Campos Electromagnéticos
y
Medios de Enlace
Entre Transmisor y Receptor

UNIVERSITAS
Editorial Científica Universitaria
CÓRDOBA

Ing. Antonio García Abad

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS
y
MEDIOS DE ENLACE

Entre Transmisor y Receptor

Educación por Competencias

"Modelo de aprendizaje centrado en el estudiante"

UNIVERSITAS
C Ó R D O B A
EDITORIAL CIENTÍFICA UNIVERSITARIA
Pje España 1467. Te/Fax: 4680913. (5000) Córdoba. Argentina – editorialuniversitas@yahoo.com.ar

Diseño de Tapa: Universitas
Edición: Universitas
Producción Gráfica: Universitas.

Esta Editorial realiza venta directa a público y Librerías, prescindiendo de distribuidores, para tratar que el libro llegue al lector al menor precio posible. Los pedidos se pueden realizar a la dirección de la Editorial o al siguiente correo electrónico:

Email: editorialuniversitas@yahoo.com.ar

García Abad, Antonio

Campos electromagnéticos y medios de enlace : entre transmisor y receptor . - 4a ed. - Córdoba : Universitas Córdoba, 2015.

424 p. ; 25x17 cm.

ISBN 978-987-1457-90-8

1. Campo Electromagnético.

CDD 537.622 6

Prohibida su reproducción, almacenamiento y distribución por cualquier medio, total o parcial sin el permiso previo y por escrito de los autores y/o editor. Esta también totalmente prohibido su tratamiento informático y distribución por internet o por cualquier otra red. Se pueden reproducir párrafos citando al autor y editorial y enviando un ejemplar del material publicado a esta editorial.

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.

© 2004 Primera Edición. UNIVERSITAS.
© 2005 Segunda Edición. UNIVERSITAS.
© 2007 Tercera Edición. UNIVERSITAS.
© 2007 Tercera Edición. Revisada y Corregida. UNIVERSITAS
© 2015 Cuarta Edición. UNIVERSITAS
© 2018 Cuarta Edición. Corregida y Mejorada. UNIVERSITAS

SanJurjo, Liliana: *El curriculum formal de la asignatura puede diferir parcialmente de los contenidos desarrollados en este libro, dejando que cada Profesor instrumente un curriculum en acción; teniendo en cuenta que el curriculum es un eslabón que se sitúa entre la declaración de principios generales y su traducción operacional, entre la teoría educativa y la práctica pedagógica, entre la planificación y la acción y entre lo que se prescribe y lo que sucede realmente en las aulas.*

Frigerio, Graciela: *El curriculum en acción es el terreno en el que cada Profesor desarrollará su actividad de gestión con miras a garantizar la disminución de riesgos de la transposición didáctica, y asegurar el mejoramiento de la calidad de las prácticas pedagógicas.*

Nickerson, Raymond*: Los contenidos son en general conceptuales y procedimentales no obstante mediante las prácticas pedagógicas buscamos asegurar un aprendizaje significativo de contenidos, procedimientos y actitudes, de tal forma que el alumno logre la capacidad de ver las cosas en forma nueva y nada convencional lo que constituye sin duda una importante habilidad solucionadora de problemas.*

DATOS DEL AUTOR

ANTONIO MIGUEL GARCÍA ABAD, nació en Córdoba, Argentina.

Realizó sus estudios secundarios en el Colegio ENET N° 2 Ing. Carlos Cassaffousth y egresó en el año 1974 con el título de Técnico en Electrónica. La carrera de Ingeniería la realizó en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Región Córdoba, y egresó el 29 de Diciembre de 1981 con el título de Ingeniero en Electrónica.

En 1983 comenzó su carrera Docente dictando clases en la Universidad Católica de Córdoba, Instituto Universitario Aeronáutico, Universidad Blas Pascal y en la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Región Córdoba.

EL 29 de Mayo del 2000 logra el título de Especialista en Docencia Universitaria en la U.T.N. Fac. Reg. Cba. y en el año 2001 es nombrado Profesor Ordinario Titular de Medios de Enlace por concurso realizado en la U. T. N. Fac. Reg. Cba.

Desde el año 2003 realiza actividades a distancia como ayuda a la educación presencial generando materiales didácticos en distintos soportes.

En el año 2004 realizó la primera edición de este libro que gracias al aporte de colegas y estudiantes se va actualizando año tras año.

En el año 2006 comenzó a investigar en la aplicación de la plataforma virtual MOODLE en las carreras de grado como complemento de la educación presencial, lo cual está dando muy buenos resultados.

En Diciembre de 2009 defiende su tesis de Maestría "TUTORÍA A DISTANCIA EN MATERIAS DE GRADO" El caso de la asignatura "Medios de Enlace" en la carrera de Ingeniería Electrónica de la Univ. Tec. Nac. Fac. Reg. Cba. Logrando el título de Magister en Docencia Universitaria

Consultas, sugerencias e inquietudes:

ondaem2004@yahoo.com.ar

ÍNDICE

Í

Datos del Autor 7
Competencias a lograr 15

CAPÍTULO 1: Espectro Electromagnético 19
Introducción 19
1.1. La Comunicación Interpersonal 20
1.1.1. La Voz Humana 20
1.1.2. El oído Humano 21
1.1.3. La Vista Humana 22
1.2. La Comunicación a Distancia 22
1.3. La Modulación 23
1.3.1. Tipos de Modulación 25
1.3.1.1. Modulación de Amplitud (AM) 26
1.3.1.2. La Modulación de Frecuencia (FM) 27
1.4. Bandas de radiodifusión 28
1.5. Utilización de las bandas 31
1.5.1. Transmisión en AM 31
1.5.1.1. Características de la Modulación de Amplitud 33
1.5.2. Transmisión en FM 36
1.5.2.1. Características de la modulación de frecuencia 37
1.6. Propagación de ondas 39
1.8. Alcances de las Transmisiones 44
1.9. Fenómenos Acústicos: 46
1.10. Espectro Visible 47

CAPÍTULO 2: Ecuaciones de Maxwell 51
2.1. Sistemas de Coordenadas 51
2.1.1. Elementos diferenciales de espacio 54
2.1.2. Vector de posición 56
2.2. Análisis Vectorial 57
2.2.1. Cantidades escalares y vectoriales 57
2.2.2. Campos escalares y vectoriales 58
2.2.3. Sumas vectoriales 59
2.2.4. Producto de un vector por un escalar 59
2.2.5. Producto escalar y vectorial de vectores 60
2.2.6. El operador vectorial diferencial ∇ (nabla) 62
2.2.6.1. Gradiente 62
2.2.6.2. Divergencia 65
2.2.6.3. Rotacional 67

2.2.6.4. Laplaciano 69
2.2.7. Integración Vectorial 69
2.2.8. Identidades Vectoriales 71
2.3. Electrostática 72
2.3.1. Carga Eléctrica " q " 72
2.3.2. Fuerza Eléctrica " F " (Ley de Coulomb) 73
2.3.3. Intensidad del campo eléctrico " E " 73
2.3.4. Desplazamiento eléctrico " Ψ " y densidad de desplazamiento eléctrico " D " 74
2.3.5. Líneas de fuerza y líneas de flujo 76
2.3.6. Ley de Gauss 77
2.3.7. Potencial eléctrico (V) 79
2.3.8. Campo debido a una distribución continua de carga 84
2.3.9. Superficies equipotenciales 84
2.3.10. Capacidad 86
2.3.11. Energía electrostática 88
2.4. Campo Magnético Estacionario 90
2.4.1. Teorías sobre el campo magnético 90
2.4.2. Inducción magnética y la ley de Faraday 91
2.4.3. Densidad B del flujo magnético 92
2.4.4. Intensidad de campo magnético H y fuerza magnetomotriz F. Ley de Ampere 93
2.4.5. Permeabilidad μ 97
2.4.6. Energía almacenada en un campo magnético. 97
2.4.7. Vector potencial magnético 98
2.4.8. Analogías entre los campos eléctrico y magnético 100
2.5. Sistema Internacional de Unidades 101
2.5.1. Unidades Elementales 101
2.5.2. Unidades Derivadas 102
2.5.3. Orden de magnitud de las unidades 104
2.6. Ecuaciones de Maxwell 106
2.6.1. Generalización de la ley de Ampere. Primera Ecuación de Maxwell 106
2.6.2. Inducción Electromagnética. Segunda Ecuación de Maxwell 109
2.6.3. Ecuaciones de Maxwell y sus bases empíricas 112
2.6.4. Variaciones sinusoidales con el tiempo 114
2.6.5. Ecuaciones de Maxwell en notación fasorial 116

CAPÍTULO 3: Condiciones de Frontera 119
3.1. Medio Lineal 119
3.2. Componentes Tangenciales de las Intensidades de Campo 120
3.2.1. Componente tangencial de la $\vec{E}$ 121
3.2.2 Componente tangencial de la $\vec{H}$ 122
3.2.2.1. Dos medios dieléctricos 122
3.2.2.2. Un medio conductor 124
3.3. Componentes normales de la densidad de campo eléctrico 130
3.3.1. Componente normal de la densidad de campo eléctrico $\vec{D}$ 130
3.3.1.1. Dos medios dieléctricos 130
3.3.1.2. Un medio conductor 132

3.3.2. Componente normal de la densidad de campo magnético 134
3.4. Cálculo del ángulo de salida de un vector conociendo el ángulo de salida de un vector conociendo el ángulo de entrada 136
3.4.1. Campo eléctrico (E) 136
3.4.2. Campo magnético (H) 138

CAPÍTULO 4: Ecuación de Onda Electromagnética 139
4.1. Ondas Electromagnéticas en un Medio Continuo y Homogéneo 139
4.2. Medio Dieléctrico Perfecto - Exento de cargas y corrientes (espacio libre) 140
4.2.1. Condición de una onda plana 142
4.2.2. Relación existente entre E y H en una onda plana uniforme. Impedancia Intrínseca 147
4.3. Ecuación de onda plana en un medio sin pérdidas con notación fasorial 148
4.4. Ecuación de onda plana en un medio conductor con notación fasorial $(\sigma \neq 0)$ 151
4.4.1. Ecuación de onda de Campo Eléctrico (E) 151
4.4.2. Ecuación de onda de Campo Magnético (H) 154
4.5. Cálculo de la Impedancia Intrínseca η (eta) 156
4.6. Cálculo de las constantes α y β 157
4.6.1. Cálculo de la constante de fase β 158
4.6.2. Cálculo de la constante de atenuación α 159
4.7. Conductores y Dieléctricos 159
4.7.1. Factor de Disipación F.D. 160
4.7.2. Propagación de ondas en un buen dieléctrico 161

CAPÍTULO 5: Polarización 165
5.1. Definición de Polarización de la Onda 165
5.2. Polarización de una antena 169
5.2.1. Clasificación de la Polarización Lineal 171

CAPÍTULO 6: Vector de Poynting 177
6.1. Teorema de Poynting 178
6.1.1. Función del tiempo y del espacio 181
6.2. Valores complejo, real e imaginario del vector de Poynting 184
6.3. Potencia transportada por una onda electromagnética plana y uniforme 186
6.4. Potencia absorbida por un medio conductor 187

CAPÍTULO 7: Reflexión Normal entre dos Medios Dieléctricos 191
7.1. Introducción 191
7.1.1. Condiciones de continuidad en dos medios dieléctricos 191
7.2. Coeficiente de reflexión (Γ_E) 192
7.3. Coeficiente de refracción (T_E) 193
7.4. Coeficiente de reflexión (Γ_H) del campo H 193
7.5. Coeficiente de refracción (T_H) del campo H 194
7.6. Conclusiones 194
7.7. Reflexión y transmisión en cualquier medio 195
7.8. Impedancia de campo 197

CAPÍTULO 8: Reflexión Normal sobre un Conductor Perfecto 201
8.1. Introducción 201

8.2. Cálculo del Campo Eléctrico Total 201
8.3. Cálculo del Campo Magnético Total 203
8.4. Conclusión 204

CAPÍTULO 9: Cálculo Analítico y Gráfico del Campo Total en Reflexión Normal 207
9.1. Distribución de tensión y corriente en medios con reflexiones 207
9.1.1. Línea de transmisión con carga a circuito abierto 207
9.2. Teorema del coseno 209
9.3. Diagrama de Crank 209
9.3.1. Relación de onda estacionaria 210
9.3.2. Procedimiento de cálculo de la distribución de campo 211
9.3.3. Cálculo de la distancia al máximo 212
9.3.4. Cálculo de la distancia al mínimo 213
9.4. Construcción del Ábaco de Smith 219
9.4.1. Familia de curvas de parte real de la impedancia normalizada constante 221
9.4.2. Familia de curvas de parte imaginaria de la impedancia normalizada constante 223
9.5. Ábaco de Smith 225
9.5.1. Escalas circulares en Diagramas de Smith 226
9.5.2. Escalas Radiales en Diagramas de Smith 227
9.5.3. Descripción detallada de las Escalas Radiales 228
9.5.4. Ubicación de impedancias y admitancias normalizadas en el ábaco 229
9.5.5. Cálculo de distancias entre impedancias o entre admitancias 231

CAPÍTULO 10: Reflexión Oblicua 235
10.1. Cosenos Directores 235
10.2. Longitud de onda y velocidad de fase 239
10.3. Incidencia Oblicua 240
10.3.1. Introducción 240
10.3.2. Reflexión en un conductor perfecto. Incidencia Oblicua 241
10.3.3. Reflexión en un aislante perfecto. Incidencia oblicua 249

CAPÍTULO 11: Guías de Ondas 251
11.1. Definición de Guía de Onda 251
11.2. Modos de propagación 252
11.3. Guías Rectangulares 252
11.3.1. Determinación de los Campos E y H dentro de la Guía de Ondas 252
11.3.1 Determinación de los campos EX, EY, HX y HY a partir de (11-6) 254
11.3.2. Ecuaciones de E_Z y H_Z 258
11.4. Ondas Transversalmente Magnéticas (TM) en guías rectangulares. 259
11.4.1. Constante de Propagación y frecuencia de Corte 262
11.5. Ondas Transversalmente Eléctricas (TE) en guías rectangulares 264
11.5.1. Frecuencias límites en una guía de ondas 268
11.5.2. Otros tipos de guías de ondas 268
11.6. Aplicación de la tabla de guías de ondas de Hewlett Packard 270
11.7. Usos de una guía de onda 271
11.8. Métodos de excitar una guía de onda 272
11.9. Mecanismo de radiación de una guía de onda 275

CAPÍTULO 12: Líneas de Transmisión 277
12.1. Teoría de circuitos y de líneas de transmisión 277
12.1.1. Introducción 277
12.2. Parámetros distribuidos de la línea 280
12.2.1. Nociones y unidades 281
12.3. Análisis de la línea como cuadripolo 282
12.4. Impedancia característica aplicada a la línea (En función de los parámetros distribuídos) 283
12.5. Coeficiente de reflexión en líneas de transmisión 284
12.6. Periodo transitorio en línea de transmisión con fuente de tensión continua 285
12.7. Ecuaciones básicas del telegrafista 291
12.8. Ecuaciones de onda en el medio conductor 292
12.9. Calculo de amplitudes A_1 y A_2 294
12.9.1. Calculo de las constantes en el extremo generador 294
12.9.2. Calculo de las constantes en el extremo receptor 296
12.10. Coeficiente de reflexión 297
12.10.1. Coeficiente de reflexión en el generador 297
12.10.2. Coeficiente de reflexión en el receptor (carga) 298
12.11. Calculo de impedancia en cualquier punto de la línea de transmisión 298
12.11.1. Funciones hiperbolicas 299
12.11.2. Calculo de zi para una línea con atenuación nula ($\alpha = 0$) 300
12.11.3. Análisis para una línea sin perdidas con carga en corto circuito 300
12.11.4. Análisis para una línea sin perdidas con carga en circuito abierto 302

CAPÍTULO 13: Adaptación de Líneas de Transmisión 305
13.1. Adaptación con un STUB. Introducción 305
13.1.1. Impedancia y admitancia normalizada de carga 307
13.1.2. Coeficiente de reflexión y R.O.E. 307
13.1.3. Distancia de la carga a los puntos de adaptación 308
13.1.4. Relación entre la longitud del stub y la admitancia en sus terminales de entrada 308
13.1.5. Pasos para la adaptación con 1 ramal sintonizador (STUB) 309
13.2. Adaptación con dos STUBS 312
13.2.1. Pasos para la adaptación con 2 ramales sintonizadores (2 STUB) 312
13.2.2. Separación standard entre los STUBS 314
13.2.2.1. Separación $3\lambda/ 8 = 0{,}375\lambda$ 314
13.2.2. Separación $\lambda\backslash 4 = 0{,}25\ \lambda$ 315
13.2.3. Separación $\lambda\backslash 8 = 0{,}125\ \lambda$ 315
13.2.3. ROE entre STUBS (ROE ES) 318
13.3. Adaptación con transformador de cuarto de longitud de onda 321

CAPÍTULO 14: Radiación 325
14.1. Función potencial y campo electromagnético 325
14.1.1. Método heurístico 326
14.1.2. Método de las ecuaciones de Maxwell 328
14.2. Funciones potencial para oscilaciones sinusoidales 331
14.3. Elemento de corriente alterna (dipolo eléctrico oscilante) 333
14.3.1. Relación entre un elemento de corriente y un dipolo eléctrico 343
14.4. Potencia radiada por un elemento de corriente 344

14.5. Aplicación a las antenas cortas 348
14.6. Distribución supuesta de la corriente 349
14.7. Resolución de las ecuaciones de potencial 350
14.8. Resumen del Capítulo 353
14.8.1. Campos eléctricos y magnéticos estáticos 353
14.8.2. Campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo 353
14.8.3. Potenciales retardados 353
14.8.4. Vector Potencial Magnético 354
14.8.5. Campos Producidos por un Elemento de Corriente Alterna 354
14.8.6. Potencia radiada por un elemento de corriente. 354

CAPÍTULO 15: Antenas 355
15.1. Introducción 355
15.2. Parámetros de las antenas 355
15.2.1. Impedancia característica (Z_0) 356
15.2.2. Altura o longitud efectiva 357
15.2.3. Coeficiente de onda o constante de fase 358
15.2.4. Longitud eléctrica 358
15.2.5. Factor de atenuación α 359
15.2.6. Resistencia de radiación 360
15.2.7. Inductancia 361
15.2.8. Capacidad 361
15.2.9. Q y ancho de banda 362
15.2.10. Reactancia 362
15.2.11. Impedancia de entrada 362
15.2.12. Directividad 364
15.2.13. Área efectiva 368
15.3. Efecto direccional de las antenas 368
15.4. Dipolo de onda corta 370
15.5. Antena Yagi 371
15.6. Asociación de dos antenas en paralelo 373
15.7. Polarización de una antena 374
15.8. Planos de tierra 376
15.9. Antena Ringo 379

CAPÍTULO 16: Fibras Ópticas 383
16.1. Introducción 383
16.2. Fundamentos 384
16.3. Índice de Refracción 384
16.4. Apertura Numérica (AN) 385
16.5. Atenuación 391
16.6. Absorción del material 391
16.7. Dispersión del material 392
16.8. Fuentes de luz 393
16.9. Sistema de transmisión 394
16.10. Análisis de oportunidad de un sistema por fibra óptica 395
AUTOEVALUACIÓN 397

COMPETENCIAS A LOGRAR

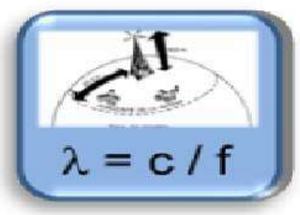
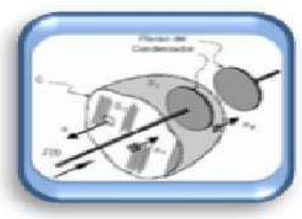
C

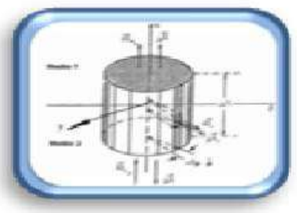
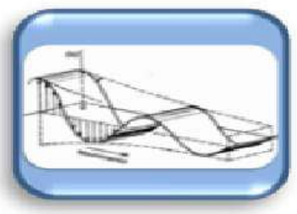
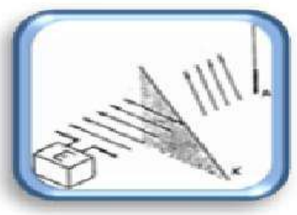
Al finalizar el estudio del libro se espera que el alumno sea capaz de:

- Adquirir un aprendizaje significativo del comportamiento del campo eléctrico y magnético tanto en el vacío como en medios dieléctricos y conductores.
- Reconocer, clasificar y especificar las características de los distintos medios prácticos en que se propaga la onda electromagnética (Espacio libre, Líneas de Transmisión, Guías de Onda y Fibras Ópticas).
- Realizar cálculos analíticos de transmisión, radiación, propagación y recepción de la onda electromagnética.
- Adquirir destreza en la gestión de procedimientos para la obtención de fórmulas y gráficos a partir de fórmulas básicas.
- Poseer destreza en la graficación de la onda electromagnética en medio continuo, en reflexión oblicua y en reflexión perpendicular.
- Poseer destreza en el uso de los Diagramas de Crank y Abaco de Smith para el cálculo de impedancias, admitancias, reflexiones de onda y adaptación de líneas de transmisión.
- Tomar conciencia de la importancia que posee el estudio de los campos electromagnéticos dentro de los medios de enlace entre un transmisor y un receptor, para el mejor aprovechamiento de la energía radiada.

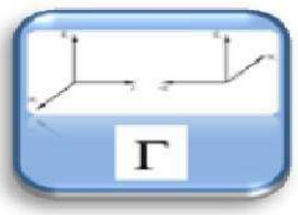
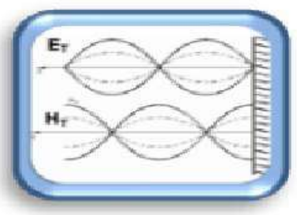
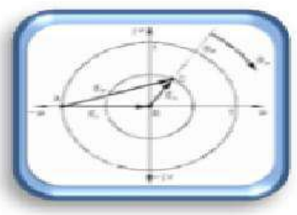
Introducción a los Contenidos

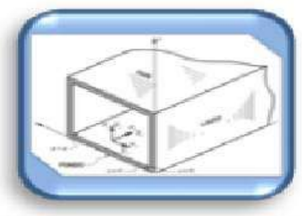
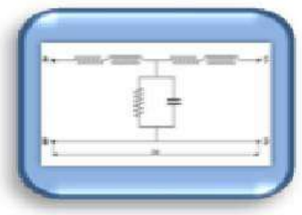
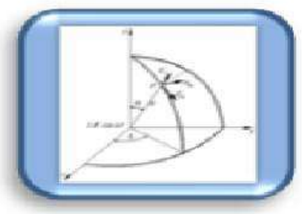
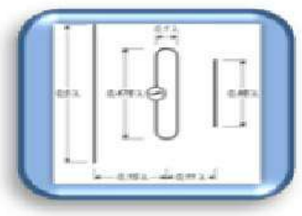
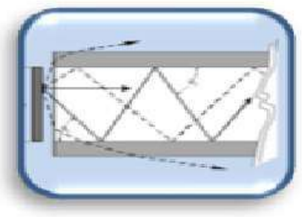
El contenido que Usted encontrará en este libro, está estructurado en 16 unidades temáticas, tiende a que pueda lograr un aprendizaje progresivo y concreto de los distintos eslabones que conforman el estudio de los Campos Electromagnéticos y los Medios de Enlace entre los transmisores y receptores.

Capítulo 1  	Es el análisis del **Espectro Electromagnético** el cual ha sido incluido, pues el conocimiento de las bandas de frecuencia proporciona un marco conceptual y una base sólida para asentar los fundamentos del estudio de la propagación de la onda electromagnética en diferentes medios.
Capítulo 2 	Nos introduce en las **Ecuaciones de Maxwell** para analizarlas profundamente desde un punto de vista práctico, debido a que son el eje del contenido de este libro y con ellas demostramos todos los fenómenos de la teoría electromagnética repasando los conceptos de Algebra Vecto-

	rial, Sistemas de Coordenadas y Campos Estáticos.
Capítulo 3 	Es una aplicación de las Ecuaciones de Maxwell en la superficie de unión de dos medios, para obtener las **Condiciones de Contorno** o de frontera de los campos electromagnéticos.
Capítulo 4 	Obtiene la ecuación de la **Onda Electromagnética** y todos sus parámetros característicos partiendo de las Ecuaciones de Maxwell y analizados en el vacío, dieléctricos y conductores.
Capítulo 5 	Define los distintos tipos de **Polarización de la Onda Electromagnética** y enuncia la forma de clasificarlos.
Capítulo 6	Nos introduce en el análisis del flujo de potencia transportado por una onda electromagnética, define el **Vector de Poynting** y sus aplicaciones.

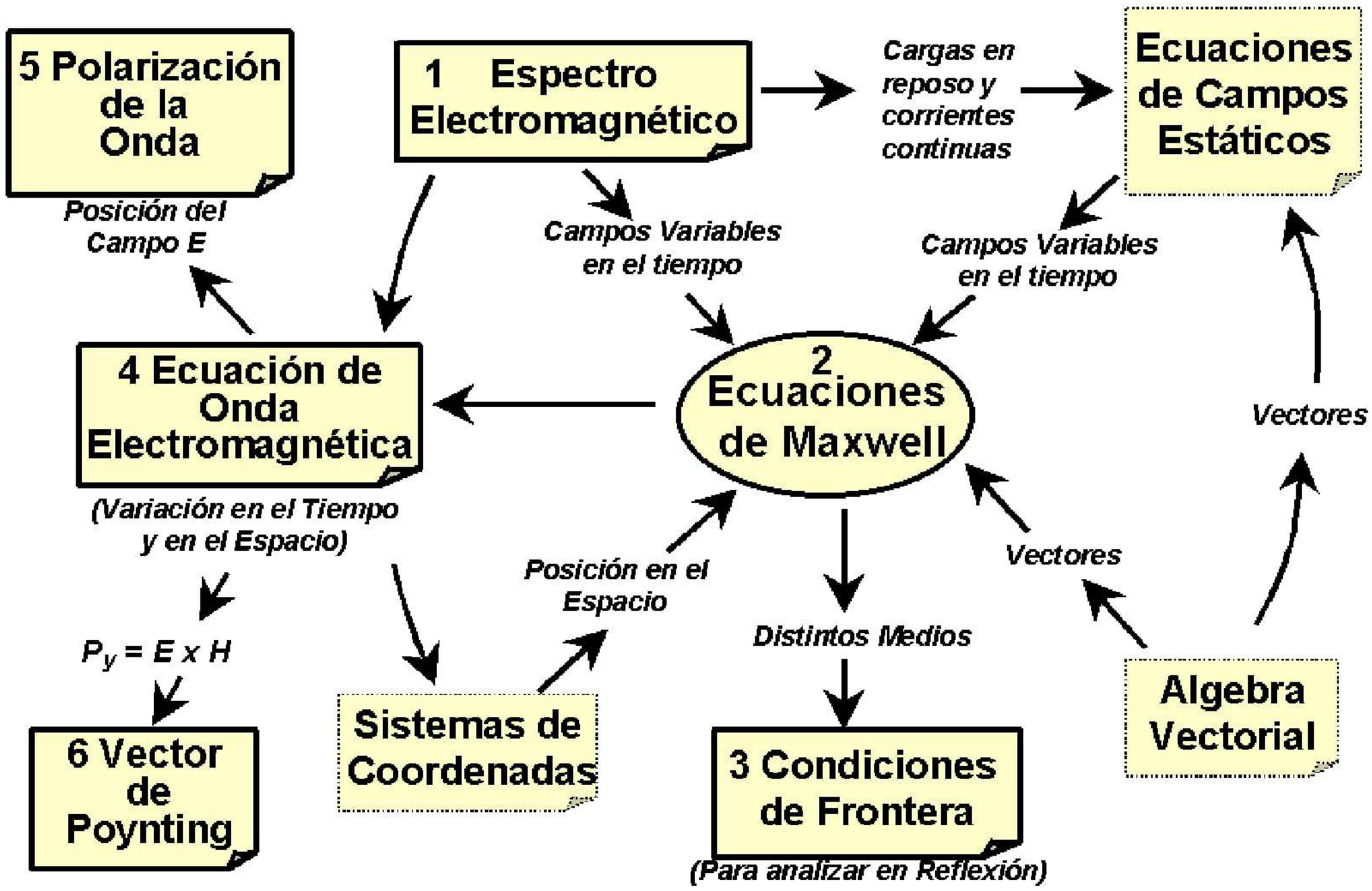
Aquí finaliza el estudio de la onda electromagnética en un medio continuo.

Capítulos 7 y 8  	Analizan la reflexión de una onda con incidencia perpendicular a la superficie de contorno. En el Capítulo 7 lo hace entre dos medios dieléctricos y en el 8 lo hace entre un dieléctrico y un conductor perfecto.
Capítulo 9 	Es una aplicación de las dos anteriores y facilita los cálculos de reflexión con incidencia perpendicular en forma analítica y mediante métodos gráficos tales como el Diagrama de Crank y Abaco de Smith.
Capítulo 10	Analiza la reflexión producida por la **Incidencia Oblicua**, aplica los conceptos de cosenos directores e introduce los principios básicos para el estudio de guías de ondas y fibras ópticas.

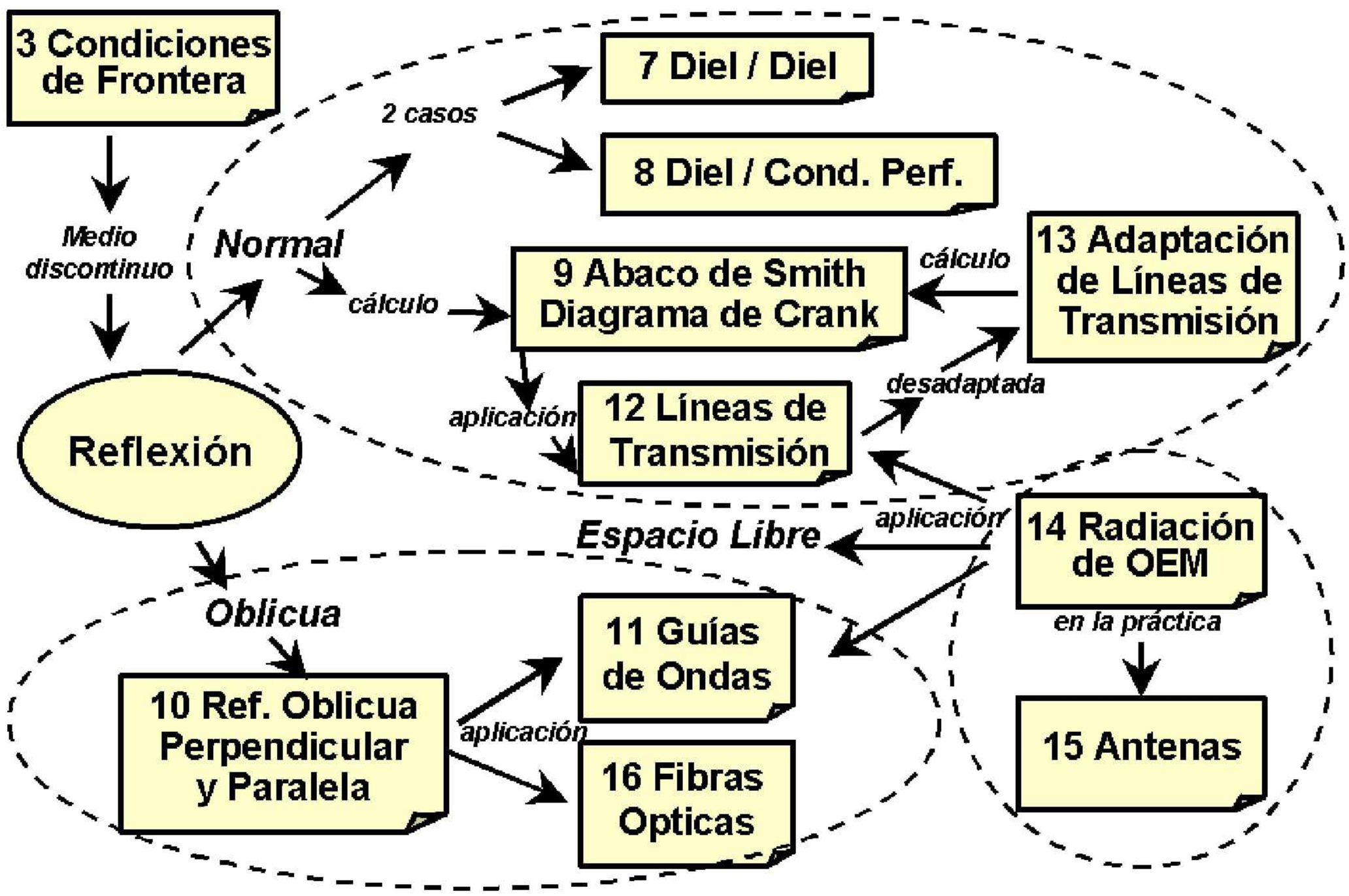
Capítulo 11 	Proporciona los conocimientos para definir, clasificar, excitar y usar las **Guías de Onda**.
Capítulo 12 	Es el estudio de la "Teoría de **Líneas de Transmisión**" y conduce al análisis de las diferencias que existe con la "Teoría de Circuitos".
Capítulo 13	Analiza los métodos de **Adaptación de Líneas de Transmisión** y entrega los procedimientos para usar y adquirir destreza con el Abaco de Smith en la adaptación con uno y dos stub (ramal sintonizador) y con línea de un cuarto de longitud de onda.
Capítulo 14 	Explica la generación de la onda electromagnética mediante la **Radiación** de un elemento diferencial de corriente ubicado en un punto del espacio y analiza los distintos términos componentes de los campos electromagnéticos.
Capítulo 15 	Es la aplicación práctica de la unidad anterior debido a que el elemento radiante ahora es una **Antena** práctica y en ella se analizan sus parámetros característicos.
Capítulo 16 	Proporciona los conocimientos para comprender los fundamentos, usos, características y ventajas en la utilización de las **Fibras Ópticas**.

Ing. Antonio M. García Abad

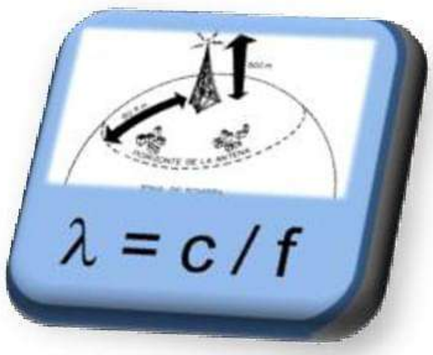
MAPA CONCEPTUAL DE ONDA ELECTROMAGNETICA



MAPA CONCEPTUAL DE REFLEXION Y RADIACION



CAPÍTULO 1



ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

INTRODUCCIÓN

Para abordar los usos y características de las distintas frecuencias del espectro es importante comenzar con la situación más básica y universal de comunicación entre los seres humanos, a partir de allí en base al rol que cumple cada uno de los integrantes en la conversación, compararla con un sistema electrónico de comunicación.

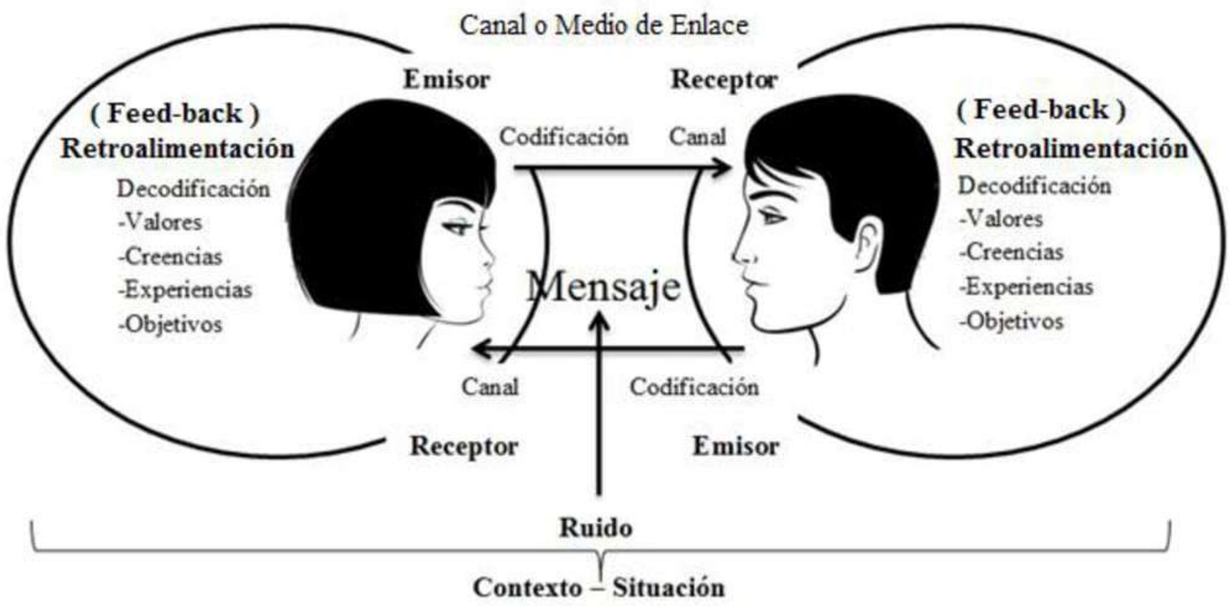


FIGURA 1-1: Esquema de un Sistema de Comunicación Interpersonal

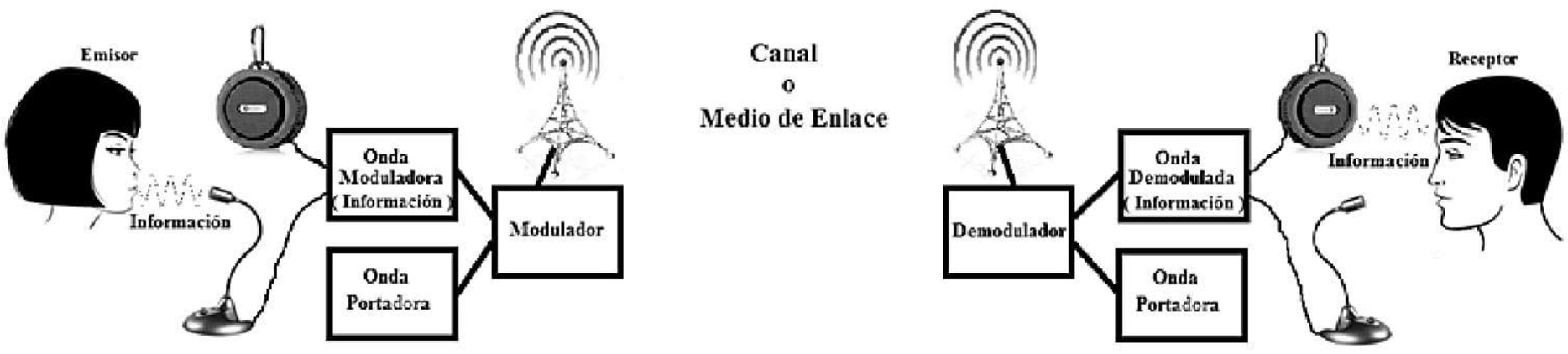


FIGURA 1-2: Esquema básico de un Sistema Electrónico de Comunicación a distancia

1.1. LA COMUNICACIÓN INTERPERSONAL:

Es la que se da entre dos personas las cuales están físicamente próximas. Cada una de ellas produce mensajes que son una respuesta a los mensajes que han sido elaborados por los emisores, con retroalimentación inmediata. Proceso por el cual, el ser interactúa con otros, esto es utilizado para transmitir ideas, mensajes y opiniones entre otros. A la comunicación interpersonal también se le puede llamar comunicación bidireccional ya que en esta se lleva a cabo un proceso de intercambio de información, sentimientos, emociones, etc., entre personas o grupos.

FIGURA 1-3
Comunicación interpersonal

Un **transceptor** electrónico es un dispositivo que cuenta con un **transmisor** y un **receptor** que comparten parte de la circuitería o se encuentran dentro de la misma caja y permite la comunicación bidireccional.

El lenguaje verbal se caracteriza por utilizar el lenguaje escrito u oral. El lenguaje oral lo expresamos mediante la voz humana y lo percibimos mediante el oído.

El lenguaje no verbal tiene cada vez más importancia dentro de la sociedad actual, ya que cerca del 60% al 70% de lo que comunicamos se realiza de manera no verbal. Los movimientos de la cabeza, la expresión corporal, la orientación de la mirada, el parpadeo, las expresiones faciales, los gestos corporales, señalar con el dedo, muecas y otras son formas de lenguaje no verbal. Fundamentalmente lo percibimos con nuestra vista.

1.1.1. LA VOZ HUMANA

Es producida en la laringe, cuya parte esencial, la glotis, constituye el verdadero órgano de fonación humano. El aire procedente de los pulmones, es forzado durante la espiración a través de la glotis, haciendo vibrar los dos pares de cuerdas vocales, que se asemejan a dos lengüetas dobles membranáceas. Las cavidades de la cabeza, relacionadas con el sistema respiratorio y nasofaríngeo, actúan como resonadores.

El sonido consiste en ondas que producen oscilaciones de la presión del aire, que son convertidas en ondas mecánicas en el oído humano y percibidas por el cerebro. Como las vibraciones se producen en la misma dirección en la que se propaga el sonido, se trata de una onda longitudinal. Si la temperatura ambiente es de 15 °C, la velocidad de propagación del sonido es 340 m/s (1224 km/h). Este valor corresponde a 1 MACH. Las cualidades o parámetros que permiten diferenciar un sonido de otro son intensidad, timbre, duración y tono.

El rango de frecuencias conversacionales de la voz humana está establecido entre **300 y 3.000 Hz** (Escala número 3 del espectro de frecuencias), si bien algunos tonos pueden estar fuera de este rango.

FIGURA 1-4
Esquema de producción del sonido

FIGURA 1-5
Generación de un sonido

1.1.2. EL OÍDO HUMANO

El oído es un órgano del cuerpo humano muy sensible y avanzado. La función del oído es transmitir los sonidos al cerebro a través de sus distintas partes: el oído externo, el oído medio y el oído interno.

Su tarea principal es, por tanto, detectar, transmitir y convertir los sonidos en impulsos eléctricos. Otra función importante es la de mantener nuestro sentido del equilibrio.

La mejor forma de describir el funcionamiento del oído es mostrando la ruta que siguen las ondas sonoras en su trayectoria a través de este órgano.

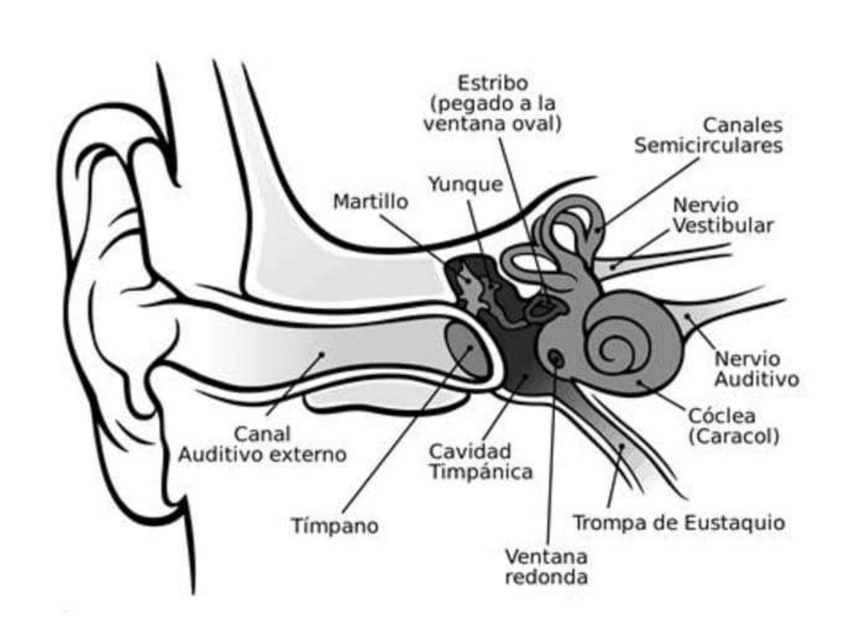


FIGURA 1-6
Esquema de partes principales del oído humano

Las ondas sonoras viajan desde el canal auditivo externo, haciendo que el tímpano vibre. A su vez, esto hace que los tres huesecillos del oído medio, conocidos como martillo, yunque y estribo, se muevan. Estas vibraciones pasan a través de la ventana oval al fluido de la cóclea del oído interno, estimulando miles de pequeñas células ciliadas. Como resultado estas vibraciones se transforman en impulsos eléctricos que el cerebro percibe como sonido.

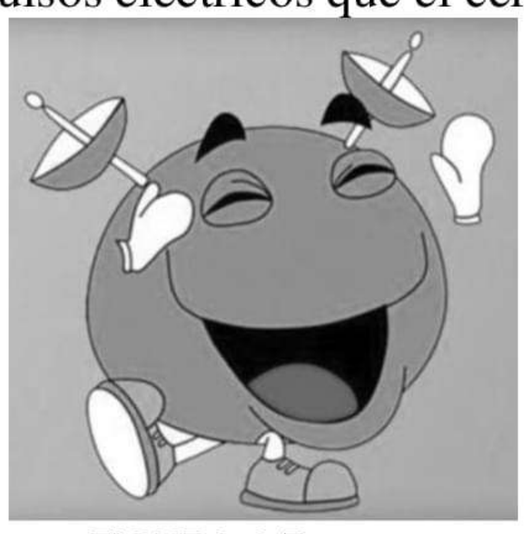


FIGURA 1-7
Caricatura con antenas parabólicas en las orejas

FIGURA 1-8
Antena Parabólica

Si analizamos detenidamente nuestra manera de escuchar tiene características similares a la de una antena receptora y nuestra emisión de voz a la de una antena transmisora.

1.1.3. LA VISTA HUMANA

El sentido de la vista nos permite reconocer las formas, tamaños y colores de los objetos que nos rodean. Los párpados, cejas y pestañas sirven para proteger el ojo. La luz entra en el ojo a través de la córnea, más concretamente de la pupila, que está rodeada por el iris que da color a los ojos. Finalmente llega a la retina y de allí por el nervio óptico hasta el cerebro.

Se llama visión a la capacidad de interpretar nuestro entorno gracias a los rayos de luz que alcanzan el ojo. La visión o sentido de la vista es una de las principales capacidades sensoriales que poseemos los seres humanos, de allí que siempre debemos utilizar "**elementos de protección**" cuando estamos expuestos a un trabajo o actividad en la cual puede dañar nuestros ojos. El rango de frecuencia visible está establecido entre 4,6 x 10^{14} Hertz y 7,3 x 10^{14} Hertz (Escala número 15 del espectro de frecuencias).

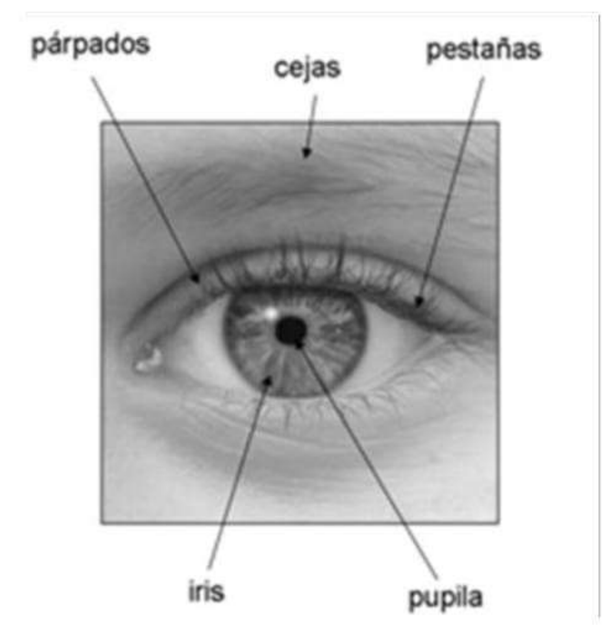


FIGURA 1-9
El ojo humano

1.2. LA COMUNICACIÓN A DISTANCIA

De todos es conocida la limitación que presentan las ondas sonoras cuando se pretenden establecer comunicaciones a medias y largas distancias. Ello indujo a muchos investigadores a una búsqueda de otras formas de enlace entre las personas que de alguna manera salvarán las dificultades de la comunicación directa.

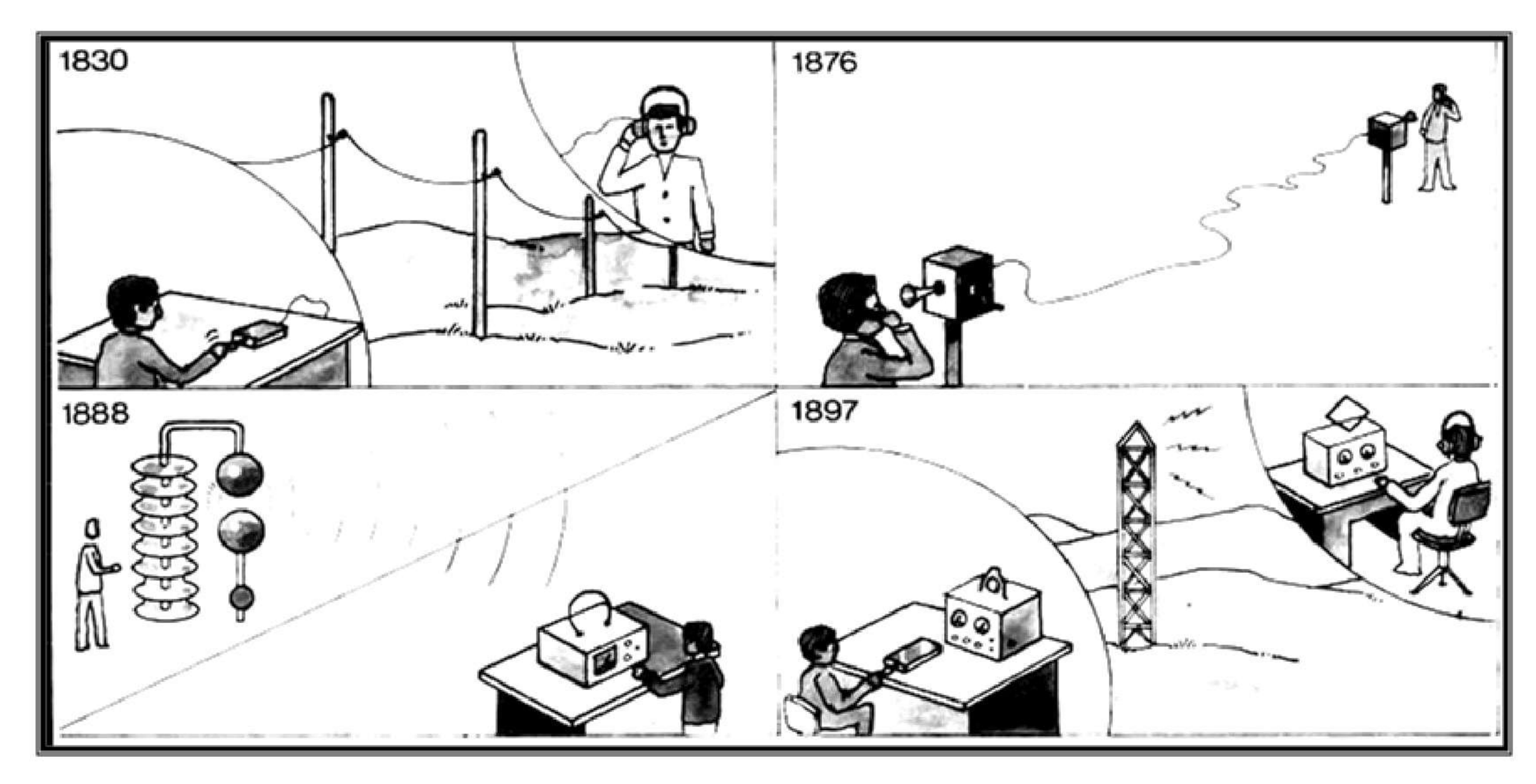


FIGURA 1-10: Evolución de las comunicaciones eléctricas. No fue hasta 1897 que se consiguió la primera radiocomunicación sin contactos físicos entre transmisor y receptor

Así, en la década de 1830, Morse puso en práctica la comunicación telegráfica, y no fue hasta 1876 en que Bell construyó el primer teléfono, resolviendo el problema de la comunicación hablada entre dos puntos lejanos.

Aún no era suficiente, pues tanto el telégrafo como el teléfono exigen que un cable comunique los aparatos transmisor y receptor. En 1888, el físico alemán Hertz comprueba la existencia real de las ondas electromagnéticas (que desde entonces llevan el nombre de *hertzianas*), y en 1897 Marconi realiza la primera comunicación de la llamada *telegrafía sin hilos*. A partir de aquí, la comunicación hablada con ondas hertzianas (la *radiotelefonía*) fue problema de unos pocos años.

Fue posteriormente que se descubrió que las ondas hertzianas, u ondas radio, son de la misma naturaleza que la luz visible o los rayos infrarrojos, al igual que otras radiaciones por todos conocidas, como los rayos ultravioletas, los rayos X o las ondas utilizadas por el radar. Todas ellas pertenecen a la familia de las *ondas electromagnéticas*.

Este tipo de ondas presentan dos grandes ventajas frente a las ondas sonoras, en lo que a comunicación se refiere. En primer lugar no necesitan de ningún medio "físico" para trasladarse (al contrario que las ondas sonoras, que necesitan de aire, agua o algún otro medio material); la prueba resulta patente: la luz del Sol y las estrellas (que, como luz, son ondas electromagnéticas) llegan hasta nosotros a través del vacío del espacio interestelar. La segunda ventaja es su velocidad de propagación; mientras las ondas sonoras en el aire viajan a 340 m/seg., las ondas electromagnéticas lo hacen a 300.000 km/seg. (cerca de un millón de veces más rápido).

A pesar de esta clara diferenciación entre los dos tipos de ondas, presentan muchos puntos de utilización comunes, razón por la que hemos insistido tanto en los medios empleados en la comunicación sonora. Por ejemplo, las ondas electromagnéticas también se atenúan con la distancia, y aproximadamente en la misma proporción que lo hacen las sonoras.

No obstante, algún lector se preguntará aún por qué razón, si ambos tipos de ondas tienen similares características de atenuación, llegan más lejos las radiaciones electromagnéticas.

Es simplemente cuestión de números. Cualquier receptor de los que se encuentran actualmente en el mercado es 100 veces más sensible que el oído mejor dotado (cada uno en su campo), y hay emisoras que trasmiten con una potencia 10.000 veces mayor que el grito más alto que pueda emitir una garganta humana. Solo queda multiplicar, y sacar conclusiones.

1.3. LA MODULACIÓN

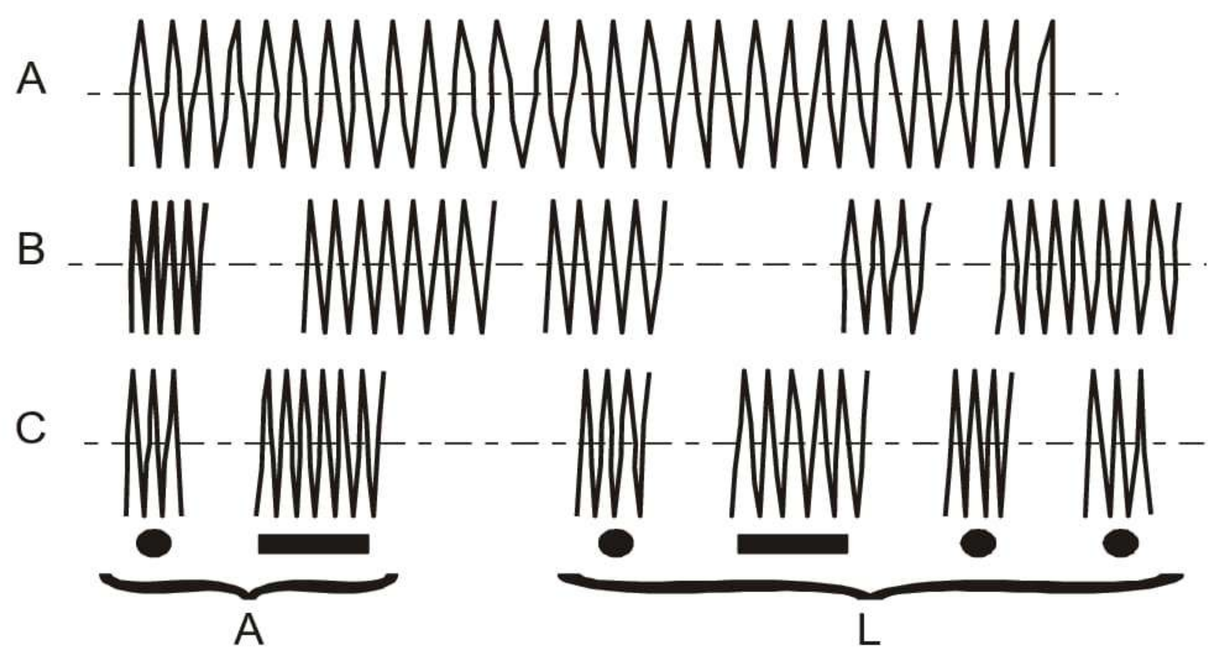


FIGURA 1-11: Un método de comunicación empleando ondas de radio. Una onda portadora (A) puede interrumpirse (B). SI las interrupciones son ordenadas y con ayuda de un código preestablecido, puede llegarse a comunicar entre dos puntos de una manera inteligible (C).

Sin embargo, lo anterior no resulta suficiente para nosotros, pues una onda electromagnética pura no es más que eso: una onda que no transporta ningún tipo de *información*. Si nos asomamos una noche a una ventana de nuestra vivienda, nuestro oído será capaz de percibir un cierto ruido más o menos lejano, que no nos dirá más que algo o alguien lo está produciendo: son ondas sonoras *sin* información útil para nosotros. La primera idea que se nos ocurre para que una onda electromagnética lleve algo de información es interrumpir a intervalos más o menos frecuentes. Así se dará paso a dos situaciones perfectamente diferenciables: hay onda, o no la hay. Incluso, podemos adelantar un poco más: los intervalos en que haya onda pueden hacerse de distinta duración, y así seremos capaces de distinguir no sólo la existencia o no de la onda, sino su mayor o menor duración.

Así fue como se realizaron las primeras trasmisiones de radio, aprovechando un código que Morse había inventado años antes (el código Morse), consiste en asignar a cada letra, número y signo ortográfico uno o varios intervalos de distinta duración (conocidos como rayas y puntos); espaciando adecuadamente la transmisión de los "códigos" correspondientes a cada letra, puede enviarse un mensaje inteligible. El código Morse puede asimilarse al lenguaje hablado: durante un acuerdo preestablecido y conocido, dos personas pueden comunicarse y entenderse por medio de sonidos.

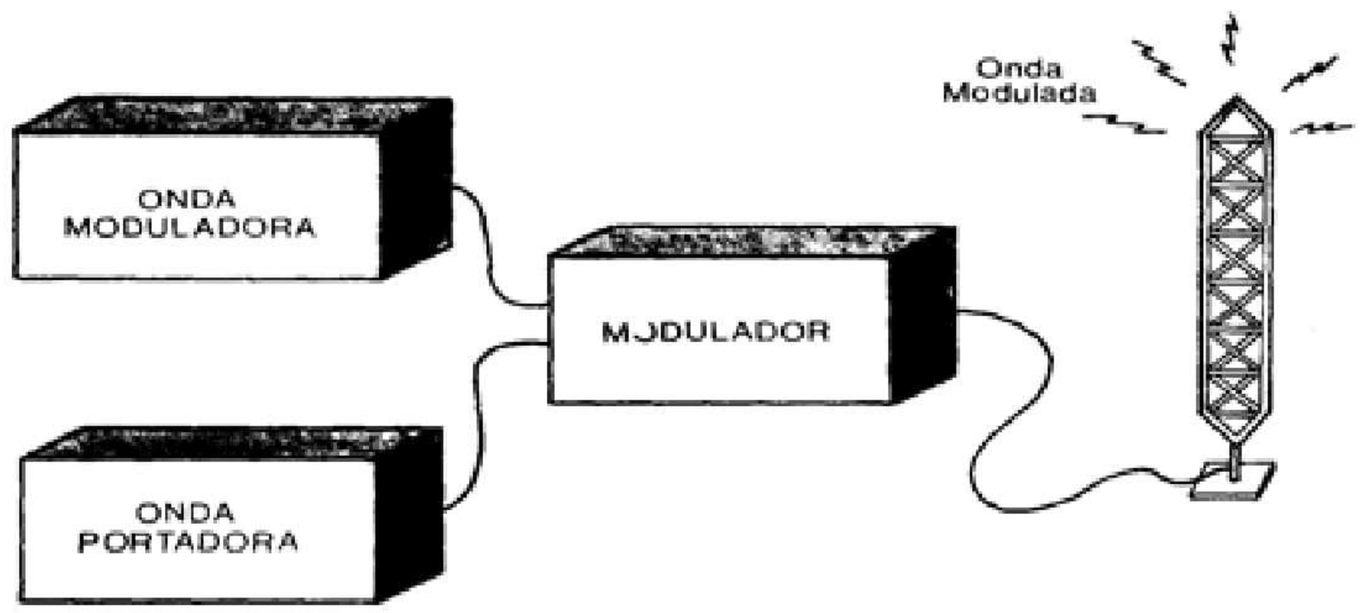


FIGURA 1-12: Principio de funcionamiento básico de un transmisor de radio. La onda portadora se "mezcla" en el modulador con la onda moduladora (la que va la "información" a transmitir). El resultado es la onda modulada que se lleva a la antena para ser radiada.

Ya sabemos cómo imprimir "información" a una onda electromagnética. Sin embargo, este tipo de información requiere del aprendizaje del código Morse, igual que el lenguaje hablado requiere conocer el significado de cada palabra. Además, el código Morse no podría transmitir nunca información de tipo musical o visual, que son las que más fácilmente "traducimos".

Código Morse

A •–	J •–––	S •••
B –•••	K –•–	T –
C –•–•	L •–••	U ••–
D –••	M ––	V •••–
E •	N –•	W •––
F ••–•	O –––	X –••–
G ––•	P •––•	Y –•––
H ••••	Q ––•–	Z ––••
I ••	R •–•	

FIGURA 1-13
Código Morse

Se llaman vocales, en lenguaje hablado, a las letras que se pronuncian con tan solo emitir la voz. En castellano son cinco, y resulta muy fácil comprobar que una suena distinta de otra con cerrar más o menos la boca, y con poner la lengua en una posición u otra.

Se dice que modulamos la voz, porque lo único que hacemos es modificar una corriente de aire salida de nuestra garganta para que suene de una forma o de otra.

La corriente de aire podemos llamarla portadora, pues es la que llevará o "portará" la modulación que le imprimamos con la boca y/o lengua. La portadora, por si sola, no es sonido, no transporta lo que hemos llamado "información".

Esto tan sencillo y que tan habituados estamos a hacer a diario (simplemente, hablar) es lo que se hace en una emisora de radio. Se crea una *onda portadora* (el equivalente a la corriente de aire) que se lleva a un *modulador* (la boca y la lengua) para que sobre ellas se "imprima" la información que deseamos, que se materializa como *onda moduladora* (lo que nosotros queremos expresar con el lenguaje). El resultado final es la *onda modulada* (las palabras realmente pronunciadas), que será radiada al espacio para que otra u otras personas puedan recogerla e interpretarla.

1.3.1. TIPOS DE MODULACIÓN

Ya se han descripto dos de los parámetros más importantes de una onda, que son su amplitud y su frecuencia. La *amplitud* da idea del valor máximo que adoptará la onda, mientras que la *frecuencia* nos dirá los *ciclos* completos que se repiten en cada segundo. La forma de las ondas hertzianas es idéntica a las de sonido. La única diferencia (aparte su naturaleza) está en la frecuencia. Mientras que en las sonoras audibles rara vez llegan a los 20 KHz, las de radio pueden llegar a tener frecuencias superiores a los 10 GHz (diez mil millones de ciclos por segundo).

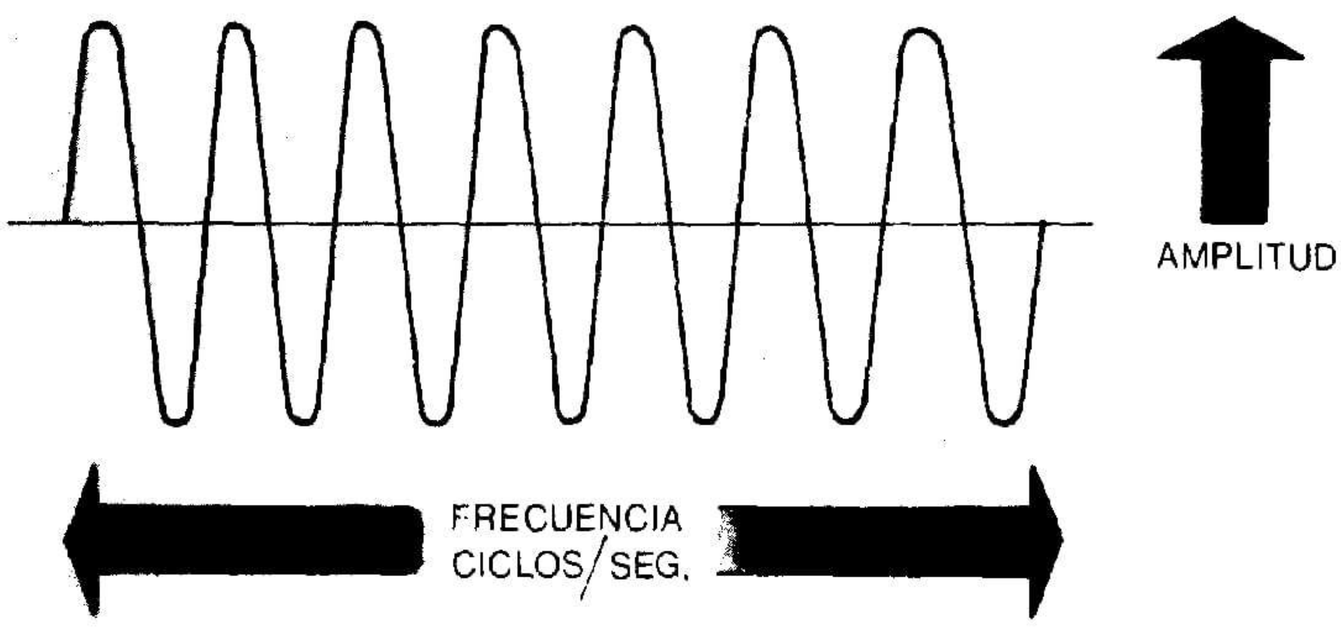


FIGURA 1-14: Dos de los parámetros más importantes de una onda de radio son su amplitud y su frecuencia

Aunque no lo hemos dicho explícitamente, ya hemos mencionado una forma de modulación cuando hablamos del sistema Morse. Se trata de dar amplitud máxima a la onda (cuando se transmite punto o raya) y amplitud cero (intervalo entre punto y/o rayas). Es una modulación basada en el "todo" o "nada". Como vemos, en este caso lo que se modifica es la *amplitud* de la onda. Nos encontramos frente a la *modulación de amplitud*, que abreviaremos como **AM**.

Igual que hemos introducido la información en la portadora *modificando* uno de sus parámetros, la amplitud, también podríamos hacerlo modificando el otro parámetro antes citado, la frecuencia. Así, si nuestra portadora tuviera una frecuencia de, pongamos, 500 KHz, cuando quisiéramos transmitir un punto o una raya, podríamos cambiar la frecuencia a 510 KHz.

Esa variación de 10 KHz en la frecuencia la interpretaría el receptor como la transmisión de un punto o una raya según la duración. Así habremos hecho una *modulación de frecuencia*, que notaremos como **FM**.

Existen más tipos de modulación, como son la de la fase, por impulsos, etc., pero solo nos interesan las dos ya citadas, y lo que es verdaderamente importante es hacerse a la idea de para *modular* una onda, hay que *modificar* alguno de los parámetros que la definen. Una onda portadora *no* posee en si ningún tipo de información que pueda resultarnos útil.

1.3.1.1. MODULACIÓN DE AMPLITUD (AM)

Puesto que la señal de audio es variable, podemos hacer variar la amplitud de la portadora al ritmo de la de audio.

Al receptor lo diseñaremos de forma que sea sensible *sólo* a dicha variación de amplitud, que será precisamente la señal de audio que queremos transportar. Como vemos, la portadora es sólo el caballo que transporta el jinete que es la señal de audio. No nos sirve nada más que para conseguir que el jinete llegue más lejos que podría hacerlo por sus propios medios.

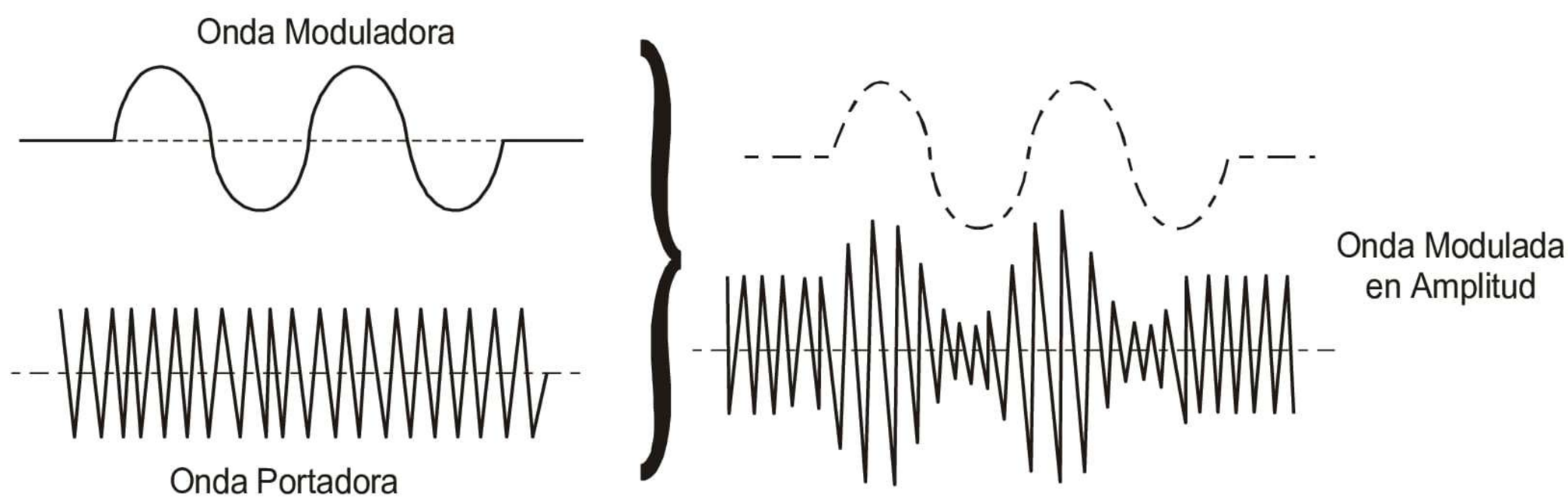


FIGURA 1-15: Esquema de funcionamiento de una modulación de amplitud. La amplitud de la onda portadora se modifica con arreglo a las variaciones de la moduladora. Los "picos" de la onda modulada tienen una forma idéntica a la onda moduladora.

Aunque el proceso de modulación es tan sencillo como acabamos de exponer, al estudiar la onda modulada que transmitimos aparecen algunas complicaciones. Pongamos un ejemplo para verlo con mayor claridad. Supongamos que nuestra portadora tiene una frecuencia de 600 KHz, y que la modulamos en amplitud con una señal de audio de 5 KHz.

Se puede demostrar matemáticamente que la onda modulada (frecuencia 600 KHz, y amplitud variando continuamente a razón de 5KHz) es equivalente a tres ondas, una de 600 KHz, otra de 605 KHz y una tercera de 595 KHz. Si la frecuencia de la onda moduladora (la señal de audio) fuera de 20 KHz, la onda modulada seguiría siendo equivalente a otras tres, ahora de frecuencias 620 y 580 KHz.

Si ahora queremos transmitir una reproducción musical que está compuesta por señales de frecuencia de hasta 20 KHz, la onda modulada se podrá descomponer como una componente central de 600 Khz y *dos bandas laterales*, una a cada lado de la frecuencia central, ocupando un ancho cada una de 20 KHz, esto es, la onda modulada ocupará una banda de frecuencias comprendida entre 580 y 620 KHz. Podríamos asimilar la formación de las dos bandas laterales a la modulación de amplitud que sufren tanto los semiciclos positivos como los negativos de la portadora.

Como fácilmente se comprende, y esto es importante, el *ancho de banda* ocupado por una transmisión de MA depende directamente del *ancho de banda* ocupada por la señal de audio a transmitir, y no de su *amplitud*. Además, el ancho de banda total ocupado por la onda modulada que se transmite es el *doble* del que tiene la señal de audio. Estos son los puntos destacables de este tipo de modulación.

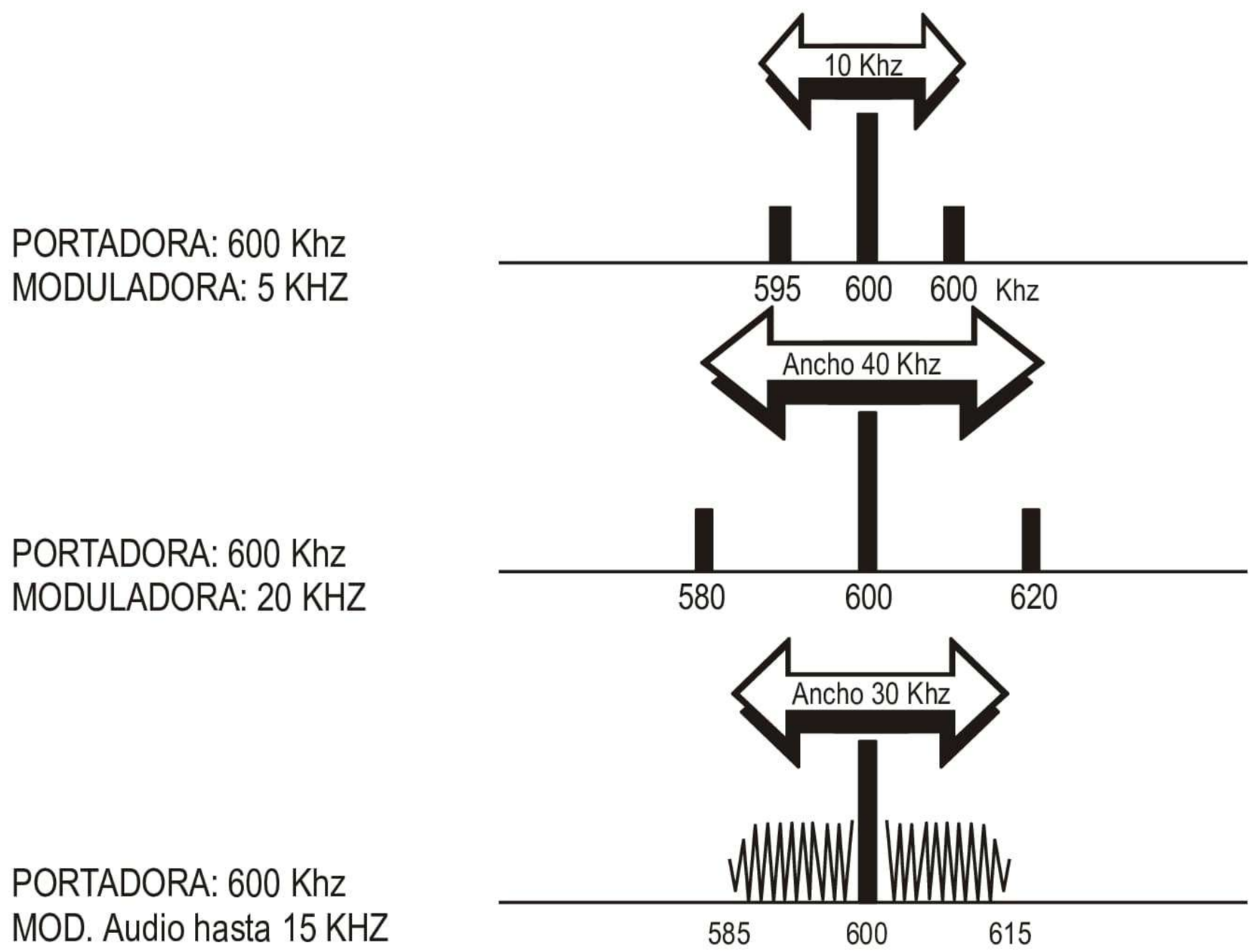


FIGURA 1-16: Una onda modulada en amplitud tiene componentes de distintas frecuencias. Siempre existe una componente correspondiente a la portadora; las otras componentes son debidas a la moduladora, siendo su amplitud y frecuencia dependientes de ella.

1.3.1.2. LA MODULACIÓN DE FRECUENCIA (FM)

Igual que en AM se hace variar la amplitud de la portadora al ritmo de la señal moduladora, también podemos hacer que la *frecuencia* de la portadora varíe al ritmo de la señal que queremos enviar, la moduladora. De esta forma tan sencilla obtendremos una onda que *lleva impresa* la información como variación de frecuencia, esto es, habremos hecho una *modulación de frecuencia* de la portadora. Ahora haremos que nuestro receptor sea tan sensible a dichas variaciones de frecuencia, con lo que podremos recoger de nuevo la información en la onda modulada.

El proceso de modulación se realiza de tal forma que la desviación de frecuencia (el número de hertzios en que cambia la frecuencia instantánea de la portadora) es proporcional a la *amplitud* de la señal moduladora. Pongamos un ejemplo numérico que nos aclare la idea. Supongamos una señal moduladora de 1 V de amplitud no importa su frecuencia. Supongamos asimismo que dicha señal provoca una desviación de frecuencia de ±15 KHz en la frecuencia de la portadora, que vamos también a suponer que es de 1000 KHz. Conforme varíe la señal moduladora, la frecuencia de la portadora variará desde 985 KHz hasta 1015 KHz (1000 ±15 KHz), ocupando un ancho de banda de 30 KHz (1015 – 985 = 30 KHz), esto es el doble de la desviación.

Si ahora queremos modular la portadora de 1000 KHz con una moduladora de 10 V de amplitud, la desviación que obtendremos será de ±150 KHz (diez veces mayor desviación que con la modula-

ción de 1 V) por lo que la frecuencia de la portadora variará entre 850 KHz y 1150 KHz (1000±150 KHz) ocupando la transmisión una banda de 300 KHz (1150 – 850 = 300 KHz), también el doble de la desviación.

¿cómo se distinguen dos moduladoras de igual amplitud, 10 V, y distinta frecuencia, 1 KHz y 5 KHz? Pues muy sencillo: puesto que ambas señales tienen la misma amplitud (10 V), la desviación de frecuencia de la portadora será la misma (±150 KHz); pero con la señal de 1 KHz la variación se hará a razón de 1000 veces por segundo, mientras que con la de 5 KHz la desviación se realizará 5000 veces cada segundo.

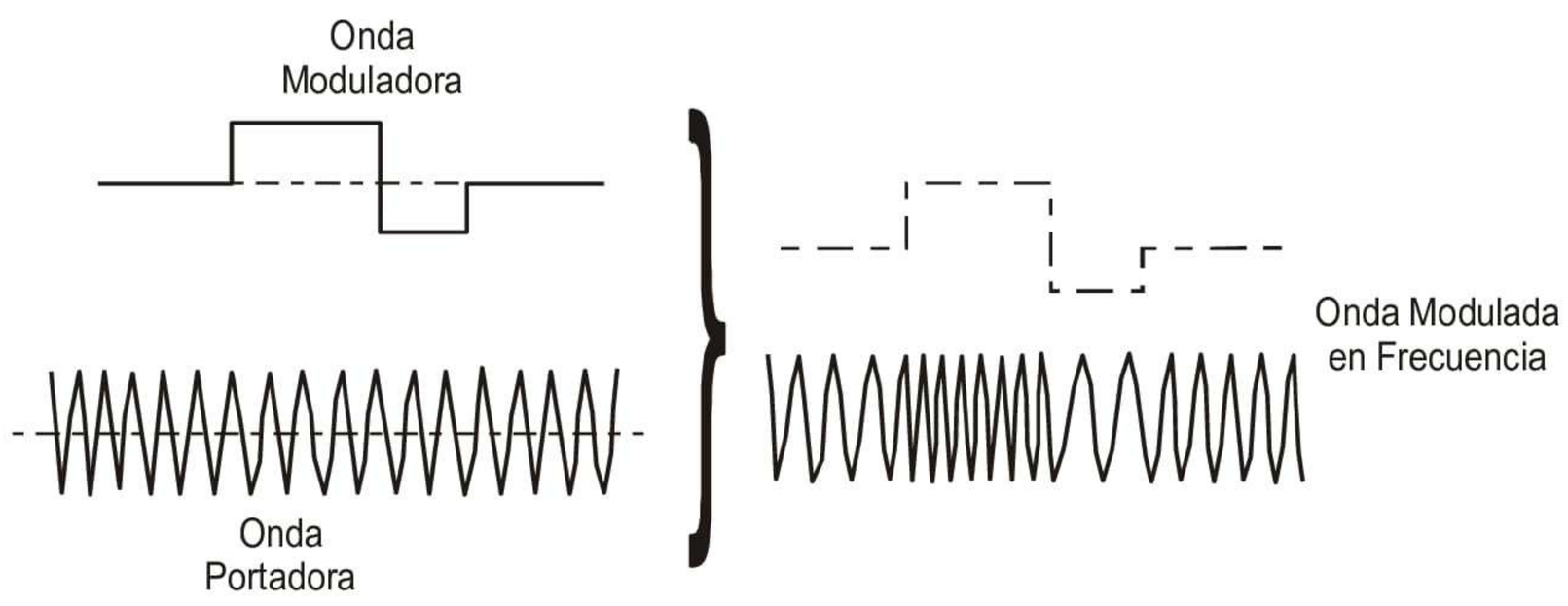


FIGURA 1-17: Esquema de funcionamiento de una modulación de frecuencia. La frecuencia instantánea de la portadora se hace variar con arreglo de la amplitud de la moduladora. Así, cuando la amplitud aumente, también lo hace la frecuencia; si disminuye, la frecuencia instantánea se hace menor. Esto es lo que muestra el ejemplo gráfico mostrado, donde se ha elegido una onda moduladora de forma rectangular para mayor claridad de exposición.

Así pues, destaquemos este punto que es importante: el *ancho de banda* por una transmisión de FM depende directamente de la *amplitud* de la señal de audio a transmitir Además, el ancho de la banda total ocupado por la onda modulada que se transmite podemos considerar, en principio, que es de la desviación de frecuencia producida por la máxima amplitud de la señal de audio.

Podría pensarse que el empleo de la modulación de frecuencia reduciría a un mínimo el ancho de banda empleado para su transmisión, utilizando para ello una desviación de frecuencia pequeña. Esto es así en realidad. Por consideraciones matemáticas que ahora no vamos a exponer aquí, el ancho de banda de transmisión depende de la desviación de frecuencia empleada, y ésta a su vez del ancho de banda de la señal de audio, por lo que fácilmente se deduce que los anchos de banda de transmisión y de la señal de audio están interrelacionados entre sí. La forma en que el primero varía en función del segundo es complicada, pero en la práctica raramente el ancho de banda de transmisión es inferior a *diez* veces el de la señal de audio.

1.4. BANDAS DE RADIODIFUSIÓN

Las ondas hertzianas suelen dividirse en varios grupos, atendiendo a su frecuencia.

Estos grupos se denominan *bandas de frecuencias* y la división es puramente convencional. También podemos hacer la clasificación en base a las longitudes de onda que presentan. Puesto que frecuencia y longitud de onda están interrelacionadas, dichas bandas pueden identificarse indistintamente de una u otra forma, pues la equivalencia es total. Normalmente las representamos en escala logarítmica (cada división es múltiplo de 10) porque es más sencilla su visualización.

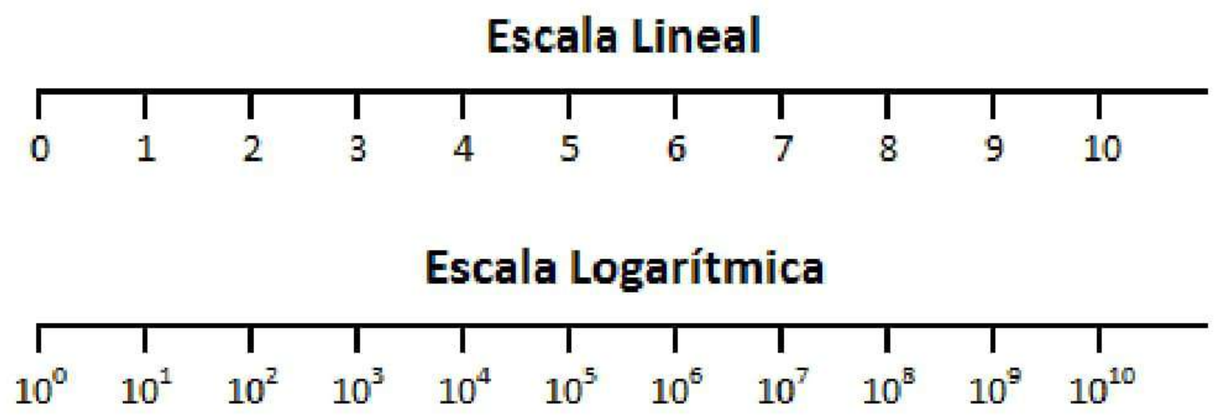


FIGURA 1-18: Escala lineal y logarítmica.

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad [metros]$$

Longitud de onda "λ" es igual a la velocidad de la luz "c" dividida la frecuencia "*f*".
Analizaremos el siguiente gráfico antes de la representación completa del espectro de frecuencias, destacando en él la banda que ocupa la voz humana y el espectro visible que como dijimos anteriormente son la forma de comunicación verbal y no verbal y nos servirán para entender todos los fenómenos que pueden presentarse en las Bandas de Radiodifusión.

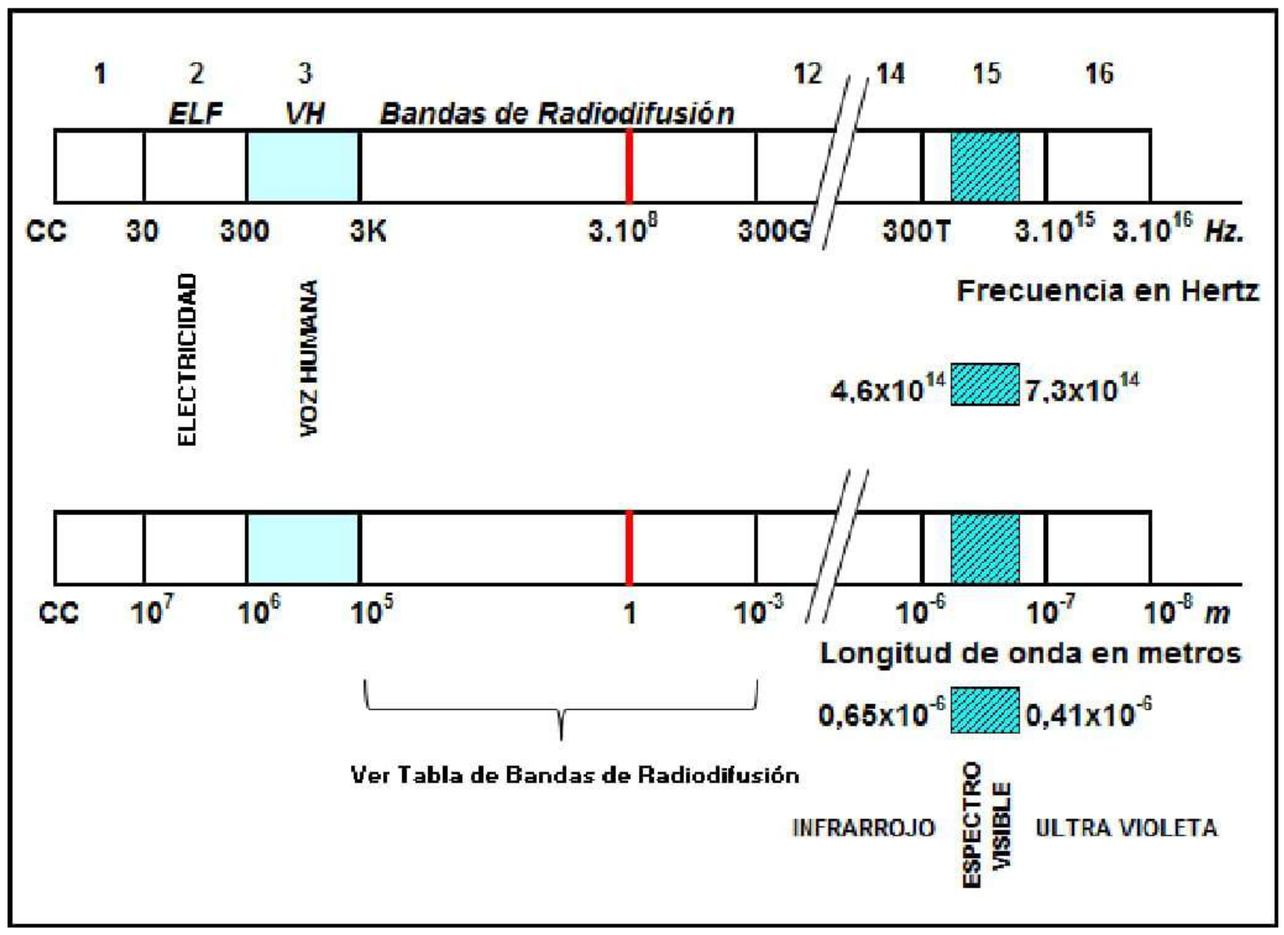


FIGURA 1-19: Espectro de frecuencias donde se detalla la "Banda de la Voz Humana" y la "Banda del espectro Visible".

En la **Banda 2:** ELF, Frecuencias Extra Bajas (Extra Low Frecuencies) encontramos los 50 Hz de frecuencia de la red de electricidad domiciliaria.

En la **Banda 3:** VH, Voz Humana, es el rango de la "**Comunicación Verbal**".

En las **Bandas 4 a 11:** tendremos las Bandas de Radiodifusión, de las cuales haremos su análisis seguidamente. También detallamos allí la ubicación de la frecuencia de 3 x 10^8 cuya longitud de onda nos da 1 metro.

En la **Banda 15:** se encuentra el espectro visible o propagación de la luz blanca, entre las frecuencias 4.6 x 10^{14} y 7.3 x 10^{14} Hertz, donde están contenidos todos los colores y es donde se realiza la "**Comunicación No Verbal**".

A todos los fenómenos que puedan presentarse en las Bandas de Radiodifusión le encontraremos una explicación práctica llevándolo a una situación similar en uno de los dos canales de comunicación interpersonal.

Ejemplo1: Dos personas que están a un metro de distancia comunicándose verbalmente, no se podrán entender si hay una máquina ruidosa cerca, tendrán que comunicarse visualmente. Hacen un cambio en la frecuencia de comunicación, se van a una Banda en la cual si se pueden comunicar mediante señas o instrucciones escritas.

Ejemplo 2: Dos personas a la misma distancia anterior, pero entre medio de las dos hay una puerta opaca cerrada, el único canal de comunicación que tienen es el verbal, porque ninguna seña será visualizada por la otra por más énfasis o potencia se le asigne. Esto también explicará porque en algunos casos de radiodifusión por más potencia que tenga el transmisor o sensibilidad el receptor la comunicación no podrá establecerse a esa frecuencia.

DENOMINACIÓN DE LA BANDA	SIGLAS	MARGEN DE FRECUENCIA
4 - Frecuencias muy bajas (Very Low Frequencies)	VLF	3 – 30 KHz
5 - Frecuencias bajas (Low Frequencies)	LF	30 – 300 KHz
6 - Frecuencias medias(Medium Frequencies)	MF	300 – 3.000 KHz
7 - Frecuencias Altas (High Frequencies)	HF	3 – 30 MHz
8 - Frecuencias Muy Altas (Very High Frequencies)	VHF	30 – 300 MHz
9 - Frecuencias Ultra Altas (Ultra High Frequencies)	UHF	300 – 3.000 MHz
10 - Frecuencias Super Altas (Super High Frequencies)	SHF	3 – 30 GHz
11 - Frecuencias Extra Altas (Extra High Frequencies)	EHF	30 – 300 GHz

Bandas de frecuencia. Margen de frecuencias que abarcan y siglas más utilizadas para su nomenclatura

Comprendidos dentro de estas bandas están todos los servicios que se hacen por radio: policía, aficionados, comunicaciones móviles, radioayudas a la navegación, radar, comunicaciones tierra-satélite, etc., y como no, también se encuentran las bandas de *radiodifusión*, que son aquellas en que trasmiten emisoras con fines fundamentalmente comerciales, de divulgación, y en general emisiones dirigidas al sector denominado "gran público", para denotar su carácter de interés general.

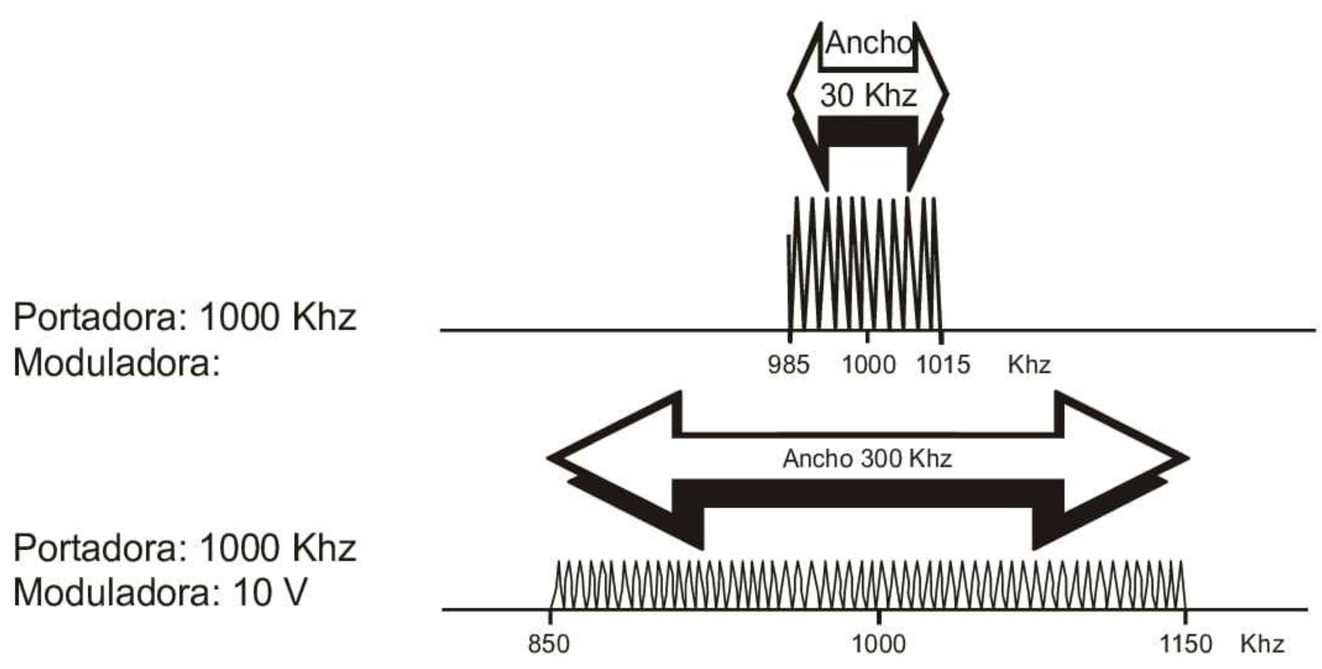


FIGURA 1-20: Una onda modulada en frecuencia ocupa un cierto espectro alrededor de la frecuencia de la portadora. El ancho de dicha banda es proporcional a la amplitud de la moduladora, a mayor amplitud, mayor ancho de banda ocupado.

Las bandas de radiodifusión emplean un espectro de frecuencias muy reducido en comparación con el margen total de ondas hertzianas utilizable: apenas el 0.25 de todas las frecuencias útiles se destina a este fin. En él se incluye no solo las emisoras de radio, sino también las de TV. Sólo el 5% del espectro de radiodifusión lo ocupan las emisoras de radio, quedando el 95% restante para la TV. La razón es de tipo técnico, ya que una sola emisora de TV necesita un ancho de banda 20 veces superior al que necesita una emisora de FM, y es 600 veces mayor que el que emplea una AM. Es por esta diferencia tan grande en el ancho de la banda ocupado que existen más de 50 canales de radio por cada uno de TV, a pesar de ocupar la radio solo el 5% del ancho disponible. Las emisoras de radio se encuentran en distintas bandas, presentando cada una de ellas características propias distintas de las de otras bandas. Estas bandas de radiodifusión se reservan para este fin por acuerdos internacionales. Dentro de cada país puede que introduzca sus propias limitaciones, reservas o utilización, por lo que las cifras deben tomarse solo como característica general.

Denominación	Siglas	Margen longitud onda (λ)	Equivale a
4 - Ondas muy largas (Very Long Waves)	VLW	10 – 100 Km	VLF
5 - Ondas largas (Long Waves)	LW	1 – 10 Km	LF
6 - Ondas medias (Medium Waves)	MW	100 – 1000 Km	MF
7 - Ondas cortas (Short Waves)	SW	10 – 100 m	HF
8 - Ondas muy cortas (Very Short Waves)	VSW	1 – 10 m	VHF
9 - Ondas ultra cortas (Ultra Short Waves)	USW	100 – 1000 mm	UHF
10 - Ondas super cortas (Super Short Waves)	SSW	10 – 100 mm	SHF
11 - Ondas extra cortas (Extra Short Waves)	ESW	1 – 10 mm	EHF

Las bandas de frecuencia pueden también clasificarse en relación a las longitudes de onda que comprenden. Se da su equivalencia con las denominaciones en relación con la frecuencia.

1.5. UTILIZACIÓN DE LAS BANDAS

1.5.1. Transmisión en AM

Las bandas de frecuencias más bajas se reservan para las emisoras que trasmiten en AM (535 KHz a 1705 KHz – Ondas Medias - **OM**[1]), mientras que las de FM transmiten en frecuencias superiores (88 MHz a 108 MHz – Frecuencias Muy Altas - **VHF**). Esto, como ahora veremos, es consecuencia del distinto ancho de banda que requieren unas de otras transmisiones.

116 Canales de 10Khz

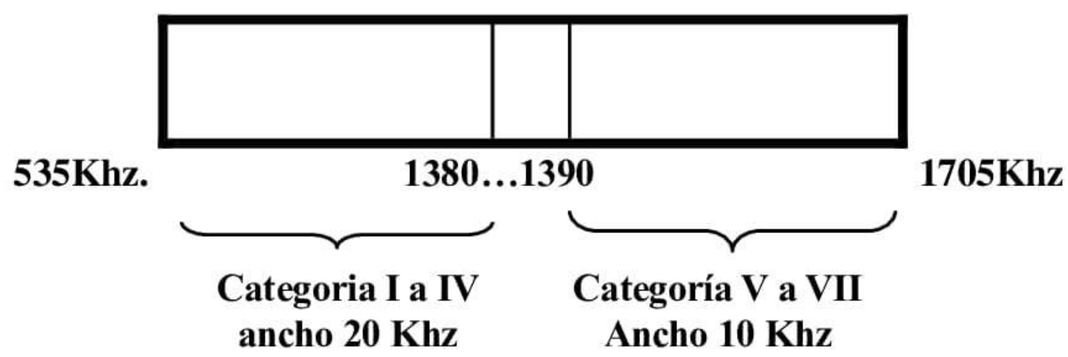


FIGURA 1-21: Radiodifusoras de AM- **(ENACOM - Ente Nacional de Comunicaciones. Cuadro de Atribución de Bandas de Frecuencias República Argentina).** Fuente: www.enacom.gob.ar

[1] Ponemos OM – Ondas Medias en vez de Frecuencias Medias, para no confundir Medias Frecuencias MF con FM.

Al tener cada una de las bandas un ancho especificado, del que no podemos salirnos, cuanto más ancho de banda emplee cada emisora, menos emisoras "caben" en una determinada banda, ya que una emisora no puede "montar" sobre la banda ocupada por otra, pues producirían interferencias. Por ejemplo, supongamos que queremos utilizar la banda de OM para emisoras de AM, y que cada una de ellas va a trasmitir música en alta fidelidad. Ya sabemos que, para este uso, necesitaremos reproducir señales cuya frecuencia máxima será del orden de 20 KHz. Puesto que la modulación es en amplitud, a ambos lados de la portadora aparecerán dos bandas de 20 KHz de ancho cada una (igual ancho que la señal de audio), necesitándose, por tanto, 40 KHz de ancho para cada una de las emisoras.

Puesto que la banda de OM ocupa un ancho de 1080 KHz (1600 – 520 = 1080 KHz), a razón de 40 KHz cada emisora, solo entrarían 27 con la condición ya dicha de que una emisora no se "solape" en parte con la banda ocupada por otra. Este número es muy reducido. En zonas muy densamente pobladas, como pueden ser las grandes urbes, es corriente encontrarse con 15, 20 e incluso más emisoras radiando simultáneamente. Ocuparía la banda entera de OM, y solo se serviría a una gran ciudad ¿Qué pasaría con las zonas adyacentes? No podrían tener sus propias emisoras, pues todo el espectro estaría ya ocupado.

Bajemos un poco la calidad de transmisión y reduzcamos la banda de audio de 20 KHz a tan solo 15 KHz.

Ahora necesitaremos 30 KHz (2 x 15 KHz) para cada emisora, por lo que en la banda de OM llegarían a entrar 36 emisoras. La práctica real sigue diciendo que es un número insuficiente. Por esta razón la comunidad internacional se puso de acuerdo en crear una Oficina o Comité que se encargara de redactar *normas* (con carácter de *recomendaciones*, pero que son seguidas al pie de la letra por todos los países) que estuvieran destinadas al mejor aprovechamiento del espectro de ondas hertzianas, no sólo con fines de radiodifusión, sino de todos los servicios y usos que puede darse a las mismas. Esta es una de las misiones del C. C. I. R. (*Comité Consultivo Internacional de las Radiocomunicaciones*). El C. C. I. R. estudió el problema de la transmisión de AM en las bandas de frecuencias bajas medias y altas (OL, OM Y OC), llegando a la conclusión de que para poderlas aprovechar adecuadamente era necesario reducir el ancho de banda empleado para cada emisora a 9 KHz, con lo que fácilmente se comprende que cada banda lateral no podrá ocupar más de 4,5 KHz, que será también la frecuencia de la señal de audio más elevada que pudo transmitirse. De esta forma, pueden entrar hasta 120 emisoras transmitiendo simultáneamente sin interferirse unas a otras.

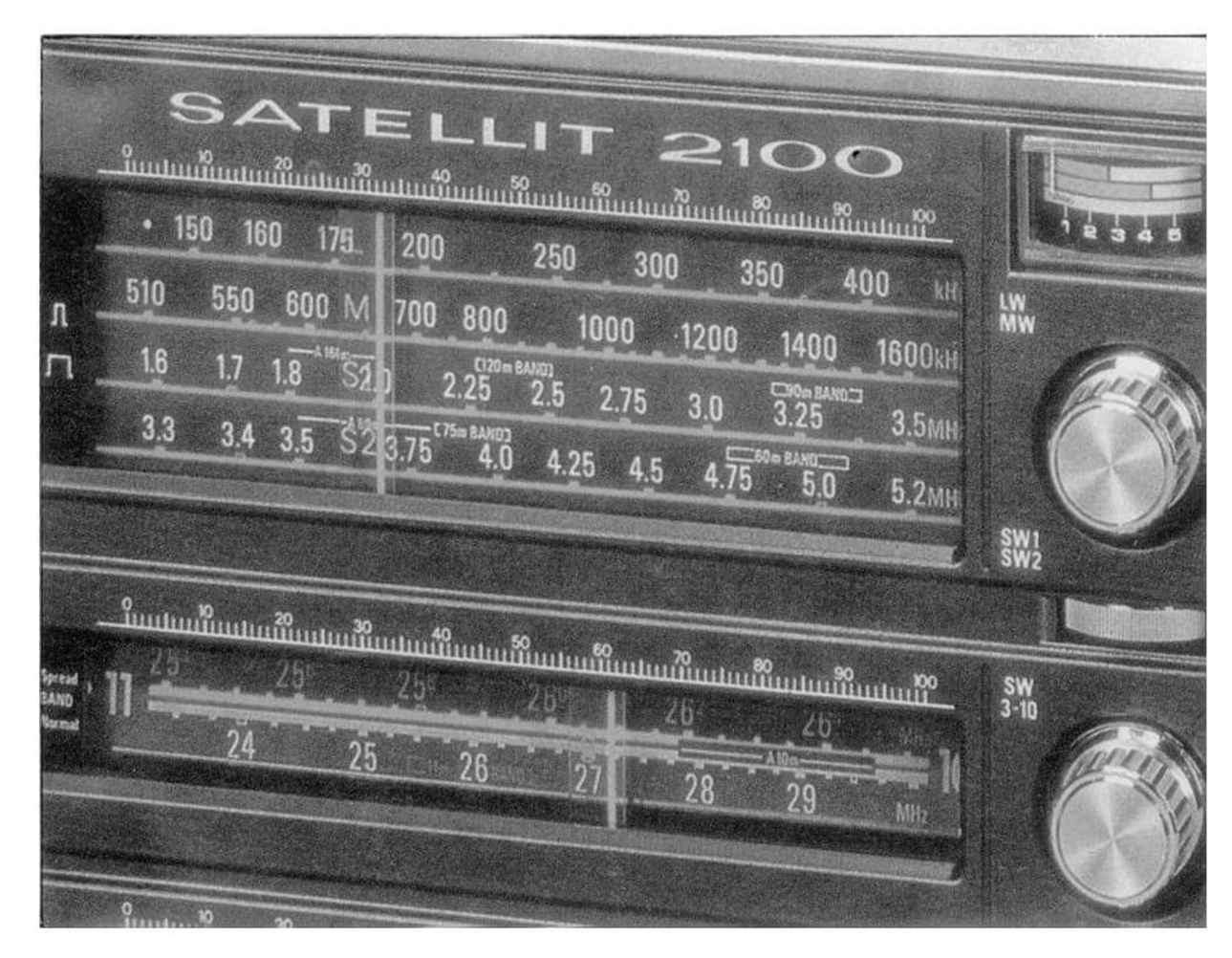


FIGURA 1-22: Las bandas de radiodifusión en AM en los antiguos receptores eran tres: la OL, la OM y parte de la OC. La mayor parte de los receptores podían recibir emisoras en dichas bandas

Naturalmente, cada una de esas 120 emisoras se ven imposibilitadas a poder transmitir programas de alta fidelidad, ya que el C. C. I. R. les ha limitado la banda de audio a 4,5 KHz. Así, pues, se ha cambiado conveniencia de uso por calidad de transmisión musical. En su momento, ya dijimos que las emisoras de AM no podían considerarse integradas a la alta fidelidad.

Aquí está la razón, que como también se dijo es de orden técnico, y no porque la AM no pueda "dar más de sí", independientemente de que luego se presenten otro tipo de problemas, como el de las interferencias de tipo atmosféricas, de las que ya hablaremos en su momento.

1.5.1.1. Características de la Modulación de Amplitud

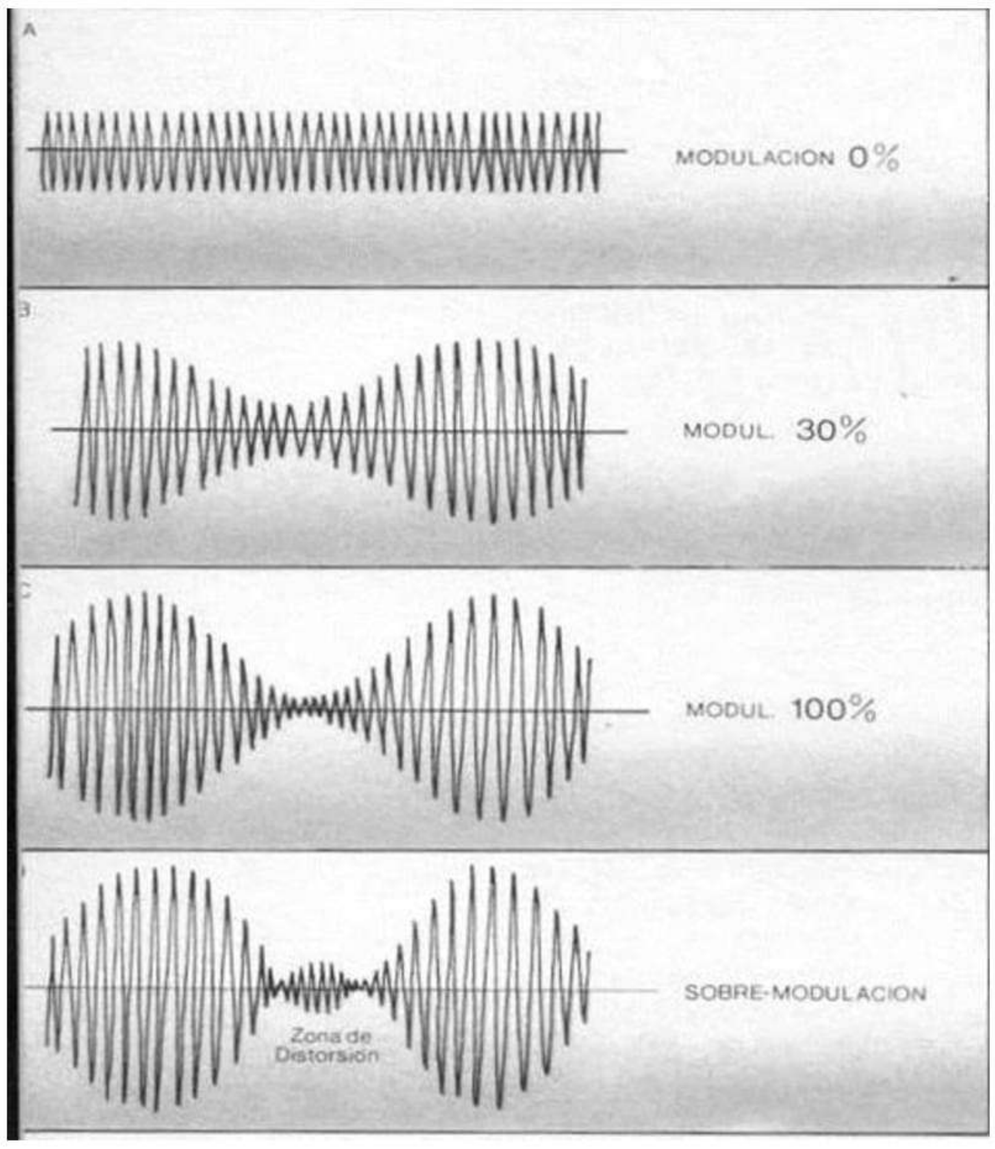
Ya sabemos que este tipo de modulación consiste en hacer variar la amplitud de la portadora al ritmo que le fije la moduladora. Pero ¿cuándo se puede hacer variar dicha amplitud?. Existen dos topes claros: uno, cuando la amplitud de modulación alcanza la amplitud de la portadora, y otro, cuando no se produce modulación (amplitud de la portadora constante).

En el primer caso, se dice que la *profundidad o porcentaje de modulación* es del 100%, mientras que en el segundo, es cero. Entre ambos extremos se obtienen todos los valores de la profundidad de modulación posibles.

Es fácil comprender que si se pretende modular la portadora con una profundidad mayor del 100 %, la forma de la señal obtenida será diferente de la original, produciéndose distorsión en la parte receptora.

Una emisora de radio que transmita en AM gastará una cierta potencia en enviar las ondas de radio. Puesto que la amplitud *media* de la portadora es siempre la misma, la potencia gastada en enviar la portadora será constante.

Sin, embargo la potencia gastada en las bandas laterales dependerá de la profundidad de modulación. Cuando dicha profundidad sea cero, no habrá modulación, no habrá bandas laterales y no se empleará potencia en ellas.



