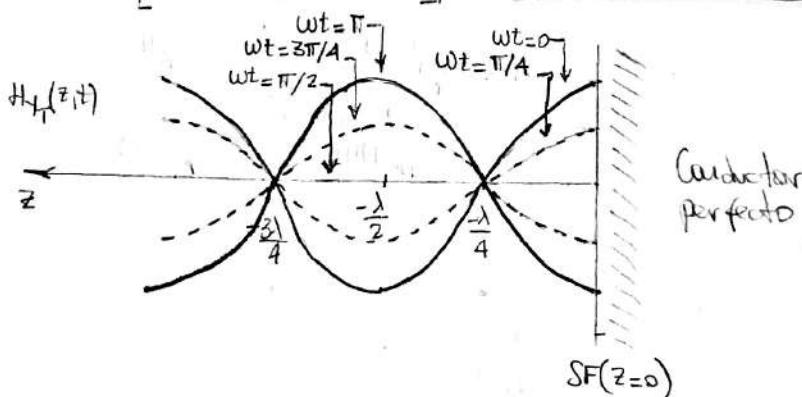
Cálculo del campo magnético total:

Debido a que en la SF E invierte la fase, al mismo, tendremos que $H_i = H_r$ (no se pueden invertir los dos):

$$H_{y_T}(z) = H_i e^{-j\beta z} + H_r e^{+j\beta z} = H_i (e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}) = 2 H_i \cos(\beta z)$$

En función del tiempo y del espacio:

$$H_{y_T}(z,t) = \operatorname{Re}[2 H_i \cos(\beta z) \cdot e^{j\omega t}] \Rightarrow H_{y_T}(z,t) = 2 H_i \cos(\beta z) \cos \omega t$$



Es una onda estacionaria su valor máximo a distancias múltiplos de media longitud de onda y sus ceros a distancias múltiplos impares de cuartos de longitud de onda.

(Como el campo eléctrico requeriría una inversión de fase para producir campo nulo en SF la intensidad de campo magnético debe reflejarse sin inversión de fase (sino no habrá inversión de sentido de propagación de onda).

Los campos dentro de un medio perfectamente conductor son nulos pero en SF deben generarse corriente superficial $J_{cs} = H_{y_T} [A/m]$

$E_{x_T}(z,t) \times H_{y_T}(z,t)$ están desfasados 90°, $\frac{\lambda}{4}$ en el espacio o $\frac{\pi}{2}$ en el tiempo.
Crank solo representa los valores max. del campo total.

UNIDAD 9 : CÁLCULO ANALÍTICO Y GRÁFICO EN REFLEXIÓN NORMAL

Distribución de tensión y corriente en medios con reflexión:

Línea de transmisión con carga a circuito abierto:

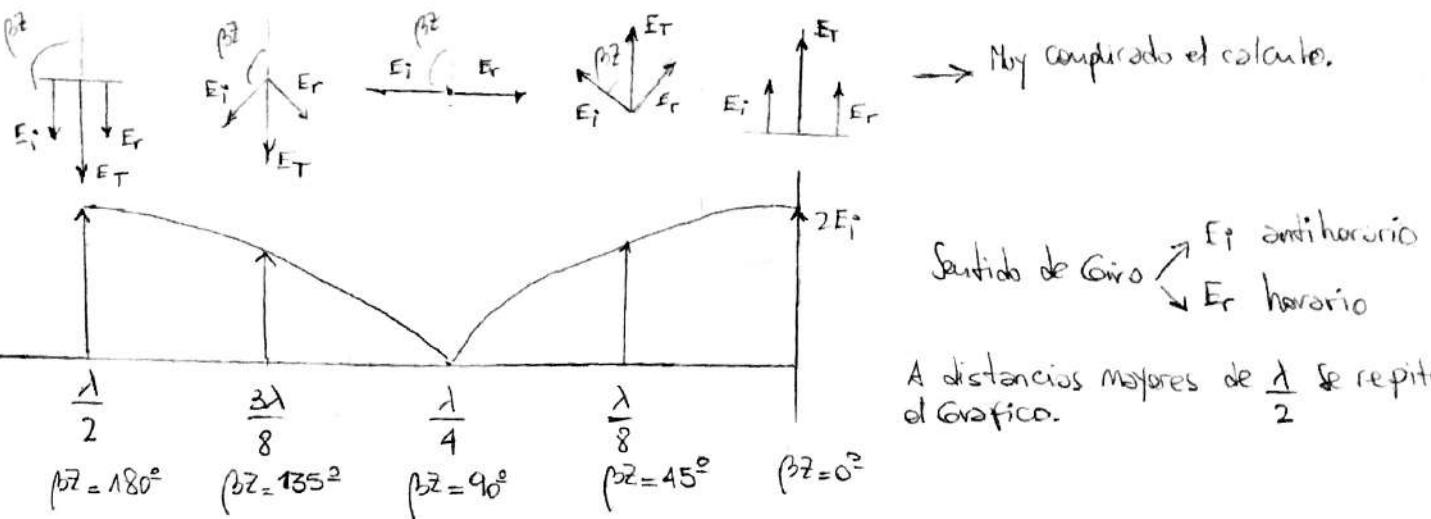
Para simplificar el análisis hacemos $\alpha = 0$. Cuando la impedancia de carga Z_R es infinita.

$$\Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_0 + Z_R} = |\Gamma| \angle \theta = 1 \angle 0^\circ$$

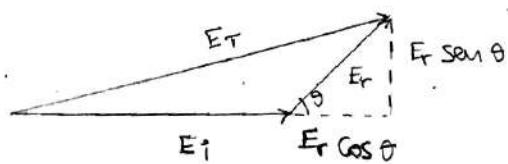
En estas condiciones en la carga:

$$E_i \wedge E_r \left\{ \begin{array}{l} \text{= magnitud} \\ \text{= en fase} \end{array} \right\} E_p = E_r = \frac{E_T}{2}$$

$$H_i \wedge H_r \left\{ \begin{array}{l} \text{= magnitud} \\ \text{opuesta en fase} \end{array} \right\} \text{Porque la corriente debe ser cero en } z=0 \text{ por ser } Z_R \rightarrow \infty.$$



Teorema del Coseno:



$$E_T^2 = (E_i + E_r \cos \theta)^2 + (E_r \sin \theta)^2$$

$$E_T^2 = E_i^2 + 2E_i E_r \cos \theta + E_r^2 \cos^2 \theta + E_r^2 \sin^2 \theta$$

$$E_T^2 = E_i^2 + 2E_i E_r \cos \theta + E_r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

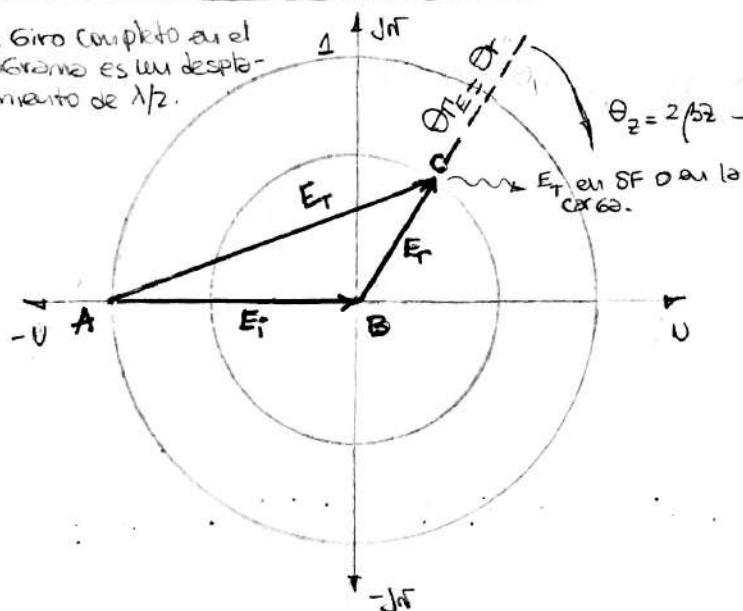
$$\therefore E_T = \sqrt{E_i^2 + E_r^2 + 2E_i E_r \cos \theta}$$

Diagrama de Crank:

El diagrama de Crank permite calcular E_T gráficamente, manteniendo el vector incidente E_i en forma estacionaria y rotando $2\beta_2$ el vector E_r en sentido horario. $\theta_2 = 2\beta_2$

$$E_T = \sqrt{E_i^2 + E_r^2 + 2E_i E_r \cos(\theta_E - \theta_2)} \quad \leftarrow \theta_E \text{ en SF}$$

Un giro completo en el diagrama es un desplazamiento de $\lambda/2$.



Si quisiera calcular E_T a $\lambda/16$ harímos:

$$\theta_2 = 2\beta_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{16} = \frac{\pi}{8} = 45^\circ$$

\therefore Giramos 45° en sentido horario $\Rightarrow \theta_E - 45^\circ$

Para construir el diagrama trazamos un vector arbitrario de longitud $|E_E|$ que representa E_i . A partir de B se traza un vector \vec{BC} que representa E_r , teniendo en cuenta el módulo y argumento del coeficiente de reflexión.

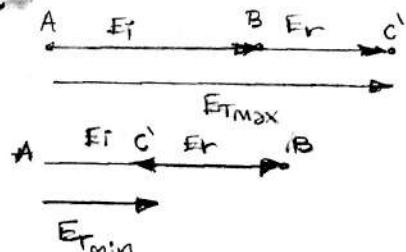
$$\Gamma_E = \frac{E_r}{E_i} \Rightarrow E_r = \Gamma_E E_i = |\Gamma_E| \cdot E_i e^{j\theta_E}$$

En el punto B trazamos un círculo de radio E_i que representa $|\Gamma_E| = 1$ y otro de radio E_r que serán los puntos del módulo de Coeficiente de reflexión a resolver.

Definición de ROE:

$$|E_{T\max}| = |E_i| + |\Gamma_E|$$

$$|E_{T\min}| = |E_i| - |\Gamma_E|$$



Relación Onda estacionaria

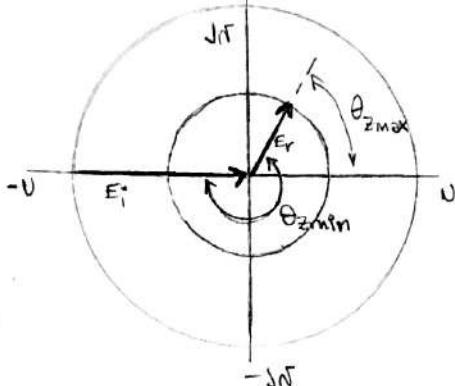
$$ROE = \frac{E_{T\max}}{E_{T\min}} = \frac{|E_i| + |\Gamma_E|}{|E_i| - |\Gamma_E|} = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|}$$

$$1 \leq ROE < \infty$$

Hay que lograr que ROE sea uno para que no haya reflexión.

Cálculo de distancia al máximo y distancia al mínimo:

Partimos desde el vector E_r y en sentido horario vemos cuáles es el ángulo $\theta_{z\max}$ que nos daría $E_{T\max}$ y cuales es el ángulo $\theta_{z\min}$ que nos daría $E_{T\min}$. Como $\theta_2 = 2\beta z$



$$z_{\max} = \frac{\theta_{z\max}}{2\beta}$$

$$z_{\min} = \frac{\theta_{z\min}}{2\beta}$$

Construcción de abaco de Smith:

Para trazar el abaco de Smith debemos tener en cuenta dos cosas:

- * Trabajar con líneas de transmisión sin pérdidas ($\alpha=0$).
- * Trabajar con impedancias normalizadas.

- Impedancia Normalizada:

$$Z_n = \frac{Z_R}{Z_0} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1 + \Gamma_E}{1 - \Gamma_E} = X + jY$$

$$\Gamma_E = U + jN = |\Gamma_E| e^{j\theta \Gamma_E}$$

$$\therefore Z_n = \frac{1 + \Gamma_E}{1 - \Gamma_E} = \frac{1 + U + jN}{1 - U - jN} \cdot \frac{1 - U + jN}{1 - U + jN} = \frac{1 - U - jN + U - U^2 + jUN + jN - jUN - N^2}{(1 - U)^2 + N^2}$$

$$Z_n = X + jY = \frac{1 - U^2 - N^2}{(1 - U)^2 + N^2} + j \frac{2N}{(1 - U)^2 + N^2}$$

↓ ↓
Resistencia Normalizada Reactancia Normalizada.

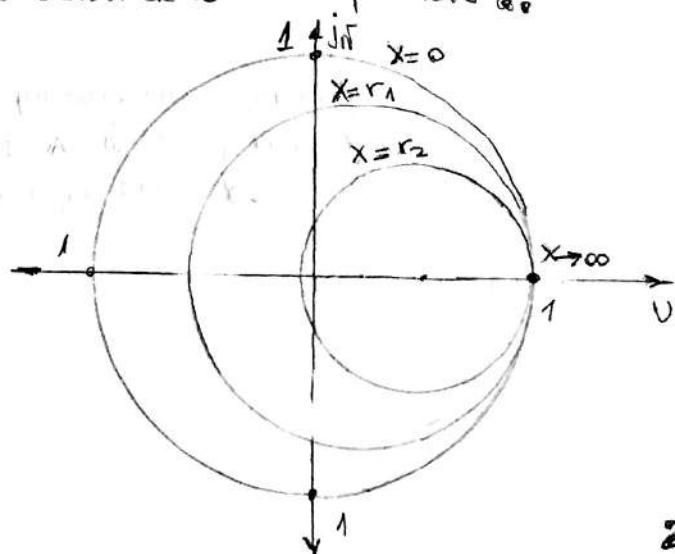
- familia de curvas de $\operatorname{Re}\{Z_n\} = \text{cte}$

$$X = \frac{1 - U^2 - N^2}{(1 - U)^2 + N^2} \quad \text{y operamos hasta encontrar la ecuación de la circunferencia}$$

$$\therefore \left(U - \frac{X}{1 + X} \right)^2 + N^2 = \left(\frac{1}{1 + X} \right)^2$$

Circunferencia cuyo centro es en $\left(\frac{X}{1 + X}, 0 \right)$

y radio $\frac{1}{1 + X}$.



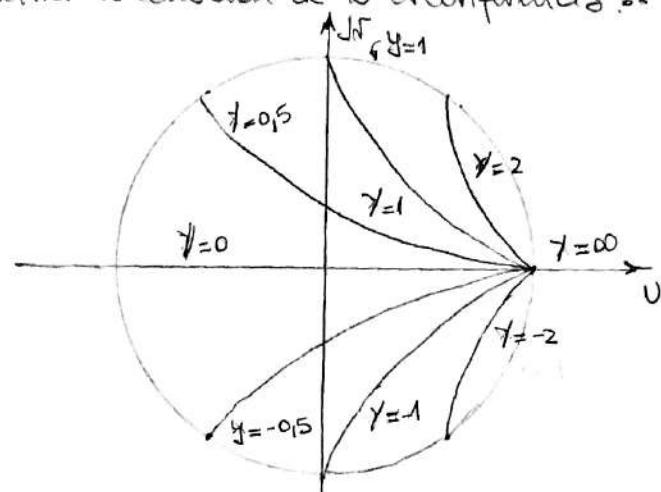
- Familia de curvas para $\text{Im}\{Z_{\text{in}}\} = \text{cte}$

$$y = \frac{2\pi}{(1-u)^2 + v^2}$$

y operamos hasta encontrar la ecuación de la circunferencia \therefore

$$(u-1)^2 + (v - \frac{1}{y})^2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2$$

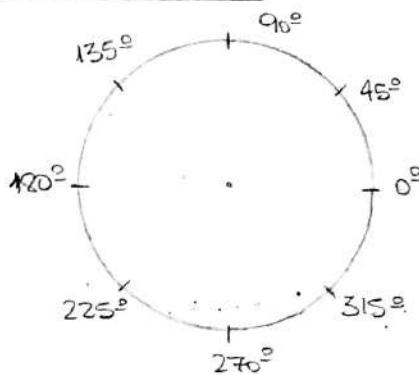
Circunferencia con centro en $(1, \frac{1}{y})$
y radio $\frac{1}{y}$.



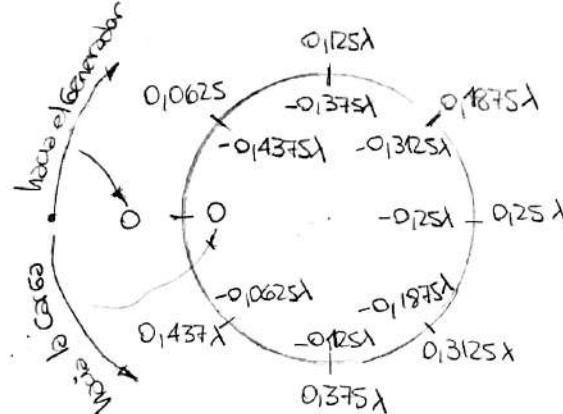
Abaco de Smith. Detalles:

Si unimos las dos familias de curvas encontradas anteriormente obtendremos el abaco de Smith. Este viene con 3 escalas circulares y 10 escalas radiales.

Escala circular:



Escala Ángulo de Γ_E



Escala de longitud de Onda

Ambas se relacionan según la expresión $\Theta_E = 2\beta z$. Por ejemplo si voy desde 0° hasta 45° , en la escala de longitud de Onda recorri $0.125\lambda - 0.1875\lambda = 0.0625\lambda$.

- Escalas Radiales:

1.) Reflexión:

a-) Reflection Coeff. Volt (Coeficiente de reflexión de tensión): va desde 0 a 1 la escala es lineal. $|\Gamma_E| = |V_r|/|V_i|$

b-) Reflection Coeff. Power (modulo del Coef. de reflexión de potencia):

$$|\Gamma_E|^2 = \left(\frac{V_r}{V_i}\right)^2 = |\Gamma_E|^2 = \frac{P_r}{P_i} \quad \text{va de } 0 \text{ a } 1, \text{ la escala es lineal.}$$

c-) Reflection loss RETN (perdidas en dB al retorno): Es la atenuación que debería sufrir P_i para llegar a P_r . Va de 0 a 40dB. Atenuación = $20 \log |\Gamma_E|$

d-) Reflection loss in dB - REFL (perdidas en dB por reflexión): es el cociente en P_i y P_c expresado en dB. Siendo P_c la potencia absorbida por Z_R .

$$\frac{\text{Pot. } E_i \text{ en } Z_R}{\text{Pot. Absorbida en } Z_R} = \frac{P_i(Z_R)}{P_c} = \frac{P_i(Z_R)}{P_i(Z_R) - P_f(Z_R)} = \frac{1}{1 - |\Gamma|^2} \Rightarrow 10 \log \frac{1}{1 - |\Gamma|^2} \quad \text{va de } 0 \text{ a } 00$$

2-) Onda estacionaria.

a) ROE - Volt RATIO. (Relación Onda estacionaria) :

$$ROE = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1 + |P|}{1 - |P|}$$

b.) ROE en dB :

$$ROE \mid_{dB} = 10 \log_{10} ROE$$

3.) Perdida en transmisión :

a) Loss coef (Coef. de perdida de transmisión) :

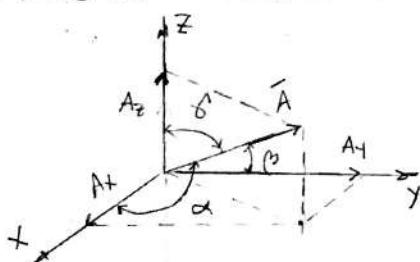
$$\frac{1 + |P|^2}{1 - |P|^2} e^{-\alpha z} \quad \text{la escala va de } 1 \text{ a } \infty.$$

b-) 1 dB steps (tramos de 1 dB) : útil para ver la reducción de $|P|$ a lo largo de la linea cuando hay atenuación.

UNIDAD 10: REFLEXION OBICUA:

Cosenos directores

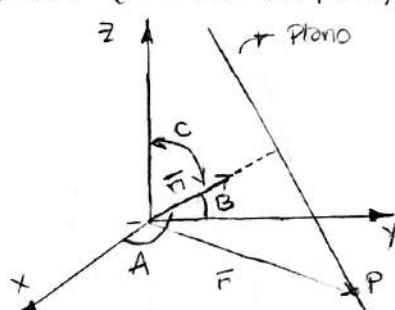
Los cosenos directores nos determinan la dirección de un vector en el espacio. Se llama cosenos directores del vector \vec{A} a los cosenos de los ángulos que forma este con los ejes coordenados.



$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

Dada la ecuación $E_x(z) = E_0 e^{-j\beta z}$ es una onda de dirección en z y cuyos planos equipotenciales (superficie de igual fase) están dados por $z = \text{cte}$.

Si se trata de una onda plana que se propaga en la dirección arbitraria \vec{n} el plano equipotencial será $S = \vec{n} \cdot \vec{r}$ (ecuación del plano)



$\vec{n} \rightarrow$ Vector normal al plano cos sus cosenos directores $\cos A, \cos B, \cos C$
 $\vec{r} \rightarrow$ Vector de un punto en el plano con componentes $\vec{r}(x, y, z)$
 $S = \vec{n} \cdot \vec{r} = x \cos A + y \cos B + z \cos C$

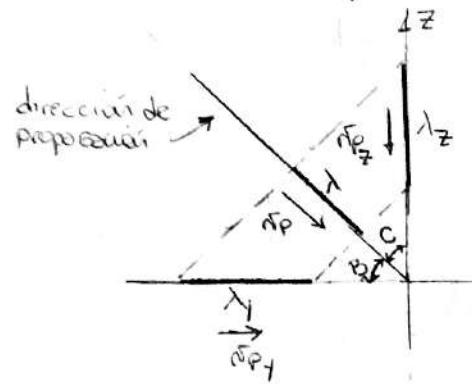
∴ La ecuación de una onda plana propagándose en la dirección \vec{n} será:

$$E(n) = E_0 e^{-j\beta n \cdot \vec{r}} = E_0 e^{-j\beta (\cos A + y \cos B + z \cos C)}$$

Sin embargo el tiempo y $E_0 = E_x + j E_z \therefore$ tomando la parte real

$$\operatorname{Re}\{E(n, t)\} = \operatorname{Re}\{E_0 e^{-j(\beta n \cdot \vec{r} - \omega t)}\} \Rightarrow E(n, t) = E_x \cos(\beta n \cdot \vec{r} - \omega t) + E_z \operatorname{sen}(\beta n \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Lamplitud de onda y Velocidad de fase:



Como $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ y $Np = \frac{\omega}{\beta}$ \therefore para las distintas direcciones tendremos:

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta \cos c} = \frac{\lambda}{\cos c}$$

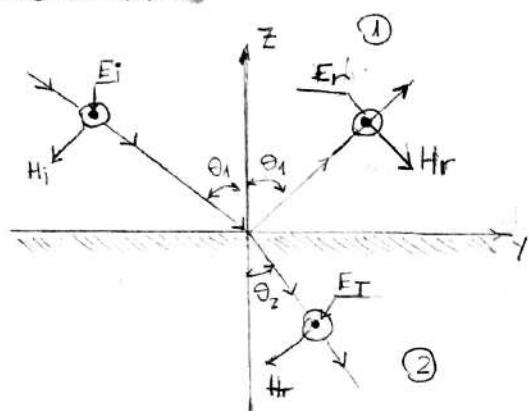
$$\lambda_y = \frac{2\pi}{\beta \cos B} = \frac{\lambda}{\cos B}$$

$$Np_z = \frac{\omega}{\beta \cos c} = \frac{Np}{\cos c}$$

$$Np_y = \frac{\omega}{\beta \cos B} = \frac{Np}{\cos B}$$

La longitud de onda medidas a lo largo de los ejes serán mayores que las medidas en la dirección de propagación.

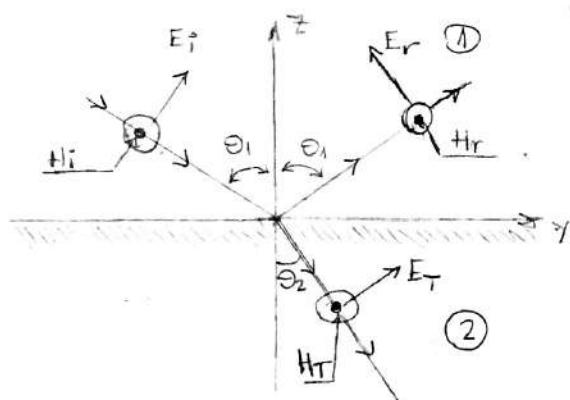
Incidencia oblicua:



Polarización perpendicular (horizontal):

$E \perp$ al plano de incidencia

E horizontal a la superficie de frontera



Polarización paralela (Vertical)

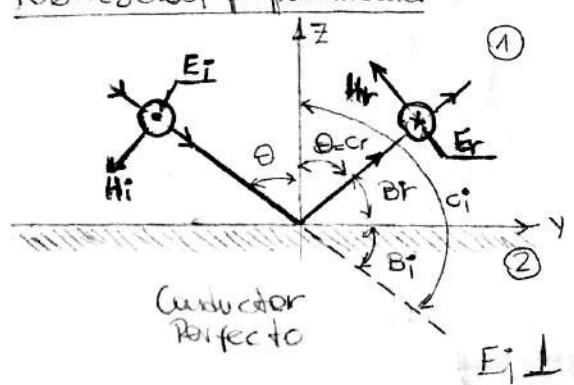
$E \parallel$ al plano de incidencia

E vertical a la superficie de frontera.

Reflexión por un conductor perfecto:

Una onda incidente en un conductor perfecto se refleja totalmente con un ángulo de reflexión igual al de incidencia.

- Polarización perpendicular:



$$A_i = 90^\circ$$

$$B_i = 90^\circ - \theta$$

$$C_i = 180^\circ - \theta$$

$$A_r = 90^\circ$$

$$B_r = 90^\circ - \theta$$

$$C_r = \theta$$

$$E_T = E_{\text{incidente}} + E_{\text{reflejada}}$$

$E_i \perp$ al plano de incidencia

$$E_{\text{incidente}} = E_i e^{-j\beta z} = E_i e^{-j\beta(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)} = E_i e^{-j\beta(x \cos 40^\circ + y \underbrace{\cos(90^\circ - \theta)}_{\sin \theta} + z \cos 180^\circ)}$$

$$E_{\text{incidente}} = E_i e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)}$$

$$E_{\text{reflejada}} = E_r e^{-j\beta z} = E_r e^{-j\beta(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)} = E_r e^{-j\beta(x \cos 90^\circ + y \cos(90^\circ - \theta) + z \cos \theta)}$$

$$E_{\text{reflejada}} = E_r e^{-j\beta(y \sin \theta + z \cos \theta)}$$

$$\therefore E_T = E_i e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)} + E_r e^{-j\beta(y \sin \theta + z \cos \theta)}$$

por condiciones de frontera en $z=0 \Rightarrow E_r = -E_i$

$$\therefore E_T = E_i \left[e^{-j\beta(y \sin \theta - z \cos \theta)} - e^{-j\beta(y \sin \theta + z \cos \theta)} \right] = E_i e^{-j\beta y \sin \theta} \left[e^{j\beta z \cos \theta} - e^{-j\beta z \cos \theta} \right]$$

$$E_T = E_i e^{-j\beta y \sin \theta} \cdot 2 j \cdot \sin(\beta z \cos \theta) = 2 E_i e^{j90^\circ} \cdot e^{-j\beta y \sin \theta} \cdot \sin(\beta z \cos \theta)$$

Donde $\begin{cases} \beta \sin \theta = \beta \cos(90^\circ - \theta) = \beta \cos \theta \\ \beta \cos \theta = \beta \cos \alpha = \beta_2 \end{cases}$

$$E_T = 2 E_i e^{-j(\beta_2 y - 90^\circ)} \cdot \sin(\beta_2 z)$$

Para obtener la expresión total en el tiempo multiplico por $e^{j\omega t}$:

$$E_T(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ 2 E_i e^{-j(\beta_2 y - 90^\circ + \omega t)} \cdot \sin(\beta_2 z) \right\} \Rightarrow E_T(z, t) = 2 E_i \sin(\omega t - \beta_2 y) \sin(\beta_2 z)$$

Muestra una distribución estacionaria de E a lo largo del eje z . Con ceros en múltiplos $\lambda_2/2$ y máximos en múltiplos impares $\lambda_2/4$. También muestra una onda progresiva en y en sentido positivo.

Si colocamos otro conductor en $\lambda/2$ o $n\lambda/2$ la onda no se modifica en su interior. Y si ponemos dos conductores verticales como paredes obtenemos una guía de ondas.



- Polarización paralela:

trabajando de manera similar llegamos:

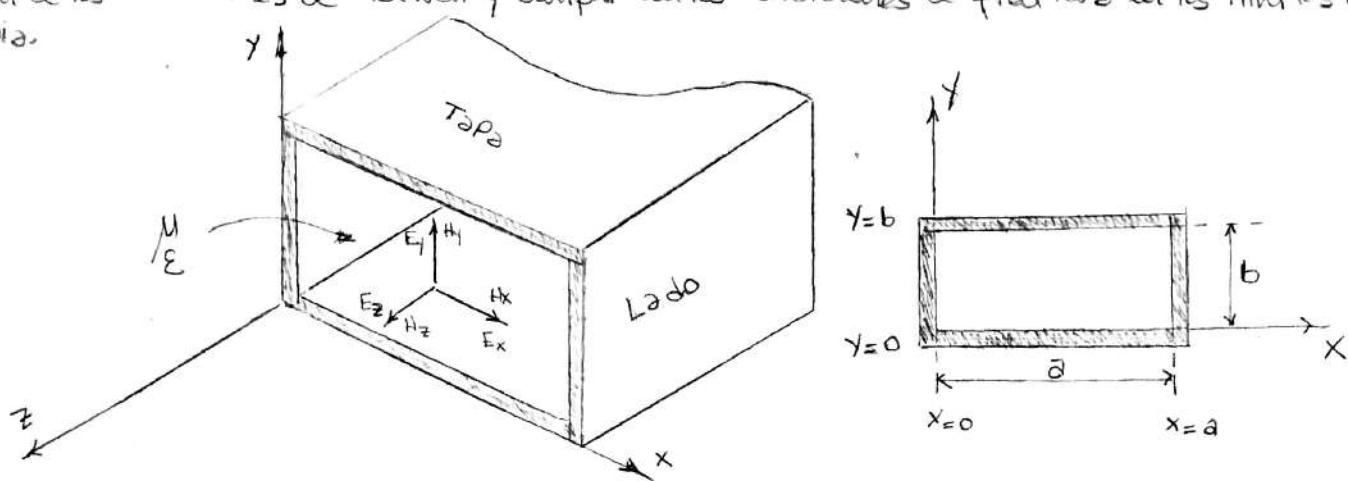
$$H_T(z, t) = 2 H_i \cos(\omega t - \beta_2 y) \cdot \cos(\beta_2 z)$$

Muestra una distribución estacionaria de H a lo largo del eje z . Con ceros en múltiplos $\lambda_2/4$ y máximos en múltiplos de $\lambda_2/2$. También muestra una onda progresiva en y en sentido positivo.

UNIDAD 11 : GUIAS DE ONDAS

Definición:

Una Guía de Onda es todo conductor hueco usado para transmitir ondas electromagnéticas. Cada arco de \vec{E} y de \vec{H} dentro de la Guía, se llama "Modo de propagación". Estos modos deben ser solución de las ecuaciones de Maxwell y cumplir con las condiciones de frontera en los límites de la Guía.



Modos de Propagación:

- Transversal eléctrico (Modo TE ó Modo H): \vec{E} no tiene componentes en la dirección de propagación, $E_z = 0$, y es en tales partes transversal al eje de la Guía. \vec{H} tiene, además de las transversales, una componente en el eje de la Guía.
- Transversal magnético (Modo TM ó Modo E): \vec{H} no tiene componentes en la dirección de propagación, $H_z = 0$, y es en tales partes transversal al eje de la Guía. \vec{E} posee todos los componentes incluyendo axial.