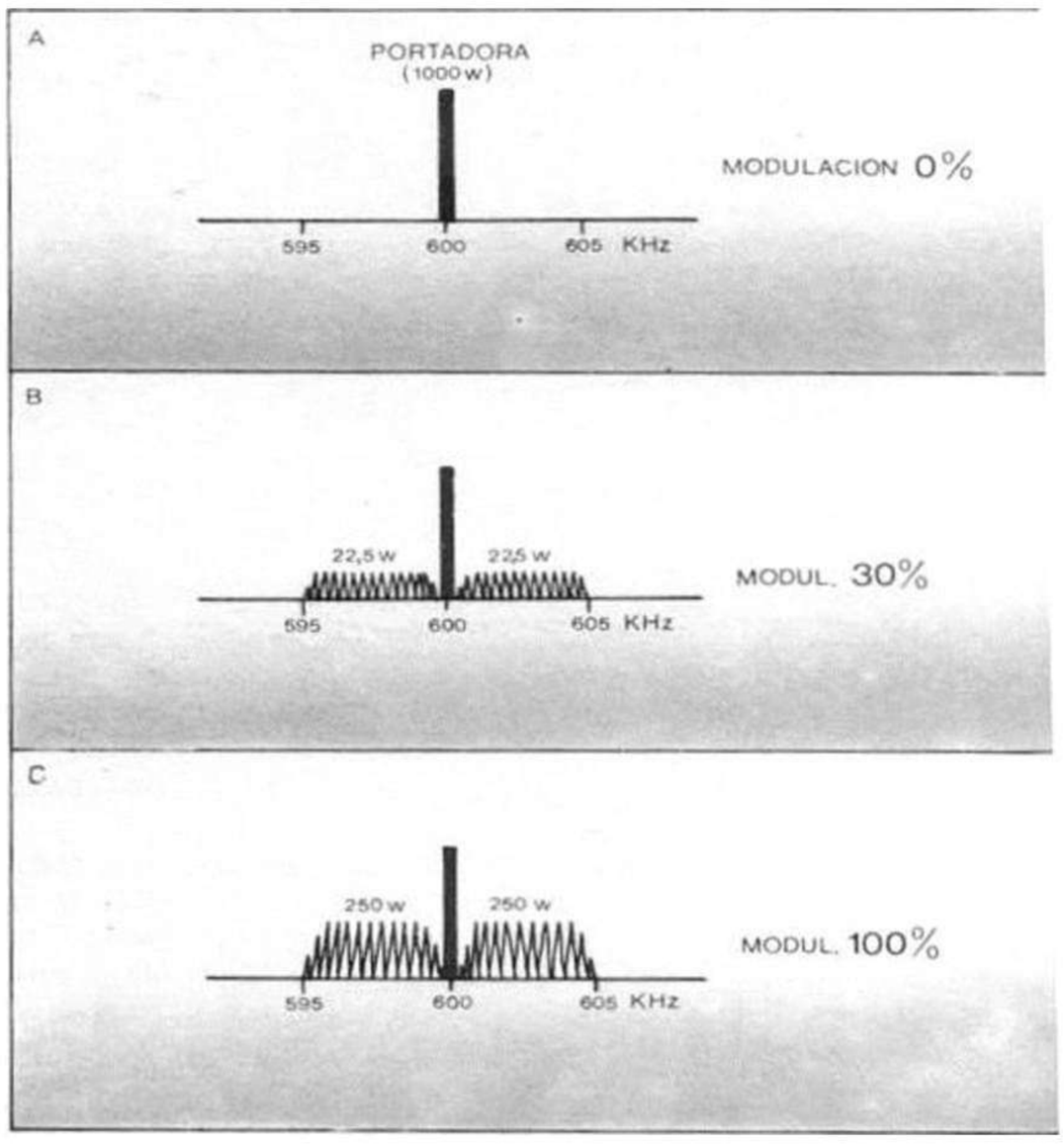


FIGURA 1-23: A la izquierda: Porcentaje de modulación en AM. Una onda portadora sin modular tiene una amplitud constante (A). Cuando se modula con una señal, la amplitud media sigue siendo la misma, aunque varía con la misma forma que la moduladora (B). Cuando las amplitudes de la portadora y la moduladora se hacen iguales, se consigue la modulación al 100% (C). No debe permitirse que la amplitud de la moduladora sea superior a la de la portadora, para evitar posibles distorsiones.

A la derecha: Potencias empleadas en las distintas bandas laterales. Si la potencia de la portadora se mantiene constante, cuando no se modula, toda la potencia será gastada en transmitir una portadora (A). Cuando el porcentaje de modulación alcanza el 30%, la potencia empleada en cada banda lateral es poco más del 2% de la portadora (B). SI el porcentaje de modulación se hace máximo, en cada banda lateral se emplea tan solo la cuarta parte de potencia que en la portadora (C).

Cuando la profundidad de modulación alcance al 100% se producirán dos bandas laterales iguales, en cada una de las cuales se empleará una potencia que es la cuarta parte de la empleada para la portadora. Para valores intermedios entre el 0 y el 100%, la potencia empleada en cada banda lateral disminuye, de forma que para un 30%, por ejemplo, la potencia de cada banda representa poco más del 2% de la empleada para la portadora.

Si tenemos en cuenta que la “información” que queremos transmitir va contenida en las bandas laterales, fácilmente comprenderemos que estamos derrochando energía puesto que apenas un 5% de la potencia gastada por un transmisor de AM que module un 30% de profundidad va a sernos útil, ya que el otro 95% se emplea para la portadora que, en sí, no contiene información útil alguna. En el mejor de los casos (modulación al 100%), la potencia empleada para las dos bandas representa tan solo el 50% de la portadora.

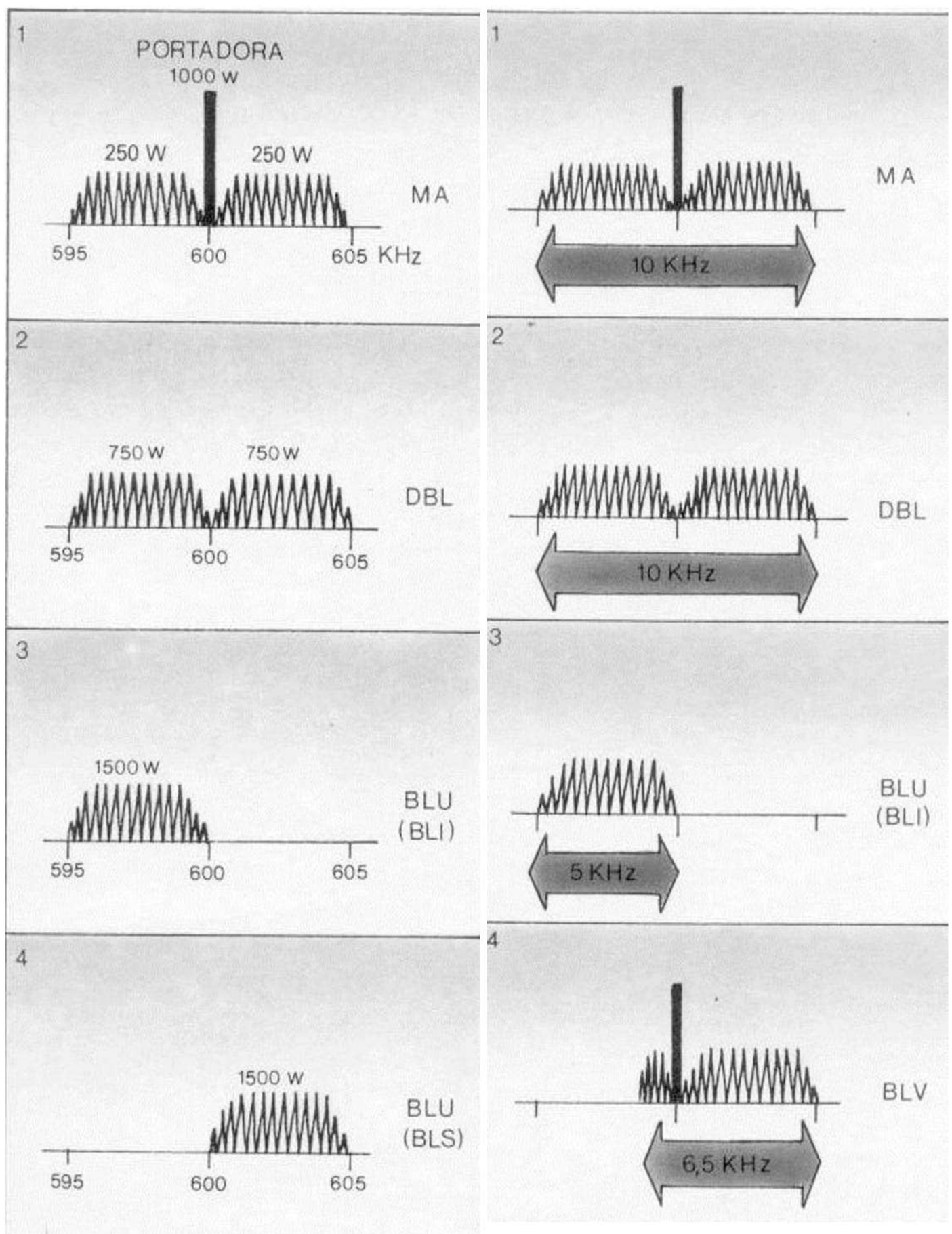


FIGURA 1-24: A la izquierda: Reparto de potencia en distintas situaciones. Se supone que siempre se transmite con 1500W de potencia en antena. 1) Modulación de amplitud al 100%. 2) Modulación en doble banda lateral (DBL). 3) y 4) Modulación en BLU. La única diferencia está en la transmisión de la banda lateral inferior (BLI) o la superior (BLS). En inglés estas dos bandas se abrecian como LSB (de "LowerSide Band) y USB (de "UpperSide Band), respectivamente.

A la derecha: Ancho de banda ocupado por distintas transmisiones. 1) Modulación en amplitud con señales de hasta 5 KHz. 2) Modulación en DBL también con señales de audio de hasta 5 KHz. 3) Modulación en BLU (banda Lateral Inferior) con señales de hasta 5 KHz. 4) Modulación en banda lateral vestigial (BLV). En este caso, se suprime parte de una de las bandas: la información suprimida puede recuperarse con ayuda de otra banda lateral.

Para conseguir un mejor rendimiento del proceso de transmisión, puede suprimirse (con un filtro, por ejemplo) la portadora, emitiéndose tan sólo las dos bandas laterales, dando lugar a la llamada *modulación en doble banda lateral* (en inglés abreviado como DSB, de "Double Side Band"). Incluso puede suprimirse también una de las doble bandas laterales, ya que toda la información que queremos transmitir va contenida por igual en ambas. Así se da paso a los sistemas de *modulación en banda lateral única*, abreviada como BLU (y en inglés como SSB, de "Single Side Band"). Este último sistema es el que mayor rendimiento tiene, ya que toda la potencia gastada en el trasmisor se aprovecha para transmitir toda la información.

Otros tipos de modulación de amplitud existen aún, unos sin y otros con supresión de portada. Entre ellos cabe mencionar el empleado por la señal de imagen (video) de TV, denominado de *banda lateral vestigial*, *BLV* en la que se suprime una parte de las bandas laterales.

Aparte de la ventaja que supone un mayor rendimiento de transmisión, los sistemas que suprimen parte o la totalidad de una de las bandas laterales ahorran también ancho de la banda ocupado, ya que solo se emplea el suficiente para transmitir la información útil. En concreto, los sistemas de

BLU utilizan la mitad o menos del espectro ocupado por una emisora de AM normal. Esto supone *doblar* el número de emisoras que pueden entrar en una cierta banda sin interferirse unas a otras.

Naturalmente, cada sistema de modulación entraña unas ciertas técnicas, que no solo han de tenerse en cuenta en el transmisor, sino también en la parte receptora.

Por estas razones, la totalidad de las emisoras que trasmiten en las bandas de radiodifusión en AM lo hacen con doble banda lateral y portadora, no beneficiándose de ninguna de las ventajas de los distintos sistemas comentados.

La única excepción al sistema de bandas laterales la constituyen las emisoras de TV, que transmiten siempre en el sistema ya comentado de BLV, sistema al que están adaptados los televisores.

1.5.2. Transmisión en FM

Cuando hemos hablado del ancho que ocupa una transmisión en FM, dijimos que era de, al menos, diez veces el de la señal de audio. Así y suponiendo que transmitiéramos música en alta fidelidad, con señales de frecuencias de hasta 20 KHz, cada emisora necesita, por lo menos, una banda de 200 KHz. ¿Qué ocurriría si pretendiéramos utilizar este tipo de transmisión en la banda de OM? Sólo entrarían, y mal, seis emisoras. Si antes teníamos problemas con la AM, no diremos nada de los que se presentarían ahora (aparte de otros de tipo técnico que surgirían, y que no comentaremos). Aun admitiendo a reducir el ancho de banda de audio a tan solo 4,5 KHz, no podrían transmitir más de 25 emisoras simultáneamente.

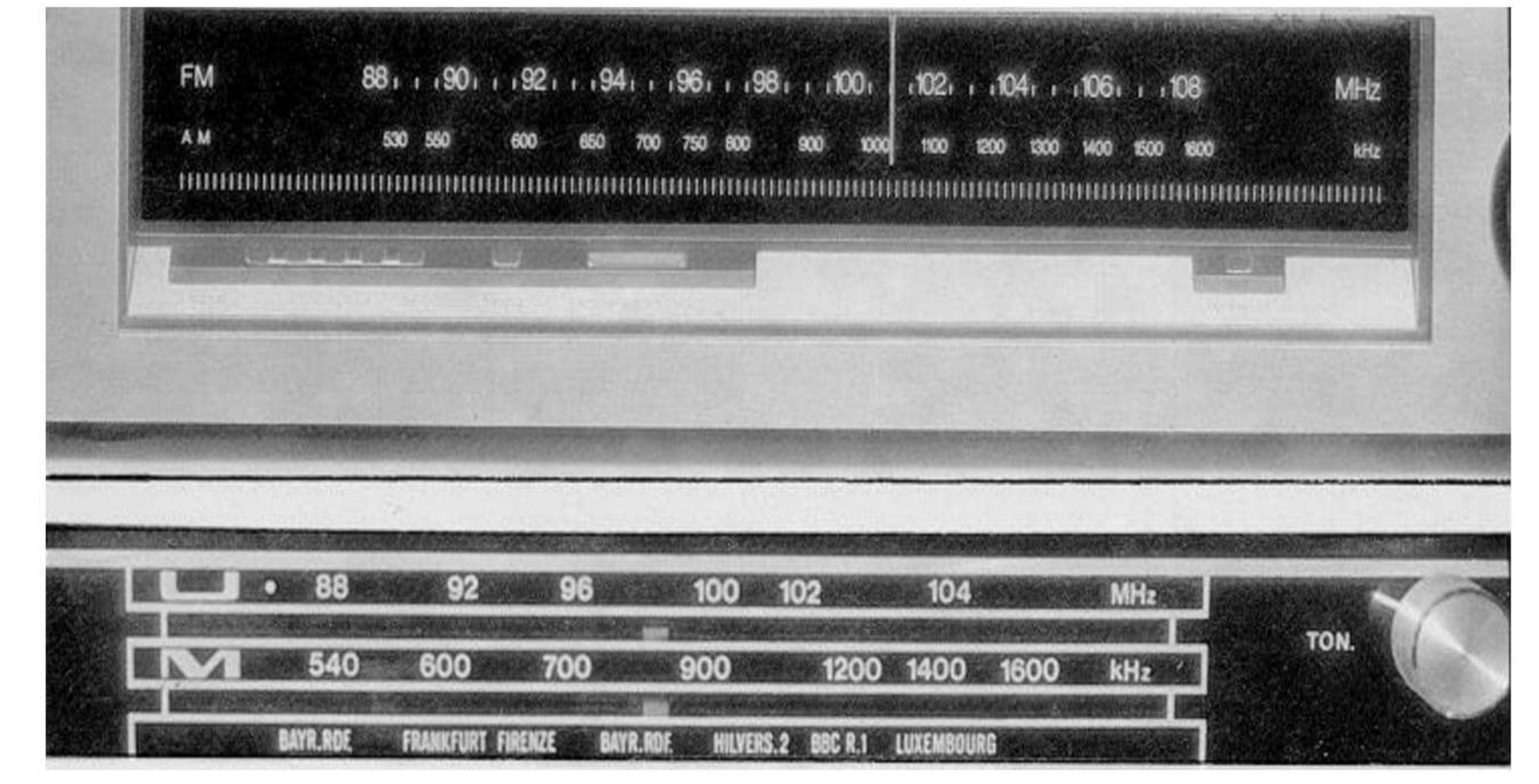


FIGURA 1-25: La banda de radiodifusión en MF se sitúa alrededor de los 100 MHz (88 – 108).

Es por esta razón que se eligen bandas de frecuencias muy elevadas para su uso por la radiodifusión en FM. En concreto, y suponiendo que se utilice un ancho de banda por emisora de 200 KHz como lo establece nuestra CNC, en la banda de 88 a 108 MHz entrarán 100 emisoras.
100 Canales de 200 Khz.

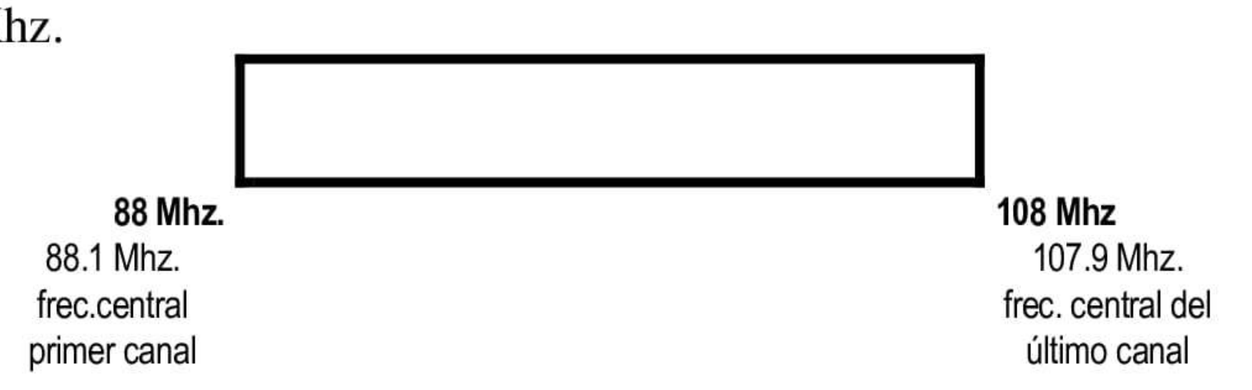


FIGURA 1-26: Radiodifusoras de FM- (CNC.-CABFRA). Fuente: www.cnc.gob.ar

Otra gran ventaja que presenta la FM frente a la AM es el filtro a los ruidos. Todos conocemos los ruidos tan desagradables que se oyen en nuestro receptor de AM cuando hay una tormenta, o simplemente, cuando ponemos en marcha un secador de pelo o una batidora eléctrica. Incluso en TV (que también emplea un tipo de modulación en amplitud), y con este tipo de *interferencias*, se observan puntos luminosos que recorren la pantalla, enturbiando la imagen. En la recepción de radio la interferencia puede llegar a ser tan grande, que a veces anula por completo la señal recibida de la emisora.

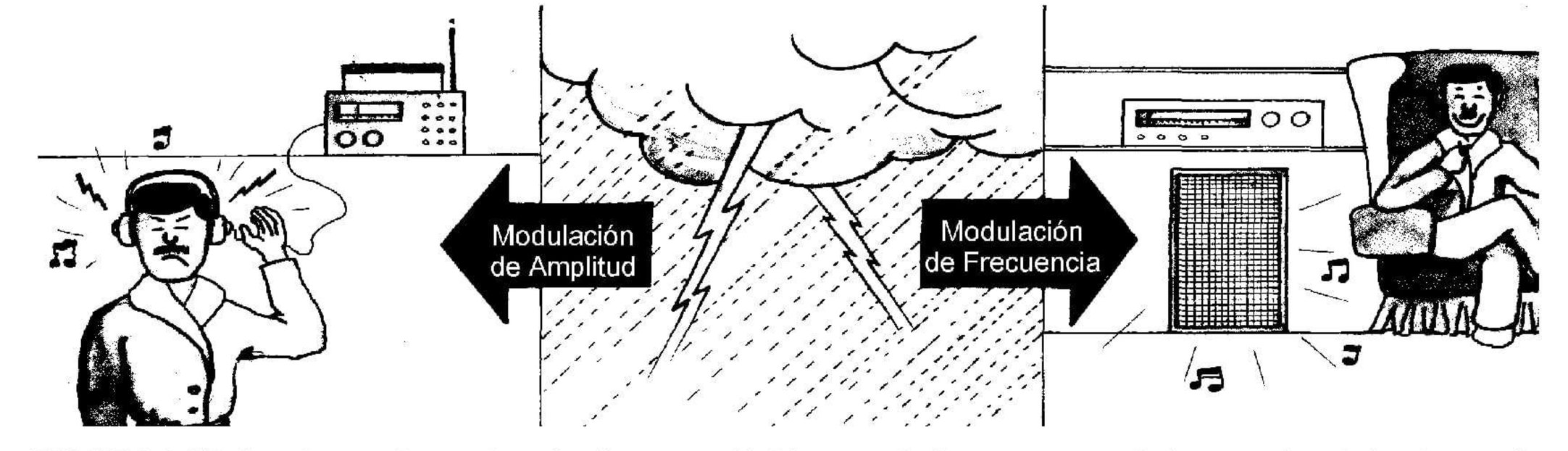


FIGURA 1-27: Las tormentas y otros fenómenos eléctricos perturban gravemente la escucha de las transmisiones en AM, mientras que apenas si tienen efecto alguno sobre las realizadas en FM.

Este tipo de interferencia se produce porque la fuente u origen (la tormenta o el secador) generan señales de amplitud variable en todo el espectro de frecuencias (desde menos de 10 KHz hasta la banda de VHF); estas señales se *suman* con la de AM o la de TV, modificando su *amplitud*, que es donde va contenida precisamente la "información" sonora o de imagen.

Cuando el receptor "examina" la amplitud de la señal que llega, no sabe reconocer si hay o no "ruido", y envía al altavoz o a la pantalla todo lo que recibe, incluida la interferencia. En cambio, un recepto de FM está preparado para "reconocer" *solamente* variaciones en la *frecuencia* de la señal que le llega, y no en su *amplitud*, por lo que aunque la señal de FM se vea grandemente modificada por la interferencia, el receptor rechazará esta última, dejando pasar la señal de audio "limpia".

1.5.2.1. Características de la modulación de frecuencia

Al igual que ocurre con la señal modulada en amplitud, la que ha sido modulada en frecuencia también puede descomponerse matemáticamente en varias componentes. Sin embargo, ahora el resultado no es tan sencillo. Aunque no vamos a exponer un estudio completo, si vamos a esbozar cuáles son los problemas que surgen con una transmisión de FM.

Del estudio de la señal modulada (que es la que se trasmite y recibe) resulta que se producen un número infinito de componentes laterales, ocupando un ancho de banda también infinito, al contrario de lo que ocurriría con la AM, en la que eran solo dos bandas con un ancho de banda determinado. En principio, podría parecer un problema insoluble, ya que no puede construirse equipo práctico con ese ancho de banda.

Un estudio más detenido de las componentes que nos dice que su amplitud decrece rápidamente conforme nos alejamos de la frecuencia de la portadora, por lo que tomando un número relativamente pequeño de las mismas, puede recuperarse suficiente información como para recomponer la señal con un grado determinado de calidad.

De aquí proviene el gran dilema que supone la elección del ancho de banda ocupado para la transmisión-recepción de una señal modulada en frecuencia. Cuando mayor número de componentes laterales tomemos, mayor fidelidad de reproducción obtendremos, y mayor ancho de banda ocuparemos, con lo que menor número de "canales" entrarán en la banda asignada. Por el contrario, queremos suficiente número de "canales", deberemos acotar el ancho ocupado por cada uno, con lo que menor número de componentes laterales recuperaremos y, por tanto, menor calidad tendrá la reproducción.

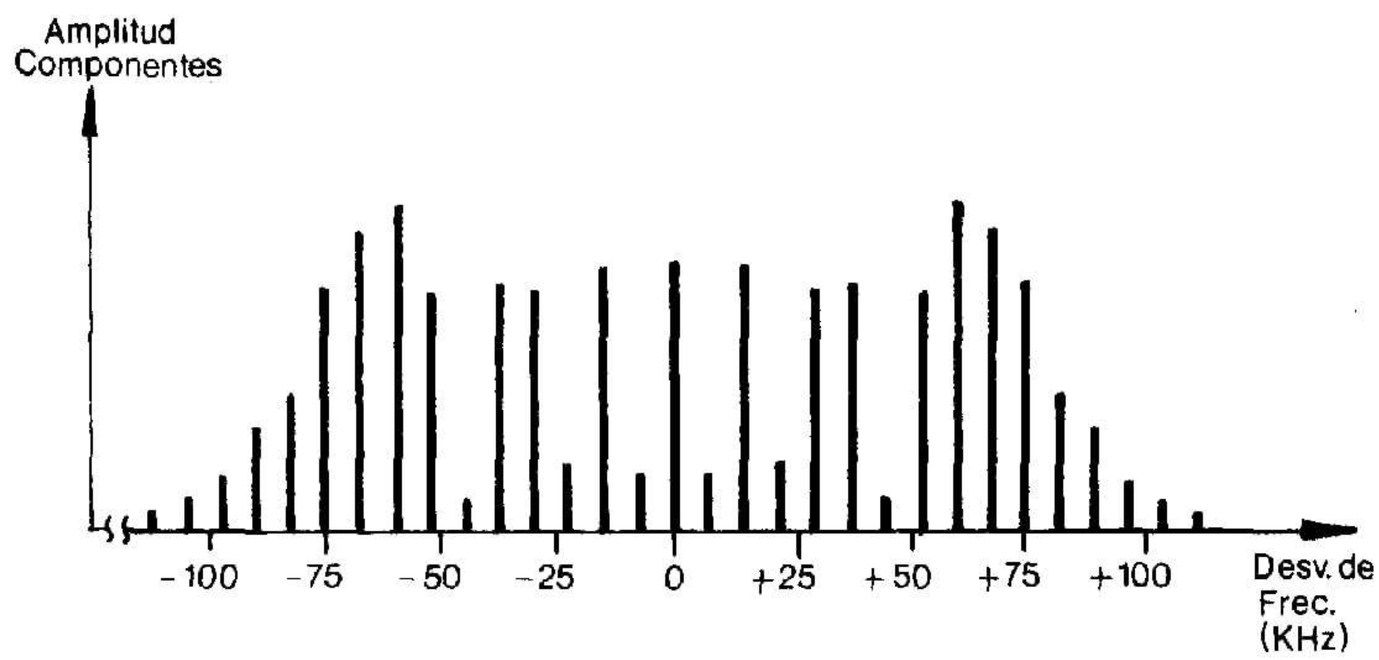


FIGURA 1-28: Las componentes de frecuencia producidas por una modulación en frecuencia son, teóricamente infinitas. Aquí se muestran las producidas por un tono de 7,5 KHz de audio, que ocupa un ancho de banda superior a los 250 KHz

Como en otras muchas ocasiones, es la práctica la que nos da la última palabra. Así, numerosas pruebas han llegado a demostrar que, con una desviación típica de ± 75 KHz y si se desea recuperar la información suficiente para que no haya diferencia apreciable con la señal original (para la que se considera una banda de 15 KHz de ancho), es necesario un ancho de banda de 255 KHz. No obstante, si el ancho de banda lo reducimos a 210 KHz, aun no recuperándose toda la información, no se obtendrá distorsión armónica apreciable. Todavía puede reducirse algo más el ancho de la banda, ya que los valores anteriores pueden deducirse de aproximaciones teóricas al problema.

En FM no ocurre como en AM, en que parte de la potencia transmitida es empleada exclusivamente para la portadora, no siendo útil a efectos de "información" como ya hemos comentado. Ahora la potencia gastada en la emisora se distribuye por toda la banda entre todas las componentes, de forma que tan solo en el caso de que no se trasmita modulación alguna (sólo la portador), la potencia irá exclusivamente para la portadora. En todos los demás casos la portadora recibirá tan sólo parte de la potencia gastada.

Por último diremos que en televisión utilizamos los dos tipos de modulación enunciados: Modulación en Amplitud con Banda Lateral Vestigial para la imagen y Modulación en frecuencia para el sonido. La figura siguiente muestra la ubicación de cada portadora dentro de los 6 Mhz asignados a cada canal de TV:

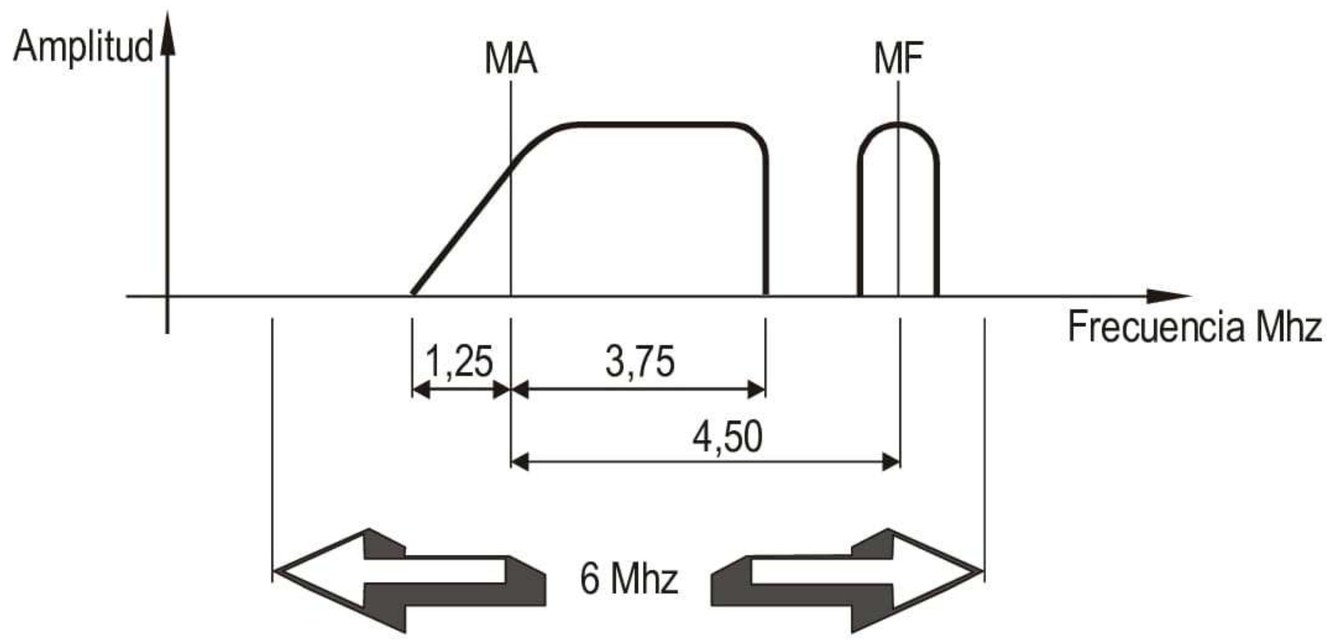


FIGURA 1-29: Distribución del espectro por un canal de TV.

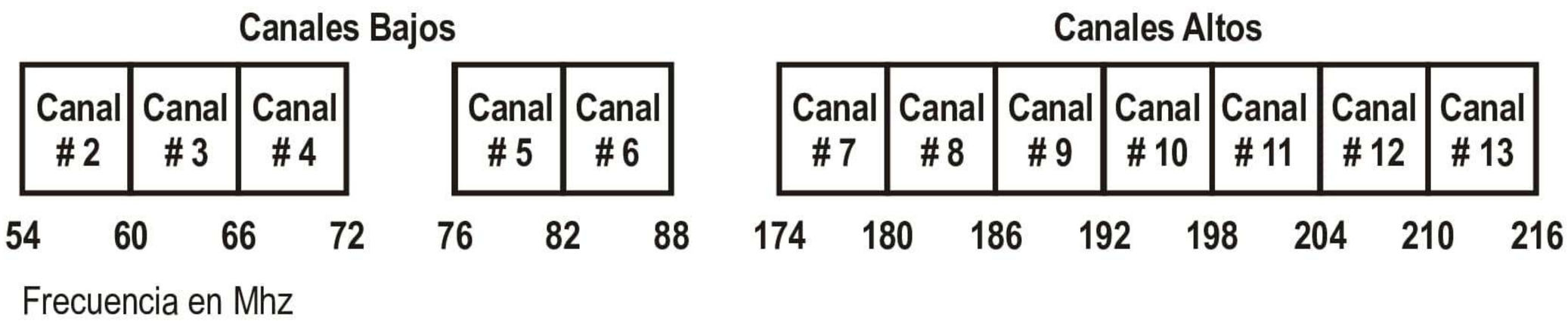


FIGURA 1-30: Distribución de Canales de Televisión (VHF)

70 canales de 6Mhz

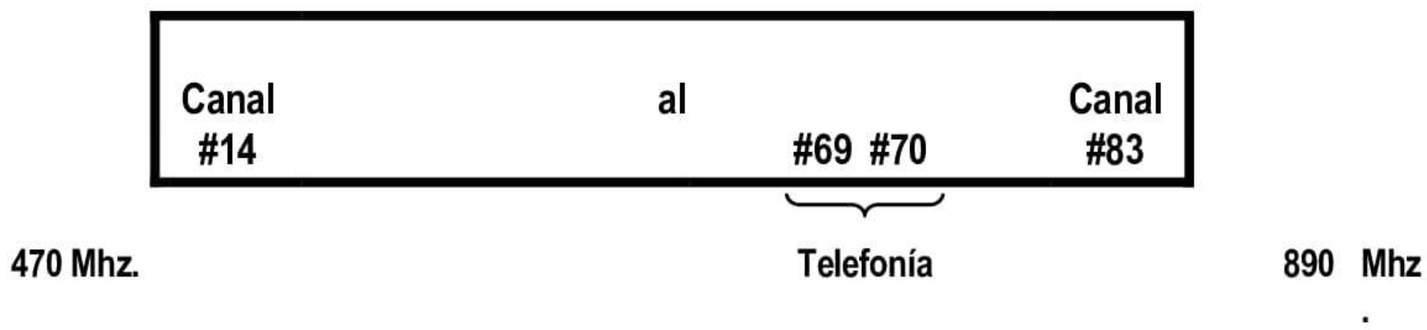


FIGURA 1-31: Distribución de Canales de Televisión (UHF)

1.6. PROPAGACIÓN DE ONDAS

La idea de la comunicación por radio es muy simple en su concepción. Un **transmisor**, un **medio** por el que se propague la onda (medio de enlace entre transmisor y receptor), y un **receptor**. El transmisor y el receptor los construimos nosotros colocándolos en los lugares adecuados, que por una u otra razón convengan.

Pero el medio de transmisión está ahí (la atmósfera, para el tipo de comunicación que nos interesa), y es muy difícilmente modificable para hacerle cumplir con nuestro requisitos ideales, por lo que hay que adaptarse a él, estudiarlo y aprovecharlo lo mejor que se pueda.

Como no pretendemos hacer un estudio teórico, no vamos a sintetizar las propiedades que presenta, sino que vamos a hacer un análisis práctico de su comportamiento. Así, diremos que fundamentalmente, podemos considerar que la señal de una transmisión mediante onda electromagnética puede desplazarse de tres formas, que suelen denominarse como **onda de tierra**, **onda de espacio** y **onda visual**.

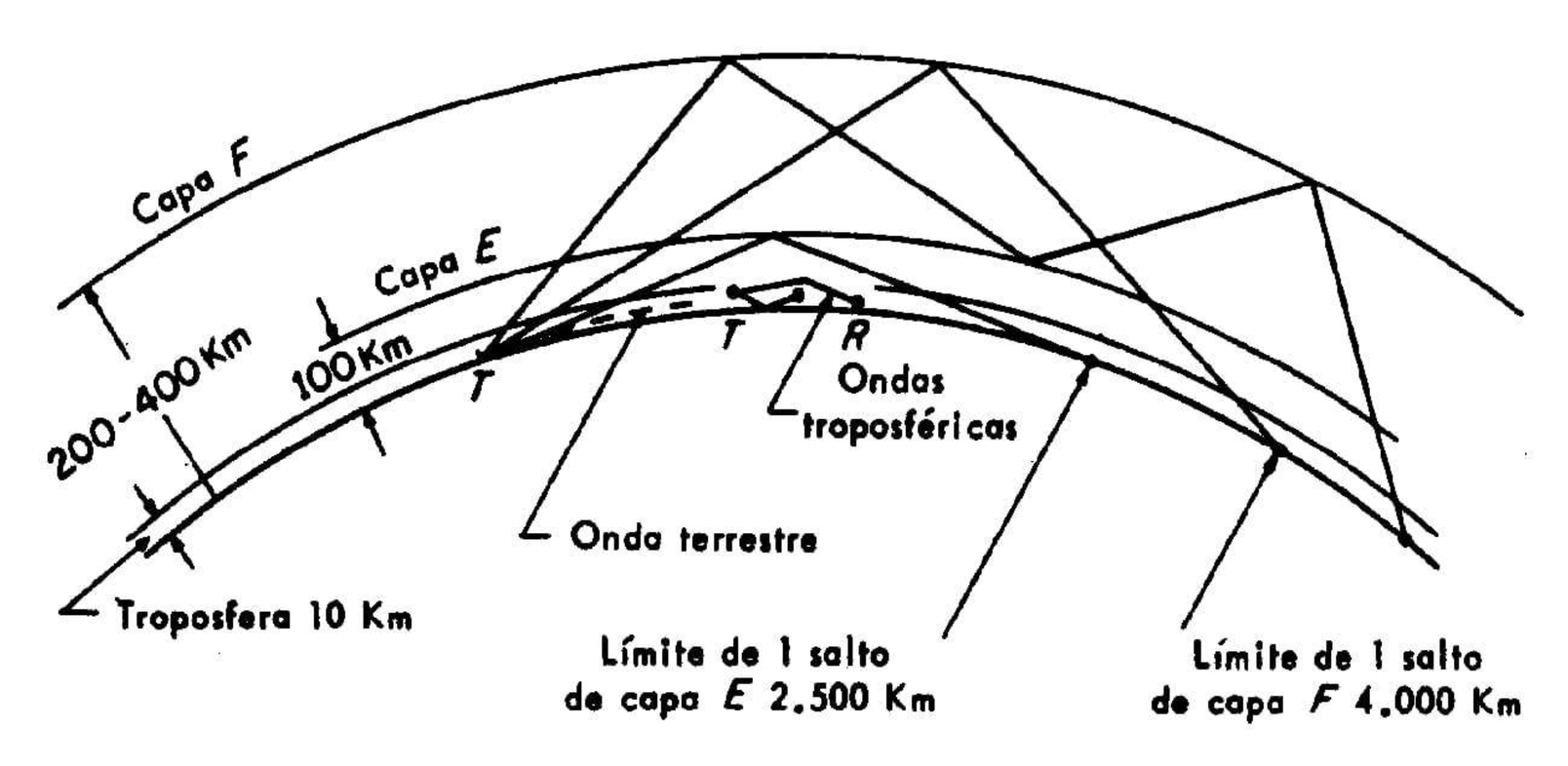


FIGURA 1-32: Algunas líneas de propagación posibles

1) En principio, las ondas radio se desplazan en línea recta, por lo que dos puntos podrían quedar unidos por las mismas siempre y cuando estuvieran, uno a la vista del otro. Este tipo de comunicación es la que se realiza con la llamada **onda visual** u **onda directa**. Conviene aclarar que el término "visual" es relativo a las ondas de radio como onda directa. Objetos que para nuestra vista resultan opacos, son perfectamente transparentes a las ondas de radio. Y, recíprocamente, a determinadas estructuras que no pueden atravesar las ondas de radio.

Por ejemplo, resulta muy difícil hacer funcionar un receptor de radio en el interior de una jaula metálica, aunque nuestra vista no tiene ningún problema para ver a través de la misma (si los barrotes no son muy gruesos).

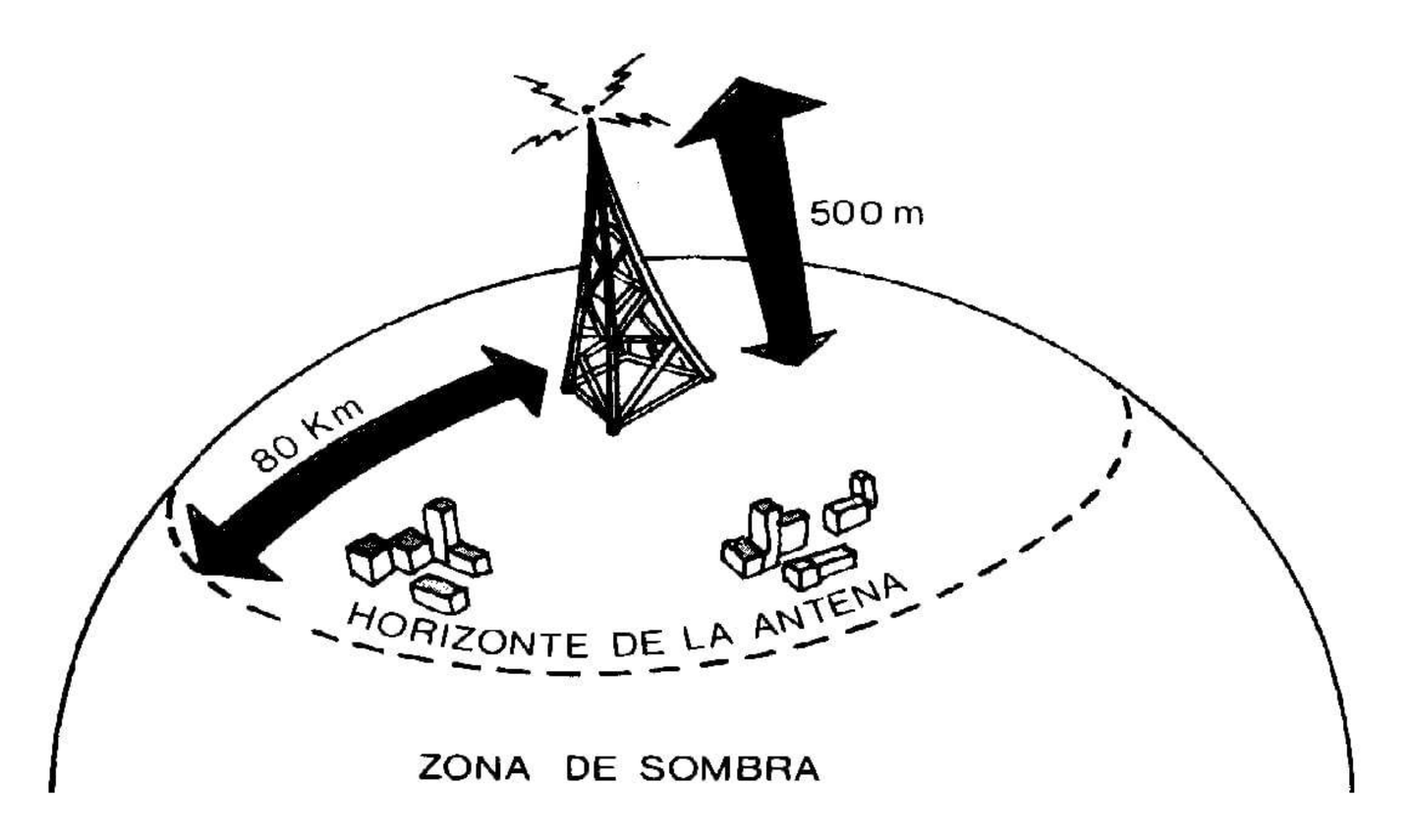


FIGURA 1-33: Zona útil de propagación por onda visual. El alcance de una transmisión en estas condiciones viene limitado principalmente por el horizonte geográfico de la antena de transmisión.

2) Por otro lado, las ondas hertzianas u ondas radio también pueden propagarse sobre la superficie de la tierra, siguiendo su orografía.

Esta es la denominación **onda de tierra** u **onda terrestre**, que se atenúa con la distancia debido a las pérdidas producidas por el mismo terreno sobre el que viaja. Dichas pérdidas dependen de la frecuencia de la transmisión así como de las características eléctricas de la tierra (conductividad, entre otras). El término "tierra" debe aplicarse en el sentido de superficie terrestre, la cual incluye las superficies de agua. En concreto la propagación por onda de tierra sobre la superficie del mar (agua salada) se atenúa mucho menos que sobre el terreno firme. Conductividad de la Tierra promedio $\sigma_T = 10^{-3}$ [Mhos/m]; Conductividad promedio del agua de Mar: $\sigma_A = 5{,}6.10^2$ [Mhos/m].

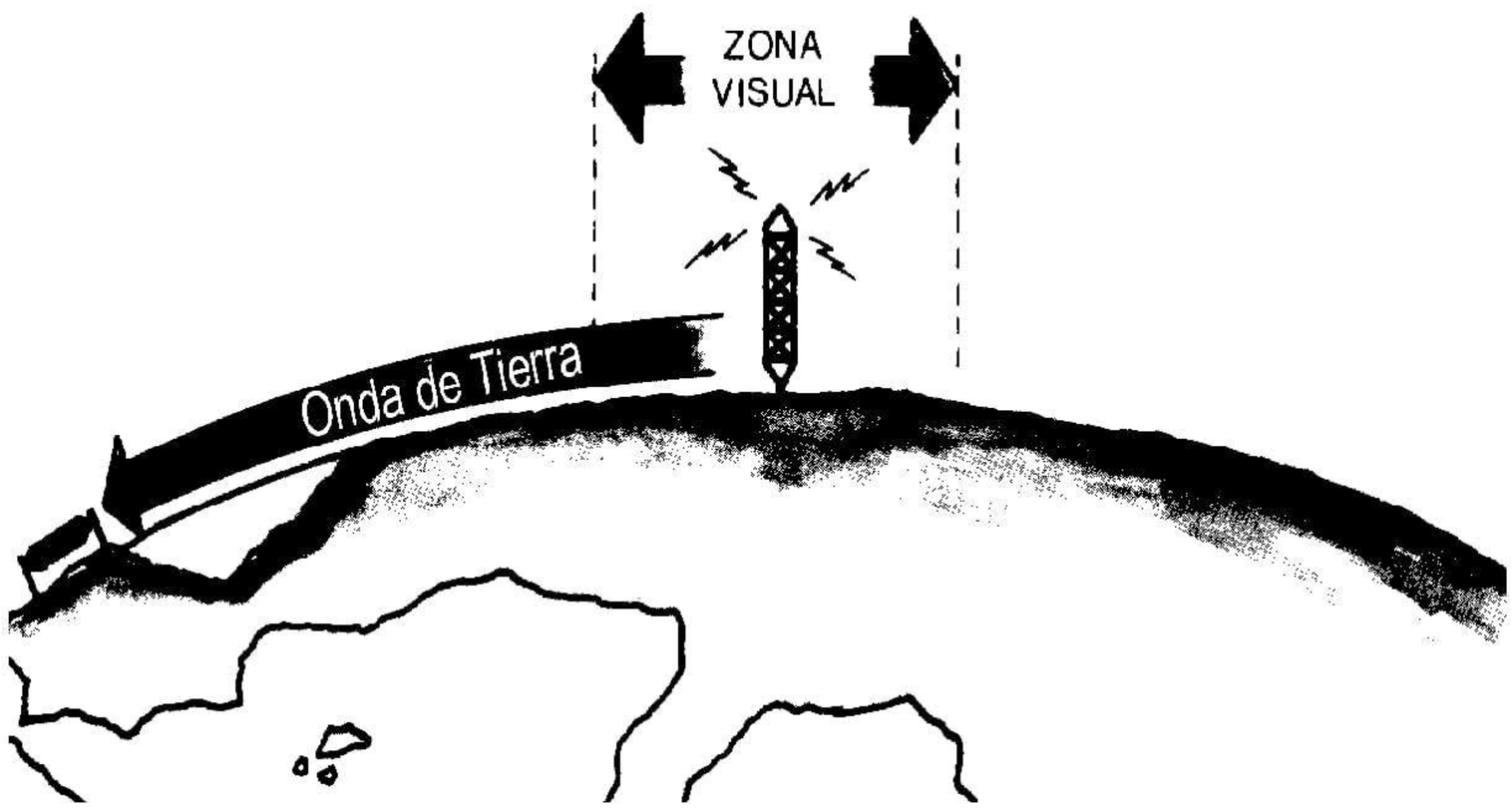


FIGURA 1-34: Comunicación por onda de tierra. El alcance de la onda de tierra es considerablemente mayor que el visual, y puede llegar a ser de varios miles de kilómetros, dependiente de la potencia de la emisora. En igualdad de condiciones, el mayor alcance se obtiene cuando la onda se propaga sobre agua salada.

El alcance práctico de la onda de tierra depende mucho de la frecuencia empleada por la emisora, de forma que disminuye conforme se aumenta la frecuencia. Por esta razón son las gamas de frecuencias más bajas las que se benefician de esta forma de propagación. En la banda de OM el alcance es más reducido, y podemos considerar que por encima de unos 1600 KHz (extremo superior de la banda OM) sólo se realizan comunicaciones locales por medio de la onda de tierra (a lo sumo 50 kilómetros).

3) Finalmente, la señal de radio puede llegar al receptor viajando por el aire, por medio de lo que se conoce como **onda de espacio** u **onda celeste**. La atenuación en el aire es relativamente pequeña, por lo que el alcance de la onda de espacio puede ser muy grande. Además, las capas altas de la atmósfera (la llamada ionosfera) se comportan, en determinadas condiciones, de una forma muy peculiar: pueden "curvar" el camino recorrido por la onda del espacio, y hacerla volver a la tierra (como un rayo de luz que se refleja en un espejo), o incluso viajar a través de la ionosfera una cierta distancia antes de regresar hacia la tierra. Una vez que la onda regresa, puede ser reflejada por la superficie de la tierra y volver de nuevo a la ionosfera, repitiendo el proceso y pudiendo realizarse comunicaciones a distancias enormes.

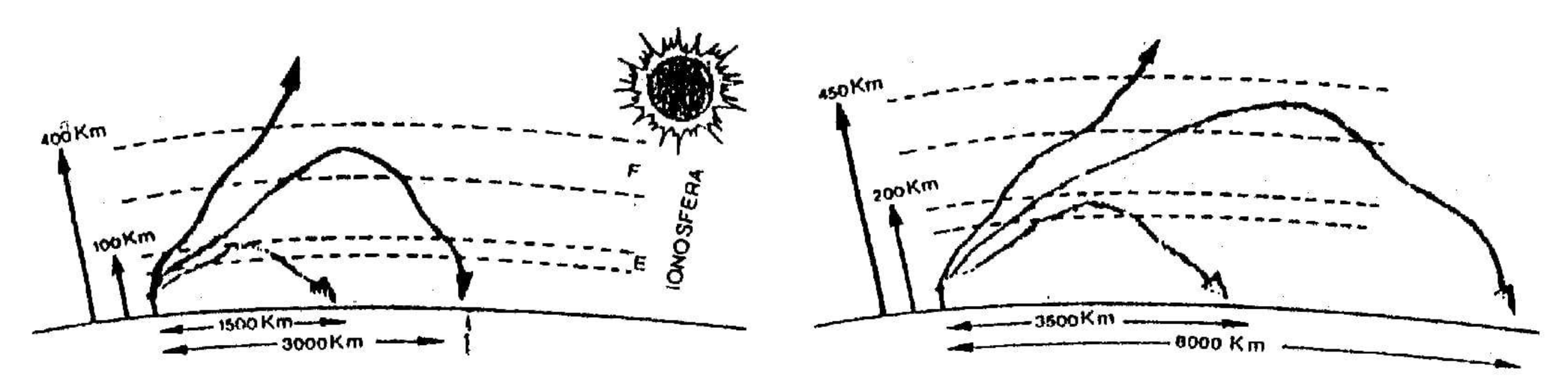


FIGURA 1-35: Comunicación por onda de espacio. Existe una zona en la atmósfera denominada ionósfera, que presenta características muy interesantes para las ondas de radio. La altura de dicha zona varía con la hora del día y puede presentar varias capas de similares características

Existe una clara diferencia entre la onda terrestre y la onda de espacio. Mientras que el medio en que se propagan las primeras (la superficie de la tierra) cambia poco con el tiempo, la onda de espacio depende de las características de la ionosfera, que varían ampliamente en el tiempo, ya que las condiciones de propagación no sólo dependen de la latitud del lugar, sino de la hora del día, de la estación del año e incluso de la mayor o menor actividad del Sol.

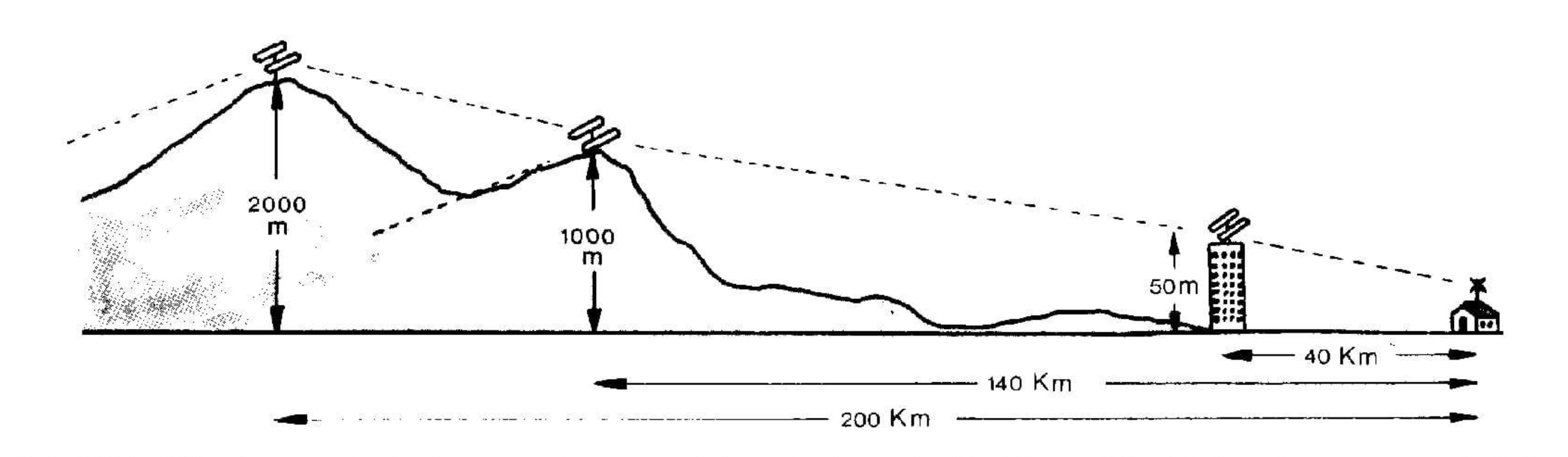


FIGURA 1-36: Alcance de las transmisiones en la banda de radiodifusión en MF. Dicho alcance se ve influido por la diferencia de alturas entre antenas transmisoras y receptora

Así, para bajas frecuencias, las condiciones de propagación son muy impredecibles. Además como en estas frecuencias la onda de la tierra tiene gran alcance, para nuestros efectos es la única que puede considerarse. En la banda OM, la onda de espacio no regresa a la tierra durante el día, sin embargo, si lo hace por la noche, debido principalmente a que la altura de la ionosfera sobre la superficie terrestre es más reducida, lográndose que el alcance de las emisoras sea muy grande. En cuanto a la banda de OC, el fenómeno es muy complejo, ya que, además de las condiciones de la ionosfera, continuamente cambiantes, hay que contar con que las emisoras radiadas con una frecuencia de portadora superior a un cierto valor crítico nos son reflejadas a la tierra, sino que atraviesan la ionosfera y escapan hacia el espacio exterior, con lo que se pierden para nosotros. El valor de dicha frecuencia crítica no es fijo, siendo durante el día de valor más elevado que durante la noche. Es por esta razón que las emisoras que transmiten en las bandas de 16, 19, 25 e incluso la de 31 metros, se reciben mejor durante el día que durante la noche, mientras que con el resto de las bandas en radiodifusión en OC ocurre justo lo contrario, dándose la mejor recepción durante la noche.

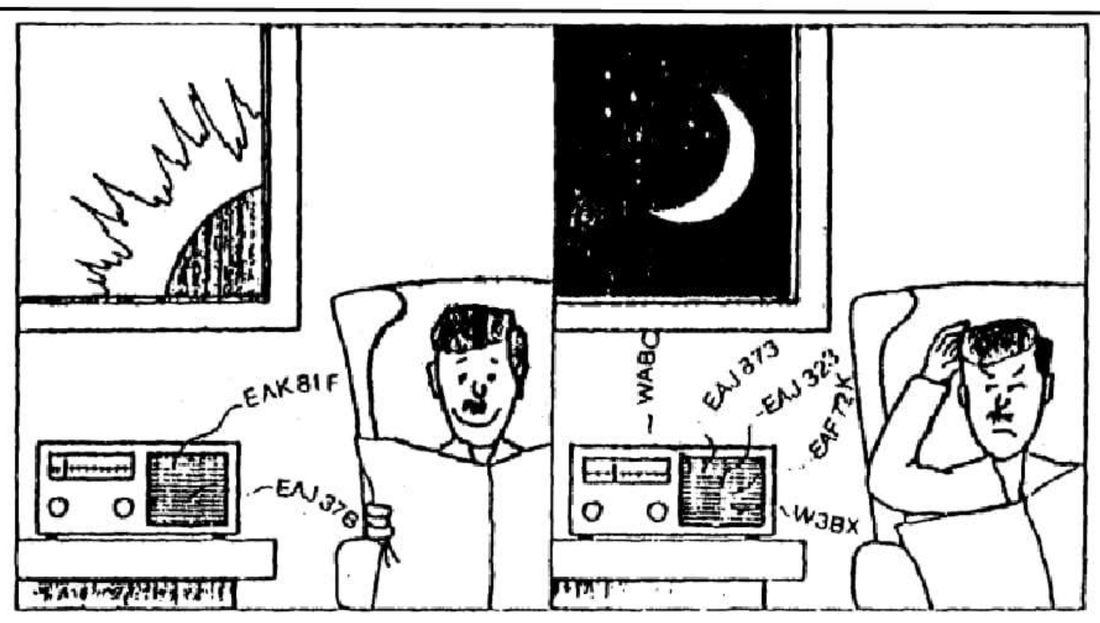


FIGURA 1-37: Las señales de las emisoras de OM se ven afectadas por las capas de la ionósfera. Así durante el día, apenas si tienen efecto alguno sobre la propagación de las mismas. De noche, sin embargo pueden conseguir alcances muy grandes, con lo que el número de emisoras que podremos sintonizar será muy elevado, aunque a veces la calidad sonora no sea muy buena.

De cualquier forma, la recepción en OC es, en general, "**muy aleatoria**", y desde luego en ningún caso podemos considerar que vaya a ser de alta fidelidad, aparte de por el exiguo ancho de la banda transmitido, por la inseguridad de recibir una cantidad de señal suficiente como para escuchar con cierta regularidad una transmisión. Por el contrario, pueden recibirse (dentro de las condiciones comentadas) emisoras que se encuentren a más de 5000 kilómetros de distancia, lo que también para algunos puede ser un aliciente. Sólo hay que ver el gran número de "**radioaficionados**" que utilizó en su momento (antes de los teléfonos celulares), y cuya meta primaria era establecer una comunicación con un punto lejano independientemente de la *calidad* del enlace.

En las características de propagación de las frecuencias muy altas donde, se encuentra la banda de radiodifusión en FM, la onda de tierra es ahora atenuada muy rápidamente, por lo que no podemos contar con ella para la comunicación. Por otro lado, la onda de espacio no es reflejada por la ionosfera, y escapa fuera de la atmósfera, imposibilitada de volver a la superficie de la tierra, con lo que tampoco nos resulta de ninguna utilidad. Así, pues, la única forma de comunicación que persiste es la que se realiza por medio de la **onda visual**, con lo que el alcance de este tipo de emisoras es muy limitado, y depende en gran manera de las alturas sobre el terreno a las que se encuentren las antenas transmisora y receptora, y casi nunca por la potencia con que transmiten las emisoras (superando un cierto valor). Por esta razón la mayoría de las emisoras de la banda de FM son de una potencia relativamente baja, y sus antenas se encuentran colocadas lo más elevado que se pueda sobre el terreno circundante.

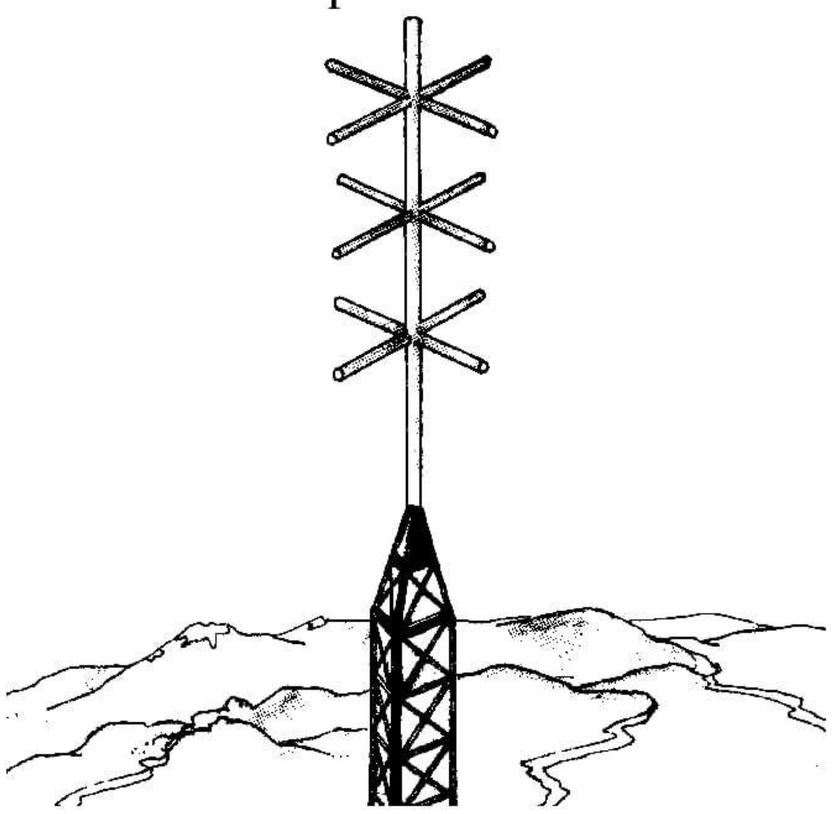


FIGURA 1-38: Las antenas de los transmisores de FM suelen situarse en lugares predominantes y lo más elevados posible sobre el terreno circundante

Una antena transmisora situada en lo alto de un edificio de 15 plantas (unos 40 ó 50 metros de altura) puede tener un alcance máximo de unos 40 kilómetros, mientras que si la misma antena se coloca sobre una elevación del terreno que se encuentre a unos 1000 metros por encima de éste, pueden lograrse fácilmente alcances de 140 kilómetros. Para conseguir un alcance de 200 kilómetros, se requerirá situar la antena transmisora a más de 2000 metros sobre el terreno circundante.

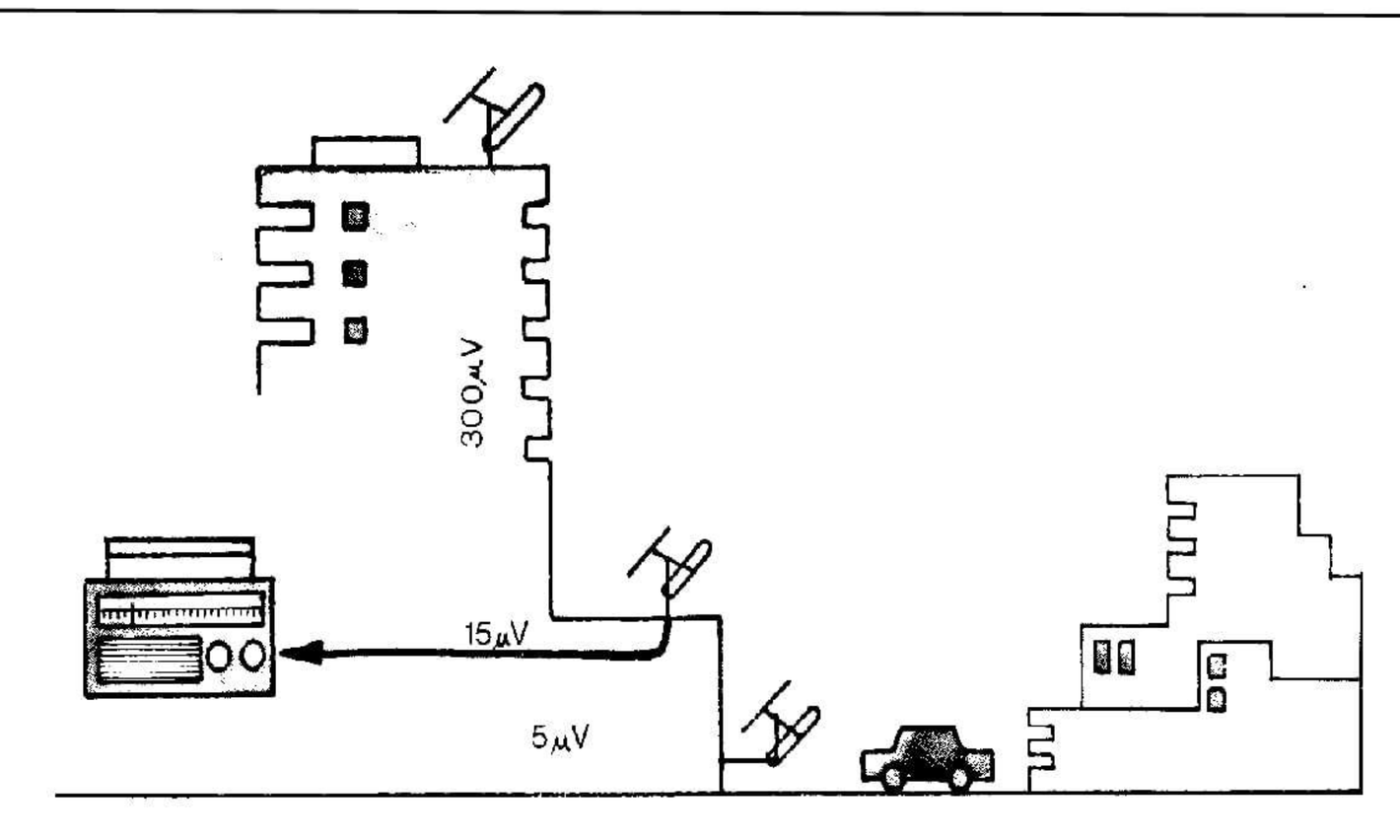


FIGURA 1-39: La cantidad de señal recogida por una antena receptora depende en gran manera de la altura sobre el suelo de la misma. Siempre debe procurarse colocarla lo más alto y despejado posible

Esta banda podrá estar ocupada por emisoras netamente locales, cuyo radio de acción medio raramente superará los 100 kilómetros de distancia desde la antena transmisora. Puesto que la propagación se efectúa por onda visual, su atenuación será pequeña, ya que es el aire el medio por el que viaja. Además, las condiciones de propagación apenas si variarán (los fenómenos atmosféricos tienen poca influencia sobre la propagación de ondas propiamente dicha, aunque puedan tenerla sobre las condiciones de recepción), con lo que lograremos una comunicación segura, aunque de relativamente corto alcance.

Finalmente, destaca el hecho de la importancia que tiene el que la antena receptora esté situada en un lugar elevado y despejado (igual que la transmisora), aspecto sobre el que podemos tomar nosotros mismos acción, ya que las transmisoras no podemos variarlas. Si situamos la antena receptora a tan sólo 5 metros sobre el nivel del terreno, la señal que obtendremos será tres veces mayor que a ras de suelo, mientras que si conseguimos ponerla a 50 metros sobre el suelo, la señal obtenida será ¡60 veces! Mayor.

1.7. ALCANCES DE LAS TRANSMISIONES

Aunque la distancia a que puede recibirse una determinada emisora depende de infinidad de factores, podemos dar unas cifras aproximadas para hacernos ideas de lo que se puede cubrir con ellas.

Como ya sabemos, en las bandas de OC la propagación en muy difícil de predecir, pues la onda de espacio puede encontrarse con condiciones buenas o regulares continuamente cambiantes. Además, depende en gran manera de la antena receptora que tengamos, y de la hora del día y estación del año, por lo que creemos muy aventurado hacer una estimación de alcance seguro.

Debido al estado cambiante de las condiciones de propagación, a nuestro receptor van a llegar señales de amplitud muy variable (independientemente de la modulación contenida en ellas), incluso en el transcurso de minutos, produciéndose *desvanecimientos* (en inglés, “fadding”). Sería muy molesto para el oído estas continuas subidas y bajadas de la señal, por lo que la casi totalidad de los receptores incorporan un circuito llamado de C.A.G. (Control Automático de Ganancia), o *antidesvanecimientos* (“anti-faddin”) que le permite el receptor regular automáticamente la señal de salida para que tenga un valor constante, independientemente de la mayor o menor amplitud de la señal que llegue a la antena.

Cuando la transmisión se realiza en OL, las condiciones de propagación por onda de tierra son poco cambiantes, y, por tanto, la recepción será muy constante a cualquier hora del día o de la noche. Una emisora que transmita en una frecuencia de 150 KHz con 100 Kw de potencia en antena, puede dar una intensidad de campo de 400µV/m a 1000 kilómetros de distancia. 400µV/m es un valor de sensibilidad que prácticamente cualquier sintonizador moderno tiene.

Distancia cubierta y potencia de transmisión no son cantidades proporcionales, si en lugar de 100 Kw la emisora radiase 200 Kw (el doble), el alcance para 400µV/m apenas si llegaría a los 1100 kilómetros (un 10% mayor alcance). Para que con esos 200 Kw se llegaran a cubrir 1500 kilómetros, el receptor tendría que llegar a una sensibilidad de unos 130µV/m, lo que ya es más difícil de conseguir.

Cuando nos vamos a la banda de OM los alcances por onda de tierra se reducen bastante. Por ejemplo, la misma emisora de 100 Kw transmitiendo a una frecuencia de 1000 KHz tan sólo alcanzaría unos 220 kilómetros para la sensibilidad de 400µV/m.

En esta banda, el alcance depende de la frecuencia.

Para la misma potencia de transmisión y la misma sensibilidad, el alcance de 600 KHz sería superior a 850 kilómetros, mientras que para 1500 KHz llegaría escasamente a 150 kilómetros.

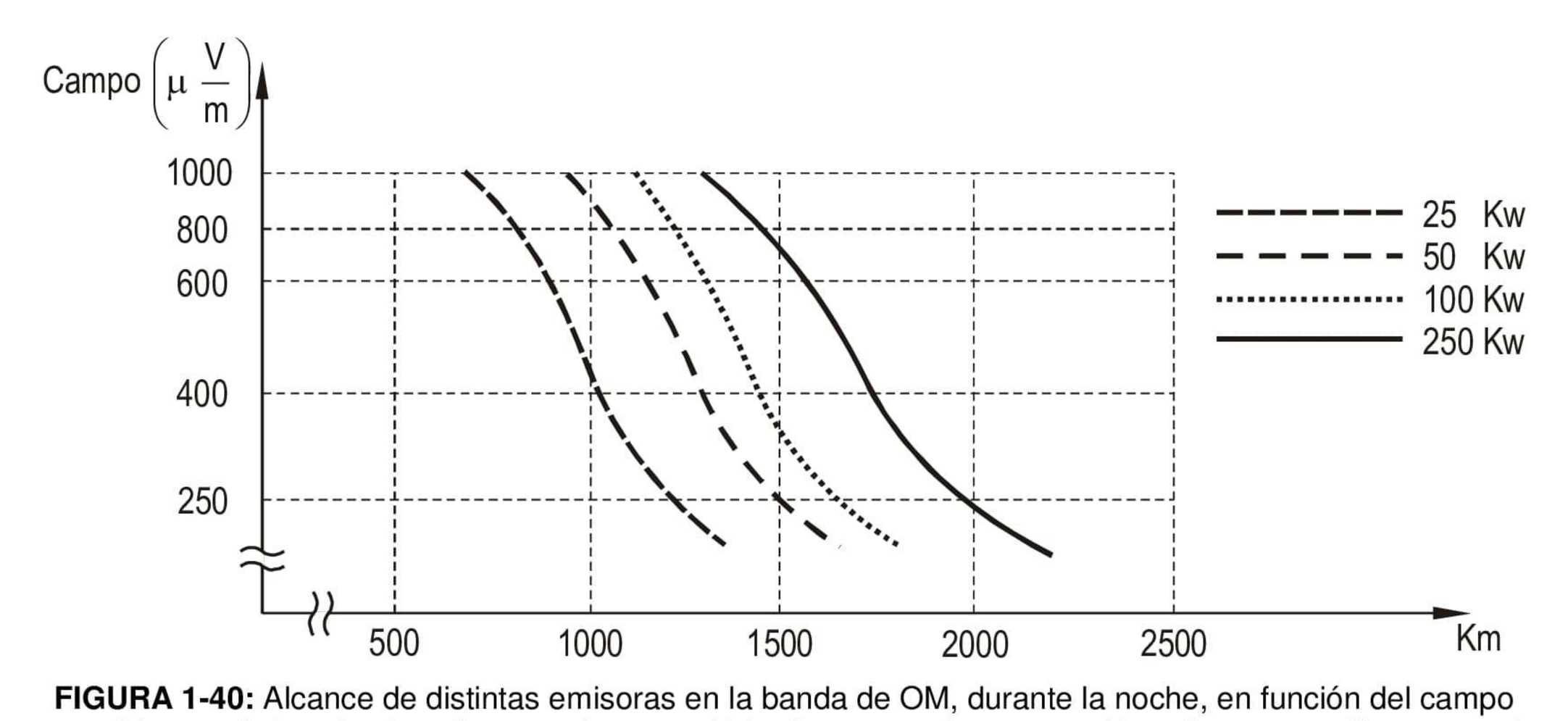


FIGURA 1-40: Alcance de distintas emisoras en la banda de OM, durante la noche, en función del campo requerido por el sintonizador y la potencia transmitida. Se supone la propagación sobre terreno firme y que la antena transmisora es de $\frac{\lambda}{4}$

La distancia cubierta con la onda de espacio es mucho mayor que con la onda de tierra para la banda de OM aunque sólo es a partir de la hora que comienza a ponerse el Sol que la propagación por onda de espacio se hace importante. Así, para la sensibilidad de 400 uV/m pueden lograrse fácilmente 1500 kilómetros de alcance con 100 Kw, con 200 Kw podría llegarse a cerca de 1700 kilómetros, mientras que con 25 Kw se llegaría hasta 1100 kilómetros.
Finalmente, para la banda de FM, los alcances son muy distintos. Así, para emisoras que transmitan en 100 MHz y con una potencia de 25 Kw, el alcance depende de la sensibilidad del sintonizador, o mejor, de la misma señal que necesite el mismo para dar una señal de audio de una calidad mínima. Se considera como límite de la transmisión el contorno de 250 µV/m.

Así, si el sintonizador requiere 55μV en antena, el alcance será de tan sólo 40 kilómetros; si con 6μV tiene suficiente, el alcance puede llegar hasta 70 kilómetros, mientras que si con 2,5μV le basta para dar una cierta calidad, podremos recibir transmisiones hasta a 90 kilómetros de distancia.

Naturalmente, estos alcances que damos son orientativos, siendo en general válidos para receptores domésticos dotados de una antena adecuada (las de ferrita o las de varilla, que incorporan los receptores portátiles pueden no ser suficientes). En zonas urbanas, el alcance se reduce en gran manera aunque se suele compensar con la cercanía de las emisoras. No obstante, no es de extrañar que puedan existir zonas de "sombra", a donde sea difícil que puedan llegar las ondas, en particular para la banda FM. La solución sólo puede consistir en emplear una antena adecuada. También en zonas montañosas pueden darse casos parecidos. La vegetación frondosa es un grave inconveniente para la propagación de las señales de FM, hasta el punto de tan sólo un kilómetro de bosque produce una atenuación del orden de 20 dB, lo que significa que la señal que sale es 100 veces más débil que la que entró. La solución en este caso es elevar la antena receptora por encima de toda vegetación, con lo que podrá conseguirse algo de señal útil.

1.8. Fenómenos Acústicos:

Nos limitaremos a considerar ondas longitudinales y en particular aquellas que al llegar al oído dan origen a la sensación de sonido.

Estas ondas comprendidas en el intervalo de frecuencias de 20 hasta 20.000 vibraciones por segundo [Hz], se denominan para mayor sencillez: ondas sonoras.

Las variaciones de presión del aire en un punto, engendra una vibración de partículas de aire que situadas delante del tímpano, produce la recepción de una onda sonora por el oído.

Desde un punto de vista puramente geométrico, lo que se propaga en un movimiento ondulatorio es la forma de la onda; sin embargo, desde un punto de vista físico, se propaga algo más en una onda, y es la energía.

La intensidad de una onda que se propaga se define como: "La cantidad media de energía transportada por la onda, por unidad de superficie y por unidad de tiempo.

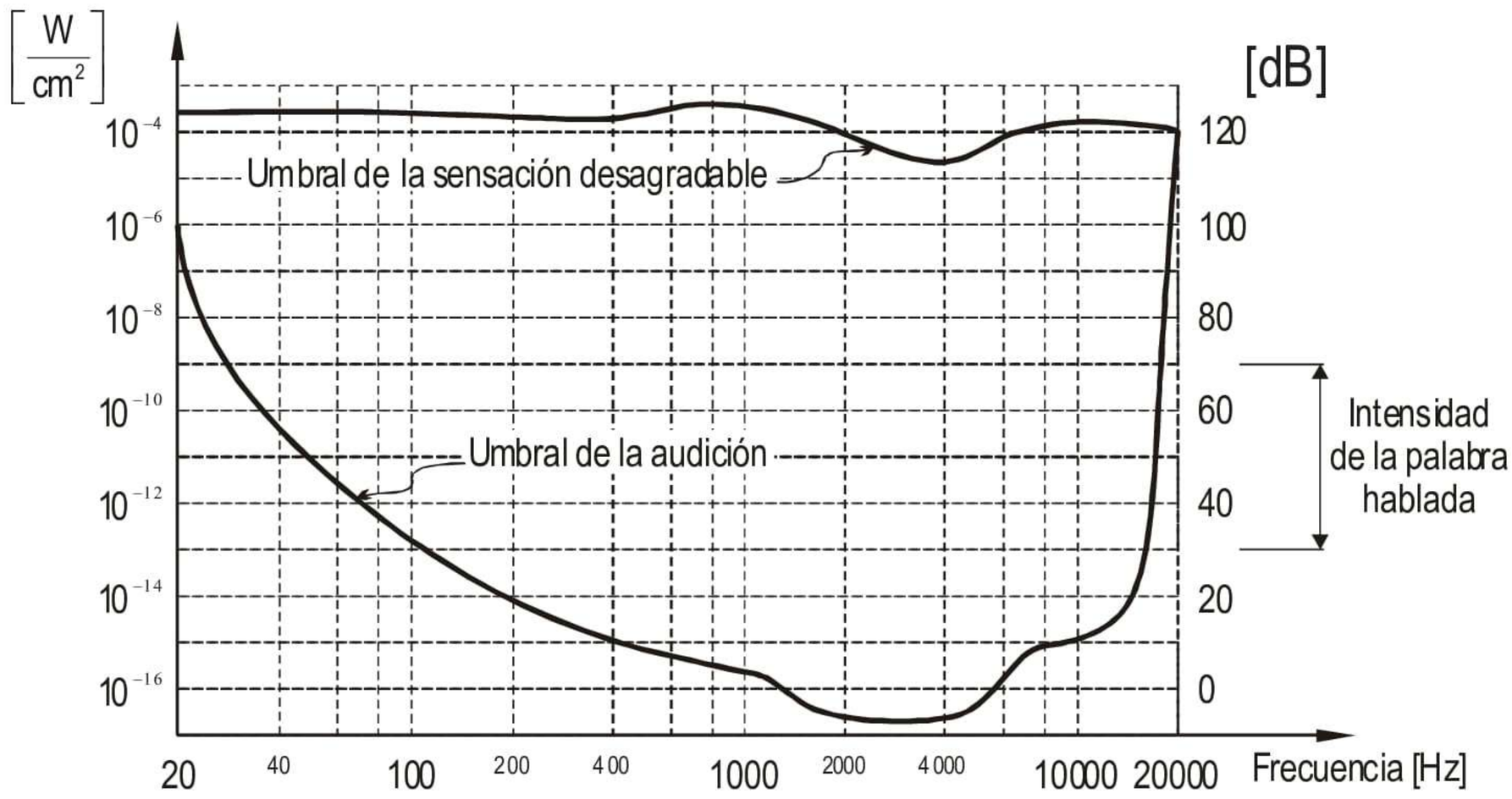


FIGURA 1-41: Área de audición comprendida entre el umbral de audición y el umbral de la sensación desagradable

Intensidad (dB) = 10 log (I / Io)

$Io = 10^{-16}$ w/cm^2 , **sonido más débil que puede oírse (promedio).**

La intensidad máxima que el oído puede tolerar es de unos 10^{-4} [w/cm^2] que corresponde a un nivel de 120 dB.

Niveles de intensidad de algunos ruidos:

Calle de mucho tráfico	**70 dB**
Conversación ordinaria	**65 dB**
Automóvil en marcha moderada	**50 dB**
Conversación en voz baja	**20 dB**

1.9. ESPECTRO VISIBLE

Definiremos a la luz como toda radiación que puede afectar al ojo. La figura representa la sensibilidad relativa del ojo a las radiaciones de diversas longitudes de onda imaginando un supuesto observador de referencia, pone de manifiesto que el centro de la región visible es aproximadamente 5,55 x 10^{-7} m. La luz de esta longitud de esta longitud de onda produce la sensación de verde amarilo. En óptica a menudo usamos la micra (abreviado μ), la milimicra (**abreviado** mμ) y el Angstron (abreviado $\mathring{A}$) como unidades de longitud de onda.

$$1\mu = 10^{-6}\, m \qquad 1m\mu = 10^{-9}\, m \qquad 1\mathring{A} = 10^{-10}\, m$$

Así, el centro de la región visible puede expresarse como 0,555 μ, 555 mμ o 5550 $\mathring{A}$. Los límites del espectro visible no están bien definidos porque la **curva** de sensibilidad del ojo se acerca al eje asintóticamente tanto en las longitudes de ondas grandes como en las pequeñas. Si tomamos arbitrariamente como límites las longitudes de onda para las cuales la sensibilidad del ojo se reduce a 1% de su máximo valor, estos límites son 4300 A y 6900 $\mathring{A}$.

El ojo puede detectar radiaciones fuera de estos límites si son suficientemente intensas. En muchos experimentos se puede usar placas radiográficas o detectores electrónicos sensibles a la luz en lugar del ojo humano.

Colores	Long.	Frecuencia
Rojo	6500 $\mathring{A}$	4,61 10^{14} Hz
Naranja	6000 $\mathring{A}$	5,00 10^{14} Hz
Amarillo	5800 $\mathring{A}$	5,17 10^{14} Hz
Verde	5200 $\mathring{A}$	5,76 10^{14} Hz
Azul	4700 $\mathring{A}$	6,38 10^{14} Hz
Violeta	4100 $\mathring{A}$	7,31 10^{14} Hz

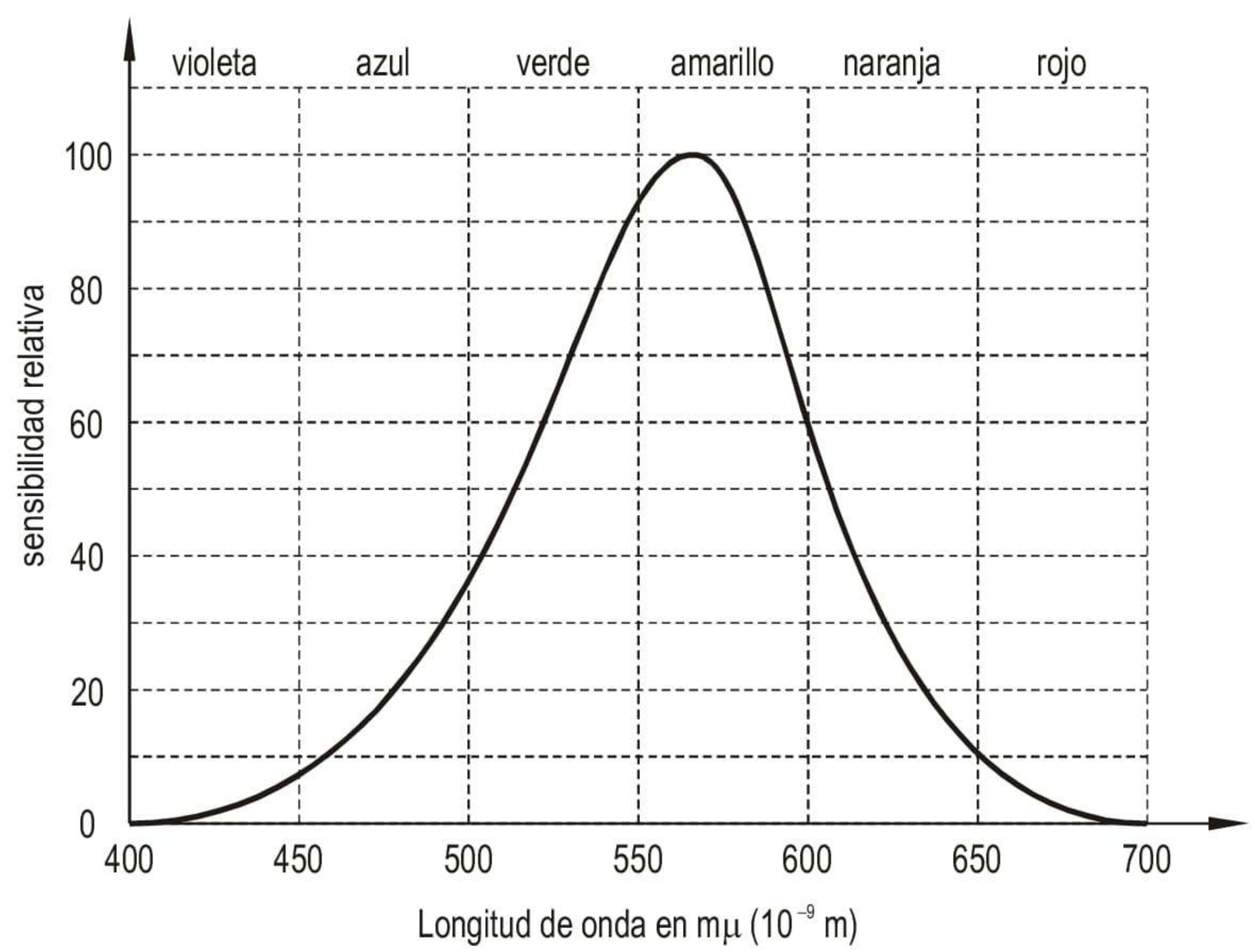
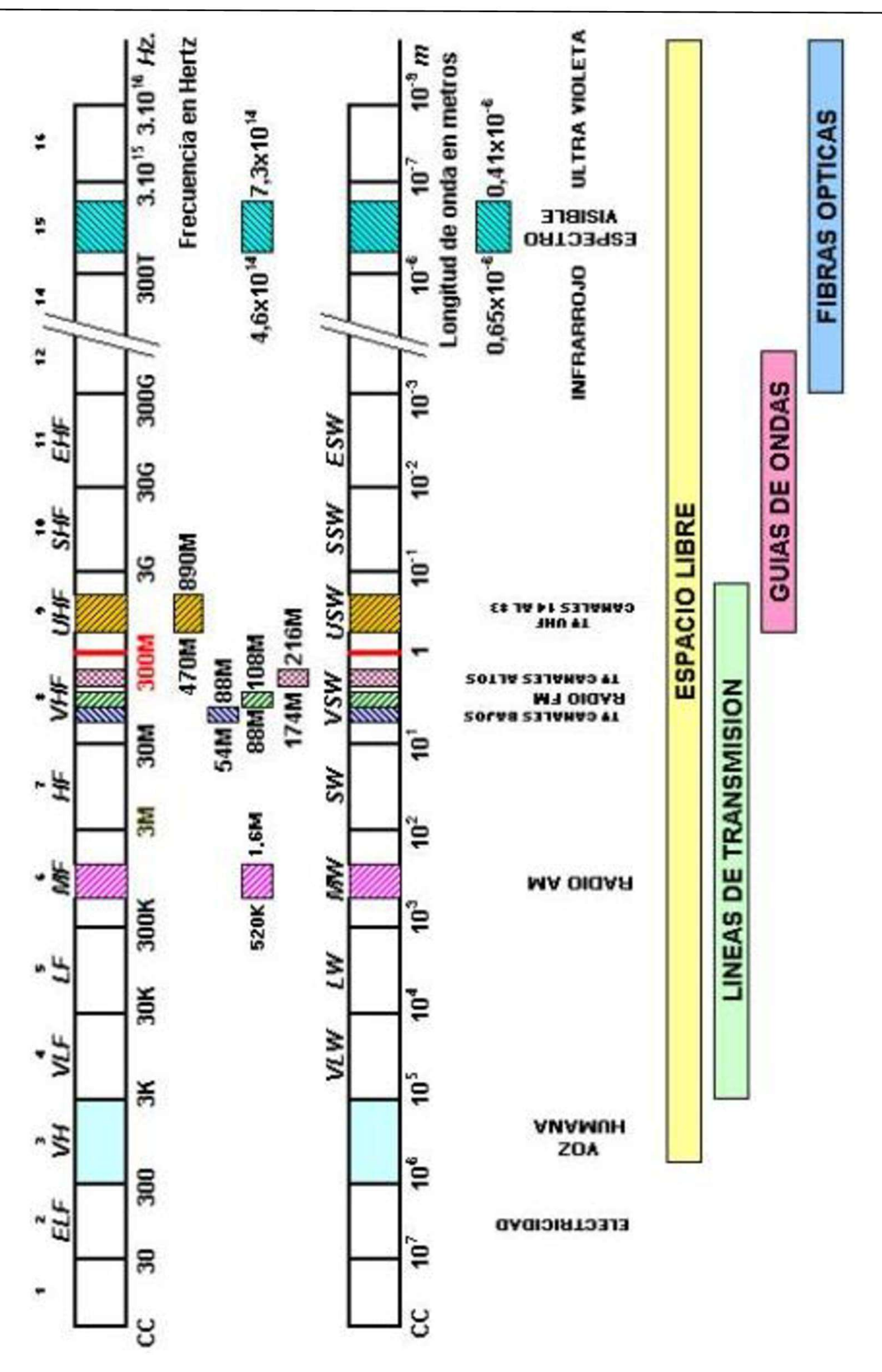
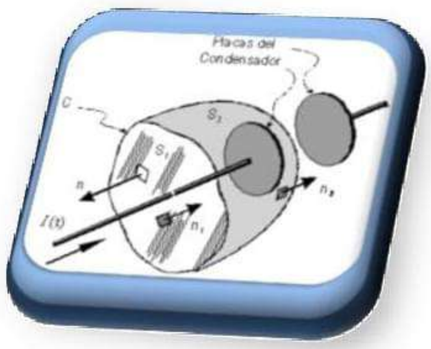


FIGURA 1-42: Distribución de frecuencia de los colores


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
14
15
16
CC
30
300
3K
30K
300K
3M
30M
300M
3G
30G
300G
300T
ELF
VH
VLF
LF
MF
HF
VHF
UHF
SHF
EHF
Frecuencia en Hertz
3.10^15 3.10^16 Hz.
4,6x10^14 7,3x10^14
520K 1,6M 54M 88M 88M 108M 174M 216M 470M 890M
CC
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
1
10^-1
10^-2
10^-3
10^-6
10^-7
10^-8 m
VLW
LW
MW
SW
VSW
USW
SSW
ESW
Longitud de onda en metros
0,65x10^-6 0,41x10^-6
ELECTRICIDAD
VOZ HUMANA
RADIO AM
TV CANALES BAJOS
RADIO FM
TV CANALES ALTOS
TV UHF
CANALES 14 AL 43
INFRARROJO
ESPECTRO VISIBLE
ULTRA VIOLETA
ESPACIO LIBRE
LINEAS DE TRANSMISION
GUIAS DE ONDAS
FIBRAS OPTICAS

CAPÍTULO 2



ECUACIONES DE MAXWELL

El propósito de este capítulo es que el alumno pueda asimilar de una manera sencilla las Ecuaciones de Maxwell, debido a que en ellas se basa toda la teoría electromagnética. Para ello se le provee en los primeros puntos una exposición breve sobre:

2.1. Sistema de Coordenadas
2.2. Análisis Vectorial
2.3. Campos eléctricos estáticos
2.4. Campos magnéticos estáticos
2.5. Sistema Internacional de Unidades
2.6. **Ecuaciones de Maxwell – Desarrollo e interpretación**

Aquellos que ya estén familiarizados con los primeros temas, esto será un repaso útil y una introducción a la notación del texto.

2.1. SISTEMAS DE COORDENADAS

La solución de problemas físicos podría requerir la introducción de un marco de referencia de un sistema de coordenadas, especialmente si se buscan soluciones explícitas. El sistema cartesiano o de coordenadas *rectangulares* es el más conocido entre ingenieros y científicos, aunque se usan con frecuencia otros dos sistemas de referencia: el de coordenadas *circulares cilíndricas* y el de coordenadas *esféricas*.

Los símbolos empleados para las variables independientes, en esos sistemas ortogonales se enlistan como sigue:

1) Coordenadas rectangulares: (x, y, z)
2) Coordenadas circulares cilíndricas: (ρ, ϕ, z)
3) Coordenadas esféricas: (r, θ, ϕ)

Una aplicación útil del producto de un vector por un escalar se realiza en la especificación de una cantidad vectorial en función de sus componentes. El estudio actual de este concepto se limita a sistemas de coordenadas ortogonales. En la fig. 2-1 (*a*) se identifica un punto *P* en el espacio con cada uno de los sistemas de coordenadas comunes. En ese punto, se define que los vectores unitarios de cada sistema están en la dirección en que la variable coordenada apropiada crece en sentido positivo,

como se muestra en la fig. 2-1 (*b*). El símbolo a subindicado con la variable coordenada deseada se utiliza para denotar los *vectores unitarios* de un sistema específico de coordenadas. En consecuencia, a_x, a_y, a_z son los vectores unitarios en el sistema rectangular. En (*c*) de esa figura se muestra un vector típico A transformado en sus componentes en cada uno de esos sistemas de coordenadas, que se representan simbólicamente como sigue:

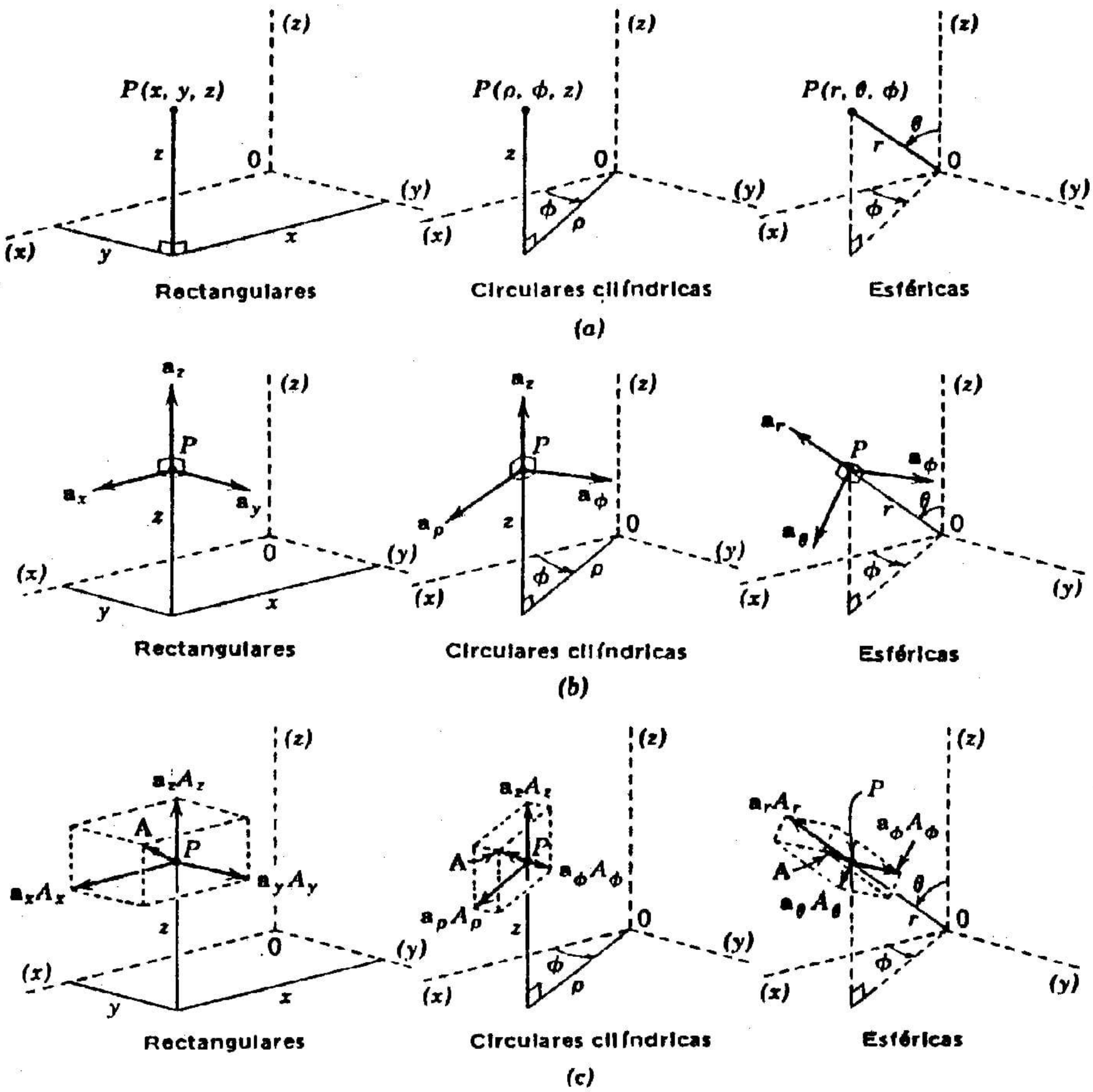


FIGURA 2-1: Convenciones de notación adoptadas en los tres sistemas comunes de coordenadas.

a) Ubicación de un punto *P* en el espacio.

b) Vectores unitarios en el punto *P*.

c) Descomposición de un vector *A* en sus componentes ortogonales

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z \quad \text{Rectangulares}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho A_\rho + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z \quad \text{Circulares Cilíndricas} \qquad [2\text{-}1]$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi \quad \text{Esféricas}$$

en tanto que la magnitud (longitud) se representa por:

$$A = \left[A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Rectangulares}$$
$$A = \left[A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Circulares Cilíndricas} \qquad [2\text{-}2]$$
$$A = \left[A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Esféricas}$$

Con el fin de unificar y reducir los siguientes desarrollos relativos a campos escalares y vectoriales, se introduce un **sistema de coordenadas ortogonales generalizadas**, en que u_1, u_2, u_3 denotan las variables coordenadas. El punto P (u_1, u_2, u_3) en el espacio es la intersección de las tres superficies constantes $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$, $u_3 = C_3$. Las intersecciones de parejas de esas superficies definen las líneas coordenadas; es decir la línea coordenada designada como u_1 está definida por las superficies $u_2 = C_2$ y $u_3 = C_3$. Estos conceptos se muestran en la figura 2-2 para los tres sistemas comunes de coordenadas; por tanto, en las coordenadas esféricas, la intersección de las superficies de coordenadas r = constante y θ= constante es un círculo.

Los vectores unitarios a_1, a_2 y a_3 son mutuamente perpendiculares y tangentes a las líneas coordenadas a través del punto P de la figura 2-2. Si se asocia un vector A con el punto $P(u_1, u_2, u_3)$ en esa figura, se puede expresar simbólicamente en función de sus componentes ortogonales generalizadas mediante:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 A_1 + \mathbf{a}_2 A_2 + \mathbf{a}_3 A_3 \qquad [2\text{-}3\ a]$$

Ortogonal generalizada en que su magnitud es

$$A = \left[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad [2\text{-}3\ b]$$

Las escalares A_1, A_2 y A_3 se conocen como los *componentes* del vector A. En las ecuaciones (2-1) y (2-2) ya se dieron ejemplos de esas expresiones especificadas para los tres sistemas de coordenadas comunes.

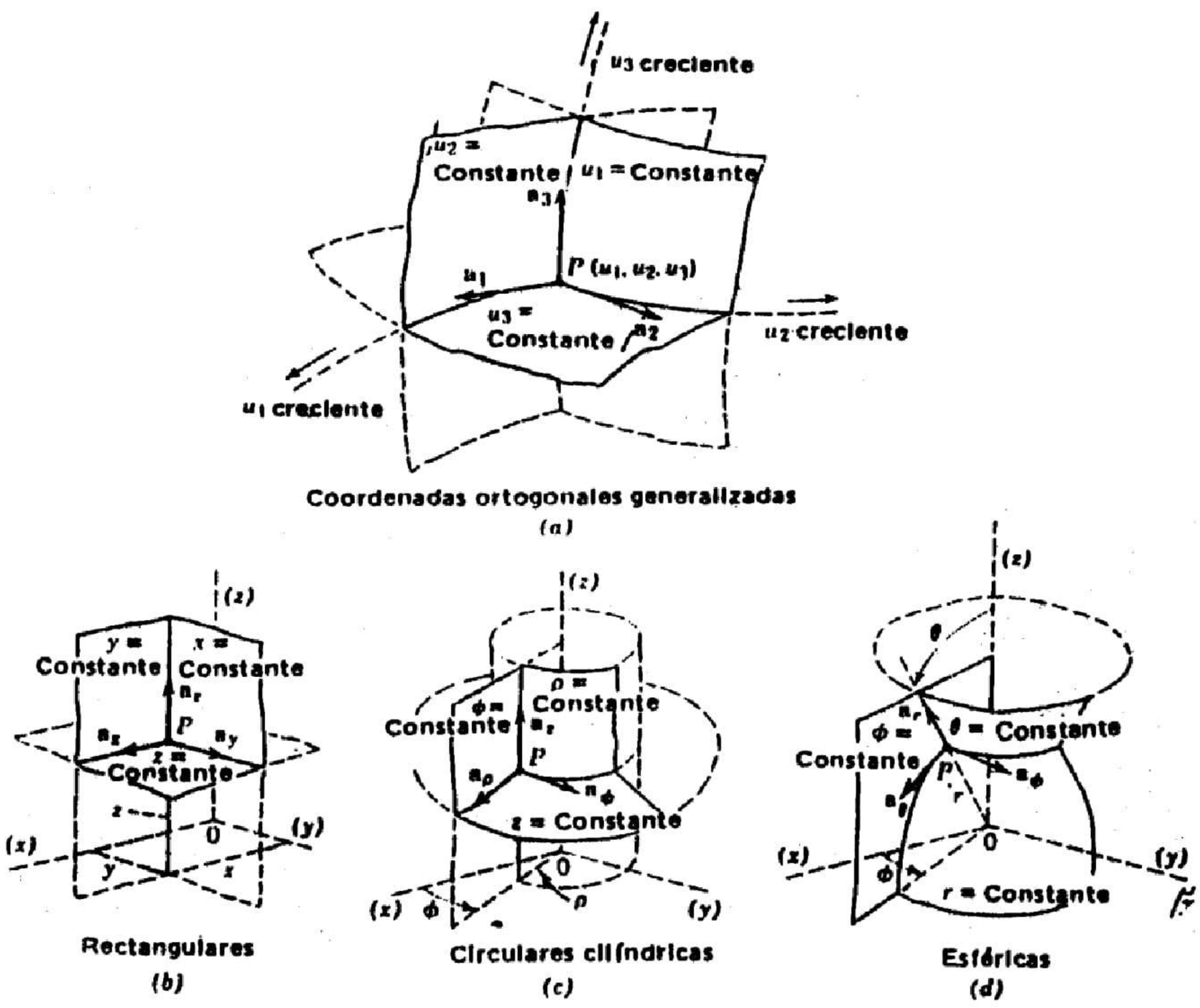


FIGURA 2-2: Superficies de coordenadas que definen el punto *P* y los vectores unitarios en *P*.

2.1.1. Elementos diferenciales de espacio

En los procesos de integración en el espacio, que se considerarán enseguida, con frecuencia se usan los elementos diferenciales de volumen, superficie y línea. Un elemento diferencial de volumen *dv* se genera en la proximidad de un punto *P* (u_1, u_2, u_3) en el espacio, mediante los desplazamientos $d\ell_1$, $d\ell_2$ y $d\ell_3$ de las superficies coordenadas, a través de los cambios diferenciales du_1, du_2, du_3 en las variables coordenadas, lo que se representa geométricamente en la figura 2-2 (*a*). Por lo tanto, un elemento de volumen *dv* se representa en las coordenadas ortogonales generalizadas mediante el producto de los elementos de longitud diferencial como sigue:

$$dv = d\ell_1\, d\ell_2\, d\ell_3 \qquad [2\text{-}4]$$

La relación de los elementos de longitud a cambios diferenciales en las variables coordenadas u_1; u_2 y u_3 proviene de las relaciones

$$d\ell_1 = h_1\, du_1 \qquad d\ell_2 = h_2\, du_2 \qquad d\ell_3 = h_3\, du_3 \qquad [2\text{-}5]$$

de manera que (2-5) se escribe como sigue

$$dv = h_1\, h_2\, h_3\, du_1\, du_2\, du_3 \qquad [2\text{-}6]$$

Los coeficientes h_1, h_2, h_3 se llaman "*coeficientes métricos*", o "*factores de escala*" los cuales son necesarios para dar a los elementos $d\ell$ de (2-5) su dimensión requerida de longitud (métrica). De una consideración de la geometría de *dv* en cada diagrama de la figura 2-3 (*b*), (*c*) y (*d*), es evidente que los siguientes elementos de longitud y coeficientes métricos se aplican a los tres sistemas comunes:

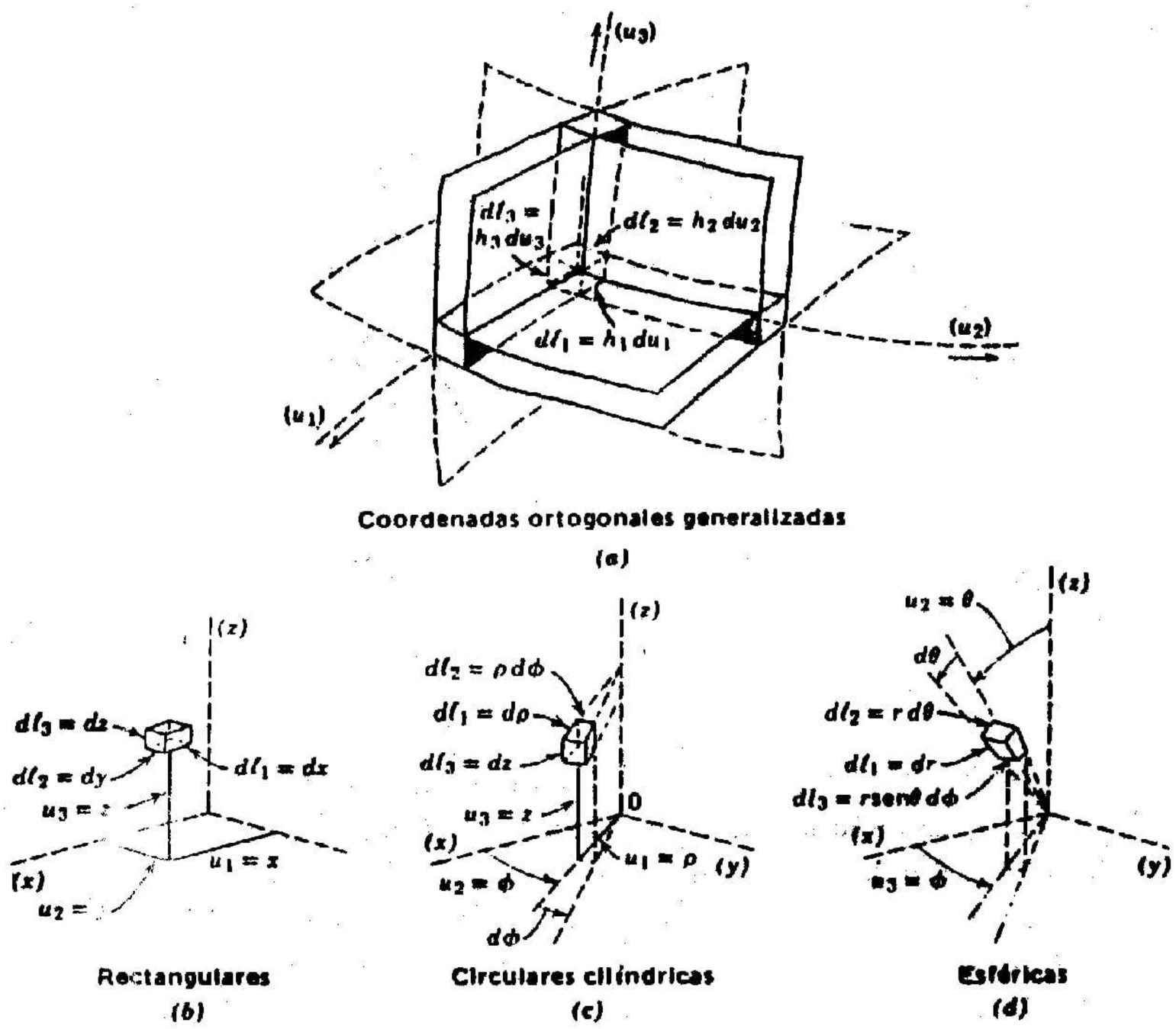


FIGURA 2-3: Generación de un elemento de volumen $dv = d\ell_1\, d\ell_2\, d\ell_3$ en un punto del espacio en sistemas de coordenadas ortogonales

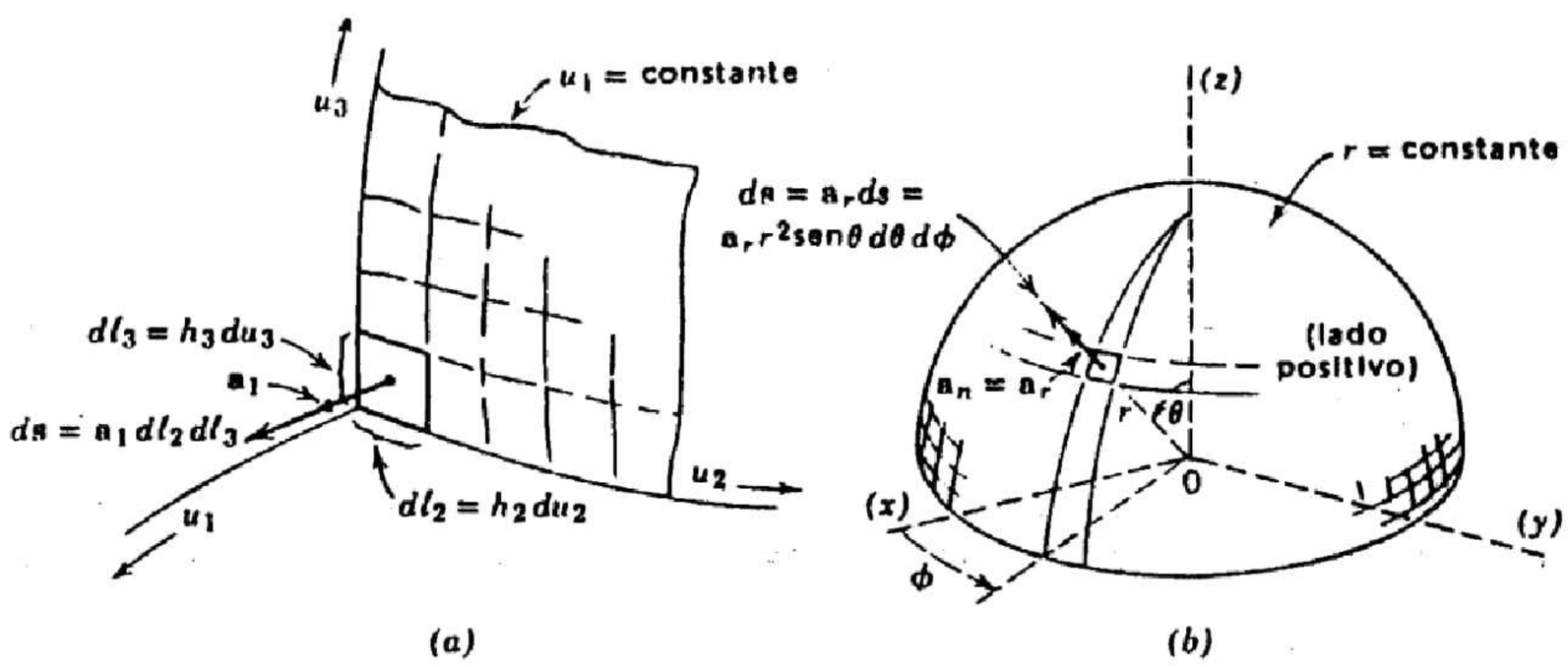
$d\ell_1 = dx$	$d\ell_2 = dy$	$d\ell_3 = dz$	$h_1 = 1$	$h_2 = 1$	$h_3 = 1$	Rectangulares [2-7]
$d\ell_1 = d\rho$	$d\ell_2 = \rho d\phi$	$d\ell_3 = dz$	$h_1 = 1$	$h_2 = \rho$	$h_3 = 1$	Circulares Cilíndricas [2-8]
$d\ell_1 = dr$	$d\ell_2 = r\,d\theta$	$d\ell_3 = r \operatorname{sen}\theta\, d\phi$	$h_1 = 1$	$h_2 = r$	$h_3 = r \operatorname{sen}\theta$	Esféricas [2-9]

En consecuencia, sustituyendo esos resultados en (2-6) se tiene el elemento *dv* de volumen en cada sistema como sigue:

$$
\begin{aligned}
dv &= dx\ dy\ dz && \text{Rectangulares} \\
dv &= \rho\ d\rho\ d\phi\ dz && \text{Circulares Cilíndricas} \qquad [2\text{-}10] \\
dv &= r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\ d\theta\ d\phi && \text{Esféricas}
\end{aligned}
$$

Un elemento *ds*, de una superficie *S* en el espacio, se puede dejar en su forma escalar *ds*, aunque, si se desea, se le puede dar una caracterización vectorial *ds* para ciertos propósitos. Supóngase que *ds* coincide con una superficie coordenada u_1 = constante, como se muestra en la figura 2-1 (*a*). Expresado como un elemento escalar, $ds = d\ell_2\, d\ell_3 = h_2 h_3\, du_2\, du_3$ para ese ejemplo. En la figura 2-4 (*b*) se muestra una ilustración en coordenadas esféricas; en la superficie de coordenadas *r* = constante, $ds = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\phi$. Se da cualidad vectorial a *ds* multiplicándola por el positivo o negativo del vector unitario *normal* a *ds*. Por lo tanto, en la figura 2-4(*b*) se ilustra el elemento de superficie vectorial $ds = a_r ds$ *en* $ds = -a_r ds$ es la otra selección ejemplificada posible en la superficie coordenada *r* = constante. Estos conceptos son especialmente útiles en las técnicas de integración de flujo.