Cálculo de \vec{E} y \vec{H} dentro de la Guía de Ondas:

Suponiendo la perfecta conductividad de las paredes de la Guía de onda, tenemos que E_x y H_y son 0 en la superficie de los conductores. Las ecuaciones de Maxwell resaltan en una región sin pérdidas ($\delta = 0$) dentro de la Guía:

$$\delta = \alpha + j\beta$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad \text{Si realizamos el rotar de } \vec{H}, \text{ tenemos: } \nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = j\omega \epsilon (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k})$$

$$\therefore \hat{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = j\omega \epsilon E_x \hat{i} + j\omega \epsilon E_y \hat{j} + j\omega \epsilon E_z \hat{k} \quad (1)$$

Hacemos lo mismo con la segunda ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad \text{Si realizamos el rotar de } \vec{E}, \text{ tenemos: } \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega \mu (H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k})$$

$$\therefore \hat{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -j\omega \mu H_x \hat{i} - j\omega \mu H_y \hat{j} - j\omega \mu H_z \hat{k} \quad (2)$$

Igualamos componente por componente (1) y (2). Las variaciones en la dirección z pueden expresarse como $\vec{e}^{j\beta z}$ donde $\beta = \alpha + j\beta$

$$\text{en } \hat{x} \rightarrow \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \bar{e}^{-\delta z} = j\omega \epsilon E_x \bar{e}^{-\delta z} \quad (3) \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial t} + \delta H_y = j\omega \epsilon E_x \quad (3)$$

$$\text{en } \hat{y} \rightarrow \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \bar{e}^{-\delta z} = -j\omega \epsilon E_y \bar{e}^{-\delta z} \quad (4) \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} + \delta H_x = -j\omega \epsilon E_y \quad (4)$$

$$\text{en } \hat{z} \rightarrow \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \bar{e}^{-\delta z} = j\omega \epsilon E_z \bar{e}^{-\delta z} \quad (5) \rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \epsilon E_z \quad (5)$$

$$\text{en } \hat{x} \rightarrow \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \bar{e}^{-\delta z} = -j\omega \mu H_x \bar{e}^{-\delta z} \quad (6) \rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} + \delta E_y = -j\omega \mu H_x \quad (6)$$

$$\text{en } \hat{y} \rightarrow \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \bar{e}^{-\delta z} = j\omega \mu H_y \bar{e}^{-\delta z} \quad (7) \rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} + \delta E_x = j\omega \mu H_y \quad (7)$$

$$\text{en } \hat{z} \rightarrow \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \bar{e}^{-\delta z} = -j\omega \mu H_z \bar{e}^{-\delta z} \quad (8) \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z \quad (8)$$

Conversion de (3) a (3):

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \bar{e}^{-\delta z} = \frac{\partial}{\partial t} (H_z \cdot \bar{e}^{-\delta z}) - \frac{\partial}{\partial z} (H_y \cdot \bar{e}^{-\delta z}) = \frac{\partial H_z}{\partial t} \cdot \bar{e}^{-\delta z} + H_z \cdot \frac{\partial (\bar{e}^{-\delta z})}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \cdot \bar{e}^{-\delta z} - H_y \cdot \frac{\partial (\bar{e}^{-\delta z})}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \bar{e}^{-\delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial t} \bar{e}^{-\delta z} + H_z \cdot 0 - 0 \cdot \bar{e}^{-\delta z} + \delta H_y \bar{e}^{-\delta z} \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial t} + \delta H_y = j\omega \epsilon E_x$$

Conversion de (5) a (5):

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \bar{e}^{-\delta z} = \frac{\partial}{\partial x} (H_y \cdot \bar{e}^{-\delta z}) - \frac{\partial}{\partial z} (H_x \cdot \bar{e}^{-\delta z}) = \frac{\partial H_y}{\partial x} \bar{e}^{-\delta z} + H_y \cdot \frac{\partial (\bar{e}^{-\delta z})}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \bar{e}^{-\delta z} - H_x \cdot \frac{\partial (\bar{e}^{-\delta z})}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \bar{e}^{-\delta z} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \bar{e}^{-\delta z} + H_y \cdot 0 - \frac{\partial H_x}{\partial z} \bar{e}^{-\delta z} - H_x \cdot 0 \Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega \epsilon E_z$$

El resto de las conversiones se hacen de manera similar. Ahora despejamos Hy de (7):

$$H_y = \frac{\delta}{j\omega \mu} E_x + \frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \text{reemplazamos en (3) y operamos}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \delta \left(\frac{\delta}{j\omega \mu} E_x + \frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = j\omega \epsilon E_x \Rightarrow E_x \left(\frac{\delta^2}{j\omega \mu} - j\omega \epsilon \right) = \frac{-\delta}{j\omega \mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$E_x (\delta^2 + \omega^2 \mu \epsilon) = -\delta \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \text{haciendo } h^2 = \delta^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\therefore \boxed{E_x = \frac{-\delta}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{j\omega \mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial t}} \quad (9)$$

Multiplicando por $j\omega \mu$

Despejando Hy de (3):

$$H_y = \frac{j\omega \epsilon}{\delta} E_x - \frac{1}{\delta} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad \text{reemplazamos la } E_x \text{ de la (9)}$$

$$H_y = \frac{j\omega \epsilon}{\delta} \left(\frac{-\delta}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{j\omega \mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) - \frac{1}{\delta} \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{j\omega \epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{\delta h^2} \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$H_y = -\frac{j\omega \epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \underbrace{\left(\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{\delta h^2} - \frac{1}{\delta} \right)}_{-\frac{\delta}{h^2}} \frac{\partial H_z}{\partial t} \Rightarrow \boxed{H_y = -\frac{\delta}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{j\omega \epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}} \quad (10)$$

Despejamos H_x de ④:

$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{j\omega\mu\epsilon} E_y \text{ reemplazando en ④}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma \left(-\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{j\omega\mu\epsilon} E_y \right) = -j\omega\epsilon E_y \Rightarrow E_y \left(\frac{\gamma^2}{j\omega\mu} - j\omega\epsilon \right) = \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$E_y \underbrace{\left(\frac{\gamma^2}{j\omega\mu} + \omega^2\mu\epsilon \right)}_{h^2} = j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \Rightarrow E_y = \frac{-\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\frac{\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad ⑪$$

Despejando de H_x de ④:

$$H_x = -\frac{j\omega\epsilon}{\gamma} E_y - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial x} \text{ reemplazando } E_y \text{ de ⑪}$$

$$H_x = -\frac{j\omega\epsilon}{\gamma} \left(\frac{-\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\frac{\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\omega^2\mu\epsilon}{\gamma h^2} \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$H_x = j\frac{\omega\epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \underbrace{\left(\frac{\omega^2\mu\epsilon}{\gamma h^2} - \frac{1}{\gamma} \right)}_{-\frac{\gamma}{h^2}} \frac{\partial H_z}{\partial x} \Rightarrow H_x = \frac{-\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad ⑫$$

Las ecuaciones ⑨, ⑩, ⑪ y ⑫ dan las relaciones existentes entre los campos del interior de la guía de ondas. Si E_z y H_z son ambas cero, todos los campos de la guía de onda se desvanecerán, por lo tanto, para la transmisión por guía de onda (sin conductor interior) debe existir E_z o H_z .

Obtenemos las ecuaciones de E_z y H_z , recordando el Laplaciano de \bar{E} y \bar{H} :

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{E} e^{\gamma z} = \gamma^2 \bar{E} e^{\gamma z} \\ \nabla^2 \bar{H} e^{-\gamma z} = \gamma^2 \bar{H} e^{-\gamma z} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Ecuaciones de Helmholtz en forma fasorial} \\ \gamma^2 = j\omega\mu(\kappa + j\omega\epsilon) \quad \kappa = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{E} e^{\gamma z} = -\omega^2 \mu \epsilon \bar{E} e^{\gamma z} \\ \nabla^2 \bar{H} e^{-\gamma z} = -\omega^2 \mu \epsilon \bar{H} e^{-\gamma z} \end{cases} \quad \text{resolviendo para } E_z \text{ y } H_z, \text{ tendremos.}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_z = -\omega^2 \mu \epsilon E_z} \quad ⑬$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \gamma^2 H_z = -\omega^2 \mu \epsilon H_z} \quad ⑭$$

Las ecuaciones ⑬ y ⑭ son un sistema de ecuaciones que describen el comportamiento de todas las componentes de \bar{E} y \bar{H} . Pero dentro de la guía de onda, la onda se propaga o en el modo TM o en el modo TE es decir que $H_z = 0$ o $E_z = 0$. Esto permite particularizar el sistema para cada caso.

Ecuaciones para el modo TM:

En este modo $H_z = 0 \Rightarrow$ buscamos una solución para E_z . Si $E_z = x^1 y^1$ donde $x^1 = f(x)$ e $y^1 = f(y)$ y sustituyendo en ⑬:

$$\frac{\partial^2 (x^1 y^1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_z = -\omega^2 \mu \epsilon (x^1 y^1) \Rightarrow y^1 \frac{\partial^2 x^1}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial^2 y^1}{\partial y^2} + \underbrace{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)(x^1 y^1)}_{h^2} = 0 \quad \text{dividiendo por } x^1 y^1$$

$$\frac{1}{x^1} \frac{\partial^2 x^1}{\partial x^2} + \frac{1}{y^1} \frac{\partial^2 y^1}{\partial y^2} + h^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x^1} \frac{\partial^2 x^1}{\partial x^2} + h^2 = \frac{1}{y^1} \frac{\partial^2 y^1}{\partial y^2}} \quad ⑮$$

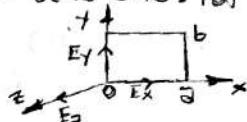
⑯ Tenemos una función sólo de x con una sola de y , la única forma que de cumplir esto, es haciendo que cada una de las funciones sea una constante.

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 x^1}{\partial x^2} + h^2 = A^2 \quad \text{Solución: } x^1 = C_1 \cos(Bx) + C_2 \sin(Bx) \quad \text{donde } B^2 = h^2 - A^2$$

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 y^1}{\partial y^2} = -A^2 \quad \text{Solución: } y^1 = C_3 \cos(Ay) + C_4 \sin(Ay)$$

$$\therefore E_z = x^1 y^1 = [C_1 \cos(Bx) + C_2 \sin(Bx)] \cdot [C_3 \cos(Ay) + C_4 \sin(Ay)]$$

Resta saber el valor de las constantes. $E_z = 0$ en los límites de la guía de onda, es decir: cuando $x=0, y=0, x=a$ ó $y=b$. Donde a es el ancho y b es el alto de la guía. Por esto E_z no puede tener elementos cosenoideales $\Rightarrow C_1 = C_3 = 0$.



$$\therefore E_z = C_2 C_4 \sin(Bx) \sin(Ay) = C \sin(Bx) \cdot \sin(Ay)$$

Hay que encontrar valores de la frecuencia B y A que anulen E_z en $x=a$ e $y=b$.

$$E_z = C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \Rightarrow B = \frac{m\pi}{a} \quad \text{donde } m = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_z = C \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \Rightarrow A = \frac{n\pi}{b} \quad \text{donde } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore E_z = C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad ⑯$$

$\begin{cases} a = \text{ancho de la guía} \\ b = \text{alto de la guía} \\ m = \text{nro entero de semicírculos comprendidos en el ancho} \\ n = \text{nro entero de semicírculos comprendidos en el alto.} \end{cases}$

recordando las ecuaciones ⑨, ⑩, ⑪ y ⑫ y sustituyendo ⑯ y partiendo $\mathcal{Y} = j\beta$ (medio sin pérdidas)

$$E_x = -j \frac{\rho c}{h^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad ⑯$$

$$E_y = -j \frac{\rho c}{h^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad ⑯$$

$$H_x = j \frac{\omega \epsilon c}{h^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad ⑯$$

$$H_y = -j \frac{\omega \epsilon c}{h^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad ⑯$$

Estas ecuaciones mas la ⑯ forman las 5 ecuaciones de las ondas TM dadas de $H_z = 0$. Y muestran como cada una de las componentes de \vec{E} y \vec{H} varían con x y y . La variación del tiempo a lo largo de eje de la guía (z) se expresa multiplicando por el factor $e^{j\omega t - \beta z}$ y tomando la parte real.

Si m y n son cero los campos son nulos \therefore el menor valor es $m=n=1$ que nos proporcionan los campos de menor frecuencia que pueden propagarse en la guía. (modo TM_{11}).

Faltan dibujos ondas TM !!!

Ecuaciones para el modo TE:

Las ecuaciones de los modos TE ($E_z = 0$) pueden obtenerse de un modo similar a los de TM.

$$H_z = C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_x = j \frac{\beta c}{n^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_y = j \frac{\beta c}{n^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_x = j \frac{\mu \omega C}{n^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_y = -j \frac{\omega \mu C}{n^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

21

En estos ecuaciones es posible hacer $M=0$ ó $n=0$ sin dar lugar a que se anule la Onda.

22

Flujo de H

23

Flujo E

24

Flujo H

25

TE₀₁

Flujo de E

TE₁₀

Flujo de H

TE₁₁

Frecuencia de Corte y Constante de propagación:

$$A^2 + B^2 = h^2 \text{ donde } B = \frac{m\pi}{a} \text{ y } A = \frac{n\pi}{b} \quad \wedge \quad h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

∴ b constante de propagación será:

$$\gamma = \sqrt{h^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \sqrt{A^2 + B^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \alpha + j\beta = j\gamma$$

→ No existen perdidas
 $\alpha = 0$

→ radicando menor que cero:

Si $0 < \omega < \omega_c \Rightarrow \gamma = \text{real} = \alpha = 0$ no hay propagación dentro de la Guía.

→ radicando igual a cero:

$$\gamma = j\beta = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = 0 \Rightarrow \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right]$$

$$\therefore \omega = \omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

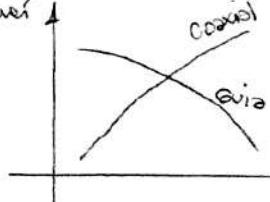
$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu \epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

frecuencia de Corte
que es la frecuencia bajo
la cual → la propagación.

$$\text{Como } n\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad \text{y} \quad n\sigma_0 = \lambda_c \cdot f_c \quad \therefore$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

Atenuación

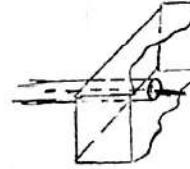
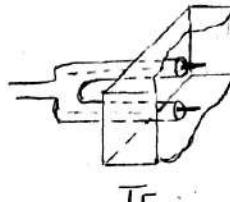
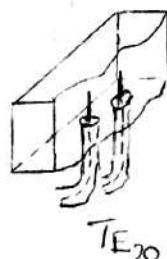
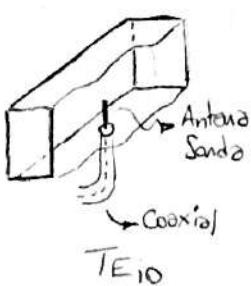


→ radicando mayor que cero.

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \quad \therefore \quad n\sigma_p = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}$$

Vel. de la
luz

Conexión de fuente de energía:

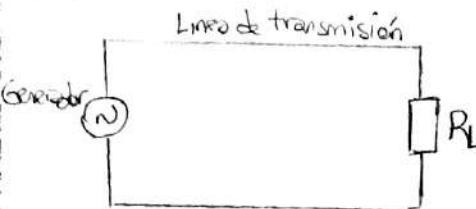


$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\min} = \frac{c_0}{2a} \\ f_{\max} = \frac{c_0}{a} \end{array} \right.$$

Son independientes del
alto del conductor

UNIDAD 12: LINEAS DE TRANSMISION

Introducción:



El voltaje aplicado por el Generador en un extremo no alcanza a la carga instantáneamente, sino que viaja a una velocidad finita y llega a la carga un momento más tarde: $\lambda = \frac{c}{f}$ o circuito.

La teoría de líneas de transmisión puede utilizarse cuando la longitud de la línea sea apreciable a $\lambda/4$. Cuando los cables sean más cortos que $\lambda/4$ el sistema puede ser analizado por teoría de circuitos. Tipos de líneas de transmisión: 2 alambres desnudos, par blindado, cintas paralelas ~ cable coaxial.