Los elementos diferenciales de línea frecuentemente son de interés en las aplicaciones para la integración vectorial. Este tópico se presenta en términos del vector de posición r de los puntos espaciales, lo cual se estudia en la siguiente sección.



$$d\ell_1 = dr$$
$$d\ell_2 = r \cdot d\theta$$
$$d\ell_3 = r \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\phi$$

FIGURA 2-4: Elemento de superficie *ds* sobre una superficie coordenada. Note la caracterización de *ds* como un elemento vectorial a través de la multiplicación por un vector unitario normal. *a)* Elemento de superficie *ds* en la superficie coordenada u_1 constante en el sistema ortogonal generalizado. *b)* Elemento de superficie *ds* en la superficie coordenada r = constante en el sistema esférico.

2.1.2. Vector de posición

En la teoría de los campos se puede hacer referencia a un punto $P(u_1, u_2, u_3)$ en el espacio, usando el vector de posición denotado por el símbolo r. Por ejemplo, el vector de posición del punto P en la figura 2-5 es el vector r trazado desde el origen 0 hasta el punto P. Por tanto, en coordenadas rectangulares se escribe r como sigue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z \qquad [2\text{-}11]$$

y en coordenadas circulares cilíndricas como sigue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_\rho \rho + \mathbf{a}_z z \qquad [2\text{-}12]$$

en tanto que en coordenadas esféricas se escribe:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_r r \qquad [2\text{-}13]$$

Una aplicación adicional de posición r, del vector se efectúa en la designación simbólica de puntos en el espacio. En vez de usar el símbolo P (u_1, u_2, u_3) o P (x, y, z), se puede emplear la notación abreviada P(r). Igualmente, se puede representar un campo escalar F (u_1, u_2, u_3, t) en forma más compacta mediante el símbolo equivalente F(r, t), si así se desea.

El elemento diferencial de longitud que separa a los puntos P(r) y $P(r + dr)$ en el espacio, se indica mediante el desplazamiento diferencial vectorial dr. El cambio diferencial dr no va, en general, en la misma dirección que el vector de posición r, como lo muestra de figura 2-5(a). (A veces se utiliza el símbolo vectorial $d\ell$ en forma intercambiable con dr, en especial en las aplicaciones de integración de línea). El desplazamiento diferencial dr (o $d\ell$) se escribe en términos de sus componentes ortogonales generalizadas como sigue:

$$d\mathbf{r} \equiv d\ell = \mathbf{a}_1 d\ell_1 + \mathbf{a}_2 d\ell_2 + \mathbf{a}_3 d\ell_3 \qquad [2\text{-}14]$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_1 h_1 du_1 + \mathbf{a}_2 h_2 du_2 + \mathbf{a}_3 h_3 du_3 \qquad [2\text{-}15]$$

Por ejemplo, en coordenadas esféricas $h_1 = 1$, $h_2 = r$ y $h_3 = r\text{sen}\theta$, de manera que (2-15) se escribe como sigue:

$$d\mathbf{r} \equiv d\ell = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_0 r\, d\theta + \mathbf{a}_\phi r \text{ sen}\,\theta\, d\phi$$

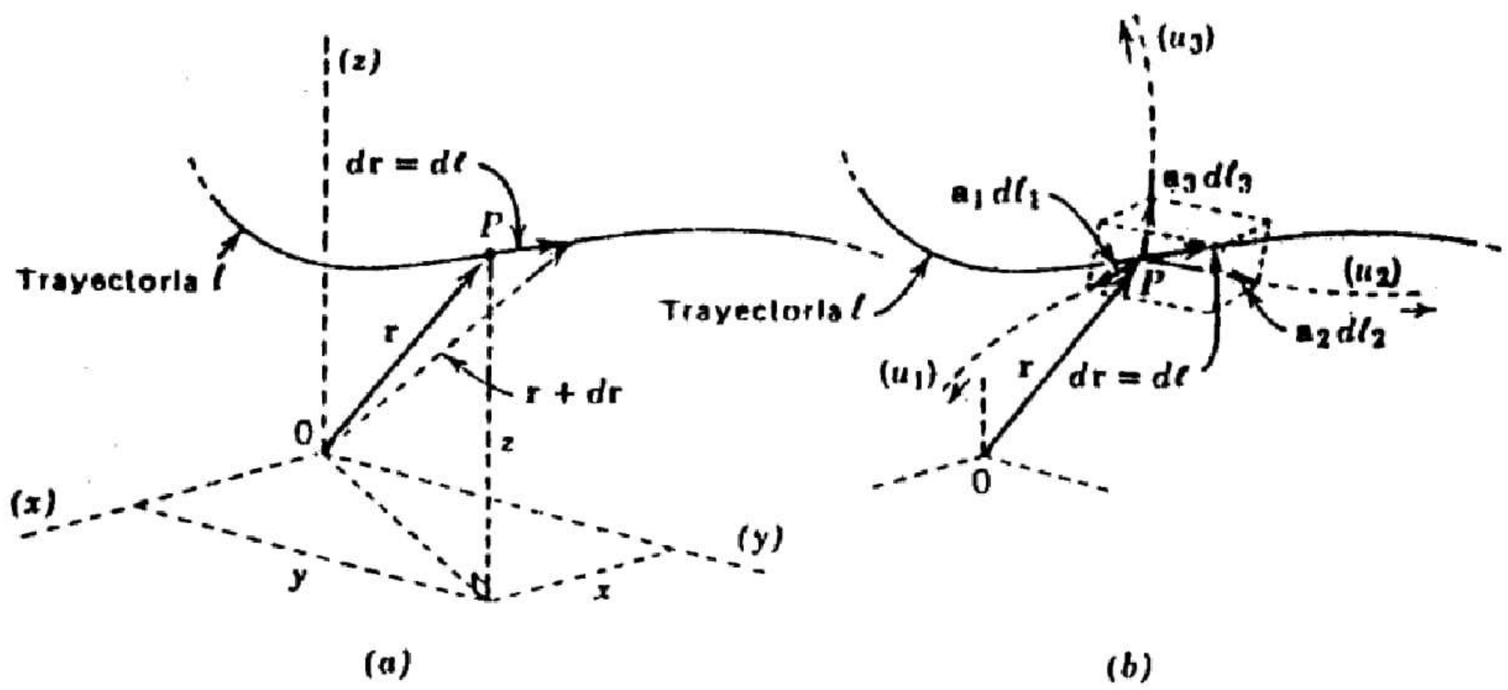


FIGURA 2-5: Vectores de posición r, utilizado para definir puntos del espacio, y su diferencial dr.

a) Vector de posición r y un cambio diferencial dr en su posición a lo largo de una trayectoria arbitraria.

b) Componentes de dr en las coordenadas ortogonales generalizadas

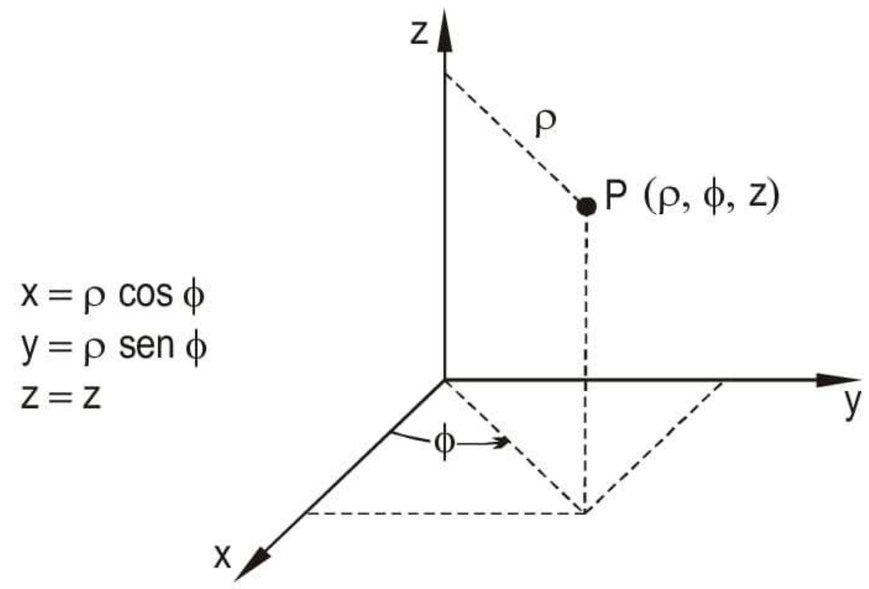


FIGURA 2-6: Un punto P en Coordenadas Cilíndricas y su equivalente en coordenadas Rectangulares.

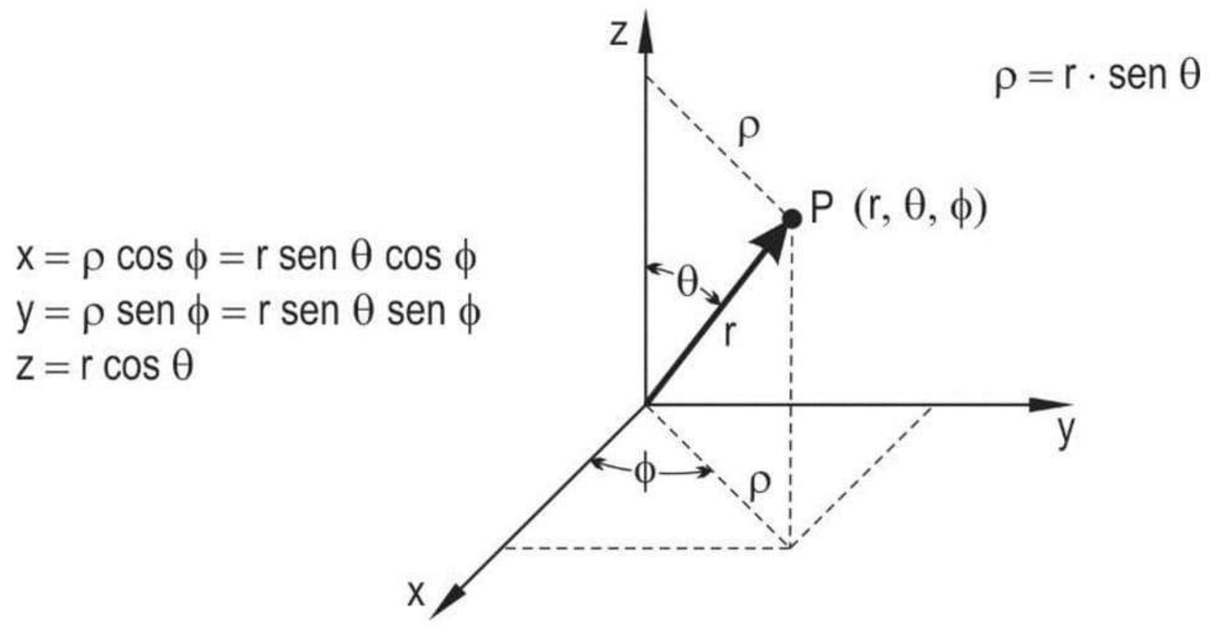


FIGURA 2-7: Un punto P en Coordenadas Esféricas y su equivalente en Coordenadas Rectangulares

2.2. ANÁLISIS VECTORIAL

2.2.1. Cantidades escalares y vectoriales

En el estudio de la física elemental se han encontrado varias clases de cantidades; en particular, se ha hecho una división en vectores y escalares. Para nuestros propósitos será suficiente definir un escalar en la siguiente forma:

> *Un **escalar** es una cantidad que está caracterizada completamente por su magnitud.*

Los ejemplos de escalares son numerosos: masa, tiempo, volumen, etc. Una ampliación sencilla del concepto de un escalar es un *campo escalar*, es decir, una función de posición que está completamente determinada por su magnitud para todos los puntos del espacio.

Un vector puede definirse de la forma que sigue:

> *Un **vector** es una cantidad que está caracterizada completamente por su magnitud, dirección y sentido.*

Como ejemplos de vectores citemos la posición a partir de un origen fijo, la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc. La generalización de un campo vectorial da una función de posición que se determina completamente por su magnitud, dirección, y sentido para todos los puntos del espacio.

2.2.2. Campos escalares y vectoriales

Por campo se entiende una función matemática de espacio y tiempo. Los campos se pueden clasificar como *escalares* o *vectoriales*. Un campo escalar es una función que en cada instante, tiene una magnitud asignable en cada punto de una extensión en el espacio.

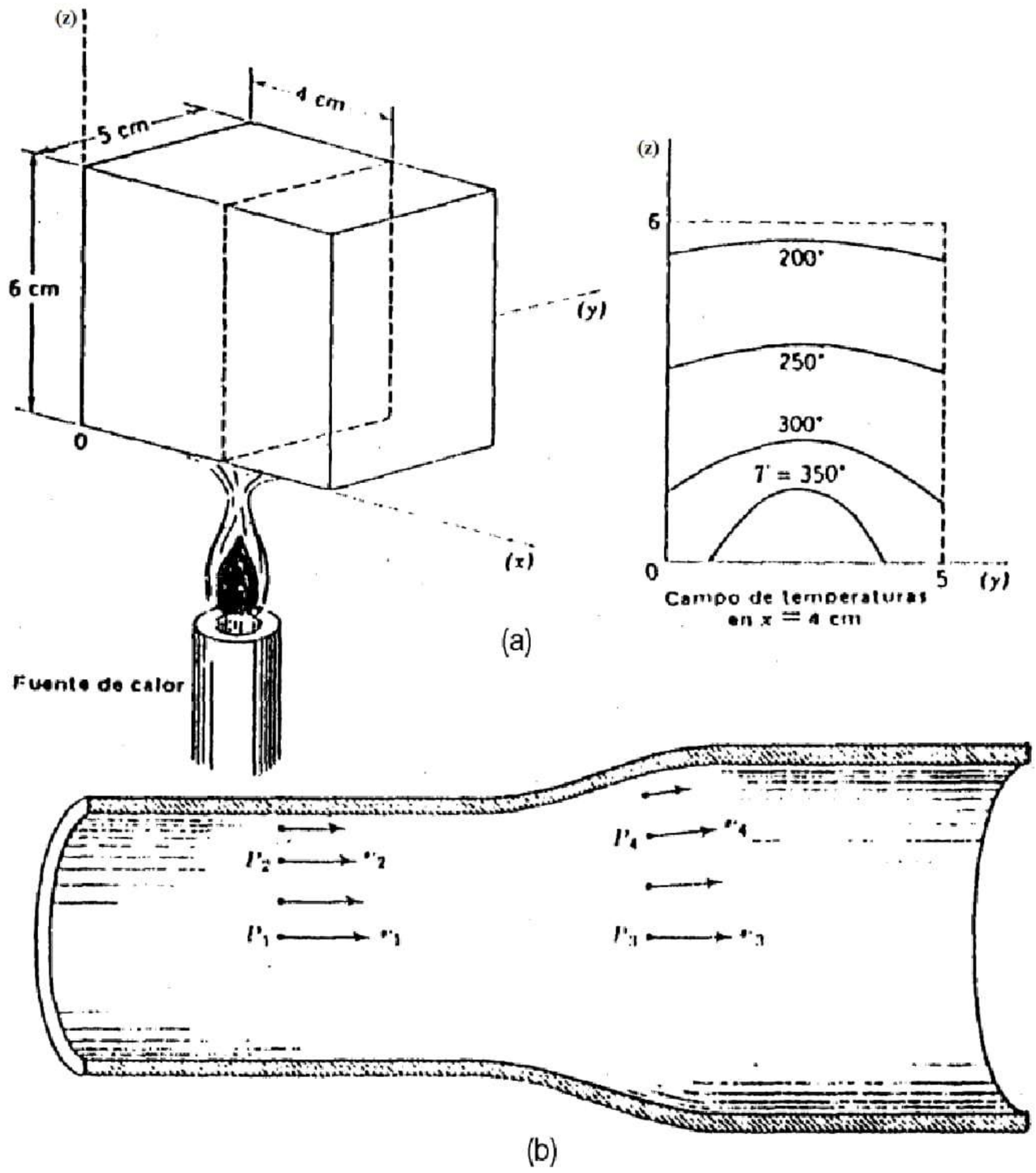


FIGURA 2-8: Ejemplos de campos escalares y vectoriales.

a) Campo de temperaturas dentro de un bloque de material.

b) Velocidad del flujo dentro de un tubo de sección transversal variable

Por tanto, el campo de temperatura *T(x, y, z, t)* dentro del bloque de material de la figura 2-8(*a*) es un campo escalar. Para cada punto *P(x, y, z)* existe una temperatura correspondiente *T(x, y, z, t)* en cualquier instante *t* en el tiempo. La velocidad de un fluido que se mueve dentro del tuvo como se muestra en la figura 2-8(*b*) ilustra un campo vectorial. Dentro del tubo, donde cambia el área transversal, varía la dirección, así como la magnitud de la velocidad del fluido.

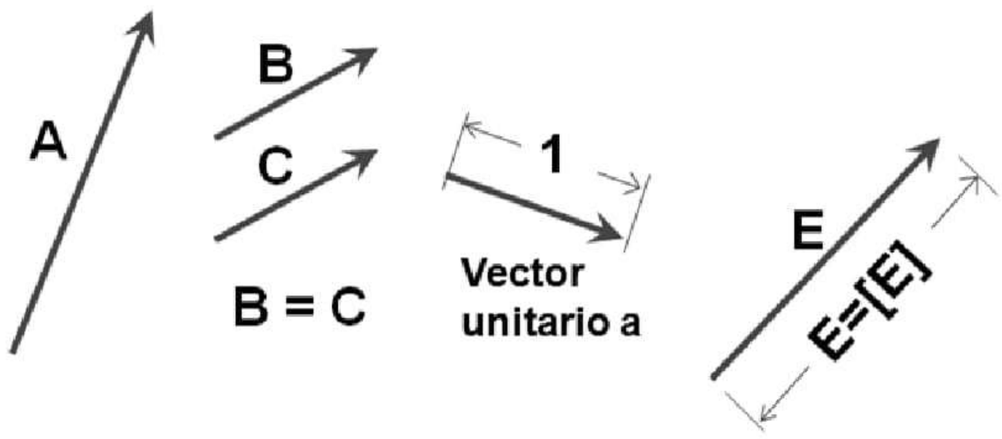


FIGURA 2-9: Representaciones gráficas de un vector, dos vectores iguales, un vector unitario y representación de la magnitud o longitud de un vector.

Otros ejemplos de campos escalares son la masa, densidad, presión y potencia gravitacional. Un campo de fuerzas, uno de velocidades y uno de aceleración son ejemplos de campos vectoriales.

Se toma como símbolo matemático de la cantidad escalar a cualquier letra: por ejemplo, *A, T, a, f*. El símbolo para una cantidad vectorial es cualquier letra impresa en negritas, por ejemplo **A, H, a, g.**

Las cantidades vectoriales se representan gráficamente mediante flechas o segmentos dirigidos como se muestra en la figura 2-10. La magnitud o longitud de un vector A se escribe $|A|$ o simplemente *A*, y es un escalar real positivo. El *negativo* de un vector es el que se toma en dirección opuesta, con una punta de flecha en el extremo opuesto. Un *vector unitario* es cualquier vector que tenga magnitud unitaria. Se usa el símbolo a para denotar un vector unitario, usando el subíndice para especificar determinada dirección. Por ejemplo, a_x significa un vector unitario en la dirección *x* positiva. Se dice que dos vectores son *iguales* si tienen la misma dirección, magnitud y sentido. (No necesitan ser colineales; basta con que sean paralelos).

2.2.3. Sumas vectoriales

La suma vectorial de A y B se define en relación con la ilustración gráfica de los vectores, como en la figura 2-10. Una ilustración física de la suma vectorial ocurre combinando desplazamientos en el espacio. De esa manera, si se desplaza consecutivamente a una partícula en la distancia vectorial A y luego en B, su posición final se denotaría por la suma vectorial A + B = C mostrada en la figura 2-10(*a*). Invirtiendo el orden de esos desplazamientos se obtiene la misma suma vectorial C, de manera que:

$$A + B = B + A \qquad [2\text{-}16]$$

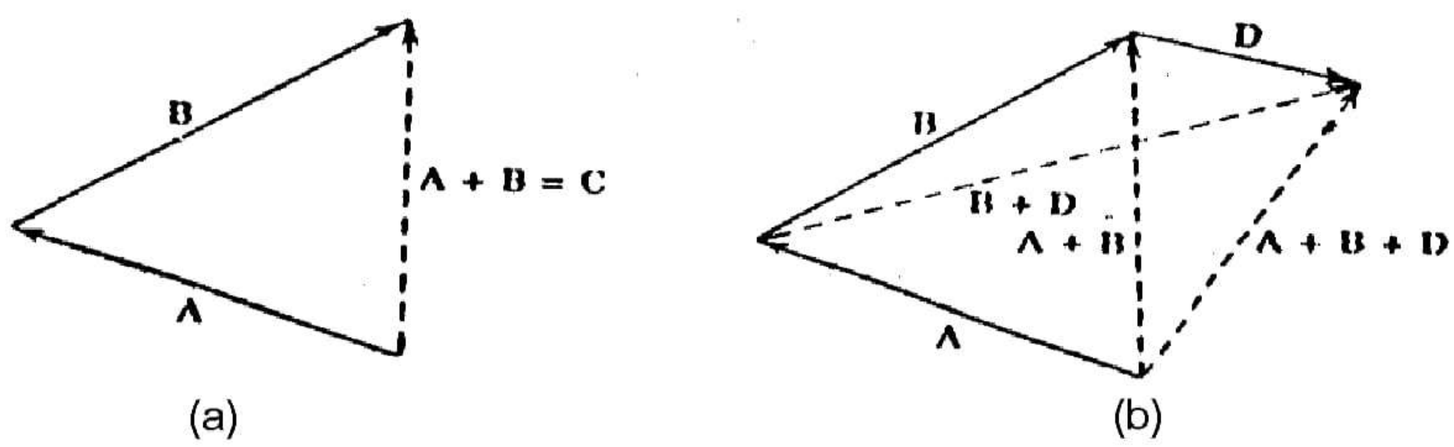


FIGURA 2-10: a) Definición gráfica de la suma de dos vectores. b) La ley asociativa de la adición

La ley conmutativa es válida para la adición de vectores. Si se suman varios vectores, se obtiene una ley asociativa derivada.

$$[A + B] + D = A + [B + D] \qquad [2\text{-}17]$$

de la definición de la suma vectorial y de la figura 2-10(*b*).

2.2.4. Producto de un vector por un escalar

Si se denota una cantidad escalar mediante *u*, y B denota una cantidad vectorial, el producto *u*B significa un vector cuya magnitud es *u* veces mayor que la magnitud de B, con la misma dirección que B si u es un escalar positivo, o la dirección opuesta si *u* es negativo. Las siguientes leyes son válidas para los productos de vectores por escalares:

$u\mathrm{B} = \mathrm{B}u$	**Ley conmutativa**	[2-18]
$u[v\mathrm{A}] = [uv]\mathrm{A}$	**Ley asociativa**	[2-19]
$[u + v]\mathrm{A} = u\mathrm{A} + v\mathrm{A}$	**Ley distributiva**	[2-20]
$u[\mathrm{A} + \mathrm{B}] = u\mathrm{A} + u\mathrm{B}$	**Ley distributiva**	[2-21]

2.2.5. Producto escalar y vectorial de vectores

Además del producto simple de un vector por una cantidad escalar, que se estudió en la sección anterior, ahora se estudian dos clases nuevas de productos que sólo comprenden cantidades vectoriales. La primera, que se llama ***producto escalar*** (o producto punto), se define como sigue:

$$\mathrm{A} \,.\, \mathrm{B} = AB\cos\theta \qquad [2\text{-}22]$$

en el cual θ es el ángulo entre los vectores A y B. Si se deduce de (2-22) que A . B se puede escribir como $(A\cos\theta)\,B$ o como $A(B\cos\theta)$ es evidente que el producto escalar A . B indica el producto de la proyección escalar de cualquiera de los vectores sobre el otro, multiplicada por la magnitud del otro vector. La definición A . B es útil al producto escalar, por ejemplo, en el cálculo del trabajo que realiza una fuerza constante que actúa en una distancia expresada como un vector. En la siguiente sección se generaliza este concepto extendido a la expresión integral para el trabajo.

La definición (2-22) da como resultado lo siguiente, si A y B son perpendiculares, $\cos\theta$ es cero, lo que hace cero su producto escalar. Por lo tanto, si A y B están en la misma dirección, A . B indica el producto de sus longitudes. Esas observaciones llevan a resultados simples que comprenden los productos escalares de los vectores unitarios ortogonales a_1, a_2 y a_3 para los sistemas de coordenadas ilustrados la figura 2-2. Por ejemplo,

$$a_1 \,.\, a_2 = a_2 \,.\, a_3 = a_3 \,.\, a_1 = 0 \qquad \text{en tanto que:} \quad a_1 \,.\, a_1 = a_2 \,.\, a_2 = a_3 \,.\, a_3 = 1$$

De la definición (2-22), y ya que B . A significa $AB\cos\theta$ se deduce la ley conmutativa para el producto escalar:

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad [2\text{-}23]$$

También se puede demostrar la ley distributiva para el producto escalar de la suma de dos vectores por un tercer vector

$$\mathrm{A} \,.\, [\mathrm{B} + \mathrm{C}] = \mathrm{A} \,.\, \mathrm{B} + \mathrm{A} \,.\mathrm{C} \qquad [2\text{-}24]$$

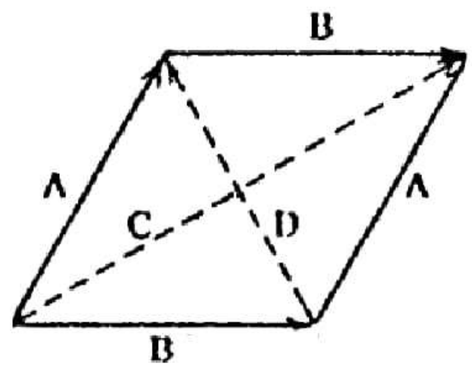


FIGURA 2-11

La segunda clase de producto de un vector por otro se llama ***producto vectorial*** (o producto cruz), definido como sigue:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_n \, A B \operatorname{sen} \theta \qquad [2\text{-}25]$$

en que θ es el ángulo medido entre A y B, y a_n es un vector unitario perpendicular tanto a A como a B y cuya dirección se determina por la regla de la mano derecha, condicionado a que la rotación se tome desde A hacia B recorriendo el ángulo θ. En la figura 2-12 se ilustra gráficamente el producto vectorial A x B. Del diagrama se puede demostrar que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \qquad [2\text{-}26]$$

lo cual significa que, el producto vectorial no obedece una ley conmutativa. En consecuencia, al formar el producto cruz es importante considerar el orden de dos vectores.

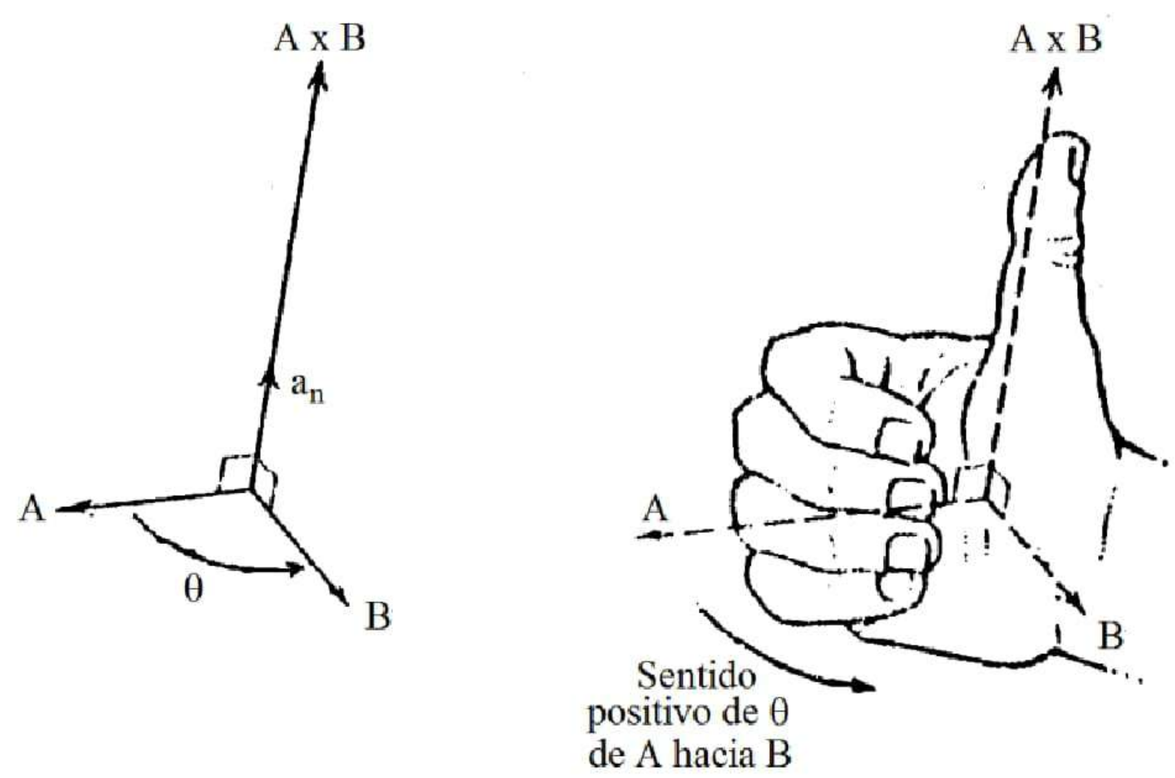


FIGURA 2-12: Ilustración del producto cruz o producto vectorial.

Si A y B son vectores paralelos, senθ es cero y su producto cruz es cero. Si A y B son vectores perpendiculares, A x B es un vector de longitud AB y dirección perpendicular tanto a A como a B, en el cual la ambigüedad de la dirección se resuelve mediante la regla de la mano derecha. Estas observaciones aplicadas a los productos cruz de los vectores unitarios otorgados de la figura 2-12, dan como resultado especiales:

$$a_1 \text{ X } a_1 = a_2 \text{ X } a_2 = a_3 \text{ X } a_3 = 0 \qquad = a_1 \text{ X } a_2 = a_3 \quad a_2 \text{ X } a_3 = a_1 \quad \text{y} \quad a_3 \text{ X } a_1 = a_2$$

Sin embargo, nótese que a_1 X a_3, = - a_2.
Se puede demostrar que hay una ley distributiva válida para el producto cruz

$$\text{A x [B + C]} = \text{A x B} + \text{A x C} \qquad [2\text{-}27]$$

Debido a la no conmutatividad del producto vectorial expresada por (2-26), es importante el orden de los factores en (2-27).
Si se dan los vectores A y B en función de sus componentes ortogonales en la forma de (2-25), su producto vectorial se escribe como sigue:

$$A \text{ x } B = (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \text{ x } (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3)$$

El uso de la ley distributiva (2-27) y de los resultados especiales que se obtuvieron para los productos cruz de los vectores unitarios ortogonales da el siguiente desarrollo:

$$A \times B = a_1 \left(A_2 B_3 - A_3 B_2 \right) + a_2 \left(A_3 B_1 - A_1 B_3 \right) + a_3 \left(A_1 B_2 - A_2 B_1 \right)$$

que se puede escribir en forma de determinante

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \qquad [2\text{-}28]$$

2.2.6. El operador vectorial diferencial ∇ (nabla)

El operador vectorial diferencial *del* o *nabla*, se define en coordenadas cartesianas como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \qquad [2\text{-}29]$$

Nabla es un operador diferencial que por sí solo no tiene aplicación, se lo utiliza solamente delante de una función de (*x, y, z*) la cual queda así diferenciada. Nabla es un vector que obedece a las leyes del álgebra vectorial y puede ser aplicada para cualquier sistema de coordenadas. Aquí tomamos el ejemplo en coordenadas rectangulares.

Según la operación que realicemos con nabla podemos lograr diferentes expresiones:

2.2.6.1 Gradiente

Si multiplicamos escalarmente a nabla "∇" por un valor escalar, obtenemos una expresión denominada Gradiente. Por lo tanto el Gradiente de un campo escalar V es un vector que surge del producto escalar (producto punto) entre el operador nabla y el valor escalar V. El vector resultante de ese producto, denominado Gradiente, es un vector que indica la dirección de máximo crecimiento de la función escalar.

Grad V = ∇.V

$$\nabla . V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_X + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_Y + \frac{\partial V}{\partial Z} \hat{a}_Z \qquad [2\text{-}30]$$

Obtenemos la derivada direccional de la función V.

Ejemplo 1: Para aplicar el **Gradiente** en una función **V= 2x+y** primero haremos el gráfico de la función a fin de interpretar visualmente lo que estamos realizando. Dado que es la ecuación de una recta, con dos puntos que calculemos para cada valor de V permitirá trazar la recta.

Damos valores a V y calculamos "y" para por lo menos dos valores de "x".

- Para trazar la curva de nivel V = 0

Si V=0 2x+y=0 y=-2x si x = 1 y = -2

si x = -1 y = 2

- Para trazar la curva de nivel V = 2

Si V=2 2x+y=2 y=2-2x si x = 1 y = 0

si x = -1 y = 4

- Para trazar la curva de nivel V = 4

Si V=4 2x+y=4 y=4-2x si x = 1 y = 2

si x = 0 y = 4

El Gradiente de la función nos dá: $\nabla . V = \frac{2x}{\partial x}\hat{a}_X + \frac{y}{\partial y}\hat{a}_Y = 2.\hat{a}_X + 1.\hat{a}_Y$ [2-31]

Para representar el vector Gradiente en la función V, seleccionamos los puntos P(x;y) donde lo queremos graficar: por ejemplo $P_1(1;2)$; $P_2(2;-2)$

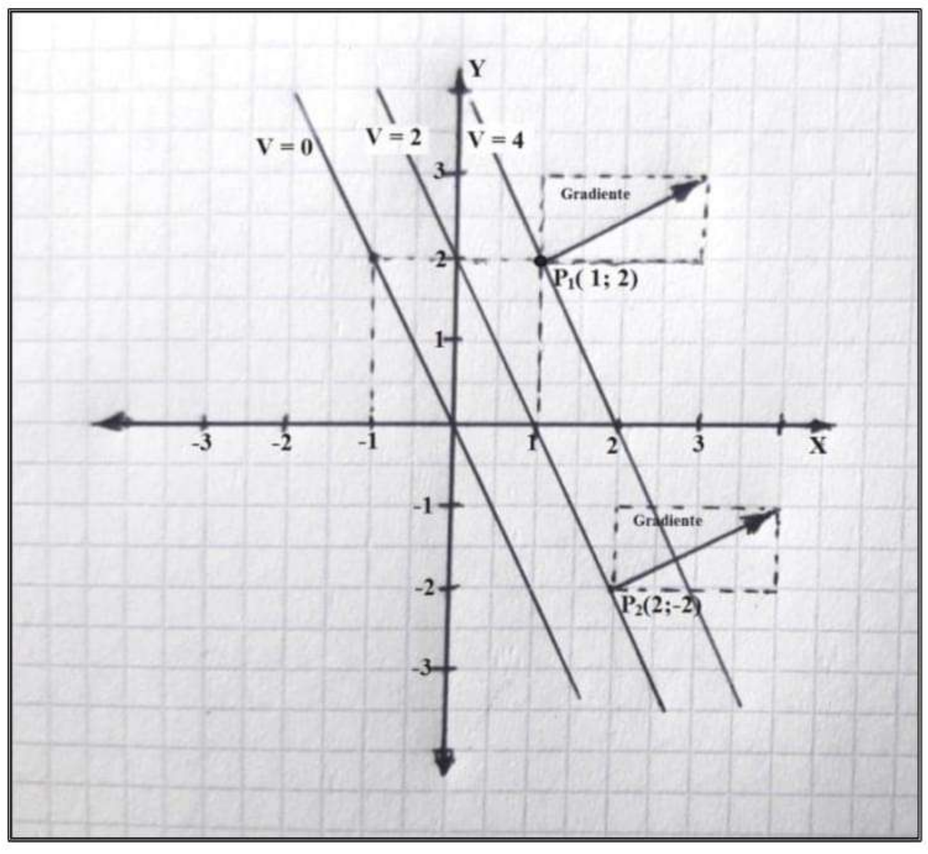


FIGURA 2-13: Gradiente de la función V=2x+y

Vemos que el vector gradiente tiene la misma magnitud y dirección en cada uno de los puntos pues no es afectado por las variables x o y.

Ejemplo 2: Podemos hacer la gráfica de una función tridimensional φ como una función de x e y como se ve en la figura 2-14 para la función $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$.

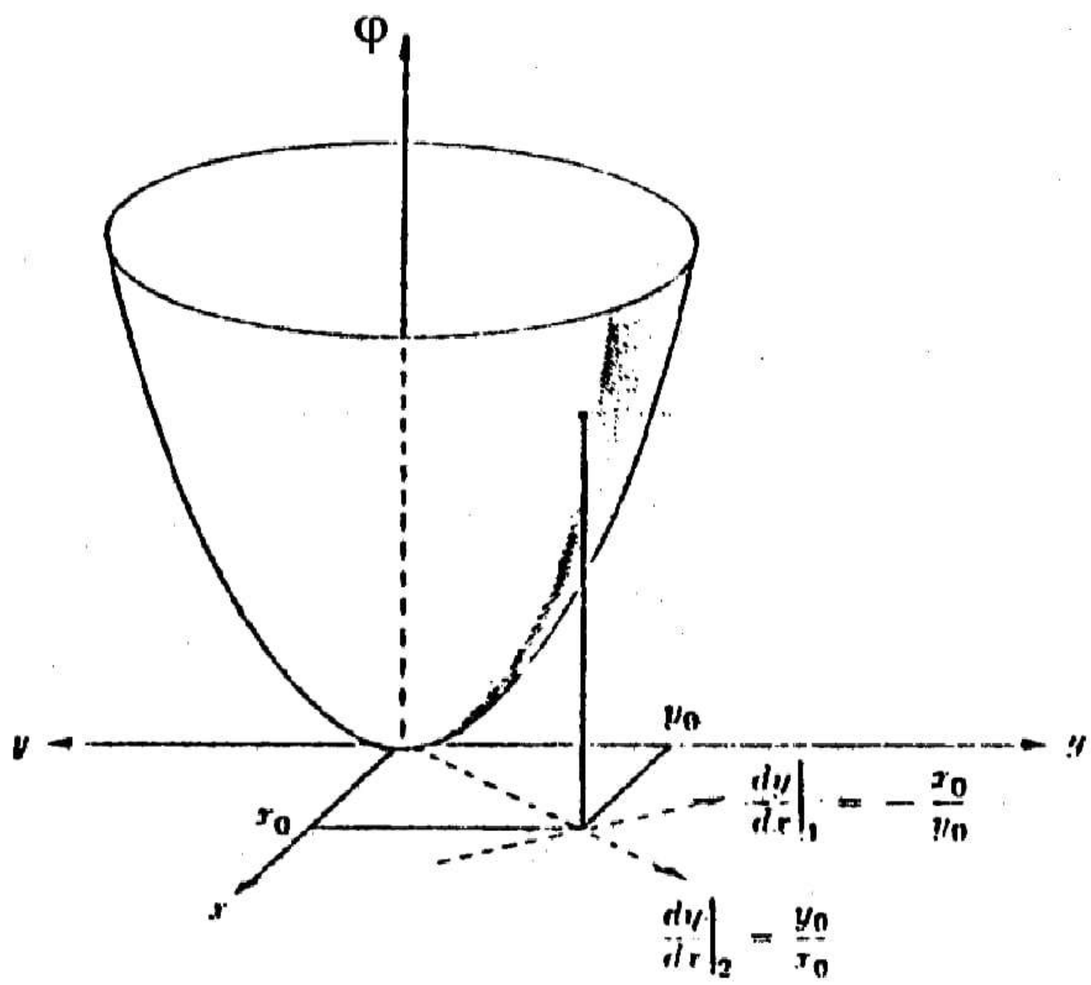


FIGURA 2-14: La función $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ representa gráficamente en función de *x* e *y* en el espacio tridimensional

Para analizar la función, la cortaremos horizontalmente en distintos puntos y superponemos los círculos tal como está representado en la siguiente figura como curvas de nivel o líneas de altitud constante que aparecen en mapas topográficos. La figura 2-15 muestra la función $\varphi = x^2 + y^2$ representada ahora como un diagrama de curvas de nivel.

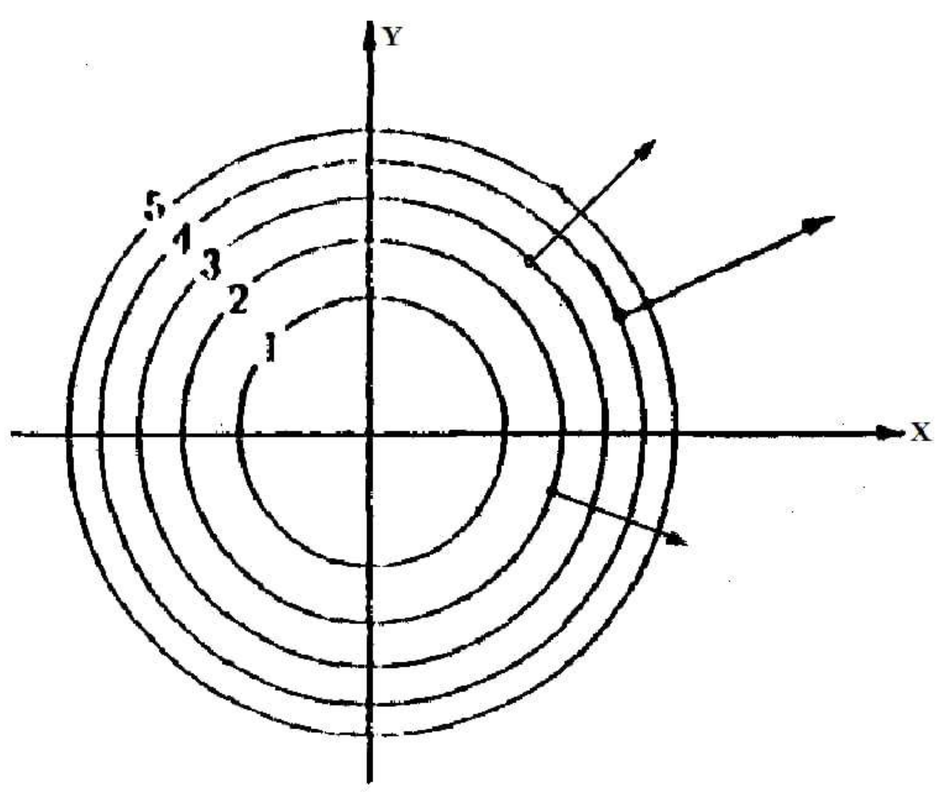


FIGURA 2-15: La función $\varphi(x, y)$ de la FIGURA 2-14 representada como diagrama de curvas de nivel en dos dimensiones. Las flechas indican el Gradiente en cada punto. Es evidente que el gradiente tiene dirección normal a la superficie de nivel de φ en el punto considerado.

La idea de curva de nivel puede generalizarse a una función de tres variables, en cuyo caso las superficies, $\varphi(x, y, z) = constante$, se denomina *superficies de nivel* o *superficies equipotenciales*. El análogo tridimensional a la figura 2-15 es la única forma práctica de representar gráficamente un campo para un espacio tridimensional.

El gradiente de la función escalar puede expresarse ahora en la siguiente forma:

$$\nabla.\varphi = \frac{x^2}{\partial x}\hat{a}_X + \frac{x^2}{\partial y}\hat{a}_Y \quad = 2.x.\hat{a}_X + 2.y.\hat{a}_Y \qquad [2\text{-}32]$$

Donde el Gradiente tomará diferentes valores según el punto x; y en el cual lo representemos, observando que será mayor mientras nos alejamos del centro de coordenadas.

$P_3(x;y) = P(2;2)$

$$\nabla.\varphi_{(x;y)} = 2.2.\hat{a}_X + 2.2.\hat{a}_Y = 4.\hat{a}_X + 4.\hat{a}_Y \quad [2\text{-}33]$$

El gradiente de una función escalar φ es un vector cuya magnitud es la máxima derivada direccional en el punto en consideración y cuya dirección es la dirección de máximo crecimiento de la función de ese punto.

2.2.6.2. Divergencia

Otro operador importante es el operador divergencia. La divergencia del vector F, expresada por div F, se define como sigue:

La divergencia de un vector se define como el límite de su integral de superficie por unidad de volumen a medida que el volumen encerrado por la superficie tiende a cero. Nos define la variación de flujo dentro del volumen considerado.

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{v\to 0} = \frac{1}{V}\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, da \quad [2\text{-}34]$$

A la divergencia del vector F la expresamos como: div **F** = producto escalar entre Nabla y el vector **F**.

$$\nabla.\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_X + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_Y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_Z\right).\left(F_x.\hat{a}_X + F_y.\hat{a}_Y + F_z.\hat{a}_Z\right) \quad [2\text{-}35]$$

Recordemos que el producto entre versores similares nos da 1 (cos 0° = 1) y el producto entre versores distintos nos da cero por estar los versores a 90° entre ellos (cos 90° = 0).

$$\nabla.\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad [2\text{-}36]$$

La divergencia es evidentemente una función escalar puntual (campo escalar), y se define en el punto límite de la superficie de integración.
Este método para hallar la forma explícita de la divergencia es aplicable a cualquier sistema de coordenadas siempre y cuando se conozcan las formas de los elementos de volumen y de superficie o , alternativamente, los elementos de longitud.

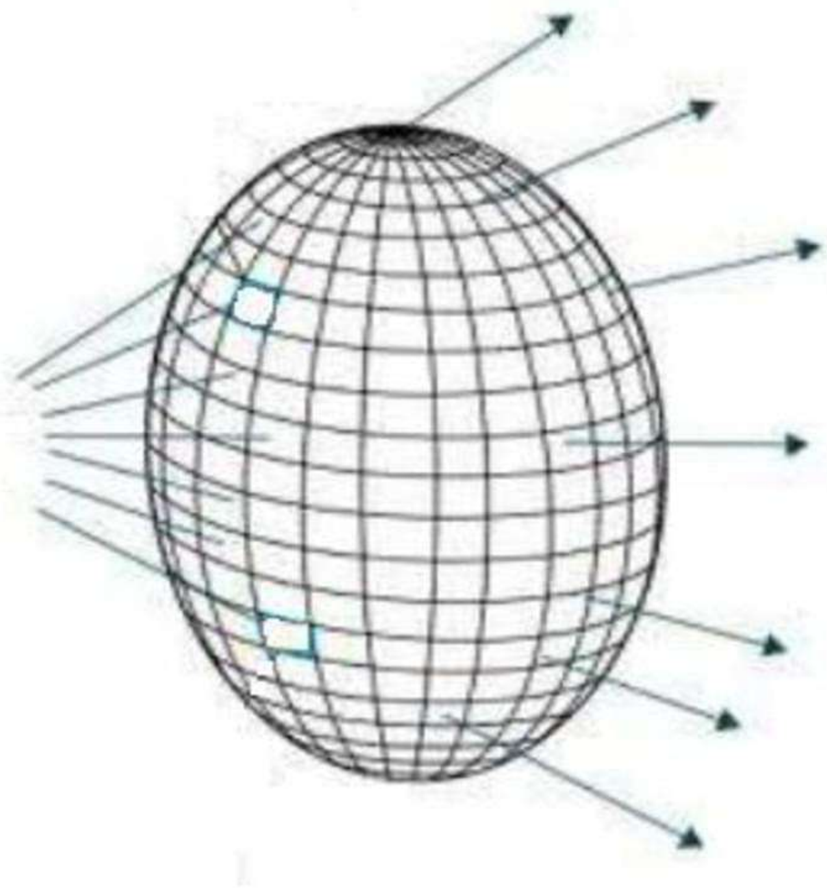


FIGURA 2-16: Representación de una Superficie cerrada. La superficie cerrada encierra un volumen. Viene a ser el recubrimiento o casco del volumen.

Si el número de líneas que entran al volumen es igual al número de líneas que salen: en el volumen no hay generadores ni sumideros, la divergencia es cero.

Cuando la divergencia es igual a cero, expresa que la cantidad de flujo entrante en el volumen es igual a la que sale es decir, que si no hay fuentes ni sumideros, es un fluido incomprensible.

Un teorema muy importante en donde interviene la divergencia puede ahora enunciarse y demostrarse.

✦ Teorema de la divergencia.

La integral de la divergencia de un vector sobre un volumen V es igual a la integral de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie que limita V.

Esto es

$$\int_{V} \nabla . \mathbf{F} . dv = \oint_{S} \mathbf{F} . \boldsymbol{n} . da \quad [2\text{-}37]$$

F.n representa al vector **F** en la dirección perpendicular a la superficie da.

Considérese que el volumen se subdivide en un gran número de pequeñas celdas. Sea ΔV_i, el volumen de la i-ésima celda que está limitada por la superficie S_i. Es claro que

$$\sum_{i} \oint_{Si} \mathbf{F} . \boldsymbol{n} . da = \oint_{S} \mathbf{F} . \boldsymbol{n} . da \quad [2\text{-}38]$$

donde en cada integral de la izquierda la normal se dirige hacia fuera el volumen considerado. Puesto que el sentido hacia fuera para una celda es el sentido hacia adentro de una celda adyacente, todas las contribuciones del primer miembro de (2-38) se anulan excepto aquellas que provienen de la superficie *S*, y la ecuación (2-38) queda esencialmente demostrada. El teorema de la divergencia se obtiene

haciendo que el número de celdas se aproxime a la infinidad, de tal modo que el volumen de cada celda tienda a cero.

$$\oint_S \mathbf{F}.\boldsymbol{n}.da = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \left[\frac{1}{\Delta V_i} \oint_{Si} \mathbf{F}.\boldsymbol{n}.da \right] \Delta V_i \qquad [2\text{-}39]$$

En el límite, la suma sobre i se convierte en una integral sobre V y la razón de la integral sobre S_i a ΔV_i, se convierte en la divergencia de F. Así,

$$\oint_S \mathbf{F}.\boldsymbol{n}.da = \int_V \nabla.\mathbf{F}.dv \qquad [2\text{-}40]$$

que es el **teorema de la divergencia**. Tendremos frecuentes ocasiones para utilizar este teorema, tanto para el desarrollo de los aspectos teóricos en electricidad y del magnetismo como para el propósito práctico de evaluar integrales.

2.2.6.3. Rotacional

El tercer operador diferencial de interés es el rotacional. El rotacional de un vector, denotado por rot F o ∇xF , se define de la forma siguiente:

El rotacional de un vector es el producto vectorial entre Nabla y el vector y nos dá el eje de rotación en sentido horario que produce la variación de flujo perpendicular a su dirección de avance.

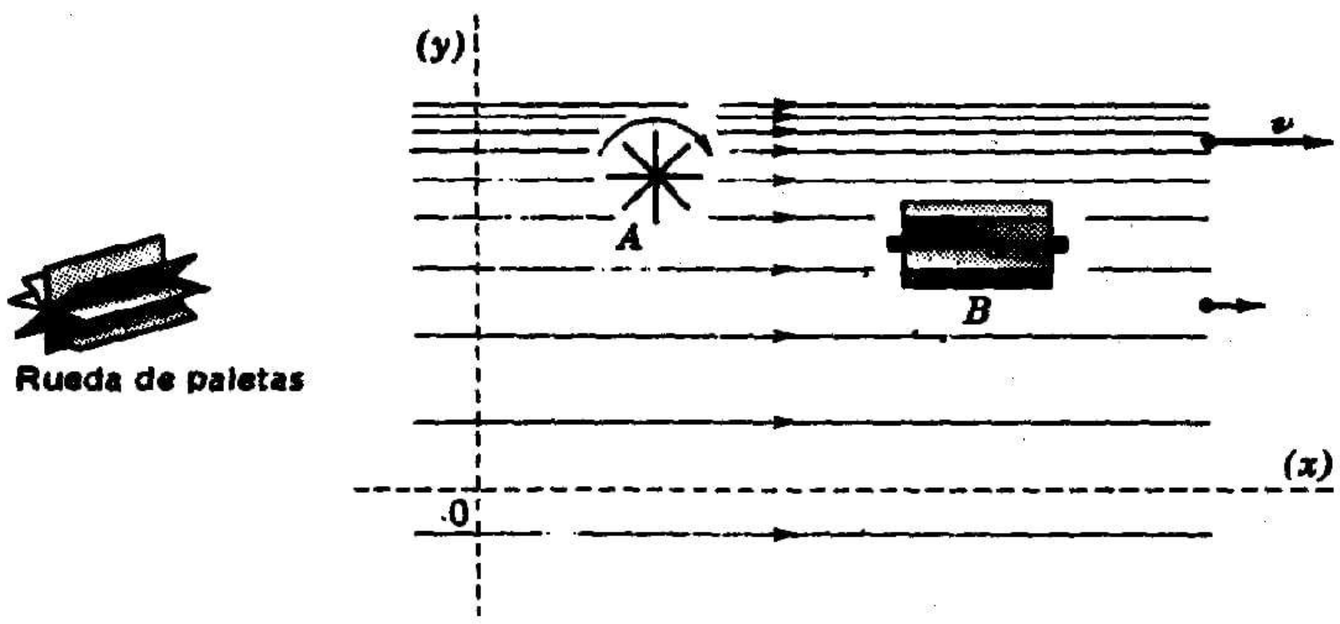


FIGURA 2-17: Rueda exploradora de paletas para detectar rotor.

En A la rueda rota por la influencia de mayor flujo arriba que abajo.

En B la rueda no rota.

A esta definición anterior la podemos interpretar observando un flujo que se desplaza en la dirección (x) y la velocidad del flujo crece a medida que nos alejamos de (y)= 0 . La mayor velocidad de flujo en la parte superior hará que la rueda exploradora gire en sentido horario. El eje de rotación sería entrante a la hoja (aplicar Regla de la mano Derecha) por lo tanto el vector resultante tendrá la dirección –(z) como ya lo comprobaremos en la guía de actividades.

La forma de obtener el rotacional en coordenadas rectangulares puede recordarse fácilmente si se observa que es sólo el desarrollo de un determinante de tres por tres, es decir,

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad [2\text{-}41]$$

En la primera fila ponemos los versores, en la segunda las componentes del vector Nabla y en la tercera fila las componentes del vector F. La solución es otro vector con tres componentes:

$$(\text{rot}\,\mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad (\text{rot}\,\mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad (\text{rot}\,\mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \qquad [2\text{-}42]$$

Como con la divergencia, ahora también nos encontramos con un teorema importante y útil en que interviene el rotacional, conocido como teorema de Stokes.

✦ Teorema de Stokes

La integral de línea de un vector alrededor de una curva cerrada es igual a la integral de la componente normal de su rotacional sobre cualquier superficie limitada por la curva.

Esto es:

$$\oint_C \mathbf{F}.dl = \int_S \nabla \text{x} \mathbf{F}.\boldsymbol{n}.da \qquad [2\text{-}43]$$

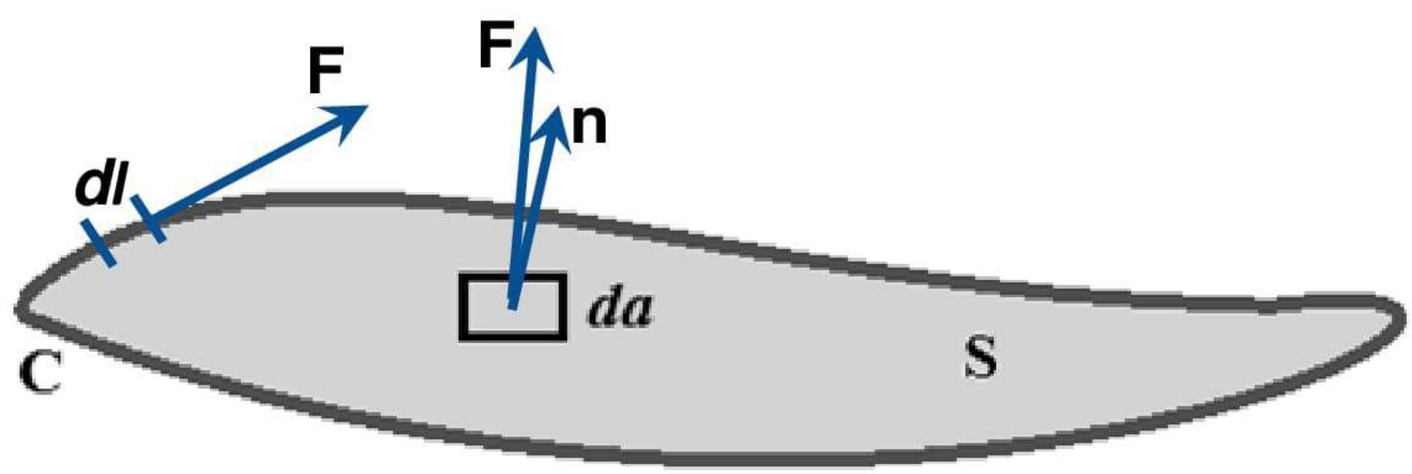


FIGURA 2-19: curva cerrada C que limita una superficie S.

La demostración de este teorema es bastante análoga a la demostración del teorema de la divergencia. La superficie *S* se divide en un gran número de celdas. La superficie de la i-ésima celda se denomina ΔS_i y la curva que la limita es C_i. Puesto que cada una de estas celdas debe recorrerse en el mismo sentido, es claro que la suma de las integrales de línea sobre las C_i es justamente la integral de línea alrededor de la curva limitadora; todas las demás contribuciones se cancelan. Así pues,

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{l} = \sum_i \oint_{Ci} \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{l} \qquad [2\text{-}44]$$

Sólo falta determinar el límite a medida que el número de celdas se vuelve infinito, de tal modo que el área de cada celda tienda a cero. El resultado de este procedimiento de límite es que es el teorema de Stokes. Este teorema, como el de la divergencia, es útil tanto en el desarrollo de la teoría electromagnética como en la evaluación de integrales.

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{l} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{Ci} \mathrm{F.dl.}\Delta S_i = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,\mathrm{da} \qquad [2\text{-}45]$$

2.2.6.4. Laplaciano

Las operaciones de tomar el gradiente, la divergencia o el rotacional de clases adecuadas de campos pueden repetirse. Por ejemplo, tiene sentido tomar la divergencia del gradiente de un campo escalar. Algunas de estas operaciones repetidas dan cero para cualquier campo de buen comportamiento como veremos en la Tabla de Identidades Vectoriales. Una es de tanta importancia que tiene un nombre especial; las otras pueden expresarse en función de operaciones más sencillas. Una operación doble de mucha importancia es la "**divergencia del gradiente"** de un campo escalar. Este operador combinado se conoce como el ***operador laplaciano*** y generalmente se expresa por ∇^2,

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = Lap \qquad [2\text{-}46]$$

En coordenadas rectangulares,

$$Lap\ \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \qquad [2\text{-}47]$$

Este operador es de gran importancia en electrostática y se estudiará con detalle aplicado al campo eléctrico ***E***. No tiene representación física, solo es útil como operador.

2.2.7. Integración Vectorial

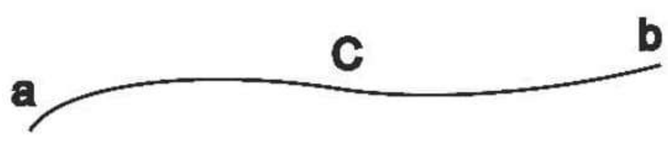
Para nuestros propósitos podemos considerar tres clases de integrales: de línea, de superficie y de volumen, según la naturaleza del diferencial que aparezca en la integral.

El integrando puede ser un vector o un escalar; no obstante, ciertas combinaciones de integrandos y diferenciales dan origen a integrales que no son de interés.

Las de mayor interés aquí son la integral de línea de un vector, la integral de superficie de un vector y la integral de volumen tanto de vectores como de escalares.

- Si F es un vector, la **integral de línea** de F se denota como

$$\int_{a\,C}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \qquad [2\text{-}48]$$



donde *C* es la curva sobre la cual se efectúa la integración, *a* y *b* los puntos inicial y final de esta curva y $d\mathbf{l}$ un desplazamiento vectorial infinitesimal a lo largo de la curva *C*. Puesto que F.d**l** es un escalar, es claro que la integral de línea es un escalar.

La definición de la integral de línea es muy semejante a la definición de Riemann de la integral definida. El segmento de *C* entre *a* y *b* es dividido en un gran número de pequeños incrementos $\Delta\mathbf{l}$; para cada incremento se escoge un punto interior y se halla el valor de F en ese punto. Se encuentra

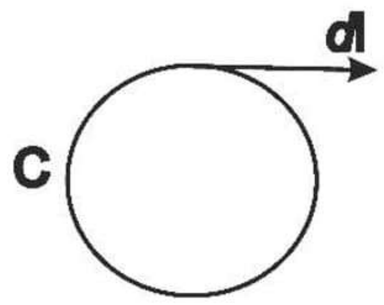
el producto escalar de cada incremento con su correspondiente valor de F y se calcula la suma de todos ellos. La integral de línea se define entonces como el límite de esta suma a medida que el número de incrementos llega a ser infinito de tal manera que cada incremento tienda a cero. Esta definición puede expresarse en forma compacta por

$$\int_{a\,C}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i \qquad [2\text{-}49]$$

Es importante notar que la integral de línea depende generalmente no sólo de los extremos *a* y *b*, sino también de la curva *C* sobre la que se efectúa la integración.

- La **integral de línea alrededor de una curva cerrada** tiene tanta importancia que se ha empleado una notación especial para ella; ésta es

$$\oint_C \mathbf{F}.\,\mathrm{dl} \qquad [2\text{-}50]$$



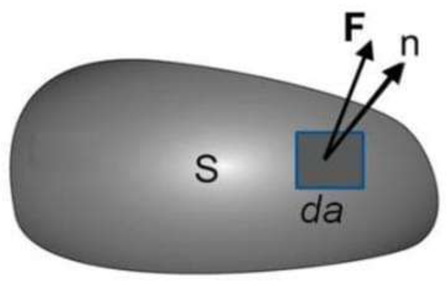
La integral alrededor de una curva cerrada puede ser o no cero; el tipo de vectores para los cuales la integral de línea alrededor de una curva cerrada es cero, es de importancia considerable. Por esta razón uno se encuentra a menudo con integrales de línea alrededor de trayectorias cerradas no indicadas, por ejemplo,

$$\oint \mathbf{F}.\,\mathrm{dl} \qquad [2\text{-}51]$$

Esta notación es útil sólo en aquellos casos donde la integral es independiente del contorno *C* dentro de límites bastantes amplios. Si hay posibilidad de ambigüedad, conviene especificar el contorno.

- Si F es de nuevo un vector, una **integral de superficie** F se denota por

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; da \qquad [2\text{-}52]$$



Donde *S* es la superficie sobre la cual se realiza la integración, *da* es un área infinitesimal en *S* y n es una normal unitaria a *da*. Existe una doble ambigüedad al escoger n, la que se elimina considerando que n es la normal dibujada hacia fuera si S es una superficie cerrada. Si S no es cerrada y es finita, entonces tiene una frontera y el sentido de la normal es importante sólo con respecto al sentido arbitrario positivo al atravesar la frontera. El sentido positivo de la normal es la dirección en la cual avanzaría un tornillo a la derecha si se girara en la dirección del sentido positivo sobre la curva limitadora. Esto se ilustra en la figura 2-18. La integral de superficie de F sobre una superficie cerrada *S* se expresa a veces por

$$\oint_S \mathbf{F}.\,\mathbf{n}.\,\mathrm{da} \qquad [2\text{-}53]$$

Comentarios completamente paralelos a los hechos para la integración de línea pueden hacerse para la integral de superficie. La integral de superficie es claramente un escalar; por lo general, depende de la superficie S y los casos en que no depende de ella

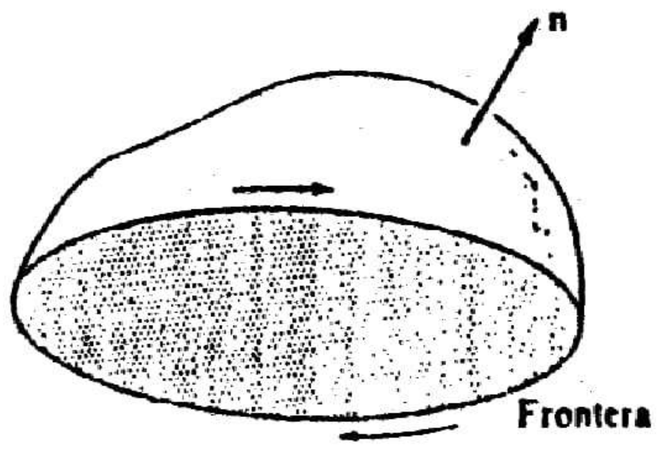


FIGURA 2-18: Relación de la normal a una superficie, y el sentido de recorrido en la frontera

tienen particular importancia. La definición de la integral de superficie se hace de un modo exactamente comparable a la de la integral de línea. La formulación detallada se deja como ejercicio.

2.2.8 Identidades Vectoriales

Tabla 2-2: Resumen de identidades vectoriales

Son operaciones Vectoriales que siempre tienen el mismo resultado.

Algebraicas

(1) $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}=\mathbf{G}\cdot\mathbf{F}$

(2) $\mathbf{F}\times\mathbf{G}=-\mathbf{G}\times\mathbf{F}$

(3) $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{G}+\mathbf{H})=\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{H}$

(4) $\mathbf{F}\times(\mathbf{G}+\mathbf{H})=\mathbf{F}\times\mathbf{G}+\mathbf{F}\times\mathbf{H}$

(5) $\mathbf{F}\times(\mathbf{G}\times\mathbf{H})=\mathbf{G}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{F})-\mathbf{H}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})$

(6) $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{H})=\mathbf{G}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{F})=\mathbf{H}\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$

Integrales

(7) $\oint_S \mathbf{F}.\,\mathrm{ds}=\int_V \nabla.\,\mathbf{F}\,\mathrm{dv}$ Teorema de la Divergencia

(8) $\oint_C \mathbf{F}.\,\mathrm{dl}=\int_S (\nabla\mathrm{x}\mathbf{F}).\,\mathrm{ds}$ Teorema de Stokes

(9) $\oint_S f(\nabla\mathrm{g}).\,\mathrm{ds}=\int_V [f\,\nabla^2\mathrm{g}+(\nabla f).\,(\nabla\mathrm{g})]\mathrm{dv}$

(10) $\oint_S [f.\,\nabla\mathrm{g}-\mathrm{g}.\,\nabla f].\,\mathrm{ds}=\int_V (f\,\nabla^2\mathrm{g}-\mathrm{g}\nabla^2 f)\mathrm{dv}$

Diferenciales

(11) $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

(12) $\nabla\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla\cdot\mathbf{F}+\nabla\cdot\mathbf{G}$

(13) $\nabla\times(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla\times\mathbf{F}+\nabla\times\mathbf{G}$

(14) $\nabla(f\,g)=f\,\nabla g+g\,\nabla f$

(15) $\nabla\cdot(f\,\mathbf{F})=\mathbf{F}\cdot\nabla f+f\,(\nabla\cdot\mathbf{F})$

(16) $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$

(17) $\nabla\times(f\,\mathbf{F})=(\nabla f)\times\mathbf{F}+f\,(\nabla\times\mathbf{F})$

(18) $\nabla\cdot\nabla f=\nabla^2 f$

(19) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$

(20) $\nabla\times(\nabla f)=0$

(21) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla^2\mathbf{F}$

(22) $\nabla\times(f\,\nabla g)=\nabla f\times g$

El rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es cero. Este enunciado se verifica más fácilmente expresándolo en coordenadas rectangulares. Si el campo escalar es φ, entonces

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{Gra}\,\varphi)=\nabla\times(\nabla\cdot\varphi)=0 \qquad \text{(20) de la Tabla 2-2}$$

La divergencia de cualquier rotacional es también cero. Esto se verifica directamente en coordenadas rectangulares al escribir.

$$\mathrm{Div}\left(\mathrm{Rot}\, F\right) = \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{F}\right) = 0 \qquad \text{(19) de la Tabla 2-2}$$

La otra posible operación de segundo orden es tomar el rotacional del rotacional de un campo vectorial. Se deja como ejercicio demostrar que en coordenadas rectangulares

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{F}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{F}\right) - \nabla^2 \mathbf{F} \qquad \text{(21) de la Tabla 2-2}$$

donde el laplaciano de un vector es el vector cuyas componentes rectangulares son laplacianos de las componentes rectangulares del vector original. En cualquier otro sistema coordenado que no sea rectangular, el laplaciano de un vector está *definido* por la ecuación anterior.

2.3. - ELECTROSTÁTICA

2.3.1. Carga Eléctrica " q "

Los focos generadores de campos electromagnéticos son cargas eléctricas y la intensidad de un campo en todo punto depende de la magnitud, posición, velocidad y aceleración de dichas cargas. Un campo electrostático puede considerarse como un caso especial de campo electromagnético cuyos focos generadores son estacionarios, de manera que solo necesitan considerarse la magnitud y la posición de las cargas. El estudio de este caso, relativamente sencillo, establece los fundamentos para resolver problemas del campo más general, electromagnético, variable en el tiempo. En lo que sigue se supone al lector con los conocimientos básicos sobre electrostática y con algún conocimiento general de los hechos experimentales con su interpretación teórica. La finalidad de esta unidad es la de revisar brevemente este tema, no siendo en sí mismo un estudio, sino más bien una introducción al campo electromagnético.

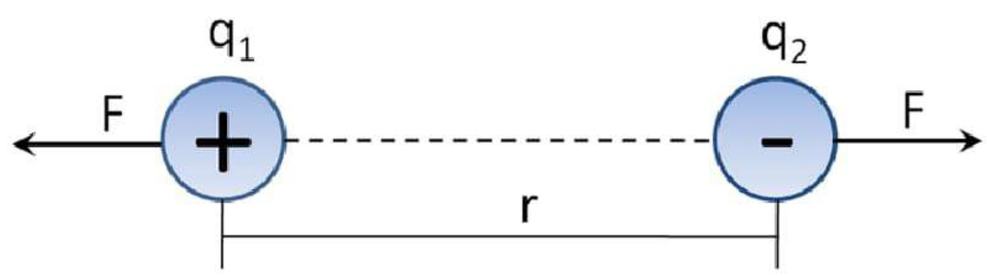
La carga eléctrica solamente existe en múltiplos enteros positivos o negativos de la magnitud de la carga eléctrica e = $1{,}60 \times 10^{-19}$ C.

Las distribuciones reales de cargas consisten en agregaciones de partículas discretas o corpúsculos. Sin embargo, como habrá siempre un número enorme de estas partículas microscópicas en un elemento *macroscópico* de volumen ΔV, es permisible hablar de densidad volumétrica de carga ρ en donde $\rho = \Delta q / \Delta V$ es la carga por unidad en el volumen elemental ΔV. Así se entenderá por "densidad de carga en un punto" la carga por unidad de volumen en el volumen elemental ΔV que contiene al punto. Aunque ΔV puede ser muy pequeño, siempre es grande para contener muchas cargas.

$$q = \int \rho . dv \left[Coulomb \right]$$

2.3.2. Fuerza Eléctrica " F " (*Ley de Coulomb*)

Se ha encontrado experimentalmente que existe una fuerza entre dos cuerpos cargados que tiende a separarlos o aproximarlos, que depende de que las cargas de dichos cuerpos sean de igual u opuesto signo. Si los dos cuerpos son esferas cuyos radios son muy pequeños comparados con su separación y si las esferas están suficientemente remotas a superficies conductoras o de otros medios dieléctricos (de un modo más técnico si las esferas inmersas en un medio aislante infinito), la magnitud de la fuerza entre dichos cuerpos debida a sus cargas obedece en este caso a una ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.



Es decir, $$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_1 . q_2}{r^2} [Newton] \qquad [2\text{-}54]$$

en donde q_1 es la carga neta de una esfera y q_2 la de la otra. **Esta expresión es la ley de Coulomb**.

La "constante" ε depende del medio o dieléctrico en el que están inmersas las cargas. Se denomina *constante dieléctrica* o *permitividad* del medio. En el espacio libre, es decir, para el vacío, y de un modo muy aproximado para el aire, el valor de ε es

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right] \qquad [2\text{-}55]$$

De un modo muy aproximado (la misma aproximación que se hace cuando se toma la velocidad de la luz como ($c = 3.10^8$ [m/s]) el valor de ε_v está dado por:

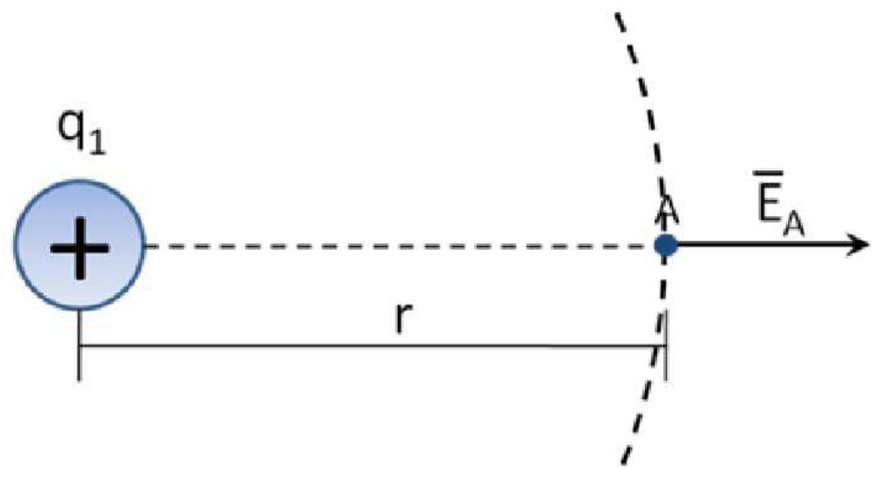
$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36.\pi.10^9} \left[\frac{F}{m} \right] \qquad [2\text{-}56]$$

El subíndice o indica que ε es la constante dieléctrica del vacío o espacio libre. Para otros medios el valor de ε será diferente. Algunas veces se expresa ε_r constante dieléctrica relativa, siendo el valor de la constante dieléctrica del medio $\varepsilon_m = \varepsilon_r . \varepsilon_0$.

La dirección de la fuerza es a lo largo de la línea que une geométricamente dichas dos cargas.

2.3.3. Intensidad del campo eléctrico " E "

Si se sitúa una pequeña carga-sonda Δq en un punto A próximo a una segunda carga fija q_1, la sonda sufre una fuerza cuya magnitud y dirección depende de su posición respecto a la carga q_1. Es más útil, imaginar que cada uno de los cuerpos cargados modifica las propiedades del espacio que lo rodea con su sola presencia. Supongamos, que solamente está presente la carga q_1, después de haber retirado la carga Δq del punto A. Se dice que alrededor de la carga q_1 hay un campo eléctrico de intensidad E_A, midiéndose la magnitud de E_A simplemente como la *fuerza por unidad de carga situada* en tal punto. La dirección de E_A es la dirección de la fuerza sobre una carga-sonda positiva que es radial y saliente de la carga (positiva) q_1.



De la ecuación de la ley de Coulomb la magnitud de la fuerza sobre Δq será:

$$\Delta F = \frac{q.\Delta q}{4.\pi.\varepsilon.r^2} \qquad [2\text{-}57]$$

y la magnitud de la intensidad de campo eléctrico es:

$$E = \frac{\Delta F}{\Delta q} = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon.r^2}\left[\frac{Newton}{Coulomb}\right] \qquad [2\text{-}58]$$

La fuerza sobre la carga-sonda depende de la carga de la sonda, pero no la intensidad del campo eléctrico. Si se permite que la carga de la sonda tienda a cero, también tiende a cero la fuerza, pero la *fuerza por unidad de carga* sigue siendo constante; es decir, se considera la existencia de un campo eléctrico producido por la carga q, exista o no una sonda cargada en su presencia.

La dirección, así como la magnitud del campo eléctrico alrededor de una carga puntual, se indica escribiendo la relación vectorial

$$E = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon.r^2}\hat{r}\left[V/m\right] \qquad [2\text{-}59]$$

en la que $\hat{r}$ es un vector unitario a lo largo de la dirección radial saliente de la carga q.

Análisis de magnitudes

$$E = \frac{Newton}{Coulomb} = \frac{\frac{Voltio.Coulomb}{metro}}{Coulomb} = \frac{Voltio}{metro} \qquad [2\text{-}60]$$

2.3.4. Desplazamiento eléctrico " Ψ " y densidad de desplazamiento eléctrico " D "

Se ve en la ecuación de **E** que en un punto particular la intensidad del campo eléctrico E depende no sólo de la magnitud y posición de la carga q, sino también de la constante dieléctrica del medio (aire, aceite, etc.) en el que se mide el campo. Es deseable asociar con la carga q una segunda cantidad eléctrica que sea *independiente del medio*. Esta segunda cantidad se llama *desplazamiento eléctrico* o *flujo*

eléctrico y se designa por el símbolo Ψ. Puede conocerse el significado del desplazamiento eléctrico recordando los experimentos de Faraday con esferas concéntricas. Una esfera con una carga Q se colocó dentro, pero sin tocar a otra esfera mayor, hueca. La esfera exterior fue puesta a tierra momentáneamente y entonces se quitó la esfera interior. La carga que quedó en la esfera exterior se midió, encontrándose que era igual (y de signo opuesto) a la carga de la esfera interior *para todo tamaño de las esferas y para todo tipo de medio dieléctrico* existente entre ellas. Así podía considerarse que hubo un *desplazamiento eléctrico* de la carga de la esfera interior a través del medio a la esfera exterior, dependiendo el valor de este desplazamiento sólo de la carga Q. En el sistema MKS el desplazamiento Ψ es igual en magnitud a la carga que lo produce, es decir,

$$\psi = Q\ [Coulomb] \qquad [2\text{-}61]$$

En el caso de una carga puntual aislada q, alejada de otros cuerpos, se supone que está rodeado por otra esfera de radio infinito. El desplazamiento eléctrico por unidad de área o *densidad* D de *desplazamiento eléctrico* en un punto de una superficie esférica de radio r centrada en la carga aislada q será

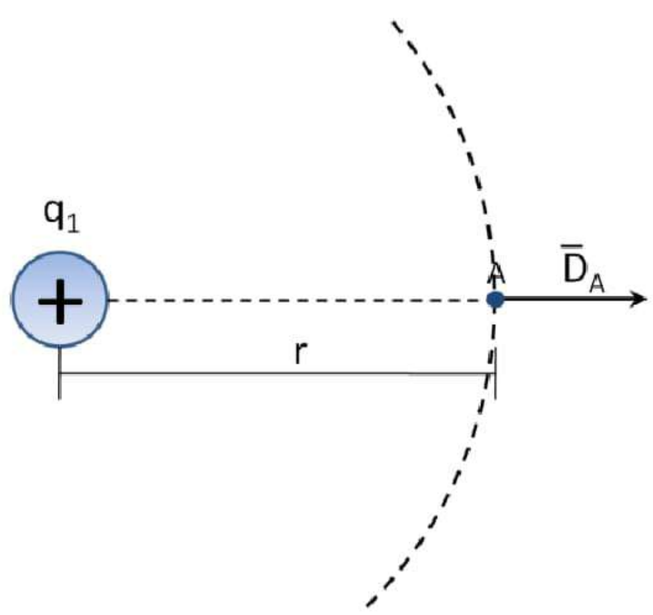
$$D = \frac{\Psi}{4.\pi.r^2} = \frac{q}{4.\pi.r^2}\left[Coulomb/m^2\right] \qquad [2\text{-}62]$$

El desplazamiento por unidad de área en cualquier punto depende de la dirección del área. La densidad D de desplazamiento es, por tanto, una cantidad vectorial, tomándose como su dirección de la normal al elemento de superficie que haga máximo el desplazamiento del área. En el caso de un desplazamiento de una carga aislada esta dirección es radial desde la carga, y es la misma que la dirección de E. Por tanto, la relación vectorial de D es:

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi\ r^2}\ \hat{r} \qquad [2\text{-}63]$$

Comparando las ecuaciones anteriores se ve que D y E están relacionadas por la relación vectorial.

$$\mathbf{D} = \varepsilon E \qquad [2\text{-}64]$$



Esta es, en general, cierta para todo medio *isótropo*. En ciertos medios cristalinos, la constante dieléctrica ε es diferente para direcciones distintas del campo dieléctrico, y tales medios D y E tendrán, en general, direcciones diferentes. Tales sustancias se dicen ser anisótropas. En general se considerarán solamente *medios homogéneos e isótropos*. En ellos ε es constante, es decir, independientemente de la posición (homogeneidad) e independiente de la magnitud y dirección del campo eléctrico (isótropo). Los medios anisótropos se discutirán más adelante en relación con la propagación de ondas radioeléctricas en la ionósfera.

Es posible medir la densidad de desplazamiento en un punto por el procedimiento experimental siguiente: Se ponen en contacto dos pequeños discos muy delgados, juntos, en el punto en que deben

medirse D. Se separan y a continuación se quitan del campo midiéndose la carga que tienen. La carga por unidad de área es una medida directa de la componente de D en la dirección de la normal a los discos. Si el experimento se realiza para todas las orientaciones posibles de los discos en el punto en cuestión, la dirección (la normal a los discos) que dé la máxima carga a los discos es la dirección de D en tal punto y su valor máximo de carga por unidad de área es la magnitud de D.

2.3.5. Líneas de fuerza y líneas de flujo

Línea de fuerza eléctrica:

1) En un campo es la curva dibujada tal que en cada uno de sus puntos tiene la misma dirección que el campo eléctrico **E**.
2) El número de líneas por unidad de área se hace proporcional a la magnitud de la intensidad del campo eléctrico *E*.

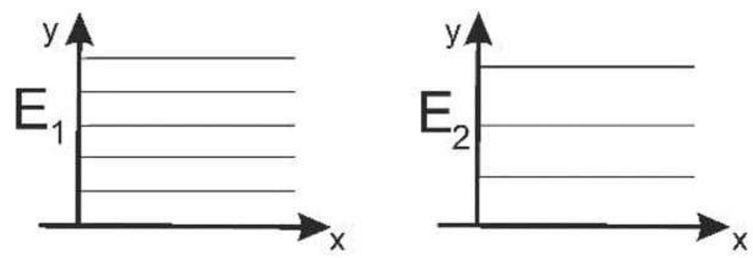
Línea de flujo eléctrico:

1) Es una curva trazada de modo que en cada uno de sus puntos tiene la misma dirección de la densidad de flujo eléctrico o densidad de desplazamiento **D**.
2) El número de líneas de flujo por unidad de área se emplea para indicar la magnitud de la densidad de desplazamiento, D. A mayor magnitud corresponde mayor densidad.

En medios isótropos homogéneos las líneas de fuerza y las de flujo siempre tiene la misma dirección.

$E_1 = K_1 . \widehat{a_x}$ ⟶

$E_2 = K_2 . \widehat{a_x}$ ⟶



La constante K_1 es mayor que la constante K_2, de allí que las líneas en E_1 tienen mayor densidad.

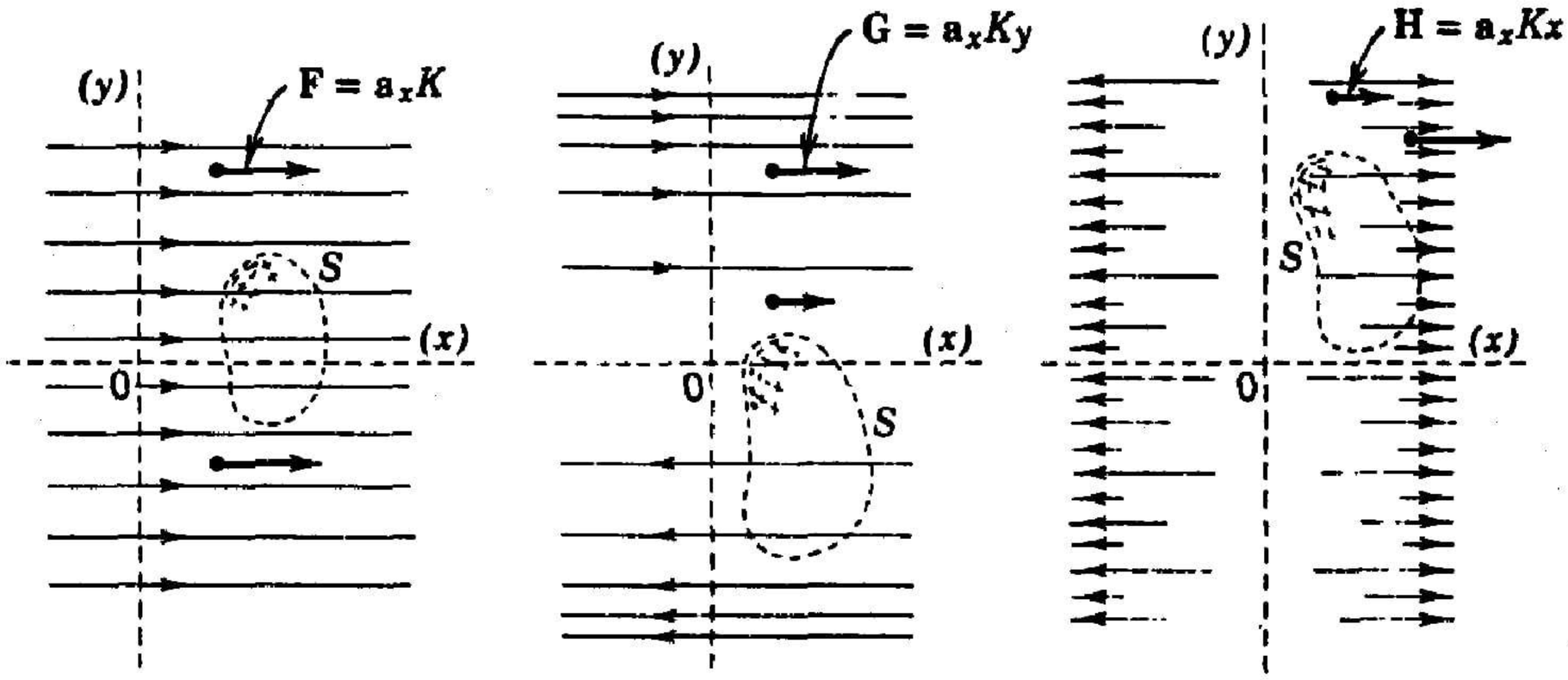


FIGURA 2-20

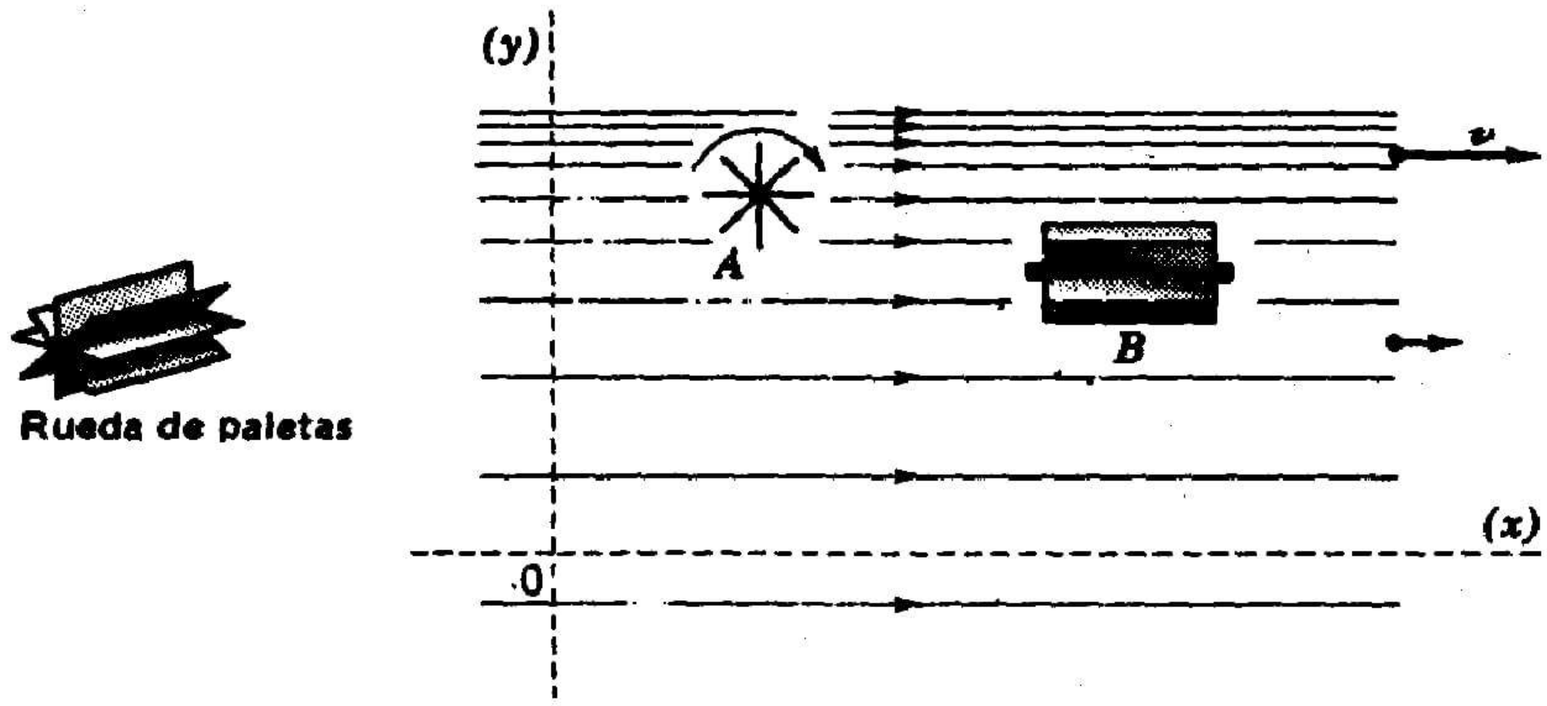


FIGURA 2-21

2.3.6. Ley de Gauss

La ley de Gauss establece que el desplazamiento o flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada que rodee a cargas, es igual al valor de dichas cargas eléctricas encerradas. Esta puede considerarse como una generalización de una ley experimental básica (recuérdese los experimentos de Faraday), o puede deducirse de la ley de Coulomb y de la relación D = εE (empleada ahora para definir D).

$$\oint \mathrm{D.\,da.\cos\theta} = q\ [Coulomb] \qquad [2\text{-}65]$$

en donde θ es el ángulo entre **D** y la normal a *da*. De la figura se ve que $da.cos\theta$ es la proyección de la normal de *da* al radio vector. La expresión integral de la ley de Gauss para campos eléctricos estáticos queda:

$$\boxed{\oint \mathrm{D.\,ds} = Q \qquad [2\text{-}66]}$$

Considérese una carga puntual *q* situada en un medio isótropo y homogéneo cuya constante dieléctrica es ε . La intensidad del campo eléctrico en cualquier punto a la distancia *r* de la carga *q* será

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad [2\text{-}67]$$

y la densidad de desplazamiento o densidad de flujo eléctrico en el mismo punto será

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad [2\text{-}68]$$

El área de la esfera es $4.\pi.r^2$ por lo tanto:

$$q = \oint \boldsymbol{D.da} \qquad [2\text{-}69]$$

$$q = \int \rho . dv \quad [2\text{-}70]$$

Si consideramos ahora el desplazamiento a través de cierta superficie que rodee a la carga: +q ; -q y a un dipolo el desplazamiento o flujo eléctrico a través del elemento *da* de superficie es

$$d\psi = D\ da\ \cos\theta \qquad [2\text{-}71]$$

El desplazamiento total a través de la superficie se obtiene integrando la ecuación (2-65) a lo ancho de toda la superficie

$$\psi = \oint \boldsymbol{D}.\boldsymbol{da}.cos\theta \qquad [2\text{-}72]$$

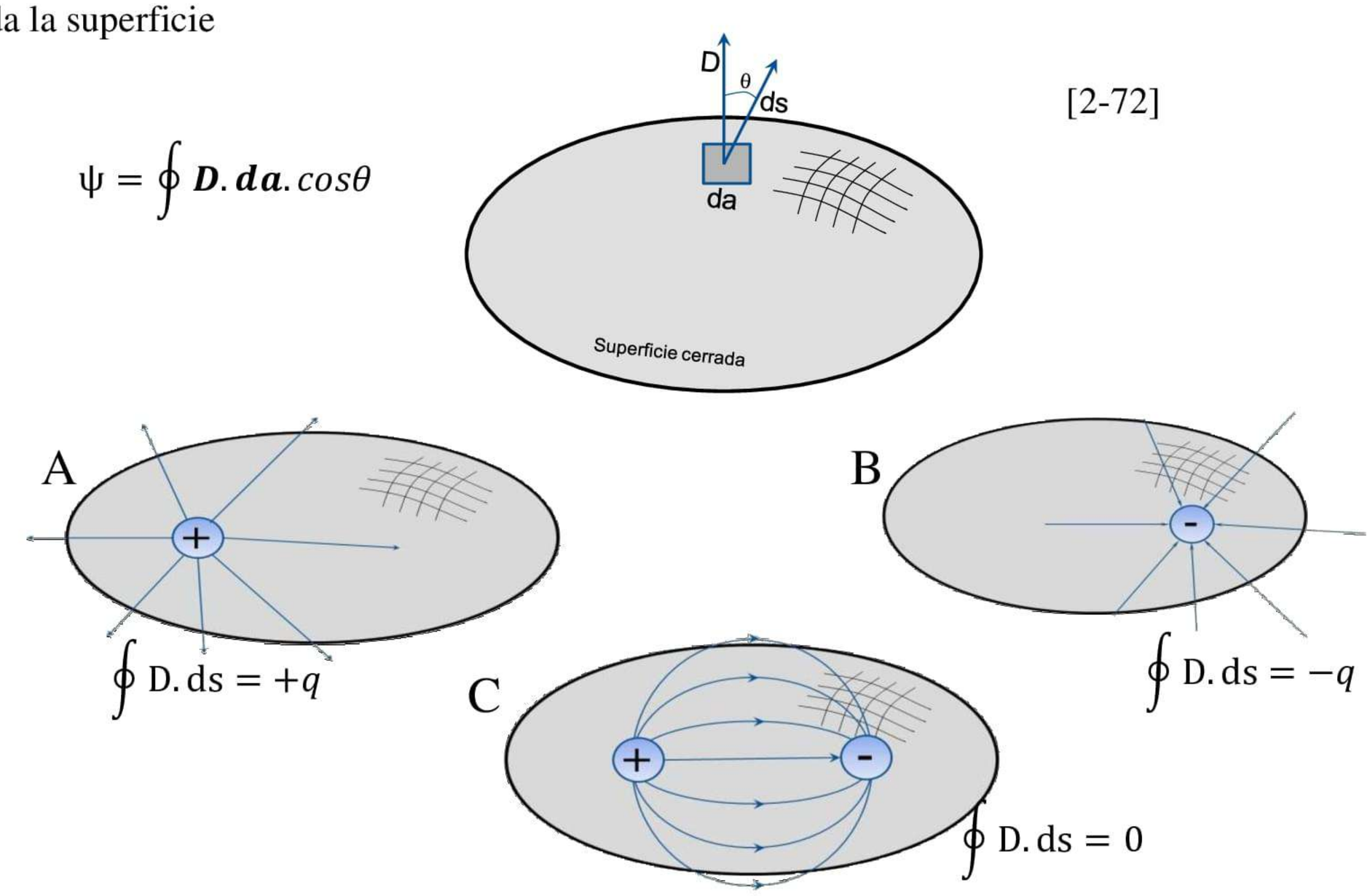


FIGURA 2-22: Flujo a través de una superficie cerrada.

A: alrededor de una carga +q ; B: alrededor de una carga –q ; C: alrededor de un Dipolo.

Si hubiera un número de cargas dentro del volumen encerrado por la superficie, el desplazamiento total a través de tal superficie sería igual a la suma de todas las cargas encerradas. Si la carga está distribuida de un modo continuo en todo el volumen con una densidad de carga ρ (culombios por metro cúbico), el desplazamiento total a través de la superficie es

$$\psi = \int_V \rho\ dV \qquad [2\text{-}73]$$

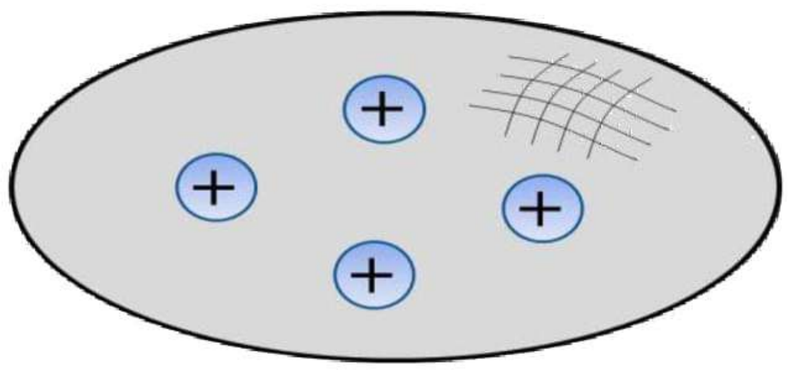


FIGURA 2-23: Cargas dentro de un volumen cerrado

$$\oint \mathrm{D.ds} = q = \int \rho . dv \qquad [2\text{-}74]$$

En donde el segundo miembro representa la carga total contenida en el volumen *V*.

Es a menudo deseable establecer las relaciones anteriores en su forma vectorial. Por definición de producto escalar, la expresión D*ds*cosθ en la ecuación anterior puede escribirse D .*ds*. En este caso el elemento de área *ds* se considera como una cantidad vectorial que tiene una magnitud *ds* y una dirección normal a la superficie. Entonces la ecuación de la ley de Gauss podría escribirse

$$\psi = \oint \boldsymbol{D.ds} \qquad [2\text{-}75]$$

O sea, ***el desplazamiento neto saliente o flujo eléctrico neto saliente*** a través de una superficie cerrada es igual a la carga contenida en el volumen que cubre la superficie cerrada. Cuando ds es una parte de una superficie *cerrada*, como ocurre aquí, la dirección de la normal saliente se toma como positiva.

Partiendo de la siguiente expresión

$$\oint \boldsymbol{D.ds} = \int \boldsymbol{\rho\, dv} \qquad [2\text{-}76]$$

Aplicando el teorema de la Divergencia

$$\oint_S \boldsymbol{D.ds} = \int_v \boldsymbol{\nabla.D\, dv} \qquad [2\text{-}77]$$

$$\int_v \boldsymbol{\nabla.D\, dv} = \int_v \boldsymbol{\rho\, dv} \qquad [2\text{-}78]$$

por lo tanto

$$\boxed{\nabla D = \rho \qquad [2\text{-}79]}$$

que es la **forma vectorial de la ley de Gauss, solo aplicable a medios continuos**. Esta relación establece que en todo punto de un medio la *divergencia* de la densidad de desplazamiento eléctrico es igual a la densidad de carga. Recordando la interpretación física de la expresión divergencia, si no hay una carga neta en el interior de la superficie cerrada no hay variación de flujo. Para que haya divergencia el volumen debe contener generadores (cargas) o sumideros (consumo).

2.3.7. Potencial eléctrico (V)

El trabajo que realiza una fuerza eléctrica para mover un cuerpo cargado desde una posición A hasta otra B, únicamente depende de dichas posiciones y no del camino seguido para llegar de A a B. Si no hay mecanismo en el que pueda disiparse la energía representada por tal trabajo, entonces el campo se dice que es *conservativo* y la energía debe almacenarse en forma ya sea cinética o potencial. Si la carga es movida en un campo electrostático o si una masa se mueve en un campo gravitatorio y no hay fricción alguna en la región, no se disparará entonces energía. Por tanto, estos casos son dos ejemplos de campos conservativos.

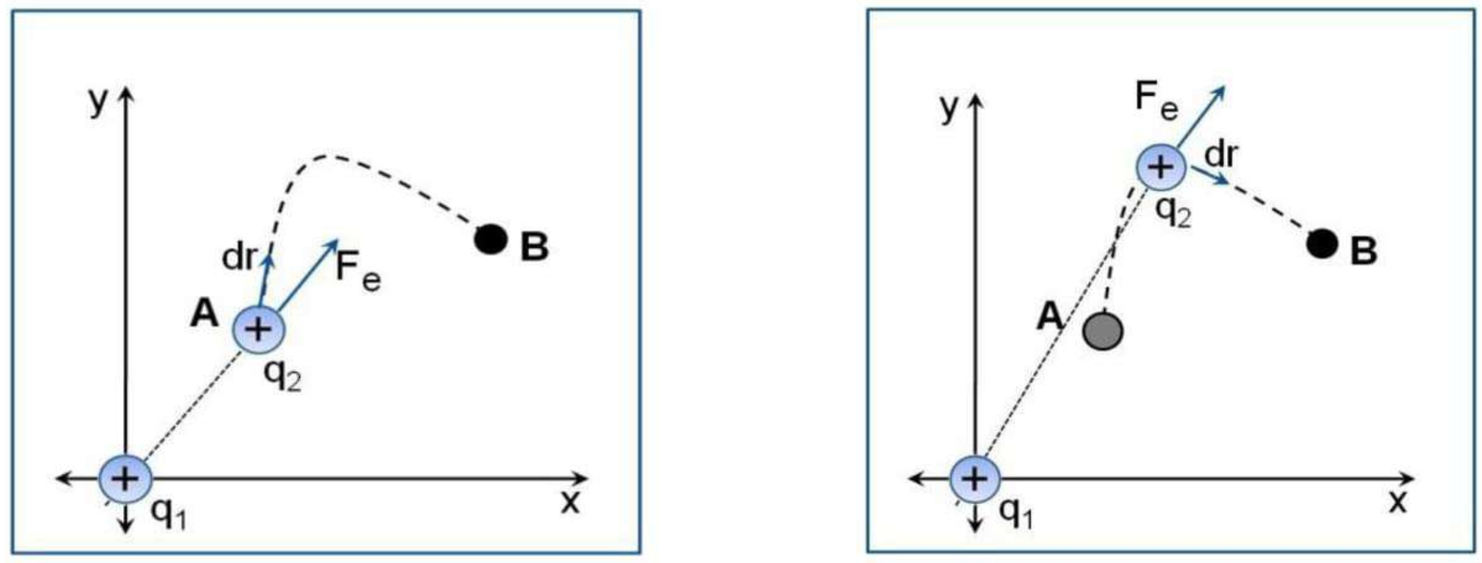


FIGURA 2-24: La carga q_1 está fija y movemos la carga q_2 desde A hasta B

Aunque en la figura aparece una trayectoria, el trabajo eléctrico será siempre el mismo independientemente del camino escogido entre ambos puntos, entonces el trabajo realizado sobre el sistema para mover la carga de prueba (suponiendo fuera negativa) venciendo la fuerza F será:

$$Trabajo = -\int_A^B \overline{F}.dr \qquad [2\text{-}80]$$

Se realiza trabajo contra la fuerza eléctrica

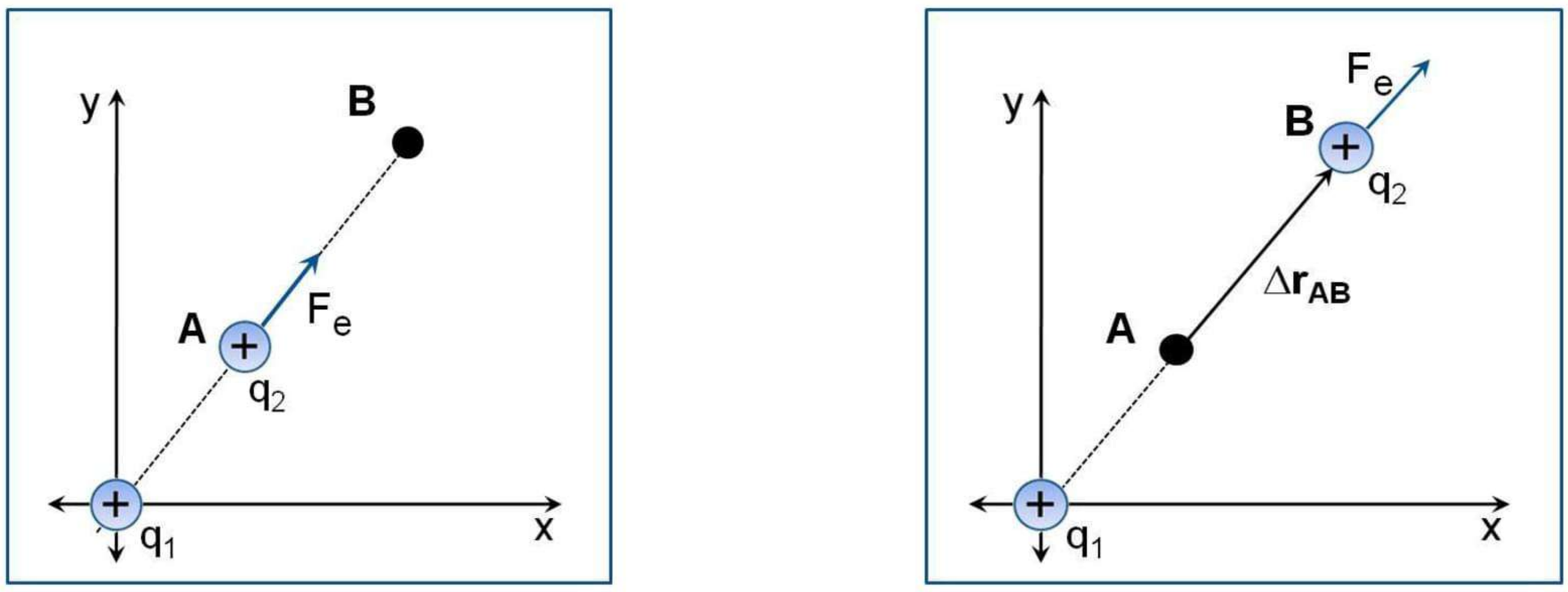


FIGURA 2-25: La carga q_2 se mueve en línea recta desde A hasta B

y como

$$\Delta F = \frac{q.\Delta q}{4.\pi.\varepsilon.r^2} \qquad [2\text{-}81]$$

El trabajo sobre la carga de prueba que traemos desde el infinito y la ponemos a una distancia R es

$$-\frac{q.\Delta q}{4.\pi.\varepsilon.}\int_{\infty}^{R}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{q.\Delta q}{4.\pi.\varepsilon.R} \qquad [2\text{-}82]$$

Resolución de la integral

$$\int_{\infty}^{R} \frac{1}{r^2}\, dr = \int_{\infty}^{R} r^{-2} = -\, r^{-1}\Big|_{\infty}^{R} = -\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{R} = -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right) = -\frac{1}{R} - 0 = -\frac{1}{R}$$

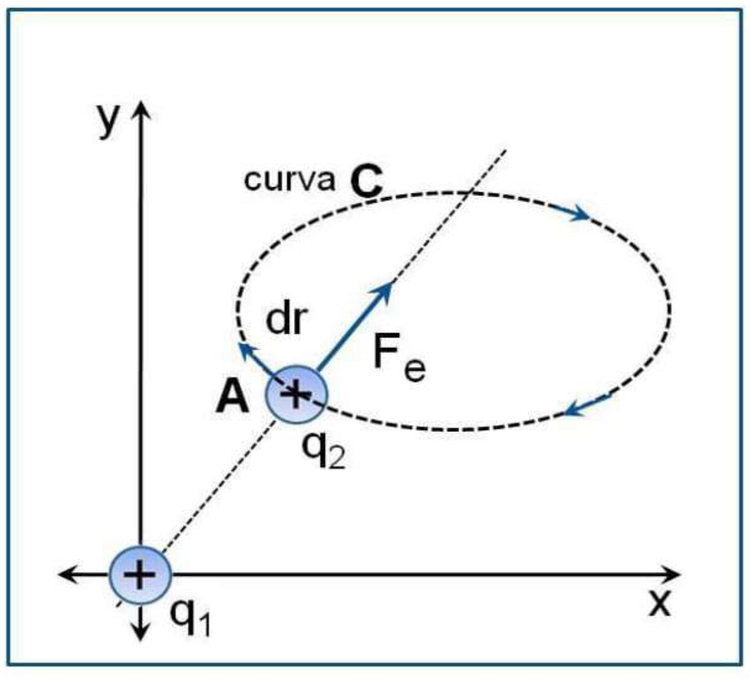
El trabajo realizado sobre la carga de prueba por unidad de carga es lo que denominamos Potencial Eléctrico V:

$$V = \frac{Trabajo}{q} = \frac{F.r}{q} = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon.R}\,[Voltio] \qquad [2\text{-}83]$$

V es el potencial eléctrico en el punto p debido a la carga q. Como es una cantidad escalar, teniendo sólo magnitud y no dirección, es a menudo, llamado *potencial escalar*.

En electrostática las expresiones de potencial o diferencia de potencial y voltaje se usan discriminadamente. En los campos electromagnéticos variables en el tiempo, el potencial, tal como se ha definido no tiene significado. Sin embargo, el voltaje entre los puntos A y B, definido por

$$V_B - V_A = \int_A^B \overline{E}.\,dr \qquad [2\text{-}84]$$



En un campo *conservativo*, el trabajo realizado al mover un cuerpo de un punto a otro es independiente de la trayectoria seguida. El potencial se mide en voltios, en donde 1 voltio = 1 julio por culombio.

Cuando el camino que sigue el cuerpo entre A y B es un camino cerrado o un ciclo, es decir que sale de un punto A y vuelve al mismo punto, el trabajo eléctrico es nulo.

FIGURA 2-26 : la carga parte de un punto A, se mueve por un camino cerrado C y vuelve al mismo punto de partida.

Ecuación integral del trabajo eléctrico en un camino cerrado

$$\boldsymbol{\oint_c \overline{E}\,.\,dr = 0} \qquad [2\text{-}85]$$

Si analizamos los valores del potencial en cada punto obtenemos que la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto es precisamente igual al valor negativo del gradiente del potencial en tal punto.

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad [2\text{-}86]$$

La dirección del campo eléctrico es la dirección en la que el gradiente es mayor o en la que el potencial cambia más rápidamente.

Cuando el sistema de cargas está especificado y el problema es el de determinar el campo eléctrico resultante debido a ellas, es a menudo más fácil encontrar primeramente el campo de potencial y determinar entonces **E** como gradiente del potencial según [2-86]. Ello se debe a que la intensidad del campo eléctrico es una cantidad vectorial, y cuando se encuentra directamente el campo eléctrico producido por varias cargas, la suma de los campos es una suma vectorial. Esta operación, relativamente complicada, se realiza generalmente resolviendo cada cantidad vectorial en tres componentes, sumando estos componentes separadamente y combinando entonces los valores de las componentes para obtener el campo resultante. Por otra parte, el campo potencial es de naturaleza escalar y el potencial total en un punto se encuentra simplemente como suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

En un problema sencillo puede haber muy poca ventaja, si existe, empleando el método del potencial, pero en los problemas más complicados se encontrará con que el empleo del potencial escalar da lugar a importantes simplificaciones.

Si aplicamos el **teorema de Stokes** a la ecuación de trabajo en un camino cerrado:

$$\oint_c \bar{E} \,.\, dr = \int \nabla \mathrm{x} \bar{E} \,.\, da = 0 \qquad [2\text{-}87]$$

por lo tanto obtenemos que el campo eléctrico estático E es irrotacional. La ecuación vectorial queda expresada como:

$$\boxed{\nabla \mathrm{x} \bar{E} = 0 \qquad [2\text{-}88]}$$

Ejemplo 1: Campo de un dipolo eléctrico infinitesimal

El concepto de *dipolo eléctrico* es extremadamente útil en la teoría del campo electromagnético. Dos cargas iguales y de signo opuesto de magnitud q separadas una distancia infinitesimal l constituyen lo que se denomina un dipolo eléctrico. El campo eléctrico debido a tal disposición puede hallarse fácilmente encontrando en primer lugar el potencial V en el punto P. En la figura 2-23.

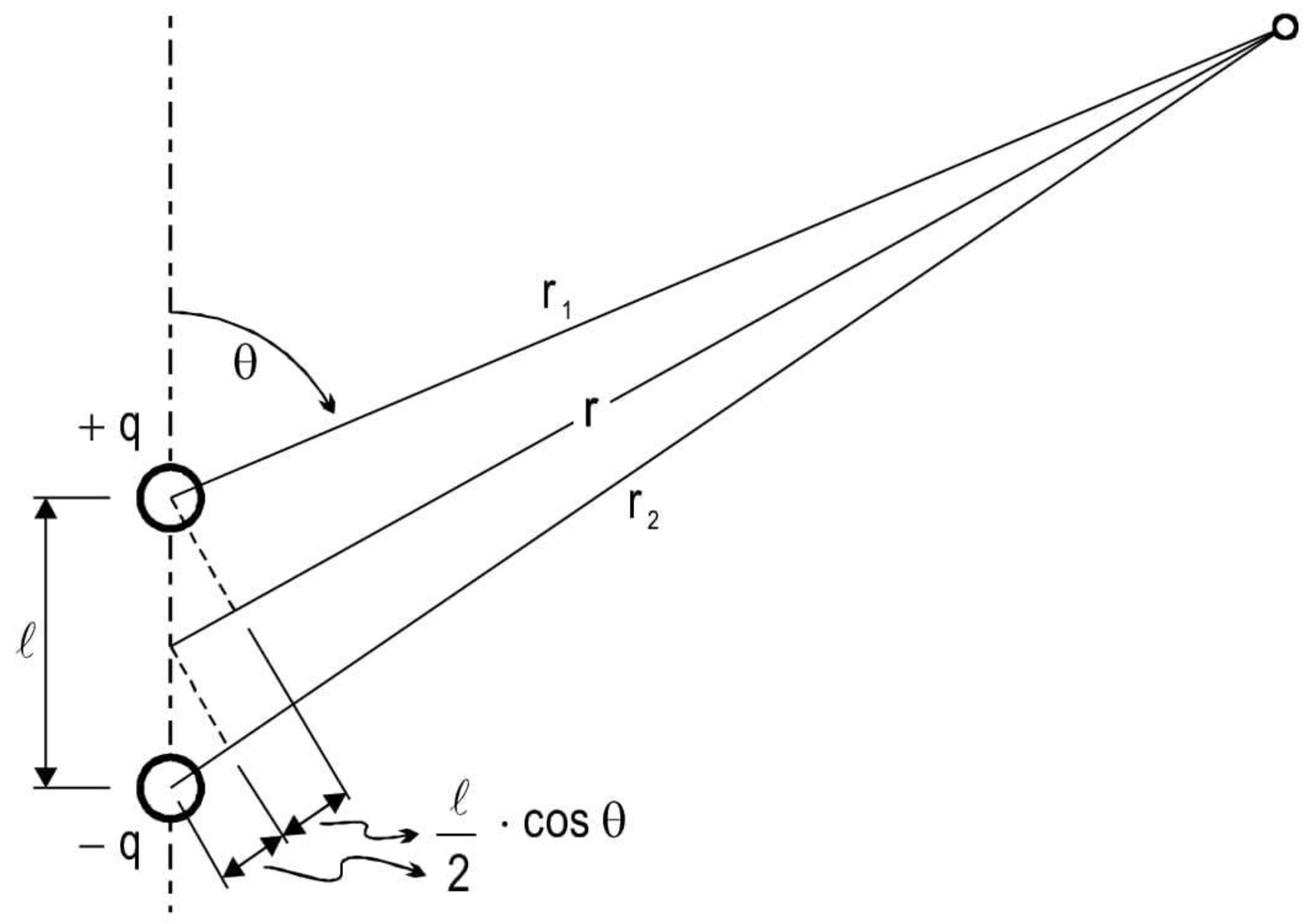


FIGURA 2-23: Dipolo eléctrico infinitesimal

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{-q}{r_2}\right)$$

como l es infinitamente pequeño

$$r_1 \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$r_2 \approx r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$4\pi\varepsilon V = \frac{q}{r - \frac{l}{2}\cos\theta} - \frac{q}{r + \frac{l}{2}\cos\theta} = \frac{q\,l\cos\theta}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\theta} \approx \frac{q\,l\cos\theta}{r^2} \qquad (para\ l^2 \ll r^2)$$

$$V = \frac{q\,l\cos\theta}{4\pi\varepsilon\,r^2}$$

Se encuentra el campo eléctrico de $\mathbf{E} = -\nabla V$. Las tres componentes en coordenadas esféricas son

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\,q\,l\cos\theta}{4\pi\varepsilon\,r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{r\,\partial\theta} = \frac{q\,l\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon\,r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\cdot\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

Estas ecuaciones se usarán también en el capítulo Radiación y se denominarán términos electrostáticos

2.3.8. Campo debido a una distribución continua de carga

El potencial en un punto *p* debido a un número de cargas se obtiene con una simple adición algébrica o *superposición* de potenciales producidos en el punto por cada una de las cargas actuando aisladamente. Si $q_1, q_2, q_3, ..., q_n$ son cargas situadas a las distancias $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$ respectivamente, del punto p potencial en p está dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + ... + \frac{q_n}{R_n}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{i\ n}\frac{q_i}{R_i} \qquad [2\text{-}89]$$

Si la carga está distribuida continuamente por la región, más que estando situada en un número discreto de puntos, la región puede dividirse en elementos de volumen ΔV, conteniendo cada uno de ellos una carga $\rho\Delta V$, siendo ρ la *densidad de carga* en el elemento de volumen. El potencial en el punto *p* estará, como antes, dada por

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{i\ n}\frac{\rho_i\,\Delta V_i}{R_i} \qquad [2\text{-}90]$$

Siendo R_i la distancia a *p* desde el elemento de volumen *i-ésimo*. Cuando se reduce el tamaño del elemento de volumen hasta valores pequeñísimos la suma se convierte en integración, es decir,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\ dV}{R} \qquad [2\text{-}91]$$

Nos da el **potencial eléctrico *V* en función de la densidad volumétrica de carga** ρ**.**

2.3.9. Superficies equipotenciales

La resolución de muchos problemas sobre campos eléctricos queda muy simplificada haciendo uso de superficies equipotenciales. Una superficie equipotencial es aquella en la que el potencial es el mismo en todos sus puntos. El movimiento de una carga sobre la superficie equipotencial no requiere trabajo. Como cualquier par de puntos de la superficie tiene el mismo potencial, hay una diferencia de potencial cero, y por tanto un campo eléctrico cero en todo punto a lo largo (y tangencial a la superficie). Esto significa que el campo eléctrico debe ser siempre perpendicular a la superficie equipotencial.

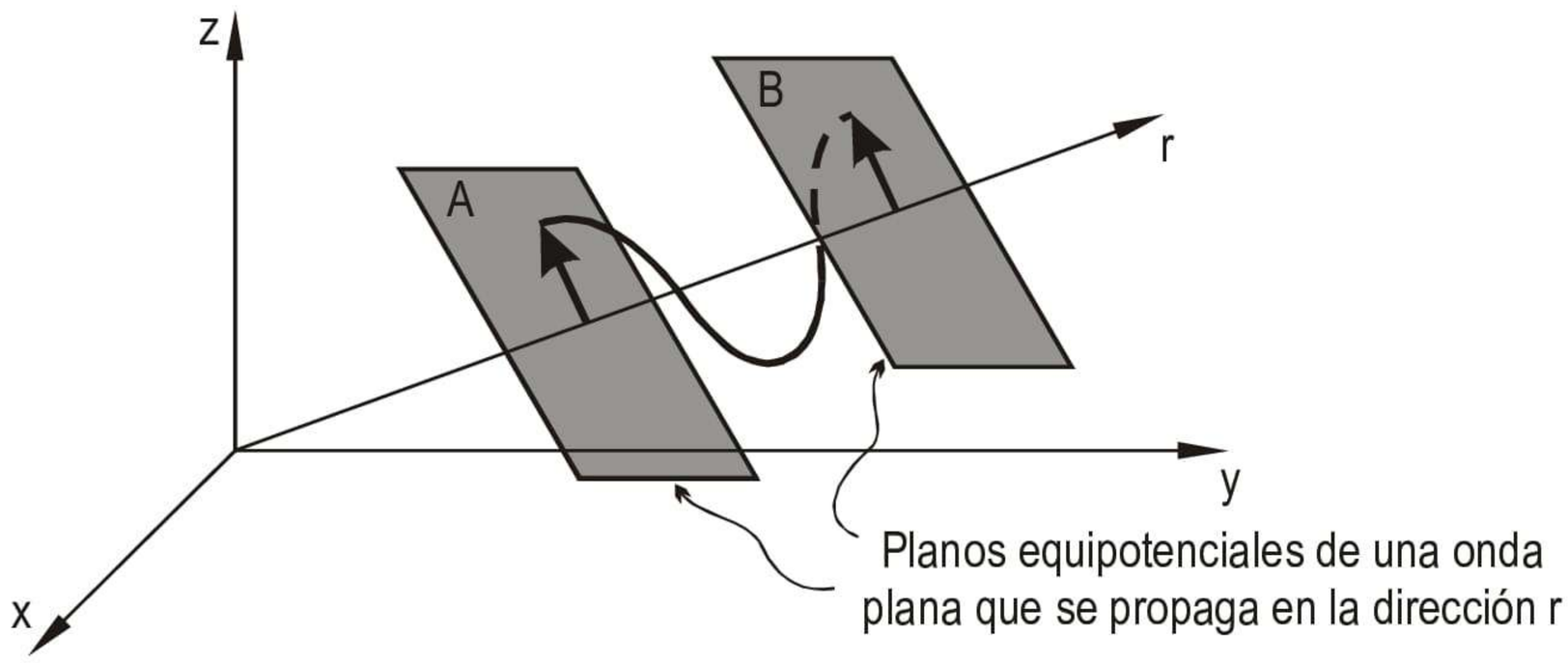


FIGURA 2-25 (a)

Un ejemplo muy simple de superficies equipotenciales se ofrece en el caso de una carga puntual. Como $V = q/4\pi r\varepsilon$, una superficie con una r fija tendrá potencial constante. Las superficies equipotenciales serán en este caso capas esféricas concéntricas.

La figura 2-25(b) muestra el trazado de algunas superficies equipotenciales que rodean a las cargas lineales paralelas. Se ve que para pequeños valores

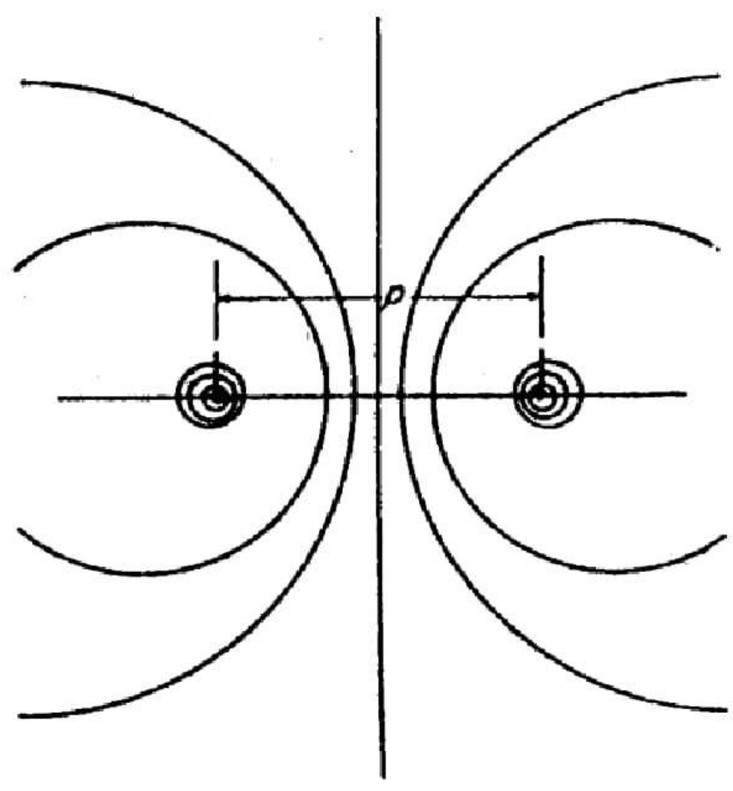


FIGURA 2-25 (b): Superficies equipotenciales alrededor de dos líneas paralelas cargadas

de los radios los cilindros equipotenciales alrededor de cada línea son casi concéntricos con la carga lineal.

Conductores

Un medio conductor es aquel en el que el campo eléctrico o diferencia de potencia está siempre acompañado por un movimiento de cargas. La teoría que explica este fenómeno es que un conductor contiene electrones libres o electrones de conducción que están relativamente libres de moverse a través de la estructura iónica cristalina del medio conductor. De ahí que en un conductor no pueda haber un campo eléctrico estático, porque cualquier campo eléctrico que estuviera originariamente presente produce una redistribución de cargas hasta que dicho campo se anula. Siendo cero el campo eléctrico dentro de un conductor, no hay diferencia de potencial entre cualquier par de puntos del

mismo. Por tanto, para los campos eléctricos la superficie de un conductor es siempre una superficie *equipotencial*.

De lo anterior resulta también que dentro de un conductor no puede haber una carga neta (carga positiva o negativa en exceso). Si hubiera una carga neta en cualquier punto interior de un conductor, entonces – y según la ley de Gauss – habría un desplazamiento saliente de dicha carga, y por tanto una densidad D de desplazamiento en el conductor. Como $E = D/\varepsilon$, esto requiere (para cualquier valor infinito de la constante eléctrica ε que haya un campo eléctrico E en el conductor. Pero esta posibilidad ya se ha desechado para el caso electrostático. Por tanto, la densidad ρ de carga (neta) debe ser cero en el interior del conductor, y esto da lugar a una componente del campo eléctrico, normal a la superficie, en el medio dieléctrico exterior al conductor. La intensidad de esta componente normal del campo eléctrico en función de la carga superficial se obtiene directamente de la ley de Gauss.

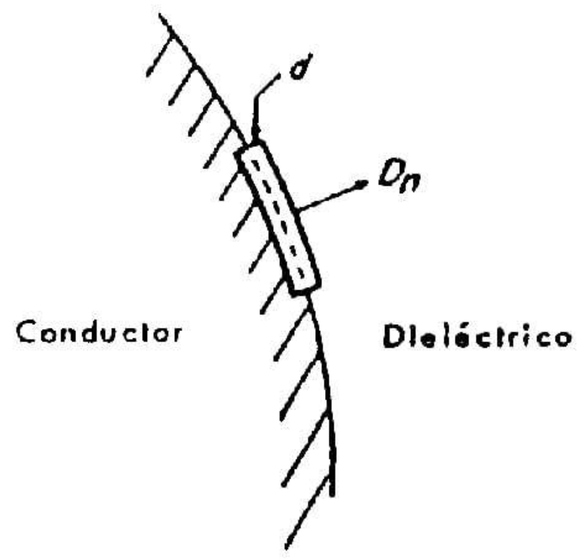


FIGURA 2-26: Superficie límite entre un conductor y un dieléctrico

2.3.10. Capacidad.

La capacidad entre dos conductores se define por la relación

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \left[\frac{Culombio}{Voltio}\right] = \left[Faradio\right] \qquad [2\text{-}92]$$

en donde V es el voltaje o diferencia de potencial entre los conductores debida a cargas iguales y opuestas sobre ellos de magnitud Q. La ley de Gauss puede emplearse para demostrar que la carga total en uno de los conductores es proporcional a la diferencia de potencial; por definición, C es la constante de proporcionalidad. Cuando se trate de la capacidad de un solo conductor se supone que el otro conductor es una capa esférica de radio infinito.

EJEMPLO 2: Condensador de placas paralelas.

Considérese el condensador formado por dos placas paralelas de área A y separación d (figura 2-27). (Se supone que d es muy pequeña comparada con la longitud y anchura de las placas, de manera que el efecto del flujo en los cantos pueda despreciarse). Si las placas tienen una carga Q, la densidad de carga superficial será

$$\rho_S = \frac{Q}{A} = \varepsilon\, E \qquad [2\text{-}93]$$

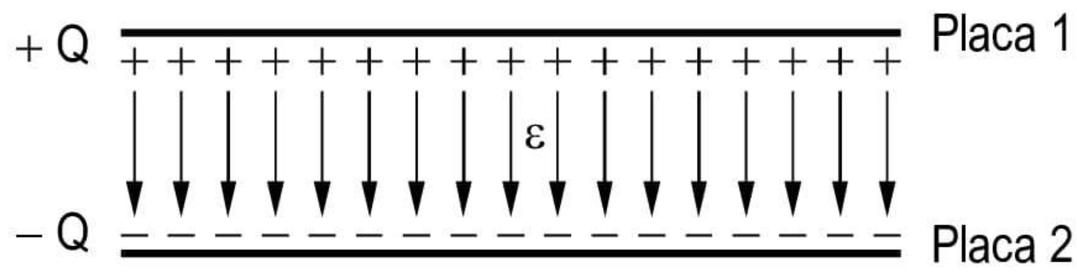


FIGURA 2-27: Condensador de planos paralelos

La intensidad de campo eléctrico E entre las placas es uniforme y de valor

$$E = \frac{\rho_S}{\varepsilon} \qquad [2\text{-}94]$$

siendo ε la constante dieléctrica del medio que hay entre las placas.

El voltaje entre las placas será

$$V = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E\, d \qquad [2\text{-}95]$$

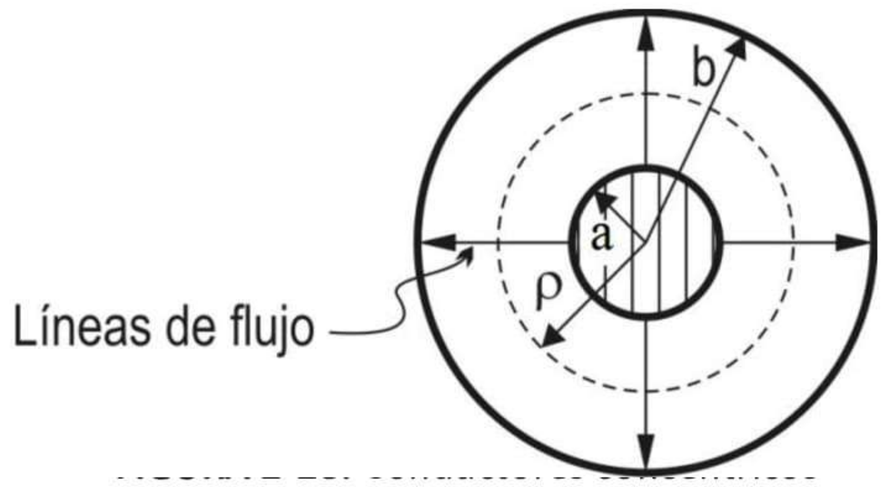
La capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{E\, d} = \frac{\varepsilon A}{d} \quad [Faradios] \qquad [2\text{-}96]$$

Por su utilidad ulterior se hallará la capacidad de otro caso simple.

EJEMPLO 3: Conductores concéntricos.

Se pide determinar la capacidad por unidad de longitud entre dos cilindros conductores concéntricos infinitamente largos (figura 2-28). El radio exterior del conductor interior es *a* y el radio interior del conductor exterior es *b*.



Se supone una distribución de cargas ρ_L columbios por metro en el conductor interior y otra igual y opuestas en el exterior.

Por simetría las líneas del flujo eléctrico serán radiales, y el desplazamiento a través de toda capa cilíndrica será ρ_L culombios por metro.

La capacidad por metro será

$$C = \frac{\rho_L \; r_1}{V} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} \quad \left[\frac{F}{m}\right] \qquad [2\text{-}97]$$

Para el aire como dieléctrico para el que $\varepsilon = \frac{1}{36\pi\times10^9}$

$$C = \frac{10^{-9}}{18\,\ln\frac{b}{a}} \quad \left[\frac{F}{m}\right] \qquad [2\text{-}98]$$

EJEMPLO 4: Conductores cilíndricos paralelos

El método de determinar el campo eléctrico para un par de cargas lineales apropiadamente situadas harán que las superficies ocupadas por los conductores sean equipotenciales (figura 2-29). Si el radio de los cilindros es *a* y la separación entre sus ejes es *b*, tendremos:

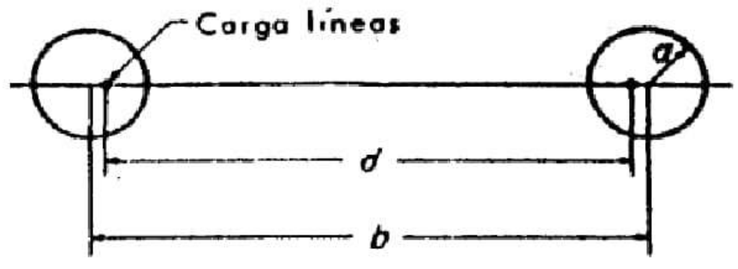


FIGURA 2-29: Conductores cilíndricos paralelos

Si b >> a la capacidad está dada con bastante precisión por

$$C \approx \frac{\pi\,\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} \quad \left[\frac{F}{m}\right] \qquad [2\text{-}99]$$

Para un dieléctrico de aire entre los conductores

$$C \approx \frac{10^{-9}}{36\;\ln\frac{b}{a}} \qquad [2\text{-}100]$$

2.3.11. Energía electrostática.

Cuando se carga un condensador de manera que exista un voltaje *V* entre sus placas, hay un almacenamiento de energía que puede convertirse en calor descargándolo en una resistencia.

El valor de la energía almacenada puede encontrarse calculando el trabajo realizado al cargar el condensador. Como se definió al potencial en función de trabajo por unidad de carga, el trabajo realizado en mover una pequeña carga *dq* contra la diferencia de potencial *V* es *V.dq*, pero como el voltaje puede expresarse en función de la capacidad *C* y de la carga *q* por

$$V = \frac{q}{C} \qquad [2\text{-}101]$$

El trabajo realizado en aumentar la carga de un condensador en el valor *dq* es

$$\frac{q}{C}\,dq \qquad [2\text{-}102]$$

El trabajo total hecho al cargar al condensador con *Q* culombios es

$$\text{Trabajo Total} = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} \qquad [2\text{-}103]$$

Por tanto la energía almacenada en un condensador cargado es

$$\text{Energía almacenada } W = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,V\,Q = \frac{1}{2}\,V^2\,C \;\; [Julio] \qquad [2\text{-}104]$$

Si consideramos un condensador de placas paralelas se vio que la capacidad es

$$C = \varepsilon.\frac{A}{d} \qquad [2\text{-}105]$$

y al reemplazar en la ecuación (2-105) obtenemos:

$$W = \frac{1}{2}C.V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon.A}{d}\right).V^2 \qquad [2\text{-}106]$$

y con el Potencial igual al campo eléctrico por distancia: V = E.d

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon.E^2.A.d \qquad [2\text{-}107]$$

Como el trabajo se realiza en contra del campo, se dice que la energía está almacenada en el campo eléctrico, y debido a que el volumen entre las placas es A.d, la energía por unidad de volumen o densidad de energía es:

$$\boxed{\omega_E = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,E^2 \;\; \left[\frac{Julio}{m^3}\right] \qquad [2\text{-}108]}$$

2.4. CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONARIO

Las cargas eléctricas en reposo producen un campo eléctrico, el campo electrostático. Las cargas eléctricas en movimiento, es decir, las corrientes eléctricas, producen un *campo magnético*. Esto se evidencia por el hecho de que en la región próxima al conductor de la corriente cada extremo de la aguja de una brújula sufre una fuerza que depende de la magnitud de la corriente. Se dice que hay un campo magnético alrededor del conductor, tomándose como dirección (y sentido) del campo magnético aquella en que es forzado el polo del extremo de la brújula que marca el norte.

La intensidad H del campo magnético se definió originalmente por Coulomb de una manera similar a la intensidad E del campo electrostático. Se definió en primer lugar la unidad de polo magnético en función de la fuerza por unidad de polo. En la teoría electromagnética son los campos magnéticos debidos a las corrientes eléctricas lo que importa, careciendo de importancia los efectos de los imanes permanentes. Por tanto, desecharemos el planeamiento anterior sustituyéndolo por otro que conduzca más directamente a la solución de los tipos de problemas que se encuentran en la ingeniería electromagnética.

2.4.1. Teorías sobre el campo magnético

Es posible desarrollar una teoría cuantitativa del campo magnético partiendo de distintos puntos de vista diferentes.

Los experimentos de Rowland mostraron que las cargas en movimiento producen estos efectos magnéticos. Por tanto, sería lógica una teoría basada sobre las fuerzas magnéticas entre cargas móviles individuales. En esta teoría los efectos de imanación permanente se asignan al movimiento de los electrones externos alrededor de los núcleos atómicos. Esta teoría se usa en la Física moderna, y puede desarrollarse para responder a la mayoría de los problemas que atañen al magnetismo. Tal primera aproximación es requerida siempre que sea necesario tratar con cargas individuales, pero en la mayoría de los problemas de ingeniería – en los que solo se consideran los efectos macroscópicos – tal procedimiento lleva consigo una complejidad innecesaria. El movimiento de un simple electrón en un conductor es errático y asunto muy difícil de predecir, sujeto a fuerzas que varían mucho en la pequeña longitud de una distancia interatómica.

En cambio, un estudiante inteligente no tiene dificultad en predecir con cierta precisión el movimiento estadístico de *medio* de millón de electrones con la simple aplicación de la ley de Ohm. En la mayoría de los problemas de ingeniería será el efecto magnético de las *corrientes* lo que tiene importancia, más bien que el movimiento de las cargas individuales, y sería razonable tomar como punto de partida el estudio de las fuerzas producidas por las corrientes. Los experimentos de Ampere sobre la fuerza existente entre los conductores de las corrientes son punto de arranque lógico para este desarrollo teórico, y conducen a definiciones completamente satisfactorias para la ingeniería, especialmente cuando el resultado final maneja fuerzas mecánicas. Sin embargo, en la teoría de las ondas electromagnéticas el interés principal se centra entre las relaciones existentes entre los campos eléctricos y magnéticos, resultando conveniente emplear un punto de arranque diferente. Este punto es la ley de inducción de Faraday, que relaciona el flujo magnético a través de una línea cerrada con el voltaje inducido a lo largo de tal línea. Esta relación, que define el flujo magnético en función de un voltaje eléctrico medible, es el punto de arranque que se empleará en esta discusión de los campos magnéticos.

Aún hay otro modo de atacar el problema de la teoría electromagnética, que es el de *postular* un potencial – vector debido a las corrientes y obtener de este el campo magnético. Este método del potencial – vector tiene la señalada ventaja de que puede extenderse al caso general en el que las corrientes varían con el tiempo – el campo electromagnético –, y en este último caso dará también directamente el campo eléctrico producido por las corrientes variables. En general, el uso del método del potencial – vector simplifica el análisis matemático y facilita la solución de los problemas electromagnéticos; por tanto, será usado y desarrollado este método. Sin embargo, en lugar de empezar con el potencial postulado deduciendo de él los campos eléctrico y magnético, se empleará el procedimiento inverso. Se definirán los vectores eléctricos y magnéticos en función de relaciones obtenidas con la experimentación, a menudo realizada en condiciones restringidas. Estas definiciones se generalizarán para emplearlas en el campo electromagnético y se encontrará en este proceso un potencial que dará los campos magnéticos y eléctricos. Pueden considerarse válidas las generalizaciones en tanto que las conclusiones que se deduzcan de ellas concuerden con el experimento subsiguiente.

Por último un método de aproximación a la teoría del campo magnético se logra aplicando una teoría especial de relatividad a un campo "electrostático", estando las cargas productoras de este campo en movimiento relativo respecto al observador. Por este procedimiento puede demostrarse que los efectos "magnéticos" se obtienen directamente de la ley de Coulomb y de la contracción de Lorentz aplicada a densidades móviles de carga, sin embargo, se cree que la mejor apreciación de la ventaja de este planteamiento se logrará una vez que el estudiante haya adquirido cierta familiaridad con las ecuaciones de Maxwell y la teoría básica del electromagnetismo. Por tanto, de momento, se estudia el campo magnético por medio de la ley de Faraday.

2.4.2. Inducción magnética y la ley de Faraday.

En el montaje experimental de la figura 2-34 se conecta un galvanómetro balístico a un bucle situado próximo a un conductor rectilíneo y largo por el que circula una corriente I .

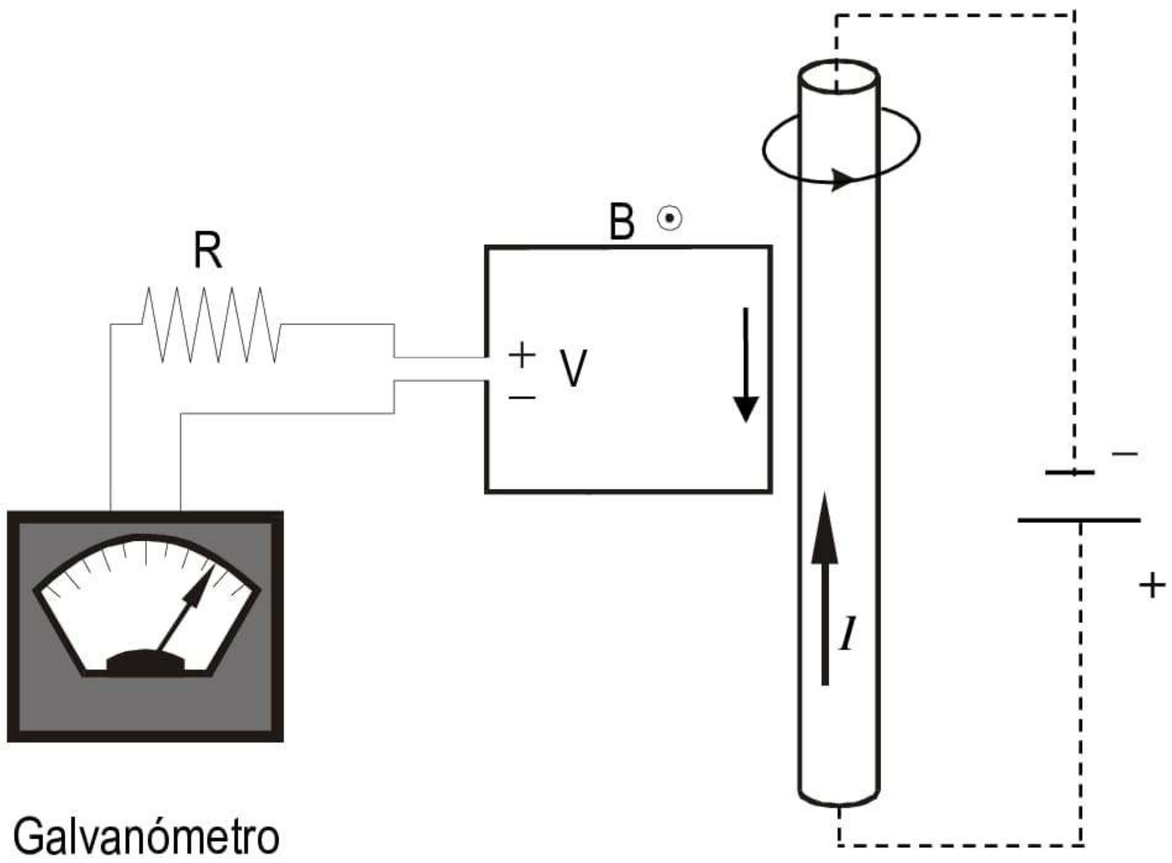


FIGURA 2-34: Medidas del flujo magnético

Sondeando con una aguja de una brújula se ve que hay un campo magnético alrededor del conductor. En la posición indicada del bucle la dirección (y sentido) del campo es saliendo del papel para una corriente I de abajo a arriba en el conductor. Si ahora se reduce la corriente I a cero se desvía la aguja del galvanómetro, siendo independiente el valor de la desviación de la rapidez de reducir la corriente

a cero, siempre que el tiempo requerido para ello haya sido corto respecto al período del galvanómetro.

La corriente I_g en el galvanómetro circula debido al voltaje V "inducido" en el bucle y viene dado por

$$I_g = \frac{V}{R} \qquad [2\text{-}109]$$

siendo R la resistencia total del circuito del galvanómetro (R es una resistencia muy grande). La desviación del galvanómetro es una medida de la carga Q o integral temporal de la corriente que le atraviesa; así,

$$Q = \int_0^I I_g \, dt = \frac{1}{R} \int_0^t V \, dt \qquad [2\text{-}110]$$

es una cantidad determinable experimentalmente. Se define como *flujo magnético* Φ a través del bucle como la integral temporal del voltaje inducido en el bucle durante todo el tiempo de establecimiento del campo magnético; o, estando establecido, durante el tiempo de su extinción (estas cantidades son iguales, pero de signo opuesto). Es decir,

$$\Phi = \pm \int_0^t V \, dt \qquad [V]\cdot[seg] = [Weber] \qquad [2\text{-}111]$$

en donde el intervalo 0 a t es el requerido para establecer o extinguir el campo. Derivando respecto al tiempo resulta

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \frac{[V]\cdot[seg]}{[seg]} \qquad [2\text{-}112]$$

que es la **ley de inducción de Faraday**. En consonancia con el sistema dextrógiro de coordenadas se ha empleado el signo negativo para indicar que, cuando el flujo es creciente en la dirección positivo (saliendo del papel por el bucle de la figura 2-34), el voltaje inducido es negativo. Es evidente de las ecuaciones (2-16) o (2-117) que la unidad de flujo magnético es el voltio – segundo; esta unidad se ha llamado *weberio*.

2.4.3. Densidad B del flujo magnético y Ley de Gauss

El flujo magnético por unidad de área a través de un bucle de área pequeña se denomina *densidad* **B** *de flujo magnético* en el punto en que se sitúa el bucle. Como el flujo a través del bucle depende de su orientación, además de su área, la densidad del flujo magnético es una cantidad *vectorial*. Se toma como dirección de **B** la normal al plano del bucle cuando está orientada para abrazar el máximo flujo. El sentido positivo de **B** es la del campo magnético en el punto en cuestión. La densidad de flujo magnético es el *tesla* o *weberio por metro cuadrado*. El flujo magnético a través de una superficie es la integral de superficie de la componente normal de B, es decir,

$$\Phi = \int_S B_n \, da = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \qquad [2\text{-}113]$$

Cuando la superficie que tomamos es una superficie cerrada, es decir que contiene un volumen, las líneas de flujo que entran son igual a las que salen por lo tanto la integral de la Inducción Magnética en una superficie cerrada es cero:

$$\oint_s \bar{B}\,.\,da = 0 \qquad [2\text{-}114]$$

Este fenómeno se explica debido a que "no existen monopolos magnéticos", los polos magnéticos no se pueden aislar, nunca podemos contener en una superficie cerrada un monopolo magnético a diferencia de las cargas eléctricas. Si aplicamos el teorema de la Divergencia obtenemos la expresión vectorial de la ley de Gauss:

$$\oint_s \bar{B}\,.\,da = \int_v \nabla.B.dv = 0$$

$$\nabla.B = 0 \qquad [2\text{-}115]$$

2.4.4. Intensidad de campo magnético H y fuerza magnetomotriz F. Ley de Ampere

Empleando, como en la figura 2-34, un pequeño bucle como sonda y un galvanómetro es posible determinar **B** en todos los puntos de una región alrededor de un conductor largo con corriente. La experimentación muestra que en un medio homogéneo, B queda relacionada con la corriente así

$$B \propto \frac{\mu I}{r} \qquad [2\text{-}116]$$

siendo r la distancia desde el conductor y μ es una constante que depende del medio. A la constante μ se le llama permeabilidad del medio y puede escribirse

$$\mu = \mu_r \mu_0 \qquad [2\text{-}117]$$

siendo μ_v la permeabilidad absoluta del vacío y μ_r es la *permeabilidad relativa* (respecto a la del vacío). μ_0 es la unidad eléctrica *definida* como básica, a la que se le asigna el valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{Henrios}{metro}\right] \qquad [2\text{-}118]$$

en el sistema MKS racionalizado de unidades. Empleando este valor de μ_r, y sondeando el campo alrededor del conductor en un vacío en el que $\mu_r = 1$ (o en el que $\mu_r \approx 1$), el factor de proporcionalidad en (2-118) resulta ser 1/2 π, de manera que dicha relación queda de la forma

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} = \mu H \qquad [2\text{-}119]$$

siendo

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad \left[\frac{A}{m}\right]$$

La *intensidad H del campo magnético* se define así por esta relación en función de la corriente que la produce y de la forma geométrica del sistema. La intensidad de campo magnético es una cantidad vectorial que tiene igual dirección y sentido que la densidad de flujo magnético (en medios isotrópicos); así, la igualdad expresada por (2-119) puede establecerse por la relación vectorial

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad [2\text{-}120]$$

Aunque no definida en función de unidades de polo, el valor relativo de H en cualquier punto puede indicarse por la fuerza ejercida en un extremo de la aguja de la brújula.

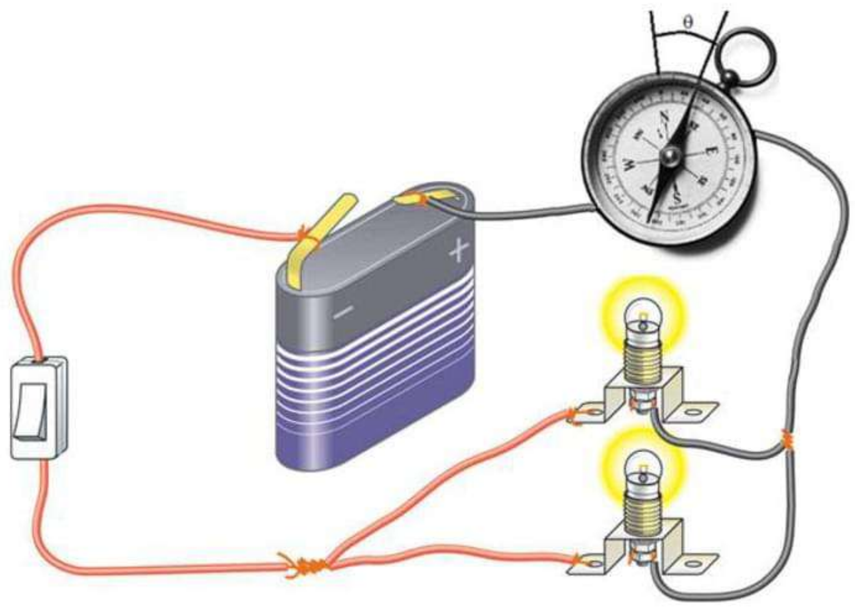


FIGURA 2-36: Desplazamiento de un ángulo θ de la aguja de una brújula, por el efecto del campo magnético generado por la corriente del circuito.

En las condiciones del experimento (conductor largo), la magnitud H de la intensidad de campo magnético es independiente de la permeabilidad del medio, dependiendo solamente de la corriente y distancia a ella, mientras que *B* depende de la permeabilidad de dicho medio. En este sentido H puede asimilarse como una "tensión" magnética que conduce una densidad de flujo "resultante" a través del medio. Este particular punto de vista, y sin duda los nombres elegidos para los vectores *E, D, B y H*, sugieren que *H* es análogo a *E* y *B* análogo a *D*. Sin embargo, tal como se discutirá en la sección 2.4.11, una analogía igualmente válida relaciona *E* con *B* y *D* con *H*.

La integral curvilínea

$$\mathsf{F} = \int_a^b \mathbf{H} \cdot dL$$

define la *fuerza magnetomotriz* entre los puntos *a* y *b*.

En un camino cerrado alrededor del conductor, con éste en su centro, H tiene el valor constante $I/(2.\pi.r)$ y está dirigida a lo largo del camino cerrado C, de manera que:

$$F = \oint_C H.dl = I \qquad \textit{LEY DE AMPERE} \qquad [2\text{-}121]$$

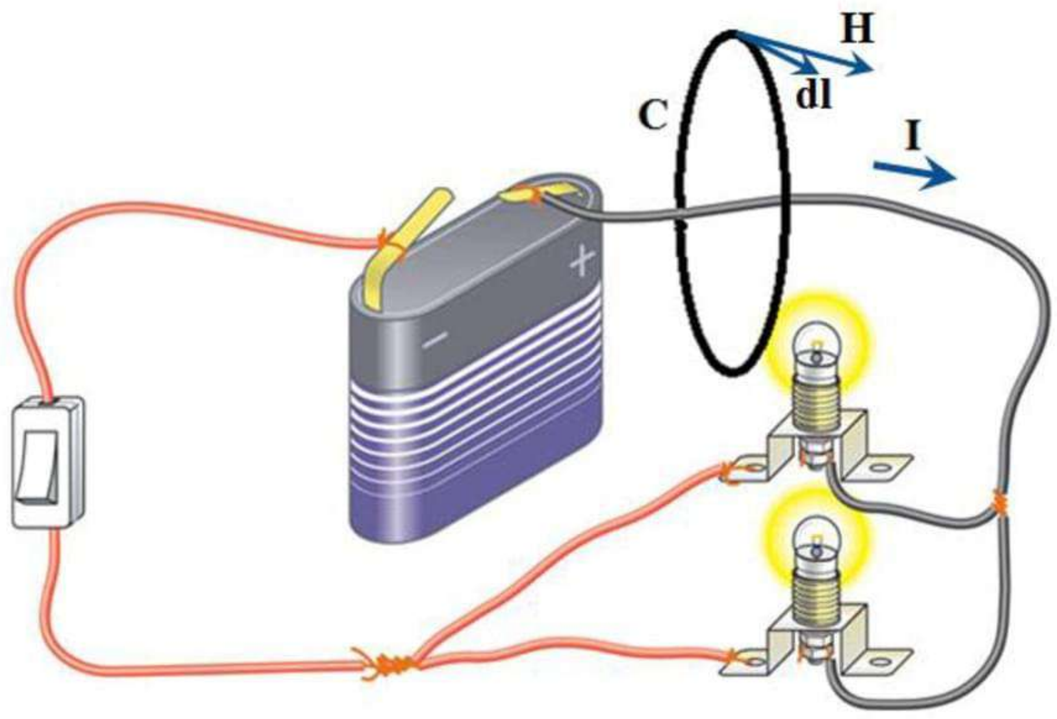


FIGURA 2-37: Circuito eléctrico que indica el camino cerrado alrededor del conductor por el cual circula la corriente I.

Es fácilmente demostrable que este mismo resultado (2-121) se obtendrá para *cualquier* circuito cerrado alrededor de la corriente. La ecuación (2-121) es la *ley de trabajo o ley del circuito de Amp*ere expresada en forma integral:

$$\oint_C H.dl = I \qquad [2\text{-}121a]$$

Los sentidos positivos de la fuerza magnetomotriz y de la corriente están relacionados por la familia regla de la "mano derecha".

La ley de Ampere hace fácil el cálculo de *H* en ciertos problemas. Por ejemplo, considérese la bobina toroidal de la figura (2-35), consistente en un gran número de espiras poco separadas entre sí en un núcleo o soporte tubular. Para un trayecto cerrado C tomado a lo largo del núcleo por el interior del arrollamiento, la fuerza magnetomotriz será

$$F = nI$$

Siendo *n* el número de espiras, y por tanto el número de veces que el trayecto enlaza la corriente *1*. Si el espesor *D* del núcleo es pequeño respecto a R, radio del anillo, los radios de todos los trayectos circulares a lo largo del núcleo serán aproximadamente iguales a *R*, de manera que en cualquier punto interior del núcleo

$$H = \frac{F}{2\pi R} = \frac{nI}{2\pi R} = \frac{nI}{l}\left[\frac{Amperio\ vuelta}{m}\right] \qquad [2\text{-}122]$$

siendo $l = 2\,\pi R$ la longitud de la bobina. La intensidad de campo magnético es casi uniforme en toda la sección transversal del núcleo y es igual a los amperios – vuelta por unidad de longitud.

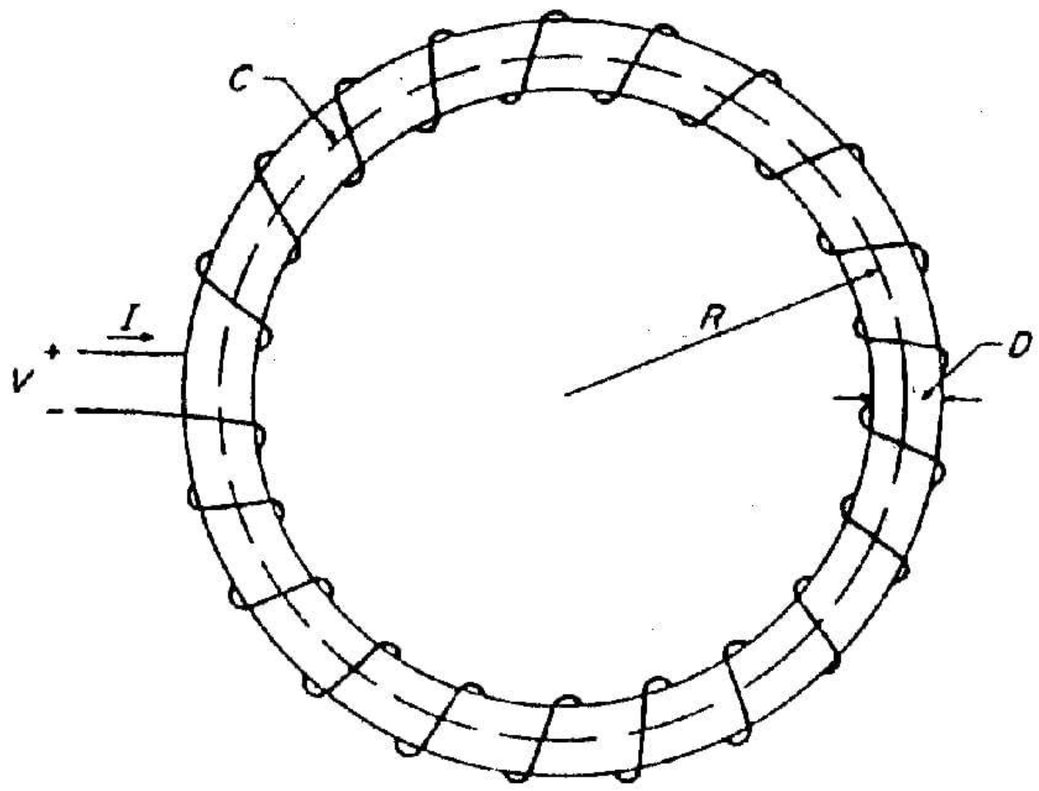


FIGURA 2-35: Núcleo Toroidal

A partir de la expresión anterior si aplicamos el ***teorema de Stokes***, la expresión relaciona la integral de ∇xH a lo ancho de la superficie con la integral curvilínea de **H**, o fuerza magnetomotriz, a lo largo del circuito cerrado que limita tal superficie.

$$\oint_C H.dl = \int_S \nabla x H.da = I \qquad [2\text{-}123]$$

La corriente es igual a la integral de la densidad de corriente en la superficie considerada:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \qquad [2\text{-}124]$$

Reemplazando [2-124] en [2-123]

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

Al ser iguales en ambos miembros la integración en la superficie, simplificamos la integración y nos queda:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad [2\text{-}125]}$$

Esta es una forma alternativa (en forma vectorial) de la ley de Ampere. La forma vectorial (2-125) de la ecuación requieren un medio *homogéneo*, ya que la derivada espacial (dentro del rotor) carece de sentido en una discontinuidad del medio. Cuando el circuito de integración cruza una discontinuidad se debe usar la forma integral (2-121).

Recordando la identidad vectorial que expresa que la Divergencia de un rotor es cero:

$$\nabla.\nabla x H = \nabla.J = 0$$

$$\boxed{\nabla J = 0 \qquad \text{Ecuación de Continuidad eléctrica} \qquad [2\text{-}126]}$$

2.4.5. Permeabilidad μ

En los ejemplos de la sección anterior se ha relacionado directamente la intensidad de campo magnético **H** con la corriente que le produce. Empleando el ejemplo de la bobina toroidal puede medirse el flujo Φ, y por tanto su densidad **B** dentro del núcleo; se conoce así la fuerza magnetomotriz, y por tanto *H*, en función de la corriente; por tanto, μ y μ_r, la permeabilidad relativa del medio que forma el núcleo, pueden ser determinadas de las relaciones

$$\mu = \frac{B}{H} \qquad \boldsymbol{\mu = \mu_r . \mu_0} \qquad \boldsymbol{\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}\left[\frac{Henrios}{metro}\right]} \quad [2\text{-}127]$$

Tanto para el aire como para la mayoría de los materiales, la permeabilidad relativa es prácticamente la unidad. Para las sustancias *paramagnéticas* es ligeramente mayor que la unidad; así, para el aire es 1,00000038 y para el aluminio es 1,000023. Para las sustancias *diamagnéticas* es ligeramente inferior a la unidad; para el cobre es $1-8{,}8\times10^{-6}$, para el agua, $1-9{,}0\times10^{-6}$. Sin embargo, para una clase excepcional de materiales (hierro y ciertas aleaciones) conocidos como materiales *ferromagnéticos* la permeabilidad relativa puede alcanzar las centenas e incluso los millares. En general, la permeabilidad de estos materiales no es constante, sino que depende tanto de la intensidad del campo magnético como de su historial magnético anterior. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones de interés en la teoría de las ondas electromagnéticas el margen de densidad de flujo que se manejan es lo suficientemente pequeño para que μ pueda considerarse constante.

2.4.6. Energía almacenada en un campo magnético.

Se encuentra experimentalmente que se necesita cierto trabajo para establecer la corriente en un circuito. Este trabajo se realiza al establecer la corriente contra la fuerza electromotriz inducida en el circuito por el flujo magnético creciente, y la energía así transferida al circuito se dice que esta almacenada en el campo magnético. El valor de la energía así almacenada puede determinarse en función de la extensión e intensidad del campo magnético considerando el ejemplo elemental de corriente en una bobina toroidal, como la de la figura 2-35. en este caso, cuando las espiras están muy juntas, el campo magnético queda confinado al núcleo del toroide, y la intensidad del campo magnético viene dada por

$$H = \frac{n\,I}{l}$$

siendo *n* el número de espiras, *l* la longitud media del núcleo de la bobina. La fuerza contraelectromotriz inducida en la bobina es, por la definición de flujo magnético Φ,

$$V = -n\,\frac{d\Phi}{dt}$$

$$V = -n\,A\frac{dB}{dt}$$

siendo *B* la densidad de flujo magnético y A el área de la sección transversal del núcleo. El trabajo realizado para establecer la corriente *I* en la bobina es:

$$W = -\int_0^{t_1} V\, I\, dt$$

$$W = \int_0^{t_1} l\, A\, H\, \frac{dB}{dt}\, dt$$

$$W = \int_0^{H_1} \mu\, l\, A\, H\, dH$$

Sustituciones

$$V = -A\, \frac{dB}{dt}$$

$$H = \frac{I}{L} \qquad \therefore \qquad I = H \cdot \ell$$

$$B = \mu\, H$$

$$W = l\, A \left[\frac{\mu\, H_1^2}{2} \right] \qquad [2\text{-}128]$$

Esta es la **energía total almacenada** en el campo, y como *lA* es el volumen de la región en la que existe el campo magnético, se deduce que:

$$\boxed{\omega_H = \frac{1}{2}\, \mu\, H_1^2 \quad \left[\frac{Julio}{m^3} \right] \qquad [2\text{-}129]}$$

será la **densidad de energía del campo magnético**. Tanto si se considera deseable como no el asignar cierta densidad de energía en cada volumen elemental del espacio y así "localizar" la energía, es indudable, en general, que al integrarse la cantidad $\mu H^2/2$ en todo el volumen (en el que H tenga algún valor) dará el valor correcto de toda la energía magnética almacenada en el sistema.

2.4.7. Vector potencial magnético.

En el campo eléctrico se encontró deseable introducir el concepto de potencial. En tal caso el potencial eléctrico fue una función espacial que dependía de la magnitud y posición de las cargas, siendo estas generadoras del campo eléctrico. Se obtuvo el campo eléctrico partiendo del potencial *V*, tomando el gradiente o derivada espacial de *V*. Este procedimiento resultó así a menudo el más fácil para obtener **E**, que no el de intentar obtener directamente el campo en función de la magnitud y posición de las cargas.

De un modo similar, en el caso del campo magnético sería deseable poder establecer un potencial magnético, cuya derivada espacial diera **B** o **H**. En correspondencia a las cargas eléctricas individuales en el caso del campo eléctrico, los generadores del campo magnético serían los elementos de corriente *I ds* de los circuitos que producen el campo.

El potencial magnético supuesto dependería, por tanto, de estos elementos de corriente. Suponiendo que pueda encontrarse tal potencial magnético, las propiedades que debiera tener se determinan fácilmente por simple razonamiento.

Como el campo magnético que debe obtenerse, al derivar el potencial es proporcional a la intensidad del elemento de corriente *I dL,* el potencial también le debe ser proporcional. Como el campo magnético debido a una corriente varía inversamente al *cuadrado* de la distancia *R* desde el elemento al punto considerado (ley de Ampere), el potencial magnético debido a los elementos de corriente debe variar

inversamente a la *primera* potencia de dicha distancia, ya que el campo magnético debe obtenerse con una derivada espacial del potencial. Esto equivale a dividir por R en lo que a las dimensiones concierne. El potencial electrostático debido a las cargas era una cantidad escalar. Ello era lo adecuado en tal caso, ya que las cargas eran sólo escalares. En este caso los elementos de corriente tienen dirección y magnitud y es necesario que esta información adicional sobre la *dirección* del generador esté contenida en el potencial debido al generador. Por esto el potencial debe ser en este caso una cantidad *vectorial*, cuya dirección esté relacionada de algún modo a la dirección del elemento corriente. Si designamos por **A** a este vector de potencial magnético debe ser posible obtener **B** o **H** como derivada espacial de **A**. Hay dos posibles operaciones de derivación espacial de una cantidad vectorial: la divergencia y el rotacional. La divergencia da una cantidad escalar, mientras que el rotacional da una cantidad vectorial. Como el campo resultante es una magnitud vectorial, sólo puede emplearse como derivada espacial, el rotacional. Por tanto, si hay un vector adecuado del potencial magnético **A**, los vectores **H** o **B** deben obtenerse de las relaciones

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Se han empleado así ambas relaciones en el pasado, pero moderadamente ha adquirido preponderancia el empleo de la segunda; por tanto,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad [2\text{-}131]$$

será la que adoptaremos en este libro*. En medios isotrópicos y homogéneos (que son los únicos que nos interesan en esta unidad temática) la permeabilidad μ es una simple constante, de manera que las dos formas son equivalentes, salvo un factor constante. Como se ha indicado antes, la relación entre el vector potencial magnético y generador de corriente elemental debe ser

$$d\mathbf{A} = k\left(\frac{I\,dL}{R}\right) \qquad [2\text{-}132]$$

siendo k una constante aún por determinar. A la vista de la ecuación (2-129) un ensayo razonable podría ser darle la expresión

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu\, I\, dL}{4\pi R} \qquad [2\text{-}133]$$

El vector potencial magnético (ordinariamente llamado vector potencial) debido a la circulación de una corriente en un circuito completo se obtiene como suma o integración de los vectores potencial producidos por todos los elementos de corriente que comprenden el circuito. Es decir,

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu\, I\, dL}{4\pi R} \qquad [2\text{-}134a]$$

en que la integración se extiende al circuito completo por el que circula la corriente I. Como se mencionó anteriormente, la *dirección* (y sentido) de un elemento de corriente puede indicarse haciendo que bien ds o I sea la cantidad vectorial

Esta expresión puede escribirse en una forma más general sustituyendo la corriente I por una densidad **J** e integrando entonces en todo el *volumen* en el que exista densidad de corriente (dl.ds=dv).

Entonces la expresión del vector potencial **A** será

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu \mathbf{J}\, dV}{4\pi R} \qquad [2\text{-}134b]$$

Esta se reduce a la expresión anterior cuando la corriente circula por un filamento como conductor.

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu}{4.\pi} \int_{\mathrm{v}} \frac{\mathbf{J}}{R} d\mathrm{v} \qquad [2\text{-}134c]}$$

2.4.8. Analogías entre los campos eléctrico y magnético

Es natural encontrar analogías entre los campos eléctrico y magnético. Tales analogías son útiles para mantener ordenados los procesos mentales, y hacen posible el llegar rápidamente a conclusiones determinadas al comparar un problema con resultados ya obtenidos en problemas análogos, aunque diferentes. Hay distintas analogías posibles que pueden establecerse entre los campos eléctrico y magnético, si bien dos de ellas son aplicables en particular más adelante al estudiar las variaciones temporales (en el dominio del tiempo) del campo electromagnético.

La primera analogía considerada a **D** y **H** como cantidades análogas, así como **E** y **B** análogas entre sí. Esto se basa al considerar el hecho de que la densidad de desplazamiento **D** está ligada directamente a su generador, la carga, y es independiente de las características del medio (homogéneo) en el que se halla la carga.

De un modo similar el vector H puede relacionarse directamente a su generador, la corriente, y es independiente del medio (homogéneo) en el que se halla el campo. Los vectores **E** y **B** también están ligados a sus respectivos generadores, carga y corriente, pero muestran una dependencia de las características del medio, es decir, de la constante dieléctrica (ε) y de la permeabilidad magnética (μ), respectivamente.

La segunda analogía, igualmente válida, considera análogos a **E** con **H** y a **D** con **B**. Esta no es más "precisa" que la anterior, pero tiene la ventaja en la teoría del campo electromagnético que da a las ecuaciones de Maxwell cierta simetría que no tendrían con la primera. Como quiera que dichas ecuaciones son el punto de partida de todo problema sobre campos electromagnéticos, dicha simetría es ya un buen principio. Dos experimentos simples servirán para puntualizar esta analogía. En la figura 2-41 (a), el voltaje *V* produce un campo eléctrico *E* en el espacio entre placas. *E* es igual a *V/d* y es independiente de la constante dieléctrica ε del medio aislante. Sin embargo, la densidad de desplazamiento depende de ε (para un voltaje aplicado constante, y por tanto *E* constante) y está dado por D = ε*E*. En la figura 2-41 (*b*) la corriente *I* produce una fuerza magnetomotriz *nI* a lo largo del trayecto cerrado *l*. La intensidad de campo magnético *H* en el interior del núcleo es igual a *nI/l*. La densidad de flujo magnético *B* depende de la permeabilidad μ (para una fmm constante) y viene dada por *B* = μ*H*. En esta analogía *E* y *H* se consideran a veces como intensidades o fuerzas del campo eléctrico o magnético que producen densidades de flujo eléctrico o magnético *D* y *B*, respectivamente.

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}.\boldsymbol{ds} = \boldsymbol{q} \qquad \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{H}.\boldsymbol{dl} = \boldsymbol{I}$$

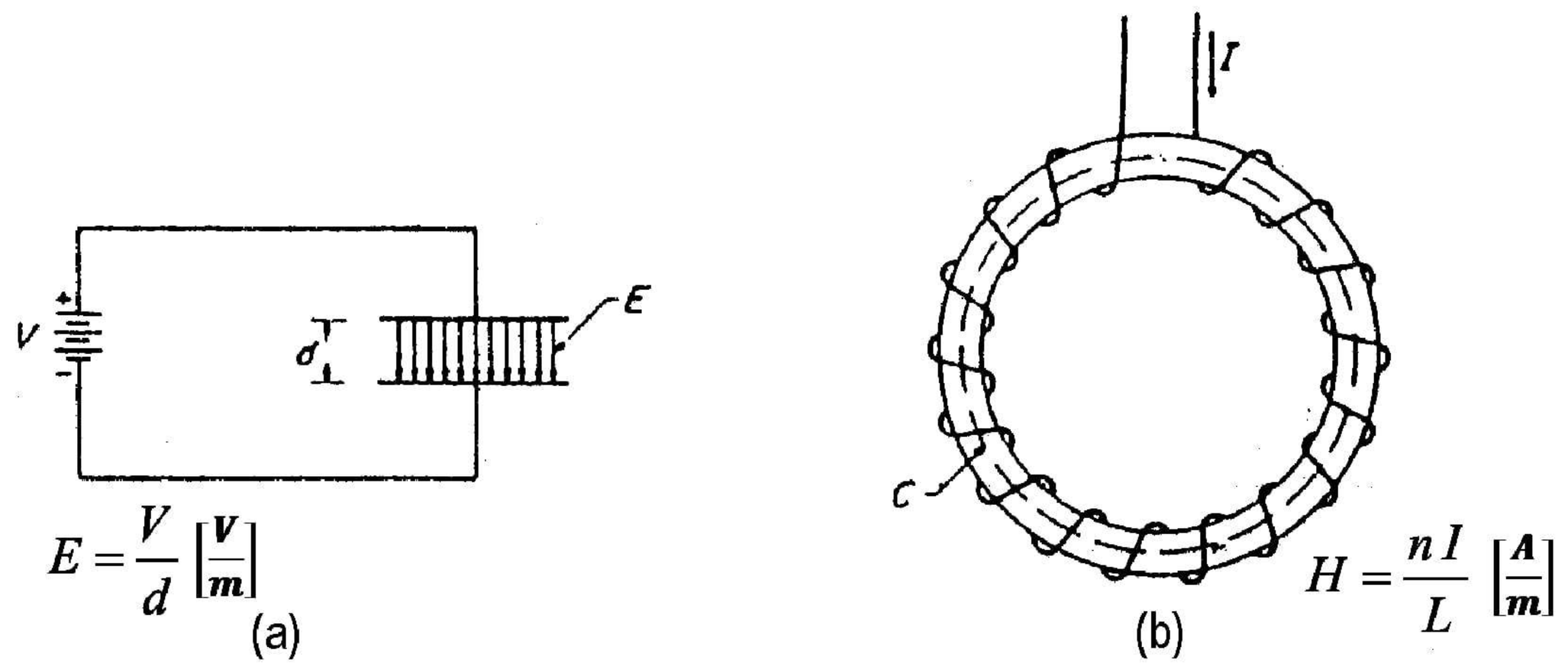


FIGURA 2-41: Circuitos para mostrar las analogías entre los campos magnéticos y eléctricos

En las expresiones anteriores, si se mantiene constante a la carga Q (en lugar de voltaje) en la figura 2-41 (*a*) y se mantiene constante como antes a la corriente I en la figura 2-41 (*b*), resulta la primera analogía vista. Es decir, D y H como cantidades análogas que permanecen invariables para distintos materiales dieléctricos o magnéticos.

2.5. Sistema Internacional de Unidades

2.5.1. Unidades Elementales

Longitud	La unidad de longitud es el *metro* (m).
Masa	La unidad de masa es el *kilogramo* (kg).
Tiempo t.	La unidad de tiempo es el *segundo* (s).
Corriente I.	La unidad de corriente es el *amperio* (A).
Temperatura	La unidad de temperatura es el grado *Kelvin* (ºK).
Intensidad luminosa	La unidad de intensidad luminosa es la *candela* (cd).

2.5.2. Unidades Derivadas

Frecuencia f.	La unidad de frecuencia es el herzio (Hz). (1 herzio = 1 ciclos/s)
Fuerza F	La unidad de fuerza es el newton. Es la fuerza requerida para acelerar 1 kg a razón de 1 metro/seg² (1 newton = 10^5 dinas)
Energía	La unidad de energía eléctrica es la misma que para la energía mecánica. Es el julio. El julio es el trabajo que hace una fuerza de un newton a lo largo de 1 metro (1 julio = 10^7 ergios).
Potencia	La unidad de potencia es el watio. Representa un gasto de energía de 1 julio/seg.
Carga Q o q	La unidad de carga es el culombio. Un amperio de corriente circulando 1 segundo transporta 1 culombio de carga
Resistencia R	La unidad de resistencia es el ohmio. Si se disipa 1 watio de potencia en una resistencia cuando fluye por ella 1 amperio de corriente, el valor de la resistencia es de 1 ohmio $[\Omega]$
Conductancia G	Conductancia es la recíproca de resistencia. La recíproca del ohmio es el mho (o siemens).
Resistividad	La resistividad de un medio es la resistencia medida entre dos caras paralelas de un cubo unitario. La unidad de resistividad es el ohmio/metro
Conductividad	La conductividad de un medio es la recíproca de la resistividad. Su unidad es el mho/metro.
Fuerza electromotriz V	La unidad de fuerza electromotriz (f.e.m.) o voltaje es el voltio, que se define como 1 watio/amperio. Es también igual a 1 julio/culombio y así tiene las dimensiones de trabajo por unidad de carga (no es una fuerza).
Intensidad de campo eléctrico E	La intensidad de campo eléctrico se mido en voltios/metro. La intensidad de campo eléctrico en un punto de un medio es la fuerza que ejerce sobre la unidad de carga situada en tal punto. Tiene las dimensiones de newton/culombio
Densidad de corriente J	La unidad de densidad de corriente es el amperio/m²
Desplazamiento eléctrico Ψ	El desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por la superficie. La unidad de desplazamiento eléctrico es, por tanto, el culombio
Densidad de desplazamiento D	La unidad de densidad de desplazamiento eléctrico es el culombio/metro cuadrado

Flujo magnético Φ	El voltaje V entre los terminales de una espira, debido a un campo magnético cambiante, queda relacionado con el flujo magnético a través de cualquier superficie contorneada por la espira, así V = - dΦ/dt. La unidad de flujo magnético definida por esta relación se denomina weberio. 1 weberio es 1 voltio-seg.
Densidad de flujo magnético B	La unidad de densidad de flujo magnético es el testa o weberio/metro cuadrado. (1 web/m² = 10^4 gausios).
Intensidad de campo magnético H	La intensidad de campo magnético entre dos capas planas llevando corrientes directamente opuestas es igual a la corriente por metro cuadrado de anchura (amperios por metro) que circula en las capas. La unidad de intensidad de campo magnético es el amperio/metro.
Fuerza magnetomotriz F	La fuerza magnetomotriz entre dos puntos a y b se define como la integral $\int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$. La unidad de fuerza magnetomotriz es el amperio. La fuerza magnetomotriz a lo largo de un trayecto cerrado es igual a la corriente que éste encierra
Capacidad C	Un cuerpo conductor tiene una capacidad de 1 faradio si requiere una carga de 1 culombio para elevar su potencial en 1 voltio. Un faradio es igual a 1 culombio/voltio
Inductancia L	Un circuito tiene una inductancia de 1 henrio si una corriente que cambia 1 amp/seg induce en el circuito un "contravoltaje" de 1 voltio Las dimensiones del henrio son $$\frac{voltio\ segundo}{amperio} = Ohmio\ segundo$$
Permitividad ε	En un medio homogéneo las cantidades eléctricas D y E están relacionadas por la ecuación D = εE, siendo ε la permitividad o constante dieléctrica del medio. Tiene por dimensiones faradio/metro. La permitividad del vació es $$\varepsilon_0 = 8,8854 \times 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi \times 10^9} \left[\frac{Faradios}{metro} \right]$$ La permitividad de un medio puede escribirse $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_v$, siendo ε_r, una constante sin dimensiones conocida como *permitividad relativa* del medio
Permeabilidad μ	La densidad de flujo magnético y la intensidad del campo magnético están relacionadas por B = μH, siendo μ la permeabilidad magnética del medio. Tiene por dimensiones henrio/metro. La permeabilidad de un medio puede escribirse así $\mu = \mu_r \mu_v$, siendo μ_r la *permeabilidad relativa* del medio y μ_v la permeabilidad absoluta del vacío
Permeabilidad del vacío μ_v	La permeabilidad absoluta del vacío tiene como valor de $4\pi \times 10^{-7}$ henrios/metro

Por definición, el *amperio* es la corriente constante que, mantenida en dos conductores de longitud infinita y sección despreciable, separados un metro entre sí en el vacío, se atraen con una fuerza de $2x10^7$ newton por metro de longitud. Según la ley de fuerza experimental (ley de Ampere), en este caso

$$F = \frac{\mu_v I_1 I_2 L}{2\pi d}$$

es evidente que la definición anterior de la unidad de corriente es equivalente a definir la permeabilidad del vacío como $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$. Así, la cantidad eléctrica definida para el sistema de unidades puede ser tanto la corriente como la permeabilidad del vacío.

La tabla 1.1 da las definiciones de las unidades del sistema internacional MKS. En dicha tabla las dimensiones de todas las unidades se han expresado en función de la masa *M*, longitud *L*, tiempo *T* y carga *Q*. Al expresar las *dimensiones* en función de la carga *Q* en el lugar de μ_v se evitan coeficientes fraccionarios en las ecuaciones de dimensión.

Cuando el valor de una unidad es poco conveniente por grande o pequeña pueden emplearse múltiplos o submúltiplos se forman con prefijos, como indica la tabla 1.2.

2.5.3. Orden de magnitud de las unidades[ॐ]

Puede lograrse un concepto del orden de magnitud de las unidades de sistema MKS práctico con algunos ejemplos: Un metro, que es igual a 3,281 pies (o sea, como un paso largo), da lugar a que 3 metros unos 10 pies. Un kilogramo es algo mayor que 2 lb (1 kg = 2,205 lb). Un newton es, aproximadamente, la fuerza necesaria para sostener un vaso con agua (98,1 gr) (1/4 lb, mayor aún, 0,225 lb). Un julio es el trabajo hecho al elevar el peso de 1 newton a una altura de 1 metro. Para elevar dicho vaso a un metro en un segundo se realiza una potencia de 1 watio. Aunque al watio se le considera como una potencia más bien pequeña (una pequeña lámpara de alumbrado consume unos 15 w y un motorcito consume de 2 a 3 w), representa en cambio una potencia mecánica apreciable. Un hombre puede trabajar a lo largo de una jornada de doce horas a razón de unos 40 w, potencia menor que la que actúa sobre la máquina lavadora de su mujer. El culombio, que es aproximadamente la carga que pasa por una lámpara de 100w en un segundo, cargaría una esfera del tamaño de la Tierra a unos 1400 voltios. Si fuera posible colocar una carga de 1 culombio en cada una de dos pequeñas esferas separadas 1 metro entre sí, se ejercería entre estas esferas una fuerza de 9×10^9 newtons, o sea, una fuerza capaz de elevar un millón de toneladas. El faradio es una unidad de capacidad muy grande, empleándose corrientemente los submúltiplos microfaradio (10^{-6} F) y picofaradio (10^{-12} F). Los condensadores del filtro en un radio receptor suele ser de 8 a 16 μF (microfaradios). La capacidad de una esfera de 1 cm de radio es aproximadamente de 1 pF (picofaradio). La inductancia del primario de un audiotransformador de núcleo magnético puede ser del orden de 50 henrios, mientras que la de una bobina de radiofrecuencia de sintonía de la banda de radiodifusión suele ser de unos 300 μH (microhenrios). El tesla o weberio por metro cuadrado es aproximadamente la densidad de flujo de saturación del hierro empleado en los núcleos de transformadores.

[ॐ] Se conserva la analogía del metro en pies por existir países de habla española y de medidas inglesas.

Tabla 1-1: Dimensiones de las Unidades en el sistema MKS

Cantidad	Símbolo	Unidad MKS	Abreviatura	Equivalencia Dimensional	Dimensiones
Longitud	L	Metro	m		L
Masa	m	Kilogramo	Kg		M
Tiempo	t	Segundo	s		T
Carga	q	Culombio	C		Q
Fuerza	**F**	Newton	N	Julio / m	MLT^{-2}
Energía	U	Julio	J	Voltio Culombio	ML^2T^{-2}
Potencia	W	Watio	W	Julio / seg	ML^2T^{-3}
Corriente	I	Amperio	A	Culombio / seg	$T^{-1}Q$
Densidad de Corriente	**J**	Amp / m^2	A / m^2		$L^{-2}T^{-1}Q$
Densidad de carga volumétrica	ρ (ó ρ_v)	Culom / m^3	C / m^3		$L^{-3}Q$
Densidad de carga superficial	ρ_s	Culom / m^2	C / m^2		$L^{-2}Q$
Resistencia Conductividad	R σ	Ohmio Mho / metro		Voltio / Amp	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$ $M^{-1}L^{-3}TQ^2$
Fuerza electromotriz o voltaje	V	Voltio	V	Julio / Culombio	$ML^2T^{-2}Q^{-1}$
Intensidad de campo eléctrico	**E**	Voltio / m	V / m	Newton / Culom	$MLT^{-2}Q^{-1}$
Capacidad	C	Faradio	F	Culom / Voltio	$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$
Permitividad	ε	Faradio / m			$M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$
Desplazamiento Eléctrico	ψ	Culombio			Q
Densidad de desplazamiento eléctrico	**D**	Culom / m^2			$L^{-2}Q$
Flujo magnético	Φ	Weberio	Wb	Voltio / seg	$ML^2T^{-1}Q^{-1}$
Densidad de flujo eléctrico	**B**	Tesla	T		$MT^{-1}Q^{-1}$
Fuerza magnetomotriz	F (ó M)	Amperio (vuelta)	A		$T^{-1}Q$
Intensidad de campo magnético	**H**	Amperio (vuelta) / m	A / m		$L^{-1}T^{-1}Q$
Inductancia	L	Henrio	H	Ohm seg	ML^2Q^{-2}
Permeabilidad	μ	Henrio / m			MLQ^{-2}
Frecuencia	f	Herzio	Hz		T^{-1}

Tabla 1-2: Prefijos de Múltiplos y Submúltiplos

Factor por el que se multiplica la unidad	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

2.6. ECUACIONES DE MAXWELL

Objetivo

Comprender las modificaciones introducidas por Maxwell en las expresiones fundamentales de campos estáticos para hallar las ecuaciones de campos variables en el tiempo, reconociendo así la existencia de campos electromagnéticos.

2.6.1. Generalización de la ley de Ampere. Primera Ecuación de Maxwell

En la Unidad Temática de campos estáticos encontramos que el campo magnético debido a una distribución de corriente satisface la ley de circuitos de Ampere.

$$\oint_C H.dl = \int_S J.nda \qquad [2\text{-}140]$$

n es un vector unitario normal a **da**

Examinaremos ahora esta ley, mostraremos que falla en algunas ocasiones y encontraremos una generalización válida.

Consideremos el circuito de la figura 2-42, que consiste en un pequeño condensador de placas paralelas, que se está cargando con una corriente de intensidad constante *I* (no necesitamos preocuparnos sobre lo que está generando la corriente).

Si se aplica la ley de Ampere al contorno *C* y a la superficie S_1, vemos que:

$$\oint_C H.dl = \int_{S1} J\ n_1\ dS_1 = -I \qquad [2\text{-}141]$$

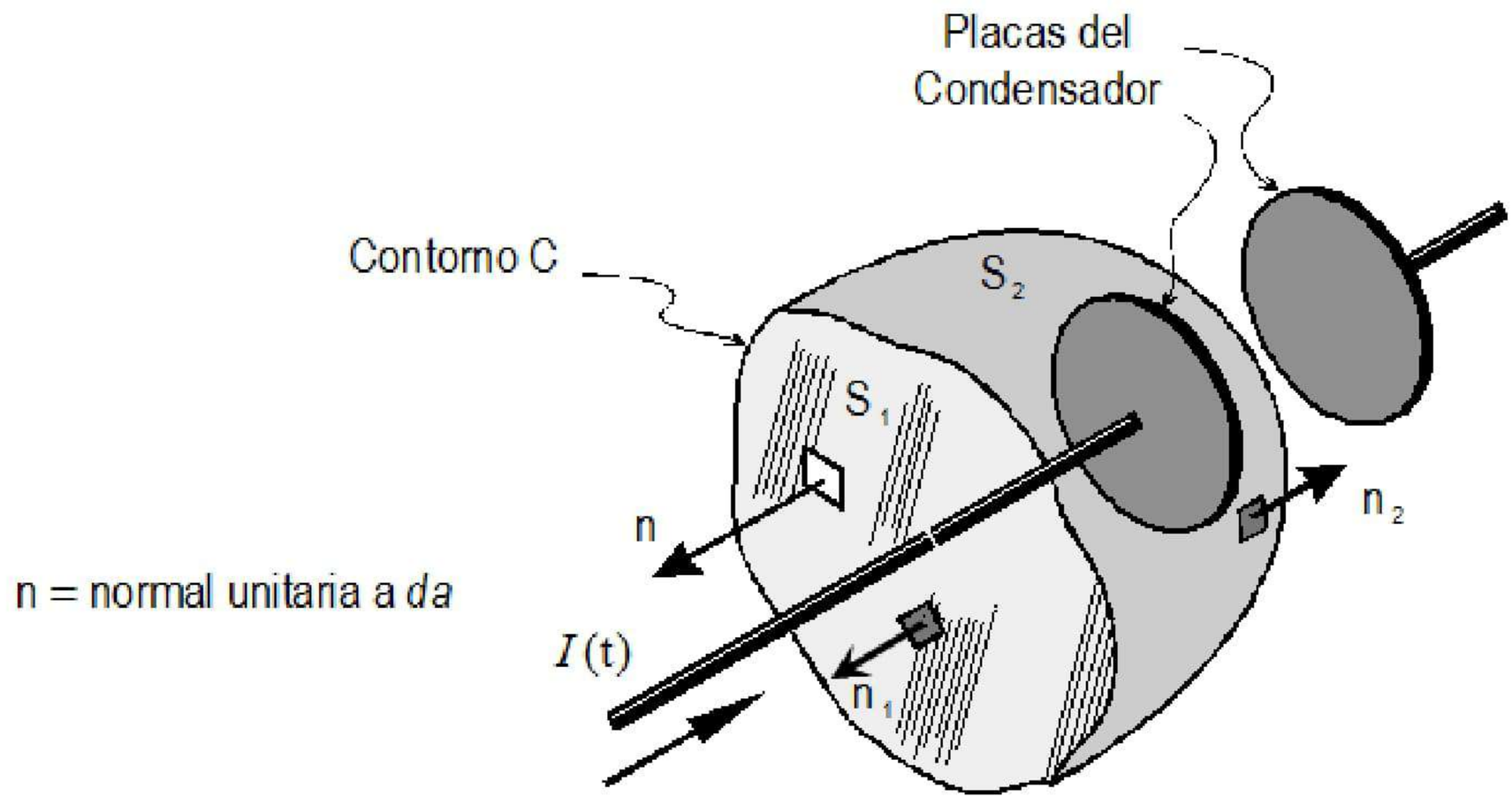


FIGURA 2.42: El contorno *C* y dos superficies S_1 y S_2, para probar la ley de circuitos de Ampere. La corriente es negativa al ser entrante, está a 180° del vector n_1 (cos 180° = -1)

Si, por otra parte, se aplica la ley de Ampere al contorno *C* y a la superficie S_2, entonces *J* es cero en todos los puntos de S_2 y

$$\oint_C H.dl = \int_{S2} J.n_2\ dS_2 = 0 \qquad [2\text{-}142]$$

Las ecuaciones (2-141) y (2-142) se contradicen y, por lo tanto, ambas no pueden ser correctas, esto se define como incompatibilidad de la Ley de Ampere. Si imaginamos que *C* está a una gran distancia del condensador, es claro que la situación no es esencialmente distinta de la de los casos estándar de la ley Ampere considerados en campos estáticos. Por tanto, esto nos conduce a pensar que (2-141) es la correcta, ya que no depende de la nueva característica, es decir del condensador.

La ecuación (2-142), por otra parte, requiere considerar al condensador para su deducción. Podría parecer, entonces, que la ecuación (2-142) requiere alguna modificación. Puesto que esta ecuación se obtiene de integrar la ecuación:

$$\nabla x H = J \qquad [2\text{-}143]$$

ésta también necesita modificarse.

La modificación adecuada puede hacerse observando que (2-141) y (2-142) dan distintos resultados, porque las integrales de los segundos miembros son diferentes.

Expresado matemáticamente,

$$\int_{S2} J.n_2 dS_2 + \int_{S1} J.n_1 dS_1 \neq 0 \qquad [2\text{-}144]$$

S_1 y S_2 juntas forman una superficie cerrada S (unidas por el camino cerrado C); sin embargo, n_2 señala hacia fuera y n_1 también señala hacia afuera. Si se tiene en cuenta este hecho, la ecuación de la superficie cerrada puede escribirse como

$$\oint_{S_1+S_2} J.n.da \neq 0 \qquad [2\text{-}145]$$

Expresada físicamente, la corriente transportadora neta a través de la superficie cerrada S_1+ S_2 no es nula, porque la carga se está acumulando en la placa del condensador encerrada por la superficie. Si aplicamos el teorema de la divergencia, obtenemos:

$$I = -\oint_S J.n.da = -\int_V \nabla.J.dv \qquad [2\text{-}146]$$

El signo negativo surge del producto escalar entre el vector J y el versor de superficie n (cos 180º=-1).

Pero I es igual a la velocidad con que la carga se transporta al interior del volumen.

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho.dv \qquad [2\text{-}147]$$

La conservación de carga requiere, de acuerdo a las ecuaciones (2-145), (2-146) y (2-147),

$$\oint_C J.n.da = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \qquad [2\text{-}148]$$

$$\int_v \nabla J.dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \qquad [2\text{-}149]$$

ya que dentro del volumen V encerrado por S_1 + S_2 la densidad de carga ρ está cambiando con el tiempo en la placa del condensador.

En forma diferencial, la ecuación (2-148) es expresada por la **ecuación de continuidad**,

$$\nabla.J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad [2\text{-}150]$$

Está claro ahora lo que falla en (2-143): tomando su divergencia tenemos

$$\nabla.\nabla x H = 0 = \nabla.J \qquad [2\text{-}151]$$

ya que la divergencia de un rotacional es cero. Por tanto, la relación V.J = 0, como implica la ecuación (2-143), es inconsistente con la conservación de carga en la presente situación, y se debe añadir algo al segundo miembro de la ecuación (2-143) que dé la derivada de la densidad volumétrica de cargas con respecto del tiempo en la ecuación (2-150). Esto podría ser visualizado de la relación de ρ con el desplazamiento eléctrico:

$$\nabla.D = \rho \qquad [2\text{-}152]$$

Sustituyendo ρ de la ecuación (2-152) en (2-150), obtenemos

$$\nabla.J + \frac{\partial}{\partial t}\nabla.D = \nabla.\left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right) = 0 \qquad [2\text{-}153]$$

Si se añade la derivada del Vector densidad de desplazamiento D con respecto del tiempo a la ecuación (2-143), entonces su divergencia dará la expresión correcta de (2-150). (Es evidente que hasta aquí consideramos que los campos eran independientes del tiempo, y la Ec. (2-143) era aplicable.
Al incluir a $\partial D/\partial t$ en la ecuación (2-143), nos da la **"Ley de Ampere generalizada o primera ecuación de Maxwell"** expresada en forma vectorial:

$$\nabla x H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad [2\text{-}154a]$$

Como **J** = σ.**E** y **D**= ε.**E**

$$\boxed{\nabla \mathrm{x} \mathrm{H} = \sigma.\mathbf{E} + \varepsilon.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathrm{t}} \qquad [2\text{-}154b]}$$

La introducción del segundo término en el segundo miembro, que se llama *corriente de desplazamiento*, representa una de las más grandes contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética.

Algunos autores expresan también esta ecuación

$$\nabla x H = J_C + J_D \qquad [2\text{-}155]$$

El rotor de la intensidad de campo magnético H es igual a la densidad de corriente de conducción (J_C) más la densidad de corriente de desplazamiento (J_D).

En forma integral la **Ley de Ampere generalizada** o **Primera ecuación de Maxwell** se expresa:

$$\boxed{\oint_C H.dl = \int\left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right).da = \int\left(\sigma.E + \varepsilon.\frac{\partial E}{\partial t}\right).da \qquad [2\text{-}156]}$$

Recordamos que $J = \sigma E$

2.6.2. Inducción Electromagnética. Segunda Ecuación de Maxwell

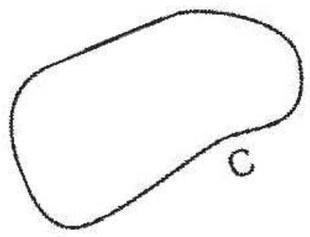
La introducción de la fuerza electromotriz al cambiar el flujo magnético fue observada por primera vez por Faraday y Henry a principios del siglo XIX. A partir de sus experimentos iniciales en esta teoría, se han creado los generadores modernos, los transformadores, etc. Este capítulo trata primordialmente la formulación matemática de la ley de la inducción electromagnética, y su aprovechamiento en casos sencillos.

La ecuación que caracterizó a la electrostática fue:

$$\nabla x E = 0 \qquad [2\text{-}157]$$

o, en forma integral,

$$\oint_c \bar{E}\,.\,dl = 0 \qquad [2\text{-}158]$$



Estas ecuaciones se obtienen directamente de la ley de Coulomb y no son afectadas por la fuerza magnética debida a una corriente constante. Sin embargo, no son válidas para los campos más generales que son dependientes del tiempo y consideraremos ahora estos casos. Definiremos la *fuerza electromotriz, o fem,* alrededor de un circuito por

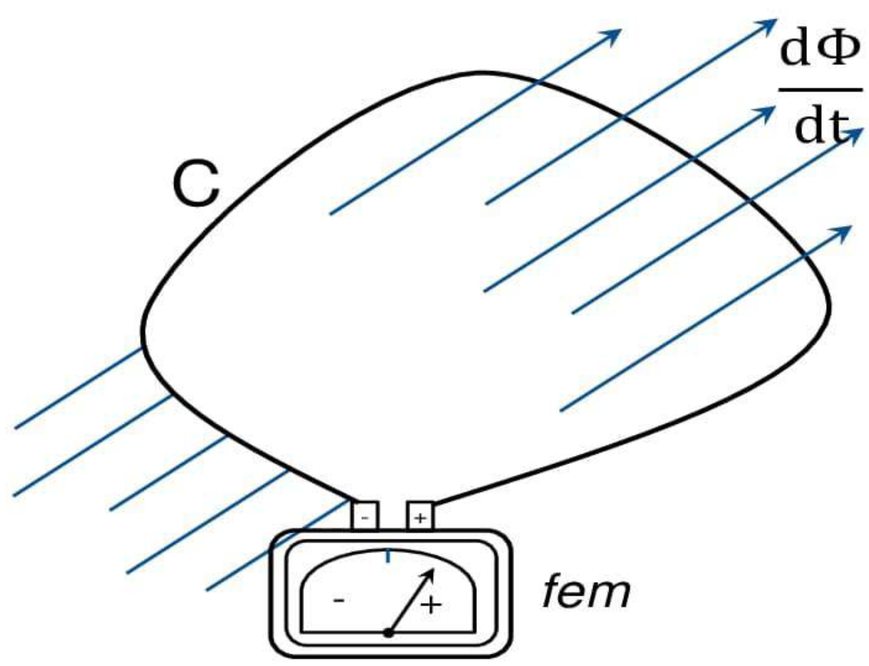
$$fem = \oint_c \bar{E}\,.\,dl \qquad [2\text{-}159]$$

Con los campos E y B estáticos, esta *fem* siempre fue cero. Ahora veremos el caso donde no es nula. Ya que ahora el campo E no puede ser definido a partir de la ley de Coulomb, es válido preguntarnos cómo se define.

Los resultados de un gran número de los experimentos realizados pueden resumirse asociando una fem que es igual a menos la variación del flujo magnético en el tiempo:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad [2\text{-}160]$$

con este cambio del flujo magnético que pasa por un circuito cerrado C. Se encuentra que este resultado, conocido como **ley de Faraday de la inducción electromagnética**, es independiente de la forma en que se cambia el flujo (el valor de **B** en varios puntos interiores del circuito puede cambiarse de muchas maneras). Es muy importante darse cuenta de que la ecuación (2-160) representa una ley experimental independiente: no puede deducirse de otras leyes experimentales y, efectivamente, no es, como se dice a veces, una consecuencia de la conservación de la energía aplicada al equilibrio de energía de corrientes en campos magnéticos.



Ya que por definición $fem = \oint_c \bar{E}\,.\,dl$

y $$\Phi = \int_S B.n.da \qquad [2\text{-}161]$$

la ecuación (2-159) puede escribirse como

$$\oint_C E.dl = -\frac{d}{dt}\int_S B.n.da = -\int_S \frac{dB}{dt}.n.da \qquad [2\text{-}162]$$

Recordando que **B** = μ.**H**

$$\oint_c \bar{E}\,.\,dl = -\mu \int_S \frac{d\boldsymbol{H}}{dt}.\,\mathbf{n}.\,da \qquad [2\text{-}163]$$

Si el circuito es rígido y estacionario, la derivada del tiempo puede tomarse dentro de la integral, donde se convierte en una derivada parcial del tiempo.

Además, el teorema de Stokes puede usarse para transformar la integral de línea de **E** en la integral de superficie del rotor de **E**. El resultado de estas transformaciones es

$$\int_S \nabla x E.n.da = -\int_S \frac{dB}{dt}.n.da \qquad [2\text{-}164]$$

Como esto debe suceder para todas las superficies *S*, se desprende que

$$\nabla x E = -\frac{dB}{dt} = -\mu.\frac{dH}{dt} \qquad [2\text{-}165]$$

que es la forma diferencial de la ley de Faraday. Esta es la generalización requerida del rotor de **E** = 0, que era válido para campos estáticos (los medios en movimiento y otras sutilezas requieren un tratamiento más cuidadoso, que está más allá del alcance de nuestro estudio).

El signo negativo en la ley de Faraday indica, como se puede demostrar fácilmente, que el sentido de la fem inducida es tal que tiende a oponerse al cambio que la produce. Así, si intentamos aumentar el flujo que pasa por un circuito, la fem inducida tiende a crear corrientes en tal sentido que disminuya el flujo. Si intentamos introducir un polo de un imán en una bobina, las corrientes originadas por la fem inducida forman un campo magnético que tiende a repeler el polo. Todos estos fenómenos están comprendidos en la ley de Lenz, que puede enunciarse como sigue:

En caso de cambio en un sistema magnético, algo sucede que tienda a oponerse a ese cambio.

La utilidad de la ley de Lenz no debe menospreciarse. En muchos casos, representa la forma más rápida de obtener información sobre reacciones electromagnéticas. Aún si se dispone de otros métodos, permite una valiosa comprobación.

Para hacerse una idea de la ley de Faraday, puede ser útil poner un ejemplo que, por lo general, es considerado como un caso particular de la ley, pero que *puede* analizarse completamente según la teoría electrostática desarrollada en los capítulos anteriores. Supongamos que un alambre metálico recto de longitud *l* se mueve en una dirección perpendicular a su longitud con una velocidad v. Supongamos que existe un campo magnético **B** perpendicular al plano en el cual se mueve el alambre, como muestra la figura.

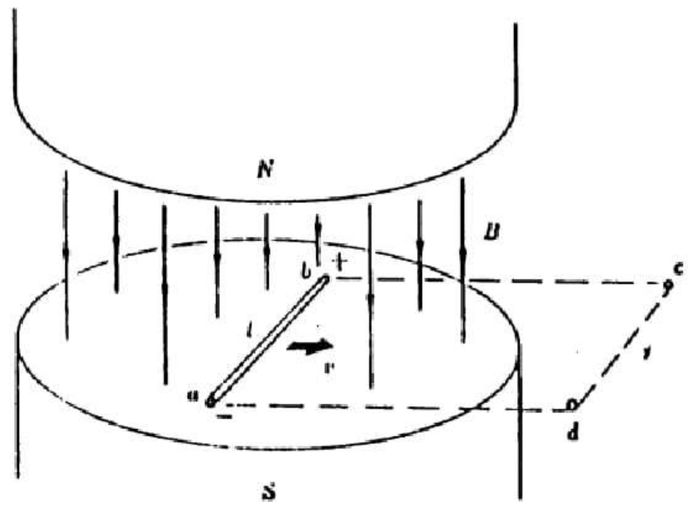


FIGURA 2-43: Voltaje producido por el movimiento de un alambre en un campo magnético.

Las cargas libres del alambre experimentarán la fuerza de Lorentz

$$F = q.(\,E + v \times B\,) \qquad [2\text{-}166]$$

que conduce a las cargas positivas y negativas a extremos opuestos del alambre, debido al término qv x **B**. En el estado estacionario, cuando las cargas libres no se mueven con respecto al alambre, la fuerza total sobre una carga es igual a cero; es decir, la fuerza magnética debe estar equilibrada en cada punto del alambre por una fuerza eléctrica opuesta de igual magnitud, generada por la separación entre las cargas.

$$E = v.B \qquad [2\text{-}167]$$

La Tercera y cuarta ecuación de Maxwell son coincidentes con las dos leyes de Gauss para campos eléctricos y campos magnéticos estáticos, dado que se cumplen también para campos variables en el tiempo.

$$\oint_S \boldsymbol{D}da = Q \qquad \nabla.D = \rho \qquad [2\text{-}168]$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}da = 0 \qquad \nabla.B = 0 \qquad [2\text{-}169]$$

2.6.3. Ecuaciones de Maxwell y sus bases empíricas

Estos dos casos analizados forman parte del conjunto de ecuaciones llamadas ecuaciones de Maxwell. El conjunto total consiste en cuatro ecuaciones con las cuales ya estamos familiarizados, es decir:

Forma vectorial diferencial de las Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla x H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad [2\text{-}154a]$$

$$\nabla x E = -\frac{dB}{dt} = -\mu.\frac{dH}{dt} \qquad [2\text{-}165]$$

$$\nabla.D = \rho \qquad [2\text{-}168]$$

$$\nabla.B = 0 \qquad [2\text{-}169]$$

Cada una de estas ecuaciones representa una generalización de ciertas observaciones experimentales:

(2-154a) representa una extensión de la ley de Ampere o generalización de la Ley de Ampere;

(2-165) es la forma vectorial-diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday;

(2-168) es la ley de Gauss de Campos Eléctricos que expresa que la variación de la Densidad de Campo Eléctrico **D** en una superficie cerrada es proporcional a la densidad volumétrica de cargas ρ comprendida dentro de la superficie cerrada.

(2-169) representa el hecho de que los monopolos magnéticos nunca han sido observados por lo tanto en una superficie cerrada no habrá variación de la Inducción Magnética **B**.

Forma integral de las Ecuaciones de Maxwell

$$\oint_c \bar{\boldsymbol{H}}\,.\,\boldsymbol{dl} = \int_s \left(\boldsymbol{\sigma}.\bar{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\partial \bar{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}}\right)\boldsymbol{ds} \qquad [2\text{-}156]$$

$$\oint_c \bar{E}\,.\,dl = -\mu \int_S \frac{d\boldsymbol{H}}{dt}.\mathbf{n}.\,da \qquad [2\text{-}163]$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}da = Q \qquad [2\text{-}168]$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}da = 0 \qquad [2\text{-}169]$$

Es claro que las ecuaciones de Maxwell representan expresiones matemáticas de ciertos resultados experimentales. Bajo estas circunstancias es evidente que no pueden demostrarse; sin embargo, la aplicabilidad para cualquier situación puede verificarse. Como resultado del extenso trabajo experimental, se cree ahora que las ecuaciones de Maxwell se aplican a casi todas las situaciones macroscópicas y se usan generalmente en forma semejante a la conservación de la cantidad de movimiento, como principios guía.

Las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones básicas para los campos electromagnéticos producidos por fuentes de carga y densidades de corriente $\boldsymbol{\rho}$ y **J**.

Si están presentes cuerpos materiales, para poder usar las ecuaciones de Maxwell se deben conocer las ecuaciones constitutivas, ya sea experimentalmente o de la teoría microscópica del tipo particular de materia: **D= ε.E** y **B=μ.H**. La densidad de corriente **J** en un material incluye una contribución dada por una tercera ecuación constitutiva, **J= σ.E**, que debe también ser conocida experimental o teóricamente.

Con la ecuación de la fuerza de Lorentz, **F=** $\boldsymbol{q}$**(E + v x B)**, que describe la acción de los campos sobre partículas cargadas, este conjunto de leyes nos da una descripción clásica completa de las partículas que actúan electromagnéticamente.

Hemos visto que la corriente de desplazamiento introducida en la sección anterior es necesaria para tener conservación de cargas y que, cuando se introduce en las ecuaciones de Maxwell, ellas implican la **ecuación de continuidad**, de modo que esta última no necesita ser añadida al conjunto de ecuaciones básicas.

$$\nabla . J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad [2\text{-}170]$$

2.6.4. Variaciones sinusoidales con el tiempo

En la práctica la mayoría de los generadores producen voltajes y corrientes – por tanto, campos eléctricos y magnéticos – que varían sinusoidalmente con el tiempo (al menos de un modo aproximado). Aunque no sea en este el caso, toda variación periódica puede analizarse siempre a base de variaciones sinusoidales de frecuencias fundamental y armónicos; es, pues, corriente suponer variaciones sinusoidales en la mayoría de los problemas.

Esto puede escribirse, por ejemplo,

$$E = E_0 . \cos \varpi t \qquad [2\text{-}171]$$

$$E = E_0 . \operatorname{sen} \varpi t \qquad [2\text{-}172]$$

Siendo $f = \omega / 2\pi$ la frecuencia de la variación. Las expresiones anteriores sugieren la aparición de un factor sinusoidal con el tiempo en cada término de las ecuaciones. Afortunadamente puede suprimirse este factor empleando la notación de *fasores* (fasorial). Consideremos como ejemplo la intensidad del campo eléctrico. El campo variable en el tiempo $\tilde{E}$ (r, *t*) puede expresarse en función de la cantidad fasorial E (r) correspondiente, así

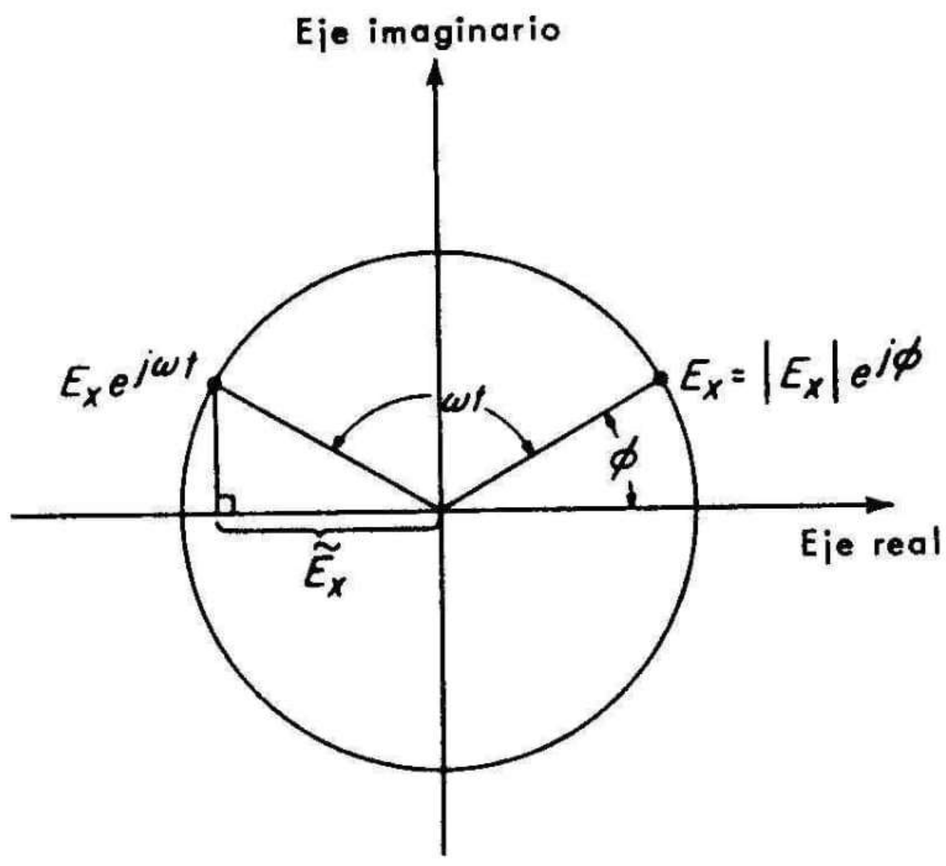


FIGURA 2-44

Por Euler

$$\tilde{E}(r,t) = E(r).e^{j\varpi t} = E(r).(\cos \varpi.t + j \operatorname{sen} \varpi t) \qquad [2\text{-}173]$$

$$\tilde{E}(r,t) = \operatorname{Re}\left[E(r).e^{j\varpi t}\right] = E(r).\cos \varpi.t \qquad [2\text{-}174]$$

en la que el símbolo (~) sobre la cantidad variable todo el tiempo se emplea para distinguirla de la cantidad fasorial. Se hará esta distinción siempre que sea necesaria en adelante en todo el apunte.

Para entender la notación fasorial es necesario considerar un componente sólo cada vez; por ejemplo, la componente en *x*. El fasor E_x está definido por la relación

$$\tilde{E}_X(r,t) = \operatorname{Re}\left[E_X(r).e^{j\varpi t}\right] = E_X(r).\cos \varpi.t \qquad [2\text{-}175]$$

En general, $E_x(r)$ es un número complejo, y así para un punto fijo **r** del espacio puede representarse a E_x , como un punto en el plano complejo, indicado en la figura . La multiplicación por $e^{j\omega t}$ da lugar a una rotación que cubre un ángulo ωt medido desde el ángulo ø. Al crecer el tiempo, el punto $E_x.e^{j\omega t}$ traza o describe una circunferencia cuyo centro es el origen. Tomar la parte real es lo mismo que tomar la proyección sobre el eje real, y estas variaciones son sinusoidales con el tiempo. La fase de la sinusoide queda determinada por el argumento ø del número complejo E_x , y así la cantidad variable con el tiempo puede expresarse como:

$$\tilde{E}_X(r,t) = \operatorname{Re}\left[|E_X|.e^{j\phi}.e^{j\varpi t}\right] = |E_X|.\cos(\varpi t + \phi) \qquad [2\text{-}176]$$

La definición de fasor anterior es una de las muchas definiciones posibles.

Por ejemplo, podría fácilmente emplearse el factor temporal $e^{-j\omega t}$ o hacer uso de la parte imaginaria en lugar de la real.

Otra posibilidad es la de introducir el factor $\sqrt{2}$ en el segundo miembro de la definición de fasor, haciendo así a $[E_x]$ representativo del valor eficaz más bien que del valor máximo.

Onda E(z,t) que muestra los fasores complejos desplegados a lo largo de z en $t = 0$, y su proyección en tiempo real (debajo)

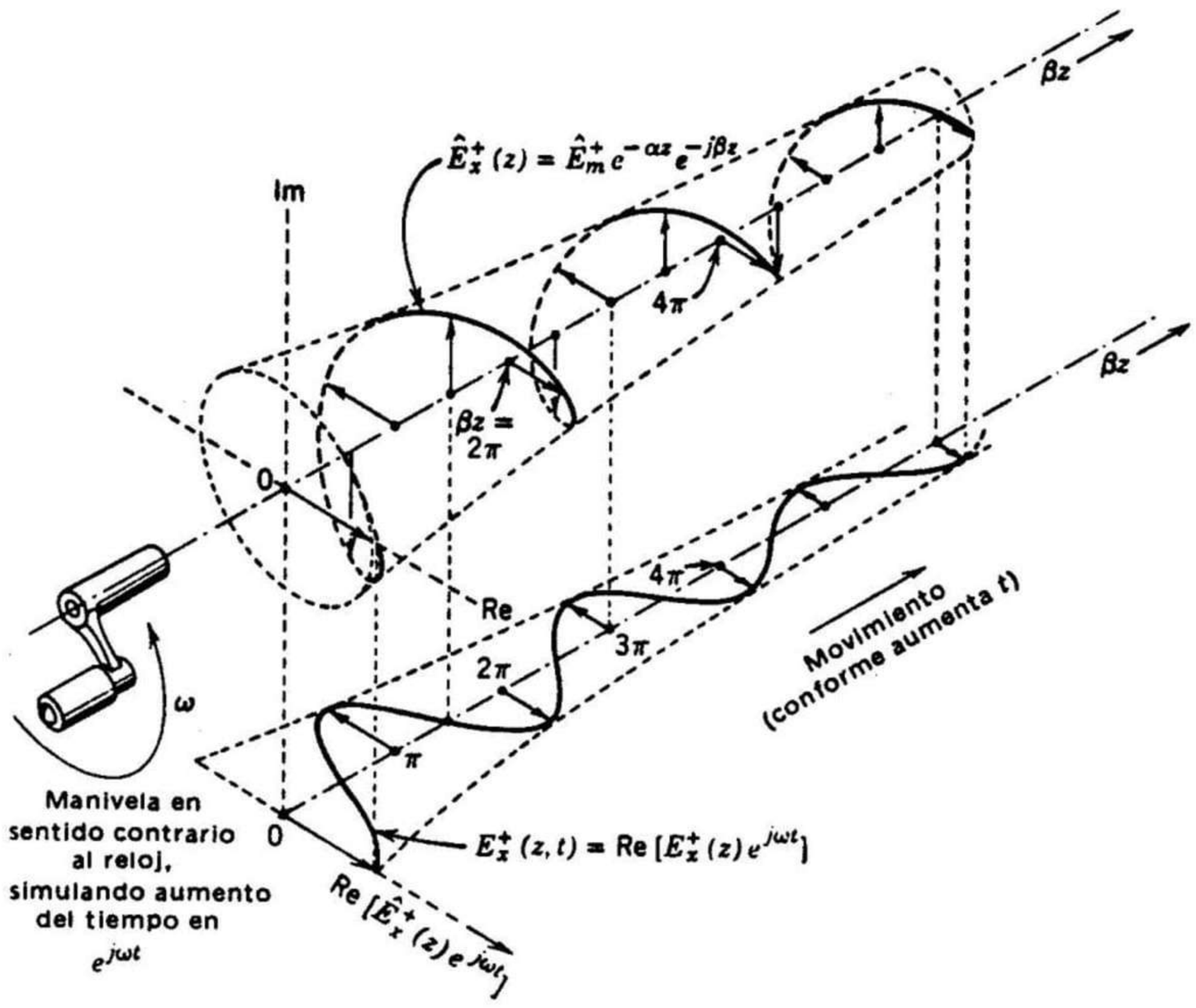


FIGURA 2-45

2.6.5. Ecuaciones de Maxwell en notación fasorial

Habiendo obtenido ya las ecuaciones generales temporales de Maxwell, es de desear ahora encontrar el correspondiente sistema de ecuaciones fasoriales aplicables a variaciones sinusoidales con el tiempo. Considérese, por ejemplo, la ecuación que sigue las magnitudes variables con el tiempo

$$\nabla x H = J + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad [2\text{-}177]$$

En el caso de un régimen sinusoidal podemos escribirla fasorialmente así

$$\nabla x \,\mathrm{Re}\left[H.e^{j\varpi t}\right] = \mathrm{Re}\left[J.e^{j\varpi t}\right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left[E.e^{j\varpi t}\right] \qquad [2\text{-}178]$$

Pueden intercambiarse las operaciones de tomar la parte real y de diferenciación así

$$\mathrm{Re}\left[\left(\nabla x H - j\varpi\varepsilon E - J\right)e^{j\varpi t}\right] = 0 \qquad [2\text{-}179]$$

Si la relación anterior debe ser válida en todo tiempo *t*, debe satisfacerse la expresión

$$\nabla x H = J + j\varpi\varepsilon E \qquad [2\text{-}180]$$

si

$$J = \sigma.E$$

$$\nabla x H = \sigma.E + j\varpi\varepsilon E = J_C + jJ_D \qquad [2\text{-}181]$$

que es la ecuación buscada en su forma fasorial, la cual puede ser considerada como la suma entre la ***corriente de conducción*** $\mathbf{J_C}$ y la ***corriente de desplazamiento*** $\mathbf{J_D}$. Es evidente que esta ecuación puede obtenerse de la ecuación temporal sustituyendo cada cantidad variable en un tiempo por un fasor y cada derivada por un factor $j\omega$.

Resumiendo, las ecuaciones de Maxwell para variaciones sinusoidales en el tiempo pueden expresarse en forma fasorial así (en ambos miembros no se ha incluido $e^{j\omega t}$ para mostrar su similitud con las expresiones anteriores):

Forma Integral	Forma Vectorial/Diferencial
$\oint_c \bar{H}.dl = \int_S (\sigma + j\omega\varepsilon)E.ds$	$\nabla x H = (\sigma + j\omega\varepsilon)E$
$\oint_c \bar{E}.dl = -j\omega\mu \int_S H.ds$	$\nabla x E = -j\omega\mu H$
$\oint_S \boldsymbol{D}.ds = \int_v \rho.dv$	$\nabla.\mathbf{D} = \rho$
$\oint_S \boldsymbol{B}.ds = 0$	$\nabla.\mathbf{B} = 0$

Estas ecuaciones incluyen la ecuación de continuidad extraída de la primera ecuación

$$\nabla.\nabla xH = \nabla.(\sigma + j\varpi\varepsilon)E = j\varpi\nabla.D + \nabla.J = 0 \qquad [2\text{-}182]$$

$$\nabla.J = -j\varpi\rho$$

o

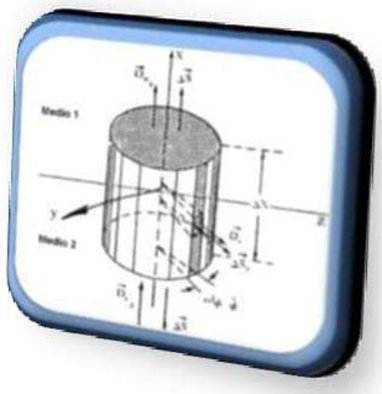
$$\oint_S J.ds = -\int_v j\omega\rho.dv \qquad [2\text{-}183]$$

Las relaciones fundamentales conservan sus formas, siendo D = εE, B = μH, J = σE.

"IMPORTANTE"

Es de mucha importancia antes de seguir adelante con el estudio, tener claros los conceptos, desarrollos de fórmulas y demostraciones de este capítulo pues van a servir de base y van a facilitar el aprendizaje de los próximos capítulos.

CAPÍTULO 3



CONDICIONES DE FRONTERA

Objetivo:

- Que el alumno comprenda y demuestre el comportamiento de las componentes normales y tangenciales del campo eléctrico y magnético en la superficie de frontera o contorno de dos medios de distintas características.
- Trataremos este tema con el objeto de tener una aplicación de las ecuaciones de Maxwell, A fin de comprenderlas mejor.
- Vamos a ver las condiciones que existen en los campos íntimamente ligados.
- El punto de unión entre los dos medios le vamos a llamar Frontera o Contorno, que es un plano recto en el punto donde analizaremos los campos.

3.1. MEDIO LINEAL

Participaremos con un medio homogéneo e isotrópico, que también es llamado lineal.

La definición de un medio homogéneo, es la de aquel que tiene las constantes del campo eléctrico, magnético y de conducción constantes, esto es:

$$\varepsilon = \text{permitividad constante } \frac{Faradio}{metro}$$

$$\mu = \text{permeabilidad constante } \frac{Henrio}{metro}$$

$$\sigma = \text{conductividad constante } \frac{Mhos}{metro}$$

La definición del medio ***isotrópico***, es la de aquel que la densidad del campo eléctrico es paralela a la intensidad de campo eléctrico, la densidad de campo magnético es paralela a la intensidad de campo magnético y la densidad de corriente de conducción es paralela a la intensidad de campo eléctrico. Esto expresado matemáticamente es:

D//E **B//H** **J//E**

para que esto sea cierto, es necesario que las constantes que representan el campo electromagnético y de conducción, ε, μ, y σ, sean reales.

Es decir, no tengan ningún ángulo.

Con las definiciones aquí puestas; para un medio homogéneo e isotrópico:

$$\varepsilon = \text{constante y real}$$

$$\mu = \text{constante y real}$$

$$\sigma = \text{constante y real}$$

Con estas condiciones tendremos:

$\mathbf{D}=\varepsilon.\mathbf{E}$ siendo $\mathbf{D}//\mathbf{E}$

$\mathbf{B}=\mu.\mathbf{H}$ siendo $\mathbf{B}//\mathbf{H}$

Por la forma puntual de la ley de Ohm

$\mathbf{J} = \sigma.\mathbf{E}$ siendo $\mathbf{J}//\mathbf{E}$

Ahora, además pondremos al medio una condición adicional. No debe existir ningún generador de la onda electromagnética. Sabremos que está presente; la causa que la origina no es necesaria en este momento. La causa que la origina, será estudiada en radiación. Esta condición nos indica que el medio es **pasivo**.

Emplearemos las ecuaciones de Maxwell en su forma vectorial diferencial, por lo tanto el medio debe ser continuo.