Con $C = 3 \cdot 10^{-8} \text{ M/S}$, tenemos:

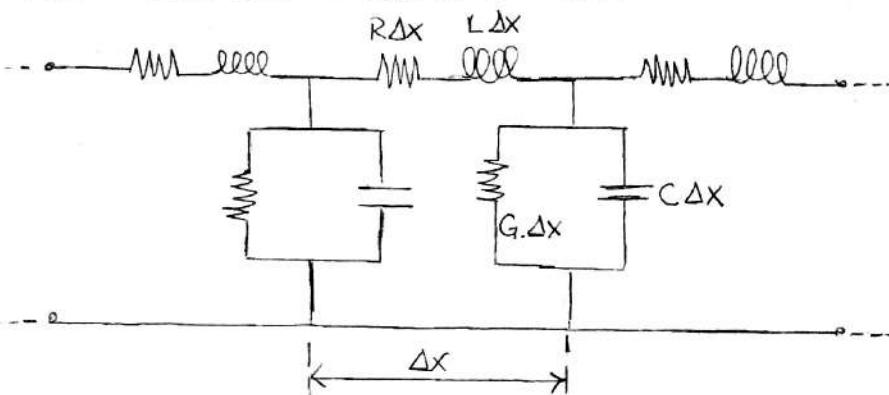
$$f = 60 \text{ Hz} \rightarrow \lambda = 5 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$f = 3 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = 100 \text{ m}$$

$$f = 3 \text{ GHz} \rightarrow \lambda = 0,1 \text{ m}$$

$\lambda/4 \rightarrow$ Teoría de los circuitos
 Longitud física de los conductores
 $\gg \lambda/4 \rightarrow$ Teoría de Líneas de trans.

Parámetros distribuidos de la línea:



- Teoría de circuitos \rightarrow Parámetros Concentrados
- Líneas de transmisión \rightarrow « distribuidos
- La distancia entre los conductores tiene que ser mayor a $\lambda/4$ para no convertirse en antena o una guía de onda.

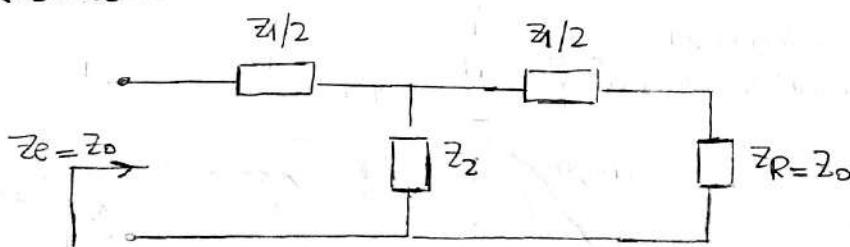
$L \rightarrow$ inductancia distribuida uniformemente a lo largo de los conductores H/m .

$C \rightarrow$ capacitancia que existe entre los conductores F/m .

$R \rightarrow$ resistencia de la línea, representa la imperfección del conductor S/m .

$G \rightarrow$ conductancia entre los conductores, representa la imperfección de la aislación S/m . No es el reciproco de R .

Analisis de la linea como cuadripolo:



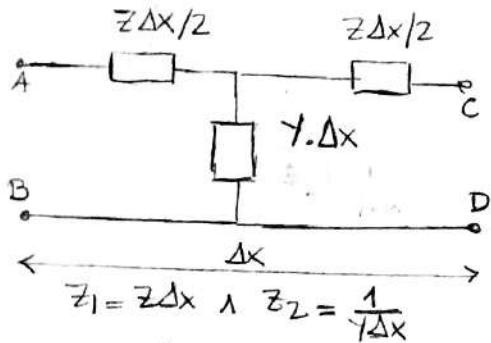
$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{Z_1}{2} + \frac{(Z_1 + Z_0) Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_0 + Z_2} = \frac{Z_1}{2} + \frac{\frac{Z_1 Z_2}{2} + Z_0 Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_0 + Z_2} = \frac{\frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1 Z_0}{2} + \frac{Z_1 Z_2}{2} + \frac{Z_0 Z_2}{2}}{\frac{Z_1}{2} + Z_0 + Z_2} \\ \frac{Z_0 Z_1}{2} + Z_0^2 + Z_2 Z_0 &= \frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1 Z_0}{2} + Z_1 Z_2 + Z_0 Z_2 \quad \therefore Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}} \end{aligned}$$

La teoría de circuitos muestra que existe un valor particular Z_0 de impedancia de carga (Z_R) que hace a la impedancia de entrada $Z_e = Z_R$ tal como si el cuadripolo no existiera.

Impedancia característica.

Z₀ aplicado a líneas de transmisión:

La Z₀ aplicada a la linea en función de los parámetros distribuidos, la obtenemos si tomamos un Δx en la linea. \therefore



$$Z_0 = \sqrt{\frac{(Z\Delta x)^2 + Z\Delta x}{4}} = \sqrt{\frac{Z}{4} + \frac{Z^2}{4}\Delta x^2}$$

teniendo el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$

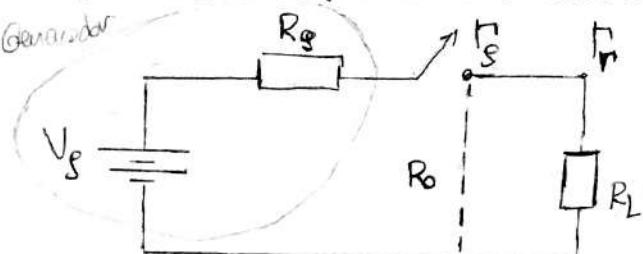
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} Z_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{Z}{4} + \frac{Z^2}{4}\Delta x^2} = \sqrt{\frac{Z}{4}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

Para altas frecuencias $|j\omega L| \gg R, |j\omega C| \gg G$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} \Rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Coeficiente de reflexión en líneas de transmisión:

(Corriente Continua)



Si la resistencia de carga R_L no es igual a la resistencia característica R_0 , la corriente incidente i_i al llegar a la carga da lugar a una corriente reflejada i_r . Lo mismo sucede con v_r .

$$R_L = \frac{e_T}{i_T} = \frac{e_i + e_r}{i_i + i_r} = \frac{e_i + e_r}{\frac{e_i}{R_0} + \frac{e_r}{R_0}} = R_0 \frac{e_i + e_r}{e_i - e_r} = R_0 \frac{1 + \frac{e_r}{e_i}}{1 - \frac{e_r}{e_i}} = R_0 \frac{1 + \Gamma_e}{1 - \Gamma_e}$$

$$R_L(1 - \Gamma_e) = R_0(1 + \Gamma_e) \Rightarrow R_L - \Gamma_e R_L = R_0 + R_0 \Gamma_e \Rightarrow R_0 \Gamma_e + R_L \Gamma_e = R_L - R_0 \Rightarrow \Gamma_e(R_0 + R_L) = R_L - R_0$$

$$\Gamma_e = \Gamma_{r_e} = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$$

Coeficiente de reflexión de tensión en la carga.

$$R_L = \frac{e_i + e_r}{i_i + i_r} = \frac{i_i R_0 - i_r R_0}{i_i + i_r} \text{ operando } \Gamma_i = \Gamma_r = -\frac{R_L - R_0}{R_0 + R_L}$$

Coeficiente de reflexión de corriente en la carga.

Cuando e_r regresa a V_g "Onda" con R_g y se produce una nueva reflexión, operando del mismo modo:

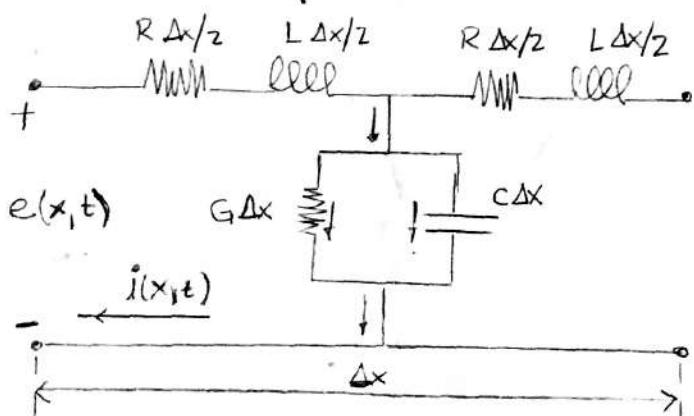
$$\Gamma_{s_e} = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0}$$

Coeficiente de reflexión de tensión en el generador

$$\Gamma_{s_i} = -\frac{R_g - R_0}{R_0 + R_g}$$

Coeficiente de reflexión de corriente en el generador.

Ecaciones del telegrafista:



Siguiendo negativo por los valores positivos $i(x,t)$ y $d^2i(x,t)/dt^2$ causan disminuir de $e(x,t)$ a medida que aumenta x .

La tensión "e" y la corriente "i" de este cuadripolo depende de x y de t
La caída de tensión y perdida de corriente en la linea es:

$$\frac{de(x,t)}{dx} = -Ri(x,t) - L \frac{di(x,t)}{dt} \quad ①$$

$$\frac{di(x,t)}{dx} = -G \cdot e(x,t) - C \frac{de(x,t)}{dt} \quad ②$$

Como $V(x,t) = \Re\{V_m(x) \cdot e^{j\omega t}\} + \Im\{V_m(x)\} \cdot e^{j\omega t}\}$ Sustituyendo en ①:

$$\frac{\partial}{\partial x} [V_m(x) e^{j\omega t}] = -R I_m(x) e^{j\omega t} - \frac{\partial}{\partial t} [I_m(x) e^{j\omega t}] \Rightarrow \frac{\partial V_m(x)}{\partial x} e^{j\omega t} = -R I_m(x) e^{j\omega t} - j\omega L I_m(x) e^{j\omega t}$$

$$\therefore \frac{\partial V_m(x)}{\partial x} = -R I_m(x) - j\omega L I_m(x) \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{\partial I_m(x)}{\partial x} = -R \sqrt{2} I_{ef}(x) - j\omega L \sqrt{2} I_{ef}(x)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -(R + j\omega L) I(x) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -Z \cdot I(x)} \quad ③ \rightarrow \text{pasamos a dominio total, porque ahora solo depende de } x.$$

Trabajando de manera similar con ②, tenemos:

$$\boxed{\frac{dI(x)}{dx} = -\gamma V(x)} \quad ④$$

Ecuación de Onda en el medio Conductor:

Tomando ③ y ④ del tema anterior y derivando nuevamente respecto de x , tenemos:

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -Z \frac{dI(x)}{dx} = -Z [-\gamma V(x)] \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 V(x)}{dx^2} - Z\gamma V(x) = 0} \quad ⑤$$

$$\frac{d^2 I(x)}{dx^2} = -\gamma \frac{dV(x)}{dx} = -\gamma [-Z I(x)] \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 I(x)}{dx^2} - Z\gamma I(x) = 0} \quad ⑥$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta = \sqrt{Z\gamma} \\ Z_0 = \sqrt{Z\gamma} \end{array} \right\}$$

La solución general de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden ⑤, es:

$$V(x) = A_1 e^{-\sqrt{Z\gamma} \cdot x} + A_2 e^{+\sqrt{Z\gamma} \cdot x} \quad ⑦$$

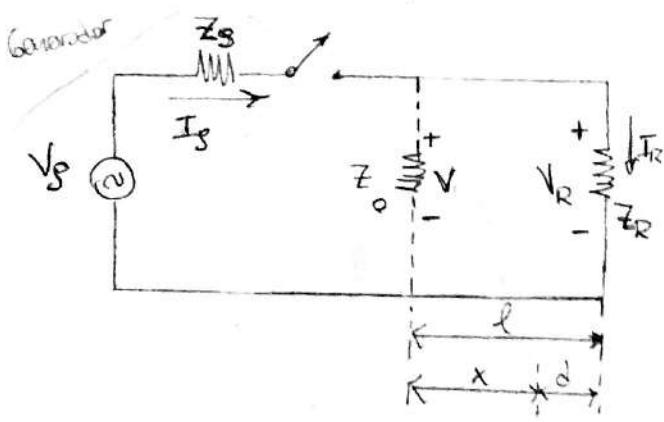
reemplazando en ③ del tema anterior, tenemos:

$$I(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \frac{1}{Z} = -\frac{d(A_1 e^{-\sqrt{Z\gamma} \cdot x} + A_2 e^{+\sqrt{Z\gamma} \cdot x})}{dx} \cdot \frac{1}{Z} = \frac{-1}{Z} (-\sqrt{Z\gamma} A_1 e^{-\sqrt{Z\gamma} \cdot x} + \sqrt{Z\gamma} A_2 e^{+\sqrt{Z\gamma} \cdot x})$$

$$I(x) = \frac{A_1}{\sqrt{Z\gamma}} e^{-\sqrt{Z\gamma} \cdot x} - \frac{A_2}{\sqrt{Z\gamma}} e^{+\sqrt{Z\gamma} \cdot x} \Rightarrow \boxed{I(x) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\delta x} - \frac{A_2}{Z_0} e^{\delta x}} \quad ⑧$$

donde A_1 y A_2 son de medidas en $[M]$, Z_0 es la impedancia característica de la línea, x la distancia desde el extremo del generador y δ es la constante de propagación de la línea.

Ecuación de Onda Completa en Conductores. cálculo de A_1 y A_2 :



en $x = 0$, estamos en el generador, entonces en ⑦ y ⑧:

$$V(0) = A_1 e^{-\delta 0} + A_2 e^{\delta 0} = I_S Z_S = A_1 + A_2$$

$$I(0) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\delta 0} - \frac{A_2}{Z_0} e^{\delta 0} = I_S = \frac{A_1}{Z_0} - \frac{A_2}{Z_0}$$

- Sumando estas ecuaciones, tenemos:

$$I_S Z_S + I_S Z_0 = 2A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{I_S}{2} (Z_S + Z_0) \quad ⑨$$

- restando estas ecuaciones, tenemos:

$$I_S Z_S - I_S Z_0 = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{I_S}{2} (Z_S - Z_0) \quad ⑩$$

Reemplazamos ⑨ y ⑩ en ⑦ y ⑧, tenemos:

$$V(x) = I_S \left(\frac{Z_S + Z_0}{2} \right) e^{-\delta x} + I_S \left(\frac{Z_S - Z_0}{2} \right) e^{\delta x} \quad ⑪$$

$$I(x) = \frac{I_S}{Z_0} \left(\frac{Z_S + Z_0}{2} \right) e^{-\delta x} - \frac{I_S}{Z_0} \left(\frac{Z_S - Z_0}{2} \right) e^{\delta x} \quad ⑫$$

Tensión y corriente en el extremo generador

Si $x = l$, estamos en la carga, entonces en ⑦ y ⑧:

$$V(l) = A_1 e^{-\delta l} + A_2 e^{\delta l} = I_R Z_R$$

$$I(l) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\delta l} - \frac{A_2}{Z_0} e^{\delta l} = I_R$$

- Seando estas ecuaciones, tenemos:

$$I_R Z_R + I_R Z_0 = 2 A_1 e^{-\delta l} \Rightarrow A_1 = I_R (Z_R + Z_0) e^{\delta l} \quad ⑬$$

- Restando estas ecuaciones, tenemos:

$$I_R Z_R - I_R Z_0 = 2 A_2 e^{\delta l} \Rightarrow A_2 = I_R (Z_R - Z_0) e^{-\delta l} \quad ⑭$$

Reemplazando ⑬ y ⑭ en ⑦ y ⑧, tenemos:

$$V(x) = I_R \left(\frac{Z_R + Z_0}{2} \right) e^{\delta(l-x)} + I_R \left(\frac{Z_R - Z_0}{2} \right) e^{-\delta(l-x)} \quad ⑮$$

$$I(x) = \frac{I_R}{Z_0} \left(\frac{Z_R + Z_0}{2} \right) e^{\delta(l-x)} - \frac{I_R}{Z_0} \left(\frac{Z_R - Z_0}{2} \right) e^{-\delta(l-x)} \quad ⑯$$

Tensión y corriente en la carga.

La distancia desde la carga a cualquier punto es $d = l - x$

$$V(x) = I_R \left(\frac{Z_R + Z_0}{2} \right) e^{\delta d} + I_R \left(\frac{Z_R - Z_0}{2} \right) e^{-\delta d} \quad ⑰$$

$$I(x) = \frac{I_R}{Z_0} \cdot \frac{Z_R + Z_0}{2} e^{\delta d} - \frac{I_R}{Z_0} \cdot \frac{Z_R - Z_0}{2} e^{-\delta d} \quad ⑱$$

Tensión y corriente en cualquier punto de la línea.