En resumen, las condiciones existentes al medio hasta este momento son las siguientes:

> *Homogéneo, Isotrópico, pasivo y continuo. Estas condiciones indican que el medio es lineal.*

3.2. Componentes Tangenciales de las Intensidades de Campo

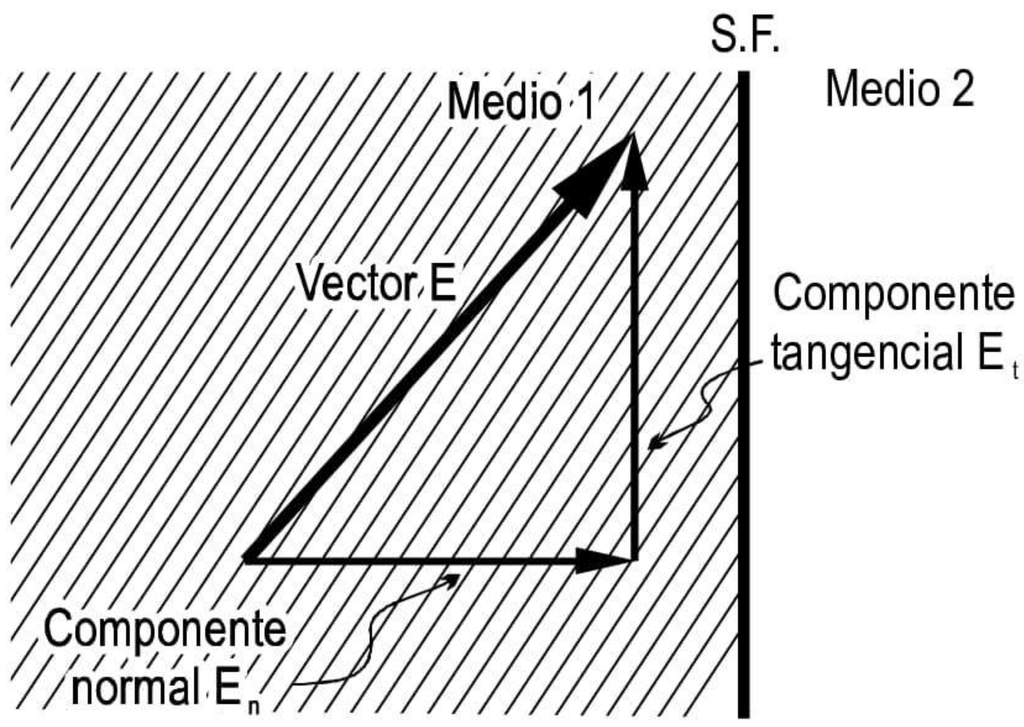


FIGURA 3-1: Componentes tangenciales y normales

3.2.1. Componente tangencial de la $\vec{E}$

Como estamos tratando de dos medios, quiere decir que el medio no será continuo, por lo tanto no debemos de emplear las ecuaciones de Maxwell en su forma vectorial diferencial, se deben de usar las que se encuentran en su forma integral.

Al estar hablando de la $\vec{E}$, la ecuación correspondiente será la segunda ecuación de Maxwell, o sea:

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_{Sup} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{ds}$$

Con objeto de tener la $\vec{E}$. los dos medios deben de ser dieléctricos.

La identificación de cada medio, será de acuerdo a su parte eléctrica con la constante de permitividad ε, a su parte magnética con la constante de permeabilidad μ, a su parte conductora con la constante de conductividad σ. Con estos parámetros tenemos el medio identificado.

Ver figura 3.2, para comprender mejor la parte que estamos tratando y que está mostrada a continuación.

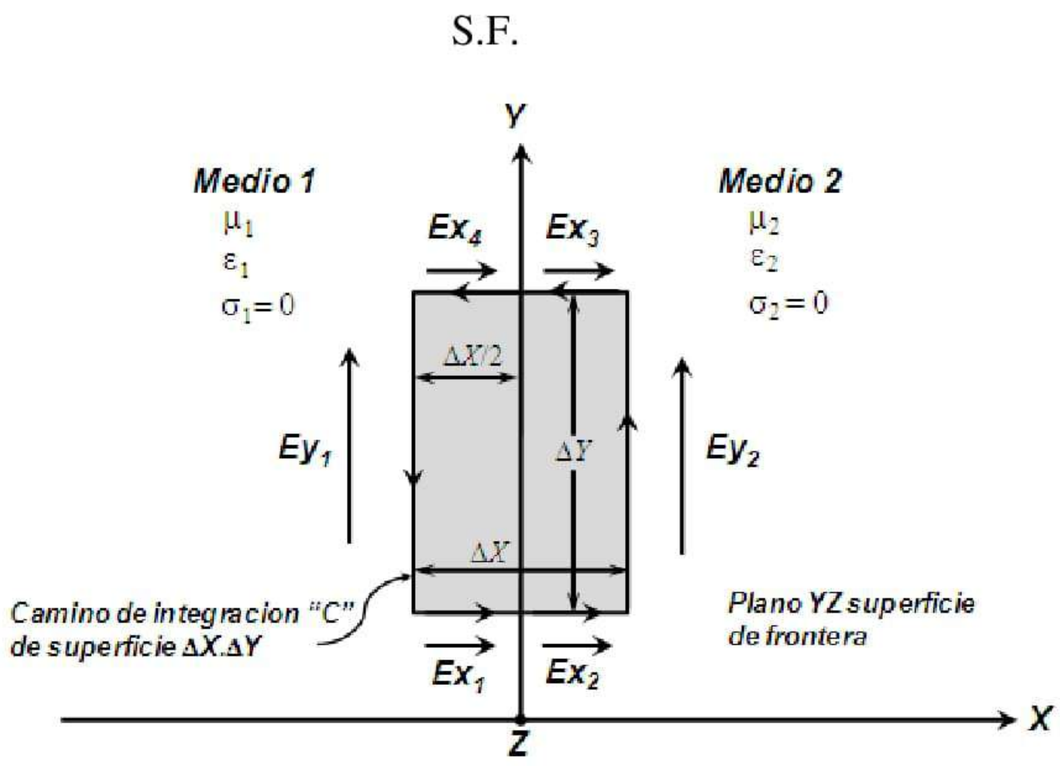


FIGURA 3-2: Componentes tangenciales y normales a la superficie de frontera (S.F.) de la $\vec{E}$

Siendo los dos medios dieléctricos, la constante de conductividad σ será igual a cero, y así lo hemos indicado en el dibujo. La intensidad de campo eléctrico tendrá dos componentes de acuerdo al plano XY, llamándoles tangente a la superficie de fronteras Ey y normal a la superficie de frontera Ex. Usamos un rectángulo para hacer el cálculo matemático, siendo este rectángulo con sus lados paralelos a los ejes coordenados.

En la ecuación anterior, pondremos el rectángulo $\Delta x\ \Delta y$, que está encerrando los dos medios, siendo Δx la anchura y Δy la longitud. Se pone la discontinuidad de los medios en X = 0. El desarrollo es:

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = E_{x1}\frac{\Delta X}{2} + E_{x2}\frac{\Delta X}{2} + E_{y2}\,\Delta Y - E_{x3}\frac{\Delta X}{2} - E_{x4}\frac{\Delta X}{2} - E_{y1}\,\Delta Y \qquad [3\text{-}1a]$$

$$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{\partial B_Z}{\partial t}\Delta X\,\Delta Y \qquad [3\text{-}1b]$$

Igualando los dos segundos términos y haciendo que el ancho del rectángulo $(\Delta x \to 0)$ tienda a cero, pero aun conservando en su centro la discontinuidad de los medios, se tendrá:

$$\cancel{E_{x_1}\frac{dX}{2}} + \cancel{E_{x_2}\frac{dX}{2}} + E_{y_2}\,\Delta Y_2 - \cancel{E_{x_3}\frac{dX}{2}} - \cancel{E_{x_4}\frac{\Delta X}{2}} - E_{y_1}\,\Delta Y_1 = \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial t}\,dX}\;\;\Delta Y \qquad [3\text{-}1c]$$

todos los términos que tengamos multiplicados por $\Delta x/2$ será igual a cero (con diagonales en la ecuación c.), y el segundo miembro al ser Bz finita, multiplicada por Δx que es infinitesimalmente pequeña, será igual con cero (subrayada con diagonal en la ecuación c.), por lo que tendremos:

$$E_{y_2}\,\Delta Y_2 - E_{y_1}\,\Delta Y_1 = 0$$

y por ser $\Delta Y_1 = \Delta Y_2$ tendremos:

$$\left(E_{y_2} - E_{y_1}\right)\Delta Y = 0$$

por lo que finalmente se llegará a:

$$\boxed{E_{y_2} = E_{y_1}} \qquad [3\text{-}2]$$

que es precisamente la primera condición de frontera, diciéndonos

> *"El componente tangencial de la intensidad de campo electrico en dos medios dielectricos es continua", lo que hay en un medio es igual a lo que hay en el otro medio.*

3.2.2 Componente tangencial de la $\vec{H}$

3.2.2.1. Dos medios dieléctricos

S.F.

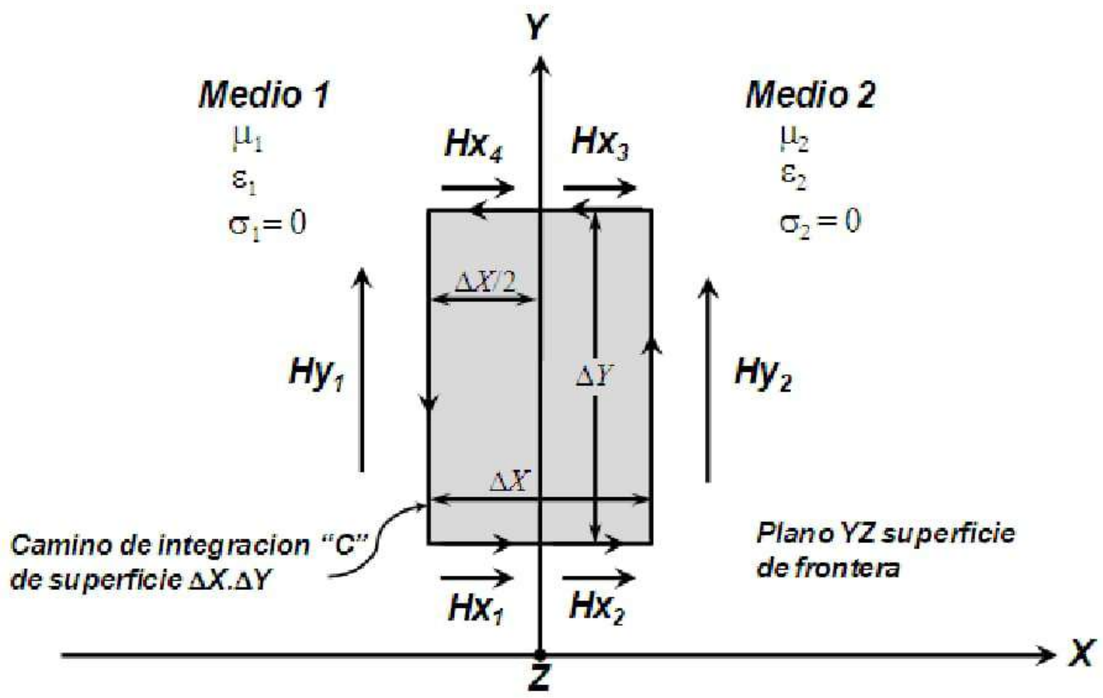


FIGURA 3-3: Componentes tangenciales y normales a la superficie de frontera de la $\vec{H}$

La representación de los dos medios diferentes, y la superficie que los contiene, es sumamente parecida al de la figura 3.2 y aquí representada como número 3.3, poniendo en lugar de la $\vec{E}$, la $\vec{H}$ en sus componentes tangenciales y normales a la superficie de frontera. Nuevamente en X = 0 está la discontinuidad de los dos medios.

Si tenemos medios diferentes y estamos tratando con la $\vec{H}$, la expresión que debemos de emplear, será la primera ecuación de Maxwell en su forma integral. Esto es:

$$\oint \vec{H}.\vec{dl} = \int_{Sup} \left(\vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\vec{ds}$$

aplicando ésta fórmula a nuestra trayectoria cerrada y el rectángulo elemental de la superficie, se tendrá:

$$\oint \vec{H}.\vec{dl} = H_{x1}\frac{\Delta X}{2} + H_{x2}\frac{\Delta X}{2} + H_{y2}\,\Delta Y - H_{x3}\frac{\Delta X}{2} - H_{x4}\frac{\Delta X}{2} - H_{y1}\,\Delta Y \qquad [3\text{-}3a]$$

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = \left(\vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\Delta X \Delta Y \qquad [3\text{-}3b]$$

igualando los dos segundos miembros de las ecuaciones 3-3a y 3-3b., tendremos que para llegar a la condición de frontera, haremos que $\Delta x \to 0$ pero conservando dentro la superficie de frontera, que es la discontinuidad entre los dos medios. Además, consideramos:

$$\vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{como cantidades finitas}$$

$$\cancel{H_{x_1}\frac{\Delta X}{2}} + \cancel{H_{x_2}\frac{\Delta X}{2}} + H_{y_2}\,\Delta Y_2 - \cancel{H_{x_3}\frac{\Delta X}{2}} - \cancel{H_{x_4}\frac{\Delta X}{2}} - H_{y_1}\,\Delta Y_1 = \left(\vec{J}_C + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}\right)\Delta x\,\Delta Y$$

todos los términos multiplicados por $\Delta x/2$ serán iguales a cero, ya que $\Delta x/2$ es un elemento infinitésimamente pequeño, y por ser J_{C_z} finita y $\partial\vec{D}/\partial t$ también finita, al estar multiplicadas por dX, será también igual a cero; por lo que tendremos:

$$H_{y_2}\,\Delta Y - H_{y_1}\,\Delta Y = 0$$

sacando factor común a ΔY

$$\Delta Y\left(H_{y_2} - H_{y_1}\right) = 0$$

y por lo tanto finalmente se tendrá

$$\boxed{H_{y_2} = H_{y_1}} \qquad [3\text{-}4]$$

siendo la segunda condición de frontera, para el caso particular de dos medios dieléctricos, la cual nos dice:

> *"El componente tangencial de la intensidad de campo magnetico para dos medios dielectricos es continua"*

lo que vale en un dieléctrico, es lo mismo a lo que valdrá en el dieléctrico contiguo.

3.2.2.2. Un medio conductor

Ahora uno de los medios será un perfecto conductor. El medio número dos es el que vamos a considerar un perfecto conductor.

La figura representativa es la número 3-3

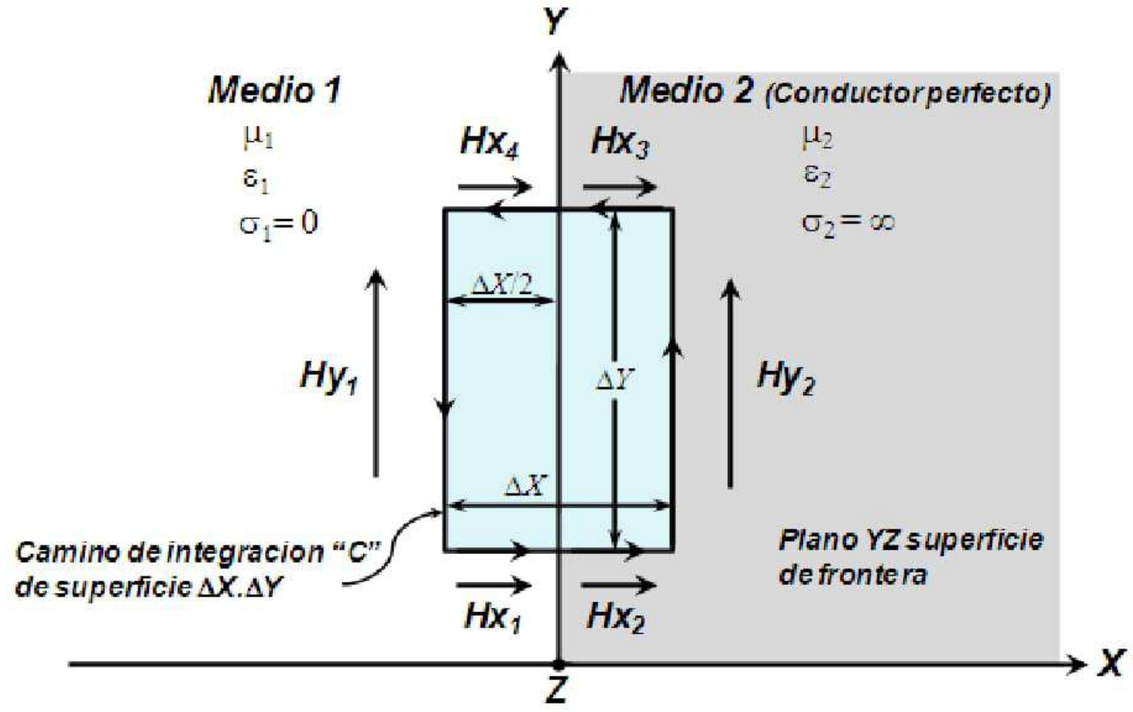


FIGURA 3-4: Unión de medio conductor y medio dieléctrico. Representación de los componentes de la $\vec{H}$

Se puede apreciar que los componentes de la $\vec{H}$, son iguales a los del caso próximo anterior. Debido a ser el medio discontinuo, y estar analizando la intensidad de campo magnético, estamos empleando la primera ecuación de Maxwell en su forma integral, usando lo analizado en el caso próximo anterior (dos medios dieléctricos) hasta las ecuaciones 3-3a., y 3-3b., que hasta ahí siguen siendo iguales.

Para encontrar la condición de frontera del componente tangencial de la $\vec{H}\left(H_{y_1}\right)$, es necesario recordar algo de los medios conductores.

Sabemos que en un medio perfecto conductor, la $E = f\left(t\right)$ dentro del medio es igual a cero, y por lo tanto la $B = f\left(t\right)$ también será igual a cero; esto es, el componente tangencial B_y será discontinuo, pues dentro del medio perfecto conductor no hay $\vec{B}$

Conocemos para encontrar en qué consiste la discontinuidad de la intensidad de campo magnético, la corriente de conducción en el medio perfecto conductor. La corriente está originada por cargas eléctricas en movimiento y el movimiento será función de la frecuencia. Expresado matemáticamente es:

$$I = \frac{\partial q}{\partial t}$$

pero además sabemos que:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho \cdot dv = \int_{Sup} \overrightarrow{J_C} \cdot \overrightarrow{dS} \qquad [3\text{-}5]$$

y por ser las cargas eléctricas del mismo signo, por la ley de Coulomb, tienen fuerza eléctrica de repulsión entre ellas. Ver figura 3-5, que trata de simbolizar lo aquí indicado y lo que a continuación seguiremos analizando.

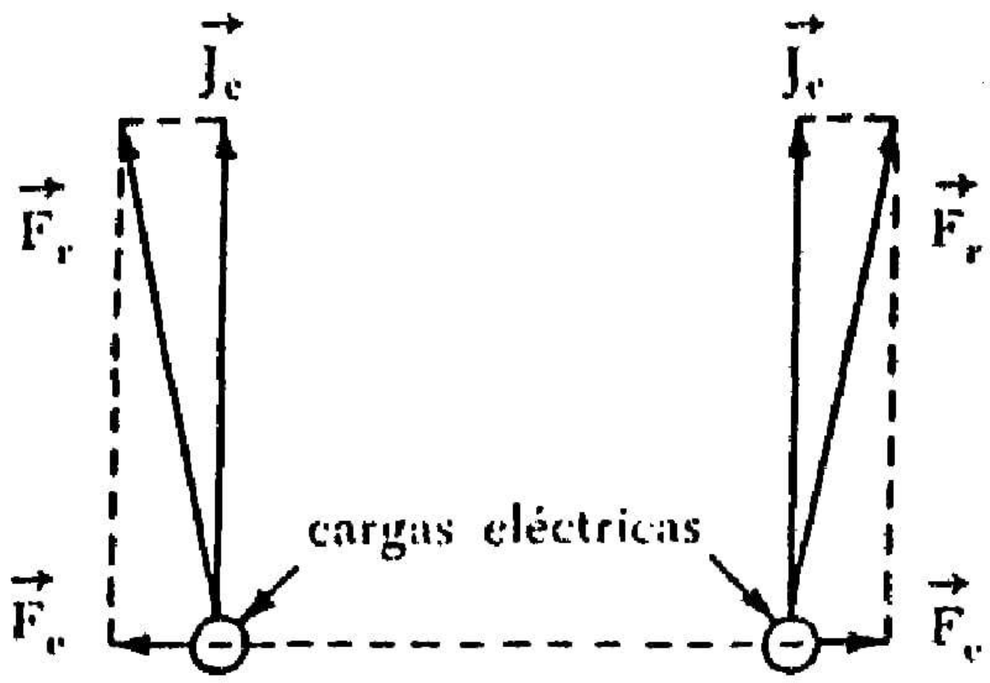


FIGURA 3-5: Fuerzas actuantes en la carga eléctrica

Las cargas eléctricas tienen dos fuerzas, una debida a la que origina la densidad de corriente $\vec{J}_C\left(AM^{-2}\right)$ y la otra expresada por la ley de Coulomb por ser cargas del mismo signo que se repelen, puesta como $\vec{F}_e$.

La suma vectorial de estas dos fuerzas será igual a:

$$\vec{F}_e + \vec{J}_C = \vec{F}_r \qquad [3\text{-}6]$$

Habíamos indicado que la corriente eléctrica I es función de la frecuencia, expresado matemáticamente, la

$$I = f\left(t\right)$$

y la

$$f\left(t\right) = e^{j\omega t} \qquad \text{siendo} \qquad \omega = 2\,\pi\, f\ .$$

Vemos que *I* depende de la frecuencia.

Sabremos posteriormente, que el espacio que entra dentro del medio conductor una onda electromagnética o la corriente eléctrica, recibe el nombre de **profundidad de penetración** para la onda electromagnética y **efecto Sking** para la corriente. Esta profundidad de penetración o efecto Sking es relación inversa de la constante de conductividad del medio y de la frecuencia de la onda electromagnética o de la corriente que circula en el medio. A mayor conductividad del medio o a mayor frecuencia de la onda electromagnética o de la corriente, la profundidad de penetración o efecto Sking, será menor.

Para comprender lo relativo a la frecuencia, sabemos que

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad [3\text{-}7]$$

usando sólo la parte real, haremos su representación.

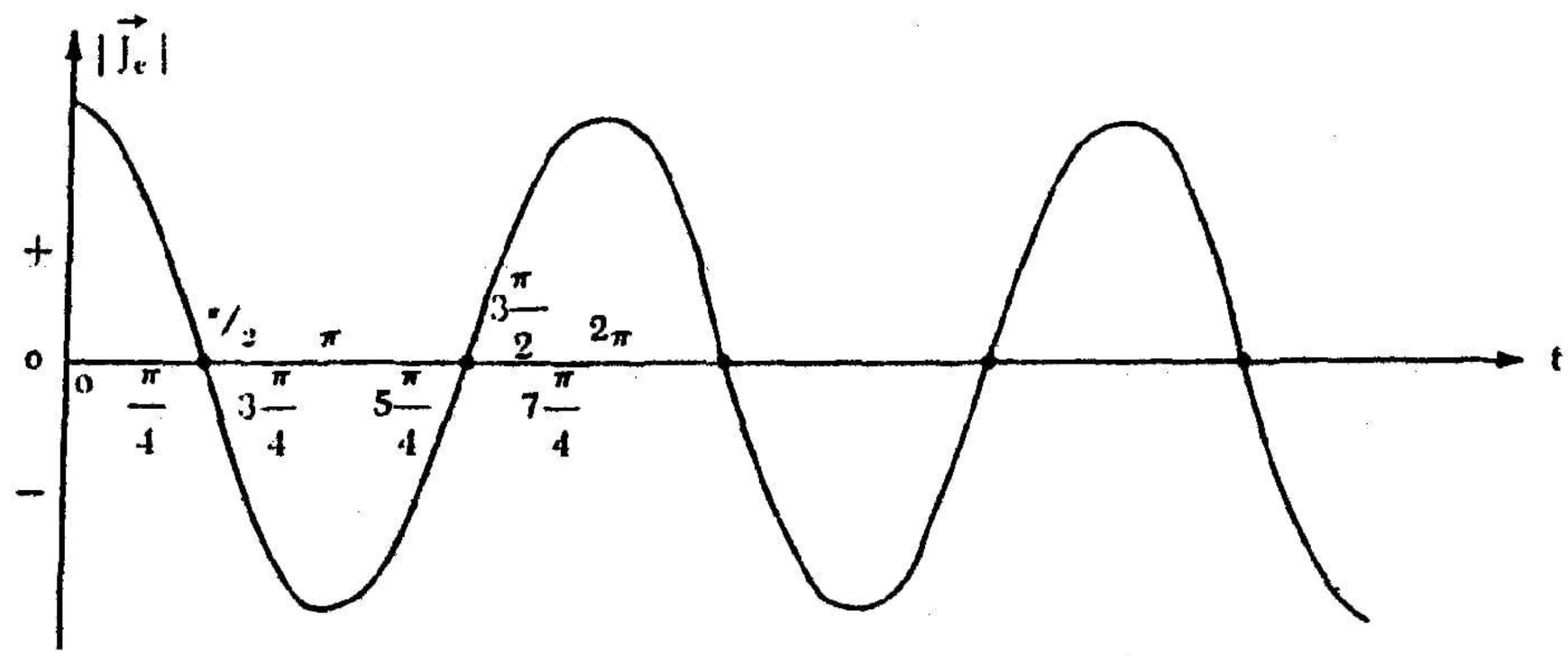


FIGURA 3-6: Representación cosenoidal de $\vec{J}_C$

A medida que se aumenta la frecuencia, tendremos en el mismo tiempo más puntos que $\vec{J}_C = 0$. En esos instantes de tiempo, solo queda la acción de la $\vec{F}_e$, y como el medio es un conductor perfecto, no hay ninguna oposición a que las cargas eléctricas se muevan y por lo tanto se separará.

Cuando la corriente es directa, la frecuencia es cero; todo el tiempo existirá $\vec{J}_C$, que es una fuerza mayor que la $\vec{F}_e$ de repulsión entre las cargas eléctricas, y por lo tanto todas las cargas eléctricas circularán en toda el área transversal del conductor.

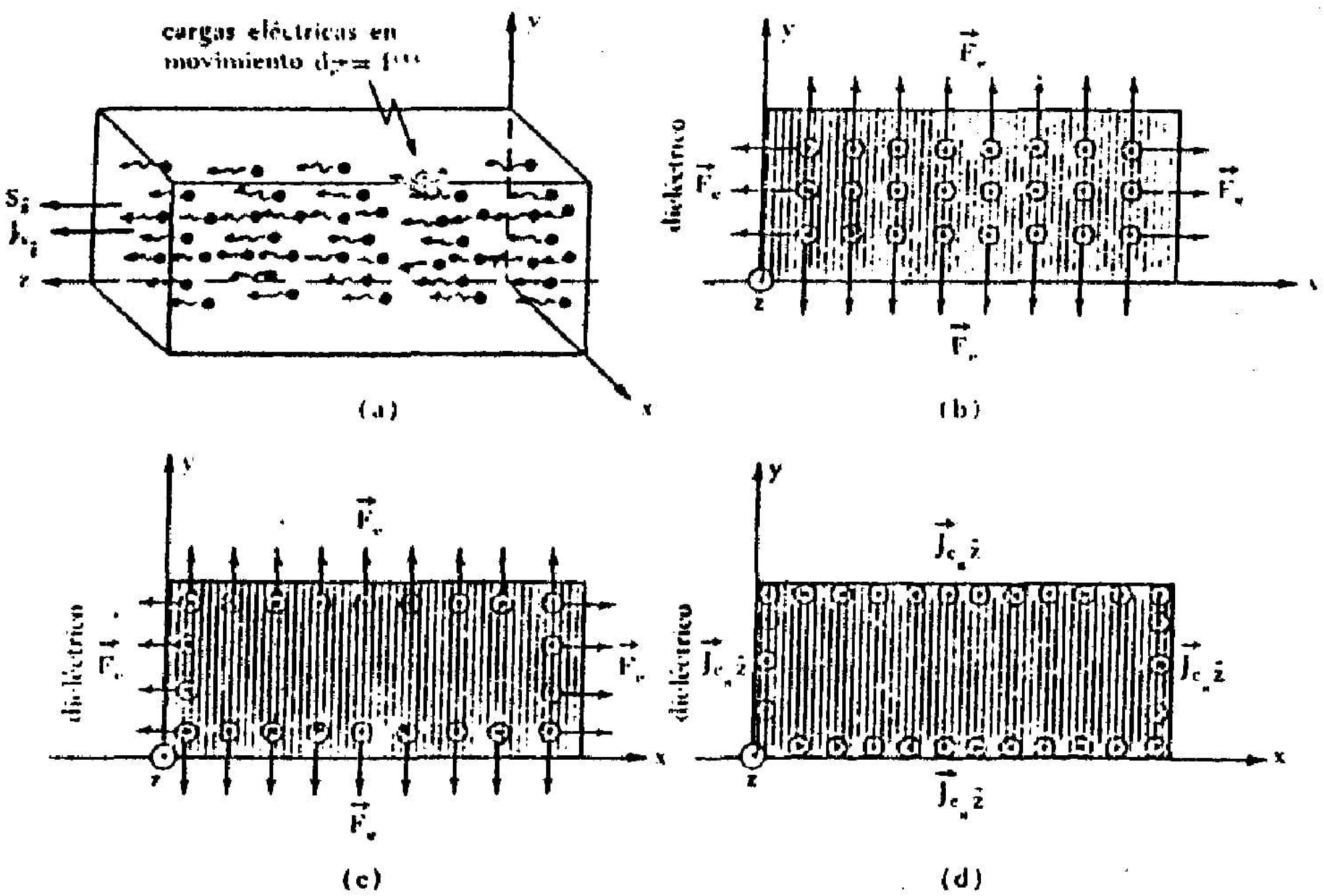


FIGURA 3-7: Transformación de $\vec{J}_C$ en $\vec{J}_{C_S}$. A) Condición inicial. B) Condición inicial, vista lateral. C) Condición intermedia. D) Condición final.

En nuestro caso por ser $\sigma = \infty$ y ser $\vec{J}_C = f(t)$, la profundidad de penetración o efecto Sking será igual a cero. Esto originará, que en un tiempo muy corto, alrededor de 10^{-19} *segs.*, llamado tiempo de

relajación, a) Se verá en la ecuación 3.9 la densidad de corriente $\vec{J}_C$ se transformará en densidad de corriente superficial $\vec{J}_{C_S}$. Para comprenderlo físicamente ver figura 3-7.

La $\vec{F}_e$ hará que las cargas se repelan en el tiempo en que $\vec{J}_C$ sea igual a cero, dos veces cada longitud de onda, llegando como consecuencia a la superficie del medio conductor. De esa superficie no pueden pasar, porque el medio que rodea al conductor es un medio dieléctrico cuya $\sigma = 0$, lo que indica que su nivel de energía es superior a la $\vec{F}_e$. Dando como consecuencia la transformación de la densidad de corriente de conducción $\vec{J}_C$ en **densidad de corriente lineal en lasuperficie** del medio conductor $\vec{J}_{C_S}$, la cual se mide en AM^{-1}, siendo los M^{-1} en la superficie del medio conductor, no la profundidad.

Al efectuar las operaciones matemáticas, hay que tener un cuidado muy especial para **evitar la indeterminación**. Su procedimiento es el siguiente:

Sabemos que la definición de la corriente de conducción es:

$$\vec{J}_C = \frac{I}{\Delta X\ \Delta Y}\ \hat{z} = \frac{1}{\Delta X}\ \frac{I}{\Delta Y}\ \hat{z}\left[\frac{A}{m^2}\right] = \left[\frac{Ampere}{metros^2}\right] \qquad [3\text{-}6]$$

pero

$$\frac{I}{\Delta Y}\ \hat{z} = \vec{J}_{C_S}\left[\frac{A}{m}\right] \qquad [3\text{-}7]$$

por lo tanto

$$\vec{J}_{C_S} = \vec{J}_C\,\Delta X \qquad [3\text{-}8]$$

Para llegar a la conclusión de frontera hacemos que $\Delta x \to 0$. En el volumen del medio conductor, hay un gran número de cargas, que es una magnitud que no varía, ni aumenta ni disminuye. Cuando hacemos que la dimensión del volumen se haga muy pequeña $(\Delta x \to 0)$, las cargas se agruparán en la superficie del medio conductor, haciendo que se sigan moviendo en la dirección Z en nuestro caso, por la fuerza de $\vec{J}_C$, pero $\vec{J}_C$ de acuerdo a la fórmula 3-6, será igual a:

$$\vec{J}_C = \frac{1}{\Delta X}\ \vec{J}_{C_S} \to \infty \qquad [3\text{-}9]$$

$$\lim \Delta X \to 0$$

que lo podemos obtener en la forma siguiente:

$$\vec{J}_C \to \infty \qquad \text{cuando } \Delta X \to 0$$

y

$$\frac{\partial D_Z}{\partial t} \qquad \text{permanece finito}$$

En esta condición límite las ecuaciones 3-3a y 3-3b., al ser igualadas nos resultarán:

$$\cancel{H_{x_1}\frac{\Delta X}{2}} + \cancel{H_{x_2}\frac{\Delta X}{2}} + H_{y_2}\,\Delta Y - \cancel{H_{x_3}\frac{\Delta X}{2}} - \cancel{H_{x_4}\frac{\Delta X}{2}} - H_{y_1}\,\Delta Y = \frac{\vec{J}_{C_S}}{\cancel{\Delta X}}\cdot\cancel{\Delta X}\cdot\Delta Y + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}\cdot\Delta X\ \Delta Y \qquad [3\text{-}10]$$

todos los términos multiplicados por $\Delta X / 2$ serán iguales a cero, ya que $\Delta y / 2$ es el elemento infinitesimalmente pequeño, y por ser $\frac{\partial D_Z}{\partial t}$ finita al estar multiplicada por ΔX también será igual a cero.

Pero por la ecuación 3-9., tenemos que J_C se transformó en J_{C_S} y por lo tanto la ecuación 3-10., se transforma a:

$$\left(H_{y_2} - H_{y_1}\right) \Delta Y = J_{C_S} \Delta Y \qquad [3\text{-}11]$$

Por el hecho de ser ΔY en los dos términos la misma, la podemos eliminar, y además ya habíamos dicho que si la $\vec{E}$ dentro del medio conductor es cero, la intensidad de campo magnético en el medio conductor también debe de ser cero, ya que la $\vec{E}$ es función del tiempo.

La ecuación 3-11, nos quedará finalmente como:

$$-H_{y_1} = J_{C_S} \quad ; \; Hy_2 = 0 \qquad [3\text{-}12]$$

puesta en función de fasores será igual a la siguiente expresión:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \vec{H}_y = \vec{J}_{C_S} \quad ; \; Hy_2 = 0 \qquad [3\text{-}13]$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ normal a la superficie de frontera en la dirección al medio conductor. En nuestro caso estaría en la dirección positiva del eje de las X. Ver figura siguiente:

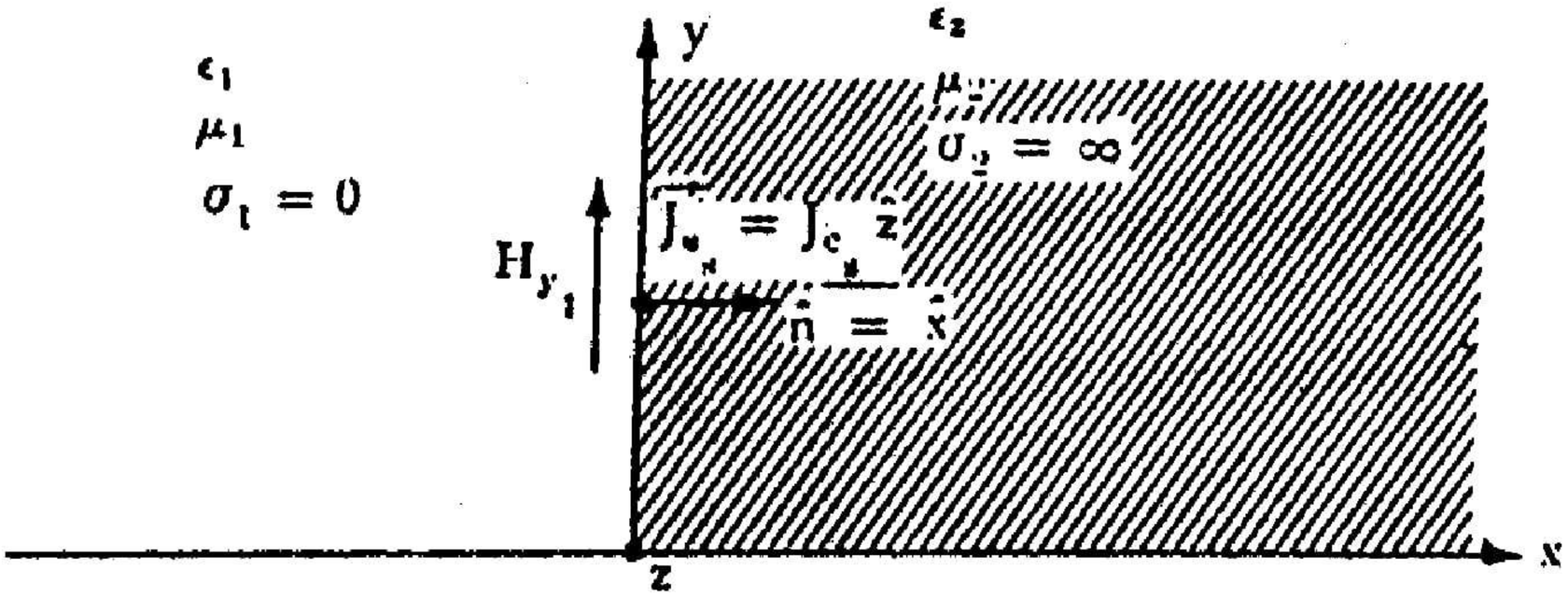


FIGURA 3-8: Representación de la segunda condición de frontera. Segundo medio un conductor perfecto $\vec{J}_{C_S} = \vec{J}_{C_S}\,\hat{\mathbf{z}}$

Las ecuaciones (3-12) y (3-13), son precisamente la segunda condición de frontera, para el caso de que uno de los medios sea un perfecto conductor. Las ecuaciones indican

> *"El componente tangencial de la $\vec{H}$, es discontinua, pues en el medio conductor aparece una densidad de corriente superficial".*

Este caso es de vital importancia por su utilidad práctica, pues nos sirve para comprender la existencia de las antenas, tanto las receptoras como las de transmisión.

En las **antenas receptoras**, la componente de la intensidad de campo magnético $\vec{H}$ de la onda electromagnética que está viajando en un dieléctrico (aire), incide en la antena receptora, que es un medio conductor, a la cual la rodea, puesto que el campo magnético es una trayectoria cerrada, siendo en consecuencia tangente al medio conductor ver figura 3-9(a), originando en consecuencia a lo largo del medio conductor una densidad de corriente superficial $\vec{J}_{C_S}$.

La $\vec{J}_{C_S}$ al circular en el circuito receptor origina a su vez, la señal en forma de potencial eléctrico que es amplificada al nivel necesario, para que sea oída, vista, oída y vista o que mueva aparatos de control.

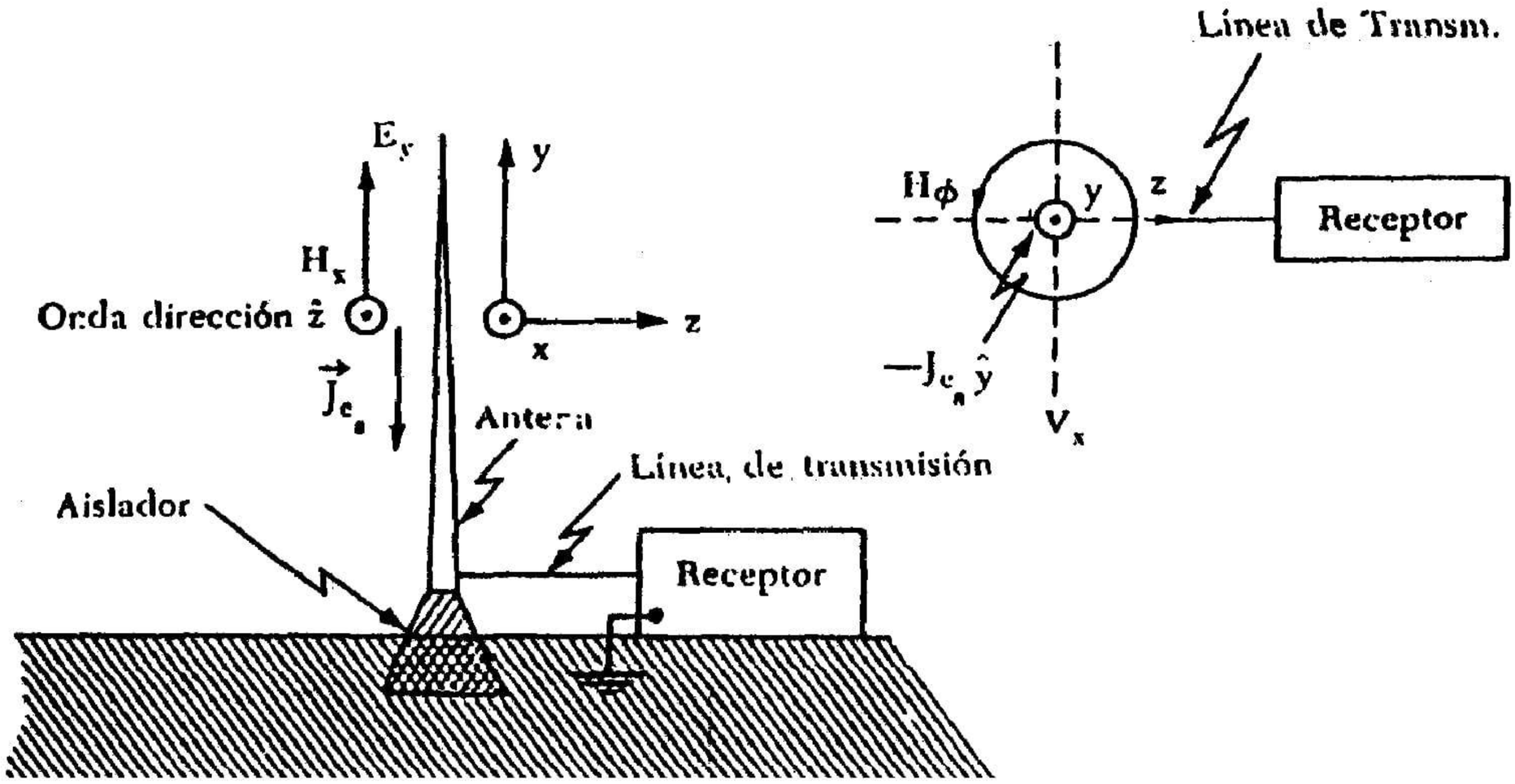


FIGURA 3-9(a): Segunda condición de frontera aplicada a una antena receptora

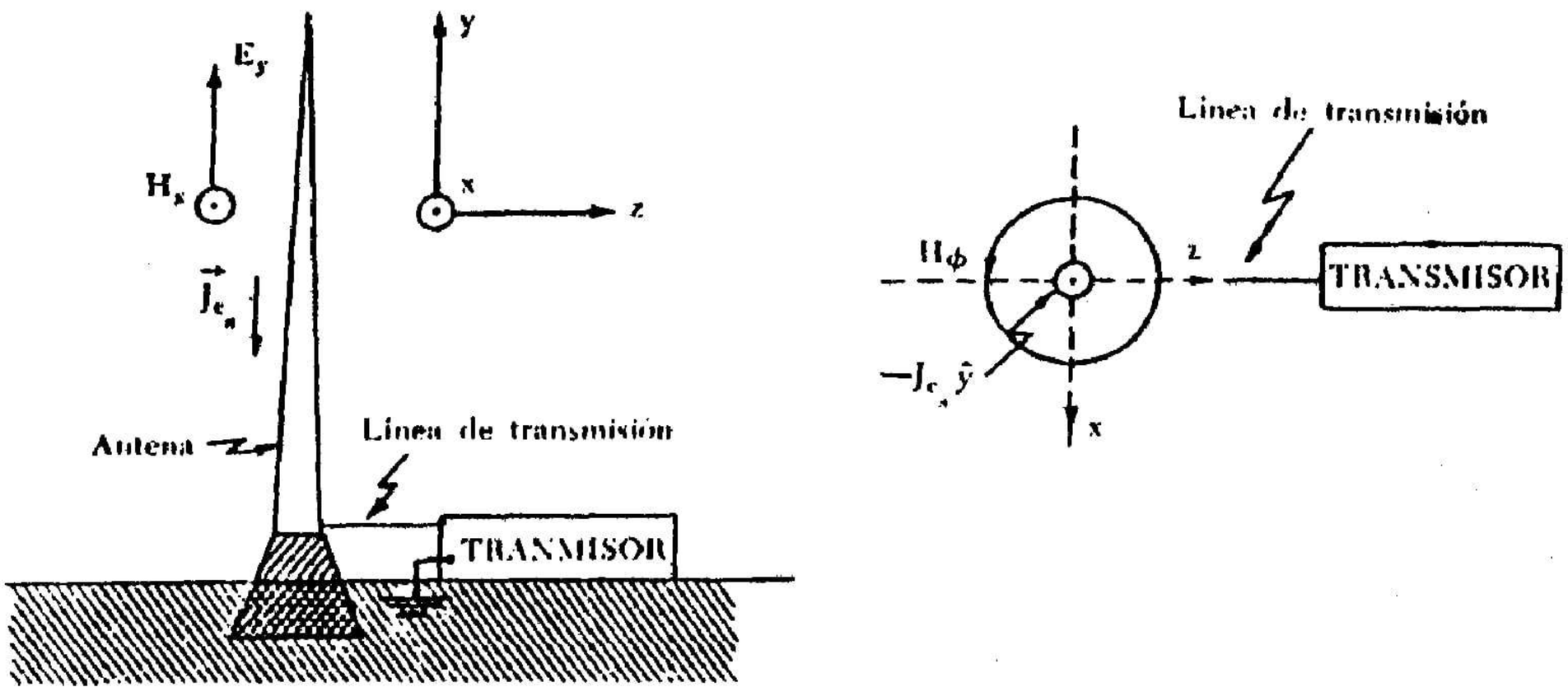


FIGURA 3-9(b): Segunda condición de frontera aplicada a una antena transmisora

En una **antena transmisora**, sucede que la corriente de alta frecuencia enviada por el transmisor, a través de una línea de transmisión al elemento radiador de la onda electromagnética (la antena transmisora, ver figura 3-9b.), la densidad de corriente $\vec{J}_C$ se transforma en el medio conductor, debido a la alta frecuencia y a la alta σ del medio en una **densidad de corriente lineal en la superficie** $\vec{J}_{C_S}$,

que es tangente al medio dieléctrico, originando en el medio dieléctrico una Intensidad de campo magnético $\vec{H}$ tangencial, que a su vez originará una intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$, y la $\vec{E}$ otra $\vec{H}$ y así sucesivamente formando en consecuencia en el dieléctrico una onda electromagnética, que posteriormente se analizará.

Hemos visto, que la onda electromagnética lleva dentro de ella la información que deseamos mandar a puntos lejanos, a muchas personas, o recibir la información de puntos lejanos. Es de grandísima importancia en las comunicaciones de las ondas electromagnéticas, y por lo tanto el elemento receptor por medio de la antena receptora, y el elemento transmisor la antena transmisora; comprendiendo ambas en su operación matemática por la segunda condición de frontera, siendo uno de los medios un conductor.

También es muy útil en la unión de un medio dieléctrico con un medio conductor, tal como las líneas de transmisión o las guías de onda.

De antemano diremos que una línea de transmisión es la que sólo transporta la energía eléctrica, pero sin que la radie al medio dieléctrico. Se utiliza para la conducción del transmisor o el receptor a la antena.

3.3. COMPONENTES NORMALES DE LA DENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO

3.3.1. Componente normal de la densidad de campo eléctrico $\vec{D}$

3.3.1.1. Dos medios dieléctricos

Los medios diferentes son dieléctricos. El componente normal del campo que estamos empleando es de la $\vec{D}$. De acuerdo con las condiciones de medios diferentes y la parte de campo eléctrico empleado, trabajaremos con la tercera ecuación de Maxwell que se encuentra en su forma vectorial integral. Recuerdan que esta expresión matemáticamente expresada es la siguiente:

$$\int_{Sup} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int_{Vol} \rho \cdot dv$$

y los medios con sus componentes los indicaremos en la figura 3-10.

Tenemos en la ecuación una superficie cerrada que está originando en nuestro caso un volumen cilíndrico, por lo que debemos de trabajar en este volumen, y así está representado en la figura. La superficie de frontera está en el plano *YZ*. Las superficies de acuerdo a lo ya establecido, son siempre saliendo del volumen de que forman parte, estando indicadas en la figura.

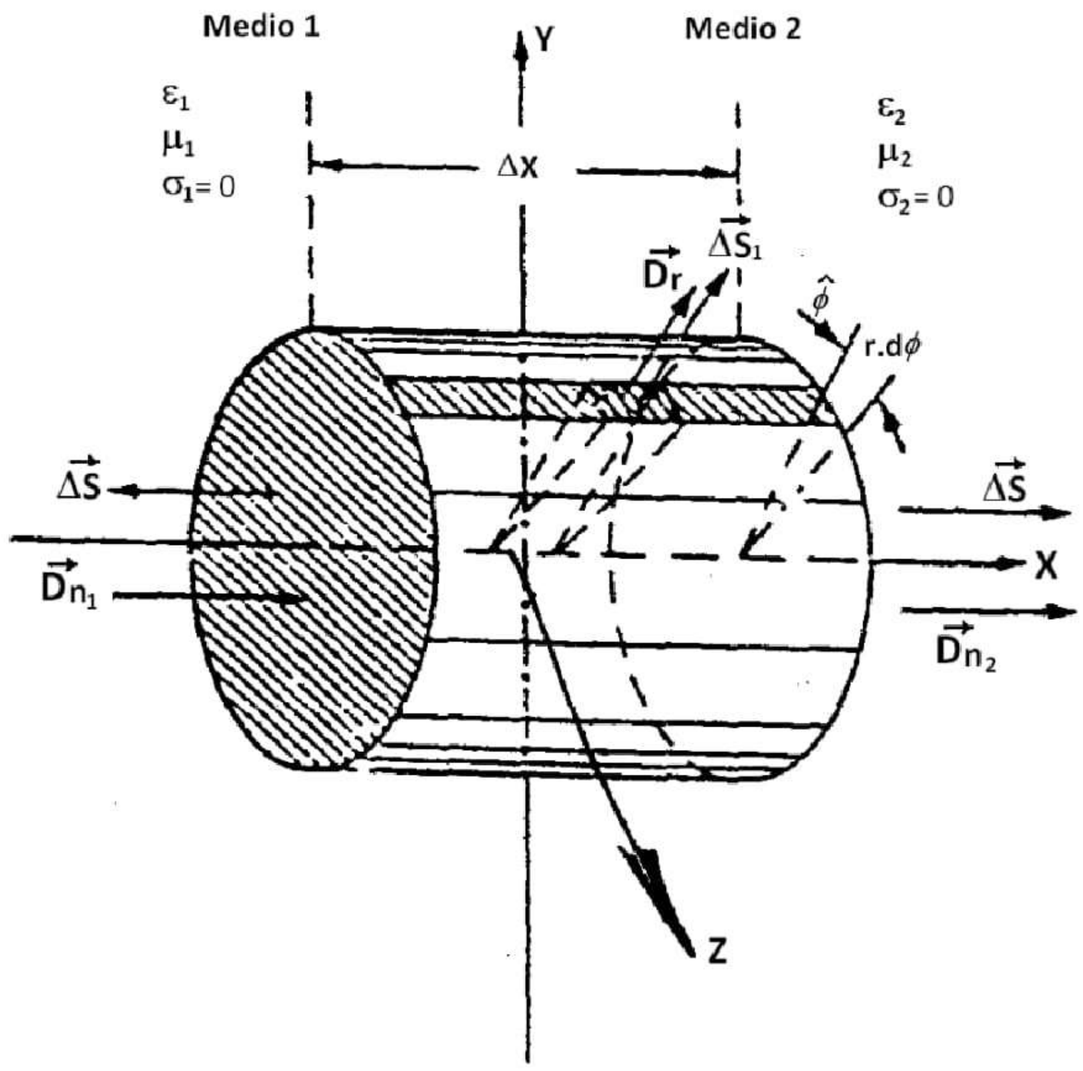


FIGURA 3-10: Representación de los componentes de la $\vec{D}$ en dos medios dieléctricos contiguos

Aplicando la tercera ecuación de Maxwell tendremos:

$$\oint_{Sup} \vec{D} \cdot \overrightarrow{dS} = -D_{n_1} \Delta S + D_r r d\phi \Delta x + D_{n_2} \Delta S = \rho \Delta S \Delta X \qquad [3\text{-}11]$$

para llegar a la superficie de frontera, estando el volumen abarcando los dos medios, tendremos que hacer que $\triangle x \rightarrow 0$. Consideramos ρ como una magnitud finita. Tomando los límites en la ecuación próxima anterior.

$$-D_{n_1} \Delta S + D_r \, r \, d\phi \, \cancel{\Delta x} + D_{n_2} \Delta S = \rho \, \Delta S \, \cancel{\Delta x} \qquad [3\text{-}12]$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \qquad \rho \text{ magnitud finita}$$

Todos los términos finitos multiplicados por un elemento infinitesimalmente pequeño será igual a cero. Esto está marcado con diagonales en la 3-12b. Sacando como factor común ΔS

$$\Delta S \left(-D_{n_1} + D_{n_2} \right) = 0 \qquad [3\text{-}13]$$

por lo que finalmente llegaremos a tener

$$\boxed{D_{n_1} = D_{n_2}} \qquad [3\text{-}14]$$

siendo la tercera condición de frontera, para el caso de los dos medios dieléctricos, que nos dice:

> *"El componente normal de la densidad de campo electrico, para dos medios dielectricos, es continua, lo que vale en un medio es lo mismo a lo que vale en el otro medio"*

3.3.1.2. Un medio conductor

Ahora el medio dos es un perfecto conductor. Seguimos buscando el componente normal de la $\vec{D}$ en la superficie de frontera. Sabemos que la $\vec{D}$ dentro de un medio conductor es cero. Como consecuencia el componente $\vec{D}_n$ no será continuo. Para analizar la discontinuidad es necesario recordar algo del medio conductor. La figura representativa en este caso es muy parecida a la próxima anterior, ahora puesta como 3-11.

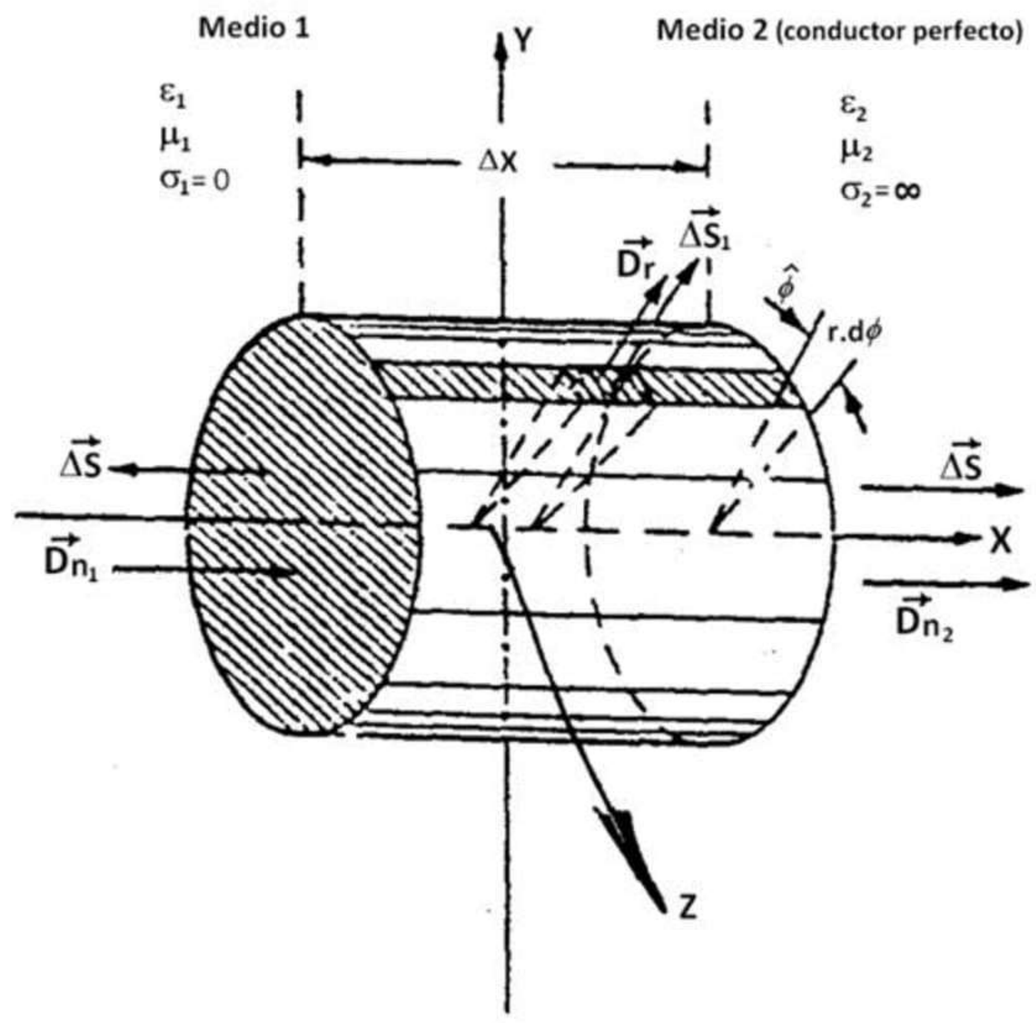


FIGURA 3-11: Representación de la tercera condición de frontera para el caso de un medio conductor

La ecuación que emplearemos sigue siendo la tercera ecuación de Maxwell en su forma integral, la que podremos hasta un paso antes de llegar a la condición de ponerla en la superficie de frontera, que es la 3-11., aquí puesta como:

$$\oint_{Sup} \vec{D} \cdot \overrightarrow{dS} = -D_{n_1}\Delta S + D_r r d\phi \Delta X + D_{n_2}\Delta S = \rho \Delta S \Delta X \qquad [3\text{-}16]$$

Para llegar a la condición de frontera, volvemos a recordar que es necesario ver lo que sucede en el conductor, cuando $\triangle X \rightarrow 0$. Ya sabíamos que en el medio conductor, la densidad de carga volumétrica, debido a la fuerza eléctrica originada entre las cargas eléctricas de repulsión e interpretada por la ley de Coulomb hará que sean expulsadas en un tiempo infinitesimalmente pequeño, llamado tiempo de relajación, que posteriormente veremos en un ejemplo, hasta la superficie del conductor, ya que en ese lugar encuentran a un dieléctrico, que tiene un nivel de energía superior al de la fuerza de la ley de Coulomb y las detendrá. Siendo el número de cargas un número constante, tendremos que se convertirá en ρ_S al tener un elemento del volumen que se hace infinitamente pequeño. Tendremos como consecuencia lo siguiente:

$$\rho = \frac{dq}{dv} = \frac{dq}{\Delta S\ \Delta X} \qquad [3\text{-}17]$$

pero

$$\frac{dq}{\Delta S} = \rho_S \qquad [3\text{-}18]$$

ρ_S es la densidad de carga superficial y es medida en CM^{-2} en el sistema práctico de unidades MKS. De aquí tendremos:

$$\rho = \frac{\rho_S}{\Delta X} \qquad [3\text{-}18a]$$

así que cuando $\Delta X \to 0$, $\rho \to \infty$, con lo cual se quitará la indeterminación. Por lo tanto;

$$\rho\ \Delta X = \rho_S \qquad [3\text{-}19]$$

y la ecuación 2.2.1.3.1.a., en la condición para llegar a la superficie de frontera será:

$$-D_{n_1}\ \Delta S + D_r\ r\, d\phi\, \cancel{\Delta X} + D_{n_2}\ \Delta S = \rho\ \Delta S\ \cancel{\Delta X} \qquad [3\text{-}20]$$

$$\lim \Delta x \to 0$$

los términos finitos multiplicados por un elemento infinitesimalmente pequeño serán igual a cero, marcado con una diagonal en la ecuación próxima anterior; pero como $\rho \to \infty$ en la condición de $\Delta X \to 0$ no habrá indeterminación y se convertirá en ρ_S, lo cual está también indicado con una diagonal. De acuerdo a todo esto tendremos:

$$-D_{n_1}\ \Delta S + D_{n_2}\ \Delta S = \rho_S\ \Delta S \qquad [3\text{-}21]$$

Ya habíamos indicado; siendo el medio dos un conductor, la $\vec{D}$ es cero, por lo tanto $D_{n_2} = 0$ y la ecuación nos quedará:

$$-D_{n_1}\ \Delta S = \rho_S\ \Delta S \qquad [3\text{-}22]$$

y por ser ΔS la misma, finalmente llegaremos a tener:

$$-D_{n_1} = \rho_S ; D_{n_2} = 0 \qquad [3\text{-}23]$$

$$\hat{n} x D_{n_1} = \rho_S \qquad [3\text{-}24]$$

que es precisamente la tercera condición de frontera, para el caso de que uno de los medios sea un conductor. Esta condición nos dice:

> *"El componente normal de la densidad de campo electrico es discontinuo, ya que en el medio conductor aparece una densidad de carga superficial"*

Notamos enseguida lo parecida que es con respecto a la segunda condición de frontera, para el caso que un medio sea un conductor.

Ahí aparece en el conductor una densidad de corriente lineal en la superficie $\vec{J}_{C_S}$ que es precisamente la que origina la densidad de carga superficial ρ_S, en movimiento sobre la superficie del conductor.

3.3.2. Componente normal de la densidad de campo magnético $\vec{B}$

Debido a que el campo magnético función del tiempo, sólo puede existir en medios dieléctricos, la condición que debemos de poner es que los dos medios deben ser dieléctricos.

Si hablamos de dos medios dieléctricos diferentes y en ellos queremos conocer la densidad de campo magnético normal, la ecuación que debemos emplear es la cuarta ecuación de Maxwell en su forma integral.

$$\oint_{Sup} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

La figura que representa los dos medios con la superficie de frontera entre ellos, así como los componentes de $\vec{B}$ es la 3-12.

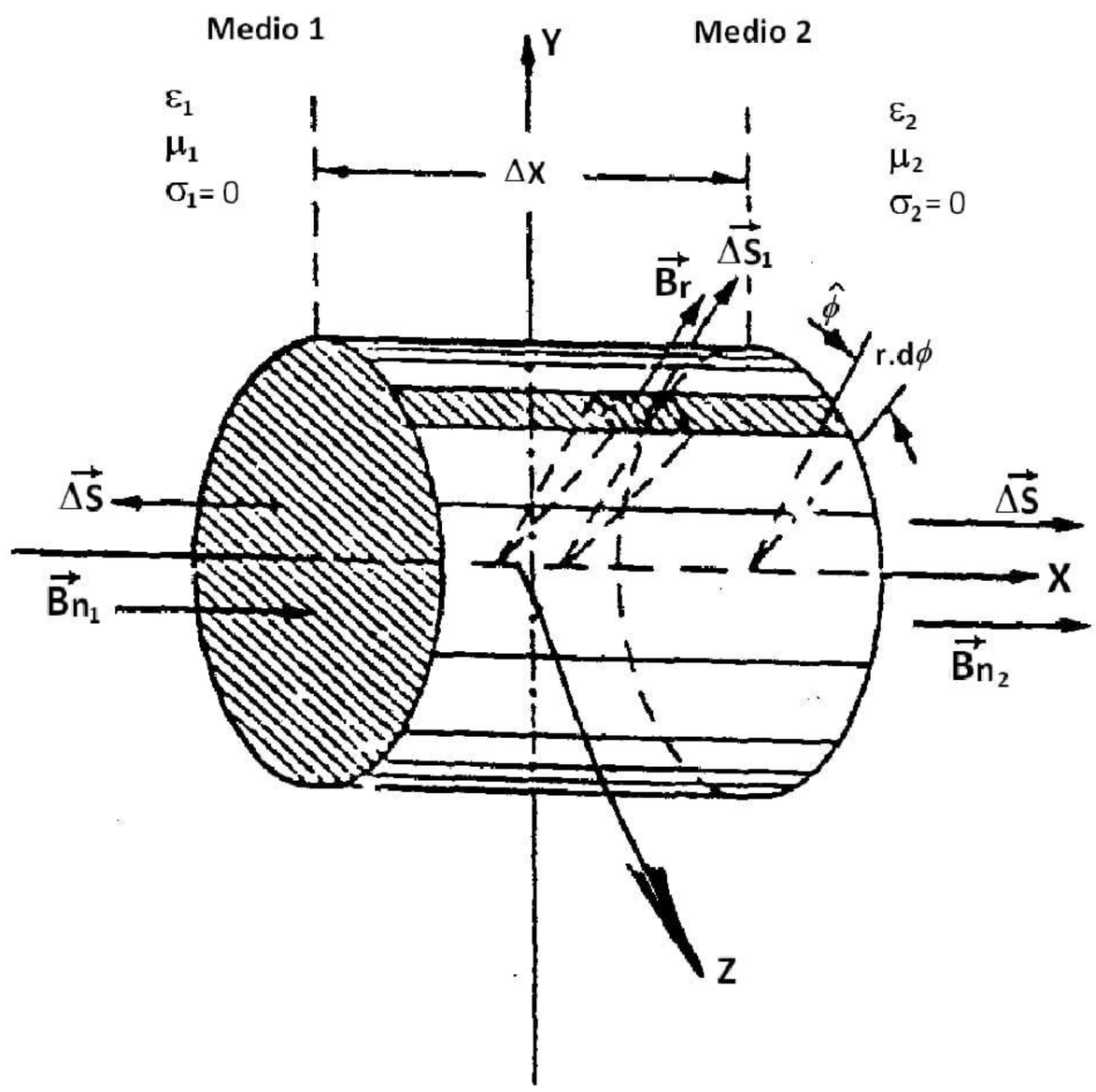


FIGURA 3-12: Representación de la cuarta condición de frontera

Notamos que la superficie de frontera se encuentra en el plano YZ. El desarrollo de la cuarta ecuación de Maxwell es:

$$-B_{n_2}\,\Delta S + B_r\, r\,\Delta\phi\,\Delta X + B_{n_1}\,\Delta S = 0 \qquad [3\text{-}25]$$

para llegar a que los componentes normales de la $\vec{B}$ lleguen a la superficie de frontera, llegaremos al límite que $\Delta X \to 0$.

$$\lim_{\Delta X \to 0} -B_{n_1}\,\Delta S + B_r\, r\,\Delta\phi\,\cancel{\Delta X} + B_{n_2}\,\Delta S = 0 \qquad [3\text{-}26]$$

El término multiplicado por ΔX es igual a cero y está marcado por una línea diagonal.

Nos quedará:

$$-B_{n_1}\,\Delta S + B_{n_2}\,\Delta S = 0 \qquad [3\text{-}27]$$

y de aquí tendremos

$$B_{n_1} = B_{n_2} \qquad [3\text{-}28]$$

que es precisamente la cuarta condición de frontera, la que nos dice:

> *"El componente normal de la densidad de campo magnetico es continuo, ya que lo que aparece en un medio es lo mismo a lo que aparece en el otro medio"*

Resumen de las ecuaciones de Maxwell y las condiciones correspondientes de fronteras espaciales en una interacción

Forma diferencial	Forma Integral	Condición correspondiente de frontera	
$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_v$	$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_V \rho_v dv$	$D_{n_1}-D_{n_2}=\rho_S$ ó $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)=\rho_S$	
		Caso A: σ_1, σ_2 cero $D_{n_1}=D_{n_2}$ [3-14]	**Caso B**: $\sigma_2\to\infty$ $D_{n_1}=\rho_S$ [3.23]
$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$	$B_{n_1}=B_{n_2}$ ó $\mathbf{n}\cdot(B_1-B_2)=0$ [3-27]	
$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_\ell \boldsymbol{H}\cdot d\ell = \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s} + \frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}$	$H_{t_1}-H_{t_2}=J_{S(n)}$ ó $\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=J_L=J_{CS}$	
		Caso A: σ_1, σ_2 finita $H_{t_1}=H_{t_2}$ [3-4]	Caso B: $\sigma_2\to\infty$ $\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1=\mathbf{J}_L=J_{CS}$ [3-12]
$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{t}}$	$\oint_\ell \boldsymbol{E}\cdot d\ell = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$	$E_{t_1}=E_{t_2}$ ó $\mathbf{n}\times(E_1-E_2)=0$ [3-2]	

3.4. CÁLCULO DEL ÁNGULO DE SALIDA DE UN VECTOR CONOCIENDO EL ÁNGULO DE ENTRADA

3.4.1. Campo Eléctrico (E)

En este punto analizamos el ingreso de un vector de campo eléctrico con un ángulo$\theta_1$al **Medio 1** que incide con ese ángulo sobre una superficie de frontera (***S.F.***) con el **Medio 2**. Encontraremos el procedimiento para hallar con que ángulo$\theta_2$sale del **Medio 2**., conociendo θ_1, ε_1 y ε_2.

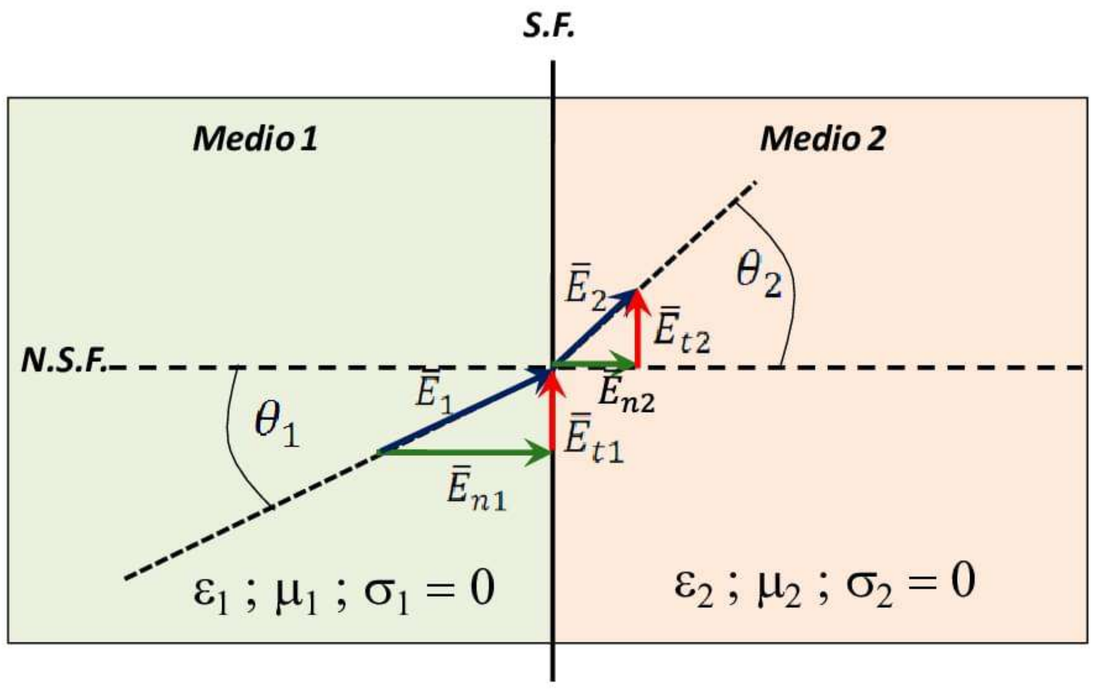


FIGURA 3-13: incidencia oblicua de un vector de campo eléctrico indicando ángulo de ingreso θ_1 y ángulo de salida θ_2.

Hemos descompuesto el vector de entrada E_1 y el vector de salida E_2 en sus componentes tangenciales a la superficie de Frontera E_t y normales a la S.F. E_n.

Recordando que las ecuaciones obtenidas en condiciones de contorno para dos medios dieléctricos son:

a) Las componentes tangenciales del campo eléctrico son iguales en ambos medios dieléctricos:

$$\bar{E}_{t1} = \bar{E}_{t2} \qquad [3\text{-}29]$$

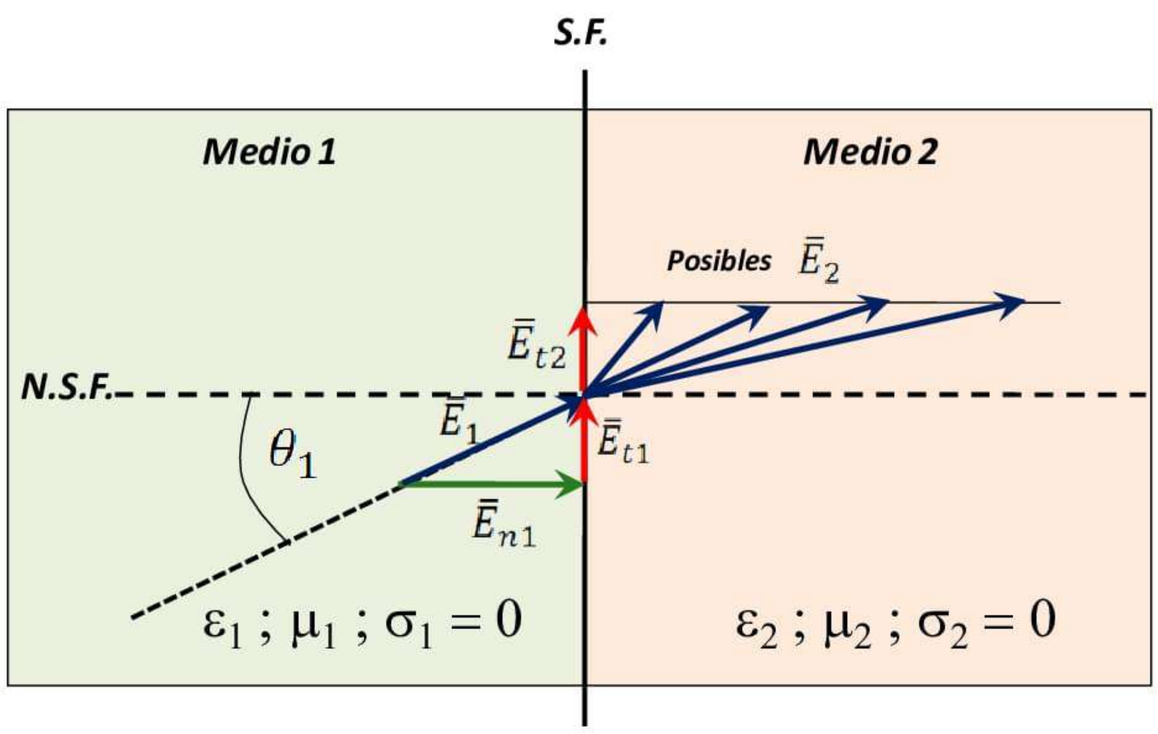


FIGURA 3-14: $E_{t1} = E_{t2}$ con las posibles soluciones del ángulo para E_2.

Vemos que esta condición permite varias soluciones del ángulo de salida θ_2 por lo tanto tomaremos la condición obtenida con respecto al vector Desplazamiento de Campo Eléctrico **D**:

b) Las componentes normales del vector desplazamiento de campo eléctrico son iguales en ambos medios dieléctricos:

$$\bar{D}_{n1} = \bar{D}_{n2} \qquad [3\text{-}30]$$

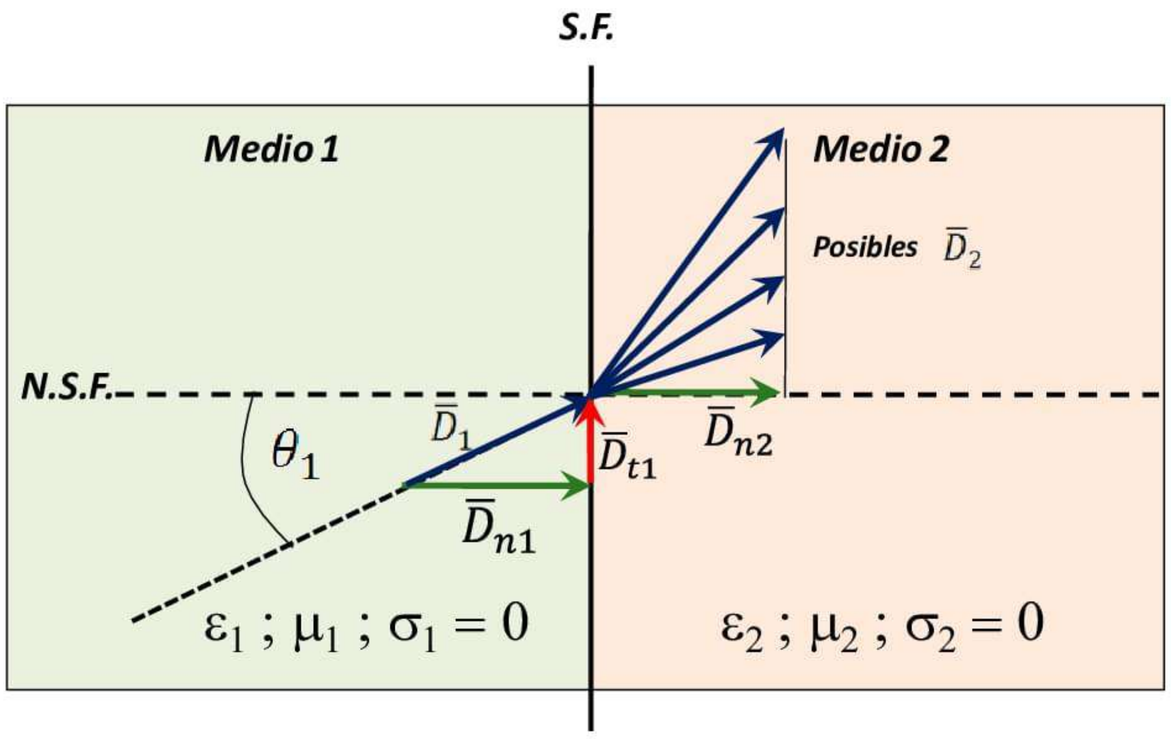


FIGURA 3-15: D_{n1}=D_{n2} con las posibles soluciones del ángulo para D_2.

Observamos que esta condición por si sola también permite varias soluciones del ángulo de salida.

Si combinamos las dos ecuaciones anteriores mediante: $\overline{D} = \varepsilon . \overline{E}$ [3-31]

Tendremos: $\overline{D}_t = \varepsilon . \overline{E}_t$ y $\overline{D}_n = \varepsilon . \overline{E}_n$ [3-32]

Si calculamos las tangentes de los ángulos θ_1 y θ_2 obtenemos:

$$tg\theta_1 = \frac{\overline{E}_{t1}}{\overline{E}_{n1}} \quad [3\text{-}33]$$

$$tg\theta_2 = \frac{\overline{E}_{t2}}{\overline{E}_{n2}} \quad [3\text{-}34]$$

Con la condición de las componentes tangenciales nos queda:

$$tg\theta_1 . \overline{E}_{n1} = \cancel{\overline{E}_{t1}} = \cancel{\overline{E}_{t2}} = tg\theta_2 . \overline{E}_{n2} \quad [3\text{-}35]$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\overline{E}_{n1} = \frac{\overline{D}_{n1}}{\varepsilon_1} \quad [3\text{-}36]$$

$$\overline{E}_{n2} = \frac{\overline{D}_{n2}}{\varepsilon_2} \quad [3\text{-}37]$$

$$tg\theta_1 . \frac{\cancel{\overline{D}_{n1}}}{\varepsilon_1} = tg\theta_2 . \frac{\cancel{\overline{D}_{n2}}}{\varepsilon_2} \quad [3\text{-}38]$$

$$tg\theta_2 = tg\theta_1 . \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad [3\text{-}39]$$

$$\boxed{\theta_2 = \tan^{-1}\left(tg\theta_1 . \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \quad [3\text{-}40]}$$

3.4.2. Campo Magnético (H)

Partimos de las condiciones de contorno que cumplen las componentes del campo magnético en dos medios dieléctricos:

$$\bar{H}_{t1} = \bar{H}_{t2} \qquad [3\text{-}41]$$

$$\bar{B}_{n1} = \bar{B}_{n2} \qquad [3\text{-}42]$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\bar{B} = \mu.\bar{H} \qquad [3\text{-}43]$$

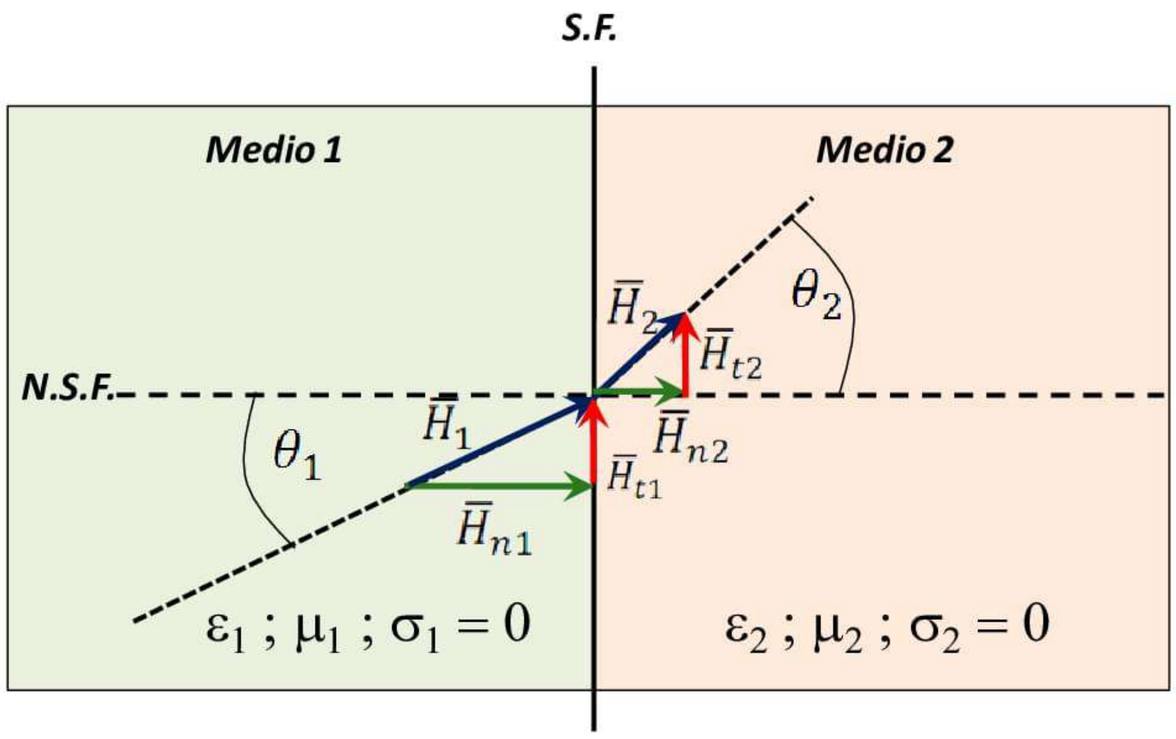


FIGURA 3-16: incidencia oblicua de un vector de campo magnético indicando ángulo de ingreso θ_1 y ángulo de salida θ_2.

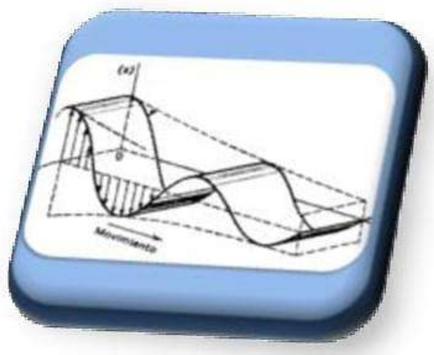
Hemos descompuesto el vector de entrada H_1 y el vector de salida H_2 en sus componentes tangenciales a la Superficie de Frontera H_t y normales a la Superficie de Frontera (***S.F.***) H_n.

Haciendo un proceso similar al del campo eléctrico tendremos que:

$$tg\theta_1.\frac{\bar{B}_{n1}}{\mu_1} = tg\theta_2.\frac{\bar{B}_{n2}}{\mu_2} \qquad [3\text{-}44]$$

$$tg\theta_2 = tg\theta_1.\frac{\mu_2}{\mu_1} \qquad [3\text{-}45]$$

$$\boxed{\theta_2 = \tan^{-1}\left(tg\theta_1.\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \qquad [3\text{-}46]}$$



CAPÍTULO 4

ECUACIÓN DE ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Objetivo:

- Que el alumno comprenda y demuestre el comportamiento ondulatorio de los campos electromagnéticos al propagarse por medios homogéneos sin carga (conductores, dieléctricos y vacío) y a deducir y aplicar las constantes características de una onda electromagnética en función de las constantes $(\mu, \varepsilon, \sigma)$ de los distintos medios de propagación.

4.1. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN UN MEDIO CONTINUO Y HOMOGÉNEO

En la resolución de cualquier problema electromagnético las relaciones fundamentales que deben satisfacer son las cuatro ***ecuaciones de Maxwell,*** las cuales debido a que estamos en medio continuo pueden ser expresadas en forma vectorial-diferencial:

$$\nabla x H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad [2\text{-}154a]$$

$$\nabla x E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad [2\text{-}165]$$

$$\nabla . D = \rho \qquad [2\text{-}168]$$

$$\nabla . B = 0 \qquad [2\text{-}169]$$

Además de éstas, hay otras tres relaciones concernientes al medio en el que existe el campo. Estas son las *relaciones fundamentales:*

$$D = \varepsilon . E \qquad [4\text{-}1]$$

$$B = \mu . H \qquad [4\text{-}2]$$

$$J = \sigma.E \qquad [4\text{-}3]$$

en las que ε, μ, y σ son, respectivamente, la permitividad, la permeabilidad y conductividad del medio que se supone ser homogéneo isotrópico y exento de generadores.

Un medio ***homogéneo*** es aquel en el que las cantidades ε, μ, y σ son constantes en todo él.

El medio se dice ***isotrópico*** si ε,μ, y σ son valores escalares, de manera que D y E tengan en todo lugar la misma dirección es decir D//E, de la misma manera B//H y J//E.

La forma de las ecuaciones de Maxwell dadas en (2-154a) y (2-165) es para regiones *exentas de generadores*, es decir, regiones en las que no hay voltajes o corrientes *impuestas* (sin generadores de ningún tipo). Las relaciones de los campos con sus generadores se considerarán cuando se estudie Radiación y Antenas.

Cuando se llevan las ecuaciones (4-1), (4-2) y (4-3) a las (2-154a) y (2-165), las ecuaciones de Maxwell se convierten en ecuaciones diferenciales que relacionan las intensidades de campo eléctrico E y magnético H. Si se obtienen las soluciones simultáneas, éstas determinarán las leyes a las que obedecen dichas intensidades de campo E y H.

$$\nabla x H = J + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \sigma.E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad [2\text{-}154a]$$

$$\nabla x E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad [2\text{-}165]$$

Primera y Segunda ecuación de Maxwell en función de **E** y **H.**

Analizaremos tres casos exentos de cargas (ρ = 0), es decir ∇.D = 0 (Lejos del generador)

4.2 Medio Dieléctrico perfecto (σ = 0) ; sin definir forma de onda.
4.3 Medio Dieléctrico perfecto (σ = 0) ; con notación fasorial.
4.4 Medio con pérdidas σ ≠ 0 ; con notación fasorial.

4.2. MEDIO DIELÉCTRICO PERFECTO - EXENTO DE CARGAS Y CORRIENTES (ESPACIO LIBRE – SIN DEFINIR FORMA DE ONDA)

Antes de obtener la solución del caso general es instructivo considerar el caso simple, aunque importante, de los fenómenos electromagnéticos en el espacio libre, o mejor dicho, en un dieléctrico perfecto exento de cargas (ρ = 0) y de corrientes de conducción ($J = 0$) . En este caso las ecuaciones de Maxwell se convierten en:

$$\nabla x H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad [4\text{-}4]$$

$$\nabla x E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad [4\text{-}5]$$

$$\nabla.D = 0 \qquad [4\text{-}6]$$

$$\nabla.B = 0 \qquad [4\text{-}7]$$

Partimos de la 2da ecuación de Maxwell y sacamos el rotacional en ambos miembros:

$$\nabla x \nabla x E = \nabla x \left(-\mu \frac{\partial H}{\partial t} \right) \qquad [4\text{-}8]$$

Diferénciese (4) respecto al tiempo. Como la operación rotacional es una diferenciación respecto al espacio, el orden de diferenciación puede invertirse, es decir:

$$\frac{\partial . \nabla x H}{\partial t} = \nabla x \frac{\partial H}{\partial t}$$

Como también ε, y μ son independientes del tiempo:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad [4\text{-}9a]$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad [4\text{-}9b]$$

Resultando:

$$\nabla x \frac{\partial H}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad [4\text{-}10]$$

Tomando rotacionales en ambos miembros de (5) y empleando la (9b) se obtiene:

$$\nabla x \nabla x E = -\mu . \nabla x \frac{\partial H}{\partial t} \qquad [4\text{-}11]$$

Llevando la (10) a (11)

$$\nabla x \nabla x E = -\mu . \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad [4\text{-}12]$$

Se vio como identidad en Álgebra vectorial que:

$$\nabla x \nabla x E = \nabla . \nabla . E - \nabla^2 E$$

Rotor del Rotor de **E** es igual al gradiente de la divergencia de **E** menos el Laplaciano de **E.** La cual puede ser comprobada haciendo los desarrollos directos.

Combinando esta ecuación con la (12) se obtiene

$$\nabla . \nabla . E - \nabla^2 E = -\mu . \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad [4\text{-}13]$$

Pero

$$\nabla . E = \frac{1}{\varepsilon} \nabla . D = 0 \qquad \text{por ser el medio exento de cargas}$$

y, por tanto, la ecuación (13) se convierte en:

$$\nabla^2 E = \mu.\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad [4\text{-}14]$$

que es la ley que debe obedecer el campo eléctrico E.

Diferenciando (5) respecto al tiempo y tomando el rotacional de (4) se encontrará que H obedece a la misma ley, es decir:

$$\nabla^2 H = \mu.\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad [4\text{-}15]$$

Las ecuaciones (14) y (15) se conocen como ecuaciones de Helmholtz, que son ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden cuya solución son las *ecuaciones de onda*. Así, la primera condición, tanto para E como para H, es que deben satisfacer la ecuación de onda. (Nótese que, aunque E y H obedezcan a la misma ley, E no es igual a H, ni tampoco las podemos encontrar por caminos separados como veremos más adelante).

4.2.1. Condición de una onda plana [E_X=F(Z,T)]

Si expresamos el Laplaciano del vector campo eléctrico "E" en forma vectorial en función de sus componentes:

$$\nabla^2 E = \nabla^2 E_x a_x + \nabla^2 E_y a_y + \nabla^2 E_z a_z \qquad [4\text{-}16]$$

El vector campo eléctrico E, de la ecuación anterior equivale a tres ecuaciones escalares, una por cada componente escalar de E.

Analizando cada componente escalar obtenemos nueve términos con derivadas segundas:

$$\nabla^2 E_x a_x = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) . a_x \qquad [4\text{-}17a]$$

$$\nabla^2 E_y a_y = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) . a_y \qquad [4\text{-}17b]$$

$$\nabla^2 E_z a_z = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) . a_z \qquad [4\text{-}17c]$$

Primera Condición: La ecuación 4-14 y por lo tanto la ecuación de onda se reduce en una forma muy simple en el caso especial en que E y H se consideren independientes de dos de las dimensiones; por ejemplo, x e y. Entonces el campo eléctrico solo será función de la dirección z [E = f(z)]:

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} a_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} a_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} a_z \qquad [4\text{-}17]$$

En general, para una propagación plana y uniforme de una onda en dirección z, E puede tener componentes E_x y E_y pero (como se verá más adelante) no la E_z.

Segunda Condición: Si ahora debido a que hemos considerado un medio homogéneo y sin mengua de la generalidad, puede ceñirse la atención a una de las componentes, por ejemplo, la E_X "componente en x", de los ***nueve términos iniciales*** nos quedamos con ***uno solo***, de manera que (4-17) queda de la forma:

$$\nabla^2 E = \nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \qquad [4\text{-}18]$$

En este caso la ecuación a resolver tiene la forma

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = \mu.\varepsilon \frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} \qquad [4\text{-}19a]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} - \mu.\varepsilon \frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} = 0 \qquad [4\text{-}19b]}$$

La ecuación (4-19b) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden homogénea llamada: **"Ecuación de Helmholtz"** y se caracteriza por tener un término con derivada segunda con respecto al espacio y otro término con derivada segunda con respecto al tiempo, que se presenta frecuentemente en mecánica y en ingeniería.

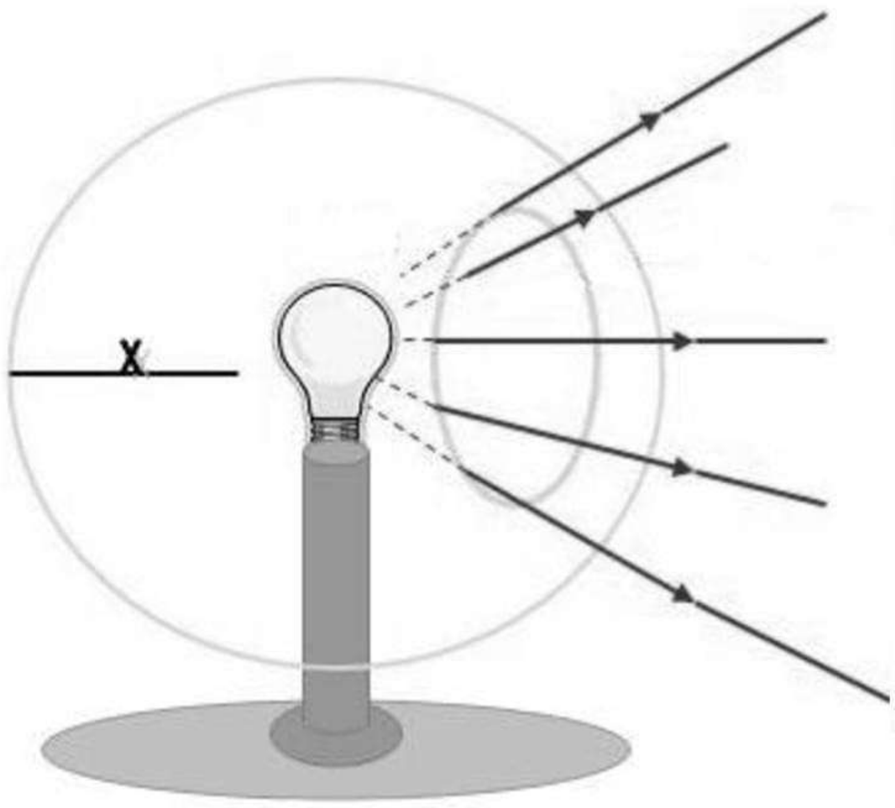


FIGURA 4-1: Fuente de onda esférica

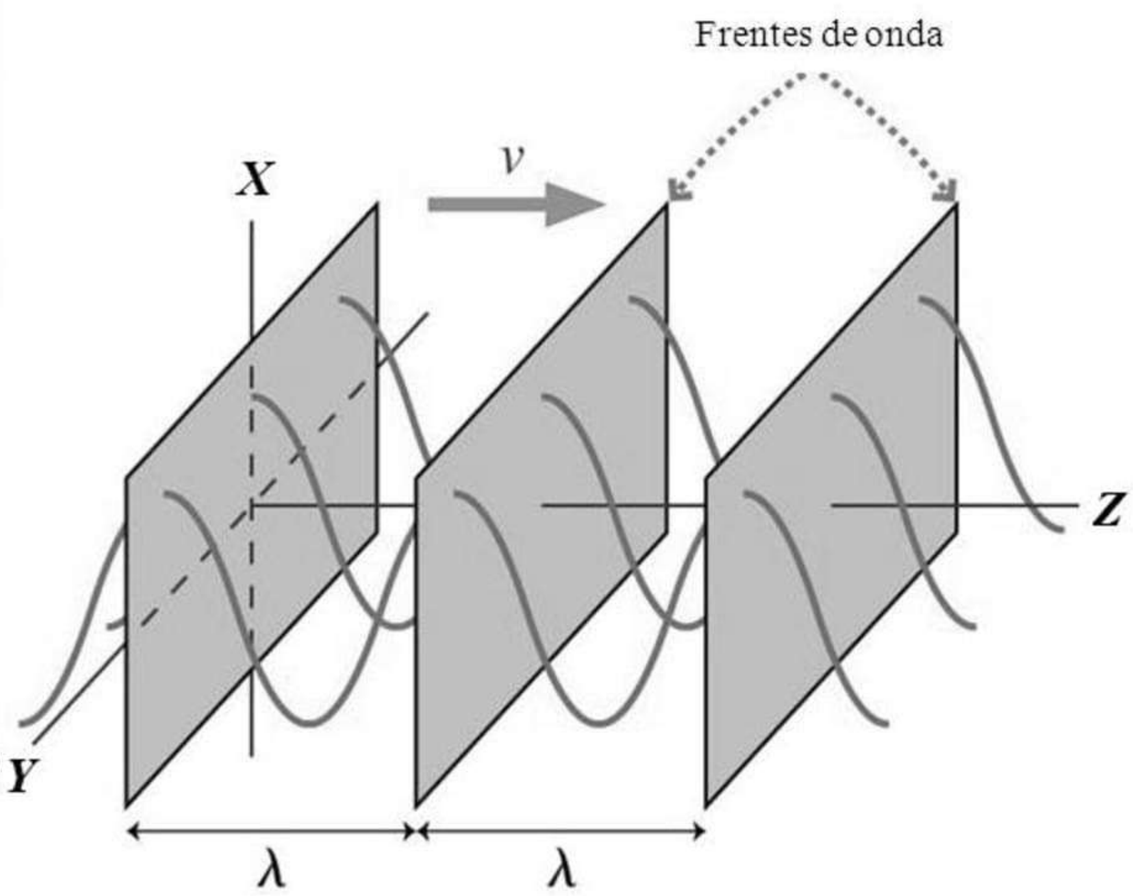


FIGURA 4-2: Representación de una Onda plana

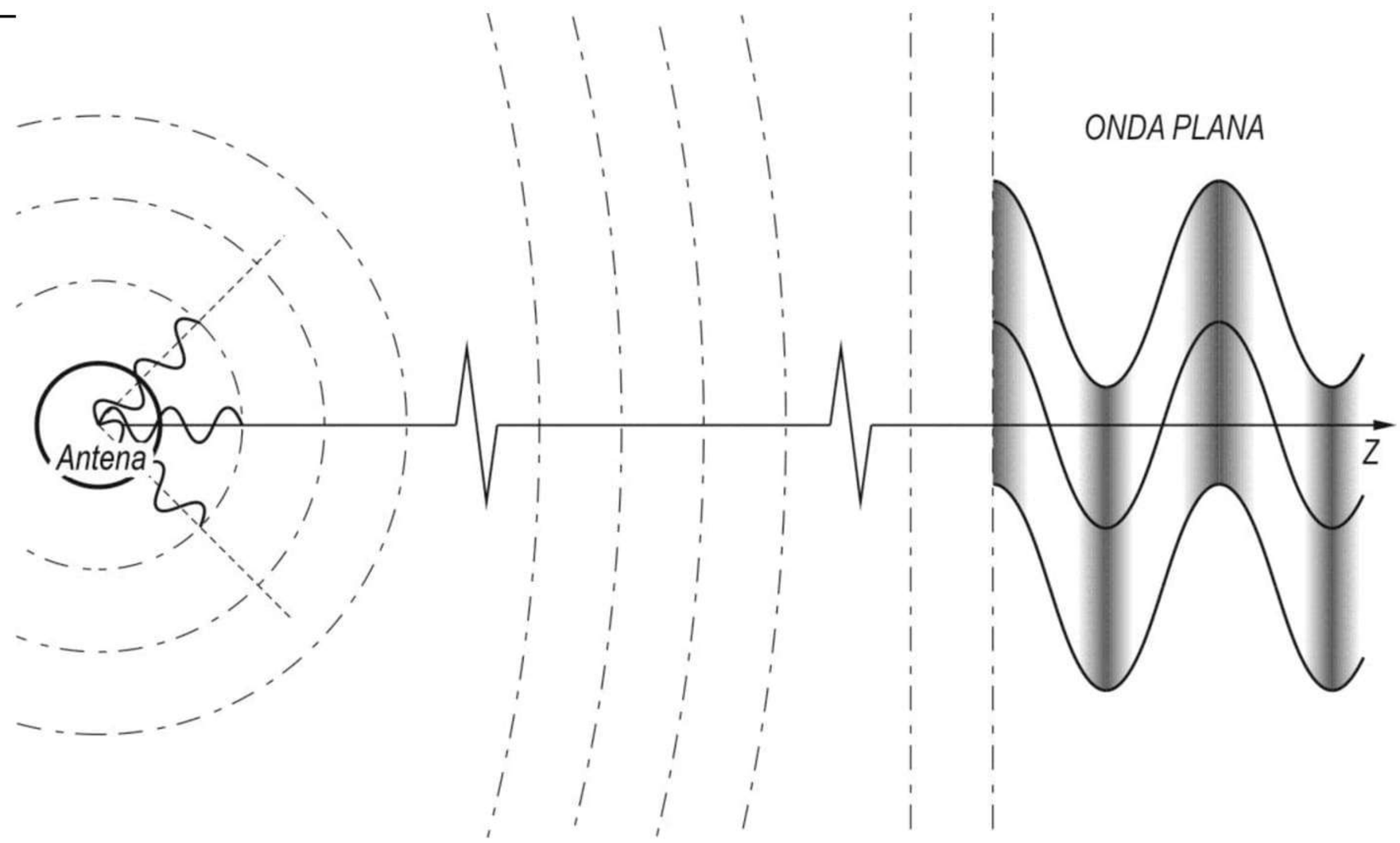


FIGURA 4-3. Propagación de una onda plana.

Podemos considerar que una onda plana en la práctica aparece a una distancia donde el radio de la esfera es tan grande que el tramo de esfera considerado se asemeja a una línea recta.

Por ejemplo, es la ecuación diferencial para la elongación respecto a su posición de equilibrio de los puntos de una cuerda uniforme a lo largo de la misma. Los ingenieros la reconocerán como la ecuación diferencial del voltaje o corriente a lo largo de una línea de transmisión sin pérdidas. La **solución general** es de la forma

$$E = C_1.f_1\left(z - v_0.t\right) + C_2.f_2\left(z + v_0.t\right)_x \qquad [4\text{-}20]$$

en la que C1 y C2 son constantes que después serán analizadas, $\boldsymbol{v_0}$ = velocidad y f_1 y f_2 son funciones *cualquiera* (no necesariamente las mismas) de $\mathbf{(z\text{-}v_0t)}$ y $\mathbf{(z+v_0t)}$ respectivamente.

La expresión $\boldsymbol{f(z\text{-}v_0t)}$ representa la función f de la variable $\mathbf{(z\text{-}v_0t)}$.

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}} = 3.10^8 \left[\frac{m}{seg}\right] \qquad [4\text{-}21]$$

$$\mu_0 = 4.\pi.10^{-7} \left[\frac{H}{m}\right]$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36.\pi.10^9} \left[\frac{F}{m}\right]$$

z indica el sentido de propagación y el signo negativo señala que la dirección de propagación es en el sentido positivo del eje como se demostrará más adelante.

Demostración de la solución general (4-20)

$$\text{I)}\ \frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = C_1.f_1''\left(z - \frac{t}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}\right) + C_2.f_2''\left(z + \frac{t}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}\right) \qquad [4\text{-}22]$$

Derivando la solución general con respecto al tiempo:

$$\text{II)}\ \frac{\partial E_X}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}} C_1.f'\left(z - \frac{t}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}} C_2.f_2'\left(z + \frac{t}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}\right) \qquad [4\text{-}23]$$

Derivando nuevamente con respecto al tiempo, obtenemos la derivada segunda de la solución general con respecto al tiempo:

$$\text{III)}\ \frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0.\varepsilon_0} C_1.f_1''\left(z - \frac{t}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}\right) + \frac{1}{\mu_0.\varepsilon_0} C_2.f_2''\left(z + \frac{t}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}\right) \qquad [4\text{-}24]$$

Ordenando la expresión tendremos:

$$\text{IV)}\ \mu_0\varepsilon_0.\frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} = C_1.f_1''\left(z - \frac{t}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}\right) + C_2.f_2''\left(z + \frac{t}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}\right) \qquad [4\text{-}25]$$

Demostrando que los segundos miembros de I y IV son iguales, también deben ser iguales los primeros miembros.

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = \mu_0\,\varepsilon_0\ \frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2}$$

Por ejemplo tenemos

$$A.\cos.\beta(z - v_0.t) \quad ; \quad C.e^{K.(z - v_0 t)} \quad ; \quad \sqrt{z - v_0.t}$$

Todas estas expresiones representan movimiento de una onda.

Puede definirse como onda así:

Si un fenómeno físico que ocurre en un lugar en un tiempo dado se reproduce en otros lugares en tiempos posteriores, siendo el retraso temporal proporcional a la distancia de separación al primer lugar, entonces el grupo de fenómenos constituyen una onda.

Nótese que una onda no es necesariamente un fenómeno repetitivo en el tiempo. Todo superviviente de un terremoto se alegra de que sea así.

Las funciones $f_1(z-v_0t)$ y $f_2(z+v_0t)$ describen tal onda matemáticamente; la variación de la onda queda confinada a una dimensión especial.

Esto se indica en la figura 4-3

Si se toma un instante de tiempo dado (por ejemplo t_1), entonces la función $f_1(z-v_0t)$ se convierte en una función de z, ya que $v_0.t_1$ es una constante (distancia recorrida por la onda en t_1). Tal función se representa por la primera curva.

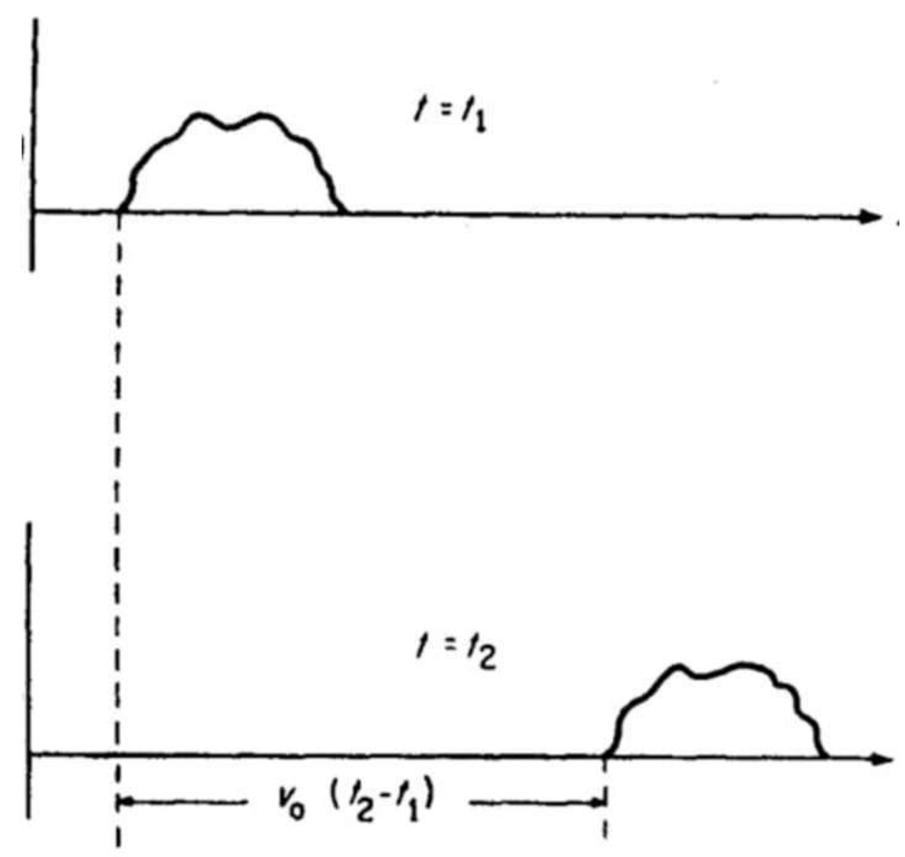


FIGURA 4-4

En otro instante posterior (por ejemplo, en t_2), se obtiene otra función de z, con la misma forma que la primera, excepto que esta segunda está desplazada hacia la derecha una distancia $v_0.(t_2- t_1)$. Esto demuestra que el fenómeno ha viajado en la dirección positiva de z a una velocidad v_0.

Por otro lado, la función $f_2(z+v_0t)$ corresponde a una onda viajera en la dirección negativa de z.

Así, la solución general de la ecuación de onda se ve que en este caso consiste en dos ondas, una que viaja hacia la derecha (alejándose de su generador) y otra que va hacia la izquierda (de vuelta al generador).

Si no hay superficie reflectora presente que rehace a la onda hacia el generador, el segundo término de (20) será nulo y la solución vendrá dada por

$$E = C_1.f_1\left(z - v_0 t\right) \qquad [4\text{-}26]$$

En una región en la que no exista densidad de carga

$$\nabla.E = \frac{1}{\varepsilon}.\nabla.D = 0 \qquad [4\text{-}27]$$

o sea,

$$\frac{\partial E_X}{\partial x} + \frac{\partial E_Y}{\partial y} + \frac{\partial E_Z}{\partial z} = 0 \qquad [4\text{-}28]$$

En una onda plana uniforme en la que E sea independiente de *y* y x, son nulos los dos primeros términos de esta relación, de manera que se reduce a

$$\frac{\partial E_Z}{\partial z} = 0 \qquad [4\text{-}29]$$

Por tanto, no hay variación de E_Z en la dirección de z. Se ve por la ecuación (28) que la segunda derivada respecto al tiempo de E_Z debe ser cero. Esto exige que E_Z sea o bien cero, constante en el

tiempo, o creciente uniformemente con el tiempo. Un campo que satisfaga a cualquiera de estas dos últimas condiciones no sería parte de una onda móvil, y por ello E_Z puede igualarse a cero. Por lo tanto, una onda plana *uniforme* que progresa su movimiento en la dirección z no tiene componente en z de E. Un análisis similar nos mostraría que no hay componente en z de H. Resulta, pues, que las ondas electromagnéticas planas y uniformes son transversales y sólo tienen componentes de E y H según direcciones perpendiculares a la dirección de propagación.

4.2.2. Relación existente entre E y H en una onda plana uniforme. Impedancia Intrínseca

Por ahora diremos que en un medio dieléctrico perfecto se cumple

$$\frac{E_i}{H_i} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad [4\text{-}30]$$

Esta ecuación establece que en una onda electromagnética progresiva[2] plana en un medio dieléctrico perfecto $(\sigma = 0)$ hay una razón definida entre las amplitudes de E y H y que es igual a la raíz cuadrada del cociente entre la permeabilidad y constante dieléctrica del medio. Como las unidades de E son voltios por metro y las de H amperios por metro, la razón entre E y H tendrá las dimensiones de una impedancia, o sea, de ohmios. Por esta razón suele llamarse a esta razón *impedancia característica* o *impedancia intrínseca* del medio (no conductor).

de manera que

$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad [\Omega] \qquad [4\text{-}31]$$

Para todo medio, conductor o no, impedancia intrínseca se designa por η (eta). Cuando el medio es el espacio libre o el vacío se emplea el subíndice o. Esto es, la impedancia intrínseca del espacio libre es:

Para el espacio libre

$$\mu = \mu_0 = 4.\pi.10^{-7} \text{ [henrios/m]}$$

Para el espacio libre

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 1/36.\pi.10^{9} \text{ [faradios/m]}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120.\pi = 377 \quad [\Omega] \qquad [4\text{-}32]$$

[2] la expresión de *onda progresiva* suele emplearse para indicar que la onda progresa en una dirección y no hay onda estacionaria (véase la unidad sobre reflexión). Cuando hay una onda reflejada dando lugar a una onda estacionaria, la razón *E/H* puede tener cualquier valor entre cero e infinito.

4.3. ECUACIÓN DE ONDA PLANA EN UN MEDIO SIN PÉRDIDAS CON NOTACIÓN FASORIAL $(\sigma = 0)$

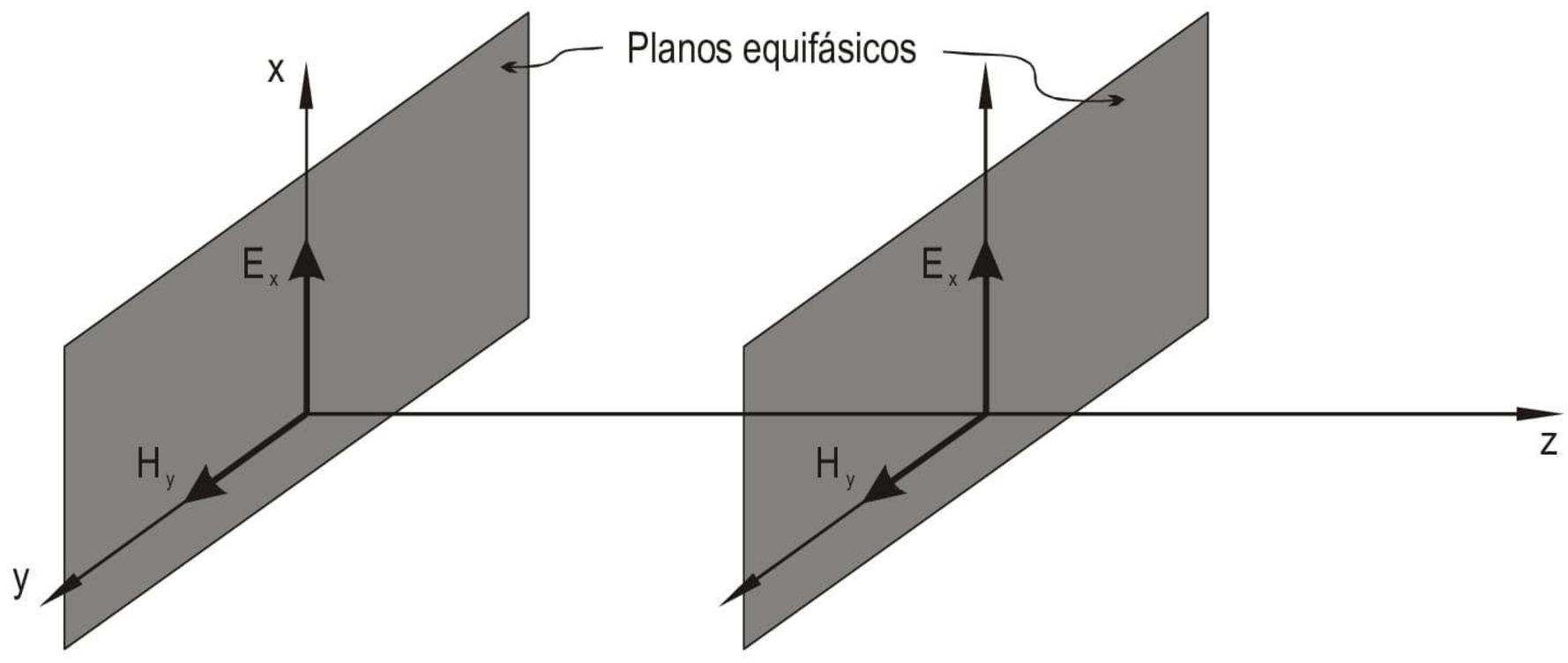


FIGURA 4-5

En el caso de una onda plana uniforme en la que no hay variación respecto a x o *y tomando la componente del campo eléctrico en x, es decir* $E_X=f(z,t)$, la ecuación de la onda en su forma fasorial[2] puede expresarse como

Partiendo de la Ecuación de Helmholtz hallada en el capítulo sin forma de onda:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \qquad [4\text{-}33a]$$

tomando ahora la forma fasorial $E_X\ e^{j\omega t}$ y derivando respecto de t

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} + \varpi^2 \mu\varepsilon . E_X = 0 \qquad [4\text{-}34b]}$$

Ecuación de Helmholtz con notación fasorial y σ = 0

El término $e^{j\omega t}$ lo introducimos más adelante pues aquí no afecta

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} + \beta^2 . E_X = 0 \qquad [4\text{-}35]$$

Esto se demuestra recordando que la constante de propagación γ es igual a la constante de atenuación α más la constante de fase β:

---

[2] Se define en forma fasorial una onda plana como aquella onda cuya superficie *equifásica* es un plano. Si la superficie equifásica es también una de iguales amplitudes, será una onda plana *uniforme*. Las ondas planas no uniformes se encontrarán en las guías de ondas.

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = j\varpi\mu(\sigma + j\varpi\varepsilon) \qquad [4\text{-}36]$$

Si $\sigma = 0$ (Sigma es igual a cero) la onda no sufre atenuación por lo tanto $\alpha = 0$

$$\gamma^2 = (j\beta)^2 = -\beta^2 = -\varpi^2\mu\varepsilon \qquad [4\text{-}37]$$

siendo la constante de fase β igual a la pulsación ω por la raíz cuadrada de la permeabilidad magnética μ por la permitividad ε.

$$\beta = \varpi\sqrt{\mu\varepsilon} \qquad [4\text{-}38]$$

Considerando solo la componente $E_X = f(z)$ (condición de onda plana) la solución puede ponerse en la forma

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{x}}(z) = C_1.e^{-j\beta z} + C_2.e^{+j\beta z} \qquad [4\text{-}39]$$

en la que C_1 y C_2 son constantes complejas arbitrarias. Al campo, variable en el tiempo, correspondiente debemos agregar $e^{j\omega t}$; por lo tanto es

$$E_X(z,t) = \mathrm{Re}\left[E_X(z)\cdot e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[C_1\cdot\cos(\varpi t - \beta z) + C_2\cdot\cos(\varpi t + \beta z)\right] \qquad [4\text{-}40]$$

Tomando la parte real de la ecuación anterior se obtiene directamente su forma sinusoidal. Por ejemplo, cuando C_1 y C_2 son reales, la ecuación resulta

$$\boxed{E_X(z,t) = C_1.\cos(\varpi t - \beta z) + C_2.\cos(\varpi t + \beta z) \qquad [4\text{-}41]}$$

Es evidente que en un medio homogéneo, sin pérdidas, la hipótesis de una variación sinusoidal en el tiempo da lugar a una *variación espacial*, también sinusoidal.

El primer término del segundo miembro representa una onda que se desplaza en la dirección de las Z positivas a la cual llamaremos **onda incidente**, el segundo término representa una onda que se desplaza en la dirección de las z negativas y la llamaremos **onda reflejada**, por este motivo a las constantes las llamaremos $C_1 = E_i$ (amplitud del campo eléctrico incidente) y a $C_2 = E_r$ (amplitud del campo eléctrico reflejado), haciendo esta consideración podemos poner

$$\boxed{E_X(z,t) = E_i.\cos(\varpi t - \beta z) + E_r.\cos(\varpi t + \beta z) \qquad [4\text{-}42]}$$

Las ecuaciones (54) o (55) representan la suma de dos ondas que viajan en direcciones opuestas. Si $C_1 = C_2$, las dos ondas (*progresivas* en sentidos opuestos) se combinan para formar una *onda estacionaria* que no se desplaza. Este caso se analiza en la unidad de Reflexión.

Puede obtenerse la velocidad de la onda escribiendo la expresión de E_x como función de ($z \pm vt$). La velocidad debe ser

$$\varpi.t = \beta.z \qquad \frac{z}{t} = v = \frac{\varpi}{\beta} \quad \left[\frac{m}{seg}\right] \qquad [4\text{-}43]$$

Puede obtenerse el mismo resultado fijando un punto en la onda y observando su velocidad. Para una onda que se desplace en la dirección positiva de x uno de esos puntos se identificará por ωt - βz = *constante*.

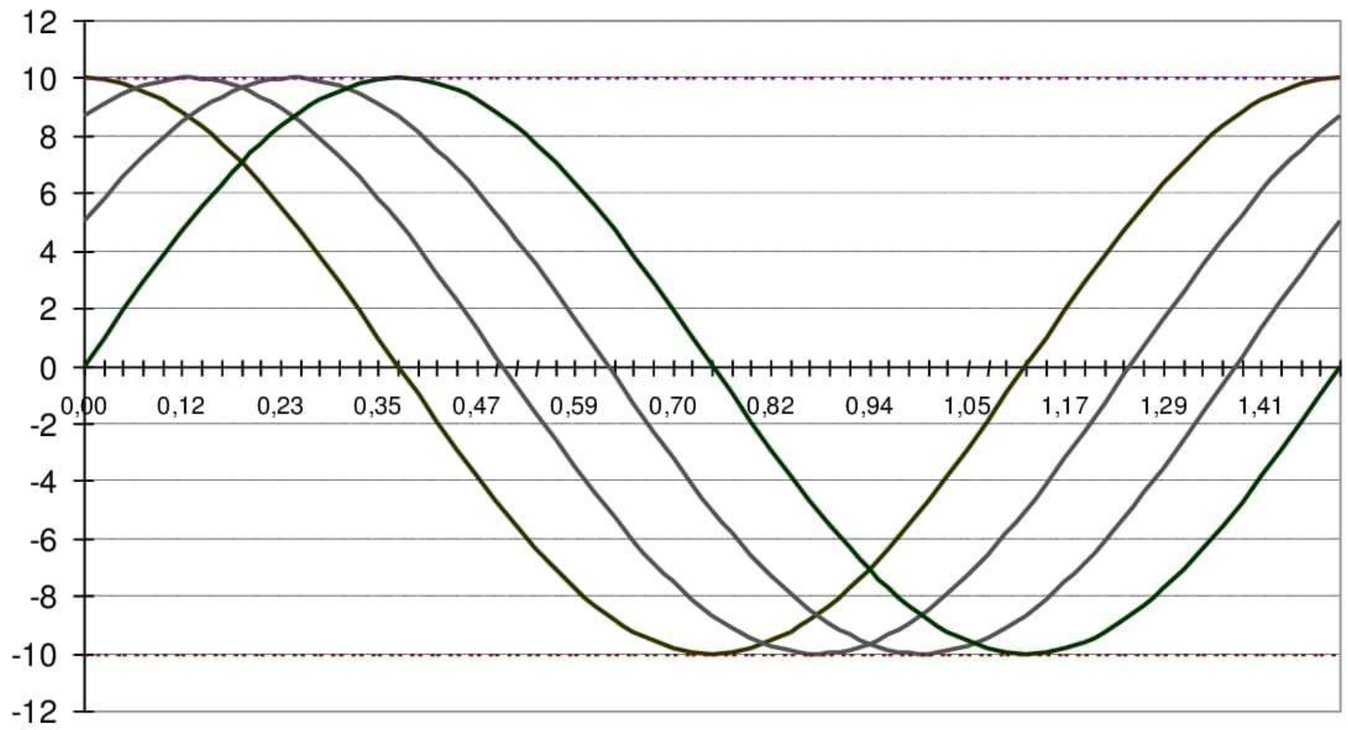


FIGURA 4-6: Propagación de una onda sinusoidal para cuatro tiempos distintos.

$$E_x(z,t) = 10.\cos(\omega t - \beta z)$$

La diferenciación da, como antes, $v = dz/dt = \omega/\beta$. Esta velocidad de un punto de onda sinusoidal recibe el nombre de *velocidad de fase*. A β se le llama *constante de fase*, y es una medida del defasaje en radianes por unidad de longitud.

Otra cantidad importante es la longitud de onda λ definida como la distancia que ocupa una onda sinusoidal en un ciclo completo de 2π radianes, tal como indica la figura, como la ecuación (54) indica que los campos varían en el espacio como funciones sinusoidales de βz, resulta que por definición de la longitud de onda:

$$\beta.\lambda = 2 \cdot \pi \qquad [4\text{-}44]$$

Sustituyendoβ de la ecuación anterior, tendremos $\omega.\lambda = 2.\pi.v$

y como $\omega=2\pi f$, tendremos finalmente

$$v = f.\lambda \quad \left[\frac{m}{seg}\right] \qquad [4\text{-}45]$$

en la que f esta medida en ciclos por segundos o herzios. La discusión anterior es suficientemente general para aplicarse a todo valor de β dado en la ecuación (49) la velocidad de fase en el vacío debe ser

$$v = \frac{\varpi}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}} = v_0 = c \quad \left[\frac{m}{seg}\right] \qquad [4\text{-}46]$$

La ecuación para el campo magnético se obtiene de la segunda Ecuación de Maxwell $\nabla x E\, e^{j\omega t} = -\, j\omega\mu H\, e^{j\omega t}$; queda expresada de la siguiente forma, la cual se deducirá en el siguiente punto

$$\boxed{H_Y(z,t) = \frac{E_i}{\eta}.\cos(\varpi t - \beta z) - \frac{E_r}{\eta}.\cos(\varpi t + \beta z) \qquad [4\text{-}47]}$$

4.4. ECUACIÓN DE ONDA PLANA EN UN MEDIO CON PÉRDIDAS CON NOTACIÓN FASORIAL ($\sigma \neq 0$)

En las secciones precedentes se aplicaron las ecuaciones de Maxwell para el caso particular de un medio que era un dieléctrico perfecto, tal como el espacio libre, en el que no existen ni cargas ni corrientes de conducción. En las regiones en las que la conductividad no sea cero ($\sigma \neq 0$) y puedan existir corrientes de conducción debe obtenerse una solución más general. Se obtiene de una manera similar al caso más simple ya considerado.

Tenemos la 1ra y 2da ecuación de Maxwell expresadas en forma fasorial:

$$\nabla x H = J + j\varpi\varepsilon E \qquad [4\text{-}48]$$

$$\nabla x E = -j\varpi\mu H \qquad [4\text{-}49]$$

No ponemos $e^{j\omega t}$ pues no afecta a las operaciones a realizar.

Si el medio tiene una conductibilidad σ (mhos/m), la densidad de corriente de conducción ***J*** estará dada por la ley de Ohm

$$J = \sigma . E \qquad \left[\frac{A}{m}\right]$$

Esta última ecuación es la expresión vectorial (aplicable a un volumen elemental) de la relación más familiar *I=V/R*.

de manera que (4-78) se convierte en

$$\nabla x H = \left(\sigma + j\varpi\varepsilon\right) E \qquad [4\text{-}50]$$

4.4.1. Ecuación de onda de Campo Eléctrico (E)

Tomando rotacionales en ambos miembros de la segunda ecuación de Maxwell se obtiene:

$$\nabla x \nabla x E = -j\varpi\mu . \nabla x H \qquad [4\text{-}51]$$

En el segundo miembro podemos reemplazar por la primera ecuación de Maxwell

$$\nabla x \nabla x E = -j\varpi\mu\left(\sigma + j\varpi\varepsilon\right) E \qquad [4\text{-}52]$$

Recordando la identidad vectorial que expresa:

$$\nabla x \nabla x E = \nabla . \nabla . E - \nabla^2 E \qquad [4\text{-}53]$$

y combinando estas dos últimas ecuaciones resulta

$$\nabla^2 E = \nabla . \nabla . E + j\varpi\mu\left(\sigma + j\varpi\varepsilon\right) E \qquad [4\text{-}54]$$

Si a la expresión formada por las constantes primarias del medio la igualamos a la constante de propagación al cuadrado, podremos escribir:

$$\gamma^2 = j\varpi\mu(\sigma + j\varpi\varepsilon) \qquad [4\text{-}55]$$

Ahora bien, en todo medio homogéneo en el que ε es constante

$$\nabla.E = \frac{1}{\varepsilon}\nabla.D \qquad [4\text{-}56]$$

Pero como ∇.D = ρ y como no hay una carga neta dentro del conductor (aunque puede haberla en su superficie), la densidad de carga ρ es cero y por lo tanto

$$\nabla.D = 0 \qquad [4\text{-}57]$$

La ecuación (84) se convierte así en

$$\nabla^2 E = +j\varpi\mu(\sigma + j\varpi\varepsilon)E = +\gamma^2 E \qquad [4\text{-}58]$$

Si fijamos condiciones para establecer una **onda plana** obtenemos:

$$E_X = f(z,t) \qquad [4\text{-}59]$$

Recordando el Laplaciano del campo eléctrico para una onda plana (se anulan ocho términos y queda solo uno)

$$\nabla^2 E = \nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \qquad [4\text{-}60]$$

Esta es la **ecuación general de Helmholtz** para una onda plana del campo eléctrico E para σ≠0.

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} - \gamma^2 E_X = 0 \qquad [4\text{-}61]}$$

La solución de esta ecuación diferencial homogénea de segundo orden es:

$$\boxed{E_X(z) = C_1.e^{-\gamma Z} + C_2.e^{+\gamma Z} \qquad [4\text{-}62]}$$

En la que C1 y C2 son constantes complejas arbitrarias que surgen de la solución de la ecuación diferencial. Si recordamos que la constante de propagación γ es igual a la suma de la constante de atenuación α más la constante de fase β:

$$E_X(z) = C_1.e^{-\alpha}.e^{-J\beta Z} + C_2.e^{+\alpha}.e^{+J\beta Z} \qquad [4\text{-}63]$$

Si expresamos Ex en función de z y de t debemos agregar $e^{j\omega t}$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{x}}(z,t) = \left(C_1.e^{-\alpha z}.e^{-j\beta z} + C_2.e^{+\alpha z}.e^{+j\beta z}\right).e^{j\omega t} \qquad [4\text{-}64]$$

$$E_X(z,t) = C_1.e^{-\alpha z}.e^{j(\varpi t - \beta Z)} + C_2.e^{+\alpha z}.e^{j(\varpi t + \beta Z)} \qquad [4\text{-}65]$$

Como dijimos anteriormente, el primer término del segundo miembro representa una onda que se desplaza en la dirección de las Z positivas a la cual llamaremos onda incidente, el segundo término representa una onda que se desplaza en la dirección de las z negativas y la llamaremos onda reflejada, por este motivo a las constantes las llamaremos $C_1 = E_i$ (amplitud del campo eléctrico incidente) y a $C_2 = E_r$ (amplitud del campo eléctrico reflejado)

$$E_X(z,t) = E_i.e^{-\alpha z}.e^{j(\varpi t - \beta Z)} + E_r.e^{+\alpha z}.e^{j(\varpi t + \beta Z)} \qquad [4\text{-}66]$$

Tomando la parte real de la ecuación nos queda

$$\boxed{\mathrm{Re}\left[E_X(z,t)\right] = E_i.e^{-\alpha z}.\cos\left(\varpi t - \beta Z\right) + E_r.e^{+\alpha z}.\cos\left(\varpi t + \beta Z\right) \qquad [4\text{-}67]}$$

Onda incidente

$$E_i.e^{-\alpha z}.\cos\left(\varpi t - \beta Z\right) \qquad [4\text{-}68]$$

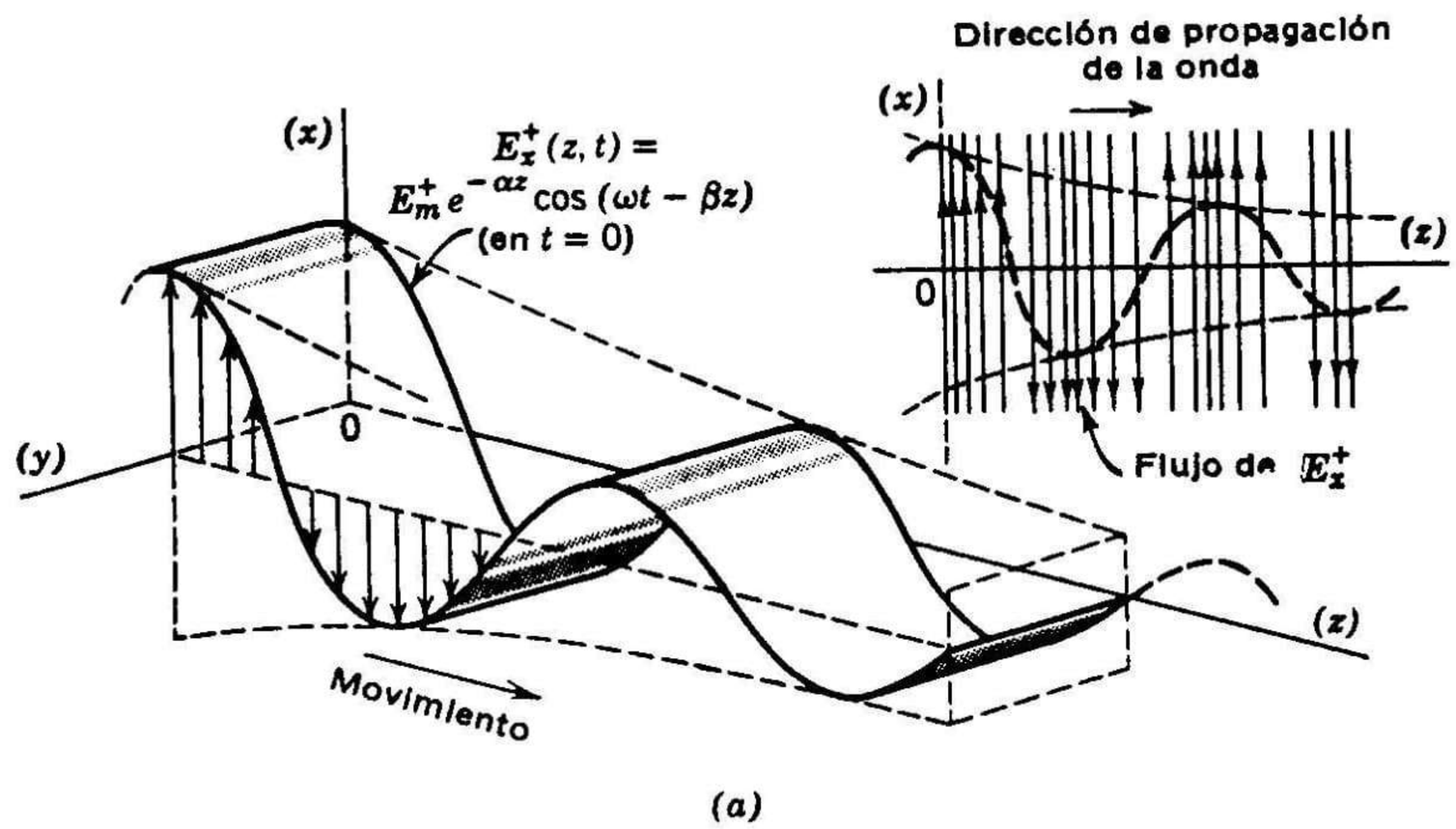


FIGURA 4-7

La onda reflejada

$$E_r.e^{+\alpha z}.\cos\left(\varpi t + \beta Z\right) \qquad [4\text{-}69]$$

Si la onda tiene un desfasaje inicial, la ecuación sería:

$$\mathrm{Re}\left[E_x(z,t)\right] = E_i\, e^{-\alpha z} \cdot \cos\left(\omega t - \beta z + \phi\right) + E_r\, e^{\alpha z} \cdot \cos\left[\omega t + \beta z + \phi\right] \qquad [4\text{-}70]$$

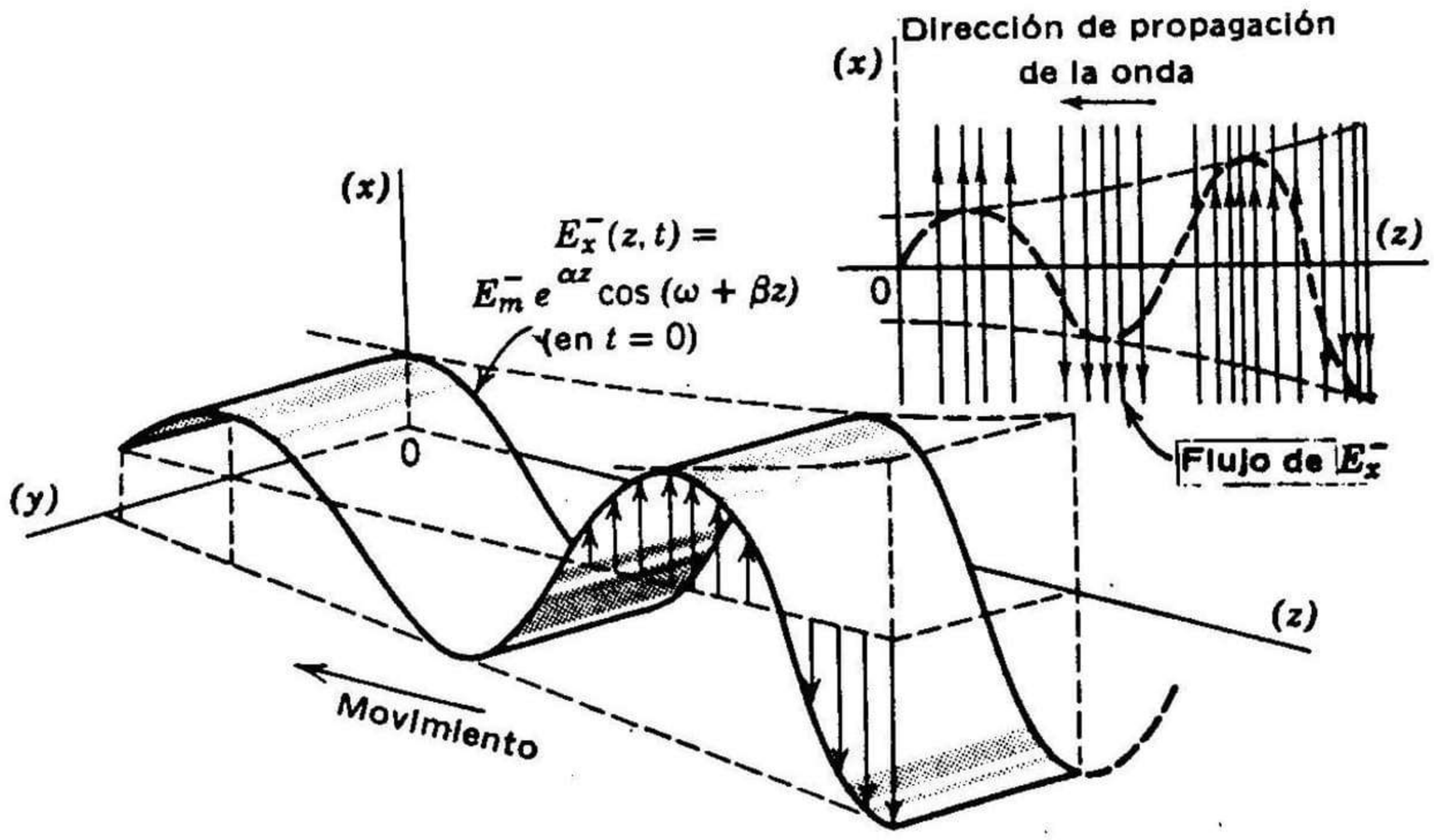


FIGURA 4-8

4.4.2. Ecuación de onda de Campo Magnético (H)

La **ecuación de onda del campo magnético H** la obtendremos a partir de la segunda ecuación de Maxwell. No podemos utilizar el mismo mecanismo que usamos para calcular el campo eléctrico E porque ya fijamos condiciones: $E_X = f(z, t)$, recordemos que E y H estan relacionados por el vector de Poynting: $P_y = E \times H$

$$\nabla x E.e^{j\varpi t} = -j\varpi\mu.H.e^{j\varpi t} \qquad [4\text{-}71]$$

Como

$$\nabla x E = \begin{vmatrix} \hat{a}_X & \hat{a}_Y & \hat{a}_Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_X & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + \frac{\partial E_X}{\partial z}.\hat{a}_Y - \frac{\partial E_X}{\partial y}.\hat{a}_z \qquad [4\text{-}72]$$

Debido a que E_X es función de z y de t:

$$\nabla x E.e^{j\varpi t} = \frac{\partial E_X}{\partial z}.\hat{a}_Y = -j\varpi\mu.H_Y.\hat{a}_Y \qquad [4\text{-}73]$$

Despejando H_Y

$$H_Y = -\frac{1}{j\varpi\mu}.\frac{\partial E_X}{\partial z}.\hat{a}_Y \qquad [4\text{-}74]$$

Recordando la ecuación del campo eléctrico encontrada en el punto anterior

$$E_X(z) = E_i.e^{-\gamma Z} + E_r.e^{+\gamma Z} \qquad [4\text{-}61]$$

$$\frac{\partial E_X}{\partial z} = -\gamma.E_i.e^{-\gamma Z} + \gamma.E_r.e^{+\gamma Z} \qquad [4\text{-}75]$$

$$H_Y = -\frac{1}{j\varpi\mu}\left[-\gamma.E_i.e^{-\gamma Z} + \gamma.E_r.e^{+\gamma Z}\right] \qquad [4\text{-}76]$$

$$H_Y = \frac{\gamma}{j\varpi\mu}E_i.e^{-\gamma Z} - \frac{\gamma}{j\varpi\mu}.E_r.e^{+\gamma Z} \qquad [4\text{-}77]$$

Si denominamos Impedancia Intrínseca al siguiente término:

$$\eta = \frac{j\varpi\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}} \qquad [4\text{-}78]$$

La ecuación de onda del campo magnético se puede expresar:

$$H_Y = \frac{E_i}{\eta}.e^{-\gamma Z} - \frac{E_r}{\eta}.e^{+\gamma Z} \qquad [4\text{-}79]$$

Tomando la parte real de la expresión de H:

$$\mathrm{Re}\left[H_Y(z,t)\right] = \frac{E_i}{\eta}.e^{-\alpha z}.\cos(\varpi.t - \beta.z) - \frac{E_r}{\eta}.e^{+\alpha z}.\cos(\varpi.t + \beta.z) \qquad [4\text{-}80]$$

Debemos recordar que:

$$H_i = \frac{E_i}{\eta} \qquad y \qquad H_r = -\frac{E_r}{\eta} \qquad [4\text{-}81]$$

Lo cual lo utilizaremos en la unidad de reflexión perpendicular y nos permite expresar el campo magnético de la siguiente manera:

$$\mathrm{Re}\left[H_Y(z,t)\right] = H_i.e^{-\alpha z}.\cos(\varpi.t - \beta.z) + H_r.e^{+\alpha z}.\cos(\varpi.t + \beta.z) \qquad [4\text{-}82]$$

Siendo el primer término del segundo miembro la ecuación de la onda incidente del campo magnético y el segundo término del segundo miembro la ecuación de la onda reflejada del campo magnético.

$$\mathrm{Re}\left[H_Y(z,t)\right] = H_i.e^{-\alpha z}.\cos(\varpi.t - \beta.z) \qquad [4\text{-}83]$$

Resumiendo

Para graficar la onda electromagnética plana polarizada en el eje x que se propaga por un medio continuo en la dirección del eje z tendremos:

La ecuación de campo eléctrico incidente

$$\mathrm{Re}\left[E_X(z,t)\right] = E_i.e^{-\alpha z}.\cos(\omega t - \beta \cdot z) \qquad [4\text{-}84a]$$

y la ecuación de campo magnético incidente

$$\mathrm{Re}\left[H_Y(z,t)\right] = \frac{E_i}{\eta}\, e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta \cdot z) \qquad [4\text{-}83b]$$

Observando el gráfico vemos que el desfasaje entre E y H es introducido por la impedancia intrínseca del medio conductor η.

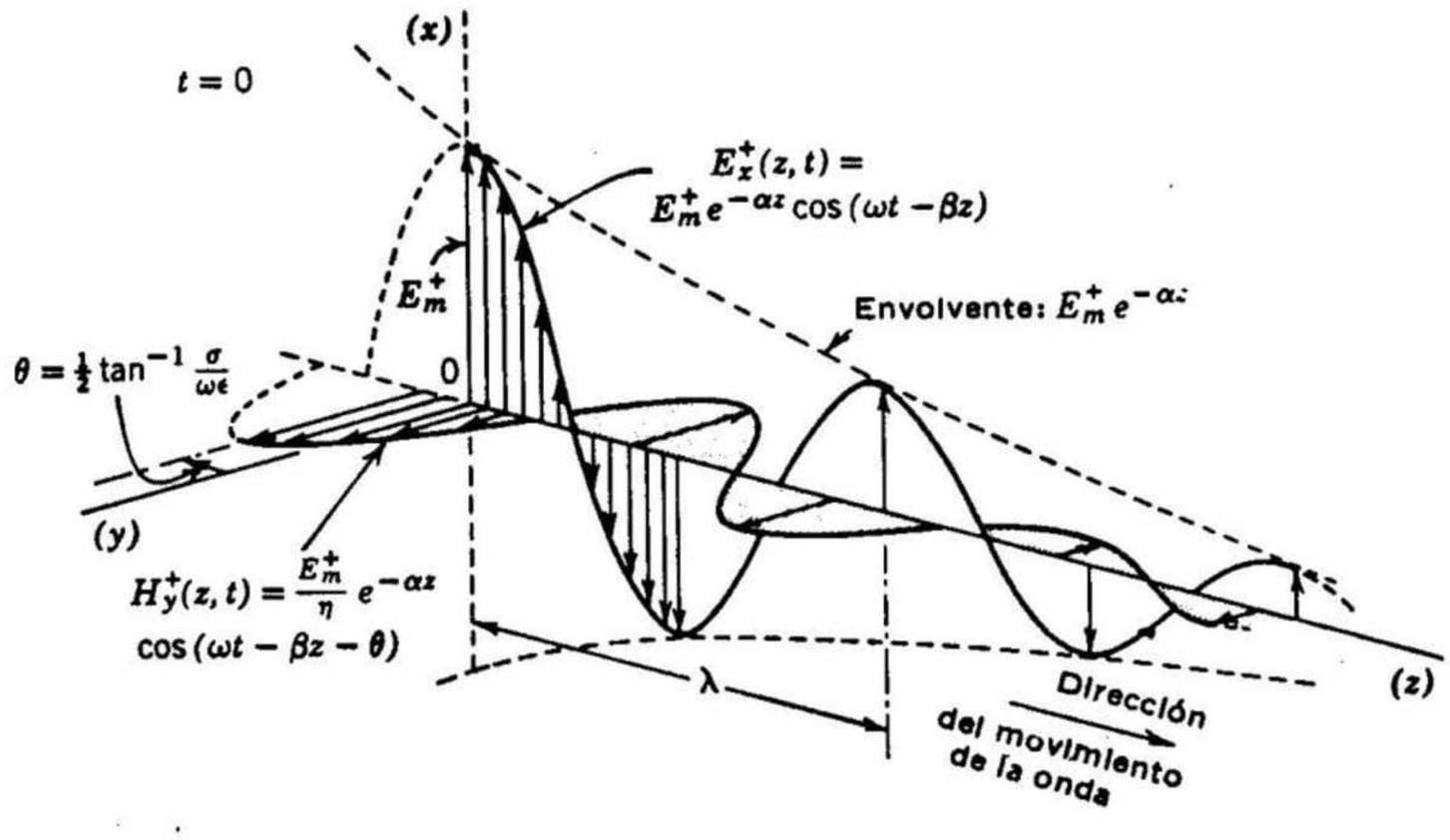


FIGURA 4-9

4.5. CÁLCULO DE LA IMPEDANCIA INTRÍNSECA η (eta)

En la ecuación 92 definimos:

$$\eta = \frac{j\varpi\mu}{\gamma} \qquad [4\text{-}85]$$

Si recordamos la constante de propagación:

$$\gamma = \sqrt{j\varpi\mu(\sigma + j\varpi\varepsilon)} \qquad [4\text{-}54]$$

Podemos expresar:

$$\eta = \frac{j\varpi\mu}{\sqrt{j\varpi\mu(\sigma + j\varpi\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{(j\varpi\mu)^2}{j\varpi\mu(\sigma + j\varpi\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{j\varpi\mu}{\sigma + j\varpi\varepsilon}} \qquad [4\text{-}86]$$

Si sacamos factor común jωμ

$$\eta = \sqrt{\frac{j\varpi\mu}{j\varpi\varepsilon\left(\frac{\sigma}{j\varpi\varepsilon} + 1\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}}} \qquad [4\text{-}87]$$

Por lo tanto la forma compleja de la impedancia intrínseca se expresa:

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}}} \qquad [4\text{-}88]$$

Si trabajamos con el denominador

$$1-j\,\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\cdot e^{-j\,tg^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} \qquad [4\text{-}89]$$

SI consideramos ahora la raiz cuadrada

$$\sqrt{1-j\,\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}=\sqrt[4]{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\cdot e^{-j\,tg^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} \qquad [4\text{-}90]$$

La forma polar de la impedancia intríseca queda

$$[\eta]=\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt[4]{\left(1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2\right)}} \qquad \theta_\eta=\frac{1}{2}tg^{-1}\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right) \qquad [4\text{-}91a]$$

La forma compleja:

$$\eta=[\eta].cos\theta_\eta+j[\eta].sen\theta_\eta \qquad [4\text{-}92b]$$

4.6. CÁLCULO DE LAS CONSTANTES α Y β

Los valores de α y β en función de las constantes "primarias" del medio, es decir, de σ, μ y ε serán obtenidos de la siguiente manera:

$$\gamma^2=j\varpi\mu(\sigma+j\varpi\varepsilon) \qquad [4\text{-}91]$$

$$\gamma=\alpha+j\beta \qquad [4\text{-}92]$$

$$\gamma^2=(\alpha+j\beta)^2$$

$$(\alpha+j\beta)^2=j\varpi\mu(\sigma+j\varpi\varepsilon) \qquad [4\text{-}93]$$

$$(\alpha+j\beta)^2=\alpha^2+j2\beta\alpha-\beta^2=j\varpi\mu\sigma-\varpi^2\mu\varepsilon \qquad [4\text{-}94]$$

Igualando parte real e imaginaria:

La parte real será:

$$\alpha^2-\beta^2=-\varpi^2\mu\varepsilon \qquad [4\text{-}95]$$

La parte imaginaria será:

$$j2\beta\alpha=j\varpi\mu\sigma \qquad [4\text{-}96]$$

4.6.1. Cálculo de la constante de fase β

Ordenando la parte real (4-95):

$$\beta^2 - \varpi^2\mu\varepsilon - \alpha^2 = 0 \qquad [4\text{-}97]$$

Si despejamos la constante de atenuación α de la parte imaginaria (4-109) y la reemplazamos en la parte real, tendremos la expresión en función de la constante de fase β:

$$\alpha = \frac{\varpi\mu\sigma}{2\beta}$$

$$\beta^2 - \varpi^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\varpi\mu\sigma}{2\beta}\right)^2 = 0 \qquad [4\text{-}98]$$

Multiplicando toda la expresión por la constante de fase al cuadrado:

$$\beta^4 - \varpi^2\mu\varepsilon\beta^2 - \left(\frac{\varpi\mu\sigma}{2}\right)^2 = 0 \qquad [4\text{-}99]$$

Teniendo en cuenta que la ecuación anterior puede ser resuelta como una ecuación homogénea de segundo grado procedemos a resolver la ecuación de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta^2 = \frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{\left(\varpi^2\mu\varepsilon\right)^2 + 4\left(\frac{\varpi\mu\sigma}{2}\right)^2}}{2} \qquad [4\text{-}100]$$

Sacando factor común en el signo radical $\frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2}$

$$\beta^2 = \frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2}\right)^2\left[1+\left(\frac{\varpi\mu\sigma}{\varpi^2\mu\varepsilon}\right)^2\right]} \qquad [4\text{-}101]$$

$$\beta^2 = \frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2}\right)^2\left[1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2\right]} \qquad [4\text{-}102]$$

Si sacamos el término anterior fuera del signo radical

$$\beta^2 = \frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2} + \frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2} \qquad [4\text{-}103]$$

$$\frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{2}$$

Sacando factor común

$$\beta^2 = \frac{\varpi^2 \mu\varepsilon}{2}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2}\right] \qquad [4\text{-}104]$$

Como el valor buscado es la constante de fase β:

$$\beta = \varpi.\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2}\right]} \qquad [4\text{-}105]$$

Cuando $\omega = 2.\pi.f$ la magnitud de β es en radianes/metro. Para el cálculo de β en grados por metro [º/m] se multiplica el valor obtenido en [rad/m] por 180º y se lo divide por π.

4.6.2. Cálculo de la constante de atenuación α

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\varpi^2 \mu\varepsilon \qquad [4\text{-}106]$$

$$\alpha^2 = \beta^2 - \varpi^2 \mu\varepsilon$$

Reemplazando β^2 de la ecuación (4-103)

$$\alpha^2 = \frac{\varpi^2 \mu\varepsilon}{2} + \frac{\varpi^2 \mu\varepsilon}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2} - \varpi^2 \mu\varepsilon \qquad [4\text{-}107]$$

$$\alpha^2 = -\frac{\varpi^2 \mu\varepsilon}{2} + \frac{\varpi^2 \mu\varepsilon}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2} \qquad [4\text{-}108]$$

Sacando factor común

$$\alpha^2 = \frac{\varpi^2 \mu\varepsilon}{2}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2}\right] \qquad [4\text{-}109]$$

El valor buscado es la constante de atenuación **α**, por lo tanto sacamos la raíz cuadrada:

$$\alpha = \varpi\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2}\right]} \qquad [4\text{-}110]$$

4.7. CONDUCTORES Y DIELÉCTRICOS

En electromagnetismo, los materiales se dividen en dos clases: conductores y dieléctricos o aislantes. La línea divisoria entre las dos clases no está muy definida, y algunos medios (la tierra, por ejemplo) se consideran como conductores en parte del margen de radiofrecuencias y dieléctricos (con pérdidas) en otra parte de dicho margen.

En la primera ecuación de Maxwell

$$\nabla xH = \sigma.E + j.\varpi.\varepsilon.E = J_C + jJ_D \qquad [2\text{-}181]$$

el primer sumando del segundo miembro es la densidad de corriente de conducción y el segundo la densidad de corriente de desplazamiento. La razón $\sigma/\omega\varepsilon$ es, pues, precisamente la razón entre la densidad de corriente de conducción y la de desplazamiento.

Por tanto, $\sigma/\omega\varepsilon=1$ puede considerarse como línea divisoria entre conductores y dieléctricos. En los buenos conductores, tales como los metales, $\sigma/\omega\varepsilon$ es muy superior a la unidad en todo el espectro de radiofrecuencias. Por ejemplo, en el cobre hasta las frecuencias relativamente elevadas de 30.000 Mhz, $\sigma/\omega\varepsilon$ es de unos $3{,}5 \times 10^8$.

En los buenos dieléctricos o aislantes, es mucho menor que la unidad en dicho margen de radiofrecuencias. Por ejemplo, la mica en audio o radiofrecuencias da un valor del orden de 0,0002.

En los buenos conductores σ y ε son casi independientes de la frecuencia, pero para la mayoría de los materiales clasificados como dieléctricos las "constantes" σ y ε son funciones de la frecuencia. Se ha encontrado que para estos materiales la razón $\sigma/\omega\varepsilon$ es a menudo relativamente constante en el margen de frecuencias que interesan. Por esta y otras razones, las propiedades de los dieléctricos se dan usualmente en función de la "constante" dieléctrica ε y la razón $\sigma/\omega\varepsilon$.

En estas circunstancias la razón $\sigma/\omega\varepsilon$ suele conocerse como factor de disipación F.D. del dieléctrico (4-129). En los dieléctricos razonablemente buenos, es decir, aquellos que tengan pequeños valores de F.D., el factor de disipación es prácticamente igual al factor de potencia del dieléctrico. Realmente el factor de potencia viene dado por

$$\text{F.P.} = \text{sen } \phi$$

siendo

$$\phi = \tan^{-1} \text{F.D.}$$

4.7.1. Factor de Disipación F.D.

$$F.D. = \frac{J_C}{J_D} = \frac{\sigma.E}{\varpi.\varepsilon.E} = \frac{\sigma.}{\varpi.\varepsilon.} \qquad [4\text{-}111]$$

El factor de disipación y el de potencia difieren en menos de un 1 % cuando sus valores son menores de 0,15.

La mayoría de los materiales empleados en radiotecnia deben o bien dejar pasar fácilmente las corrientes o evitar su circulación en todo lo posible. Por esta razón la mayoría de los materiales que se encuentran en la práctica caen en una de dichas dos clases: buen conductor o buen dieléctrico. La excepción práctica de importancia es la tierra, que ocupa una posición intermedia en todo el margen de radiofrecuencias. Este caso se tratará con detalle en el capítulo de propagación. Tanto para los buenos conductores como para los dieléctricos son válidas ciertas aproximaciones, que simplifican considerablemente las expresiones de α y β.

Si el FD es mayor que 1 (**FD > 1**) el medio se comporta como **conductor**, pues J_C (Densidad de corriente de conducción) es mayor que J_D (Densidad de corriente de desplazamiento).

Si el FD es menor que 1 (**FD < 1**) el medio se comporta como **dieléctrico**, pues J_C (Densidad de corriente de conducción) es menor que J_D (Densidad de corriente de desplazamiento).

4.7.2. Constante de Profundidad de Penetración

En un medio que tenga conductividad σ distinta de cero la onda es atenuada al progresar en él, debido a las pérdidas que éste tiene. En un buen conductor en radiofrecuencias la rapidez de atenuación es muy grande y la onda sólo puede penetrar un poco antes de ser reducida a un porcentaje despreciable de su intensidad original. Una expresión que tiene en cuenta lo dicho es la profundidad de penetración. Se define como profundidad de la penetración δ (delta) como la profundidad a la que la onda se atenúa a 1/e o aproximadamente al 36,7879 % de su valor original. Como la amplitud disminuye según el factor $e^{-\alpha Z}$, es evidente que a la distancia z que haga αz = 1, la amplitud será solamente 1/e del valor que tenía para z = 0.

Por definición esta distancia es igual a δ profundidad de penetración;

así,

$$\alpha.\delta = 1 \qquad \text{o} \qquad \delta = \frac{1}{\alpha} \quad [m] \qquad [4\text{-}112]$$

$$\frac{1}{e} = 0{,}367879$$

$$E_X(z) = E_m.e^{-\alpha.z} = E_m.e^{-\alpha.\delta} = E_m.e^{-1} = 0.367879.E_m$$

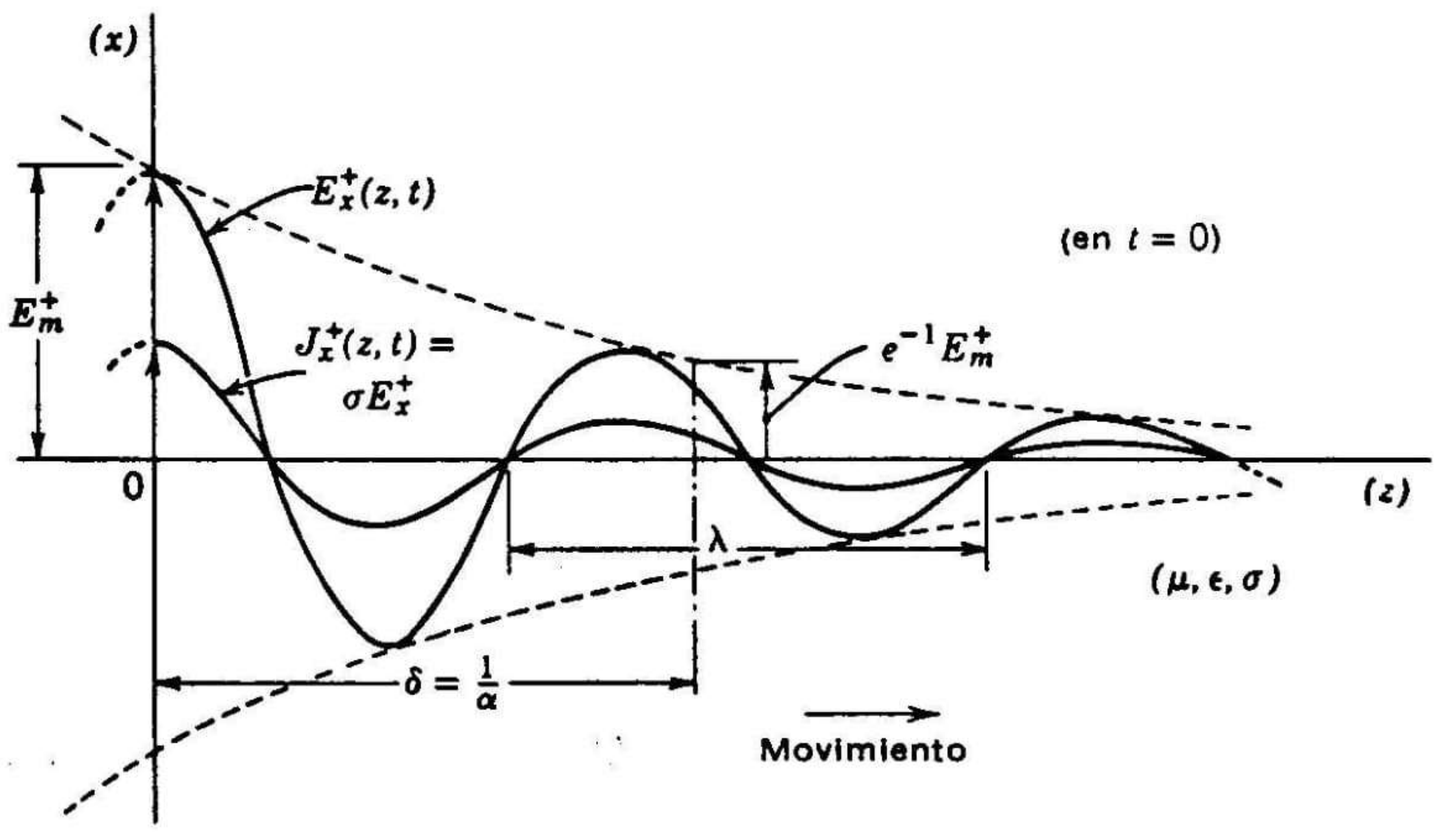


FIGURA 4-10

Como se observa en (4-112) la constante de profundidad de penetración δ es numéricamente igual a la inversa de la constante de atenuación α pero su magnitud es en metros $[m]$.

La expresión general de la constante de profundidad de penetración es:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\varpi\sqrt{\frac{\mu.\varepsilon}{2}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi.\varepsilon}\right)^2}\right]}} \qquad [4\text{-}113]$$

La constante de profundidad de penetración en un buen conductor es:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \cong = \sqrt{\frac{2}{\varpi.\mu.\sigma 2}} \qquad [4\text{-}114]$$

Como ejemplo del orden de magnitud de δ en los metales puede verse que la profundidad de penetración de una onda de un megahercio en el cobre que tiene una conductibilidad $\sigma = 5.8 \times 10^7$ mhos por metro y una permitividad aproximadamente igual a la del vacío, será

$$\delta = \sqrt{\frac{2x10^7}{2.\pi.10^6.4\pi.5{,}8.10^7}} = 0{,}0667\ [mm] \qquad [4\text{-}115]$$

A 100 Mhz será de 0,00667 mm, mientras que a 60 hz es de 8,67 mm.

A fines comparativos, a un Mhz la profundidad de penetración es de 25 cm en el agua de mar y de 7,1 m en agua dulce.

Resumen de la Unidad Temática 4: Ecuación de Onda Electromagnética

Ecuación de onda plana en medio sin pérdidas, continuo y uniforme con notación fasorial

$$E_X(z,t) = E_i.\cos(\varpi t - \beta z) \qquad [4\text{-}41]$$

$$H_Y(z,t) = \frac{E_i}{\eta}\cos(\varpi t - \beta z) \qquad [4\text{-}46]$$

Ecuación de onda plana en medio con pérdidas, continuo y uniforme con notación fasorial

$$E_X(z,t) = E_i.e^{-\alpha z}.\cos(\varpi t - \beta z) \qquad [4\text{-}66]$$

$$H_Y(z,t) = \frac{E_i}{\eta}.e^{-\alpha z}.\cos(\varpi t - \beta z) \qquad [4\text{-}83b]$$

Impedancia Intrínseca (η)

$$[\eta] = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt[4]{\left(1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2\right)}} \quad [\Omega] \qquad \theta_\eta = \frac{1}{2}tg^{-1}\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right) \qquad [4\text{-}90]$$

Constante de Fase (β)

$$\beta = \varpi.\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2}\right]} \qquad \left[\frac{rad}{m}\right] \qquad [4\text{-}105]$$

Constante de atenuación (α)

$$\alpha = \varpi \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varpi\varepsilon}\right)^2}\right]} \quad \left[\frac{Neper}{m}\right] \qquad [4\text{-}110]$$

Velocidad de la Onda (v)

$$v = \frac{\varpi}{\beta} \quad \left[\frac{m}{seg}\right] \qquad [4\text{-}45]$$

Longitud de Onda (λ)

$$\lambda = \frac{2.\pi}{\beta} = \quad [m] \qquad [4\text{-}43]$$

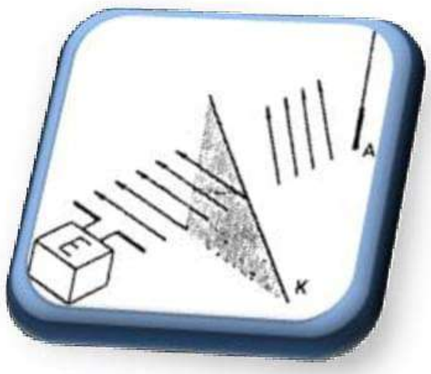
Factor de Disipación (F.D.)

$$F.D. = \frac{J_C}{J_D} = \frac{\sigma}{\varpi.\varepsilon.} \qquad [4\text{-}111]$$

Constante de Profundidad de Penetración (δ)

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\varpi \cdot \sqrt{\frac{\mu.\varepsilon}{2}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{.\varpi.\varepsilon}\right)^2}\right]}} \quad [m] \qquad [4\text{-}124]$$

Capítulo 5



POLARIZACIÓN

Objetivo

- ☞ Que el alumno describa y demuestre, analítica y gráficamente, los distintos tipos de polarización en base a las magnitudes relativas y las fases de las componentes del campo eléctrico.

5.1. DEFINICIÓN DE POLARIZACIÓN DE LA ONDA

Se entiende por polarización de una onda plana uniforme, al comportamiento temporal de la intensidad de campo eléctrico **E** en un punto fijo del espacio.

Considérese, por ejemplo, una onda plana uniforme que viaja en sentido *z* con los vectores E y H situados en el plano *x-y*. Si $E_y = 0$ y sólo está presente E_x se dice que la onda está *polarizada en la dirección de x*. Análogamente podría establecerse cuando la onda estaba polarizada según *y*.

Si existen las dos componentes E_x y E_y y están en *fase*, el campo eléctrico resultante tiene una dirección dependiente de las magnitudes relativas de E_x y E_y. El ángulo que esta dirección forme con el eje *x* será $\tan^{-1}\frac{\tilde{E}_y}{\tilde{E}_x}$ y será constante en el tiempo (véase la figura 5-1). En estos casos en los que el vector resultante es constante en el tiempo se dice que la onda está *polarizada linealmente.*

Si $\tilde{E}_x$ y $\tilde{E}_y$ no están en fase, es decir, si alcanzan sus valores máximos en instantes diferentes, entonces la dirección del vector eléctrico resultante variará en el tiempo. En este caso puede demostrarse que el lugar geométrico de los vértices de estos vectores resultantes $\tilde{\mathbf{E}}$ será una elipse, diciéndose entonces que la onda está *polarizada elípticamente*. En el caso particular en que $\tilde{E}_x$ y $\tilde{E}_y$ tengan igual magnitud y un desfasaje de 90 grados el lugar será una circunferencia, hablándose entonces de *polarización circular*.

Con el objeto de comprender la onda electromagnética en su transporte en cualquier medio, es muy útil reducirla en uno de sus componentes transversales.

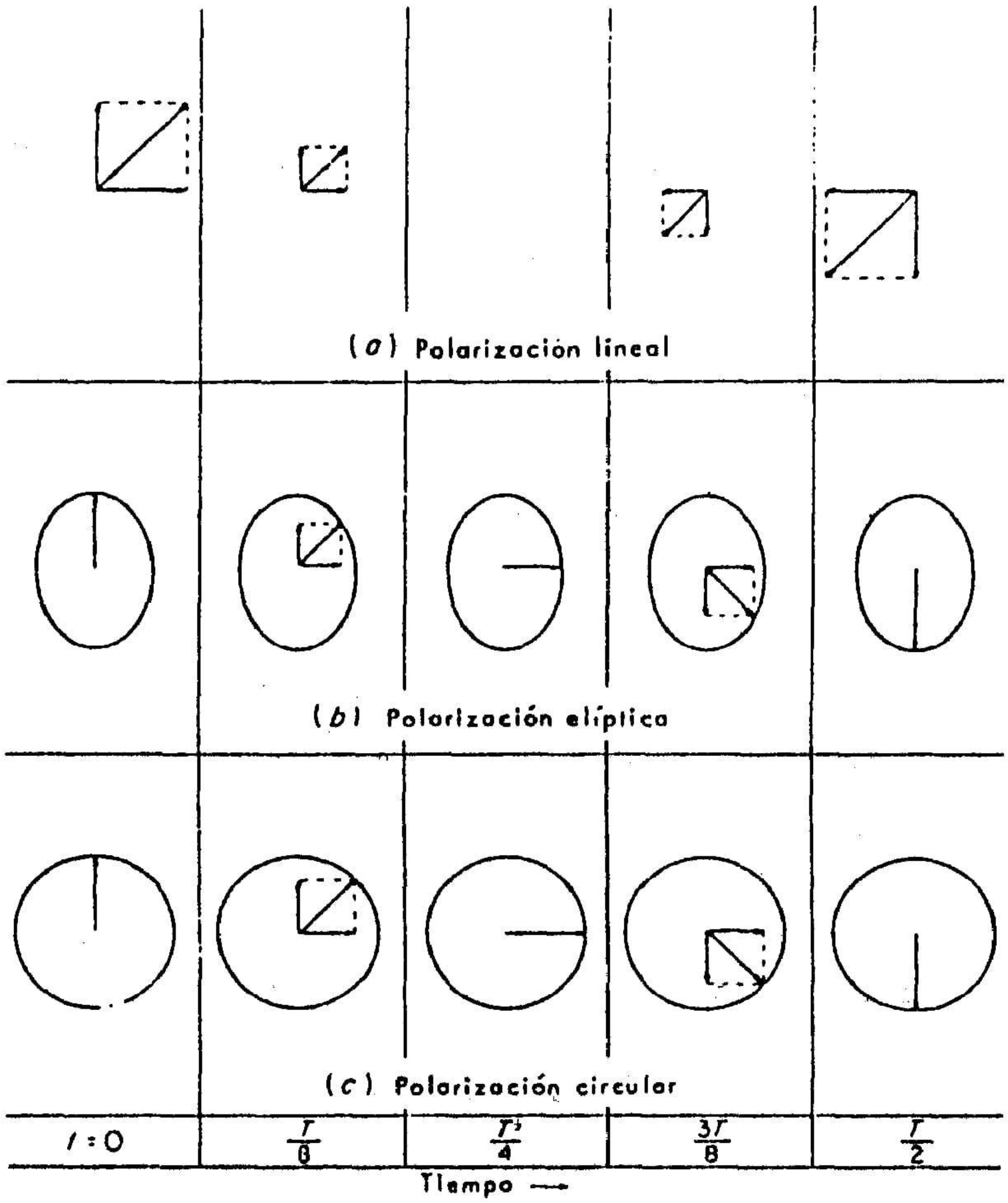


FIGURA 5-1: Tipos de polarizaciones: lineal, elíptica y circular

El que ha sido elegido es la $\vec{E}$. Ya conociéndola y además sabiendo el sentido de avance de la onda, por medio de la impedancia del medio, podremos saber la magnitud de la $\vec{H}$. Por la regla de la mano derecha sabremos la dirección y sentido. Esto es, conociendo la $\vec{E}$ y su sentido de avance, conoceremos todo lo conocido hasta ahora de la onda electromagnética.

La indicación de la $\vec{E}$, se llama "**polarización de la onda**" electromagnética. Para una onda electromagnética plana y uniforme, si la *E* está sobre el eje de las Y, se dice que está polarizada en el eje de las Y. Pero si está sobre el eje de las Z, expresamos que se encuentra polarizada sobre el eje de las z.

Ahora suponiendo que la $\vec{E}$, se encuentra en el plano YZ, formando un ángulo polar con respecto al eje de las Y, que denominaremos φ, su representación sería como la que indica la figura 5-2.

La magnitud del ángulo polar es:

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{E_z}{E_y} \qquad [5\text{-}1]$$

Los componentes de la onda electromagnética, sobre el eje de las Y y el eje de las Z son:

$$\vec{E}_{(y,t)} = \hat{y}\ \cos\varphi\ E_0\, e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad [5\text{-}2]$$

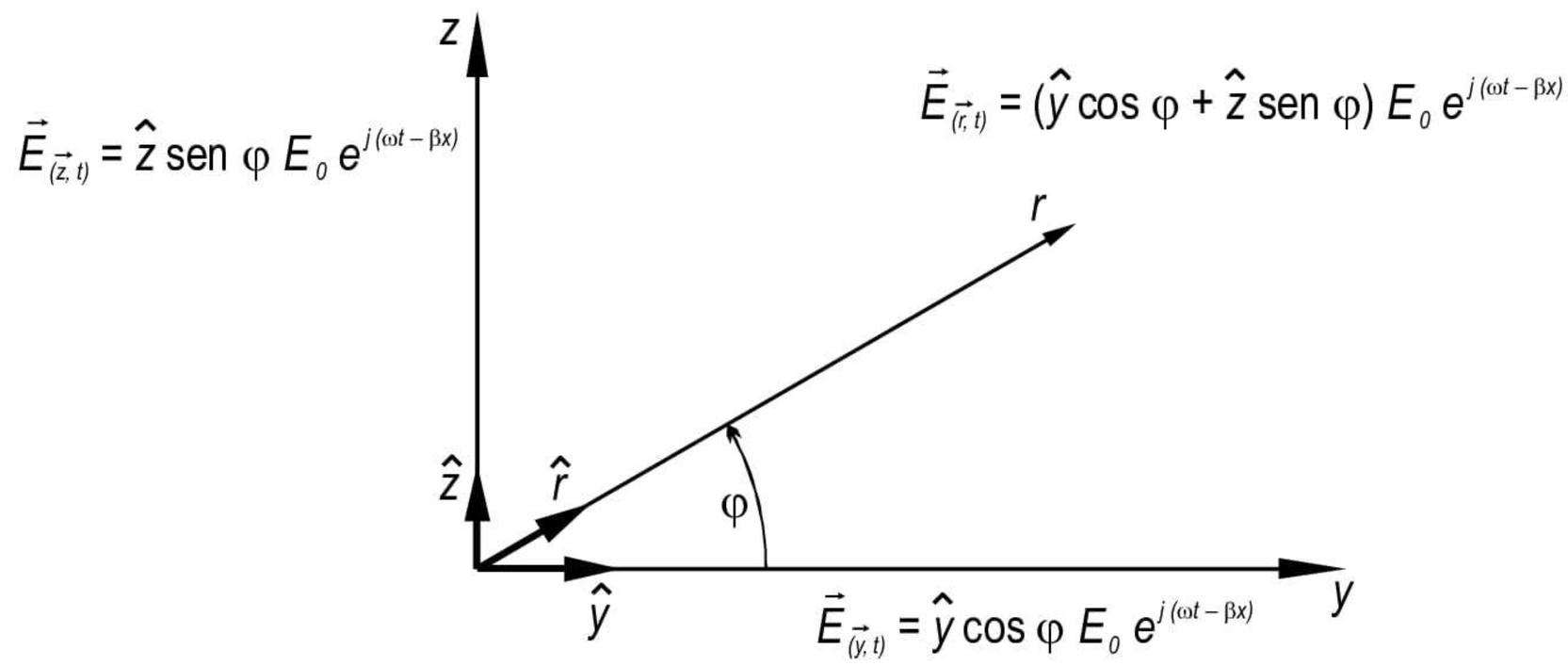


FIGURA 5-2: Representación de la $\vec{E}$ en el plano YZ

$$\vec{E}_{(z,t)} = \hat{z}\ \text{sen}\,\varphi\ E_0\ e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad [5\text{-}3]$$

Podemos notar, los dos componentes se encuentran en fase, y como consecuencia su relación permanecerá constante, esto es, el ángulo φ es también constante.

La polarización será en la dirección del ángulo φ, siendo φ constante con respecto al tiempo, tendremos una línea. **La polarización** se le llama **lineal**.

La representación la haremos por medio de la representación de los componentes de la $\vec{E}$ en su parte real.

Se están indicando en el dibujo, para el caso de βx = Constante, escogida arbitrariamente como cero. El dibujo para cada componente es para un ciclo completo. Los dos componentes como cero. El dibujo para cada componente es para un ciclo completo. Los dos componentes los reunimos en el plano YZ, que es la parte "c" del dibujo 5-3.

En el caso, de que los componentes no estén en fase, esto es:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(\vec{y},t)} &= \hat{y}\ \cos\varphi\ E_0\ e^{j(\omega t - \beta x)} \\ \vec{E}_{(\vec{z},t)} &= \hat{z}\ \text{sen}\,\varphi\ E_0\ e^{j(\omega t - \beta x + \xi)} \end{aligned} \qquad [5\text{-}4]$$

tendremos que el ángulo φ no es constante, ya que estará variando con respecto al tiempo.

Ahora la representación de la $\vec{E}$ es en la forma de una elipse. La polarización será elíptica.

La representación de los componentes en su parte real, es en la figura 5-4.

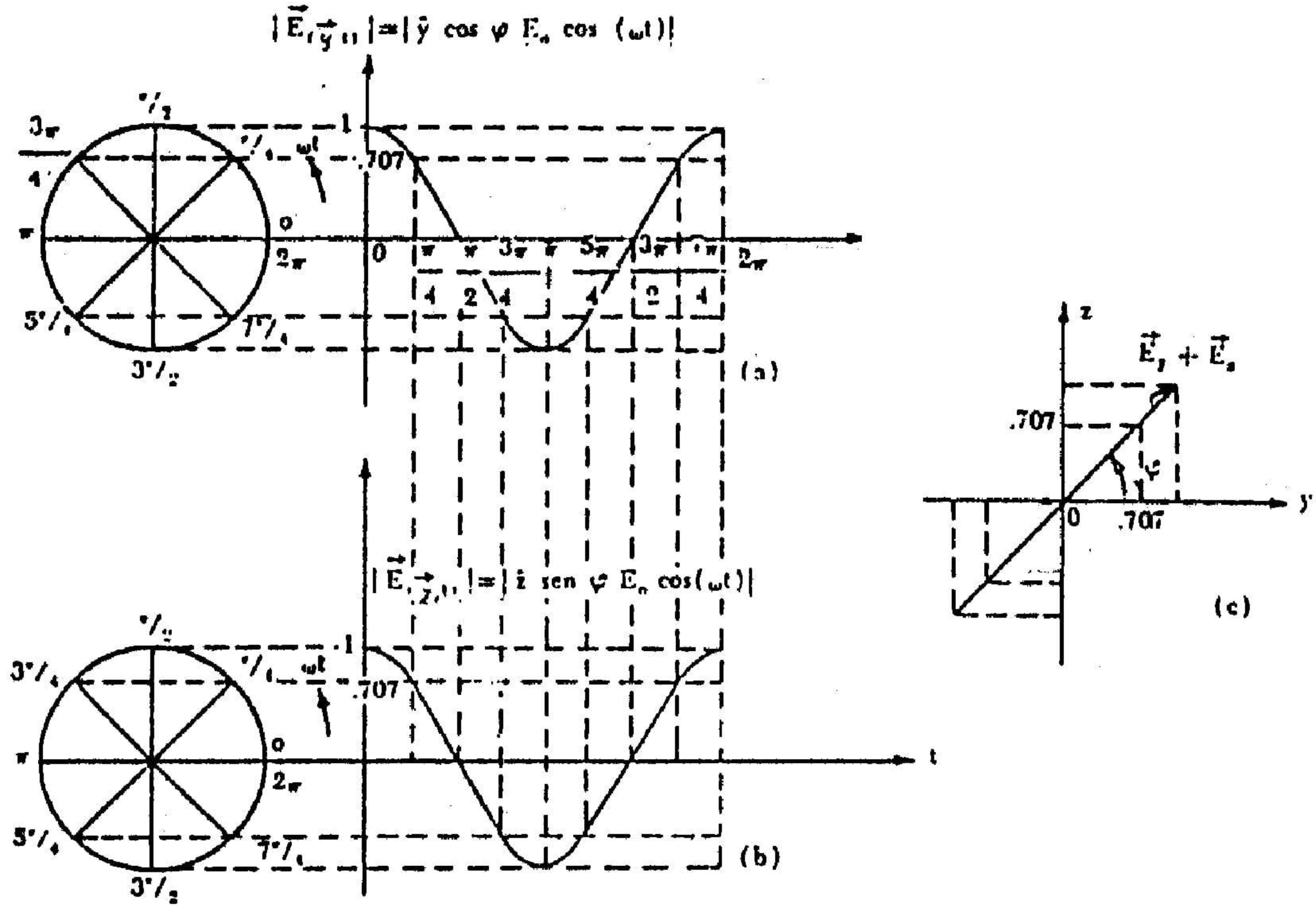


FIGURA 5-3: Polarización Lineal

El ángulo ζ escogido arbitrariamente es de π/4 de adelanto en $\vec{E}_z$. En la parte (a) de la figura 5-4 está representada la función cosenoidal $\vec{E}_y$, suponiendo βx = 0.

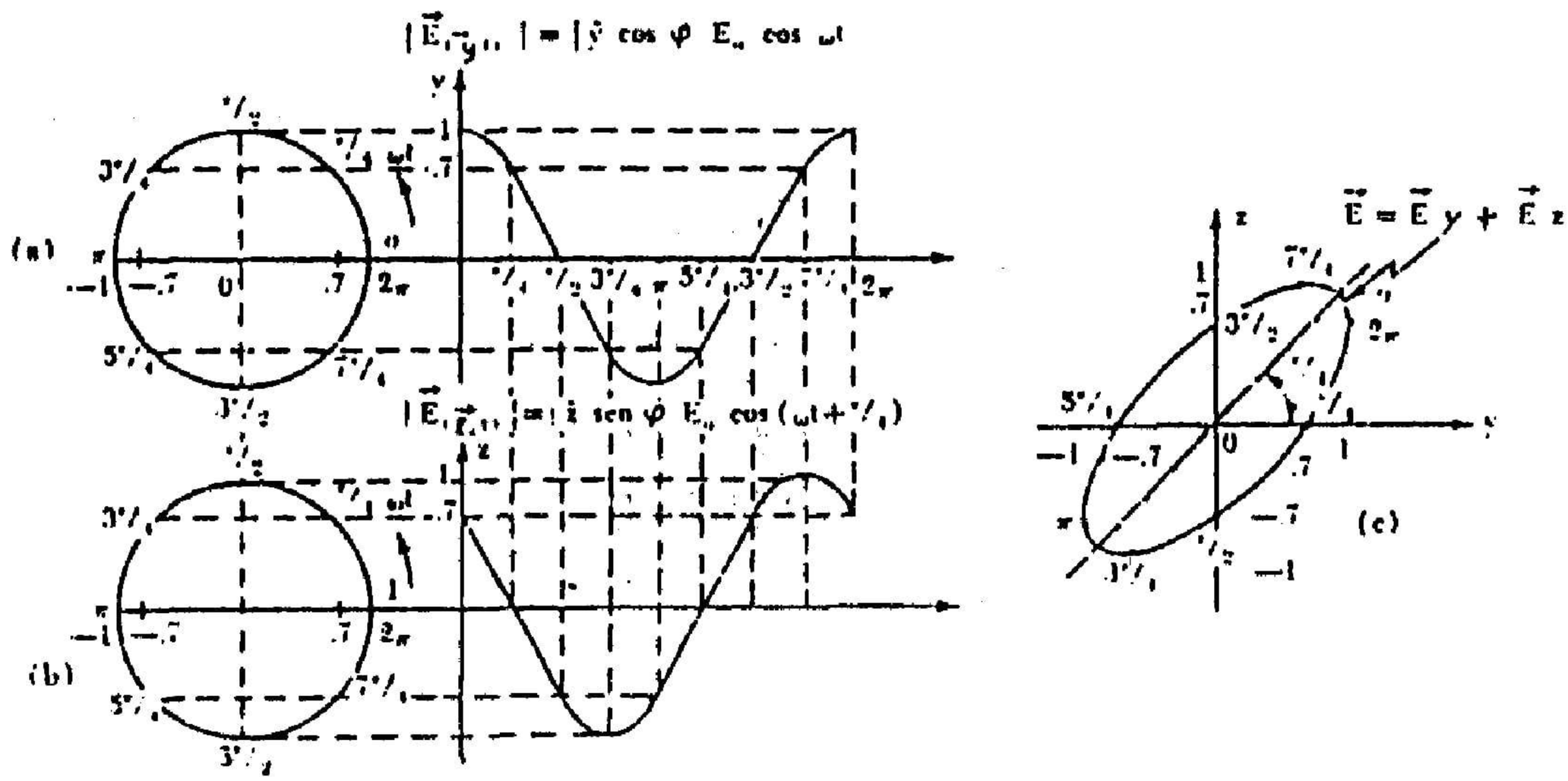


FIGURA 5-4: Polarización elíptica. Suponemos $\beta x = 0$

La parte (b) de la misma figura, tenemos $\vec{E}_z$, con la condición βx = 0 pero desfasado de adelanto π/4.

El resultado final, siendo la suma de $\vec{E}_y + \vec{E}_z$ esta indicado en la parte c).

Analicemos un caso, para comprenderlo. En el caso de ωt = 0, en la parte a) encontramos $\omega t = 1$; en la parte b) $E_z = 0.7$. Estos valores los trasladamos a la parte (c), el primero en el eje de las Y, y el segundo en eje de las Z. Como el $\vec{E}$ total, es la suma vectorial de $\vec{E}_y + \vec{E}_z$; trazamos rectas paralelas al eje de las Y al eje de las Z. En el punto de unión de estas dos rectas, tendremos el primer punto de la figura, marcado como 0 o 2 π.

De manera semejante se hará para ωt = π/4 y para todos los otros ángulos hasta llegar al final que sería ωt = 2π.

Estos puntos se encuentran marcados en la parte c) de la figura próxima anterior. La unión de todos éstos puntos forman una elipse.

El ángulo formado entre el eje mayor y el eje de las Z, es el desfasamiento entre el eje de las Y y el eje de las Z, de los componentes de la $\vec{E}$.

Importante:

Para el caso particular, de que las magnitudes de $E_y = E_z$ y el ángulo ζ = π/2, la elipse se transforma en una circunferencia, y la **polarización recibe el nombre de circular**.

El resumen de lo anterior es lo siguiente:

$\varphi = cte.$	E_y y E_z en fase	Polarización lineal
$\varphi = f(t)$	E_y y E_z defasados	Polarización elíptica
	E_y y E_z defasados $\frac{\pi}{2}$; $\lvert\vec{E}_y\rvert = \lvert\vec{E}_z\rvert$	Polarización circular

5.2. POLARIZACIÓN DE UNA ANTENA

El término *polarización*, aplicado a una antena, se refiere a la *dirección* de los campos magnético y eléctrico de dicha antena. La polarización de una antena está determinada por la dirección del plano de la onda eléctrica. Así, una antena *horizontal* con respecto a la superficie de la tierra produce un plano de onda como el que se muestra en la figura. En dicha figura puede observarse que el campo eléctrico *E* es horizontal, y por tanto se dice que dicha antena está *polarizada horizontalmente*.

Si la antena es *perpendicular* a la superficie de la tierra, producirá el pleno de ondas que se ilustra en la figura, en la que el campo eléctrico *E* es vertical. Se dice entonces que la antena está *polarizada verticalmente.*

En ambas polarizaciones, salvo la inversión de fase de 180º durante el ciclo, la dirección del campo eléctrico no varía, es decir,

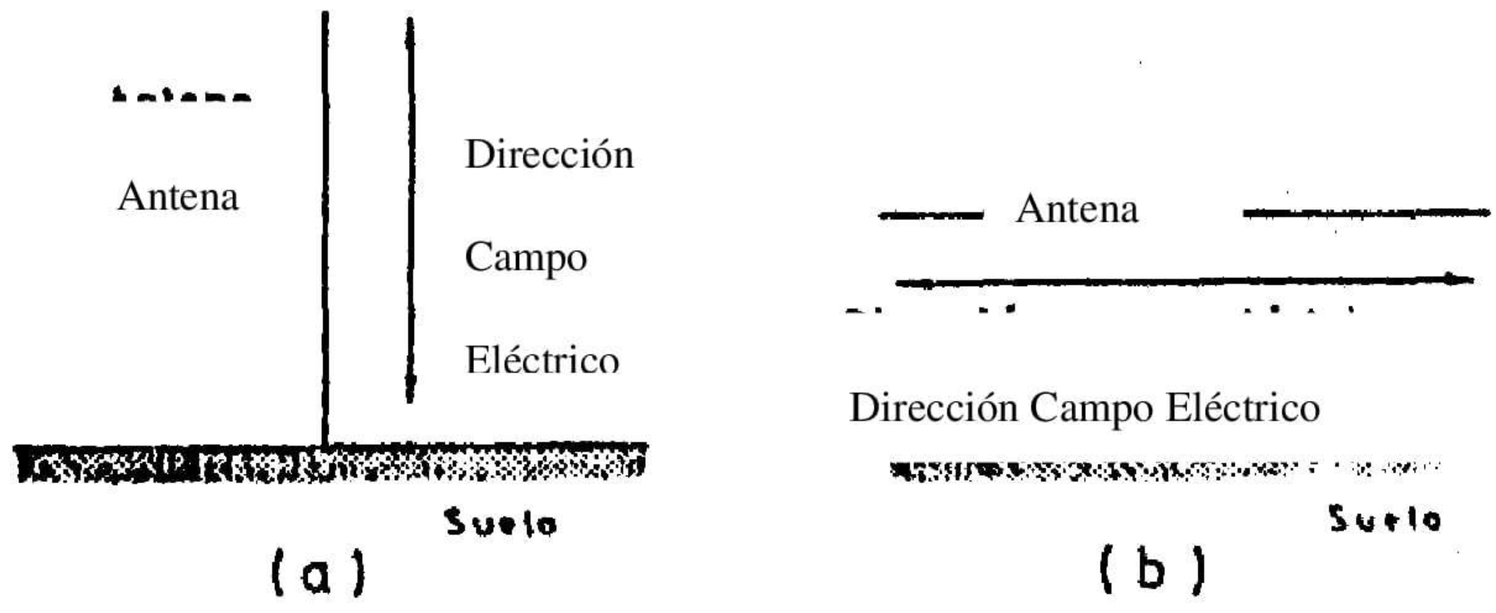


FIGURA 5-5: Diagrama de polarización de una antena a) Posición vertical. b) Posición horizontal

una onda polarizada horizontalmente permanece siempre horizontal y una honda polarizada verticalmente permanece siempre vertical.

La elección de una u otra forma de polarización depende de la frecuencia de emisión y de los efectos resultantes de los modos de propagación terrestre e ionosférica. En el caso, poco frecuente en la práctica, de que la antena esté inclinada, el campo eléctrico tendrá dos componentes: una horizontal y otra vertical, de forma que su resultante será siempre *paralela* a la antena.

Existen antenas que radian con los otros tipos de polarización. Entre las más conocidas se encuentran la *elíptica* y la *circular* que además, pueden ser “a derecha” o “a izquierda”, según el sentido de giro del campo eléctrico.

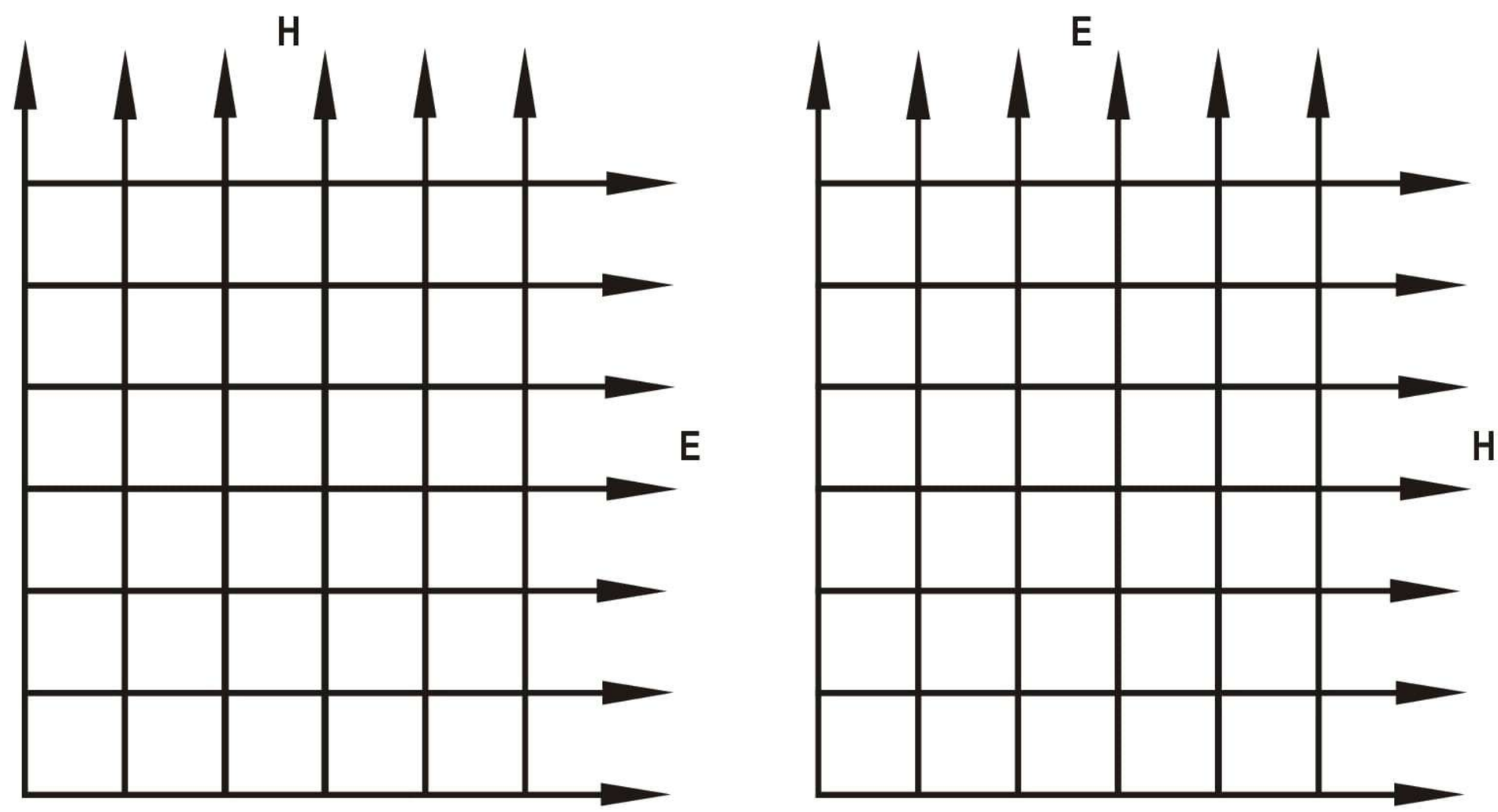


FIGURA 5-6: Campos magnéticos *H* y eléctrico *E* en un frente de onda de polarización (izquierda) y de polarización vertical (derecha)

La intensidad de campo eléctrico tiene la misma dirección que la antena. Si la antena emisora es vertical, las líneas de fuerza eléctrica son también verticales, hablándose en tal caso de *polarización vertical*. Para la recepción de una onda polarizada verticalmente se necesita, pues una antena vertical.

Dado que una antena vertical radia uniformemente en todas las direcciones, resulta la más apropiada para la radio. Sin embargo, para las ondas ultracortas (emisión en FM) se utiliza la *polarización horizontal*. El motivo de esto estriba en el hecho de que la polarización horizontal proporciona menor nivel de ruidos y perturbaciones espúreas y mayor alcance en la transmisión. Por otro lado, las ondas polarizadas verticalmente son fuertemente absorbidas o reflejadas por los obstáculos existentes entre emisor y receptor.

Después de estas afirmaciones el lector seguramente se preguntará cómo entonces es posible captar ondas de radio ultracortas polarizadas horizontalmente con una antena vertical de automóvil. El motivo de ello se encuentra en las reflexiones y refracciones de las ondas de radio, principalmente en los bordes metálicos del automóvil, lo cual lleva consigo un giro de la polarización. Las ondas emitidas por la antena emisora *E*, polarizadas horizontalmente, alcanzan el canto *K* (figura 5-7). Este canto actúa como un radiador secundario, es decir, que radia en distinta dirección una parte de la onda captada, es decir, la onda radiada por él varía su polarización y es captada por la antena A. Debido a que la dirección de la polarización no está definida exactamente, la tensión inducida en la antena es mucho más pequeña que lo que podría ser si la antena receptora fuera horizontal.

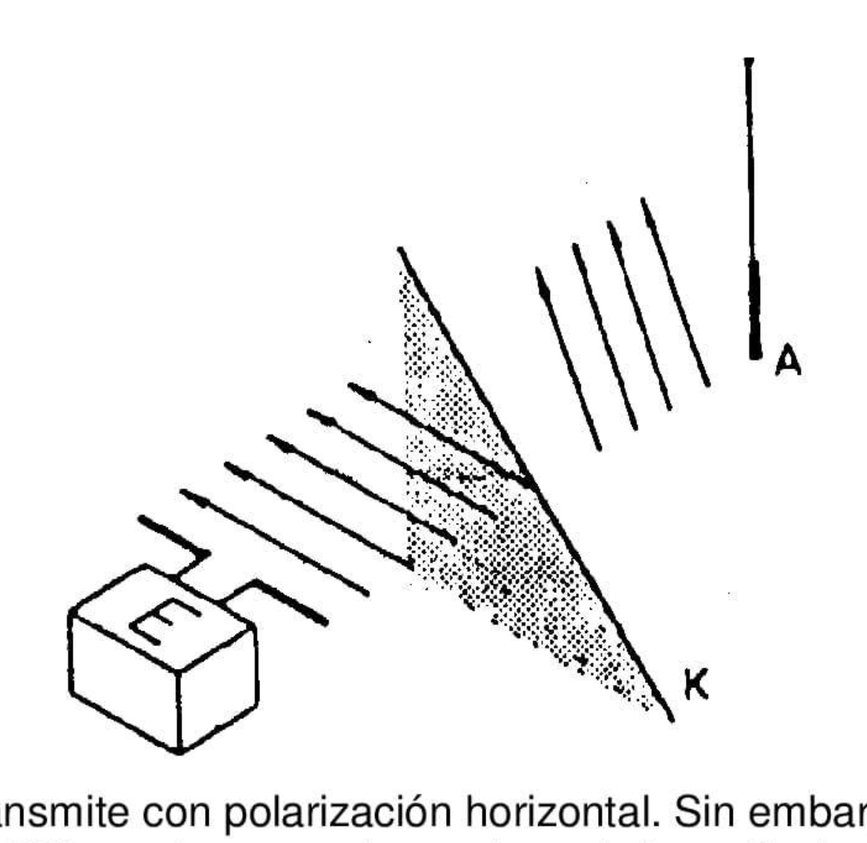


FIGURA 5-7: La emisora *E* transmite con polarización horizontal. Sin embargo, la antena vertical del automóvil la capta gracias al giro de 90° que le proporciona a la onda las reflexiones y refracciones en los bordes en los bordes metálicos del automóvil.

5.2.1. Clasificación de la Polarización Lineal

Dentro de la polarización lineal se pueden destacar dos casos:

1) Polarización perpendicular
2) Polarización paralela

Plano de incidencia

Es aquel que contiene al rayo incidente y a la normal a la superficie de frontera.

Polarización Perpendicular (Horizontal)

Cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia.

Polarización paralela (Vertical)

Cuando el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia.

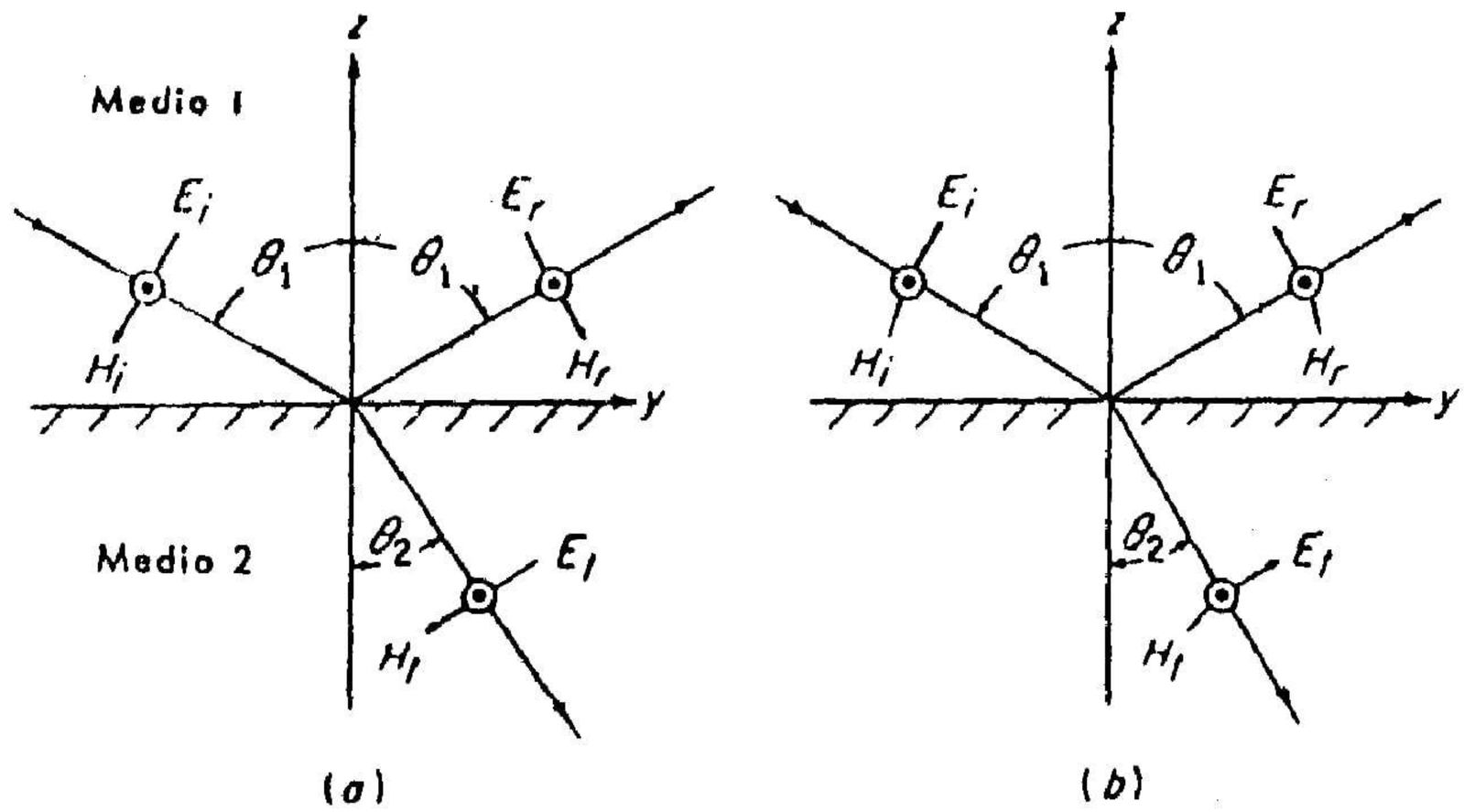


FIGURA 5-8: Reflexión de ondas a) polarización perpendicular (horizontal) y b) polarización paralela (vertical)

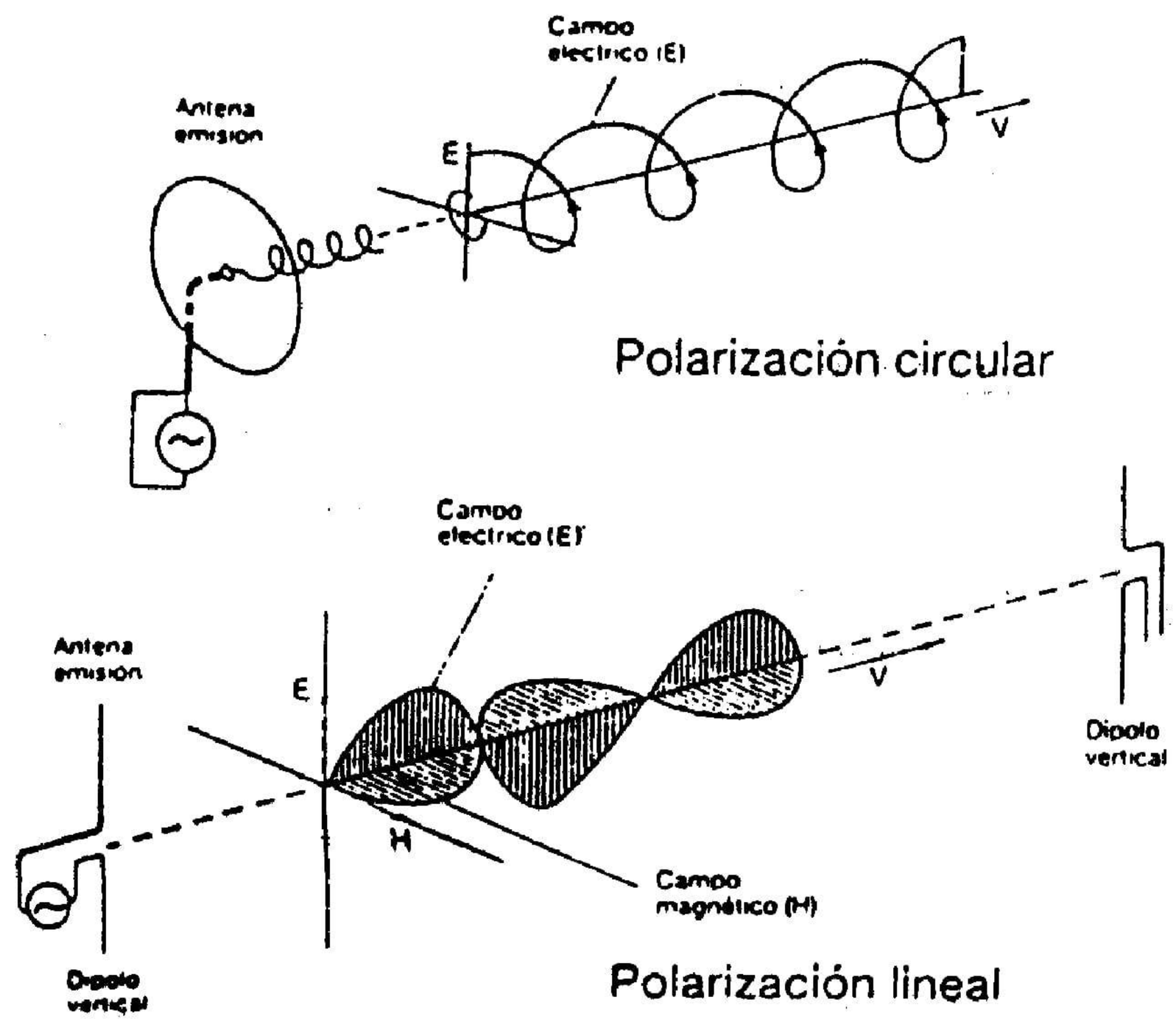


FIGURA 5-9: Para evitar interferencias entre canales próximos, se emplean diferentes tipos de polarización

El concepto de polarización que se acaba de ver se amplía más con la notación fasorial. Puede expresarse el campo eléctrico de una onda plana uniforme que se propaga en dirección z por la forma fasorial

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 \, e^{-j\beta z}$$

y como variable del tiempo

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \mathrm{Re}\left\{ E_0 \, e^{-j\beta z} \, e^{j\omega t} \right\} \qquad [5\text{-}5]$$

Como la onda viaja en dirección z, $\tilde{\mathbf{E}}$ está en el plano x-y. En general $\mathbf{E}_0$ es un vector cuyas componentes son números complejos, o en otras palabras, $\mathbf{E}_0$ *es un vector complejo*. Así, puede escribirse de la forma

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i \qquad [5\text{-}6]$$

en donde $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_i$ son vectores reales que tienen, en general, direcciones diferentes. En algún punto del espacio (por ejemplo, $z = 0$) el campo resultante variable en el tiempo será

$$\tilde{\mathbf{E}}(0, t) = \mathrm{Re}\left\{ \left(\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i \right) e^{j\omega t} \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(0, t) = \mathbf{E}_r \cos \omega t - \mathbf{E}_i \operatorname{sen} \omega t \qquad [5\text{-}7]$$

Se ve claramente que $\tilde{\mathbf{E}}$ no sólo varía su magnitud, sino de dirección en el transcurso del tiempo.

Polarización circular

Considérese, por ejemplo, el caso en que las componentes x e y del campo eléctrico son iguales en magnitud. Si la componente en y va con 90 grados de adelanto respecto de la componente en x y si ambas tienen la amplitud * entonces el campo eléctrico en $z = 0$ está dado por el vector complejo.

$$\mathbf{E}_0 = \left(\hat{\mathbf{x}} + j\hat{\mathbf{y}} \right) E_a$$

y su variación en el tiempo dada por

$$\tilde{\mathbf{E}}(0, t) = \left(\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t - \hat{\mathbf{y}} \operatorname{sen} \omega t \right) E_a$$

de la que puede verse que sus componentes serán

$$\tilde{E}_x = E_a \cos \omega t$$

$$\tilde{E}_y = -E_a \operatorname{sen} \omega t$$

Estas componentes satisfacen la relación

$$\tilde{E}_x^2 + \tilde{E}_y^2 = E_a^2$$

que indica que el extremo de $\tilde{E}(0, t)$ traza una circunferencia de radio E_a con el tiempo. Es más, puede verse que el *sentido* de la rotación es el de un tornillo a izquierdas avanzando en la dirección z de propagación. Así se dice que, esta onda está *polarizada circularmente a izquierdas*. Observa-

ciones similares valen para ondas polarizadas circularmente a derechas representadas por un vector complejo.

$$\mathbf{E}_0 = \left(\hat{\mathbf{x}} - j\,\hat{\mathbf{y}}\right) E_a$$

Es evidente que la inversión del sentido de rotación puede lograrse aplicando un defasaje de 180 grados a una cualquiera de ambas componentes *x* o *y* del campo.

Problema Propuesto

Dos antenas dipolo idénticas están en el plano *x-y*, la antena (1) paralela al eje *x* y la (2) según la línea $\phi = \phi_0$. Se conecta una línea de transmisión desde un transmisor, directamente a la antena (1) y un atenuador cambiador de fase con el factor $A e^{j\theta}$ se conecta entre las dos antenas. Encontramos los valores de A y θ necesarios para la transmisión de una polarización circular a derechas y a izquierdas en la dirección *z*, suponiendo que cada antena radia una polarización lineal orientada según su propio conductor. (Déjese de tener en cuenta cualquier efecto de impedancia mutua) Hállense valores numéricos para $\phi_0 = 30°$.

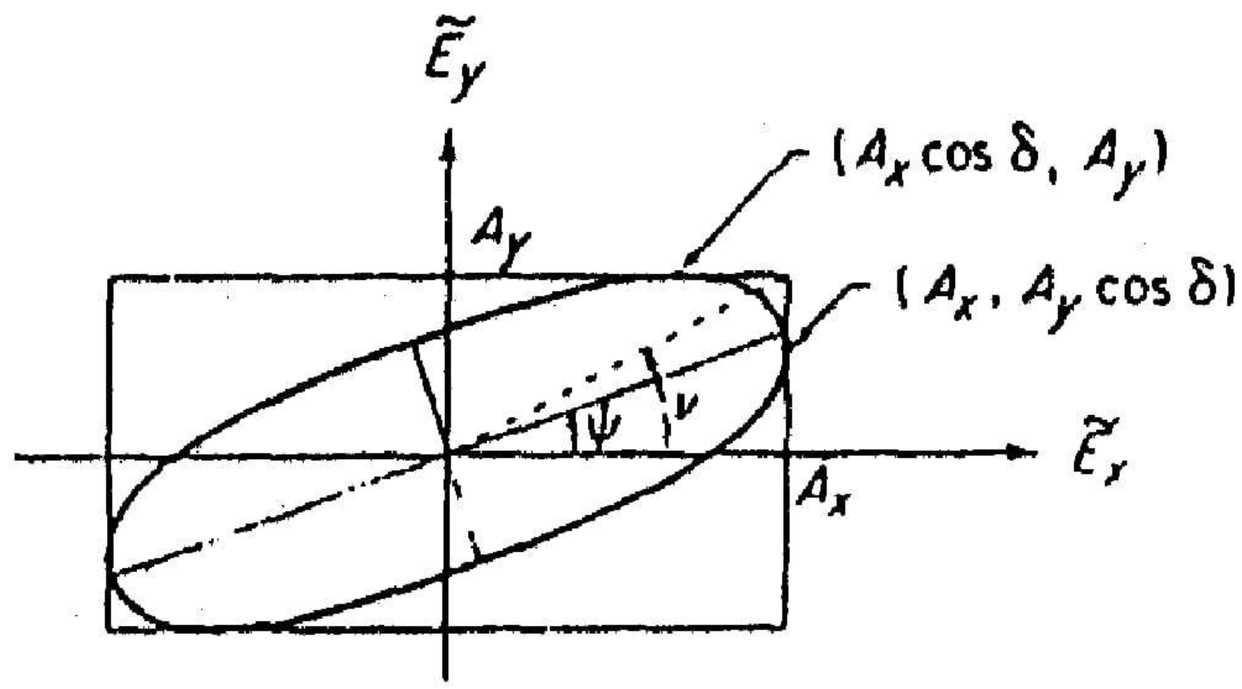


FIGURA 5-10: Elipse de polarización y su rectángulo circunscripto

Los puntos de contacto con el rectángulo, tal como indica la figura 5-10, y el sentido de rotación pueden determinarse visualizando las variaciones temporales de los vectores en algún punto conveniente, como, por ejemplo el de contacto.

Dando la amplitud y fase de los componentes del campo rectangular, la discusión del párrafo que sigue muestra cómo construir la elipse de polarización. La construcción de la elipse puede simplificarse aún más empleando la técnica gráfica mostrada en la figura 5-11. Cada componente (*x* o *y*) del vector

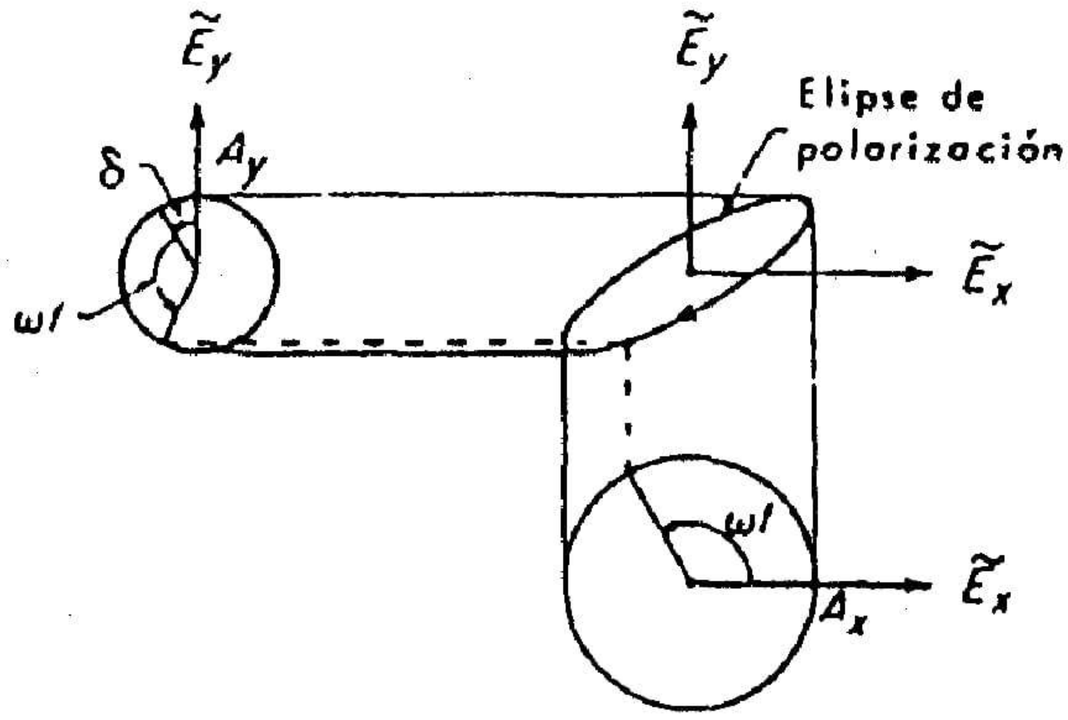


FIGURA 5-11: Formación de la elipse de polarización con las amplitudes y fases de las componentes rectangulares del campo (para el caso $\delta = 0, \quad \delta_y = \delta$)

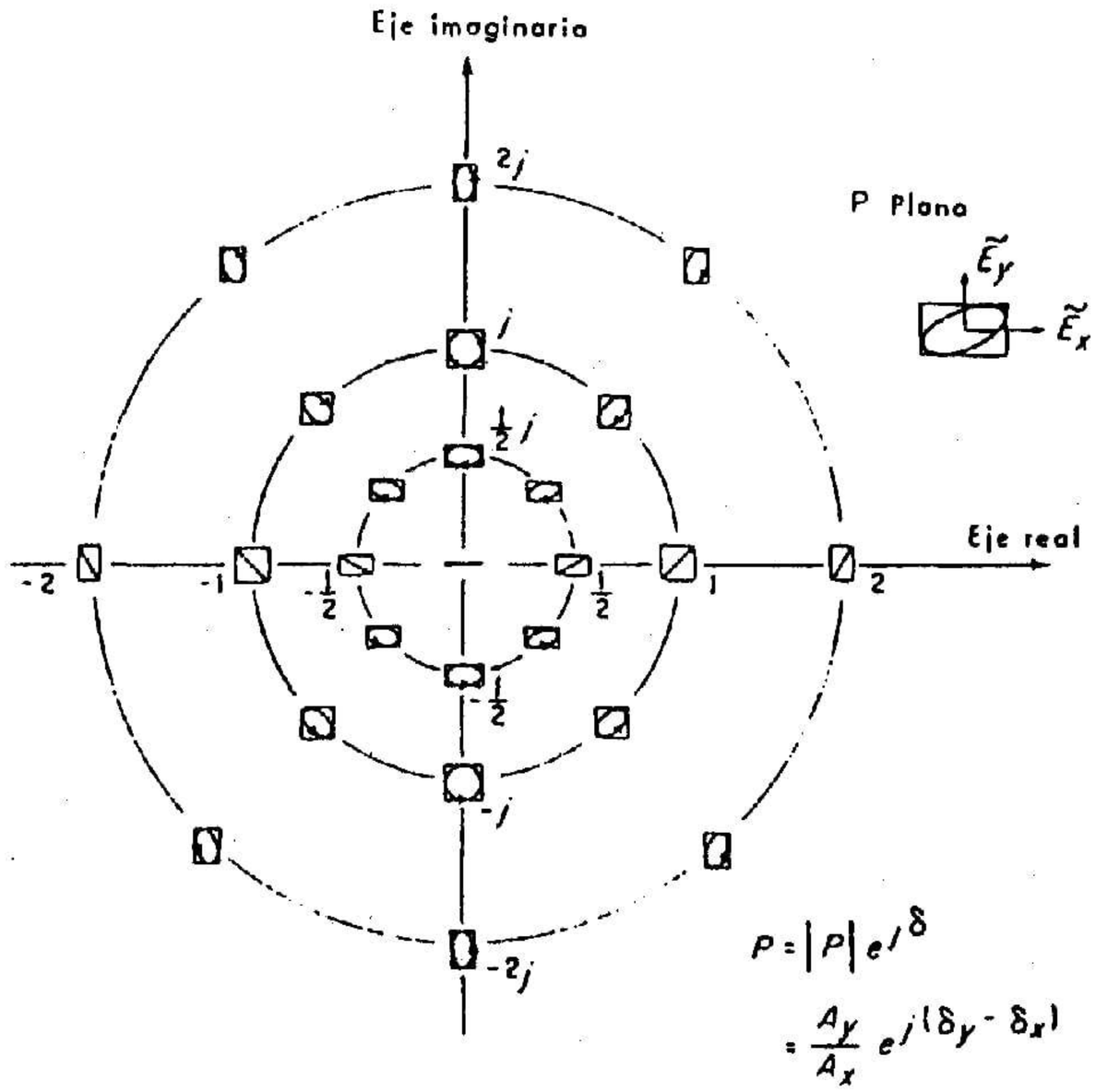
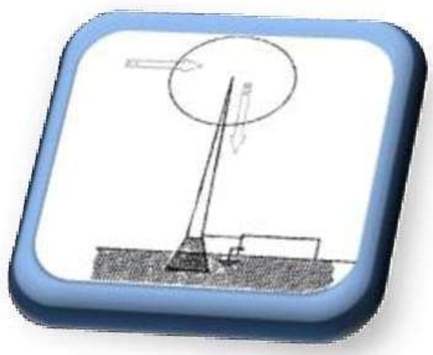


FIGURA 5-12: Plano complejo con elipses de polarización.

campo es una cantidad oscilando sinusoidalmente, y así puede representarse como la proyección de una línea de longitud fija girando uniformemente a la frecuencia angular ω. Al variar el tiempo, el extremo del vector resultante traza la elipse de polarización. Puede así dibujarse fácilmente la elipse de polarización en cualquier punto del plano complejo P, como indica la figura 5-12 el semiplano superior representa un sentido de giro a izquierdas de la polarización y el semiplano inferior el opuesto, sea el sentido de giro "a derechas" de un destornillador avanzando en el sentido de la propagación (suponiéndola en la dirección positiva de *z*). Debe hacerse notar que el eje real representa una polarización lineal y los puntos $+j$ y $-j$ las polarizaciones circulares "a izquierda" y "a derechas", respectivamente. La polarización lineal en la dirección *y* se representa por un punto en el infinito, dificultad que conduce al uso frecuente del *recíproco* de la razón de polarización.



CAPÍTULO 6

VECTOR DE POYNTING

Objetivo:

- ☞ Comprender y demostrar la velocidad de flujo de energía o flujo de potencia transportado por una onda electromagnética-

Introducción

Las ondas electromagnéticas tienen dos propiedades muy importantes: Enviar información y transmitir energía.

a) La información puede ser vista (radar, televisión), oída (radios receptores de A.M. o de F.M.), o sentida por la acción sobre mecanismos (controles remotos, teletipos).

Es enviada a través del proceso llamado Modulación. La modulación es la deformación de la onda electromagnética en cualquiera de sus propiedades (amplitud, frecuencia, fase) o recortándola para formar pulsos.

Su representación aproximada es en la figura 6.1.

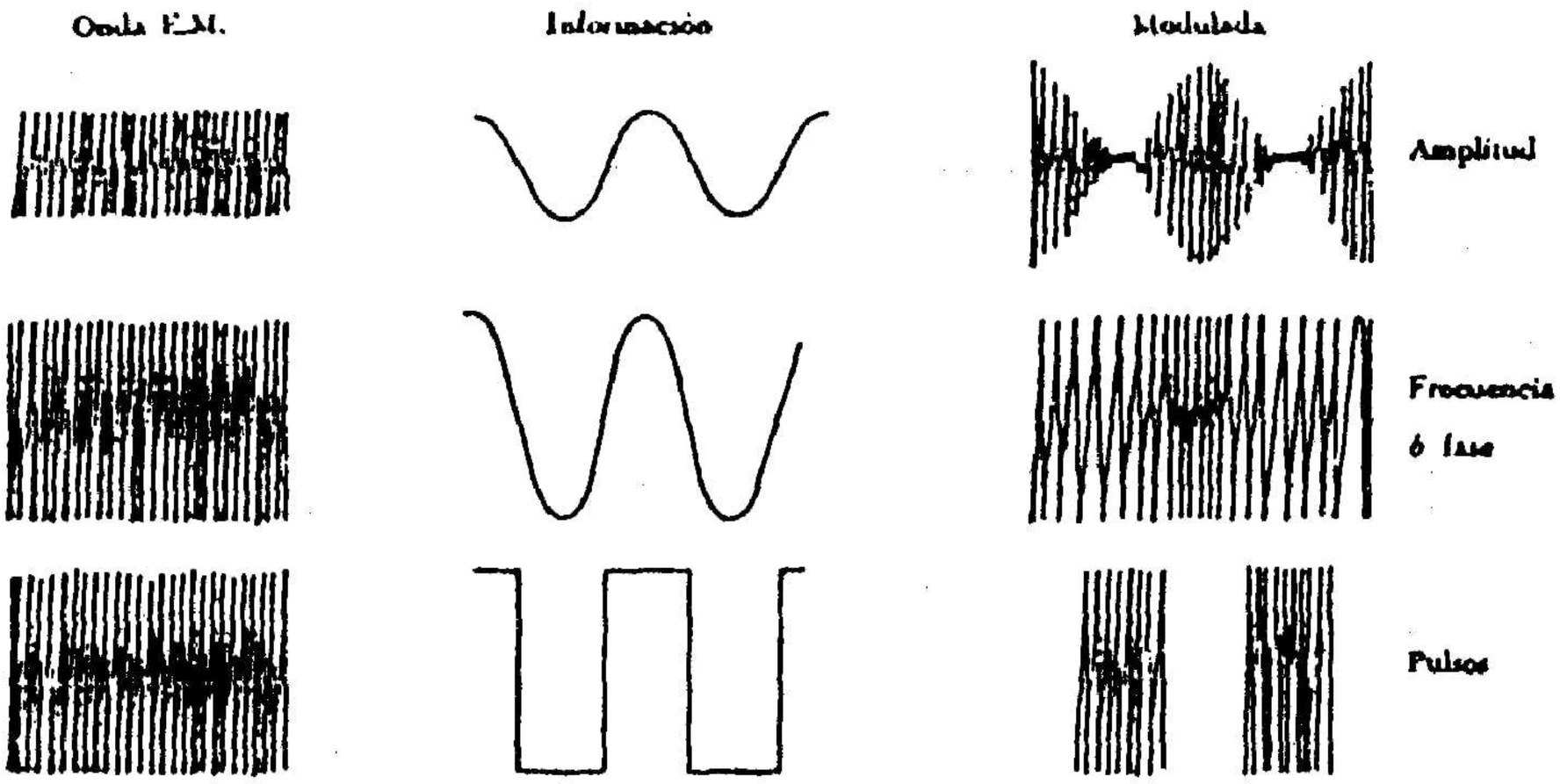


FIGURA 6-1: Representación de la modulación

b) La energía la envía por medio del producto vectorial de las intensidades de campo (eléctrico y magnético), llamada vector de Poynting o también densidad de potencia pues su unidad es de Watts/m².

La información y la densidad de la energía se puede transportar a gran distancia a través de medios dieléctricos, y aprovechándose en los medios conductores. Los medios conductores son llamados antenas.

La parte de información se estudiará en Comunicaciones, y la parte de densidad de energía, la estudiaremos en este capítulo.

6.1. TEOREMA DE POYNTING

Como todo lo efectuado hasta ahora, trabajaremos con las ecuaciones de Maxwell, representadas en su forma diferencial vectorial, puesto que estamos trabajando en un medio continuo, en forma generalizada, es decir el medio que tiene parte conductora.