Coefficiente de reflexión:

$$\Gamma_{se} = \frac{V(x)_r}{V(x)_i} = \frac{\frac{I_S}{2} \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} e^{\delta x}}{\frac{I_S}{2} \frac{Z_S + Z_0}{Z_S - Z_0} e^{-\delta x}} \Rightarrow \Gamma_{se} = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} \cdot e^{2\delta x}$$

Coefficiente de reflexión de tensión en el generador

$$\Gamma_{re} = \frac{V(x)_r}{V(x)_i} = \frac{\frac{I_R}{2} \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-\delta d}}{\frac{I_R}{2} \frac{Z_R + Z_0}{Z_R - Z_0} e^{\delta d}} \Rightarrow \Gamma_{re} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} e^{-2\delta d}$$

Coefficiente de reflexión de tensión en la carga.

Impedancia en cualquier punto de la línea:

$$Z(d) = \frac{V(x)}{I(x)} \Big|_{x=d} = \frac{\frac{I_R}{2} \frac{Z_R + Z_0}{2} e^{\delta d} + \frac{I_R}{2} \frac{Z_R - Z_0}{2} e^{-\delta d}}{\frac{I_R}{Z_0} \frac{Z_R + Z_0}{2} e^{\delta d} - \frac{I_R}{Z_0} \frac{Z_R - Z_0}{2} e^{-\delta d}} = Z_0 \cdot \frac{\frac{Z_R e^{\delta d} + Z_0 e^{-\delta d}}{2} + \frac{Z_R e^{-\delta d} - Z_0 e^{\delta d}}{2}}{\frac{Z_R e^{\delta d} + Z_0 e^{-\delta d}}{2} - \frac{Z_R e^{-\delta d} - Z_0 e^{\delta d}}{2} + \frac{Z_0 e^{-2\delta d}}{2}}$$

$$Z(d) = Z_0 \frac{\frac{Z_R (e^{\delta d} + e^{-\delta d}) + Z_0 (e^{\delta d} - e^{-\delta d})}{2} + \frac{Z_R (e^{-\delta d} - e^{\delta d}) + Z_0 (e^{\delta d} + e^{-\delta d})}{2}}{\frac{Z_R (e^{\delta d} - e^{-\delta d}) + Z_0 (e^{-\delta d} - e^{\delta d})}{2} + \frac{Z_0 (e^{-2\delta d})}{2}} = Z_0 \frac{2 Z_R \cos(\delta d) + 2 j Z_0 \operatorname{sen}(\delta d)}{2 j Z_R \operatorname{sen}(\delta d) + 2 Z_0 \cos(\delta d)} \cdot \frac{1 / \cos(\delta d)}{1 / \cos(\delta d)}$$

Finalmente:

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_R + j Z_0 \operatorname{tg}(\delta d)}{Z_0 + j Z_R \operatorname{tg}(\delta d)}$$

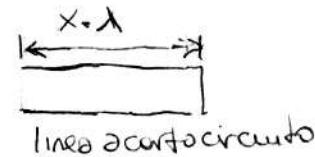
$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_R + Z_0 \operatorname{tgh}(\delta d)}{Z_0 + Z_R \operatorname{tgh}(\delta d)}$$

- Para líneas sin pérdidas ($\alpha = 0 \Rightarrow \delta = j\beta d$)

$$Z(d)_1 = Z_0 \cdot \frac{Z_R + Z_0 \operatorname{tgh}(j\beta d)}{Z_0 + Z_R \operatorname{tgh}(j\beta d)} = Z_0 \cdot \frac{Z_R + j Z_0 \operatorname{tg}(\beta d)}{Z_0 + j Z_R \operatorname{tg}(\beta d)} \quad \operatorname{tgh}(j\beta d) = j \operatorname{tg}(\beta d)$$

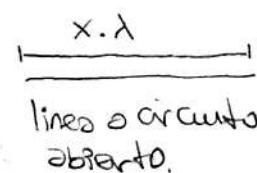
- Para líneas sin pérdida con carga en cortocircuito ($\alpha = 0, Z_R = 0$)

$$Z(d)_2 = Z_0 \cdot \frac{0 + Z_0 \operatorname{tgh}(j\beta d)}{Z_0 + 0 \operatorname{tgh}(j\beta d)} = Z_0 j \operatorname{tg}(\beta d) \rightarrow \text{Complejo puro}$$

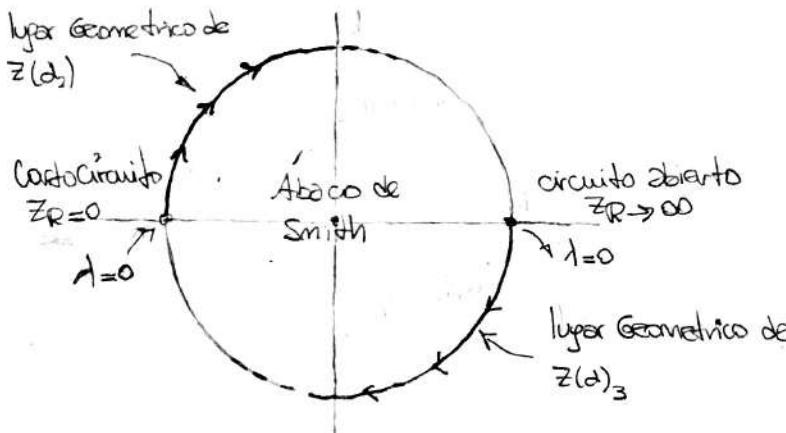


- Para líneas sin pérdidas con carga a circuito abierto ($\alpha = 0, Z_R \rightarrow \infty$)

$$Z(d)_3 = Z_0 \cdot \frac{\infty + Z_0 \operatorname{tgh}(j\beta d)}{Z_0 + \infty \operatorname{tgh}(j\beta d)} = \frac{Z_0}{j \operatorname{tg}(\beta d)} = \frac{-j Z_0}{\operatorname{tg}(\beta d)} \rightarrow \text{Complejo puro}$$

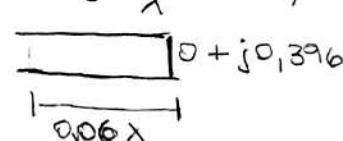


• recordando que $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, para diferentes valores de $d = \frac{\lambda}{16}, \frac{2\lambda}{16}, \frac{3\lambda}{16}, \text{ etc...}$



Con $Z_0 = 1$ estamos en el circuito exterior del óvalo. Un trozo de línea de $\lambda/0,06$ va a tener una impedancia de $0 + j 0,396 \Omega$ a corto circuito $Z_R = 0$.

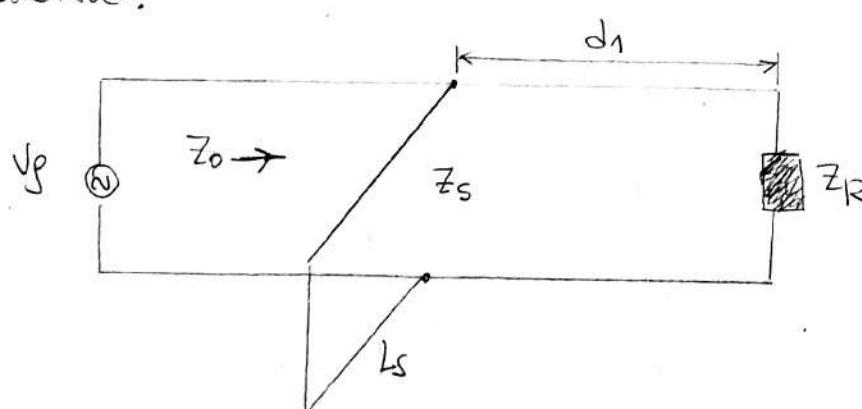
$$\left\{ \begin{array}{l} Z_R = 0 \text{ con } 0,06\lambda \\ Z(d) = Z_0 j \operatorname{tg}(\beta \cdot d) = 1 \cdot j \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0,06\lambda\right) \\ Z(d) = 0 + j 0,396 \end{array} \right.$$



UNIDAD 13: ADAPTACIÓN DE LINEAS DE TRANSMISIÓN

Concepto: Adaptación con 1 stub:

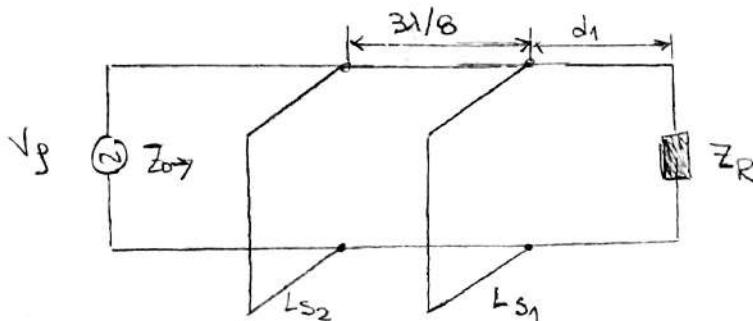
Cuando una línea termina en una $Z_R \neq Z_0$, aparecerán reflexiones en la línea. Esto provoca pérdidas e impide la máxima transferencia de potencia. Puedo adaptar la línea colocando remates de la misma línea de transmisión a cierta distancia de Z_R y de valor definido. Estos remates sintonizados se llaman Stubs; su valor Z_S es puramente imaginario y depende de su longitud.



Ver en el práctico los pasos a seguir.

Adaptación con 2 stub:

La adaptación con 1 stub adapta toda la carga, pero Z_s (o L_s) debe ser regulable (cosa imposible en la práctica). Una solución es usar 2 stub (que tienen entre ellos una separación standard 31/8).



Ver en el práctico los pasos a seguir.

UNIDAD 14: RADIACIÓN

En los capítulos anteriores se han estudiado relaciones entre los vectores de un campo electromagnético, pero no se ha tenido en consideración a los medios mediante los cuales se generan tales campos. Vamos ahora a considerar como están relacionados estos campos con sus fuentes o generadores (cargas y corrientes que lo producen). Hallar \vec{E} y \vec{H} a partir de \vec{J} y \vec{P} no es fácil, se define un paso intermedio que es hallar los vectores potencial magnético \vec{A} y potencial eléctrico \vec{V} .

$\vec{J} \text{ y } \vec{P}$ Directo (difícil)
 $\vec{E} \text{ y } \vec{H}$

Ecuación de Maxwell
Se suponen dadas
casas.

Simple. Se espera que
 \vec{E} y \vec{H} cumplen Maxwell.

para hacer esto 3 métodos

- Metodo heurístico o simple
- Metodo de ecuaciones de Maxwell.
- Metodo directo.

Método simple o heurístico:

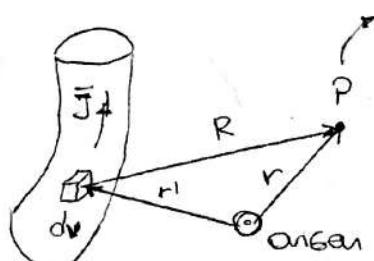
En electroestática se estableció un potencial escalar V relacionado con la distribución de las cargas eléctricas por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dv}{R} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

para campo magnético estático en un medio homogéneo se obtuvo un potencial vectorial \vec{A} relacionado con las corrientes generadoras del mismo por:

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv}{R} \Rightarrow \vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$

Punto de observación. Lejos del elemento dr



r' → punto donde están las fuentes generadoras

r → punto donde calculamos los potenciales

$$R = |r - r'|$$

Los fuentes generadoras del campo electromagnético son los desplazamientos de carga y corriente que varían con el tiempo, es razonable asumir estos potenciales generalizados para las variaciones en el tiempo:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{P(\vec{r}', t)}{R} dv \quad \wedge \quad \bar{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}(\vec{r}', t)}{R} dv$$

teniendo en cuenta el tiempo de propagación (el punto P está lejos) de los sonidos electromagnéticos, es lógico pensar que los potenciales tienen un tipo de propagación ...

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{P(\vec{r}', t - \frac{R}{c_p})}{R} dv$$

$$\bar{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c_p})}{R} dv$$

Se introduce un retraso R/c_p segundos. Por eso se los conoce como potenciales retardados. Haciendo supuesto estos potenciales podría esperarse la obtención de los campos eléctrico y magnético por:

$$\bar{M}\bar{H} = \nabla \times \bar{A} = \bar{J} = \delta E$$

Método de las ecuaciones de Maxwell:

Arranco con las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de continuidad:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \bar{H} = \delta E + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad ①$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad ②$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad ③$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{H} = 0 \quad ④$$

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{y } \bar{M}\bar{H} \text{ es el rotar de algo}$$

Sabiendo que $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{F}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{M}\bar{H} = 0 \Rightarrow \bar{M}\bar{H} = \nabla \times \bar{A}$, sustituyendo en ②:

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\nabla \times \bar{A}}{\mu} \right) = -\nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \bar{E} + \nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Como $\nabla \times (\nabla \cdot \bar{F}) = 0 \Rightarrow \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{V} \Rightarrow \bar{E} = -\nabla \cdot \bar{V} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

$\bar{V} \rightarrow$ escalar $\therefore \nabla \bar{V} \rightarrow$ gradiente

$\bar{A} \rightarrow$ vector $\therefore \nabla \bar{A} \rightarrow$ divergencia.

campo eléctrico en función de los potenciales eléctricos.

Estas ecuaciones nos permiten expresar los campos en función de los potenciales eléctrico y magnético.

Ahora la idea es tener expresiones que relacionen los generadores (\bar{J}, ρ) con los potenciales. Para ello usaremos las ecuaciones ① y ③ donde aparecen los generadores:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad \text{reemplazando ③ y ④} \quad \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \bar{A}}{\mu} \right) = \bar{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \cdot \bar{V} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)$$

$$\text{Como } \nabla \times (\nabla \times \bar{F}) = \nabla \cdot \nabla \bar{F} - \nabla^2 \bar{F} \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = \mu \bar{J} - \mu \epsilon \frac{\partial (\nabla \cdot \bar{V})}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \nabla \cdot \nabla \bar{A} - \mu \bar{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \nabla \cdot \bar{V}}{\partial t} = \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \quad ⑤$$

Sustituyendo ⑤ en ③ :

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla \cdot \bar{V} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow -\nabla \cdot \nabla \bar{V} - \nabla \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2 \bar{V} + \nabla \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad ⑥$$

⑦ y ⑧ no dan una solución única para los potenciales ya que el teorema de Helmholtz dice que todo campo vectorial debido a una fuente finita está especificado de un modo único si se especifican tanto el rotacional como la divergencia del campo.

• Veas que el rotacional de \bar{A} está especificado en $\nabla \times \bar{A} = \mu \bar{J}$ pero su divergencia no. Para esto utilizamos la condición relativista de Lorentz:

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad ⑨$$

Rebocemos las funciones potenciales.

Sustituyendo ⑨ en ⑦, tenemos:

$$\nabla \cdot (-\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}) - \mu \bar{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}} \quad ⑩$$

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J}$$

terminos Generadores

Sustituyendo ⑨ en ⑧, tenemos:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\frac{P}{\epsilon} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{P}{\epsilon}} \quad ⑪$$

$$\nabla^2 V = -\frac{P}{\epsilon}$$

↑
Para campos estaticos

Las soluciones a ⑩ y ⑪ son las ecuaciones de potenciales retardados.

Funciones Potenciales para oscilaciones sinusoidales:

En el estado sinusoidal permanente se simplifican mucho los cálculos con las funciones potenciales. Se puede expresar las siguientes ecuaciones en notación tensorial:

$$\bar{A} = A e^{j\omega t} \quad , \quad \bar{V} = V e^{j\omega t} \text{ sustituyendo:}$$

$$\bar{H} = 1/\mu \cdot \nabla \times \bar{A} \quad ①$$

$$* \nabla \cdot \bar{V} = -\bar{E} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\bar{E} - \frac{\partial(A e^{j\omega t})}{\partial t} = -\bar{E} - j\omega(A e^{j\omega t}) = -\bar{E} - j\omega \bar{A} \Rightarrow \boxed{\bar{E} = \nabla \cdot \bar{V} - j\omega \bar{A}} \quad ②$$

$$* \nabla \cdot \bar{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\mu \epsilon \frac{\partial(V e^{j\omega t})}{\partial t} = -\mu \epsilon j\omega(V e^{j\omega t}) = -j\omega \mu \epsilon \bar{V} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \bar{A} = -j\omega \mu \epsilon \bar{V}} \quad ③$$

$$* \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2(A e^{j\omega t})}{\partial t^2} = \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon (\omega^2)(A e^{j\omega t}) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \bar{A} + \omega^2 \mu \epsilon \bar{A} = -\mu \bar{J}} \quad ④$$

$$* \nabla^2 \bar{V} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} = \nabla^2 \bar{V} - \mu \epsilon \frac{\partial^2(V e^{j\omega t})}{\partial t^2} = \nabla^2 \bar{V} - \mu \epsilon (\omega^2)(V e^{j\omega t}) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \bar{V} + \omega^2 \mu \epsilon \bar{V} = -\frac{P}{\epsilon}} \quad ⑤$$

Las soluciones de ④ y ⑤ son las ecuaciones de los potenciales teniendo en cuenta el retraso de fase de la onda plana viajando en la dirección R . Esta variación de fase está dada por el factor $e^{-j\omega R}$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{M}{4\pi} \int_V \frac{J(\bar{r}')}{R} \cdot e^{-j\omega R} \cdot dV \quad \bar{V}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \int_V \frac{P(\bar{r}')}{R} e^{-j\omega R} \cdot dV$$

despejando \bar{V} de ③ y sustituyendo en ② ∴

$$\bar{E} = \frac{\nabla \cdot \nabla \cdot \bar{A} - j\omega \bar{A}}{j\omega \mu \epsilon} \quad ⑥ \quad ① + ⑥ \text{ demuestran que } \bar{E} \text{ y } \bar{H} \text{ pueden expresarse en función de } \bar{A} \text{ solamente.}$$

Otra forma de ⑥ puede obtenerse de la primera ecuación de Maxwell; reemplazando ① en esta.

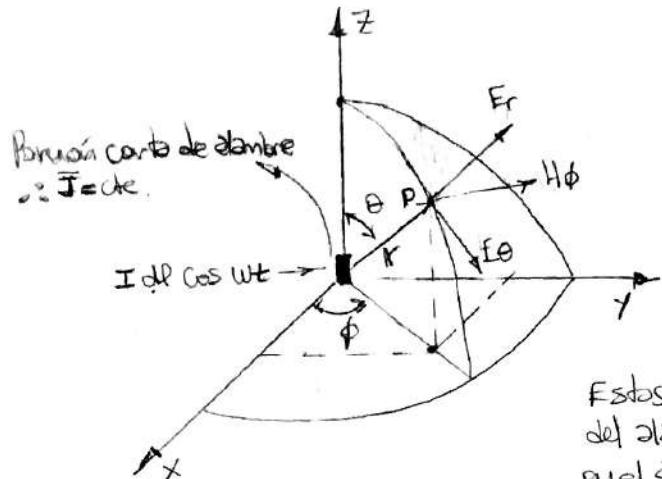
$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \epsilon j\omega \bar{E} = \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \bar{A}}{\mu} \right) = \bar{J} + j\omega \epsilon \bar{E} \Rightarrow \bar{E} = \left(\frac{\nabla \times \nabla \times \bar{A} - \bar{J}}{\mu} \right) \frac{1}{j\omega \epsilon}$$

$$\therefore \bar{E} = \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \left(\nabla \times \nabla \cdot \bar{A} - \mu \bar{J} \right) \quad ⑦$$

$\bar{J}=0$ para calcular \bar{E} en el espacio donde no existen corrientes circulantes.

Elemento de Corriente alterna (dipolo eléctrico oscilante):

Corriente filamentosa I circulando a lo largo de un segmento elemental dl . Si se conoce el campo electromagnético de este "elemento" puede calcularse el campo electromagnético de cualquier antena que tenga una distribución de corriente especificada.



El problema consiste en calcular el campo electromagnético en un punto P , generado por un elemento de corriente alterna $I \cdot dl \cos \omega t$ situado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas. El primer paso es obtener el potencial \bar{A} en P :

$$A(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}(t - r/\bar{r})}{\bar{r}} dV$$

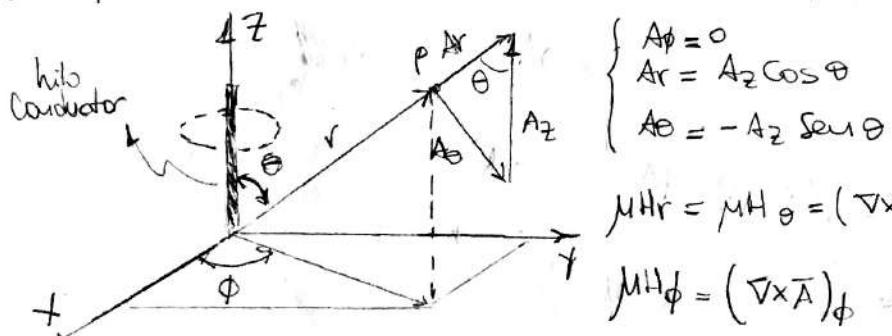
$V \rightarrow$ Volumen del elemento de corriente

Estos integrales consisten en integrar sobre el área transversal del alambre y luego integrar a lo largo de su longitud. \bar{J} intrínseca al área transversal y como es constante a lo largo de su longitud la integración en la longitud de $I \cdot dl$:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cos \omega t}{\bar{r}}$$

El potencial vector tiene la misma dirección que el elemento de corriente en este caso \hat{z}

La intensidad del campo magnético \bar{H} se obtiene de $\mu \bar{H} = \nabla \times \bar{A}$. Como el elemento de corriente está paralelo al eje \hat{z} la intensidad de \bar{H} estará a su alrededor, por lo tanto la componente de \bar{H} estará solo en la componente ϕ las otras dos componentes no existen $H_r = H_\theta = 0$.



$$\mu H_r = \mu H_\theta = (\nabla \times \bar{A})_r = (\nabla \times \bar{A})_\theta = 0$$

$$\mu H_\phi = (\nabla \times \bar{A})_\phi \quad \text{resolviendo obtenemos:}$$

$$H_\phi = \frac{I \cdot dl \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{-w \sin \omega t'}{r \cdot \bar{r}} + \frac{\cos \omega t'}{r^2} \right]$$

La intensidad del campo eléctrico se obtiene $\nabla \times \bar{E} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ (en el espacio libre $J=0$) \Rightarrow

$$\bar{E} = \frac{1}{\epsilon} \int \nabla \times \bar{E} dt \quad \text{como } (\nabla \times \bar{E})_\phi = 0 \quad \text{solo existe } E_r + E_\theta, \text{ resolviendo:}$$

$$E_\theta = \frac{I \cdot dl \sin \theta}{4\pi \epsilon} \left(\frac{-w \sin \omega t'}{r \cdot \bar{r}^2} + \frac{\cos \omega t'}{r^2} + \frac{\sin \omega t'}{r^3 w} \right)$$

$$E_r = \frac{2 I \cdot dl \cos \theta}{4\pi \epsilon} \left(\frac{\cos \omega t'}{r^2} + \frac{\sin \omega t'}{r^3 w} \right)$$

- Los términos $1/r^3$ son llamados de radiación, predominan lejos de $I \cdot dl$ donde r es muy grande. Resulta del tiempo finito de propagación y no se considera en campos estáticos. Contribuye a un flujo de energía que se aleja de la fuente. Es un término nuevo no estaba presente en corriente continua

Los términos $1/r^2$ son de inducción. Predomina cerca de I_{dc} donde $r \ll \lambda$. Contribuye a un flujo de electricidad que queda almacenado en el campo durante $T/4$ y devuelto al circuito al siguiente $T/4$. Con lo que llegamos a $H_0(t)$ que es la ley de Biot-Savart.

- El término $1/r^3$ se llaman electrostáticos. Campos de un dipolo electrostático.

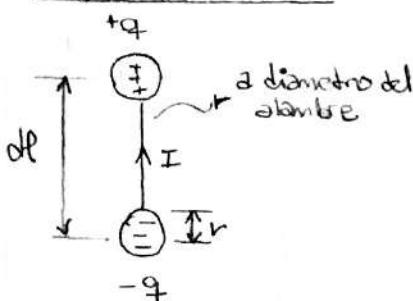
Relación entre un elemento de corriente y un dipolo:

El hipotético elemento de corriente (visto anteriormente) requiere que exista una acumulación de cargas dada por:

$$\frac{dq}{dt} = I_c \cos \omega t \rightarrow q = \frac{I_c}{\omega} \sin \omega t$$

O sea que aumenta en un extremo y disminuye en otro. Vamos a analizar tres casos: dipolo hertziano, cadena de dipolos hertzianos y antena lineal.

- Dipolo hertziano: Son dos esferas unidas por un cable por donde circula la corriente.

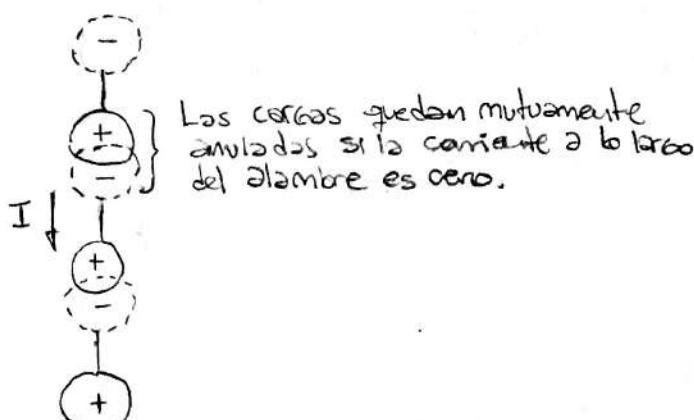


Condición $a \leq r \leq dl \leq \lambda$ la corriente en el alambre es uniforme.
El campo producido es:

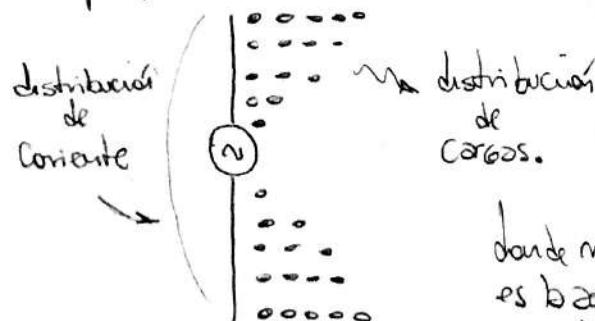
$$E_r = \frac{2 I dl \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega r^3} = \frac{2 q dl \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{I dl \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega r^3} = \frac{2 q dl \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

- Cadena de dipolos hertzianos: mismo caso anterior, pero los dipolos forman una cadena. Los términos r^{-3} se desvanecen y quedan los de radiación. No hay acumulación de cargas en sus extremos, la corriente es uniforme en todo el circuito, la corriente fluye de uno a otro.



- Antena lineal: Si la distribución de corriente no es uniforme, la distribución será como el caso anterior pero las cargas adyacentes no se anulan por completo y hay acumulación de cargas en la superficie del alambre.



donde mayor es la corriente menor es la acumulación de cargas en la antena.

Potencia radiada por un elemento de corriente:

El flujo de potencia por unidad de área en el punto "P", estará dado por el vector de Poynting en tal punto. ($C = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = r^2 \rightarrow$ Velocidad de la luz)

$$\bar{P}(t) = \bar{E} \times \bar{H} = \bar{P}_\theta + \bar{P}_r \quad \text{dado } \bar{P}_\theta = -E_r H_\phi \quad \text{y} \quad \bar{P}_r = E_\theta H_\phi$$

$$\bar{P}_\theta = -E_r H_\phi = \frac{I^2 d\theta^2 \operatorname{sen} 2\theta}{16 \pi^2 C} \cdot \left(\frac{-\cos 2wt}{r^4 C} - \frac{\operatorname{sen} 2wt}{2wr^5} + \frac{w \operatorname{sen} 2wt}{2r^3 C^2} \right)$$

∴ valor medio de $\bar{P}_\theta = \frac{1}{T} \int_T \bar{P}_\theta dt = 0$ (todos los términos son senoidales y cogenoidales)

$\bar{P}_r \rightarrow$ potencia entretenida. flujos transitorios que van y vienen en la dirección θ sin producir flujo neto de potencia.

$$\bar{P}_r = E_\theta H_\theta = \frac{I^2 d\theta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{16 \pi^2 C} \left[\frac{\operatorname{sen} 2wt}{2wr^5} + \frac{\cos 2wt}{r^4 C} + \frac{w \operatorname{sen} 2wt}{r^3 C^2} + \frac{w^2 (1 - \cos 2wt)}{2r^2 C^3} \right]$$

∴ el valor medio de $\bar{P}_r = \frac{1}{T} \int_T \bar{P}_r dt = \frac{w^2 I^2 d\theta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{32 \pi^2 r^2 C^3 C}$ como $C = \frac{1}{\mu \epsilon}$ $\mu = \frac{1}{C^2 \epsilon}$ $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

$$\bar{P}_r = \frac{\eta}{2} \left(\frac{w I d\theta \operatorname{sen} \theta}{4 \pi r C} \right)^2 \left[\frac{w}{M^2} \right]$$

① P_r es el único término de $\bar{P}(t)$ que contribuye al flujo medio de potencia saliente.

$$\therefore \eta = \frac{1}{CE}$$

Ahora calculamos la potencia total radiada por un elemento de corriente. Hacemos la integral de ① en una superficie esférica centrada en el elemento de corriente $dS = 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta$.

$$P_{\text{tot}} = \iint_S \bar{P}_r dS = \int_0^\pi \frac{\eta}{2} \left(\frac{w I d\theta \operatorname{sen} \theta}{4 \pi r C} \right)^2 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{\eta w^2 I^2 d\theta}{16 \pi C^2} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta d\theta = \frac{\eta w^2 I^2 d\theta}{12 \pi C^2}$$

en donde I es la corriente máxima, pero $I = \sqrt{2} I_{\text{ef}}$ ∴

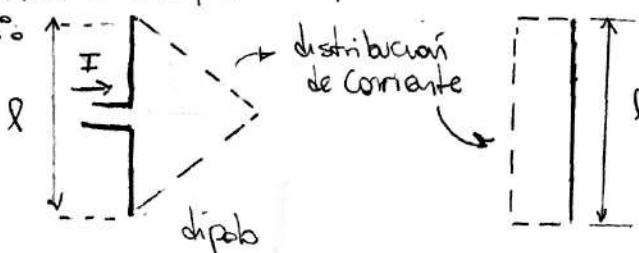
$377 \Omega \rightarrow$ impedancia del vacío

$$P_{\text{tot}} = \frac{\eta (2\pi f)^2 (\sqrt{2} I_{\text{ef}})^2 d\theta}{12 \pi \lambda^2 f^2} = \frac{\eta 4 \cdot \pi^2 f^2 \cdot 2 I_{\text{ef}}^2 d\theta}{12 \pi \lambda^2 f^2} = \frac{120 \pi \cdot \pi f \cdot 2 \cdot I_{\text{ef}}^2 \cdot d\theta}{3 \lambda^2}$$

$$\text{Pot} = 80 \left(\frac{\pi d\theta}{\lambda} \right)^2 \cdot I_{\text{ef}} \quad [\text{W}] \quad \text{dado } R_{\text{rad}} = 80 \left(\frac{\pi d\theta}{\lambda} \right)^2 \quad \text{se llama resistencia de radiación}$$

Aplicación a antenas Cortas:

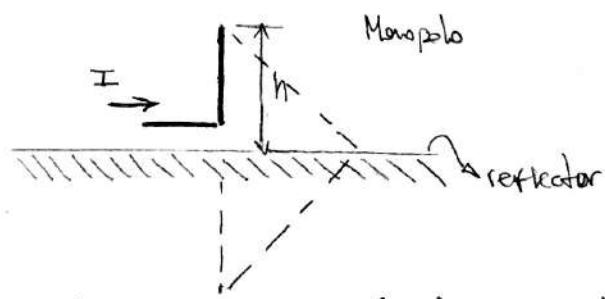
El hipotético elemento de corriente es útil en la teoría, pero no es una antena práctica. En una antena alimentada en su centro de longitud muy corta en la amplitud de la corriente disminuye uniformemente desde un máximo en el centro a cero en sus extremos. La corriente disminuye a la mitad en el dipolo respecto del elemento de corriente y como la potencia cae a la cuarta parte ∴



elemento de corriente.