La primera ecuación de Maxwell recordamos es la siguiente:

$$\nabla x H = J_C + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad [6\text{-}1]$$

y la segunda ecuación de Maxwell es:

$$\nabla x E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad [6\text{-}2]$$

La primera ecuación de Maxwell, podemos ponerla despejando a la densidad de la corriente de conducción en la forma siguiente:

$$J_C = \nabla x H - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \left[A / m^2\right] \qquad [6\text{-}3]$$

la cual nos indica el primer miembro densidad de corriente de conducción medido en el sistema M.K.S.C., racionalizado en amperes sobre metro cuadrado y como consecuencia, el segundo miembro también lo será. Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior, por la intensidad de campo eléctrico E, en forma escalar llegaremos a:

$$E.J_C = E.\nabla x H - \varepsilon.E \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \left[\frac{W}{m^3}\right] \qquad [6\text{-}4]$$

En el primer miembro, la expresión

$$E.J_C = \left[V / m\right].\left[A / m^2\right] = \left[\frac{W}{m^3}\right] \qquad [6\text{-}5]$$

lo cual nos estará indicando que si el primer miembro es densidad de potencia volumétrica, el segundo miembro también serán watts/metro cúbico. Con objeto de poder seguir trabajando esta ecuación, emplearemos la siguiente igualdad de cálculo vectorial.

$$\nabla.(ExH) = H.\nabla x E - E.\nabla x H \qquad \left[W / m^3\right] \qquad [6\text{-}6]$$

Despejamos como primer miembro de la expresión siguiente, el segundo término del segundo miembro de la ecuación próxima anterior.

$$E.\nabla xH = H.\nabla xE - \nabla.(ExH) \qquad \left[W/m^3\right] \qquad [6\text{-}7]$$

substituyendo la ecuación 7., en 4., obtendremos:

$$E.J_c = H.\nabla xE - \nabla.(ExH) - \varepsilon.E\frac{\partial E}{\partial t} \qquad \left[W/m^3\right] \qquad [6\text{-}8]$$

la que puede ser expresada en la forma siguiente:

Substituiremos la segunda ecuación de Maxwell en la ecuación 8.,

$$E.J_c = -\mu.H\frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon.E\frac{\partial E}{\partial t} - \nabla.(ExH) \qquad \left[W/m^3\right] \qquad [6\text{-}9]$$

A fin de hacer más comprensible la expresión próxima anterior, podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{2H\ dH}{\partial t} \qquad \therefore \qquad H\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} \qquad [6\text{-}10a]$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{2E\,\partial E}{\partial t} \qquad \therefore \qquad E\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \qquad [6\text{-}10b]$$

lo cual al ser substituido en la ecuación 9., tendremos:

$$E.J_c = -\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} - \nabla.(ExH) \qquad \left[W/m^3\right] \qquad [6\text{-}11]$$

la que podemos poner en la forma siguiente al sacar como factor común a la variación con respecto al tiempo

$$E.J_c = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu.H^2 + \frac{1}{2}\varepsilon.E^2\right) - \nabla.(ExH) \qquad \left[W/m^3\right] \qquad [6\text{-}12]$$

debemos de recordar la densidad de energía magnética y la densidad de energía eléctrica, son respectivamente

$$\omega_H = \frac{1}{2}\mu.H^2 \qquad \left[J/m^3\right] \qquad [6\text{-}13]$$

$$\omega_E = \frac{1}{2}\varepsilon.E^2 \qquad \left[J/m^3\right]$$

con el objeto de tener potencia, integraremos en un volumen los dos miembros de la ecuación 12., quedándonos:

$$\int(E.J_c).dv = -\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\mu.H^2 + \frac{1}{2}\varepsilon.E^2\right).dv - \int\nabla.(ExH).dv \qquad [W] \qquad [6\text{-}14]$$

la cual debe de ser bien comprendida.

☞ **Comenzaremos analizando el primer miembro.**

$$\int (E.J_c).dv \qquad [W] \qquad [6\text{-}15]$$

La que tiene signo positivo, indicándonos es **potencia consumida** en el volumen considerado. Para entenderlo mejor, lo trataremos de aplicar a un sistema de arranque y energía eléctrica de un vehículo a propulsión de motor de combustión interna. Ver figura 6-1.

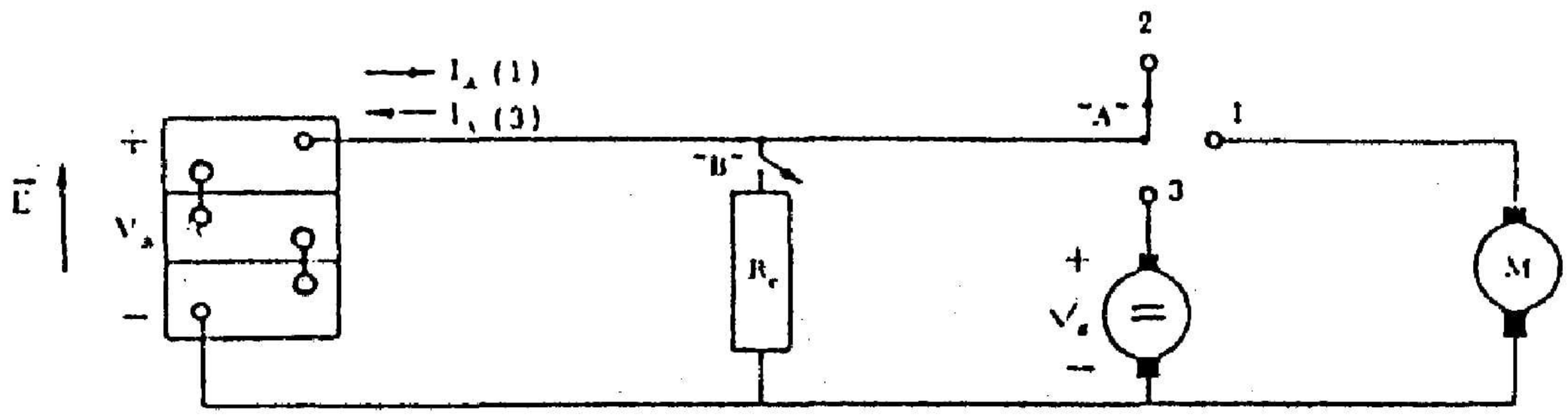


FIGURA 6-2 Sistema eléctrico de un vehículo de motor de combustión interna.

Interruptor "A":1) Marcha del vehículo. 2) Neutro. 3) Carga del acumulador

Interruptor "B": Encendido de los dispositivos eléctricos del vehículo

El acumulador es el que entrega la energía eléctrica, haciéndonos funcionar la marcha del vehículo. Se pone en funcionamiento al colocar el interruptor "A" en la posición uno. En esta posición, la corriente de conducción proporcionada por el acumulador tiene la misma dirección de su potencial y por lo tanto estará proporcionando energía, esto es, la marcha le estará quitando energía a fin de poder moverse.

Al funcionar el motor del vehículo, el interruptor "A" se pasa a la posición tres, y ahí estaremos recibiendo energía del generador, puesto que éste recibe energía mecánica del motor, funcionando el vehículo.

Ahora el acumulador recibe la energía, pues se la encuentra proporcionando el generador. La corriente que llega al acumulador tiene signo contrario al potencial del acumulador (considerando la dirección del potencial en el interior del acumulador de – a +), por lo tanto su signo será negativo en el producto (– V I). Realmente lo que se está efectuando, es cargar el acumulador, de la energía eléctrica obtenida del generador.

Con el generador funcionando y el interruptor "B", se tendrá energía eléctrica en las borneras, el receptor de radio, las luces y todos los aditamentos eléctricos que tenga el vehículo.

En conclusión hemos encontrado, el primer miembro nos indica potencia que se encuentra consumiendo el volumen especificado.

☞ **El segundo miembro, primer término**

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\,\mu\cdot H^2+\frac{1}{2}\,\varepsilon\cdot E^2\right)dv \quad [W] \qquad [6\text{-}16]$$

expresa una energía eléctrica y magnética dentro del volumen, variando con respecto al tiempo, pero en sentido negativo, lo cual nos indica llegará hasta cero; por lo tanto es energía electromagnética que se pierde conforme el tiempo transcurre. La denominamos **potencia entretenida** en el volumen.

☞ **El segundo miembro, segundo término**

$$-\int \nabla \left(E \times H \right) dv \qquad [W] \qquad [6\text{-}17]$$

de acuerdo a la ley de la conservación de energía, debe de ser la potencia proporcionada al volumen, y que al tener signo negativo la divergencia nos indica es entrante al volumen que encierra la integral cerrada de superficie. Por lo tanto, la potencia consumida en el volumen y energía perdida en función del tiempo en el mismo volumen, será, proporcionada por el último término explicado, la ecuación 18.

Esta expresión, usando el teorema de la divergencia, podremos pasar de una integral de volumen a una integral de superficie cerrada, la cual encierra al volumen; esto es:

$$\int \nabla \left(E \, x \, H \right) dv = \oint \left(E \, x \, H \right) ds \quad [W] \qquad [6\text{-}18]$$

La ecuación final del teorema de Poynting podemos expresarla

$$\int \left(E \cdot J_C \right) dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right) dv - \oint \left(E \times H \right) ds \qquad [6\text{-}19]$$

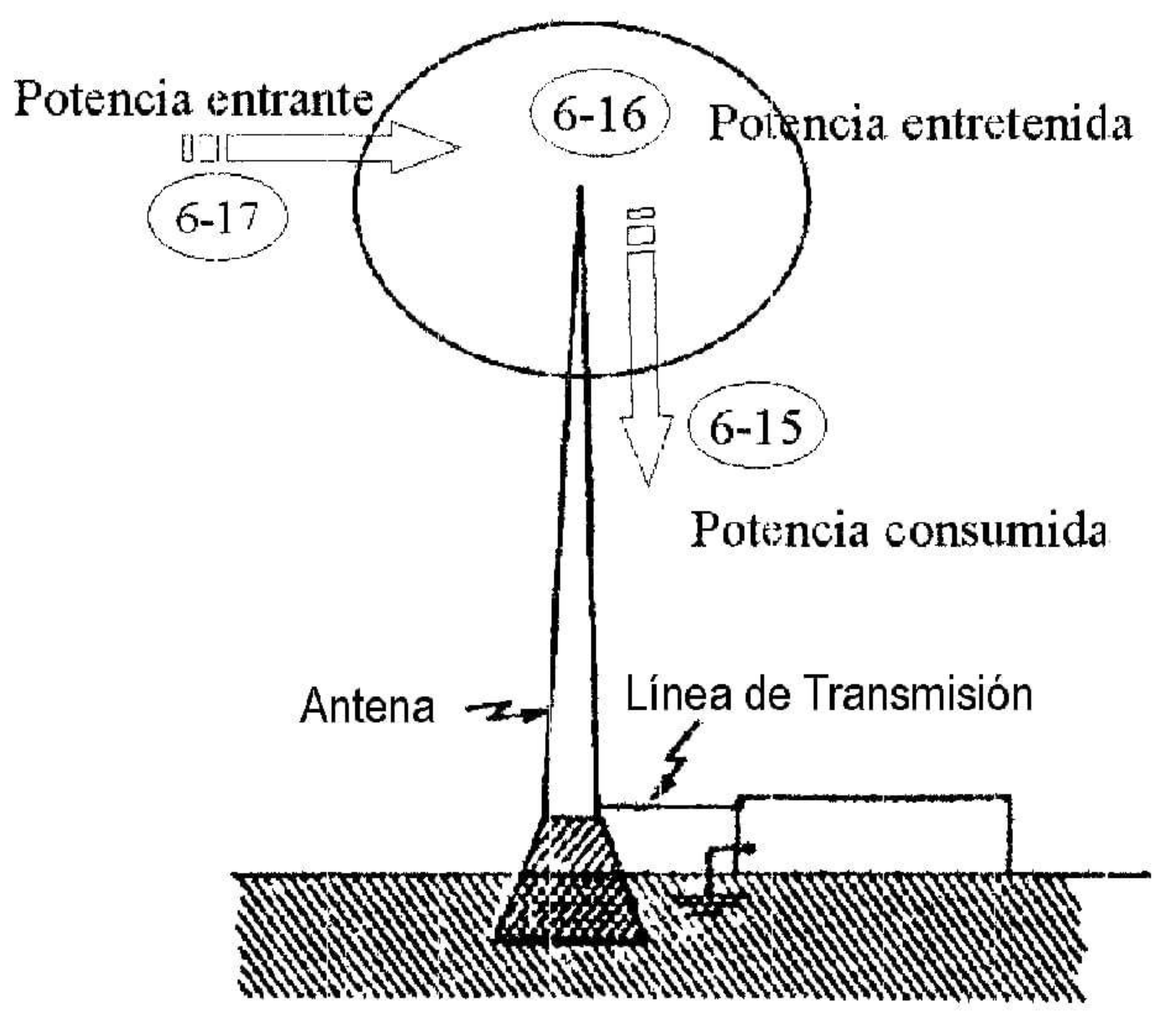


FIGURA 6-3

6.1.1. Función del tiempo y del espacio

Las intensidades del campo eléctrico y magnético representadas en la forma fasorial son:

$$E_{(r,t)} = \hat{n}.E_0.e^{j(\omega.t - \beta.r)} \qquad V/m \qquad [6\text{-}20]$$

$$H_{(r,t)} = \hat{n}.H_0.e^{j(\omega.t-\beta.r)}\, a_y \quad A/m \qquad [6\text{-}21]$$

Siendo el vector de Poynting,

$$Py_{(r,t)} = E_{(r,t)}\, x \quad H_{(r,t)} \qquad W/m^2 \qquad [6\text{-}22]$$

que también puede ser representado como:

$$\vec{P}y_{(r,t)} = \hat{n}\left|E_{(r,t)}\right|.\left|H_{(r,t)}\right|.sen\theta \qquad W/m^2 \qquad [6\text{-}23]$$

siendo **n** normal a la **E** y a la **H**, esto es indicando el sentido de avance de la onda. El ángulo θ es el formado entre la **E** y la **H**.

Por ser la **E** y la **H** perpendiculares entre sí, $\theta = 90$ grados y el sen 90º = 1

De acuerdo a esto, tendremos:

$$\left|\vec{P}y_{(r,t)}\right| = \left|\vec{E}_{(r,t)}\right|.\left|\vec{H}_{(r,t)}\right| \qquad W/m^2 \qquad [6\text{-}24]$$

El vector de Poynting, es función del espacio y del tiempo.

Lo analizaremos primero con respecto al tiempo. Debido a que el tiempo siempre existe, lo obtenido respecto a él siempre existirá.

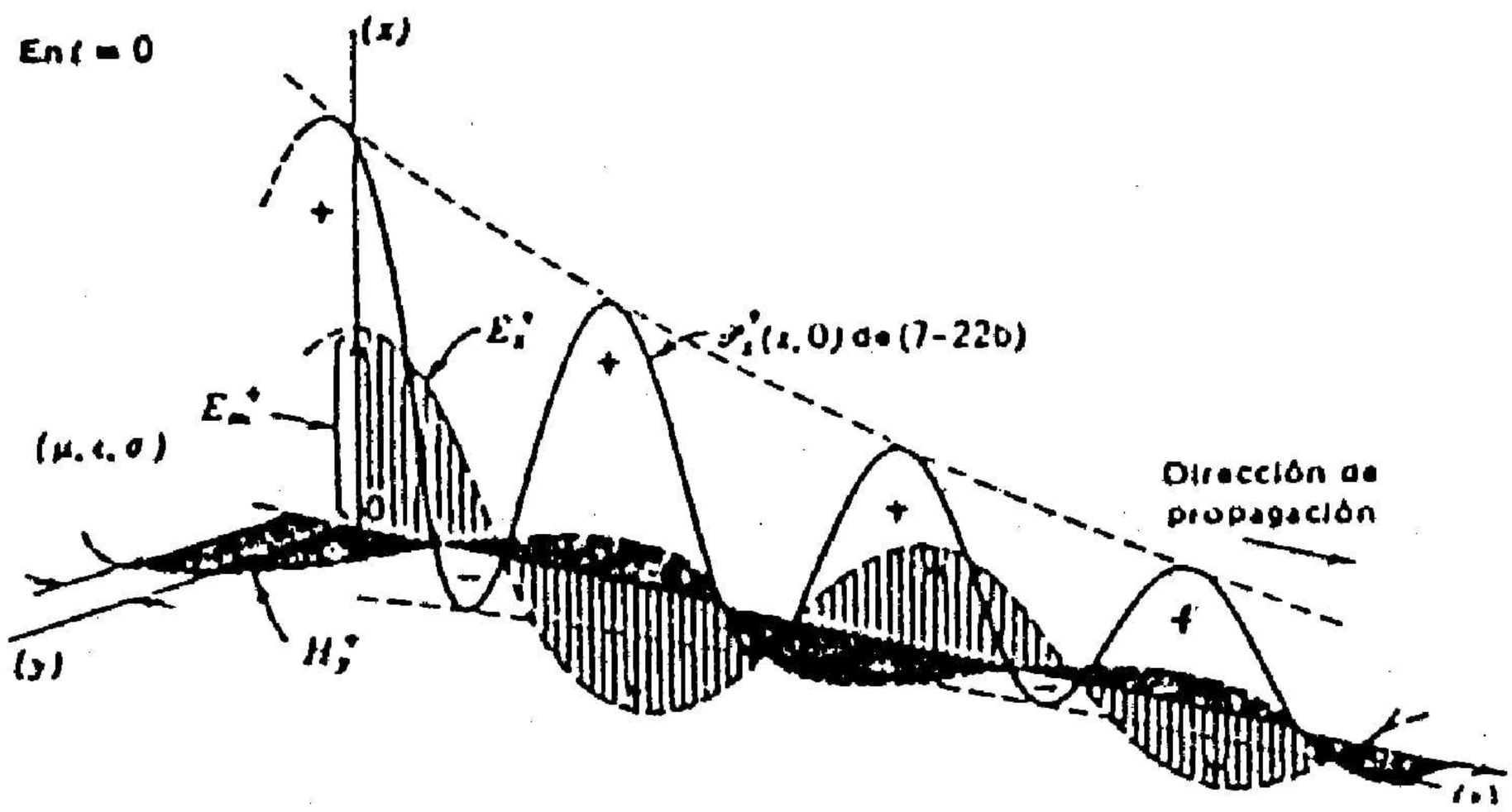


FIGURA 6-3

Vector de Poynting analizado con respecto al tiempo

Substituyendo las expresiones 6-20 y 6-21 en 6-24

$$\left|\vec{P}_{(r,t)}\right| = \left|E_0\, e^{j(\omega t-\beta r)}\right| \left|H_0\, e^{j(\omega t-\beta r)}\right| \qquad [6\text{-}25]$$

Debido a que la potencia sólo corresponde a la parte real, tomaremos sólo las partes reales.

$$\mathrm{Re}\left|\vec{P}_{(\vec{r},t)}\right| = \left|E_m \cos\left(\omega t - \beta r\right)\right| \left|H_m \cos\left(\omega t - \beta r\right)\right| \qquad [6\text{-}26]$$

$$\mathrm{Re}\left|\vec{P}_{(\vec{r},t)}\right| = E_m H_m \cos^2\left(\omega t - \beta r\right) \qquad [6\text{-}27]$$

recordando que sólo el tiempo es variable, tomando el valor medio tendremos para 0 <t<T; siendo T = período

$$\mathrm{Re}\left|\vec{P}_{(t)}\right| = E_m H_m \frac{1}{T} \cos^2\left(\omega t - \beta r\right) \qquad [6\text{-}28]$$

recordamos cos² a = ½ (1 + cos 2a) y en consecuencia

$$\mathrm{Re}\left|\vec{P}_{(t)}\right| = \frac{E_m H_m}{2T}\left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos 2\left(\omega t - \beta r\right) dr\right]$$

$$\mathrm{Re}\left|\vec{P}_{(t)}\right| = \frac{E_m H_m}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\,\mathrm{sen}\ 2\left(\omega t - \beta r\right)\right]_0^T$$

$$\mathrm{Re}\left|\vec{P}_{(t)}\right| = \frac{E_m H_m}{2T}\ T \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\mathrm{Re}\left|\vec{P}_{(t)}\right| = \frac{E_m H_m}{2} \qquad [6\text{-}29]$$

Encontramos que el valor medio no depende de la frecuencia. Su valor es siempre la mitad del producto de los valores máximos de las intensidades del campo.

Con objeto de representarlo en forma más sencilla, lo podemos poner.

$$P_{(t)} = \frac{E_m H_m}{2} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}30]$$

Vector de Poynting analizando con respecto al espacio.

Ya habiendo sido analizado con respecto al tiempo, cuyo valor medio siempre permanecerá; ahora con respecto al espacio, lo usaremos sólo en la parte que se propaga o se consume, siendo la parte real.

$$\left|\vec{E}_{(v,t)}\right| = E_0\, e^{\,j(\omega t - \beta r)} \quad \left[\frac{V}{m}\right] \qquad [6\text{-}31]$$

$$\left|\vec{H}_{(v,t)}\right| = H_0\, e^{\,j(\omega t - \beta r)} \quad \left[\frac{A}{m}\right] \qquad [6\text{-}32]$$

y por lo tanto, solo para el espacio

$$\mathrm{Re}\left|\vec{P}_{(r)}\right| = E_0 H_0\, e^{-2jBr} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}33]$$

que es más conveniente analizarla a partir de su forma compleja indicándonos

$$\vec{E} \times \vec{H} = \vec{P} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

una densidad de potencia superficial, watts/metros cuadrado, siendo un vector, llamado vector de Poynting y representado por la letra $\vec{P}$, el cual al ser multiplicado escalarmente por la superficie cerrada, nos dará la potencia entregada al volumen encerrado por esa superficie cerrada y que será consumida en el volumen, donde hay una $\vec{J}_C$ y energía perdida en función del tiempo negativo.

Podemos notar el vector de Poynting, por ser el producto vectorial de la $\vec{E} \times \vec{H}$, el vector es perpendicular a estas dos intensidades de campo y se encuentra en la dirección de avance de la onda electromagnética.

Finalmente podemos decir, la onda electromagnética transporta energía en su sentido de avance, indicada por el medio de la expresión del vector de Poynting;

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Que es normal a los dos frentes de onda.

Como siempre la intensidad del campo eléctrico "E" es normal al campo magnético H podemos poner la magnitud del vector de Poynting como:

$$\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{E}\right| \times \left|\vec{H}\right| \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

éste también es conocido como densidad de potencia

6.2. Valores complejo, real e imaginario del vector de Poynting

Sabemos, de acuerdo a que la intensidad de campo eléctrico y la intensidad de campo magnético son funciones exponenciales con respecto al tiempo y el espacio, serán números complejos con parte real e imaginaria, esto es, de acuerdo a la figura siguiente.

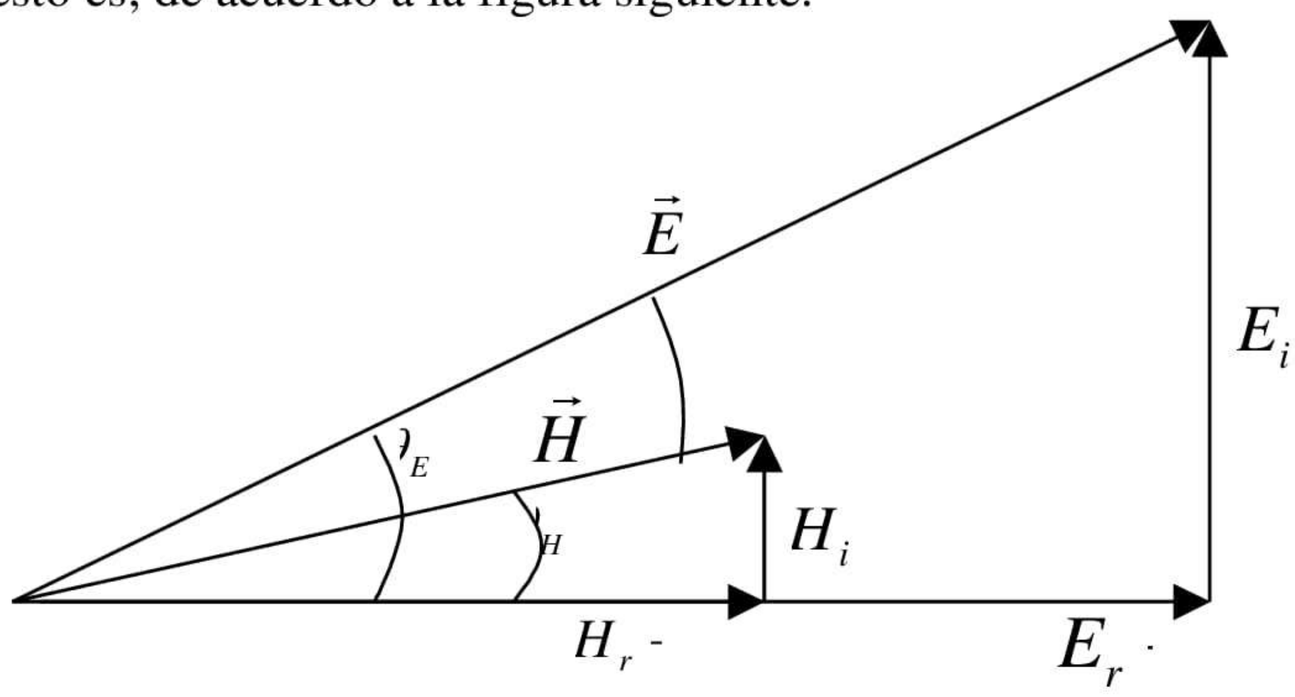


FIGURA 6-4: Representación de la parte real e imaginaria de la $\vec{E}$ y la $\vec{H}$

Representación de la parte real e imaginaria de y

$$\vec{E} = E_r + jE_i \qquad [6\text{-}34]$$

$$\vec{H} = H_r + jH_i \qquad [6\text{-}35]$$

Si multiplicamos la $\vec{E}$ por la conjugada de la $\vec{H}$ tendremos:

$$\vec{E}.\vec{H}^* = \left(E_r + jE_i\right)\left(H_r - jH_i\right) \qquad [6\text{-}36]$$

$\vec{E} \quad y \quad \vec{H}^*$ valores eficaces

$$\vec{E}.\vec{H}^* = E_r.H_r - jE_r.H_i + jE_i.H_r + E_i.H_i \qquad [6\text{-}36]$$

re arreglándolos tendremos la parte compleja del vector de Poynting

$$P_c = \vec{E}.\vec{H}^* = \left(E_r.H_r + E_i.H_i\right) - j\left(E_r.H_i - E_i.H_r\right) \qquad [6\text{-}37]$$

en la cual tendremos la parte real

$$P_r = R_e\vec{E}.\vec{H}^* = \left(E_r.H_r + E_i.H_i\right) \quad W/m^2 \qquad [6\text{-}38]$$

y la parte imaginaria

$$P_i = I_m\vec{E}.\vec{H}^* = -j\left(E_r.H_i - E_i.H_r\right) \quad W/m^2 \qquad [6\text{-}39]$$

Si los valores de la $\vec{E}$ y la $\vec{H}$ son eficaces, el vector de Poynting, siempre representado en su forma eficaz estará correcto; si los valores de la $\vec{E}$ y la $\vec{H}$ son amplitudes, el valor del vector de Poynting eficaz será

$$P_c = \frac{\vec{E}_m.\vec{H}_m^*}{2} \quad W/m^2 \qquad [6\text{-}40]$$

$$P_r = R_e\frac{\vec{E}_m.\vec{H}_m^*}{2} \quad W/m^2 \qquad [6\text{-}41]$$

$$P_i = I_m\frac{\vec{E}_m.\vec{H}_m^*}{2} \quad W/m^2 \qquad [6\text{-}42]$$

debiendo recordar, la potencia consumida o transportada sólo son las partes reales.

6.3. POTENCIA TRANSPORTADA POR UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA PLANA Y UNIFORME

Sabemos que una onda electromagnética plana y uniforme se desplaza en el medio de la propagación, con una velocidad de fase

$$V_f = \frac{1}{\sqrt{\mu.\varepsilon}} \qquad [m/s] \qquad [6\text{-}43]$$

y la densidad de energía transportada es la del campo eléctrico y magnético

$$\omega = \omega_E + \omega_H = \frac{1}{2}\left(\varepsilon.E^2 + \mu.H^2\right) \qquad \left[J/m^3\right] \qquad [6\text{-}44]$$

multiplicando la velocidad de fase de la onda electromagnética por la densidad de energía que tienen sus campos eléctrico y magnético, tendremos como consecuencia la densidad de potencia transportada por la onda, esto es:

$$V_f.\omega = \frac{1}{2}\left(\varepsilon.E^2 + \mu.H^2\right).\left(\frac{1}{\sqrt{.\mu.\varepsilon}}\right) \qquad \left[W/m^2\right] \qquad [6\text{-}45]$$

recordamos el vector de Poynting P_Y se mide en watts/metro cuadrado, y como consecuencia la expresión 45, es precisamente el vector de Poynting; por lo tanto:

$$P_Y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\mu.\varepsilon}}.E^2 + \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu.\varepsilon}}.H^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}.E^2 + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.H^2\right) \qquad \left[W/m^2\right] \qquad [6\text{-}46]$$

la impedancia del medio está dada por la expresión

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{E}{H} \qquad [\Omega] \qquad [6\text{-}47]$$

de acuerdo a la expresión (6-47), la ecuación (6-46), nos quedará:

$$P_Y = \frac{1}{2}\left(E.\frac{E}{\eta} + \eta.H.H\right) \qquad \left[W/m^2\right] \qquad [6\text{-}48]$$

la que podemos poner

$$P_Y = \frac{1}{2}\left(E.H + E.H\right) = E.H \qquad \left[W/m^2\right] \qquad [6\text{-}49]$$

siendo la magnitud del **vector de Poynting** demostrando que es igual a la velocidad por la densidad de energía.

De esto se puede concluir, siendo el campo eléctrico **E** y el campo magnético **H** perpendiculares al sentido de avance de la onda electromagnética, llevará una densidad de potencia $\mathbf{P_Y}$, esto es en los frentes de onda. Referirse a la figura 6-5.

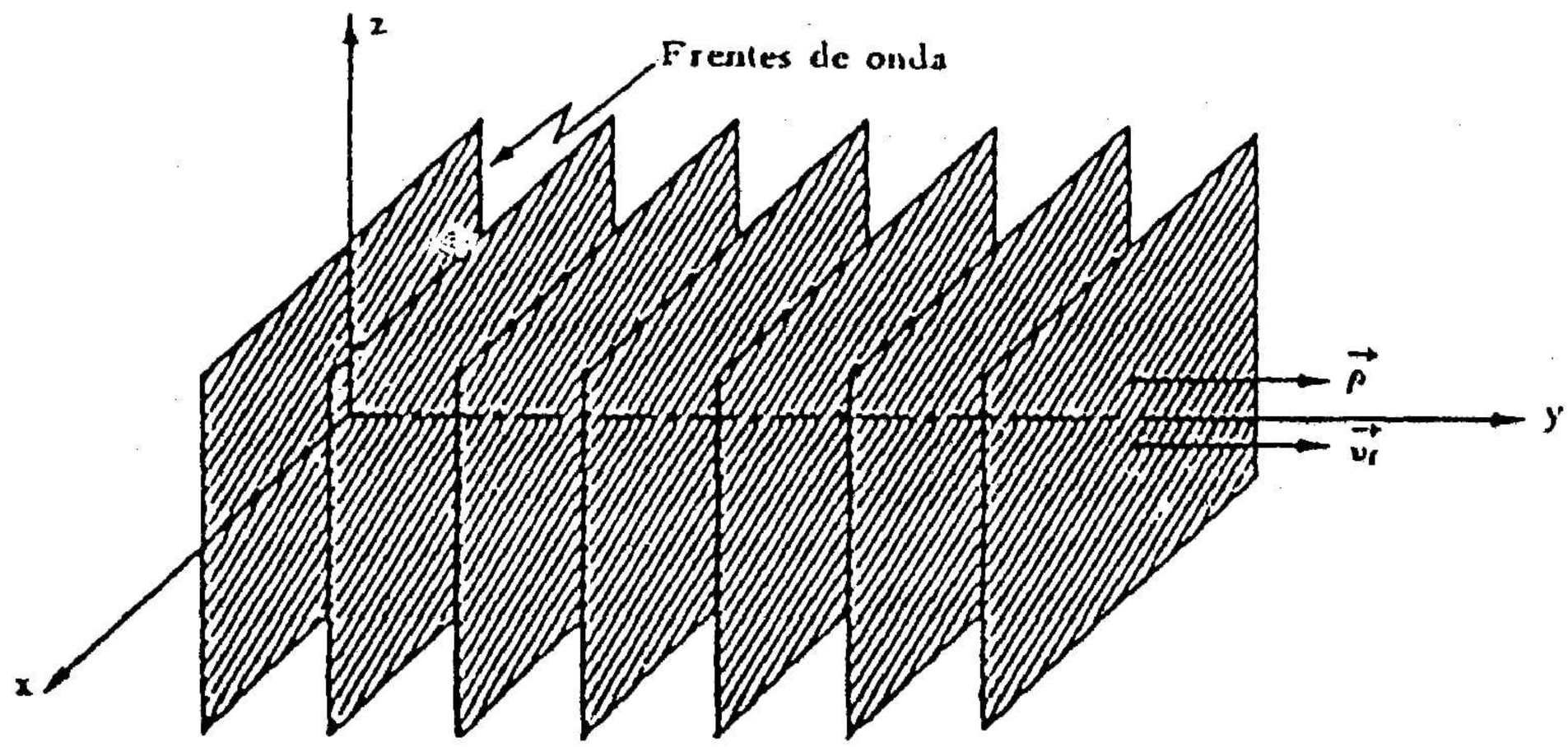
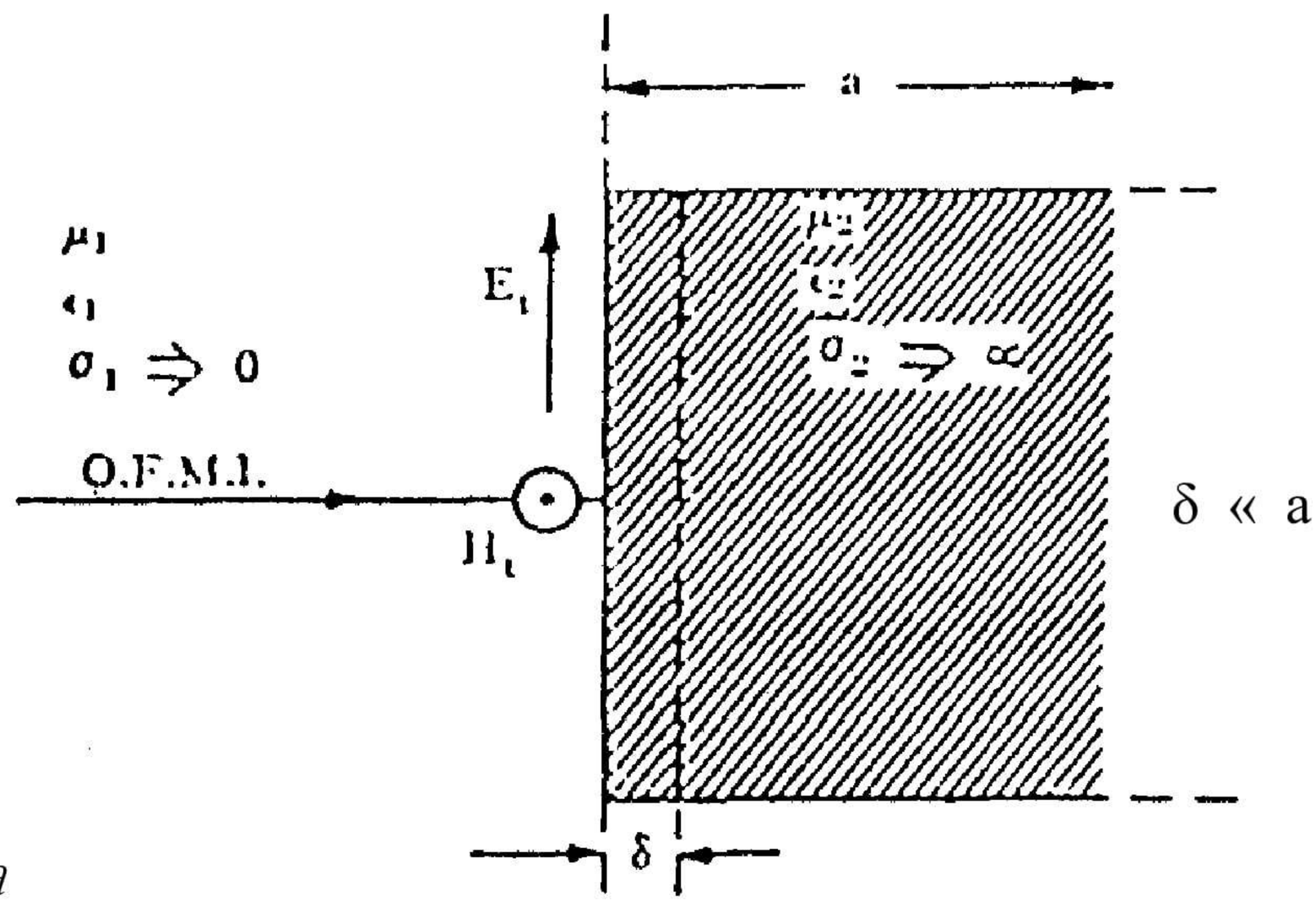


FIGURA 6-5: Vector de poynting o densidad de potencia superficial en el sentido de desplazamiento de la onda electromagnética

6.4. POTENCIA ABSORBIDA POR UN MEDIO CONDUCTOR

La onda electromagnética al incidir normalmente a la superficie de un medio muy buen conductor, referido en la figura 6-6, en la que tenemos la **E** y la **H** tangentes a la superficie del medio conductor, siendo precisamente la superficie de frontera, teniendo la condición de la anchura del medio conductor, sea muchas veces mayor a la profundidad de penetración, con objeto de que no haya reflexión.



$\delta \ll a$

FIGURA 6-6: Onda electromagnética incidiendo normal a un medio muy buen conductor

La potencia absorbida en el medio conductor, estará dada por la parte real del vector de Poynting,

$$P_r = R_e\left(E\,H^*\right) \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}50]$$

siendo E y H* valores eficaces, a fin de tener la magnitud del vector de Poynting en su valor eficaz. Si la E y la H* son valores máximos, la expresión para el valor eficaz del vector de Poynting será:

$$P_r = R_e\,\frac{\vec{E}_m \cdot \vec{H}^*_m}{2} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}52]$$

además recordamos, para utilizar solamente la **E**, debemos utilizar la impedancia del medio, que en este caso es la del medio conductor, la cual tiene parte real y parte imaginaria, ambas iguales, esto es, un número complejo al ser representado en forma polar tiene un ángulo de 45º. Debido a este ángulo polar habrá un desfasamiento en el tiempo entre la **E** y la **H** de 45º; tomando la parte real, tendremos $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Recordamos además, en el medio conductor, la impedancia del medio es igual a la impedancia de superficie, con la característica de que la parte resistiva de la impedancia de superficie es igual a la parte real de la impedancia del medio y la reactancia de la impedancia de superficie es igual a la parte imaginaria de la impedancia del medio. Expresado matemáticamente es: $Z_s = \eta_C$

$$Z_s = \eta_C \qquad [6\text{-}53]$$

$$R_S = R_e\,\eta_e \qquad \text{y} \qquad X_S = I_m \qquad [6\text{-}54]$$

De acuerdo a lo arriba indicado, la ecuación 6-52, la podemos poner:

$$P_r = R_e\,\frac{|Z_S|\,H_C^2}{\sqrt{2}} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}55]$$

Siendo H_C, valor eficaz

$$P_r = R_e\,\frac{|Z_S|\,H_C^2}{2\sqrt{2}} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}56]$$

en la que H es valor máximo

$$P_r = R_e\,\frac{E_C^2 \cdot \sqrt{2}}{|Z_S|} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}57]$$

E_C valor eficaz, dentro del medio conductor

$$P_r = R_e\,\frac{E_C^2 \cdot \sqrt{2}}{2\,|Z_S|} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}58]$$

E_C valor máximo, dentro del medio conductor

Sabemos por la segunda condición de frontera, para el caso particular de que uno de los medios sea un conductor, la intensidad de campo magnético en el medio dieléctrico, es en el medio conductor la

densidad de corriente superficial conductora, por lo tanto, de acuerdo a esto, la ecuación 6-55., se puede transformar a:

$$P_r = \frac{|Z_S|\, J_{CS}^2}{\sqrt{2}} \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}59]$$

J_{CS} valor eficaz

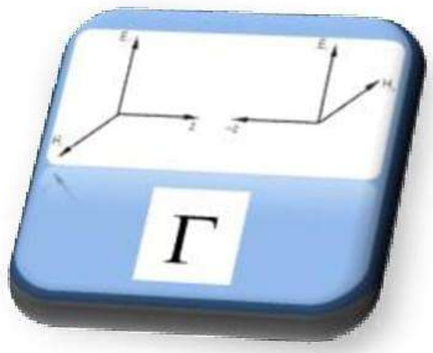
$$P_r = \frac{|Z_S|\, J_{CS}^2}{2\sqrt{2}} \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [6\text{-}70]$$

siendo precisamente la densidad de potencia superficial consumida por el medio conductor.

La importancia tan grande de esto es el hecho de la densidad de corriente superficial en el medio conductor, tiene todas las propiedades de la onda electromagnética que la originó, es decir, con las mismas informaciones de la onda electromagnética, que podía ser la modulación en amplitud, en frecuencia, en fase o en pulsos.

La potencia recibida por el medio conductor, será el producto escalar del vector de Poynting por la superficie del medio conductor.

CAPÍTULO 7



REFLEXIÓN NORMAL ENTRE DOS MEDIOS DIELÉCTRICOS

Objetivo:

- ☞ Que el alumno adquiera un claro dominio en la fundamentación del comportamiento de la onda electromagnética plana, cuando se propaga a través de medios no homogéneos o diferentes dieléctricos, en la demostración de la obtención de los coeficientes de reflexión y transmisión y en el análisis de la relación entre las impedancias de los medios.

7.1. INTRODUCCIÓN

Cuando una onda electromagnética plana incide normalmente sobre la superficie plana de un dieléctrico perfecto, parte de la energía se transmite y otra se refleja. Un dieléctrico perfecto es aquel cuya conductividad σ es cero, de manera que no haya pérdida o absorción de potencia en la propagación de la onda a través suyo.

Para comenzar con este capítulo debemos tener presente las condiciones de contorno o condiciones de frontera que cumplen los campos eléctricos y magnéticos en la superficie de separación de dos medios dieléctricos:

7.1.1. Condiciones de continuidad en dos medios dieléctricos

La componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico en dos medios dieléctricos es continua, lo que hay en un medio es igual a lo que hay en el otro. ($E_{t1} = E_{t2}$)

La componente tangencial de la intensidad de campo magnético en dos medios dieléctricos es continua, lo que vale en un dieléctrico, es lo mismo a lo que valdrá en el dieléctrico contiguo.

La Componente Normal de la Densidad de Campo Eléctrico en dos medios dieléctricos es continua, lo que vale en un medio es igual a lo que vale en el otro.

La Componente Normal de la Densidad de Campo Magnético en dos medios dieléctricos es continua, ya que lo que aparece en el medio 1, es lo mismo a lo que aparece en el medio 2.

Componentes Tangenciales
$E_{t_1} = E_{t_2}$
$H_{t_1} = H_{t_2}$

Componentes Normales
$D_{n_1} = D_{n_2}$
$B_{n_1} = B_{n_2}$

Como antes, consideremos el caso de una onda plana propagándose en la dirección z sobre una superficie paralela al plano x,z. Sea *Ei* la Intensidad de Campo Eléctrico de la onda Incidente sobre la superficie dieléctrica, Er la Intensidad de Campo Eléctrico Reflejado en la superficie dieléctrica del medio 1 y E_T la Intensidad de Campo Eléctrico que se transmite al medio 2.

7.2. COEFICIENTE DE REFLEXIÓN (Γ_E)

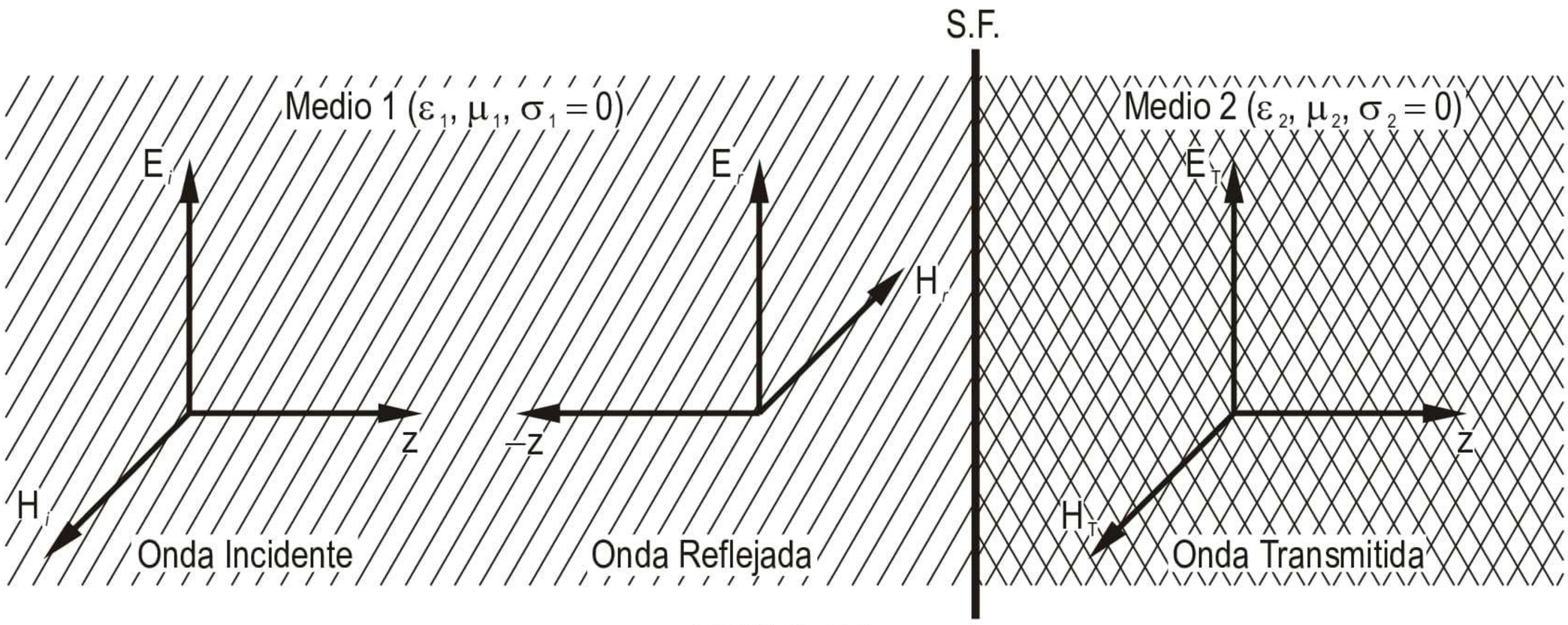


FIGURA 7-1

$$Ei + Er = E_T \qquad [7\text{-}1]$$

$$Hi + Hr = H_T \qquad [7\text{-}2]$$

$$\frac{Ei}{Hi} = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$$ **Impedancia intrínseca del medio 1** [7-3]

$$\frac{Er}{Hr} = -\eta_1 = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \qquad [7\text{-}4]$$

$$\frac{E_T}{H_T} = \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$ **Impedancia intrínseca del medio 2** [7-5]

Si despejamos H de 3, 4, y 5 y lo reemplazamos en 2 nos queda:

$$Hi = \frac{Ei}{\eta_1} \qquad Hr = -\frac{Er}{\eta_1} \qquad H_T = \frac{E_T}{\eta_2}$$

$$H_i + H_r = H_T$$

$$\frac{Ei}{\eta_1} + \left(-\frac{Er}{\eta_1}\right) = \frac{E_T}{\eta_2}$$

si sacamos común denominador tenemos:

$$\frac{Ei - Er}{\eta_1} = \frac{E_T}{\eta_2} = \frac{Ei + Er}{\eta_2} \qquad [7\text{-}6]$$

operando para eliminar los denominadores:

$$Ei.\eta_2 - Er.\eta_2 = Ei.\eta_1 + Er.\eta_1 \qquad [7\text{-}7]$$

sacando factor común el campo eléctrico:

$$Ei.(\eta_2 - \eta_1) = Er.(\eta_1 + \eta_2) \qquad [7\text{-}8]$$

dividiendo Er sobre Ei obtenemos el coeficiente de reflexión que buscamos:

$$\Gamma_E = \frac{Er}{Ei} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$ **Coeficiente de Reflexión del Campo Eléctrico** [7-9]

7.3. COEFICIENTE DE REFRACCIÓN (T_E)

Se denomina Coeficiente de refracción del campo eléctrico T_E al cociente entre el campo eléctrico transmitido y el campo eléctrico incidente.

$$T_E = \frac{E_T}{Ei} = \frac{Ei + Er}{Ei} = 1 + \frac{Er}{Ei} = 1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\eta_2 + \eta_1 + \eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2.\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad [7\text{-}10]$$

$$T_E = \frac{E_T}{E_i} = \frac{2.\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$ **Coeficiente de Refracción del Campo Eléctrico** [7-11]

7.4. COEFICIENTE DE REFLEXIÓN (Γ_H) DEL CAMPO H

Teniendo en cuenta la definición de coeficiente de reflexión podemos expresar Γ_H de la siguiente manera:

$$\Gamma_H = \frac{Hr}{Hi} = \frac{-\frac{Er}{\eta_1}}{\frac{Ei}{\eta_1}} = -\frac{Er}{Ei} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad [7\text{-}12]$$

$$\Gamma_H = \frac{Hr}{Hi} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$ **Coeficiente de Reflexión del campo Magnético** [7-13]

7.5. COEFICIENTE DE REFRACCIÓN (T_H) DEL CAMPO H

$$T_H = \frac{H_T}{Hi} = \frac{\frac{E_T}{\eta_2}}{\frac{Ei}{\eta_1}} = \frac{E_T}{Ei} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{2.\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{2.\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad [7\text{-}14]$$

$$T_H = \frac{H_T}{Hi} = \frac{2.\eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$ **Coeficiente de Refracción del Campo Magnético** [7-15]

7.6. CONCLUSIONES

De las expresiones del Coeficiente de Reflexión del Campo Eléctrico y del Campo Magnético, teniendo en cuenta la relación entre las Impedancias Intrínsecas de ambos medios, podemos extraer las siguientes conclusiones:

1er caso: $\eta_2 > \eta_1$

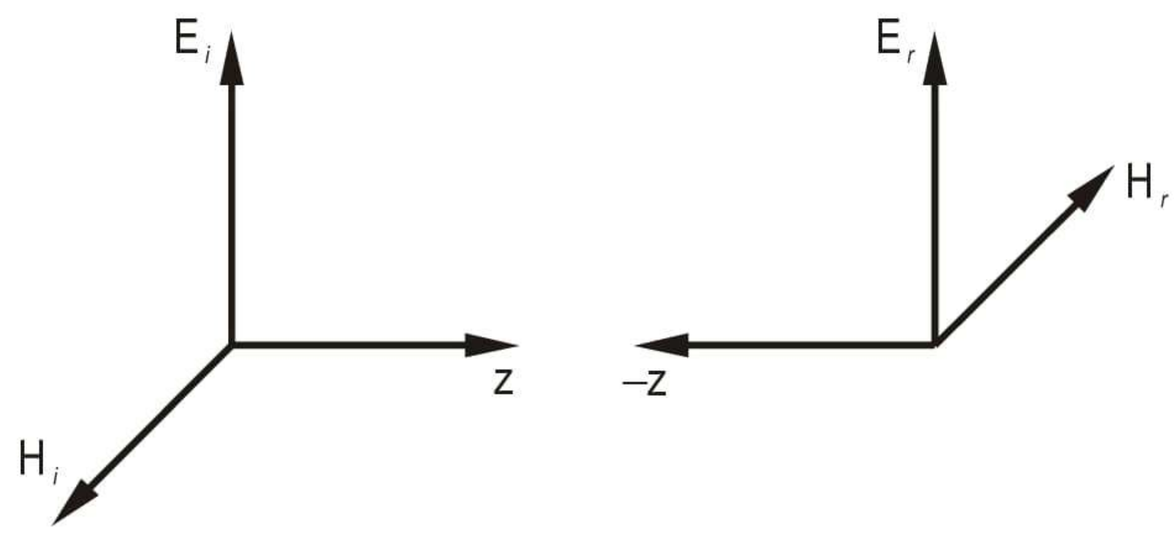


FIGURA 7-2

$$\Gamma_E = \frac{Er}{Ei} > 0$$

$$\Gamma_H = \frac{Hr}{Hi} < 0$$

Hay reflexión y el Campo Magnético Reflejado Hr cambia de signo (se desfasa 180º)

2do caso: $\eta_2 < \eta_1$

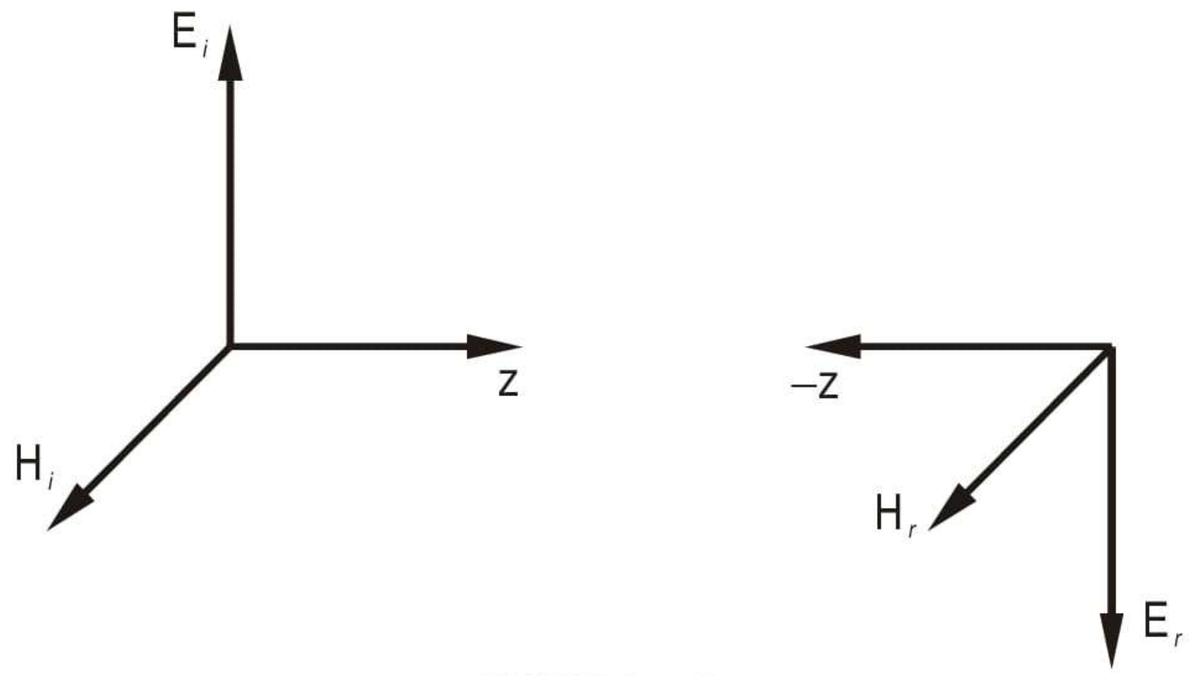


FIGURA 7-3

$$\Gamma_E = \frac{Er}{Ei} < 0$$

$$\Gamma_H = \frac{Hr}{Hi} > 0$$

Hay reflexión y el Campo Eléctrico Reflejado Er cambia de signo (se desfasa 180º)

3er caso: $\eta_2 = \eta_1$

$$\Gamma_E = \frac{Er}{Ei} = 0$$

$$\Gamma_H = \frac{Hr}{Hi} = 0$$

En estas condiciones ambos coeficientes de reflexión son iguales a cero y no hay reflexión.

7.7. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN EN CUALQUIER MEDIO

$$E_X(z) = Ei.e^{-\gamma_1 z} + Er.e^{+\gamma_1 z}$$ **Ecuación de Onda plana del Campo Eléctrico** [7-16]

$$H_Y(z) = \frac{Ei}{\eta_1}.e^{-\gamma_1 z} - \frac{Er}{\eta_1}.e^{+\gamma_1 z}$$ **Ecuación de onda plana del Campo Magnético** [7-17]

$$\Gamma_E = \frac{Er}{Ei} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}$$ [7-18]

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{\sigma_1}{\omega\cdot\varepsilon_1}\right)^2}}\cdot e^{j\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma_1}{\omega\cdot\varepsilon_1}\right)}$$ **Impedancia intríseca del medio 1** [7-19]

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \qquad \text{cuando } \sigma_1 = 0$$ [7-20]

La constante de propagación es

$$\gamma = \alpha + j\beta$$ [7-21]

La amplitud compleja de la onda reflejada es

$$Er = Ei\cdot\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$$ [7-22]

En forma semejante, la onda transmitida es

$$E_T = Ei\cdot\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$$ [7-23]

La ecuación de campo eléctrico en el medio 1 puede expresarse

$$E_X(z) = Ei\cdot e^{-\gamma_1 z} + Er\cdot e^{+\gamma_1 z} = Ei\ e^{-j\beta z} + Er\ e^{+j\beta z} = Ei\cdot e^{-j\beta z}\left[1+\frac{Er\cdot e^{+j\beta z}}{Ei\cdot e^{-j\beta z}}\right] = Ei\cdot e^{-j\beta z}\left[1+\frac{Er}{Ei}\ e^{+j2\beta z}\right]$$ [7-24]

Como consideramos un dieléctrico sin pérdidas

$$\alpha = 0 \qquad \therefore \qquad \gamma = j\beta$$

Recordando que el **coeficiente de reflexión** Γ es la relación compleja de la onda reflejada a la incidente

$$\Gamma(z) = \left[\frac{Er}{Ei}\ e^{+j2\beta z}\right]$$ [7-25]

la expresión de la onda de campo eléctrico total $E_X(z)$ en el medio 1 queda expresada

$$E_X(z) = Ei\cdot e^{-j\beta z}\left[1+\Gamma_E(z)\right]$$ [7-26]

De la misma manera la expresión de la onda de campo magnético total $H_y(z)$ en el medio 1 es

$$H_Y(z) = \frac{Ei}{\eta_1} \cdot e^{-j\beta z}\left[1 - \Gamma_E(z)\right] \qquad [7\text{-}27]$$

7.8. IMPEDANCIA DE CAMPO

Es la relación del Campo Eléctrico Total $E_X(z)$ sobre el campo magnético total $H_Y(z)$

$$Z(z) = \frac{E_X(z)}{H_Y(z)} = \eta_1 \cdot \frac{\left[1 + \Gamma_E(z)\right]}{\left[1 - \Gamma_E(z)\right]} \qquad \textbf{Impedancia de campo} \qquad [7\text{-}28]$$

Si expresamos el coeficiente de reflexión en función de la impedancia de campo $Z(z)$ tenemos

$$\Gamma_E(z) = \frac{Z(z) - \eta_1}{Z(z) + \eta_1} \qquad [7\text{-}29]$$

cuando tenemos un medio continuo, es decir que $\eta_1 = \eta_2$ **no hay reflexión** y la impedancia de campo $Z(z)$ es igual a η_1.

Si cambiamos la dirección de propagación y tomamos a z desde la superficie de frontera encontraremos una ecuación para calcular la impedancia de campo en cualquier punto

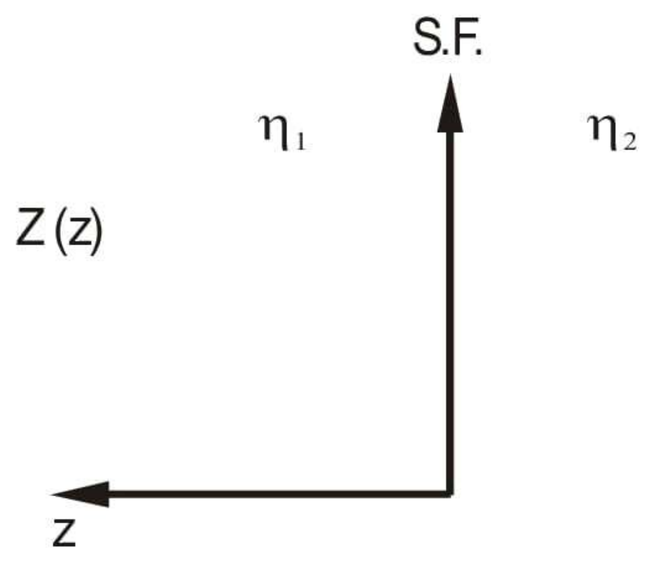


FIGURA 7-4

Considerando $\alpha = 0$ las ecuaciones (7-16) (7-17) quedan

$$E_x(z) = E_i\, e^{j\beta z} + E_r\, e^{-j\beta z} \qquad [7\text{-}30]$$

$$H_y(z) = \frac{E_i}{\eta}\, e^{j\beta z} - \frac{E_r\, e^{-j\beta z}}{\eta_1} \qquad [7\text{-}31]$$

Si reemplazamos en (7-28) $E_x(z)$ y $H_y(z)$

$$Z(z)=\frac{E_x(z)}{H_y(z)}=\frac{E_i\,e^{j\beta z}+E_r\,e^{-j\beta z}}{\frac{E_i}{\eta}\,e^{j\beta z}-\frac{E_r}{\eta}\,e^{-j\beta z}} \qquad [7\text{-}32]$$

Sacando factor común E_i en el numerador y denominador

$$Z(z)=\frac{E_i\left(e^{j\beta z}+\frac{E_r}{E_i}\,e^{-j\beta z}\right)}{\frac{E_i}{\eta_1}\left(e^{j\beta z}-\frac{E_r}{E_i}\,e^{-j\beta z}\right)} \qquad [7\text{-}33]$$

$$\frac{E_r}{E_i}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} \qquad \text{también} \qquad \frac{E_r}{E_i}=\frac{Z_R-Z_0}{Z_R+Z_0} \qquad [7\text{-}34]$$

$$Z(z)=\frac{E_x(z)}{H_y(z)}=\frac{\cancel{E_i}\left(e^{j\beta z}+\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\,e^{-j\beta z}\right)}{\frac{\cancel{E_i}}{\eta_1}\left(e^{j\beta z}-\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\,e^{-j\beta z}\right)} \qquad [7\text{-}35]$$

$$Z(z)=\frac{\eta_1\left[(\eta_2+\eta_1)e^{j\beta z}+(\eta_2-\eta_1)e^{-j\beta z}\right]}{\left[(\eta_2+\eta_1)e^{j\beta z}-(\eta_2-\eta_1)e^{-j\beta z}\right]} \qquad [7\text{-}36]$$

$$Z(z)=\frac{\eta_1\left[\eta_2\,e^{j\beta z}+\eta_1\,e^{j\beta z}+\eta_2\,e^{-j\beta z}-\eta_1\,e^{-j\beta z}\right]}{\eta_2\,e^{j\beta z}+\eta_1\,e^{j\beta z}-\eta_2\,e^{-j\beta z}-\eta_1\,e^{-j\beta z}} \qquad [7\text{-}37]$$

$$Z(z)=\frac{\eta_1\left[\eta_1\left(e^{j\beta z}\cdot e^{-j\beta z}\right)+\eta_2\left(e^{j\beta z}+e^{-j\beta z}\right)\right]}{\eta_2\left(e^{j\beta z}-e^{-j\beta z}\right)+\eta_1\left(e^{j\beta z}+e^{-j\beta z}\right)} \qquad [7\text{-}38]$$

$$Z(z)=\frac{\eta_1\left[\eta_1\cdot 2\,j\,\mathrm{sen}(\beta z)+\eta_2\,2\cos(\beta z)\right]}{\eta_2(2\,j\,\mathrm{sen}\,\beta z)+\eta_1(2\cos\beta z)} \qquad [7\text{-}39]$$

Sacando factor común $2\cos(\beta z)$ en el numerador y denominador

$$\boxed{Z(z)=\frac{\eta_1(\eta_2+j\,\eta_1\,\mathrm{tg}\,\beta z)}{\eta_1+j\,\eta_2\,\mathrm{tg}\,\beta z} \qquad [7\text{-}40]}$$

Cuando trabajamos con una Línea de Transmisión, la fig.7-4 se convierte en la fig.7-5.

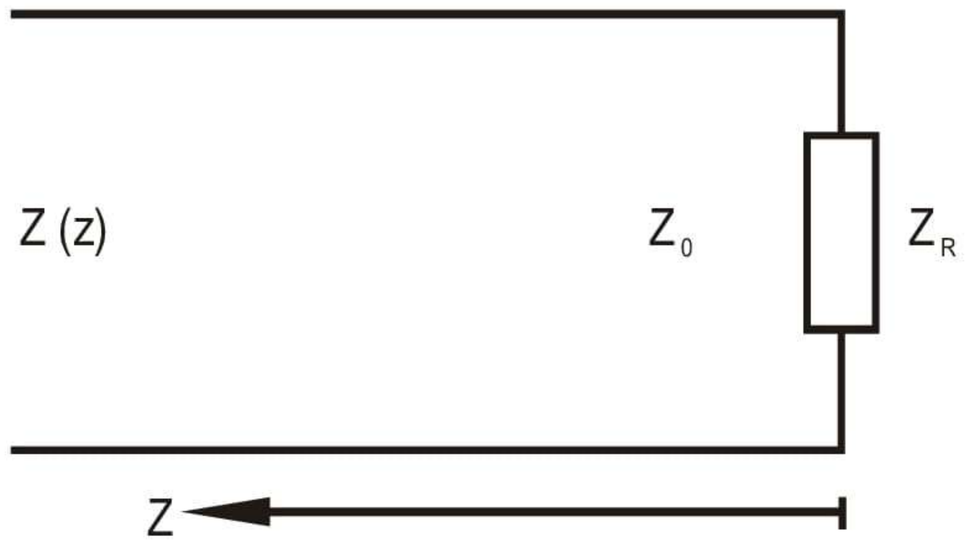


FIGURA 7-5

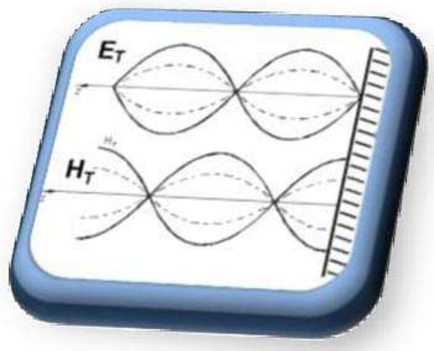
Y la ecuación (7-40) queda

$$Z(z) = \frac{Z_0\left(Z_R + j Z_0 \operatorname{tg}(\beta z)\right)}{Z_0 + j Z_R \operatorname{tg}(\beta z)} \qquad [7\text{-}41]$$

Nota:

Ver Capítulo 12.11.2

CAPÍTULO 8



REFLEXIÓN NORMAL SOBRE UN CONDUCTOR PERFECTO

Objetivo:

- ☞ Que el alumno adquiera un claro dominio en la fundamentación de la existencia de ondas estacionarias del campo eléctrico total y campo magnético total, en el medio dieléctrico, debido a la reflexión total del medio conductor perfecto.

8.1. INTRODUCCIÓN

Cuando una onda electromagnética plana se propaga en un medio e incide sobre un segundo medio que tiene distinta constante dieléctrica, permeabilidad o conductibilidad, la onda en general, será parcialmente transmitida y parcialmente reflejada. En el caso de una onda plana propagándose en el aire que incida normalmente sobre la superficie de un conductor perfecto, ésta se refleja por entero.

Campos que varíen en el tiempo no pueden tener E ni H en el interior de un conductor perfecto, de manera que no puede transmitirse energía alguna de la onda incidente. Como no puede haber pérdidas en el interior de un conductor perfecto no puede absorber energía. Resultado de ello es que las amplitudes de E y de H de la onda reflejada son las mismas de la onda incidente, y su sola diferencia es la dirección de transporte de energía.

8.2. CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO TOTAL

$$E_T x(z) = (Ei.e^{j\beta.z} + Er.e^{-j\beta.z}) \qquad [8\text{-}1]$$

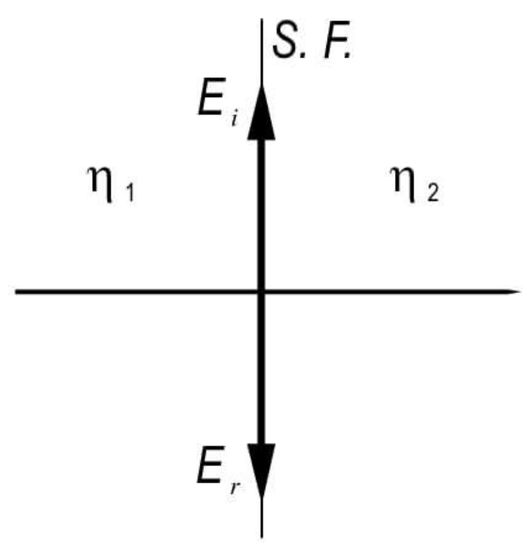
Donde la expresión del campo eléctrico de una onda incidente que avanza en el eje –z es:

$$Ei.e^{j\beta.z} \qquad [8\text{-}2]$$

tomándose la superficie del conductor perfecto tal que z=0 (plano) tal como indica la figura, la expresión de la onda reflejada será:

$$Er.e^{-j\beta.z} \qquad [8\text{-}3]$$

debiéndose determinar *Er* contando con las condiciones límites. Como la componente tangencial de E debe ser continua al atravesarse la superficie límite de medios y E es cero en el interior del conductor, la componente tangencial de E en el aire y junto a la superficie límite debe ser también cero. Esto requiere que la suma de los campos eléctricos de las ondas incidente y reflejada será cero en el plano $z = 0$. Por lo tanto,



$$Ei = -Er \qquad [8\text{-}4]$$

La amplitud de la intensidad de campo eléctrico reflejado *Er* es igual a la del campo incidente *Ei*, si bien tiene su fase invertida al reflejarse.

El campo eléctrico resultante en un punto a una distancia –z del punto z=0 será la suma de las intensidades de las ondas incidentes y reflejadas en el conductor, medidas en tal punto y vendrán dadas por:

$$E_T x(z) = (Ei.e^{+j\beta.z} + Er.e^{-j\beta.z}) \qquad [8\text{-}5]$$

$$E_T x(z) = Ei.(e^{+j\beta.z} - e^{-j\beta.z}) \qquad [8\text{-}6]$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} \beta.z = \dfrac{e^{+j\beta.z} - e^{-j\beta.z}}{2j}$

$$E_T x(z) = 2jEi.\operatorname{sen} \beta.z \qquad [8\text{-}7]$$

La expresión en función del tiempo y del espacio queda:

$$E_T x(z,t) = \operatorname{Re}\{2jEi.\operatorname{sen} \beta.z.e^{jw.t}\} \qquad [8\text{-}8]$$

Si se elije *Ei* como real, teniendo en cuenta que:

$$e^{jw.t} = \cos \varpi.t + j \operatorname{sen} \varpi.t$$

La *j* al multiplicar con $j \operatorname{sen} \omega t$ queda $-\operatorname{sen} \omega t$

$$E_T x(z,t) = -2Ei.\text{sen}\,\beta.z.\text{sen}\,\varpi.t \qquad [8\text{-}9]$$

La ecuación (8-9) muestra que las ondas incidente y reflejada se combinan para producir una onda estacionaria, que no se desplaza. La magnitud de la intensidad de campo eléctrico varía sinusoidalmente con la distancia a la superficie reflectora. Es cero en dicha superficie y a múltiplos de media longitud de onda de distancia. Tiene un valor máximo doble de la onda incidente a distancias de la superficie reflectora, medidas por múltiplos impares de cuartos de longitud de onda.

En el caso que la onda incidente se propaga en dirección *z*, la ecuación 8-9 cambia de signo (ver fig.8-1).

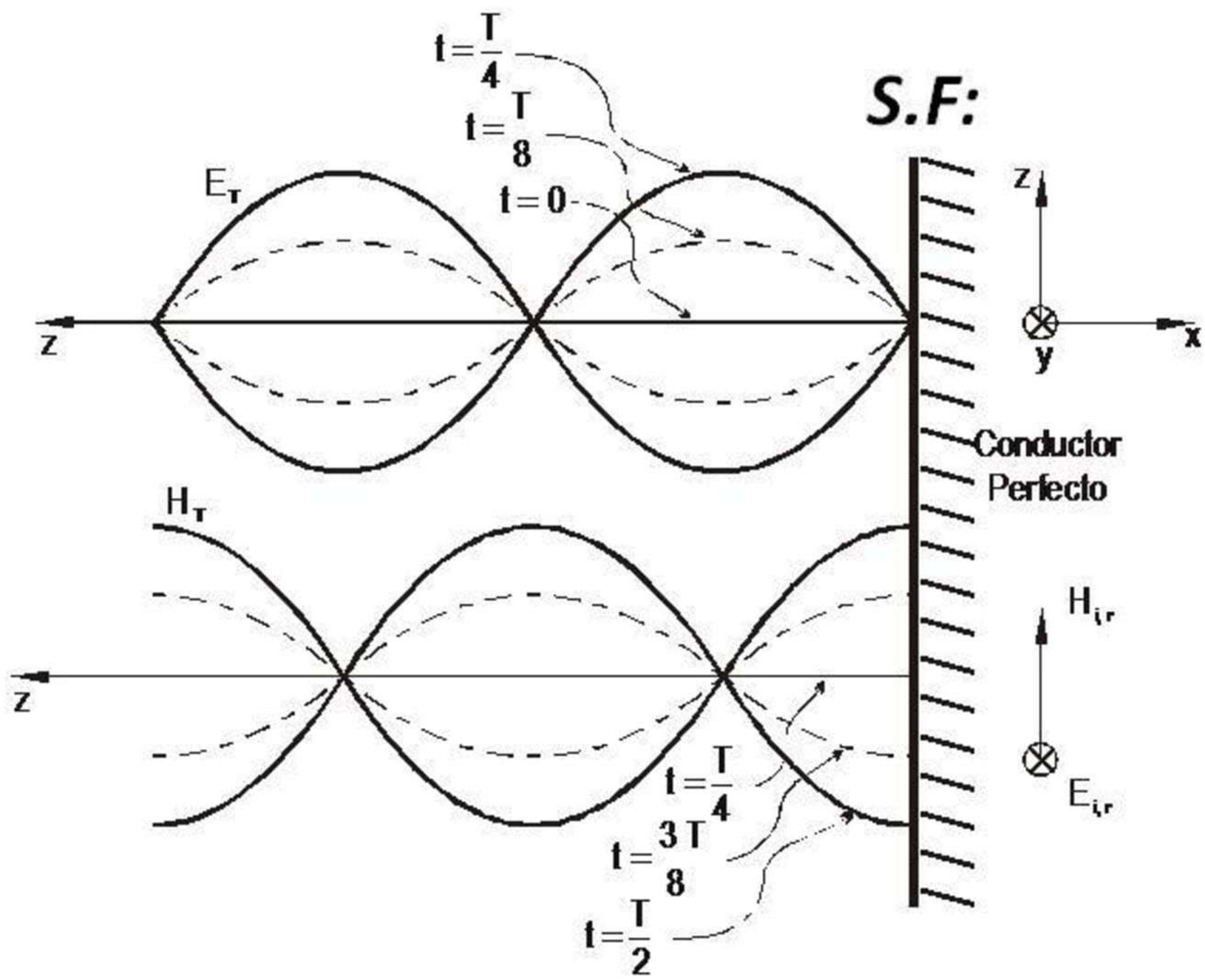


FIGURA 8-1: Ondas estacionarias de E_T y H_T

8.3. CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO TOTAL

Como las condiciones en la superficie límite o reflectora requieren que la intensidad de campo eléctrico tenga una inversión de fase en la reflexión para producir un campo nulo en la superficie, resulta que la intensidad de campo magnético debe reflejarse sin inversión de fase. Si se invirtieran, tanto el campo magnético como el eléctrico, no podría haber inversión del sentido de propagación de la energía, como ocurre en este caso. Por tanto, la fase de la intensidad *Hr* del campo magnético es la misma que la de la onda incidente *Hi* en la superficie de reflexión z=0.

Si se supone en la onda incidente que se propaga hacia la derecha en la dirección positiva de *z*, que E_i está en la dirección positiva de *x* y H_i en la dirección positiva de *y* (como se vió en Poynting, la dirección de propagación está siempre en la dirección del vector $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$) el flujo de corriente en el

conductor tendrá la misma dirección que el campo eléctrico incidente, es decir, en la dirección positiva de *x*. Este flujo de corriente produce un campo magnético que aplicando la regla de la mano derecha resulta en la dirección positiva de *y*.
Por lo tanto, el campo magnético de la onda reflejada tiene la *misma* dirección que la de la onda incidente.

$$H_i = H_r$$

La expresión de la Intensidad de Campo Magnético será

$$H_T y(z) = (Hi.e^{+j\beta.z} + Hr.e^{-j\beta.z}) \qquad [8\text{-}10]$$

$$H_T y(z) = Hi.(e^{+j\beta.z} + e^{-j\beta.z}) \qquad [8\text{-}11]$$

Teniendo en cuenta que $\cos \beta.z = \dfrac{e^{+j\beta.z} + e^{-j\beta.z}}{2}$

$$H_T y(z) = 2Hi.\cos \beta.z \qquad [8\text{-}12]$$

Siendo *Hi* real, ya que está en fase con *Ei, l*a expresión en función del tiempo y del espacio de H_T queda:

$$H_T y(z,t) = \mathrm{Re}\left\{2\ H_i \cos\left(\beta \cdot z\right) e^{jwt}\right\} \qquad [8\text{-}13]$$

Si se elige *Hi* como real

$$e^{jw.t} = \cos \varpi.t + j \operatorname{sen} \varpi.t$$

$$H_T y(z,t) = 2Hi.\cos \beta.z.\cos \varpi.t \qquad [8\text{-}14]$$

La intensidad de campo magnético resultante H tiene también una distribución en forma de onda estacionaria. En este caso, sin embargo, tiene su valor máximo en la superficie del conductor y a distancias múltiplos de media longitud de onda, mientras que sus ceros se presentan a distancias medidas en múltiplos impares de cuartos de longitud de onda. De las condiciones en el límite para H resulta que debe de haber una corriente superficial Js amperios por metro, tal que $Js=H_T$ (a z=0).

8.4. CONCLUSIÓN

Como Ei y Hi estaban en fase en el tiempo en la onda incidente, al compararse (8-9) y (8-14) se ve que E_T y H_T están desfasados 90 grados en el tiempo a causa del factor j de (8-8). Esto es como debía ser, pues indica que no hay flujo medio de potencia. Este es el caso en que la energía transmitida en la dirección de incidencia viene igualada por la que retrocede debido a la reflexión.

Puede verse que ET y HT están desfasados 90 grados de un modo más claro partiendo de (8-8), y sustituyendo +j por su equivalente $e^{+j(\pi/2)}$ y combinándolo con el término $e^{j\omega t}$ para dar $e^{j[\omega\tau+(\pi/2)]}$, la ecuación (8-8) se convierte en:

$$E_T x(z,t) = \mathrm{Re}\{2Ei.\mathrm{sen}\,\beta.z.e^{+j\pi/2}.e^{jw.t}\} \qquad [8\text{-}15]$$

Como cos(ωt+π/2) = -sen ωt,

$$E_T x(z,t) = 2Ei.\mathrm{sen}\,\beta.z.\cos(\varpi.t+\pi/2) = -2Ei.\mathrm{sen}\,\beta.z.sen\,\varpi.t \qquad [8\text{-}16]$$

De igual manera escribiendo de nuevo (8-14) con estas sustituciones:

$$H_T y(z,t) = 2Hi.\cos\beta.z.\cos\varpi.t \qquad [8\text{-}17]$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones de E_T y H_T se ve que difieren en una fase de π/2 radianes, o sea, de 90 grados.

Otra forma de llegar al mismo resultado parte de considerar el flujo de corriente en el conductor.

Si graficamos el campo Eléctrico Total $E_{TX}(z,t)$ mediante el diagrama de Crank a lo largo de una longitud de onda, obtendremos

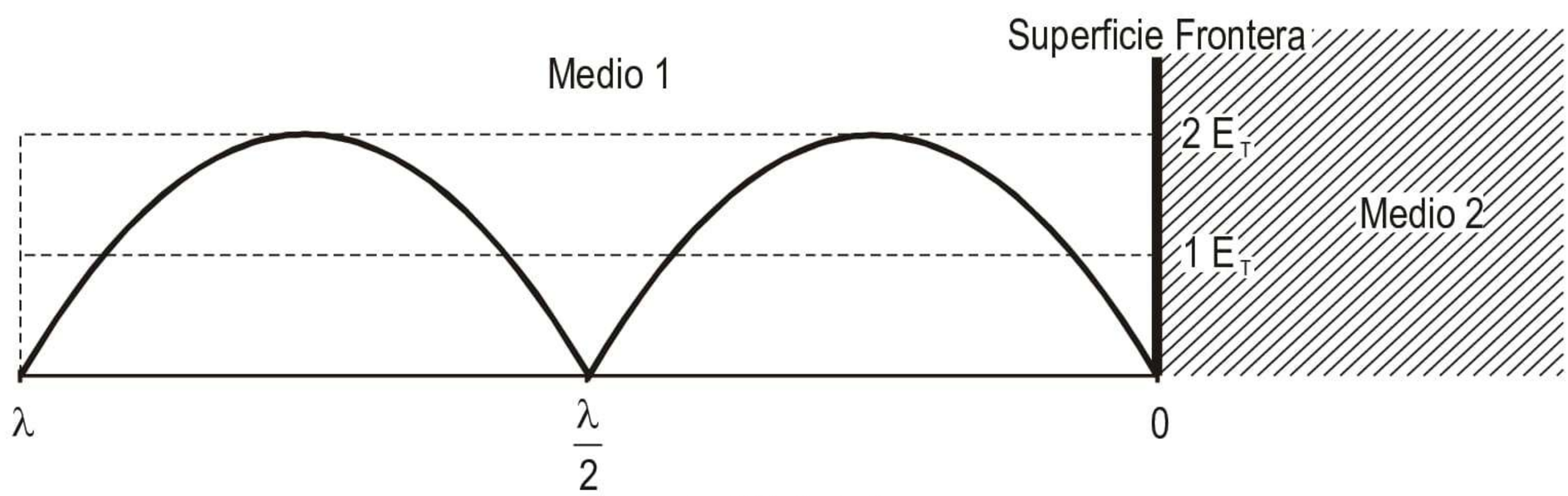
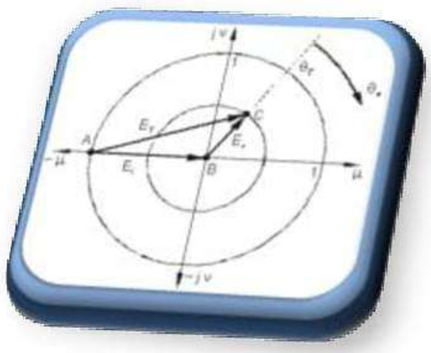


FIGURA 8-2

Por lo tanto veremos que con el diagrama de Crank solo representamos los valores máximos del campo total



CAPÍTULO 9

CÁLCULO ANALÍTICO Y GRÁFICO DEL CAMPO TOTAL EN REFLEXIÓN NORMAL

Objetivo:

- ☞ Que el alumno adquiera destreza en el cálculo y representación gráfica de la distribución del campo total y los parámetros de reflexión haciendo uso del diagrama de Crank y Abaco de Smith.

9.1. DISTRIBUCIÓN DE TENSIÓN Y CORRIENTE EN MEDIOS CON REFLEXIONES

Las diferentes maneras de distribuirse la tensión y la corriente a lo largo de un medio con reflexiones o de una línea de transmisión se comprende más fácilmente considerando en detalle algunos casos especiales. En la discusión de estos ejemplos se supone que la constante de atenuación α es cero; esto se hace con el fin de simplificar el fenómeno involucrado.

9.1.1. Línea de transmisión con carga a circuito abierto

Cuando la impedancia de carga es infinita la ecuación siguiente muestra que el módulo del coeficiente de reflexión $[\Gamma]= 1$ y el argumento $\theta_\Gamma= 0º$.

$$\Gamma_E = \frac{Er}{Ei} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = |\Gamma| \angle \theta_\Gamma$$

En estas condiciones, las ondas incidente y reflejada tienen la misma magnitud en la carga, y la reflexión es tal que las tensiones de la onda incidente y de la onda reflejada tienen también la misma fase. Como consecuencia, las amplitudes de las ondas se suman aritméticamente de modo que en la carga $E_1 = E_2 = E_T/2$. En estas condiciones, se desprende que el campo magnético (espacio libre) o las

corrientes (líneas de transmisión) incidente y reflejada, son de la misma magnitud y de opuesta fase; en consecuencia su suma da campo magnético o corriente nula en la carga, como debe ser el caso cuando la carga está en circuito abierto.

Veamos ahora cómo se comportan estas dos ondas al aumentar la distancia l o z desde la carga (desde la superficie de frontera). La onda incidente adelanta su fase β radianes por unidad de longitud, mientras que la onda reflejada atrasa su fase correspondientemente. La suma vectorial de las tensiones de las ondas es menor que la suma aritmética, como ilustra la figura para z=λ/8

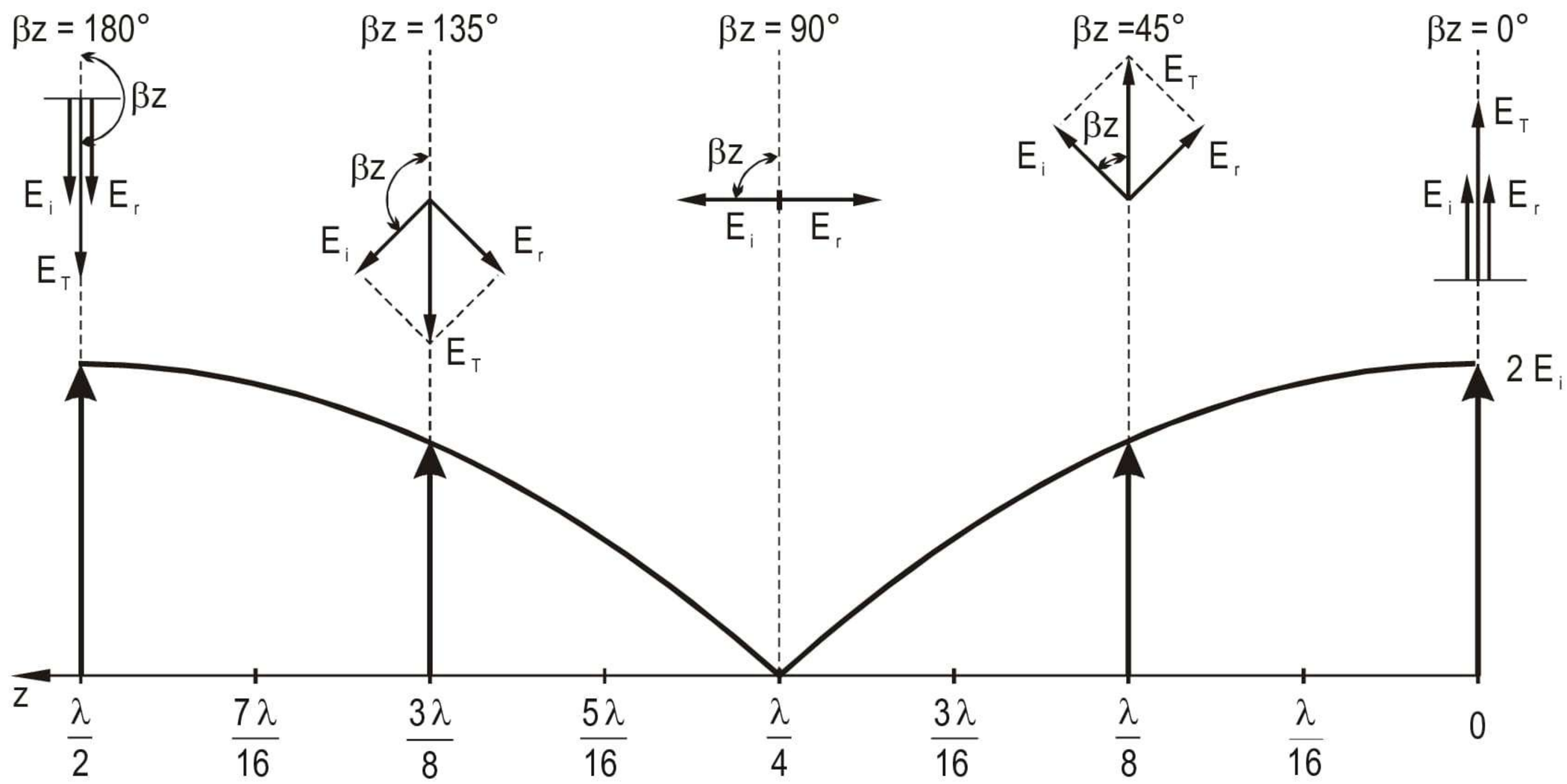


FIGURA 9-1

Esta tendencia continúa hasta que la distancia desde la carga es exactamente igual a un cuarto de longitud de onda z=λ/4, es decir, hasta que βz = π/2. La onda incidente ha avanzado ahora 90º con respecto a su posición de fase en la carga, mientras que la onda reflejada se ha atrasado en la misma medida. La tensión de línea es entonces la diferencia aritmética de las tensiones de las dos ondas. A medida que la distancia a la carga aumenta por encima de un cuarto de onda, la fase de la onda incidente continúa avanzando, mientras que la de la onda reflejada continúa retrasándose. Como consecuencia, las fases respectivas de las tensiones se van apartando, de la condición de oposición de fase que existe en el punto de cuarto de onda., y aparece una resultante cuya amplitud va aumentando al aumentar la distancia.

Esta tendencia continúa hasta que la distancia a la carga es igual a una media longitud de onda z = λ/2 (es decir βz = π) ; en este punto las fase de las dos ondas están en la misma posición relativa de fase que tenían en la carga, de modo que las tensiones se suman aritméticamente y dan como resultado el doble de la tensión incidente. A distancias mayores que media longitud de onda, el ciclo comienza a repetirse.

9.2. TEOREMA DEL COSENO

El teorema del coseno puede considerarse como la generalización del teorema de Pitágoras y consiste en hacer la proyección de uno de los vectores hasta formar un triángulo rectángulo, a fin de aplicar Pitágoras como ilustra el gráfico.

$$E_T = \sqrt{\left(E_i + E_r \cos\theta_\Gamma\right)^2 + \left(E_r \operatorname{sen}\theta_\Gamma\right)^2}$$

$$E_T = \sqrt{E_i^{\,2} + 2\,E_i\,E_r \cos\theta_\Gamma + E_r^{\,2}\cos^2\theta_\Gamma + E_r^{\,2}\operatorname{sen}^2\theta_\Gamma}$$

$$E_T = \sqrt{E_i^{\,2} + 2\,E_i\,E_r \cos\theta_\Gamma + E_r^{\,2}\left(\cos^2\theta_\Gamma + \operatorname{sen}^2\theta_\Gamma\right)}$$

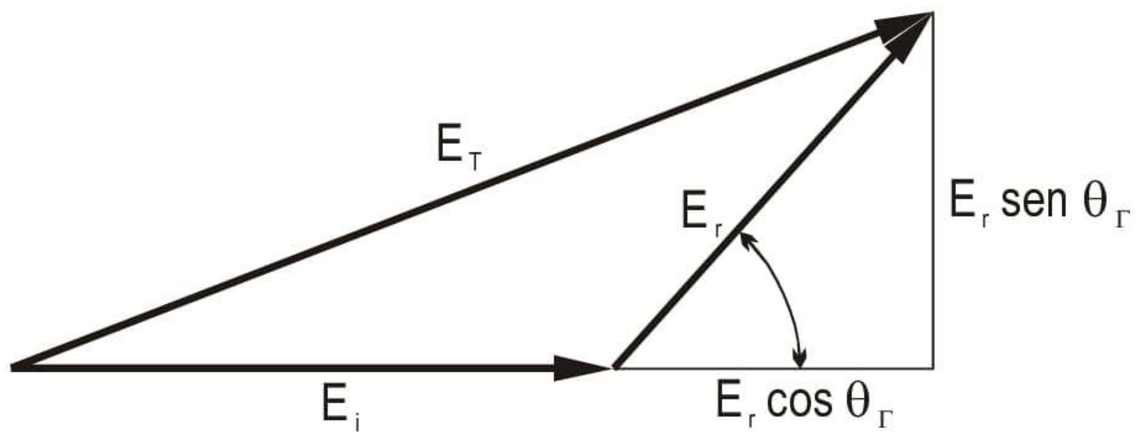


FIGURA 9-2

Recordando que $\cos^2\theta_r + \operatorname{sen}^2\theta_r = 1$

$$E_T = \sqrt{Ei^2 + Er^2 + 2.Ei.Er.\cos.(\theta_\Gamma)}$$

Para el caso que plantearemos en el diagrama de Crank que el vector reflejado gira $2\beta z = \theta_z$ el teorema del coseno lo expresamos:

$$E_T = \sqrt{Ei^2 + Er^2 + 2.Ei.Er.\cos.(\theta_\Gamma - \theta_z)}$$

9.3. DIAGRAMA DE CRANK

Debido a lo complicado del cálculo de distribución de campo, analizado al comenzar el capítulo, Crank propone un cálculo gráfico donde en lugar de girar un vector βz hacia la derecha y el otro βz hacia la izquierda, el vector incidente Ei es arbitrariamente mantenido estacionario, de manera que para mantener las verdaderas posiciones de fase relativas entre Ei y Er, el vector Er debe ser rotado dos veces el ángulo βz en sentido horario.

Para construir el diagrama se traza en un punto "A" un vector horizontal de longitud arbitraria "AB" para representar el vector de campo incidente Ei. A partir del extremo "B" de Ei se traza un vector que representa Er "BC", teniendo en cuenta el módulo y argumento del coeficiente de reflexión.

En el punto de unión de Ei y Er , “B”, se traza un circulo de radio Ei, el cual representará el circulo de módulo de coeficiente de reflexión igual a la unidad y desde el mismo punto se traza otro circulo de radio igual a Er que serán los puntos del módulo de coeficiente de reflexión del problema a resolver.

Para calcular el valor total del campo en la carga o en la superficie de frontera, trazar un vector desde el extremo de Er, “C” y el extremo de Ei, “A”, ese vector es el campo Total Et.

Gráficamente podemos calcular el valor de Et por regla de tres simple. Si Ei mide 4 cm. y vale 100 V/m, Et mide 5,5 centímetros, entonces vale 137,5 V/m.

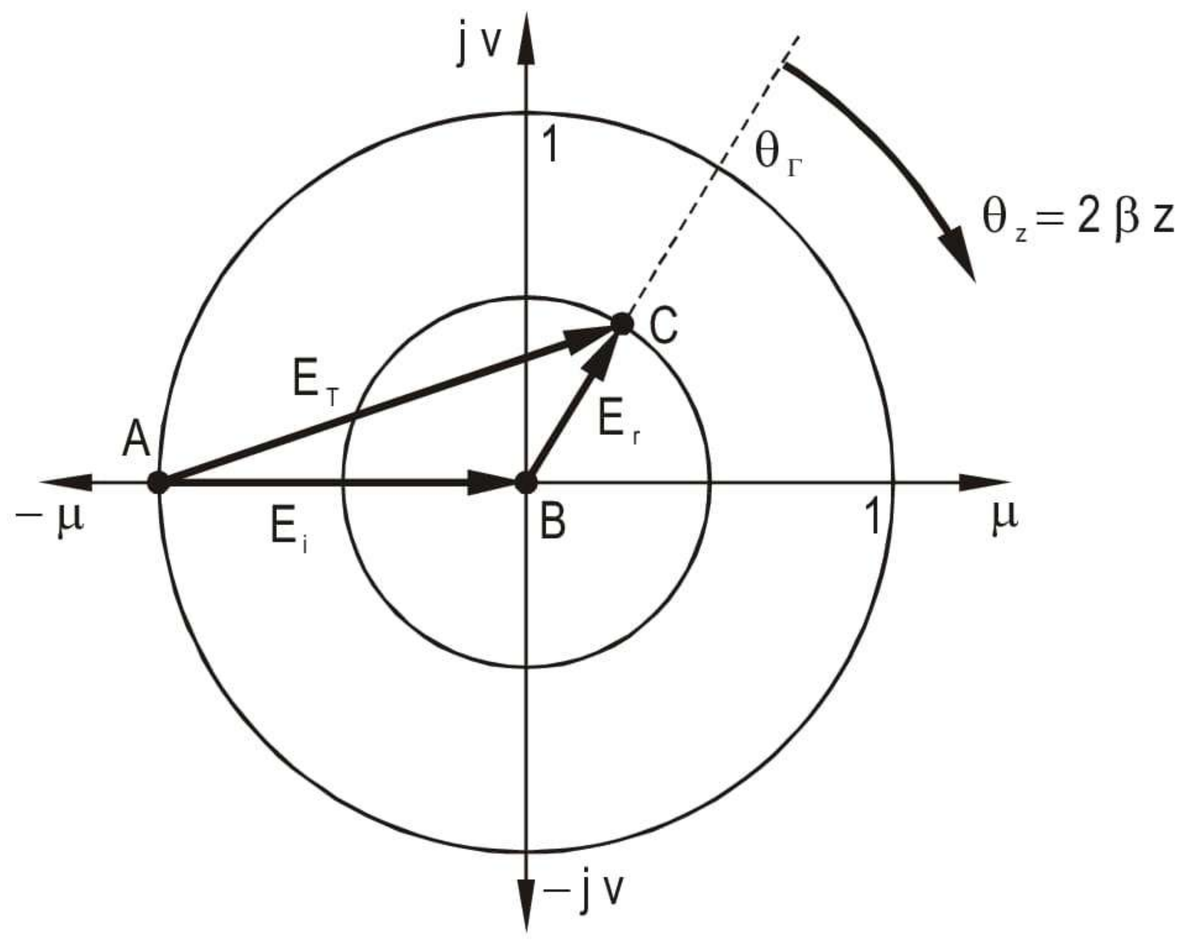
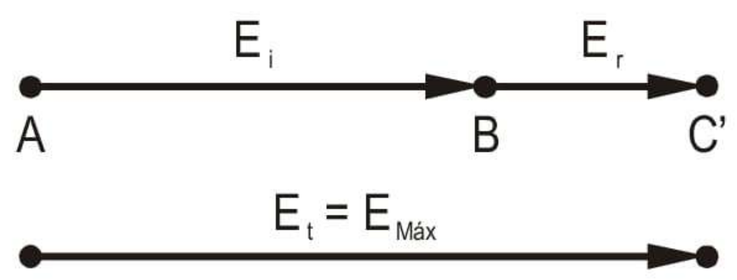


FIGURA 9-3

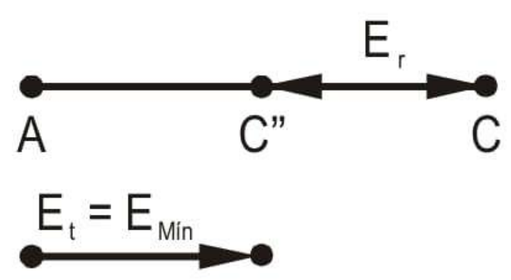
Observamos a partir del Diagrama que un máximo en el valor de Et ocurre cuando Ei y Er se suman directamente, y un mínimo ocurre cuando Er se resta con Ei.

Por lo tanto definimos:

[Emáx] = [Ei]+[Er]



[Emín]= [Ei]-[Er]



9.3.1. Relación de onda estacionaria

La Relación de Onda Estacionaria (R.O.E.) puede ser expresada como:

$$R.O.E. = \rho = \frac{Emax}{Emin} = \frac{Ei + Er}{Ei - Er} = \frac{1 + [\Gamma]}{1 - [\Gamma]}$$

Los valores de R.O.E. van de 1 a infinito.

9.3.2. Procedimiento de cálculo de la distribución de campo

Para entender el procedimiento lo haremos basándonos en un ejercicio.

Problema 09.04.61

Trazar el modelo de onda estacionaria del campo eléctrico o distribución del campo eléctrico por medio del diagrama de Crank. Calcular la R.O.E.

Datos:

$\eta_1 = 377\ [\ \Omega\ ]$

$\eta_2 = (188{,}5+j188{,}5)\ [\Omega\ ]$

Ei = 100 [V/m]

F= 3.10^8 [Hz]

Calculamos el coeficiente de reflexión, con lo cual sabremos el valor de Er

$$\Gamma_E = \frac{Er}{Ei} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad \Gamma_E = \frac{188.5 + j188.5 - 377}{188.5 + j188.5 + 377} = 0.447 e^{j116.56}$$

$$Er = \Gamma_E . Ei = 0.447 e^{j116.56} .100 = 44.7 e^{j116.56} [V/m]$$

Conociendo Ei y Er podemos calcular Emáx y Emín y con estos datos la Relación de Onda Estacionaria.

Emáx= [Ei]+[Er] = 100+44.72=144.72 [V/m]

Emín= [Ei]-[Er] = 100-44.72=55.27 [V/m]

$$R.O.E. = \rho = \frac{Emax}{Emin} = \frac{144.72}{55.27} = 2.618$$

Para calcular el campo total en la superficie de frontera, lo podemos hacer por medio gráfico o por la aplicación del teorema del coseno.

$$E_T = \sqrt{\mathrm{Ei}^2 + \mathrm{Er}^2 + 2.\mathrm{Ei} \cdot \mathrm{Er} \cdot \cos(\theta_\Gamma)}$$

$$E_T = \sqrt{(100)^2 + (44,72)^2 + 2.100.44,72.\cos.(116,56)} = 89,44 \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Una vez que hemos calculado el campo total trazamos este vector en el plano de propagación de la onda.

El valor obtenido de campo total Et, corresponde al punto de la superficie de frontera si se trata de dos medios en el espacio libre o a la carga si hablamos de una línea de transmisión.

Si queremos saber el campo total a λ /16 de la carga o de la superficie de frontera, debemos recordar la relación: $\theta z = 2\beta z$

$$\theta z = 2\frac{2\pi}{\lambda}.\frac{\lambda}{16} = \frac{\pi}{4} = 45°$$

Es decir que un movimiento de λ/16 en el plano de propagación de la onda equivale a un giro de 45 grados en el diagrama de Crank con lo que podemos ver el vector Er ahora se encuentra a 71,57º. Debemos recordar que desde el ángulo calculado del coeficiente de reflexión el giro debe ser siempre en sentido horario.

$$E_T = \sqrt{Ei^2 + Er^2 + 2.Ei.Er.\cos.(\theta_\Gamma - \theta_z)} \qquad \theta_\Gamma - \theta z = 116.,565° - 45° = 71,57°$$

Desde esta nueva posición de Er, trazamos el nuevo vector Et cuyo valor lo podemos calcular mediante:

$$E_T = \sqrt{(100)^2 + (44,72)^2 + 2.100.44,72.\cos.(71,57°)} = 121,77 \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Esta equivalencia entre rotación (θz) y el desplazamiento en el espacio (Z) permite obtener un modelo de onda estacionaria.

Para λ /8 deberemos operar:

$$E_T = \sqrt{(100)^2 + (44,72)^2 + 2.100.44,72.\cos.(26,57°)} = 141,42 \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Para 3λ /16 deberemos operar:

$$E_T = \sqrt{(100)^2 + (44,72)^2 + 2.100.44,72.\cos.(-18,43°)} = 143,13 \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Para λ /4 deberemos operar:

$$E_T = \sqrt{(100)^2 + (44,72)^2 + 2.100.44,72.\cos.(-63,43°)} = 126,49 \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

9.3.3. Cálculo de la distancia al máximo

Partimos desde el ángulo del coeficiente de reflexión (en nuestro caso 116,56º) y calculamos cuantos grados en sentido horario tenemos que girar hasta que el vector reflejado quede en la misma dirección que el vector incidente, como viéramos anteriormente los módulos se suman y tendremos el valor

máximo de tensión o de campo. La condición descripta se dá cuando giramos 116,56º. Por lo tanto θmáx=116,56º

La distancia en longitud de onda la calculamos con la expresión $\theta z = 2\beta z$.

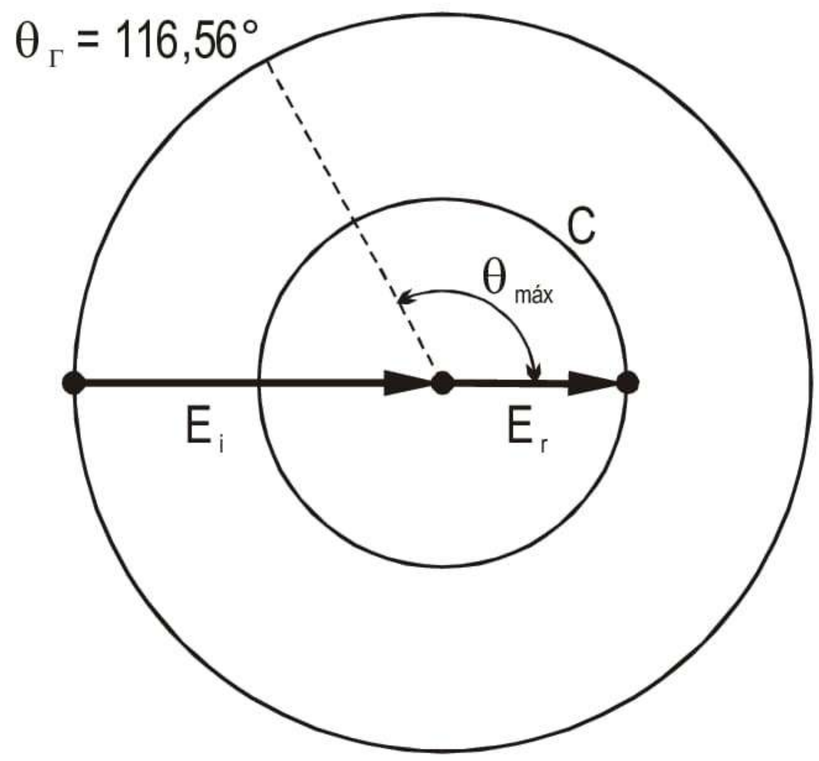


FIGURA 9-4

$$z_{max} = \frac{\theta z}{2.\beta} = \frac{116{,}56°}{2.\frac{2.\pi}{\lambda}} = \frac{116{,}56°}{2.\frac{2.180°}{\lambda}} = 0{,}1618\lambda$$

9.3.4. Cálculo de la distancia al mínimo

Partimos desde el ángulo del coeficiente de reflexión (en nuestro caso 116,56º) y calculamos cuantos grados en sentido horario tenemos que girar hasta que el vector reflejado quede en sentido opuesto al vector incidente, como viéramos anteriormente los módulos se restan y tendremos el valor mínimo de tensión o de campo. La condición descripta se dá cuando giramos 116,56º+180º=296,56. Por lo tanto θmín=296,56º

La distancia en longitud de onda la calculamos con la expresión $\theta z = 2\beta z$.