$$R_{\text{rad}} = 20 \left(\frac{\pi l}{\lambda} \right)^2 \quad [\Omega] \quad ①$$

El monopolo de altura h , o antena vertical alimentada sobre un plano reflector, radió la mitad de potencia que el cono parabólico dipolo.



$$R_{rad} = \frac{20}{2} \left(\frac{\pi \lambda}{\lambda} \right)^2 = 10 \left(\frac{\pi \cdot 2h}{\lambda} \right)^2$$

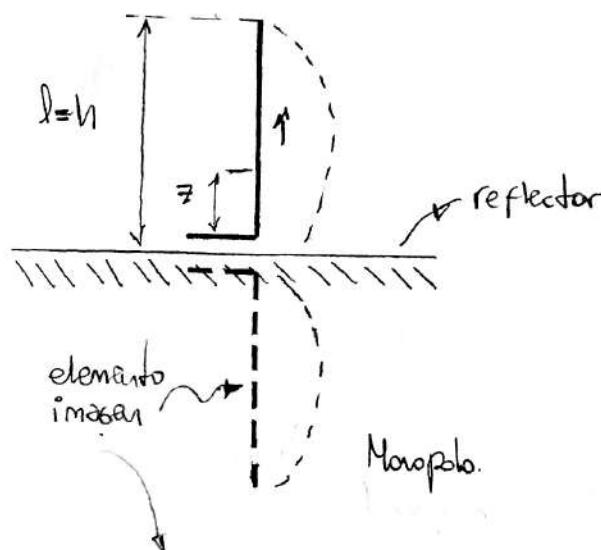
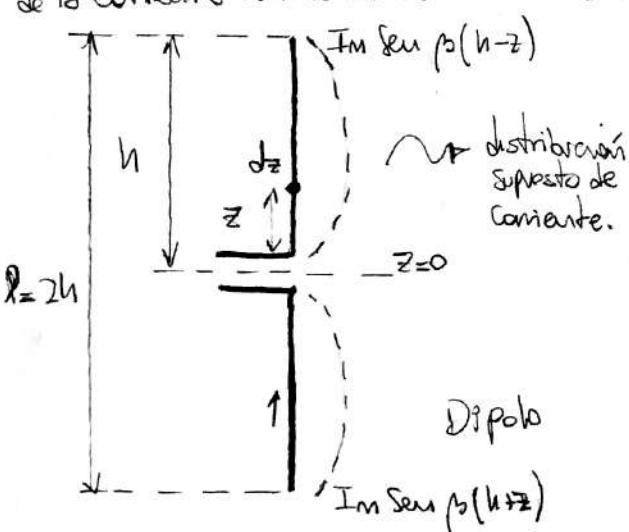
$$\therefore R_{rad} = 40 \left(\frac{h \pi}{\lambda} \right)^2$$

① y ② solo sirven para antenas muy cortas. Son aproxi. para dipolos hasta $\lambda/4$ y monopolos de $h = \lambda/8$.

Distribución supuesta de corriente:

Para hallar el campo E y H de antenas más largas debes conocer la distribución exacta de corriente, lo cual es difícil. Por eso puede sugerirse una distribución sinusoidal aproximada.

Suponiendo que una antena alimentada en su centro es una linea de transmisión en circuito abierto en donde se separa el tramo final de la misma, nos sugiere que tendremos una distribución sinusoidal de la corriente con nodos de intensidad en sus extremos.



La antena vertical (de altura $h = \lambda/2$) alimentada respecto de un plano grande perfectamente conductor tiene la misma característica de radiación sobre el plano q' la de la antena dipolo de longitud λ en el espacio libre.

UNIDAD 15 : ANTENAS

Introducción:

Una antena es un conductor metálico diseñado para emitir o recibir ondas electromagnéticas desde o hacia el espacio libre. Tiene dos funciones:

- 1) Convierte Voltaje en energía electro-magnética o viceversa.
- 2) Adapta la impedancia interna del generador a la del espacio.

Parámetros:

- Impedancias ($Z_0 \rightarrow$ característica, Z_e de entrada)
- Longitudes [H_e y λ_e efectiva], H (eléctrica)
- Coeficientes (de onda o de fase β y de atenuación)
- Resistencias (de radiación R_d , inductancia L_d , capacitancia C_d y reactancia X_d)
- Factor de calidad Q , ancho de banda BW .
- Directividad D , área efectiva A .

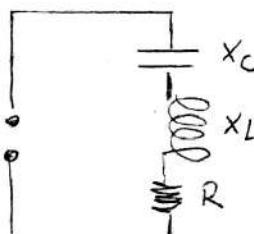
Impedancias:

- Impedancia característica (Z_0): depende de la relación longitud/diámetro conductor y de la frecuencia. Como varía a lo largo de la antena se usa el valor medio de la misma.

$$Z_{0p} = 120 \ln \frac{2\pi r}{a}$$

$r \rightarrow$ dist. al punto de alimentación
 $a \rightarrow$ radio del conductor.

- Impedancia de entrada (Z_e): es la que presenta la antena en su punto de alimentación. Se debe conciliar para adaptar con la Z del generador. Representación de Z_e de un dipolo:

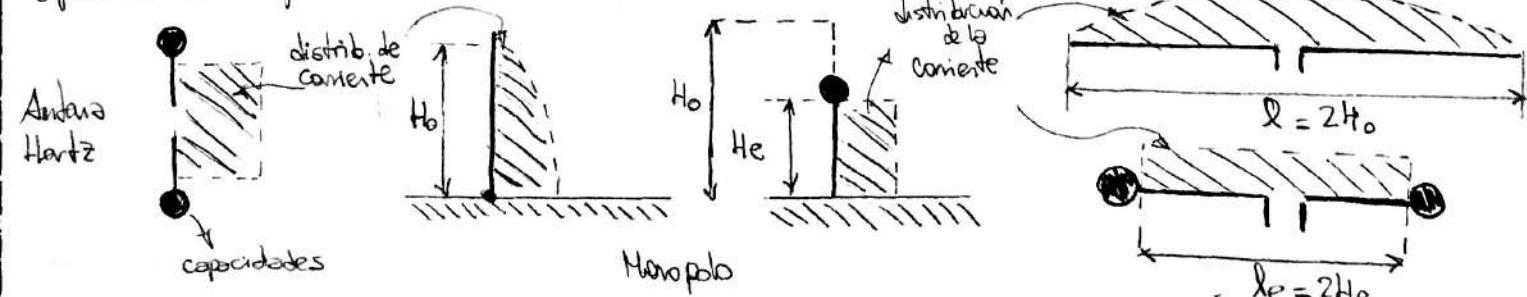


- Con $\lambda > \lambda/4$ $Z_e = R + X_L$
- Con $\lambda < \lambda/4$ $Z_e = R + X_C$
- Con $\lambda = \lambda/4$ $Z_e = R$ (la antena entra en resonancia)

$$|Z_e| = \sqrt{Z_0^2 + X_e^2} = Z_0 \frac{\sinh^2(2\alpha H) + \sin^2(2\beta H)}{\cosh^2(2\alpha H) - \cos(2\beta H)}$$

Longitudes:

- Longitud efectiva: si se acorta la longitud de una antena y se termina en sus extremos con unos capacitores adecuados es posible conseguir una distribución uniforme de la corriente y que la onda radiada sea la misma que sin acortar. Esta longitud acortada es llamada longitud efectiva. en dipolo y altura efectiva en monopolo.



$$H_e = \frac{\tan(\beta H_o / 2)}{\beta}$$

$$\lambda_e = 2H_e$$

$H_o \rightarrow$ longitud física.

- Longitud eléctrica H : es la longitud en donde la corriente se hace nula. Esto es debido al efecto terminal el cual se debe a un aumento de L_d y disminución de C_d en los extremos.

Longitud física: Monopolo βH_o Dipolo $2\beta H_o$

Longitud eléctrica: Monopolo βH Dipolo $2\beta H$

$$H = H_o \cdot 1,05$$

Coeficientes o constantes:

- Constante de fase β : cantidad de radianes que le corresponden a cada metro de longitud de onda.

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad [\text{rad/m}]$$

- Coeficiente de atenuación α : determina la perdida de energía por metro a lo largo de la antena

$$\boxed{\alpha = \frac{R_{rv}}{H \cdot Z_0}} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Nepel} \\ \text{m} \end{array} \right] \quad R_{rv} \rightarrow \text{resist. de radiación en el viento de Corriente.}$$

Resistencias, inductancia, capacitancia:

- Resistencia de radiación R_{rv} : capacidad que tiene la antena de disipar la energía que recibe del generador, radiándola al espacio. Puede estar referido a dos puntos a) el punto por el que circula I_{max} . b) el punto de alimentación. R_{rv} depende de H/λ , hay que recurrir a una tabla para hallar su valor.

- Inductancia L_a : resultante de todas las inductancias distribuidas a lo largo de la antena.

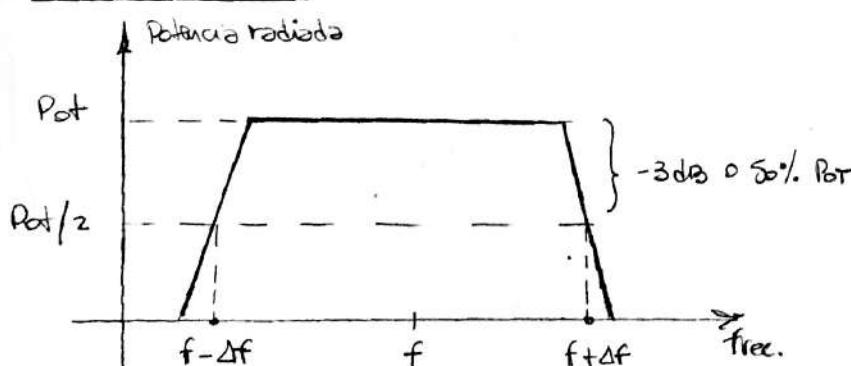
$$\boxed{L_a = \frac{Z_0}{8f}}$$

- Capacitancia C_a : idem al anterior.

$$\boxed{C_a = \frac{2}{\pi^2 f Z_0}}$$

- reactancia X_a : suma vectorial de L_a y C_a .

Factor de Calidad:



- factor de calidad Q : determina la variación de frecuencia, respecto de la de trabajo $\Delta f/f$ para q' la potencia radiada esté dentro de los límites aceptables (50% de pot.)

$$\boxed{Q = \frac{\pi Z_0}{4 R_{rv}}}$$

- Ancho de banda BW :

$$\boxed{BW = 2 \Delta f = \frac{2 \cdot \text{freq. resonancia}}{Q}}$$

Directividad y área efectiva:

Recordando el elemento de corriente en coordenadas esféricas. \vec{E} y \vec{H} varían si el punto P se mueve por la superficie de la esfera $r = \text{cte}$. La capacidad de concentrar la energía de los campos E y H en cuartos sestiales se conoce como Ganancia directiva G_d . (con $r = \text{cte}$ $G_d = f(\theta, \phi)$).

- Directividad D: Valor de G_d en la dirección de máxima radiación. Tanto D con G_d son función de la pot. media radiada. Si son funciones de potencia de ant. \therefore el result. es la ganancia de potencia G_p .

$$G_d = G_{d\max} = \frac{120}{R_N} \left[1 - \cos(\alpha_H) \right]^2$$

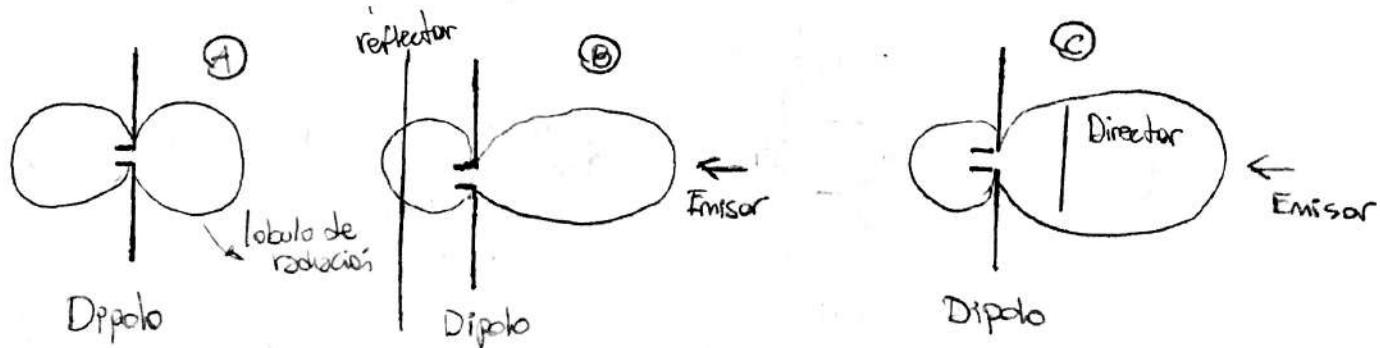
si todo la potencia de entrada es radiada $D = G_p$
y el rendimiento será del 100%.

$$G_p = 10 \log \frac{G_{d\max}^2 (\text{Ant. prueba})}{G_{d\max}^2 (\text{Ant. patrón})}$$

- Área efectiva A: Cociente entre la potencia disponible en sus terminales y la potencia por unidad de área de una onda polarizada adecuadamente.

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{d\max} \quad [\text{M}^2]$$

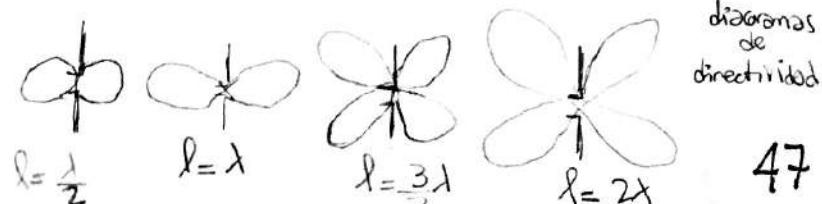
Efecto direccional de una antena:



- A) Radió y recibe con la máxima intensidad horizontalmente derecho e izquierdo.
- B) Si se añade un reflector sin estar eléctricamente unido y algo más largo, se deforma la característica radial hacia la derecha. Si es una antena receptora captará mejor la de la derecha y peor desde la izquierda.
- C) Otra forma de obtener un efecto direccional es colgar frente al dipolo entre este y la emisora un elemento más corto q' la antena dipolo que recibe el nombre de director.

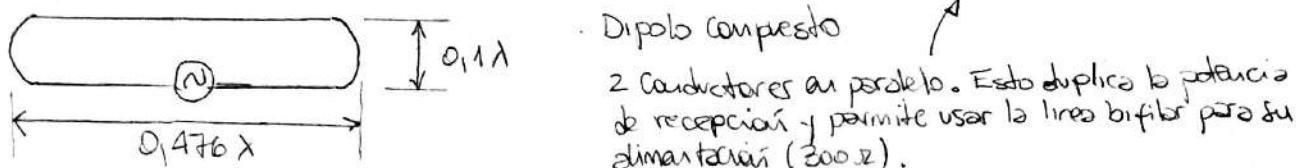
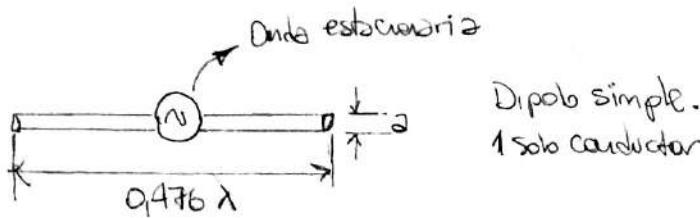
El efecto direccional se expresa por la relación antena-posterior. Cociente entre la tensión en los terminales del dipolo cuando este apunta hacia el emisor y la tensión cuando se lo gira 180° respecto de la posición anterior. En un dipolo la relación es 1:1, si se agrega reflector 3:1 y si además le agregamos un director 6:1

$$\text{dB} = 20 \log \frac{A}{P}$$



Tipos de Antena:

- Dipolo onda corta: es la clase más simple y la más usada. Se compone de dos conductores eléctricos de misma longitud. Ambos están en el mismo eje y están alimentados en el centro mediante una onda estacionaria (antenas lineales) o por medio de corriente de corriente (antenas de ondas superficiales). Manejan las frecuencias de "onda corta" (10 a 180 m o 17 a 30 MHz). Se dividen en dipolos simples y compuestos.



Si llamamos R_{11} y R_{22} a las resistencias de cada varilla R_{12} y R_{21} son las resistencias mutuas.
Si están muy próximas y tienen el mismo diámetro se cumple $R_{11} = R_{22} = R_{21} = R_{12}$ ∴ la potencia total es:

$$W_T = W_1 + W_2 = (R_{11} + R_{12}) I_1^2 + (R_{22} + R_{21}) I_2^2 = 4R I^2$$

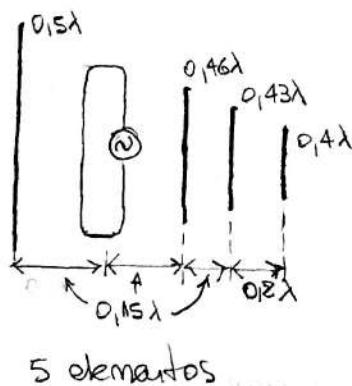
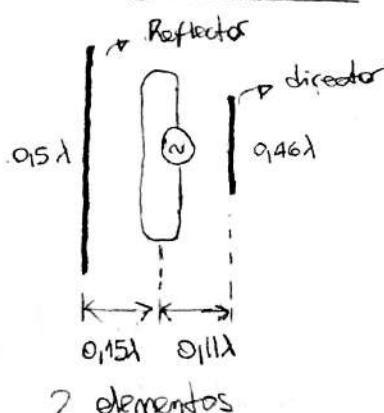
$$W_T = 4RI^2$$

$R = 73,5 \Omega$ y $I_1 = I_2$ por tratarse del mismo conductor.
 $R_{eq} = 4 \cdot R = 294 \Omega$

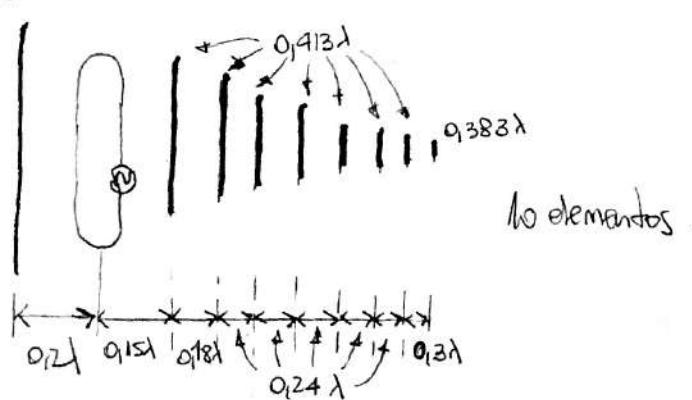
- Antena Yagi: Es un derivado del dipolo de Onda Corta. Pues consta de uno o varios dipolos de Onda Corta para la transmisión o recepción (elementos activos) y/o reflectores llamados (elementos pasivos).

$$G = 10 \log n$$

donde n es el nro. de dipolos



La separación y la longitud de los elementos pasivos son empíricos, con estos se logra un rendimiento óptimo. Ya que de otra forma los campos de los elementos interfieren anulándose entre sí y así bajaría la ganancia.



- Las antenas se pueden poner en paralelo. De esta forma se duplica la ganancia. Se colocan a $\lambda/2$ entre sí, con la alimentación a $\lambda/4$. El nro de elementos tiene que ser el mismo.
- En una antena real, la resistencia del suelo se suma a la imp. de entrada de la antena y disminuye el rendimiento. Creamos una tierra superficial (arco de cobre de radio finito).

UNIDAD 16 : FIBRAS OPTICAS

Introducción:

Una fibra óptica es un conductor (de vidrio o de plástico) flexible o rígido, que puede transmitir una luz que se introduce en uno de sus extremos para salir por el otro. El haz se mantiene dentro de la fibra óptica por medio de sucesivas reflexiones internas.

Índice de refracción:

Cuando un haz de luz que se propaga por un medio, incide a otro distinto, una parte del haz se refleja y otra parte sufre una refracción, que consiste en el cambio de dirección del haz. Para esto se utiliza el índice de refracción del material, que se utiliza para calcular diferencias entre el ángulo de incidencia y el de refracción del haz.

$$n = \frac{c}{n'}$$

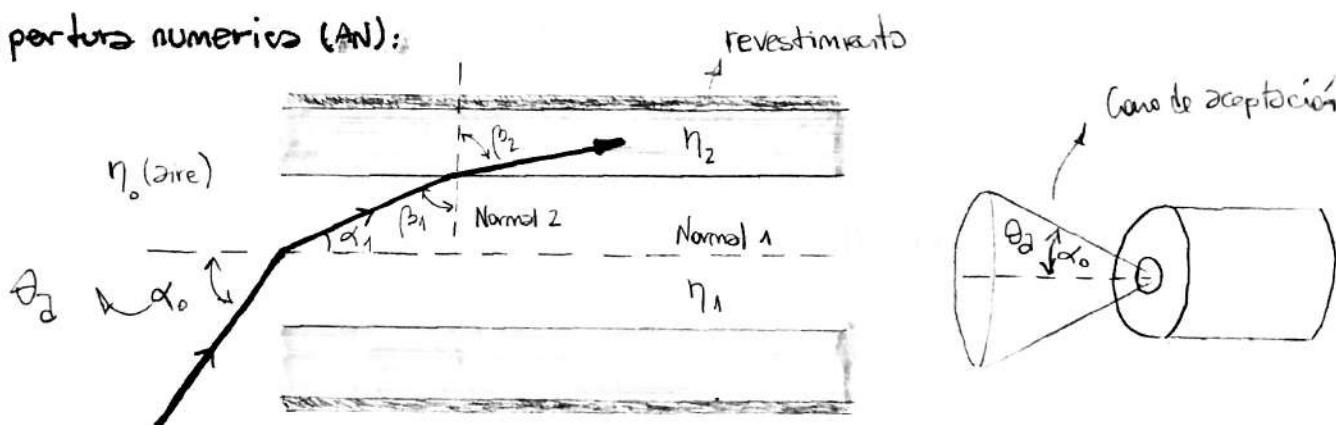
$c \rightarrow$ Velocidad de la luz en el vacío

$n' \rightarrow$ Velocidad en el medio

en el vacío $n=1$; en otro medio $n > 1$. Para que se dé la reflexión interna en una fibra óptica se debe cumplir:

- 1) El haz incidente debe provenir de un medio más denso
- 2) El ángulo de ese haz con la superficie de separación debe ser menor que el ángulo crítico, el cual depende solo de los n de los materiales de la fibra óptica.

Apertura numérica (AN):



Vemos que entra un rayo incidente con un ángulo α_0 a la fibra. Cuando este pasa del aire al medio n_1 , su ángulo respecto de la normal 1 disminuye $n_1 > n_0$ y se cumple la ley de Snell:

$$n_0 \operatorname{sen} \alpha_0 = n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \quad ①$$

Cuando el haz pase del medio 1 al medio 2, esta vez el rayo se alejará de la normal $n_1 > n_2$

$$n_1 \operatorname{sen} \beta_1 = n_2 \operatorname{sen} \beta_2 \quad ②$$

despejando $\operatorname{sen} \alpha_1$ de ① y $\operatorname{sen} \beta_1$ de ② los eleva al cuadrado y los sumo ∵

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha_1 &= \frac{n_0}{n_1} \cdot \operatorname{sen} \alpha_0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha_1 = \left(\frac{n_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{n_1} \right)^2 \\ \operatorname{sen} \beta_1 &= \frac{n_2}{n_1} \operatorname{sen} \beta_2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta_1 = \left(\frac{n_2 \operatorname{sen} \beta_2}{n_1} \right)^2 \end{aligned} \right\} \therefore \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \operatorname{sen}^2 \beta_1 = \frac{n_2^2 \operatorname{sen}^2 \beta_2 + n_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{n_1^2} = 1$$

Sen ángulos complementarios

$$\therefore \operatorname{sen} \alpha_0 = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2 \operatorname{sen}^2 \beta_2}{n_0^2}} \quad (3)$$

En (3) $n_0 = 1$ por ser el aire.. Hay un ángulo mínimo β_1 crítico para el cual $\beta_2 = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} \beta_2 = 1$ logrando reflexión interna total.

$$\therefore AN = \operatorname{sen} \alpha_0 \Big|_{n_0=1} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \Big|_{\beta_2=90^\circ}$$

El sen del ángulo α_0 se llama apertura numérica AN.
 $\alpha_0 = \theta_a$ ángulo de aceptación

Modos de propagación:

Teniendo AN se puede definir la frecuencia normalizada como:

$$f_N = \frac{2\pi d}{\lambda} AN$$

$d \rightarrow$ diámetro del núcleo

$\lambda \rightarrow$ longitud de onda del haz.

Se define modos de propagación como las trayectorias que puede seguir el haz incidente dentro del núcleo. Esto da lugar a dos tipos de fibras ópticas los Multimodo y Monomodo:

$$N = \frac{f_N^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{(\pi d \cdot AN)^2}{\lambda^2}$$

Número de modos de propagación.

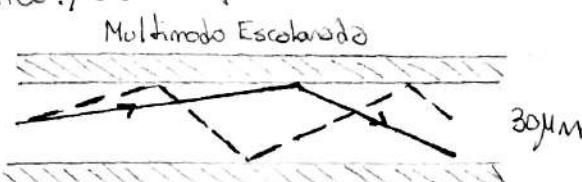
Para una apertura numérica α_0 medida q' se reduce el diámetro disminuye el nro del modo de propagación. Cuando el radio llega a ser del orden de λ se tiene un modo simple de propagación.

- fibras multimodo:

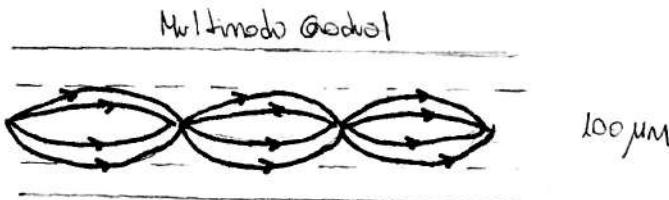
los haces de luz van por varios caminos y no llegan a la vez. Son usados en aplicaciones de corta distancia (menores a 2 km) debido al gran tamaño del núcleo son fáciles de conectar. Siem. el η del núcleo se divide en indice escalonado (índice constante en todo el ancho del núcleo, con alta dispersión nodal) e índice gradual (el índice no es constante, disminuye conforme nos alejamos del eje, tiene menos dispersión nodal).

fibras Monomodo:

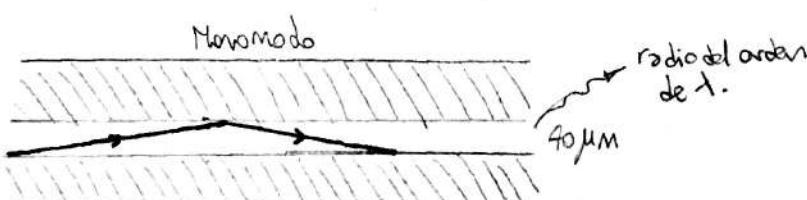
Se propaga un solo haz de luz, se logra reduciendo el diámetro del núcleo hasta aprox. 10 micrones. El haz es paralelo al eje de la fibra. Se las usa en distancias de hasta 400 km y cuando se requieren grandes tasas de información. Existe una pequeña dispersión debido a los distintos $n(\lambda)$ de los andares que componen el espectro cromático y debido a que el reducido núcleo no adapta bien el haz incidente.



Los diferentes retardos de los haces limitan la tasa de información.



Proporciona menores retardos



Atemación:

Hay dos tipos de perdidas los lineales y los no lineales. Estas ultimas dependen del nivel de señal e imponean un límite en la potencia a usar, y cuyos efectos buscan minimizarse con el diseño. Respecto de las perdidas lineales se tienen:

- * Por observación del material.
 - * « dispersión del material.
 - * Acoplamiento del modo al campo de radiación (cuando se suelta la fibra)
 - * Radiación dirigida a las curvas (anexa al diseño de fibra)
 - * Modos de fuos.

Absorción del material: En el vidrio la absorción de energía se produce por

- Interacción entre factores y moléculas que vibran (infra rojo)
 - Límite de absorción fundamental debido a los é que vibran con frecuencias cercanas al ultravioleta.
 - Concentración y estado de oxidación de impurezas.
 - Presencia de hidroxilo
 - Fallos estructurales del material

- Perdidas por dispersión del material: Puede ser por dos causas

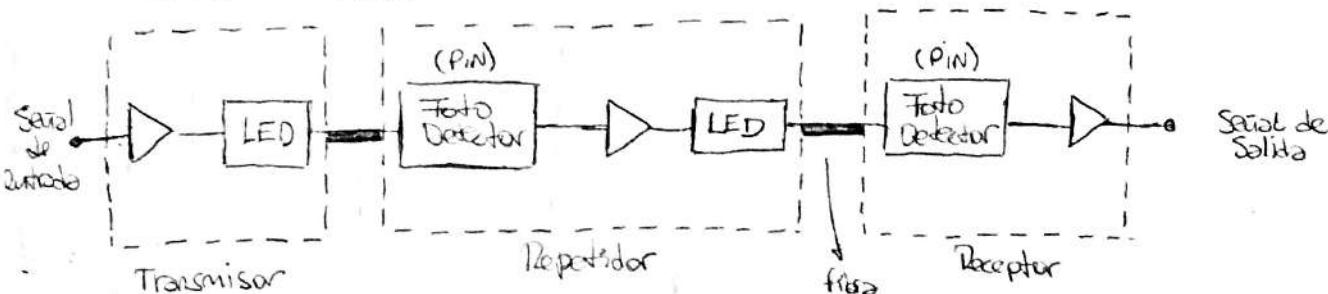
- falta de homogeneidad: un $\Delta h \Rightarrow$ dispersión de λ . La attenuación es proporcional a $1/\lambda$ y la dispersión es difusa.
 - Conversión de luz en calor: producido por iones de transmisión y moléculas de H_2O en el nuclo.

Frautes de bz:

- LED: Señal de arseniuro de galio. Proporciona una fuente de luz coherente $\lambda \approx 850$ nm. Es económico, funciona a bajas temperaturas, maneja potencias de hasta 1 mW. No requiere modulación externa.

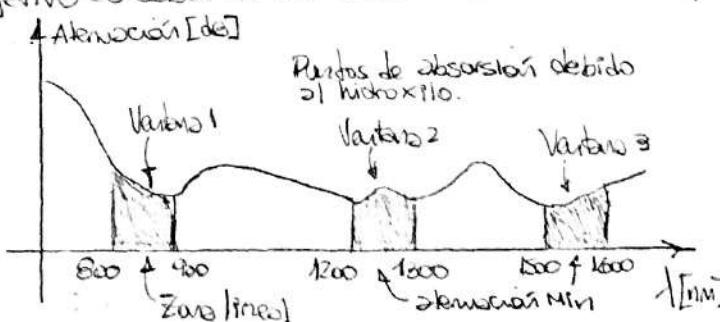
LASER: Es una fuente semi-coherente con alta radiación. Maneja potencias de de 3 a 5 mw. Tiene menor vida útil (10 000 hs) y su excitación es más compleja. Mayor ancho que el led 2 um contra 50 nm.

Sistemas de detección:



Análisis de oportunidad:

El objetivo es saber si conviene o no usar fibra óptica.



Vantagens:

- Diámetro y peso reducido
 - flexibles.
 - inmunidad al ruido
 - Baja perdida de señal
 - No se puede captar información desde el exterior de la fibra.

Desventajas:

- Para su fabricación hace falta mayor fuerza que para los cables metálicos.
 - Son delicados.
 - Cartucho de los LASER.