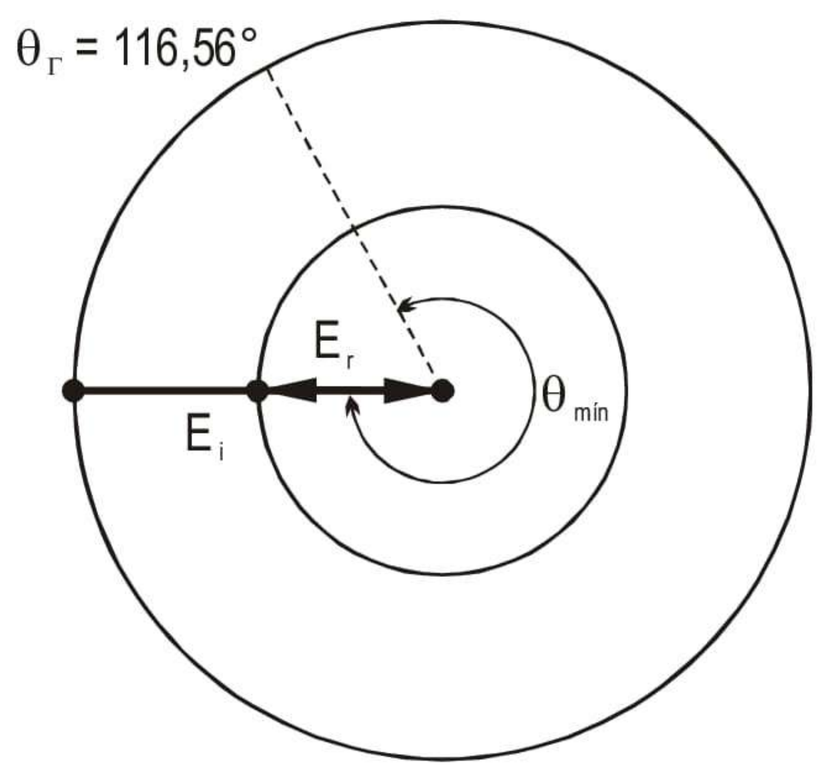


FIGURA 9-5

$$z_{min} = \frac{\theta z}{2.\beta} = \frac{296{,}56°}{2.\frac{2.\pi}{\lambda}} = \frac{296{,}56°}{2.\frac{2.180°}{\lambda}} = 0{,}4118\lambda$$

Datos para el diagrama de Crank

$\text{Einc.} = 100 \left[\frac{V}{m}\right]$ $\quad$ $\text{F} = 300 \ [Mhz]$ $\quad$ $\text{Eref.} = 44{,}721 \left[\frac{V}{m}\right]$

$\text{Long.} = 1 \ [m]$ $\quad$ $\text{Cte. De Fase} = 360$ $\quad$ $\text{Emáx} = 144{,}721 \left[\frac{V}{m}\right]$

$\text{Emín} = 55{,}279 \left[\frac{V}{m}\right]$

Impedancia Característica

$R_0 = 377$ $\quad$ $X_0 = 0$

Inpedancia de Carga

$R_r = 188{,}5$ $\quad$ $X_r = 188{,}5$

Coeficiente de Reflexión

$\text{Mod} = 0{,}4472$

$\text{Arg} = 116{,}565°$

Distancia al Máximo

$\theta\,\text{máx} = 116{,}565°$ $\quad$ $\text{Zmáx} = 0{,}161896$

Distancia al Mínimo

$\theta\,\text{mín} = 296{,}565°$ $\quad$ $\text{Zmín} = 0{,}411896$

Relación Onda Estacionaria

$R.O.E. = 2{,}618$

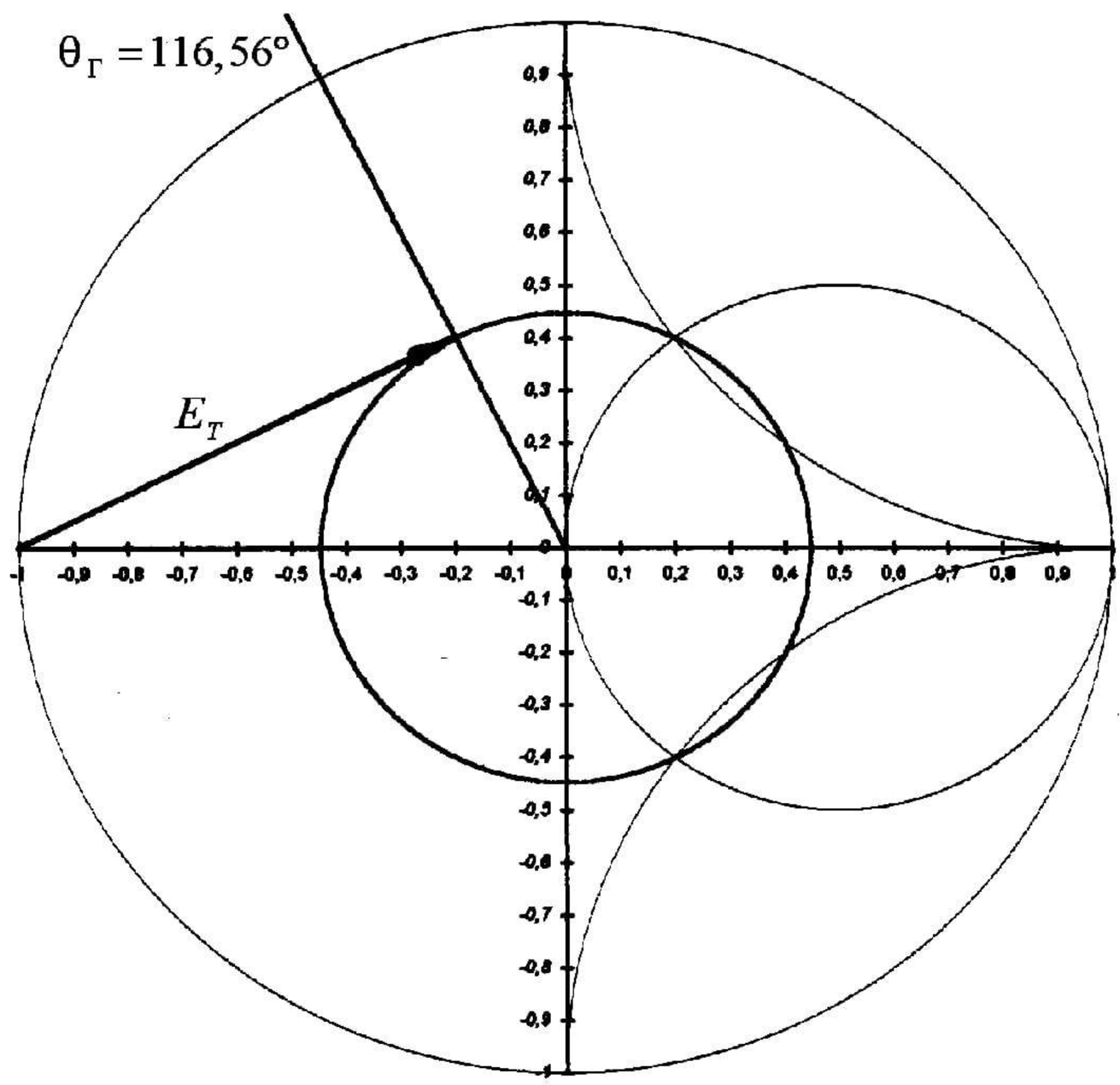


FIGURA 9-6

z	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{7\lambda}{16}$	$\frac{3\lambda}{8}$	$\frac{5\lambda}{16}$	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{3\lambda}{16}$	$\frac{\lambda}{8}$	$\frac{\lambda}{16}$	0
$\theta_\Gamma - \theta z$	116,57	161,57	–156,43	–108,43	–63,43	–18,43	26,57	71,57	116,57
Et	89,44	59,29	63,25	95,77	126,49	143,13	141,42	121,77	89,44

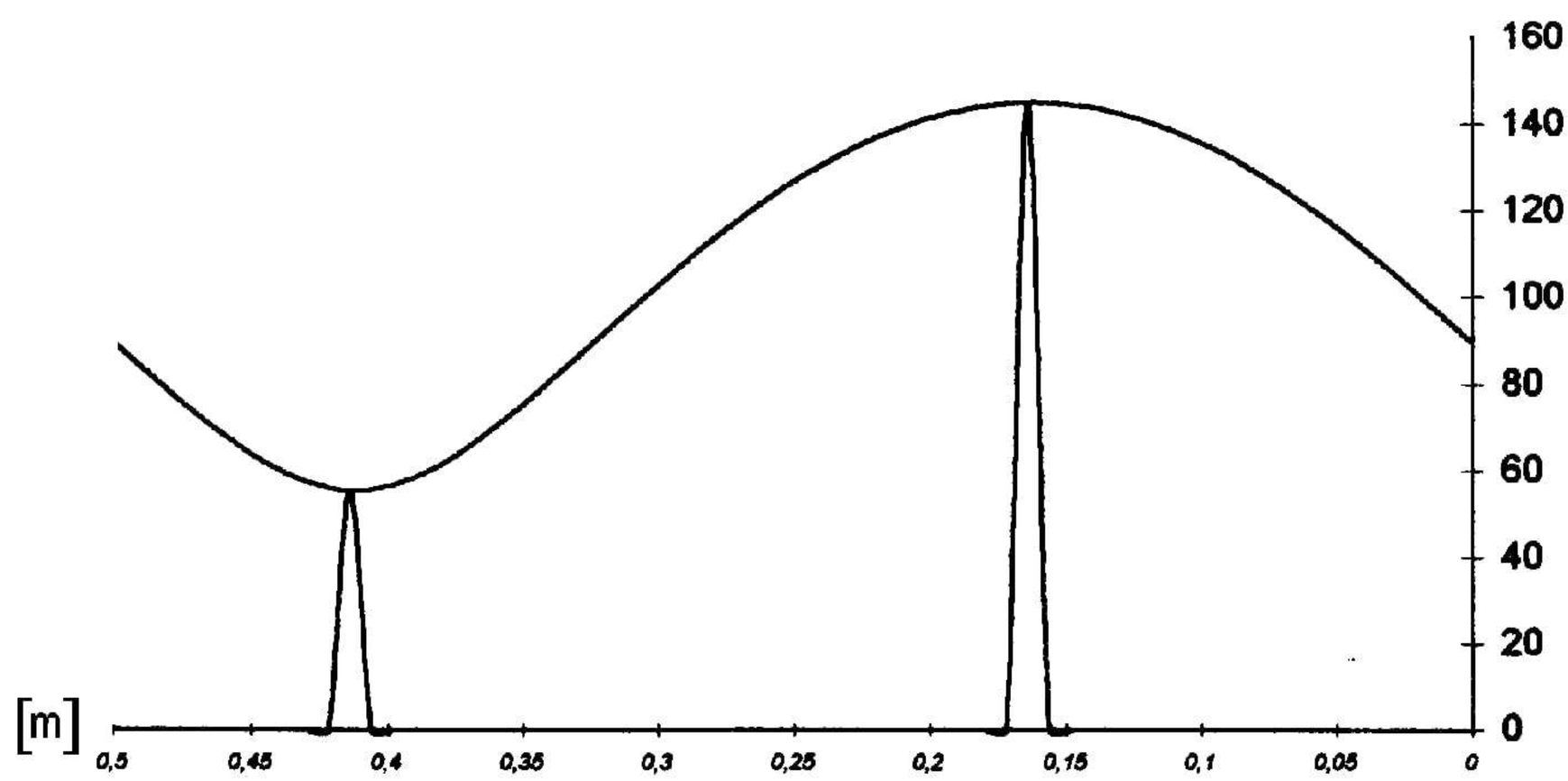


FIGURA 9-7

Datos del Problema 09.04.61 (c)

Impedancia Característica

$R_0 = 377$ $\qquad$ $X_0 = 0$

Impedancia de Carga

$R_r = 377$ $\qquad$ $X_r = -377$

Coeficiente de Reflexión

$\text{Mod} = 0,4472$

$\text{Arg} = -63,435$

$\text{Einc.} = 150 \left[\frac{V}{m}\right]$ $\qquad$ $\text{F} = 200 \ [Mhz]$ $\qquad$ $\text{Eref.} = 67,082 \left[\frac{V}{m}\right]$

$\text{Long.} = 1,5 \ [m]$ $\qquad$ $\text{Cte. De Fase} = 240$ $\qquad$ $\text{Emáx} = 217,082 \left[\frac{V}{m}\right]$ $\qquad$ $\text{Emín} = 82,918 \left[\frac{V}{m}\right]$

Distancia al Máximo

$\theta\,\text{máx} = 296,56^{\circ}$ $\qquad$ $\text{Zmáx} = 0,617844$

Distancia al Mïnimo

$\theta\,\text{mín} = 116,565^{\circ}$ $\qquad$ $\text{Zmín} = 0,242844$

Relación Onda Estacionaria

$R.O.E. = 2,618$

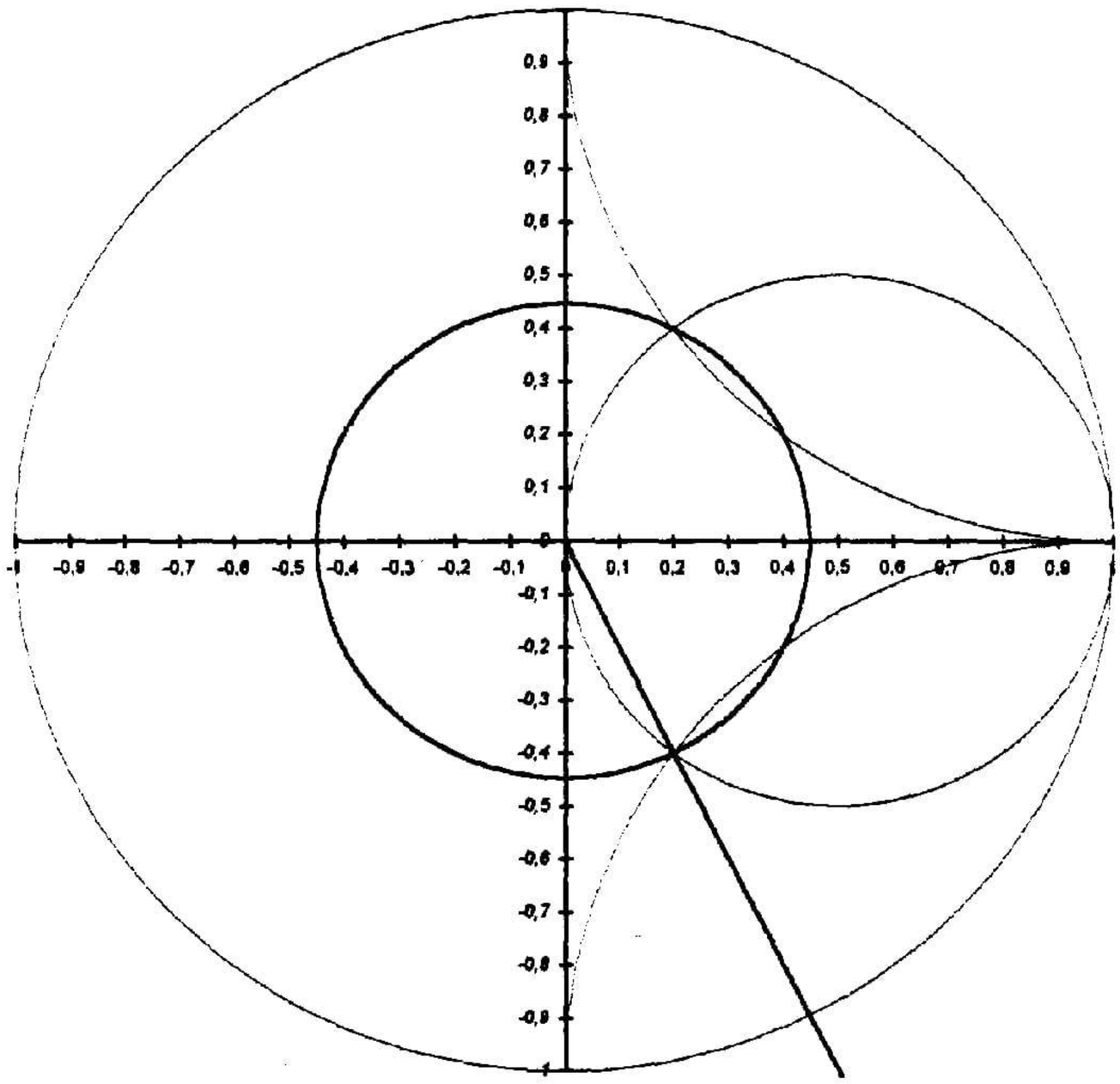


FIGURA 9-8

Z	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{7\lambda}{16}$	$\frac{3\lambda}{8}$	$\frac{5\lambda}{16}$	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{3\lambda}{16}$	$\frac{\lambda}{8}$	$\frac{\lambda}{16}$	0
r – z	-63,43	–18,43	26,57	71,57	116,57	161,57	–153,43	–108,43	–63,43
Et	189,74	214,69	212,13	182,66	134,16	88,93	94,87	143,65	189,74

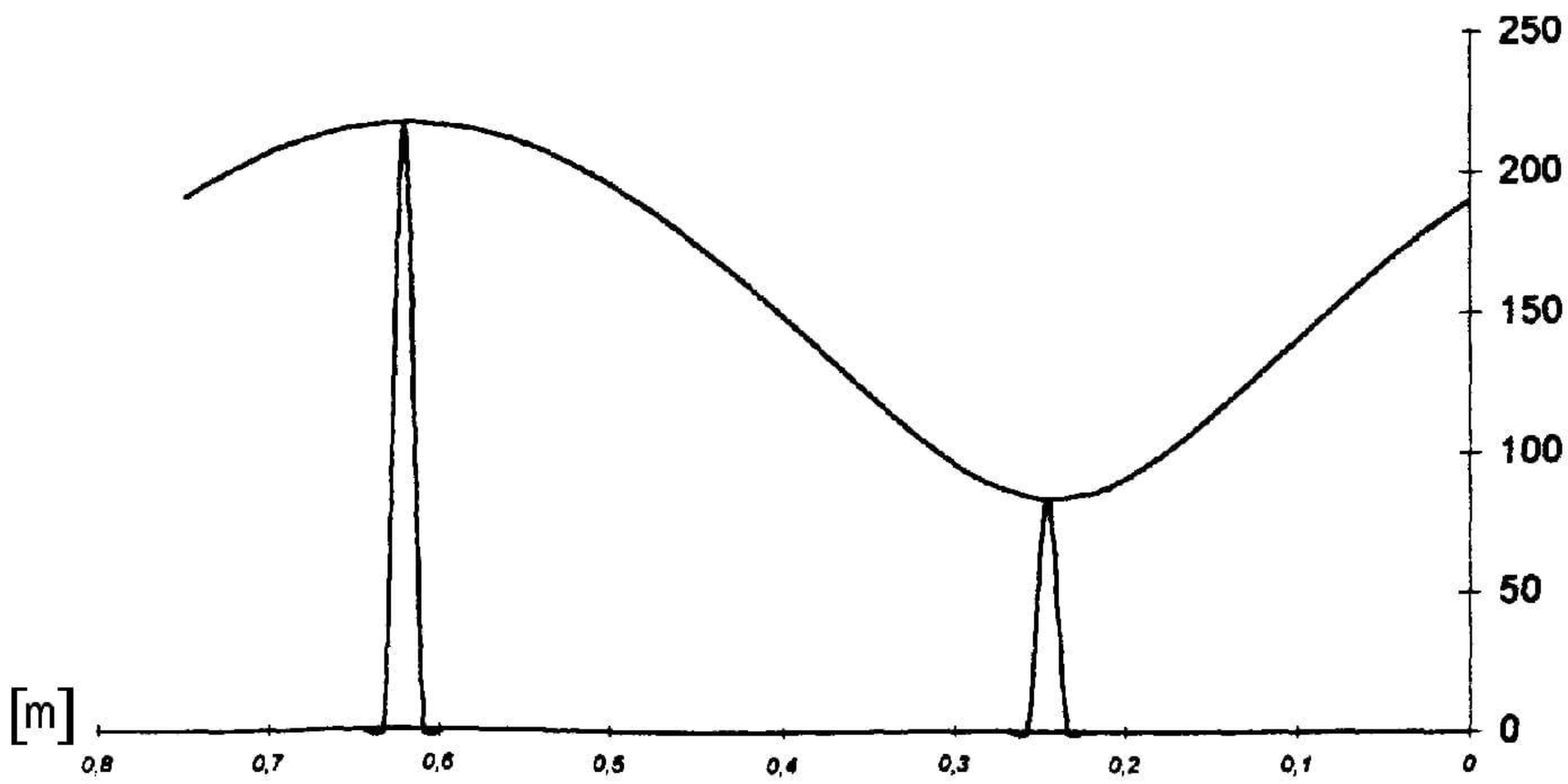


FIGURA 9-9

DIAGRAMA DE CRANK

PRACTICO Nº. 09.04.61 (c)

ALUMNO: . . . . . .

CURSO: . . . . . .

OBJETIVO: Conocer la "Distribucion del Campo Total" en un medio con reflexiones

Diseñado por: Ing. Antonio Miguel GARCIA ABAD

$\eta_1 =$ 377 + j 0	$\eta_2 =$ 377 – j 377

$E_i =$ 150 [V/m]	$\Gamma_E =$ 0,4472 $\angle -63{,}43$	$E_r =$ 67,08 $\angle -63{,}43$

Frec. : 200 [Mhz]

λ: 1,5 [m]

β: 240 [°/m]

DIST. AL MAXIMO

θ_{ZM}: 296,56

Z_M: 0,617

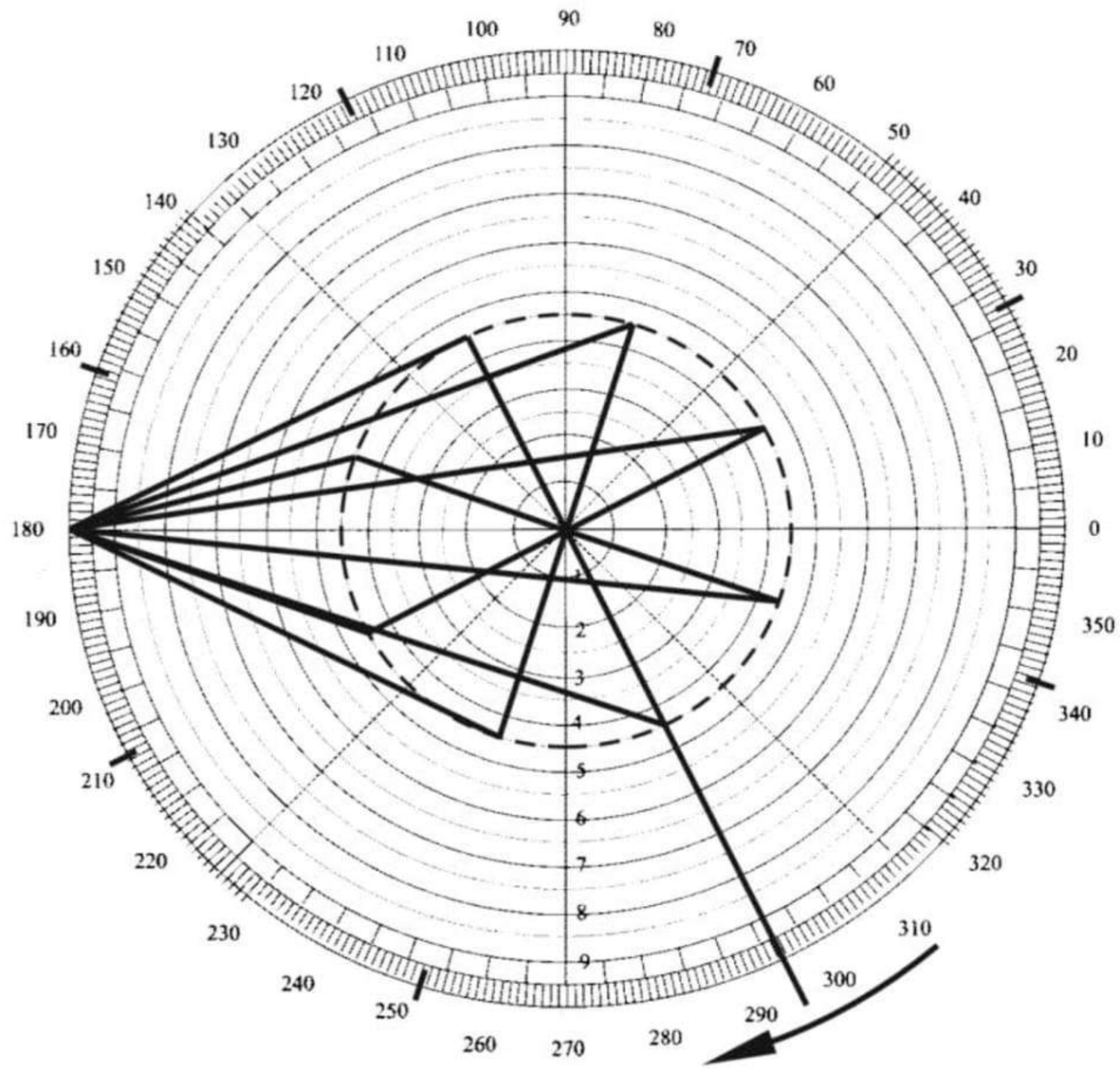
DIST. AL MINIMO

θ_{Zm}: 116,56

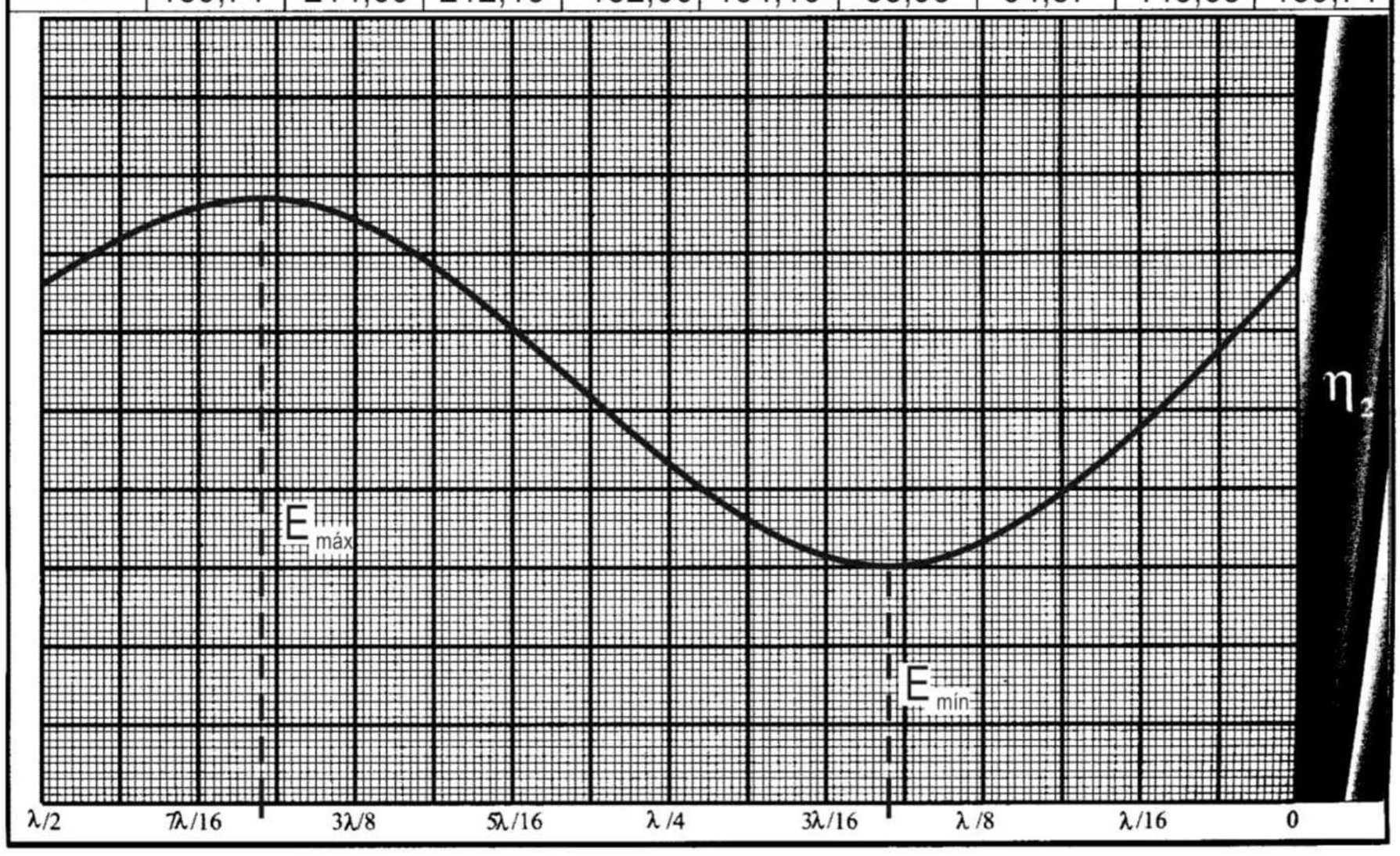
Z_m: 0,242

RELAC. ONDA ESTAC.

R.O.E: 2,618



Z	λ/2	7λ/16	3λ/8	5λ/16	λ/4	3λ/16	λ/8	λ/16	0
$\theta_r - \theta_z$	– 63,43	– 18,43	26,57	71,57	116,57	161,57	– 153,43	– 108,43	– 63,43
E_T	189,74	214,69	212,13	182,66	134,16	88,93	94,87	143,65	189,74



9.4. CONSTRUCCIÓN DEL ÁBACO DE SMITH

Para trazar el Abaco de Smith tomando como referencia los ejes coordenados *u* y *jv* del Diagrama de Crank, debemos cumplir con dos condiciones:

1) Trabajar con líneas de transmisión con pérdidas nulas, o medios con atenuación nula ($\alpha = 0$) .

2) Trabajar con impedancias normalizadas.

Impedancia normalizada es aquella que se divide por un valor de impedancia tomado como referencia, en nuestro caso Zo o η_1 .

Tomaremos un ejemplo con una línea de transmisión con impedancia característica Zo, terminada en una impedancia de carga Zr, pero es exactamente igual a considerar un medio con impedancia intrínseca η_1 y otro medio de impedancia intrínseca η_2 ,separadas por la superficie de frontera S.F.

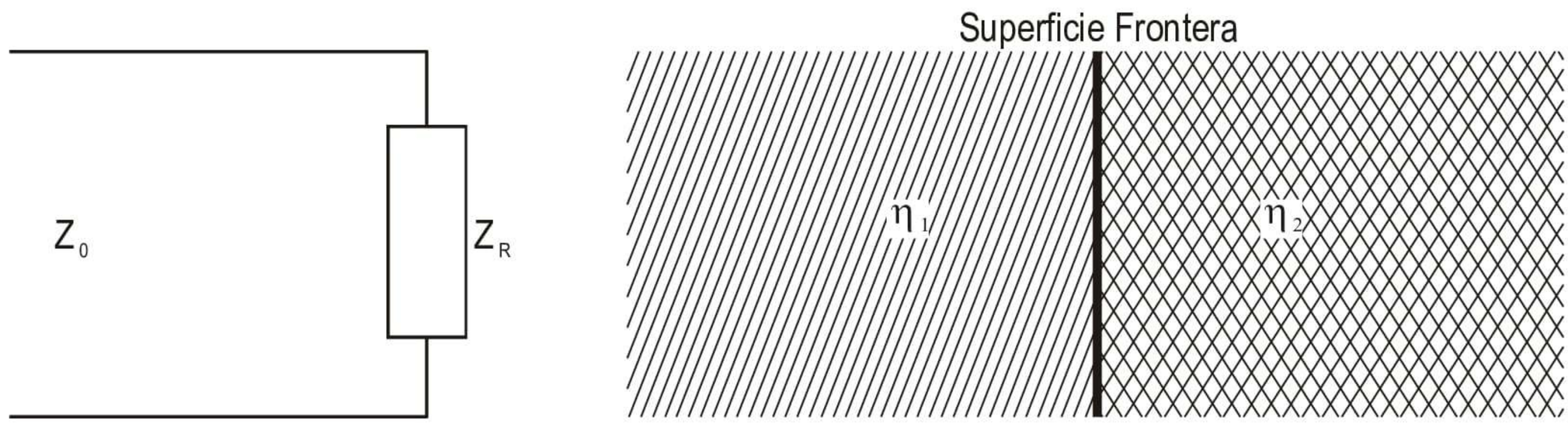


FIGURA 9-10

Por 7-9 del coeficiente de reflexión del campo eléctrico es

$$\Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\Gamma_E \eta_2 + \Gamma_E \eta_1 = \eta_2 - \eta_1$$

$$\eta_1 (1 + \Gamma_E) = \eta_2 (1 - \Gamma_E)$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1 + \Gamma_E}{1 - \Gamma_E}$$

Impedancia normalizada de carga z_n expresada en forma compleja:

$$z_n = \frac{Zr}{Zo} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1 + \Gamma_E}{1 - \Gamma_E} = r + jx$$

Coeficiente de reflexión Γ_E expresado en forma polar y forma compleja:

$$\Gamma_E = [\Gamma_E] e^{j\theta_{\Gamma E}} = u + jv$$

Podemos observar que u y jv son los ejes coordenados sobre los cuales construiremos el Abaco de Smith.

Recordando la expresión del coeficiente de reflexión en función de las impedancias, encontraremos z_n en función del coeficiente de reflexión Γ_E :

$$\Gamma_E = \frac{Er}{Ei} = \frac{Z_r - Z_o}{Z_r + Z_o} = \frac{\frac{1}{Z_o}\left(\frac{Z_r}{Z_o} - 1\right)}{\frac{1}{Z_o}\left(\frac{Z_r}{Z_o} + 1\right)} = \frac{z_n - 1}{z_n + 1}$$

$$(z_n + 1)\Gamma_E = z_n - 1 \qquad z_n\Gamma_E + \Gamma_E = z_n + 1$$

$$1 + \Gamma_E = z_n - z_n\Gamma_E \qquad 1 + \Gamma_E = z_n(1 - \Gamma_E)$$

Finalmente la expresión de z_n queda:

$$z_n = \frac{1+\Gamma_E}{1-\Gamma_E}$$

y como

$$\Gamma_E = u + jv = \left[\Gamma_E\right]^{\underline{|\theta\Gamma_E}}$$

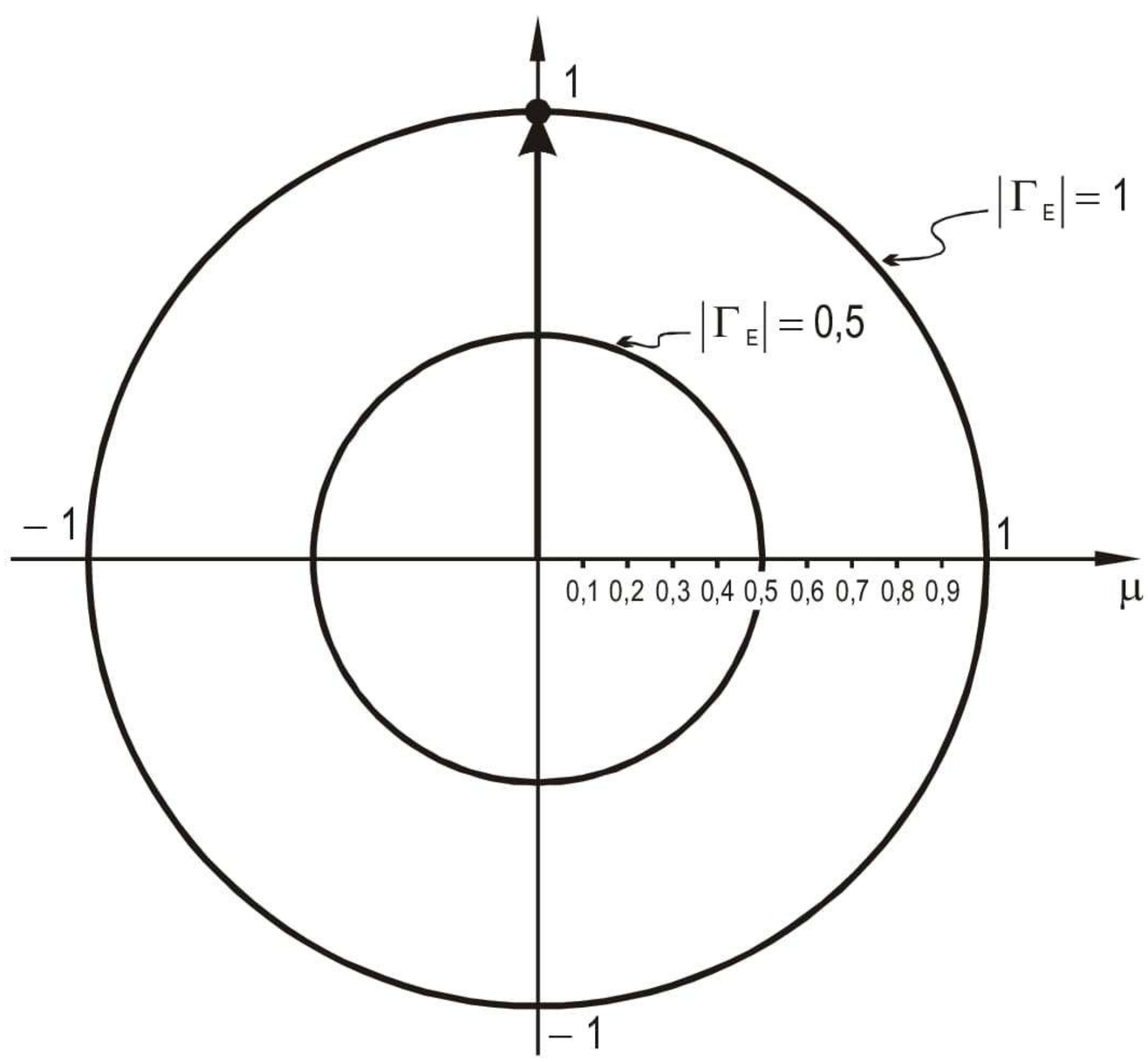


FIGURA 9-11: Diagrama de módulo del coeficiente de reflexión constante.

Podemos expresar:

$$zn = \frac{(1+\Gamma_E)}{(1-\Gamma_E)} = \frac{(1+u+jv)}{(1-u-jv)}$$

Para eliminar el complejo del denominador, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$zn = r + jx = \frac{(1+u+jv)(1-u+jv)}{(1-u-jv)(1-u+jv)} = \frac{1-u+jv+u-u^2+jvu+jv-jvu-v^2}{1-u+jv-u+u^2-jvu-jv+jvu+v^2}$$

Simplificando los términos que se anulan, obtenemos:

$$r + jx = \frac{1-u^2-v^2+2jv}{(1-u)^2+v^2}$$

Separamos la expresión anterior en parte real e imaginaria de la impedancia normalizada:

Parte Real	Parte Imaginaria
$r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}$	$jx = \frac{j2v}{(1-u)^2+v^2}$

Donde la parte real de z_n es la resistencia normalizada (r) y la parte imaginaria de z_n es la reactancia normalizada (x).

A estas dos últimas ecuaciones las trabajaremos para transformarlas en ecuaciones de circunferencia, las que nos van a permitir trazar la familia de curvas de parte real e imaginaria de la impedancia normalizada y con ellas obtendremos el Abaco de Smith.

9.4.1. Familia de curvas de parte real de la impedancia normalizada constante

Partimos de la ecuación:

$$r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}$$

Operamos para transformarla en ecuación de circunferencia. En primer lugar pasamos el denominador del segundo miembro multiplicando a r en el primer miembro.

$$r\left(1-2u+u^2+v^2\right) = 1-u^2-v^2$$

Anulamos los paréntesis multiplicando el primer miembro por r

$$r-2ur+ru^2+rv^2 = 1-u^2-v^2$$

Pasamos todos los términos al primer miembro:

$$r-2ur+ru^2+rv^2-1+u^2+v^2 = 0$$

Sacamos factor común u^2 y v^2

$$u^2(r+1)+v^2(r+1)-2ur+r-1 = 0$$

Dividimos toda la ecuación en (r +1)

$$u^2 + v^2 - \frac{2ur}{(r+1)} + \frac{r-1}{(r+1)} = 0$$

Haremos un reemplazo teniendo en cuenta que el binomio cuadrado está formado:

$$u^2 - 2u\frac{r}{r+1} + \left(\frac{r}{r+1}\right)^2 = \left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2$$

Para mantener la igualdad y agregar el binomio cuadrado es necesario agregar $-\left(\frac{r}{r+1}\right)^2$

$$u^2 - 2u\frac{r}{r+1} + \left(\frac{r}{r+1}\right)^2 - \left(\frac{r}{r+1}\right)^2 + v^2 + \frac{r-1}{r+1} = 0$$

Ahora reemplazamos por el binomio cuadrado

$$\left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + v^2 - \left(\frac{r}{r+1}\right)^2 + \frac{r-1}{r+1} = 0$$

Pasamos términos para el segundo miembro:

$$\left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + v^2 = \frac{r^2}{(r+1)^2} + \frac{r-1}{r+1} = \frac{1}{(r+1)^2}$$

Obtenemos la ecuación de circunferencia buscada:

$$\left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2$$

Recordando:

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = R^2$$

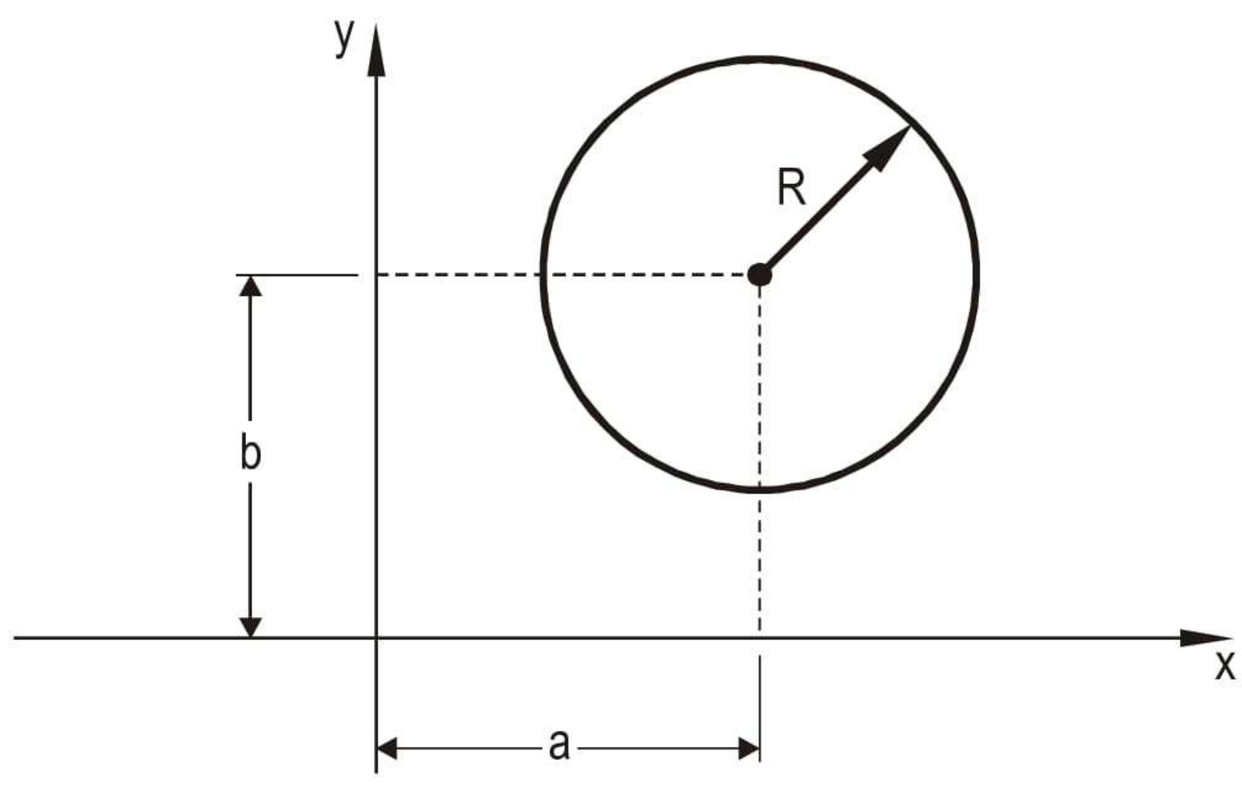


FIGURA 9-12

Teniendo en cuenta que $a = \frac{r}{r+1}$ es la abcisa al origen, b = 0 es la ordenada al origen y el radio $R = \frac{1}{r+1}$ construiremos una tabla en donde daremos valores a r y obtendremos los respectivos valores de a y R.

r	a	b	R
0	0	0	1
1	1/2	0	1/2
2	2/3	0	1/3
0,5	1/3	0	2/3
∞	1	0	0

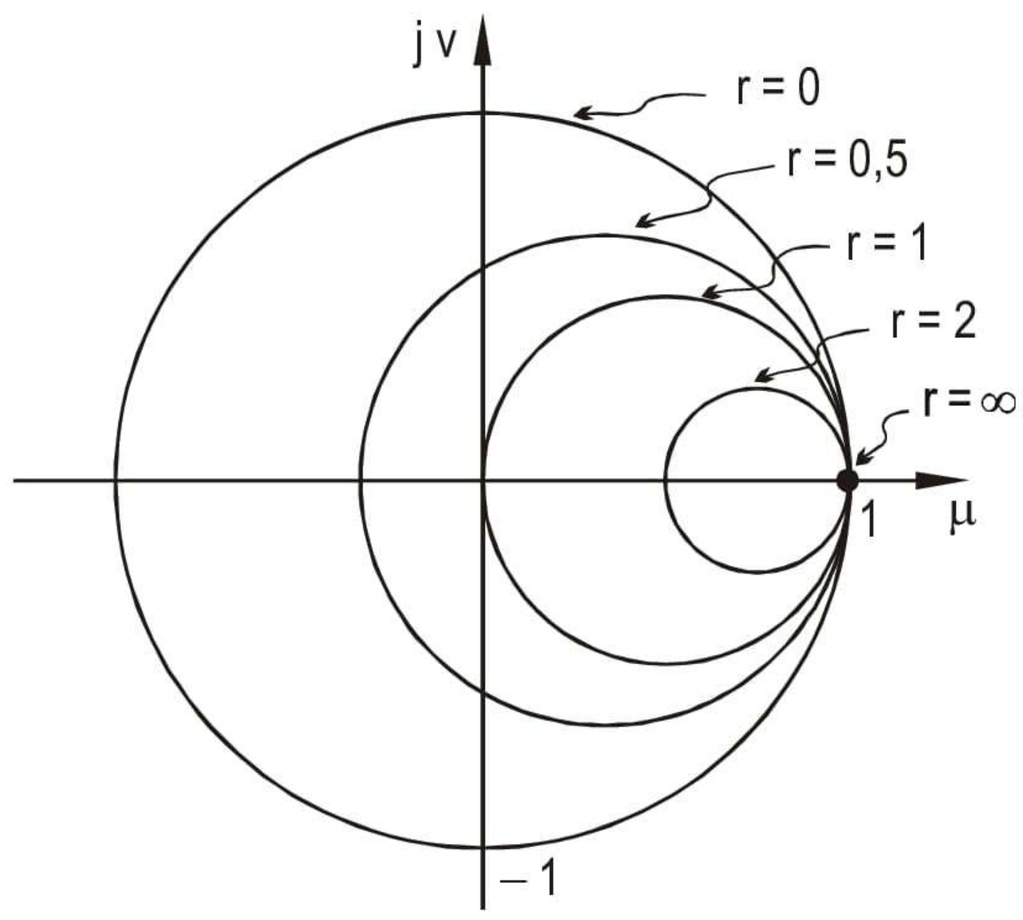


FIGURA 9-13: Diagrama de parte real de la impedancia normalizada constante.

9.4.2. Familia de curvas de parte imaginaria de la impedancia normalizada constante

Partimos de la ecuación:

$$jx = \frac{j2v}{(1-u)^2 + v^2}$$

$$x\left((1-u)^2 + v^2\right) = 2v$$

Pasamos todos los términos al primer miembro:

Dividimos toda la expresión en x

$$1 - 2u + u^2 + v^2 - \frac{2v}{x} = 0$$

Haremos un reemplazo teniendo en cuenta que el binomio cuadrado está formado:

$$v^2 - \frac{2v}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(v - \frac{1}{x}\right)^2$$

Por lo tanto vemos que está faltando el término $(1/x)^2$, el cual lo agregamos en el segundo miembro.

$$1 - 2u + u^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

Operando para convertir en binomio cuadrado el otro término del primer miembro, obtenemos la ecuación de circunferencia buscada:

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

x	**a**	**b**	**R**
0	1	∞	∞
0,5	1	2	2
–0,5	1	–2	2
1	1	1	1
–1	1	–1	1
2	1	0,5	0,5
–2	1	–0,5	0,5
∞	1	0	0

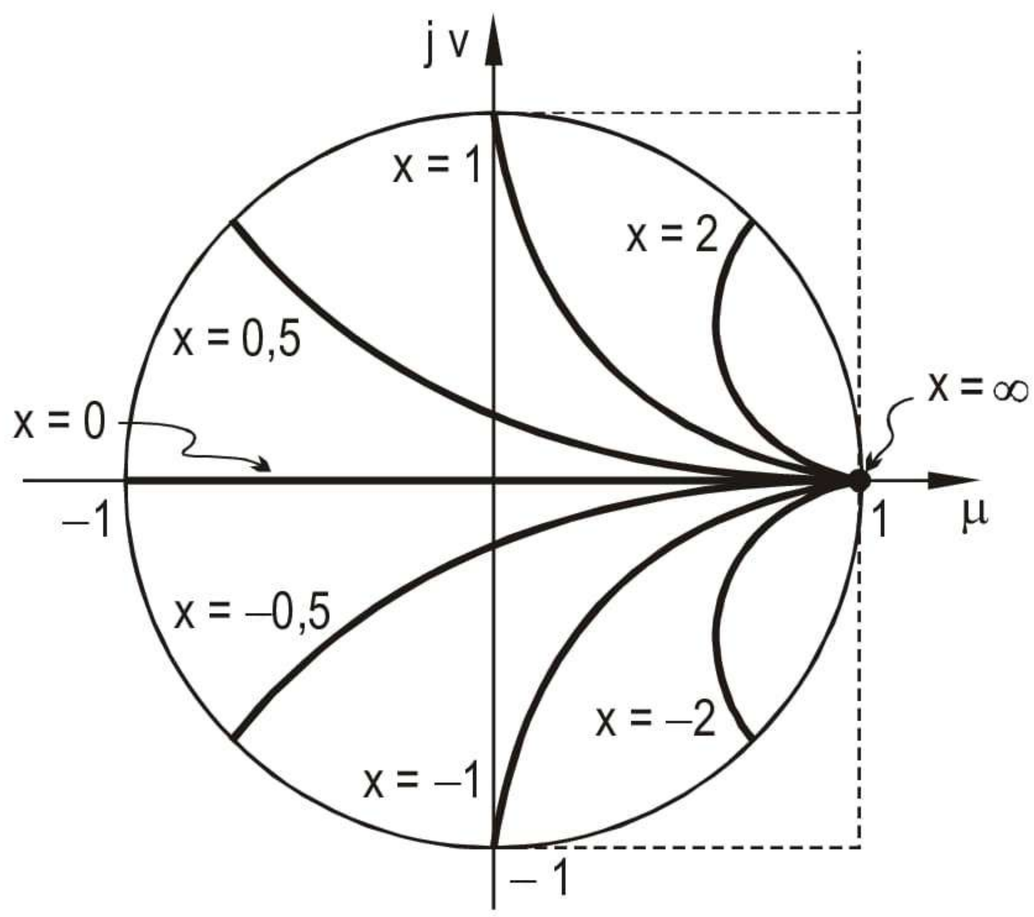


FIGURA 9-14: Diagrama de parte imaginaria de la impedancia normalizada constante.

9.5. ÁBACO DE SMITH

Diferentes compañías publican Diagrama de Smith, los cuales vienen impresos en hoja de papel o presentados en forma de regla de cálculo circular de material plástico, con un aditamento en forma de regleta transparente (rotable alrededor del centro del diagrama) y dotada a su vez de un cursor deslizable. Uniendo la fig.9-13 y 9-14 obtenemos el Ábaco de Smith.

Una de las varias ventajas importantes de la Carta de Smith es que, dentro de un contorno circular que rodea a un área finita del plano del coeficiente de reflexión, presenta una información completa que relaciona todos los valores posibles de impedancias normalizadas, coeficientes de reflexión y datos de patrones de onda estacionaria para todos los circuitos de líneas de transmisión que utilizan impedancias pasivas conectadas.

Los diagramas impresos en papel vienen además acompañados de tres escalas circulares y ocho escalas graduadas de longitudes iguales al radio del diagrama para facilitar una serie de datos relativos al problema que se está estudiando.

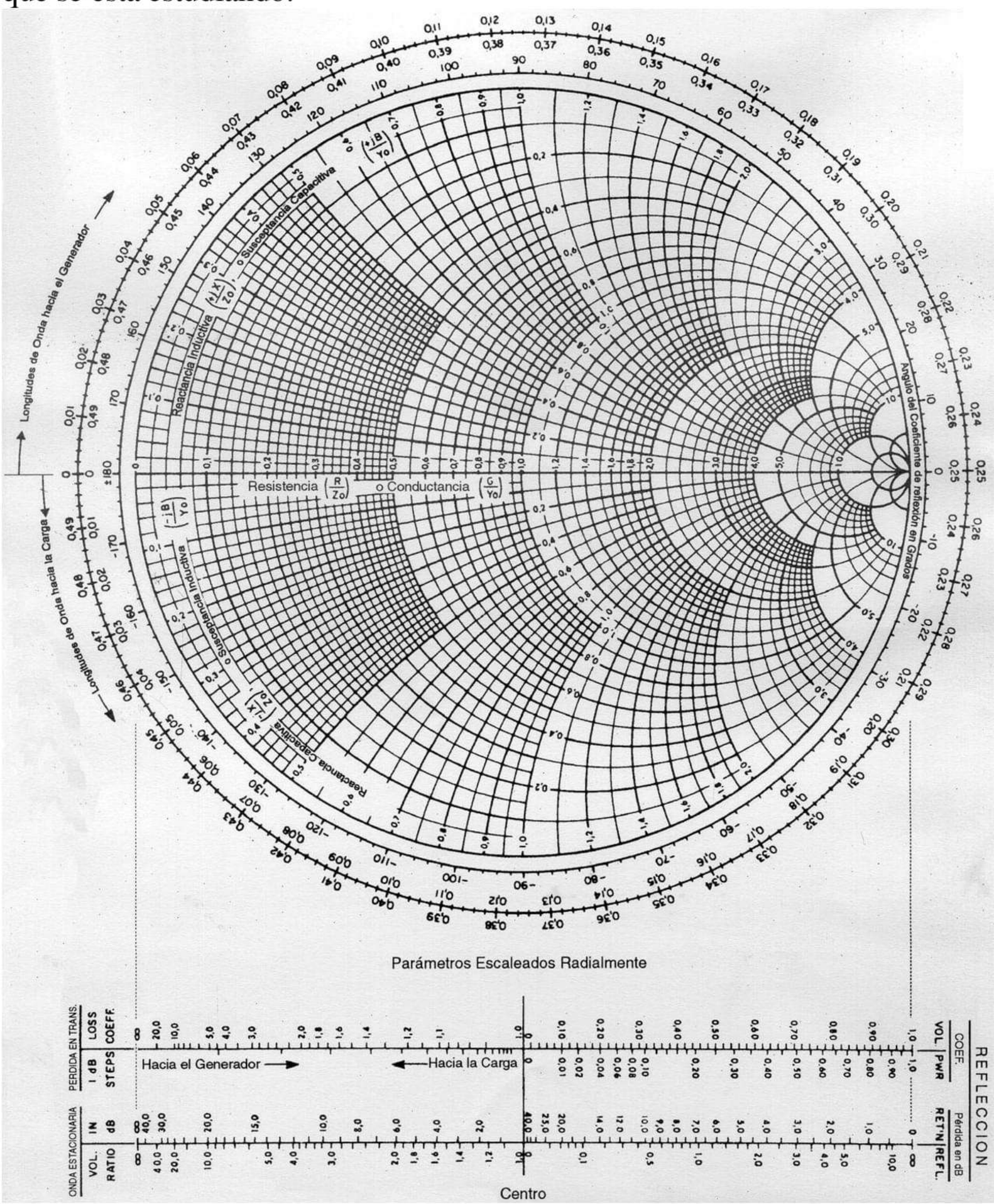


FIGURA 9-15

9.5.1. Escalas circulares en Diagramas de Smith

Las tres escalas circulares mencionadas en el párrafo anterior están relacionadas entre sí, la más interna corresponde a ángulos del coeficiente de reflexión en grados (θ_Γ) y las otras dos corresponden a porcentajes de longitudes de onda (λ) .

1) La escala de ángulos del coeficiente de reflexión posee el 0º a la derecha del eje horizontal (u = 1; jv = 0) y crece en sentido antihorario como toda escala de medición de ángulos. Los 90º están en la parte superior del eje vertical (u = 0; jv = 1) . Los 180º los encontramos a la izquierda del eje horizontal (u = -1 ; jv = 0) Por último los 270º los encontramos en la parte inferior del eje vertical (u = 0 ; jv = -1).

2) Las escalas de longitudes de onda van de 0 λ a 0,5 λ , una en sentido horario (longitudes de onda hacia el generador) y la otra en sentido antihorario (longitudes de onda hacia la carga), ambas comienzan a la izquierda del eje horizontal (u = -1 ; jv = 0).

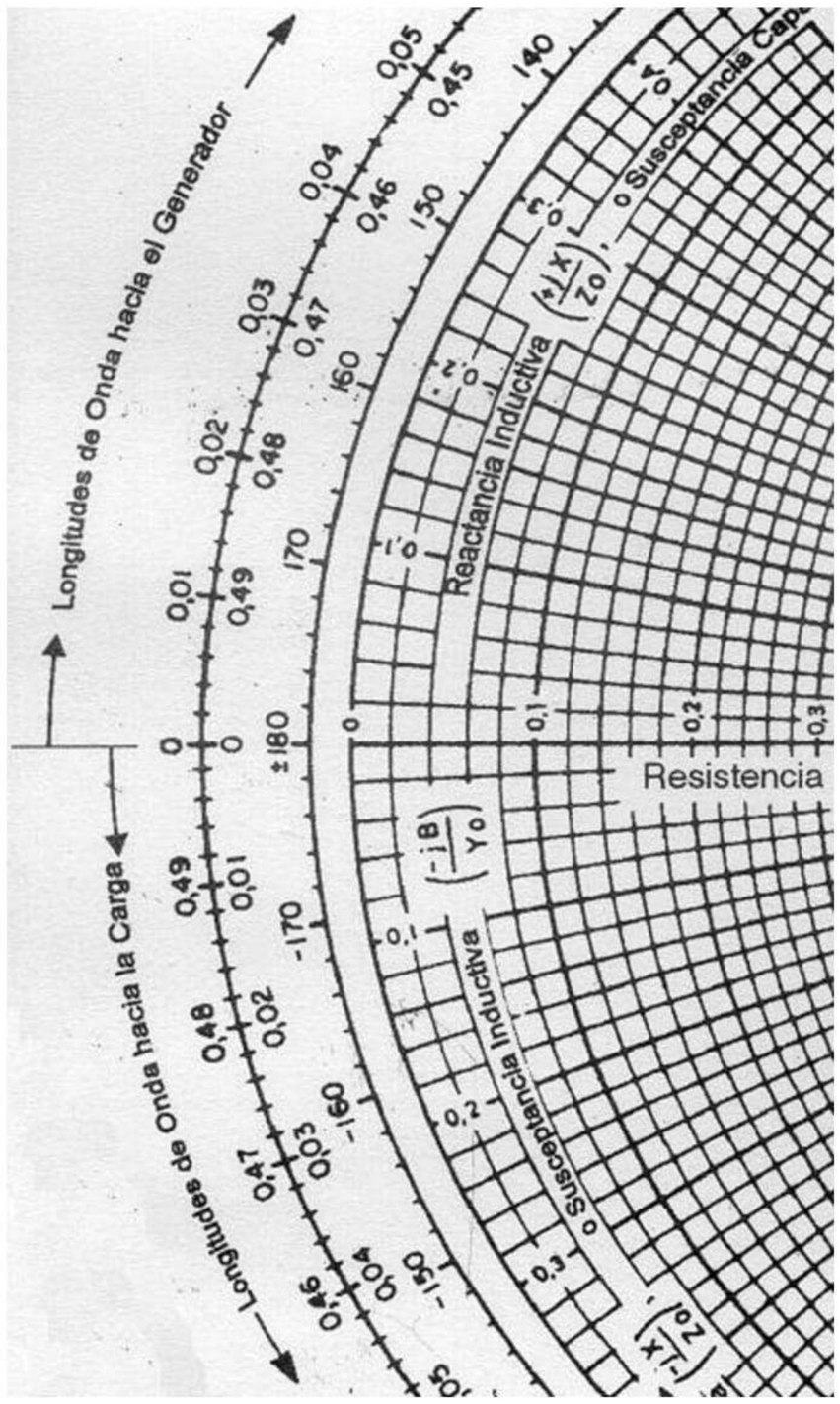


FIGURA 9-16

La relación $\theta_Z = 2\beta z$ relaciona las tres escalas.

Un giro de 360º implica un desplazamiento de 0,5 λ ; por eso la escala va de 0 a 0,5 λ

Por ejemplo si θ_Γ= 90º observamos en el gráfico que corresponde 0,125 λ en la escala superior (long. de onda hacia el generador) y 0,375 λ en la escala inferior (long. de onda hacia la carga).

Si hacemos un giro en sentido horario de 45º, el ángulo del coeficiente de reflexión será θ_{Z1} = 45º.

$$Z = \frac{\theta_Z}{2.\beta} = \frac{45°}{2\frac{2.180°}{\lambda}} = 0{,}0625\lambda$$

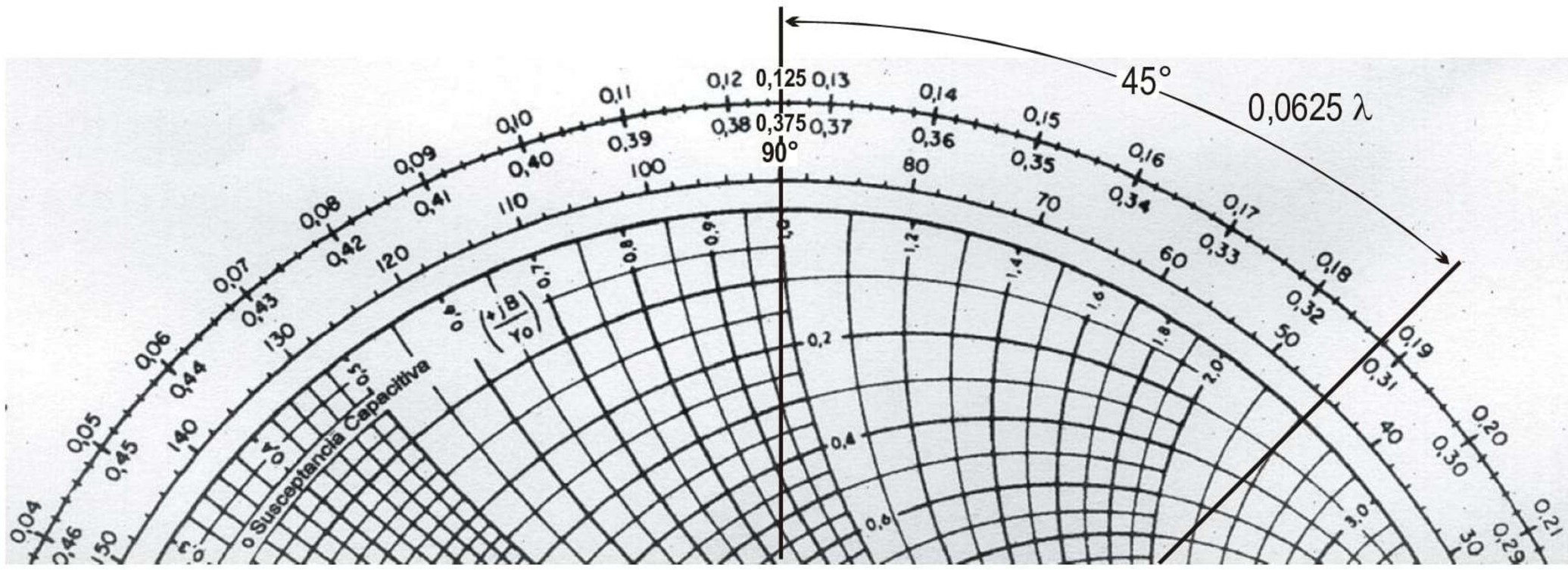


FIGURA 9-17

Es decir que para un giro de 45º corresponde un movimiento de 0,0625 de longitud de onda.

Si nos fijamos en el gráfico obtendremos:

En la escala hacia el generador (creciente en sentido horario)

$$0{,}125\ \lambda + 0{,}0625\ \lambda = 0{,}1875\ \lambda$$

En la escala hacia la carga (creciente en sentido antihorario)

$$0{,}375\ \lambda - 0{,}0625\ \lambda = 0{,}3125\ \lambda$$

De esta forma podemos buscar cualquier equivalencia entre las escalas.

9.5.2. Escalas Radiales en Diagramas de Smith

Posee 8 escalas radiales, cuatro a la derecha y cuatro a la izquierda.

Las cuatro de la derecha están bajo el título de **REFLECTION** (Reflexión). Las dos superiores corresponden al coeficiente de reflexión y las dos inferiores a pérdidas en decibeles.

Las cuatro de la izquierda están divididas en dos grupos, las dos inferiores de la izquierda están bajo el título **STANDING WAVE** (onda estacionaria) y las dos superiores de la izquierda las agrupa el nombre **TRANSMISSION LOSS** (Pérdidas de transmisión).

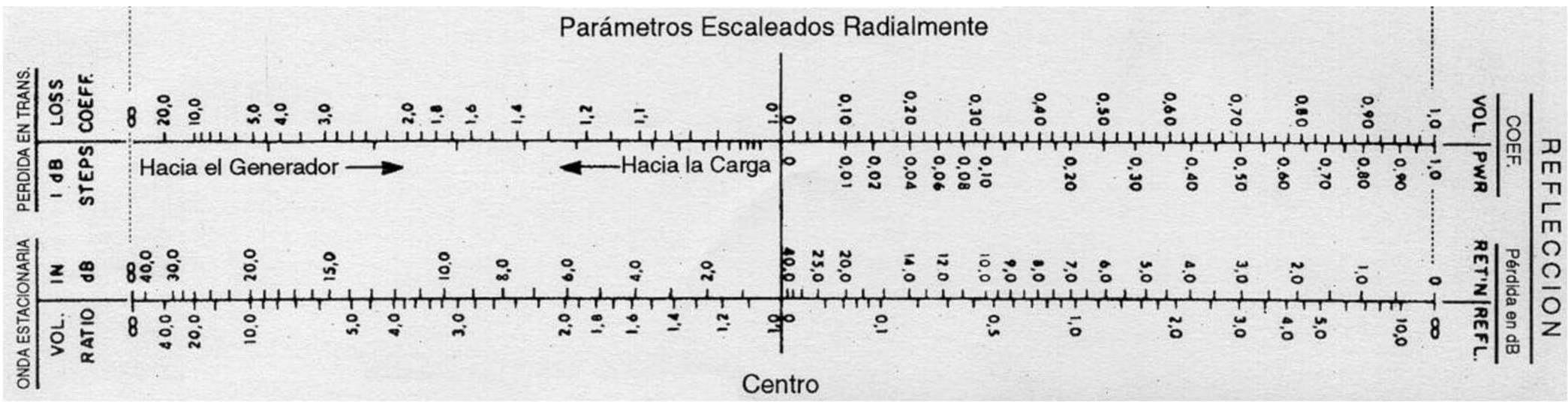


FIGURA 9-18

9.5.3. Descripción detallada de las Escalas Radiales

1) Bajo el título de "REFLECTION"

a) Módulo del coeficiente de reflexión de tensión - VOL.:

$$[\Gamma] = \frac{[V_r]}{[V_i]}$$

La escala va de 0 a 1dividida linealmente

b) Módulo de coeficiente de reflexión de potencia - PWR.:

Potencia incidente

$$Pi_{(z)} = [Vi].[Ii].e^{-2\alpha z}$$

Potencia reflejada

$$\Pr_{(z)} = [Vr].[Ir].e^{-2\alpha z}$$

$$\frac{\Pr_{(z)}}{Pi_{(z)}} = \left[\frac{Vr}{Vi}\right]^2.e^{4\alpha z} = [\Gamma]^2$$

La escala también se gradúa de 0 a 1

c) Pérdidas en decibeles al retorno - RETN.:

Se entiende por pérdidas de retorno a la atenuación o pérdida total, expresada en decibeles, que debería experimentar la onda incidente de potencia para quedar reducida a la onda de potencia reflejada en el mismo par de terminales.

$$10.\log_{10}[\Gamma]^2$$

d) Pérdidas en decibeles por reflexión - REFL. :

Se define pérdidas por reflexión al cociente entre la potencia de la onda incidente en los terminales de carga, $Pi_{(zo)}$ y la potencia absorbida por la carga Pc, expresada en decibeles.

La potencia absorbida por la carga Pc, es la diferencia entre la potencia incidente $Pi_{(zo)}$ y la potencia reflejada $Pr_{(zo)}$.

$$10.\log_{10}\frac{1}{1-[\Gamma]^2}$$ La escala va de 0 a ∞ decibeles

2) Bajo el título "STANDING WAVE"

a) Relación de Onda Estacionaria (R.O.E.) - VOL. RATIO:

$$R.O.E. = \rho = \frac{Vmax}{Vmin} = \frac{1+[\Gamma]}{1-[\Gamma]}$$

b) Relación de Ondas Estacionarias en decibeles - IN DB :

Corresponde al valor de R.O.E. pero graduado en decibeles. Va de cero a ∞ decibeles.

3) Bajo el título de "TRANSMISSION LOSS"

a) Coeficiente de pérdida de transmisión - LOSS COEF. :

Se lo define como la relación entre las pérdidas por atenuación de una línea, considerando la existencia de la onda reflejada , y las pérdidas por atenuación de la misma línea, sin considerar la existencia de la onda reflejada, habiéndose suministrado la misma potencia a la carga en ambos casos.

$$\frac{1+[\Gamma]^2 e^{-2\alpha z}}{1-[\Gamma]^2}$$ La escala va graduada de 1 a ∞

Sin embargo las graduaciones se refieren al caso particular en que $\alpha = 0$, o sea para líneas ideales.

Por lo tanto, esta información vale solamente, a título de referencia, para líneas reales con bajas pérdidas por atenuación de línea.

b) Tramos de 1 decibel - 1 DB STEPS

Es útil para visualizar la reducción del coeficiente de reflexión [Γ] a lo largo de la línea cuando hay atenuación. La distancia entre dos marcas sucesivas de la escala significa una variación de 1 decibel en correspondencia de dos secciones de la misma línea de transmisión. Esta escala no necesita graduación.

9.5.4. Ubicación de impedancias y admitancias normalizadas en el ábaco

La impedancia está formada por resistencia (parte real) en serie con reactancia inductiva o capacitiva (parte imaginaria)

$$z_n = r + j(xL - xC)$$

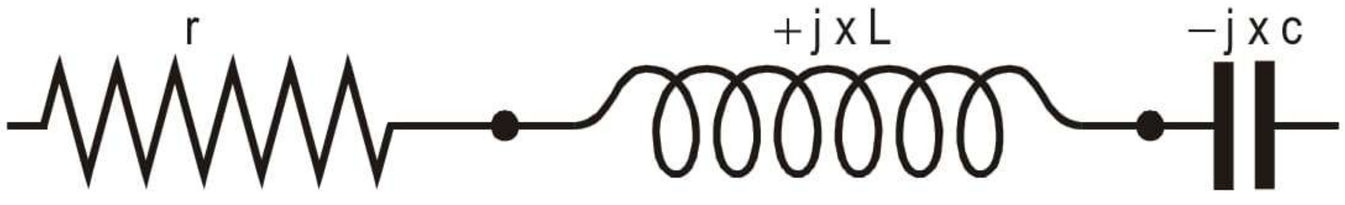


FIGURA 9-18

La admitancia está formada por conductancia (parte real) en paralelo con susceptancia capacitiva o inductiva (parte imaginaria).

$$y_n = g + j(bC - bL)$$

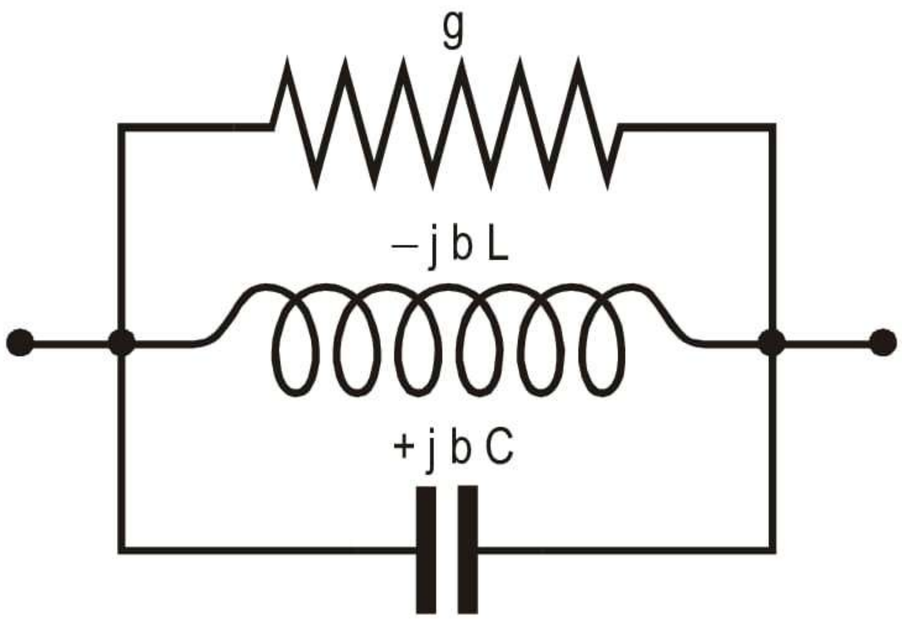


FIGURA 9-19

Para ubicar una impedancia normalizada en el diagrama de Smith, por ejemplo si $z_n = 1 + j\,1$, ubicamos el círculo de parte real igual a 1 y en la intersección con la curva de parte imaginaria igual a 1 trazamos un punto (A). El punto A representa nuestra impedancia normalizada.

Si giramos 180º con módulo de coeficiente de reflexión constante, ubicamos el circulo de parte real igual a 0,5, luego vemos la curva de parte imaginaria que pasa por el punto, es -0,5 . El punto B corresponde a 0,5 –j 0,5 y es el que representa la admitancia del punto A (ver fig.9-20).

Por lo tanto si ubicamos un valor de impedancia, obtenemos su admitancia girando 180º con módulo de reflexión constante y si ubicamos una admitancia, obtenemos su impedancia girando 180º con módulo de coeficiente de reflexión constante.

Ejemplo Analítico

$$y_n = \frac{1}{z_n} = \frac{1}{1 + j1} = \frac{1 - j1}{(1 - j1)(1 + j1)} = \frac{1 - j1}{1 + \cancel{j1} - \cancel{j1} + 1} = \frac{1}{2} - j\,\frac{1}{2} = 0{,}5 - j\,0{,}5$$

Para el cálculo de distancia entre dos z o

$$\theta_{\Gamma_B} = \theta_{\Gamma_A}$$

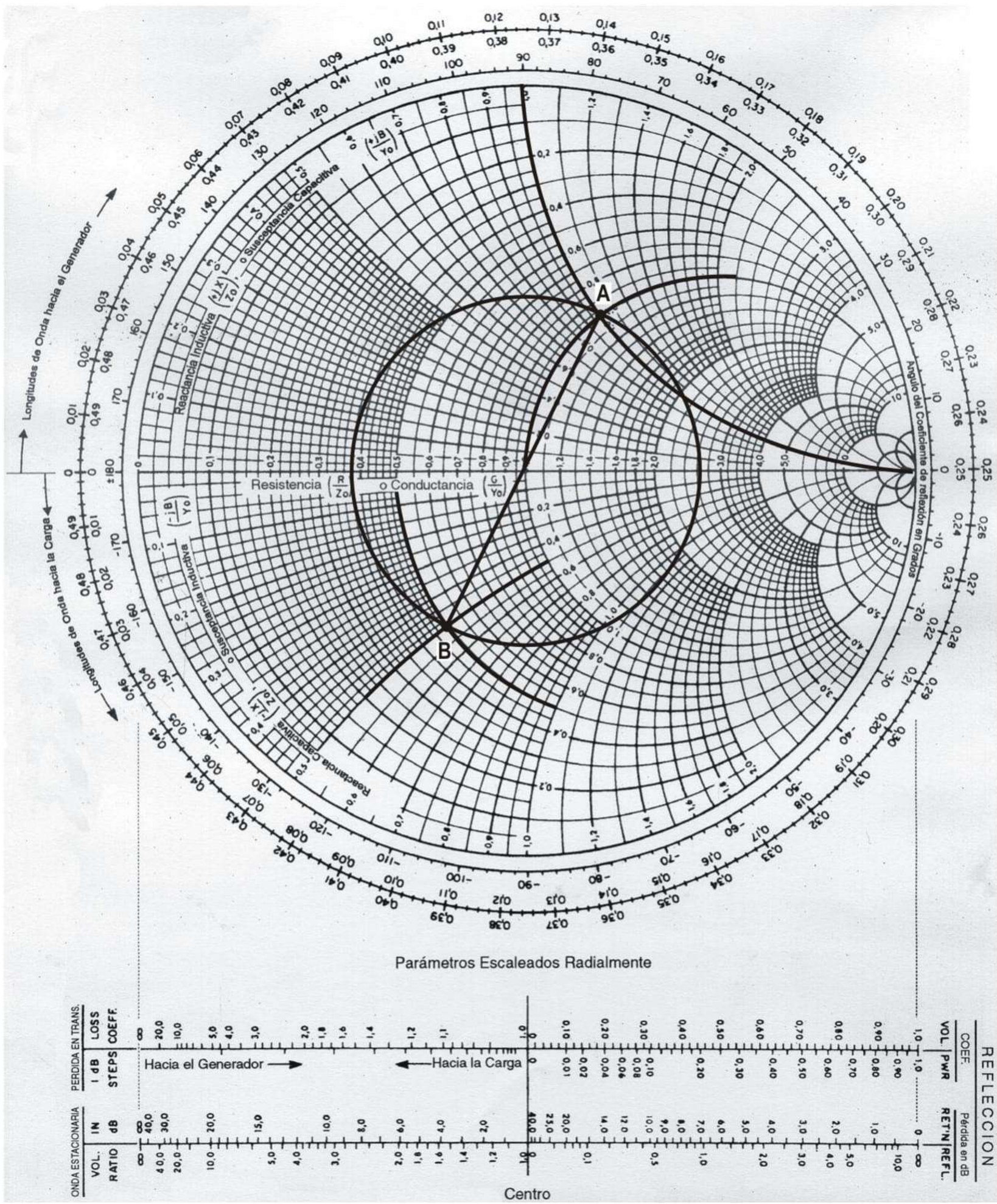


FIGURA 9-20

9.5.5. Cálculo de distancias entre impedancias o entre admitancias

En el punto anterior hemos visto la ubicación de las impedancias y admitancias en el ábaco.
Tenemos que pensar que en los medios continuos, la impedancia del medio es igual en todos los puntos, es decir que lo define su impedancia intrínseca.

$$\frac{Ei}{Hi} = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$$

En un medio con reflexiones, la impedancia va variando punto por punto debido al efecto de superposición que produce la onda reflejada con la incidente las cuales se suman algebraicamente, este efecto produce que el campo eléctrico y magnético total no sea el mismo en todos los puntos, por lo

tanto la impedancia ya no es la impedancia intrínseca. En cada punto tendremos un valor de impedancia que llamamos impedancia de campo definida en el capítulo 7.8.

$$Z(z) = \frac{E_X(z)}{H_Y(z)} = \eta_1 \cdot \frac{\left[1+\Gamma_E(z)\right]}{\left[1-\Gamma_E(z)\right]}$$

En el capítulo 9.5.4. suponemos una impedancia normalizada $z_n = 1 + j\,1$ (punto A) y lo tomaremos a este punto para calcular que distancia tenemos con respecto a otro valor en la línea de transmisión.

En primer lugar nos fijamos en la longitud de onda en la escala superior que le corresponde a este valor seleccionado, la que corresponde a $\lambda_n = 0{,}162\ \lambda$. (Ver Figura 9-21)

Si tomamos otra impedancia de la línea hacia el generador por ejemplo $z_1 = 2{,}6 + j\,0{,}2$ (punto C) y queremos saber que distancia existe entre ellas, nos fijamos en cuál es la longitud de onda de z_1 en la misma escala que la anterior, que corresponde a $\lambda_1 = 0{,}244\ \lambda$.

La distancia entre las impedancias la obtenemos en este caso y siempre y cuando no crucemos la línea de comienzo de escala ($0\ \lambda$): restando la longitud mayor menos la longitud menor.

$$\lambda_1 - \lambda_n = 0{,}244\ \lambda - 0{,}162\ \lambda = 0{,}082\ \lambda.$$

En segundo lugar tomamos otra impedancia de la línea hacia el generador por ejemplo $z_2 = 0{,}38 + j\,0{,}1$ (punto D) la cuál posee una longitud de onda $\lambda_2 = 0{,}018\ \lambda$.

La distancia entre las impedancias z_n y z_2 la obtenemos en este caso y siempre y cuando crucemos la línea de comienzo de escala ($0\ \lambda$): restando 0,5 menos λ_n y luego sumando el tramo de la otra escala es decir λ_2.

$$(0{,}5\ \lambda - \lambda_v) + \lambda_2 = (0{,}5\ \lambda - 0{,}162\ \lambda) + 0{,}018\ \lambda = 0{,}338\ \lambda + 0{,}018\ \lambda = 0{,}356\ \lambda$$

Estos dos ejemplos son válidos tanto para calcular distancia entre impedancias como distancia entre admitancias y cubren el 100 % de los casos de medición.

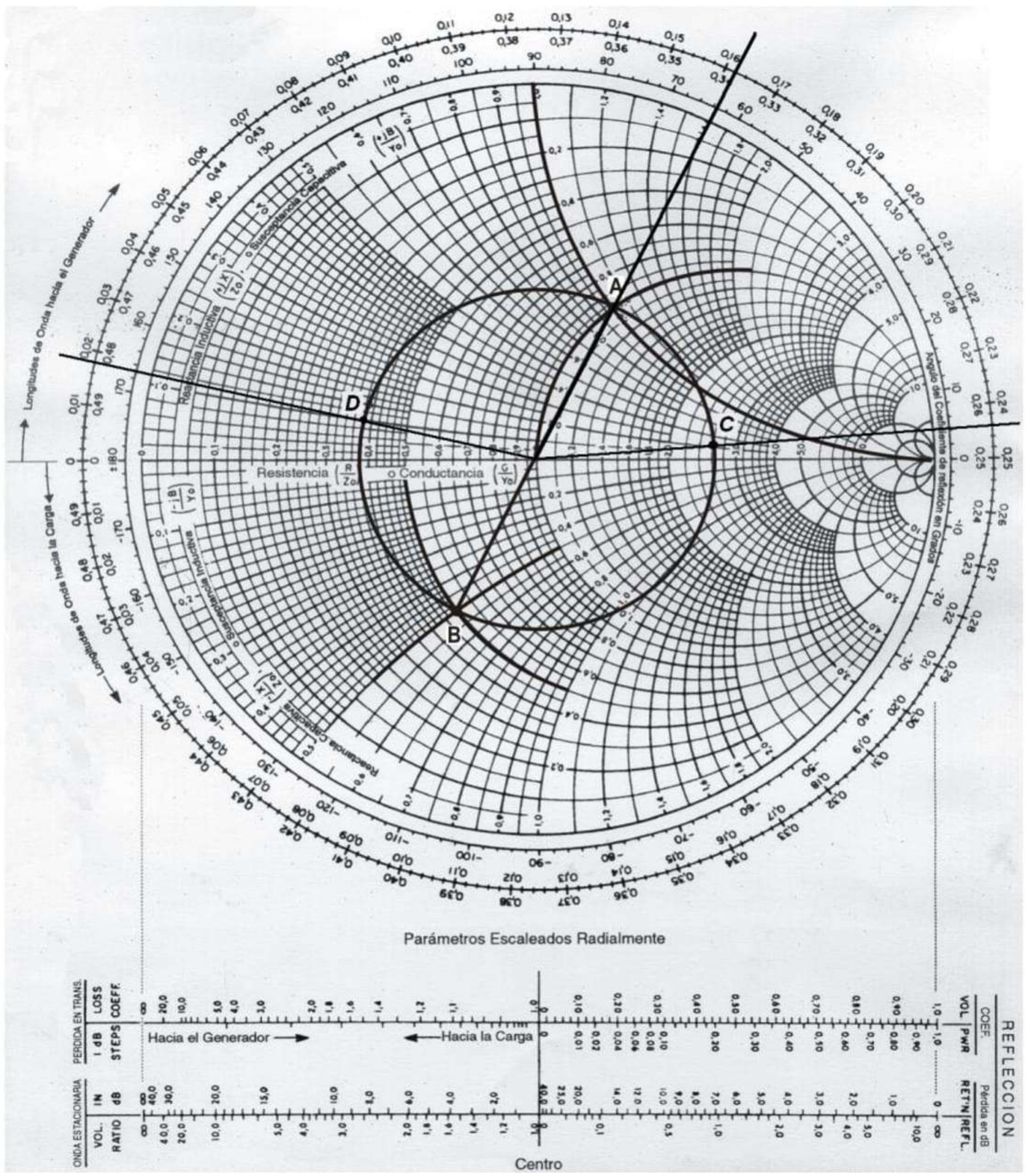
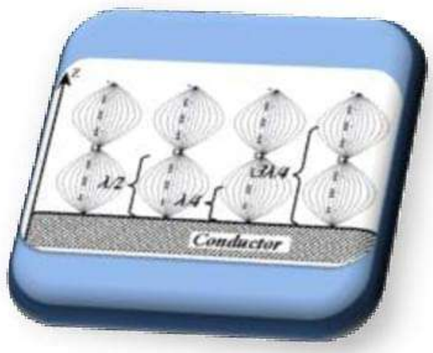

A
B
C
D
Longitudes de Onda hacia el Generador
Longitudes de Onda hacia la Carga
Resistencia
o Conductancia
Parámetros Escaleados Radialmente
Hacia el Generador
Hacia la Carga
Centro
REFLECCION
ONDA ESTACIONARIA
PERDIDA EN TRANS.

FIGURA 9-21

CAPÍTULO 10



REFLEXIÓN OBLICUA

Objetivo:

- Que el alumno adquiera un claro dominio en la definición y fundamentación de la dirección arbitraria de un vector en el sistema de coordenadas rectangulares e internalice los conceptos para demostrar la generación de ondas estacionarias en el eje perpendicular a la superficie conductora y la generación de ondas progresivas en el eje paralelo a la superficie conductora en una reflexión oblicua.

10.1. COSENOS DIRECTORES

A veces es necesario escribir la expresión de una onda plana propagándose en una dirección arbitraria respecto de los ejes coordenados. Esto se logra del modo más conveniente en función de los cosenos directores de la normal al plano de la onda.

Por definición de una onda plana uniforme las superficies de igual fase son planos, los cuales llamamos planos equifásicos.

Así en la expresión

$$E(z) = E_0\, e^{-j\beta z}$$

de una onda propagándose en dirección de Z, los planos de fase constante vendrán dados por la ecuación

$$z = cte.$$

Si se trata de una onda plana que se propaga en una dirección arbitraria s, es necesario sustituir z por una expresión que, al igualarla a una constante, dé las superficies equifásicas.

La ecuación de un plano viene dada por:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = cte.$$

siendo r el vector radial que une el origen con un punto P del plano y n es el vector unitario normal al plano (a veces llamado versor normal a la onda).
Puede verse que esto es así en la figura 10.1, en la que se ve un plano de canto, representado por la línea F-F perpendicular al vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$.

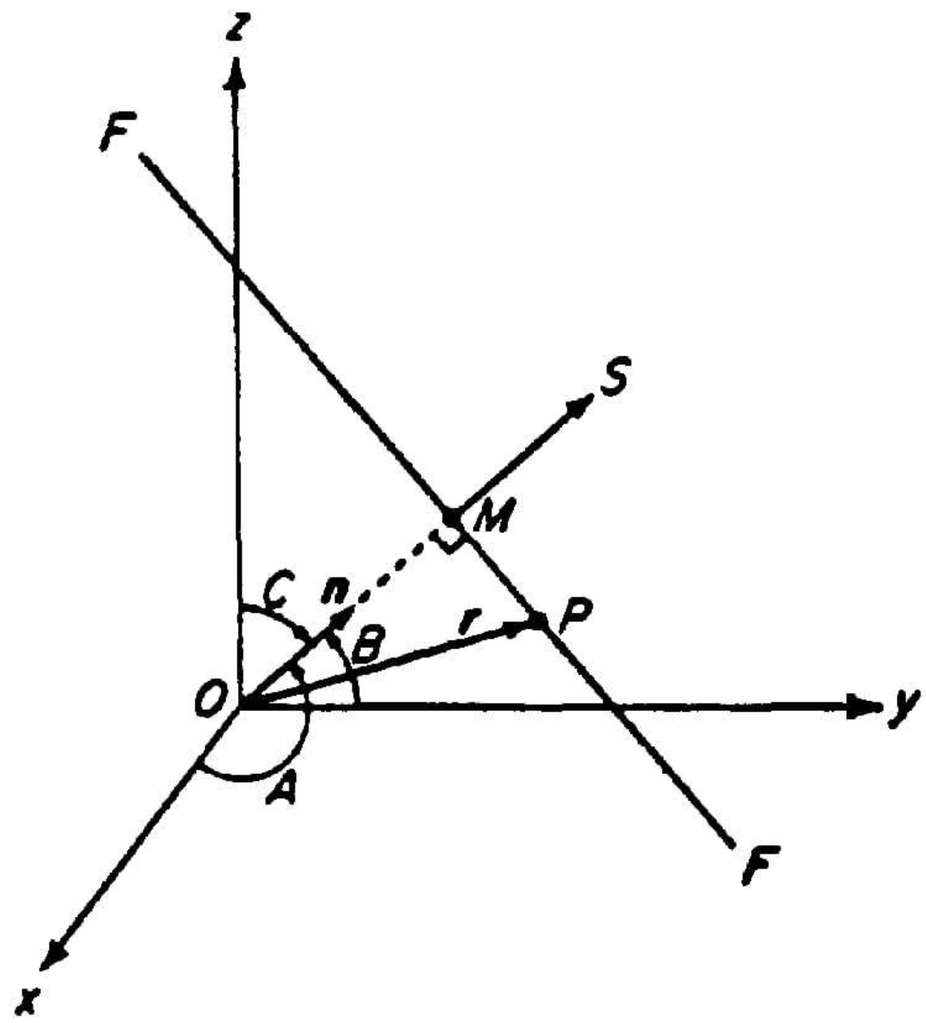


FIGURA 10-1

El producto escalar n.r es la proyección del radio r sobre la normal al plano, y es evidente que esta proyección será de valor constante OM para todos los puntos del plano.

Como el producto escalar de dos vectores es un escalar igual a la suma de los productos de los mismos componentes, según los ejes de coordenadas de ambos vectores tendremos

$$n..r = x\cos A + y\cos B + z\cos C = |n|\cdot|r|\cos\theta$$

siendo x, y, z los componentes del vector r, y cos A, cos B y cos C los componentes del vector unitario n respecto de los mismos ejes x, y, z, respectivamente. Sus cosenos se denominan **cosenos directores o componentes de dirección del vector**.

Puede escribirse así la ecuación de una onda plana propagándose en dirección n, normal a los planos de fase constante, como

$$E(r) = E_0\, e^{-j\beta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}}$$

$$E(r) = E_0\, e^{-j\beta(x\cos A + y\cos B + z\cos C)}$$

Su variación en el tiempo, suponiendo $E_0 = E_y + j\,E_z$, será

$$E(r,t) = \mathrm{Re}\left\{E_0\, e^{-j(\beta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\}$$

$$E(r,t) = E_y\cos(\beta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}-\omega t) + E_z\,\mathrm{sen}(\beta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}-\omega t)$$

Problema N° 10.01.68

Una onda plana que se propaga por el vacío, posee una dirección S de propagación y su versor normal ñ a las superficies equifásicas, forma los siguientes ángulos con los ejes:

$A = 90^o$ con respecto a X, $B = 30^o$ con respecto a Y, $C = 60^o$ con respecto a Z.

a) Expresar el versor normal ñ en función de los cosenos directores y graficar la dirección S a escala.

b) Expresar la ecuación del campo eléctrico total cuya amplitud máxima es 100 *V/m* y frec. 100 *Mhz*, en función de x, y, z ,t (parte real).

c) Calcular el campo para:

1)	$x = 0$	$y = 0$	$z = 0$	$t = 0$
2)	$x = 0$	$y = 3{,}465\text{m}$	$z = 0$	$t = 0$
3)	$x = 0$	$y = 0$	$z = 6\ m$	$t = 0$

d) Trazar los planos equifásicos de los puntos mencionados en c), sobre el gráfico pedido en a).

e) Extraiga conclusiones, en función de las distancias recorridas por la onda en la dirección S, x, y, z.

Solución Problema Nº 10.01.68

a)

$$\overline{n} = \cos A.a_X + \cos B.a_Y + \cos C.a_Z = 0{,}866\,a_Y + 0{,}5\,a_Z$$

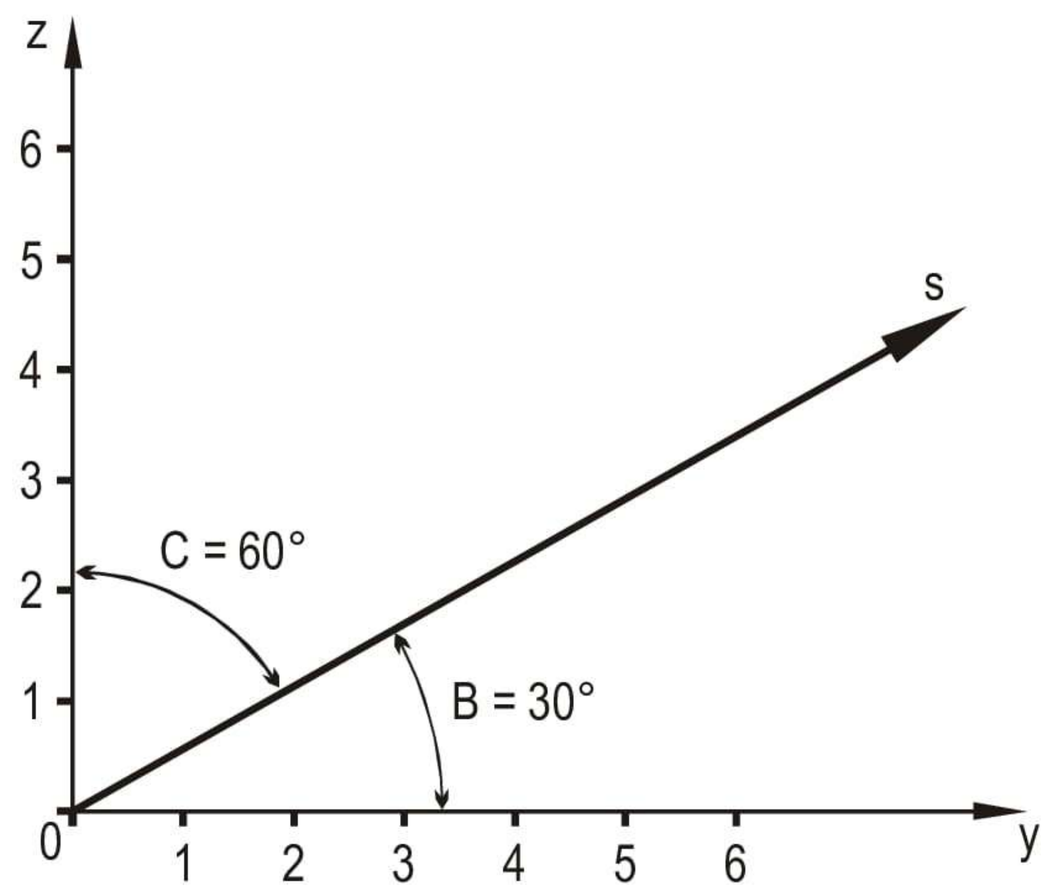


FIGURA Solución 10-01-68 (a)

b)

$$E_n = 100\cos\left[\varpi\, t - \beta\left(0{,}866.y\,a_Y + 0{,}5.z.a_Z\right)\right]$$

c)

1) Para $x = y = z = t = 0$

$$E_n = 100$$

2) Para $x = 0$ $\quad y = 3{,}465\ m$ $\quad z = t = 0$

$$E_n = 100\cos\left[\frac{2.\pi}{3}\left(0{,}866.3{,}465\right)\right]a_Y = 100\,a_Y$$

3) Para $x = y = 0$ $\quad z = 6$ $\quad t = 0$

$$E_n = 100\cos\left[\frac{2.\pi}{3}\left(0{,}5.6\right)\right]a_Z = 100\,a_Z$$

d)

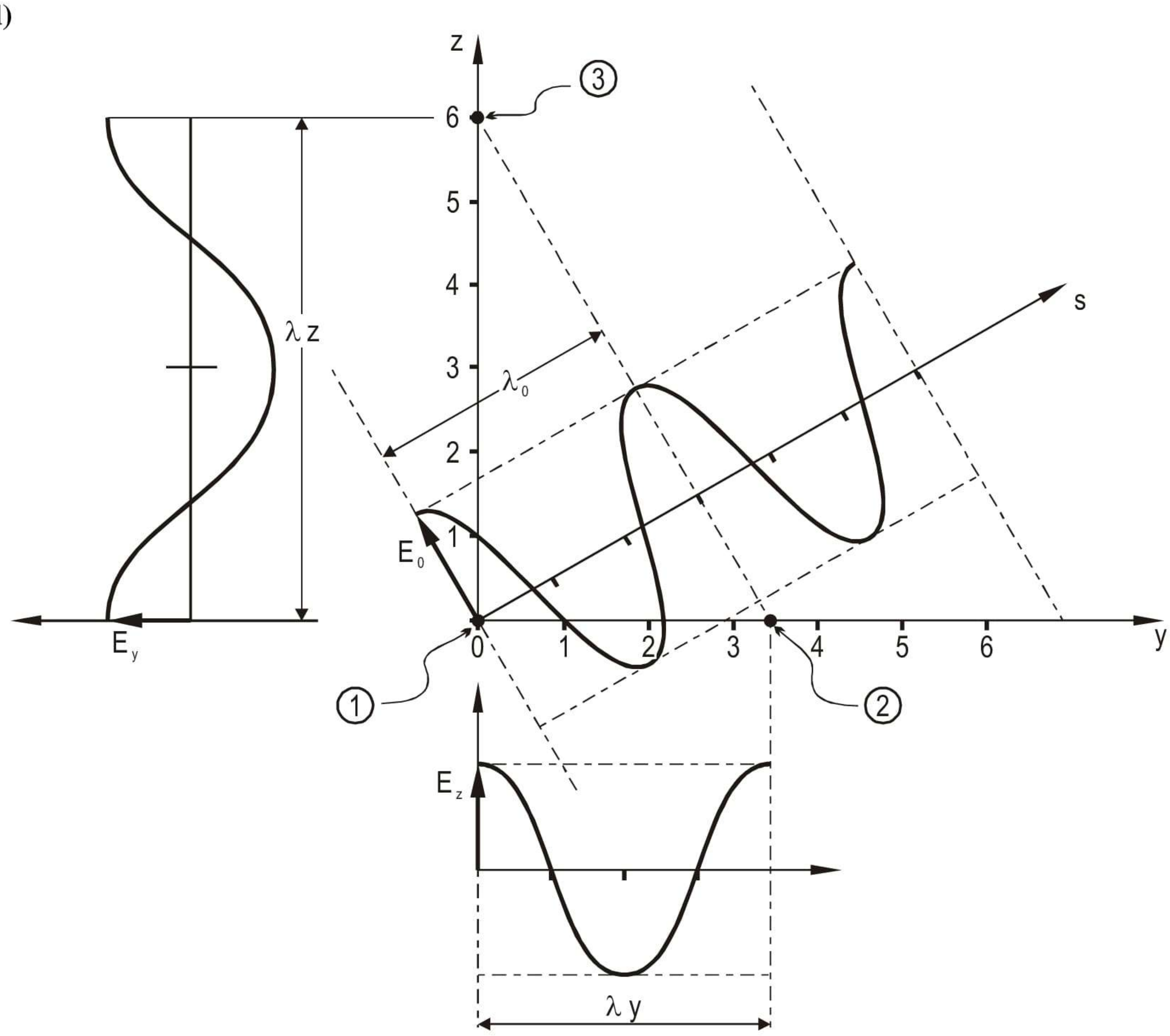


FIGURA Solución 10-01-68 (d)

10.2. LONGITUD DE ONDA Y VELOCIDAD DE FASE

Las expresiones de una onda plana uniforme vistas pueden ponerse en expresiones de la forma

$$e^{-jhu}$$

en las que h es alguna constante real y u representa la distancia medida a lo largo de una línea recta. Retrocediendo a la discusión original sobre la longitud de onda y la velocidad de fase, vemos que estas cantidades pueden ponerse en función de h y ω para la dirección dada u.

La longitud de onda en la dirección u está dada por:

$$\lambda_u = \frac{2\pi}{h} \qquad [10\text{-}1]$$

y la velocidad de fase en dirección u estará dada por

$$v_u = \frac{\omega}{h} \qquad [10\text{-}2]$$

Con esta información podemos determinar la longitud de onda y velocidad de fase en cualquier dirección.

Para la onda plana uniforme, ya discutida, la longitud de onda y velocidad de fase en la dirección de la normal n a la onda serán

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{\omega}{\beta}$$

Si nos fijamos en la expresión de la onda plana e función de sus cosenos directores es fácil determinar la longitud de onda y velocidad de fase en la dirección de los ejes coordenados comparándolos con la expresión

$$e^{-jhu}$$

discutida anteriormente. Así para la dirección x

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\beta\cos A} = \frac{\lambda}{\cos A} \qquad \text{y} \qquad v_x = \frac{\omega}{\beta\cos A} = \frac{v}{\cos A}$$

En tanto el ángulo A no sea nulo, tanto la longitud de onda como la velocidad de fase medidas a lo largo del eje x serán mayores que las medidas en la dirección de propagación. Lo mismo puede decirse para las direcciones **y** y **z**. Estas relaciones entre las velocidades y longitudes de onda según varias direcciones pueden verse en la figura 10.2, que muestra

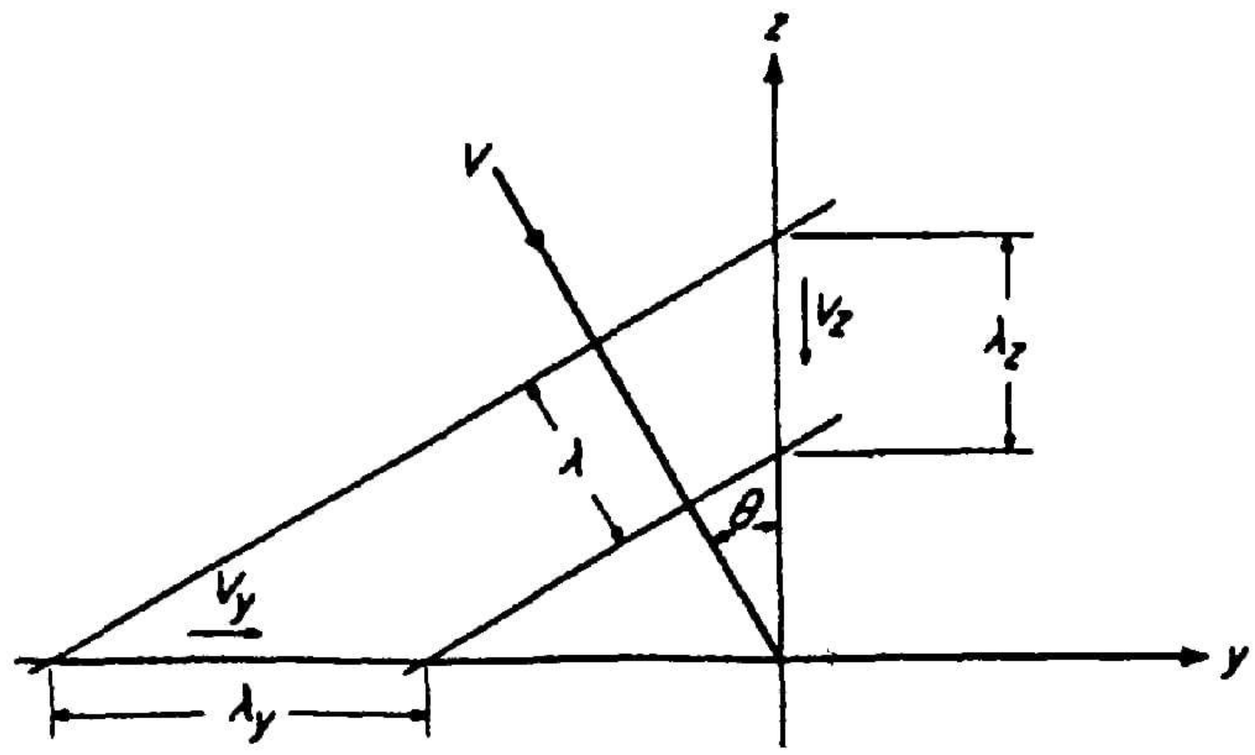


FIGURA 10-2(a): Relaciones entre la longitud de onda y la velocidad según diferentes direcciones

crestas sucesivas de una onda incidente que corta a los ejes **y** y **z**. Para ángulos pequeños de **θ** se ve que la velocidad ***v***, a que se mueve una cresta a lo largo del eje **y** se hace muy grande, tendiendo a infinito cuando **θ** tiende a cero.

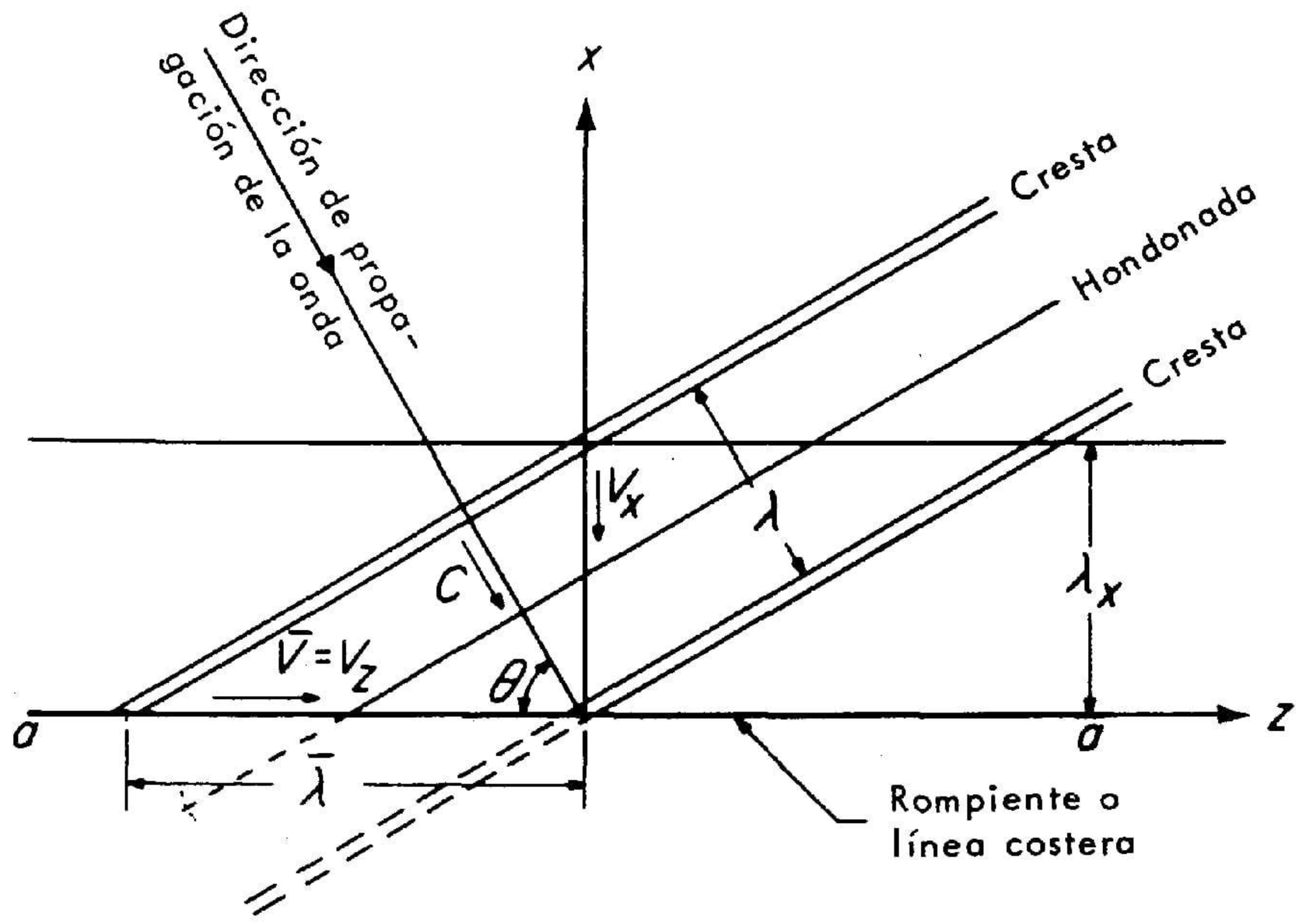


FIGURA 10-2(b)

10.3. INCIDENCIA OBLICUA

10.3.1. Introducción

Siempre que una onda incida oblicuamente sobre la superficie límite separadora de dos medios, es necesario considerar separadamente dos casos especiales. El primer caso es aquel en que el vector eléctrico es paralelo a la superficie límite de medio o perpendicular al plano de incidencia (el plano

de incidencia es aquel que contiene al rayo incidente y a la normal de la superficie), Este caso suele denominarse a menudo *polarización horizontal*.

En el segundo caso es el vector del campo magnético el que es paralelo a la superficie límite, y el vector eléctrico es paralelo al plano de incidencia. Este caso suele llamarse también de *polarización vertical*. Los dos casos se indican en al fig.10-3. Las expresiones "*polarización horizontal y vertical*" se refieren al hecho de que las ondas procedentes de antenas horizontales y verticales, respectivamente, producirían estas orientaciones particulares de los vectores eléctrico y magnéticos en ondas que inciden sobre la superficie de la Tierra.

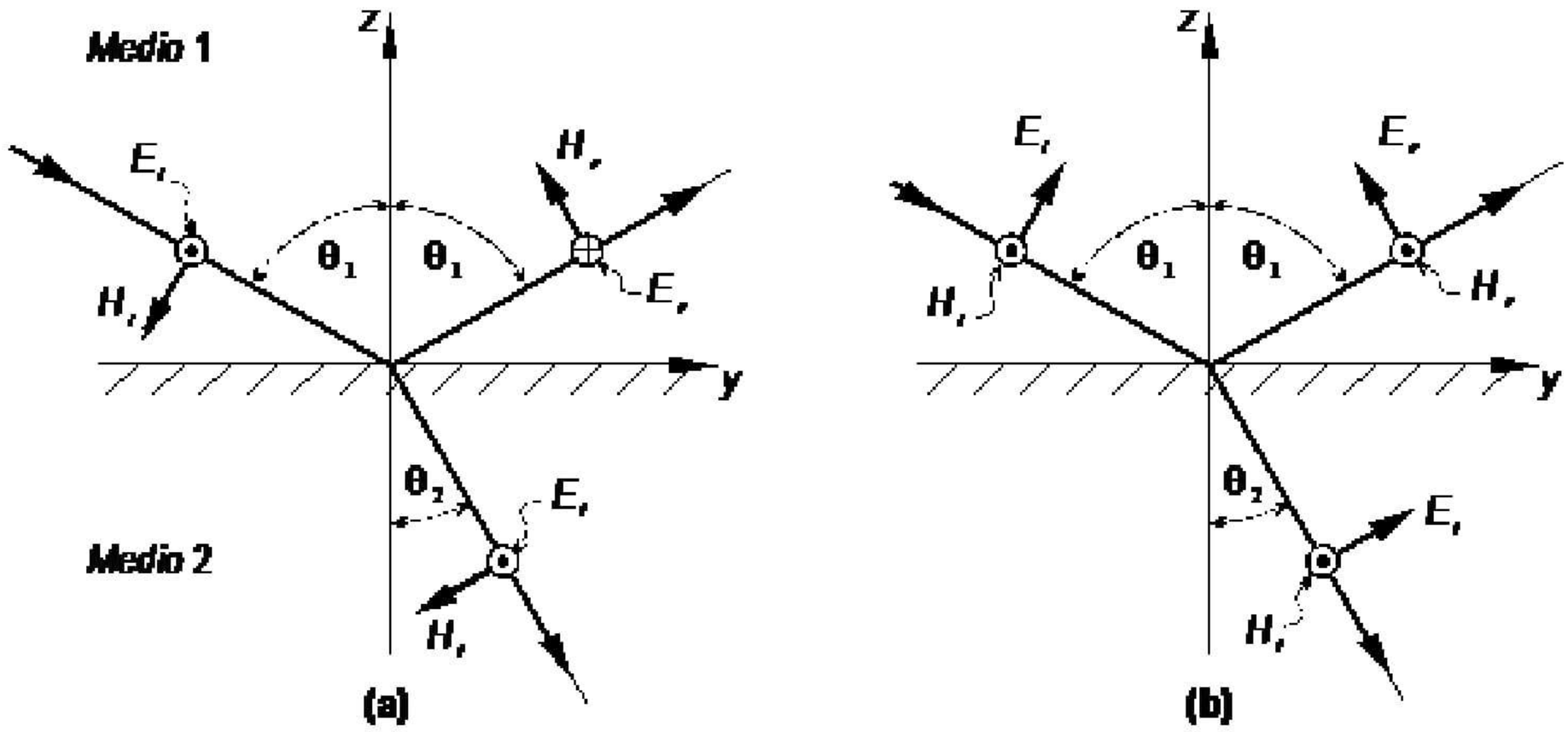


FIGURA 10-3: Reflexión y refracción de ondas con: (a) Polarización perpendicular (horizontal), y (b) Polarización paralela (vertical)

Sin embargo, se ve que, mientras que el vector eléctrico de una onda polarizada "*horizontalmente*" es horizontal, el vector eléctrico de una onda polarizada "*verticalmente*" no es exactamente vertical, pues tiene cierta componente horizontal, Más precisas son las denominaciones de polarización "*perpendicular*" y "*paralela*" para indicar que el vector eléctrico es perpendicular o paralelo al plano de incidencia.

10.3.2. Reflexión en un conductor perfecto. Incidencia Oblicua

En el caso que nos ocupa de una onda incidente sobre un conductor perfecto, ésta se refleja totalmente con un ángulo de reflexión igual al de incidencia. Analizaremos dos casos:

Caso I: *E* perpendicular al plano de incidencia

Sean los ángulos de incidencia y reflexión $\theta_i = \theta_r = \theta$ con el eje z como indica la fig.10-3. Como estas dos ondas tienen igual longitud de onda y direcciones opuestas según el eje z, debe de haber una distribución en forma de onda estacionaria a lo largo de este eje. En la dirección y, tanto la onda incidente como reflejada, avanzan hacia la derecha con la misma velocidad y longitud de onda, de manera que habrá una onda progresiva en sentido positivo de y. Puede verse la certeza de estas conclusiones sumando las expresiones que representan a estas dos ondas.

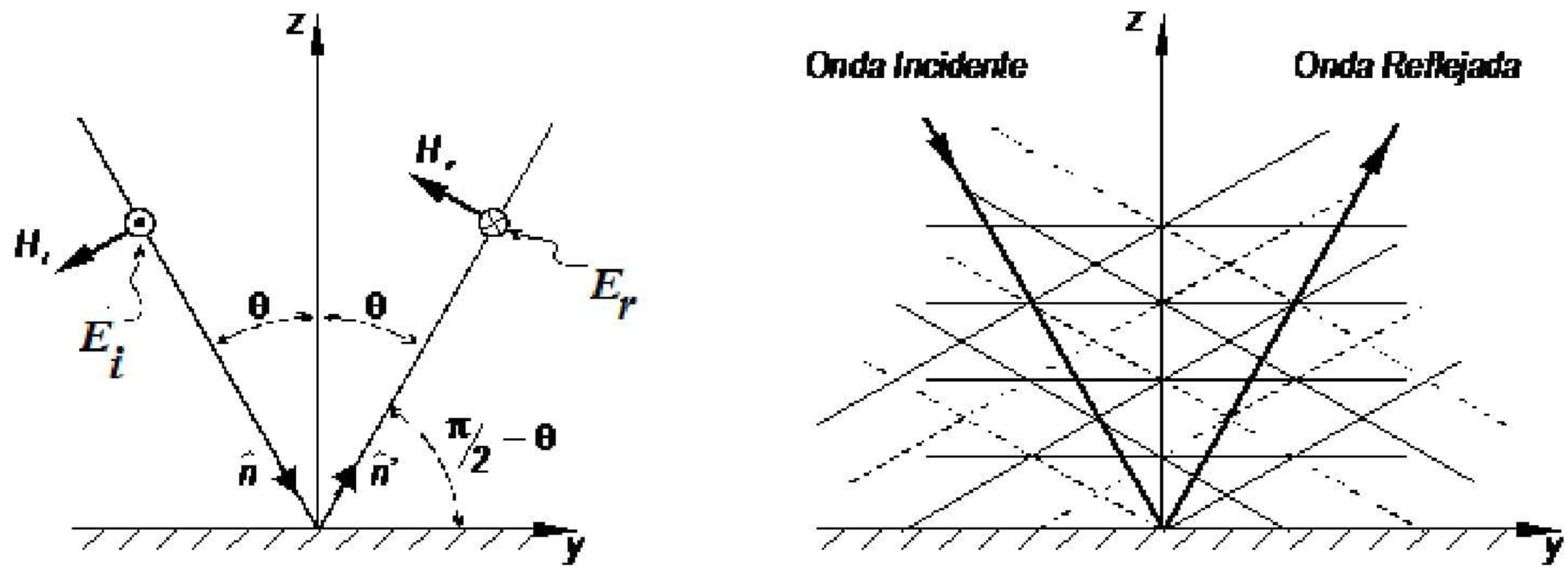


FIGURA 10-4: Diagrama de campo sobre un plano reflector cuando la onda es incidente con un ángulo oblicuo (polarización perpendicular)

Con el sistema de ejes coordenadas, elegido de la fig.10-4,

- La expresión para la onda incidente la obtenemos de la siguiente manera

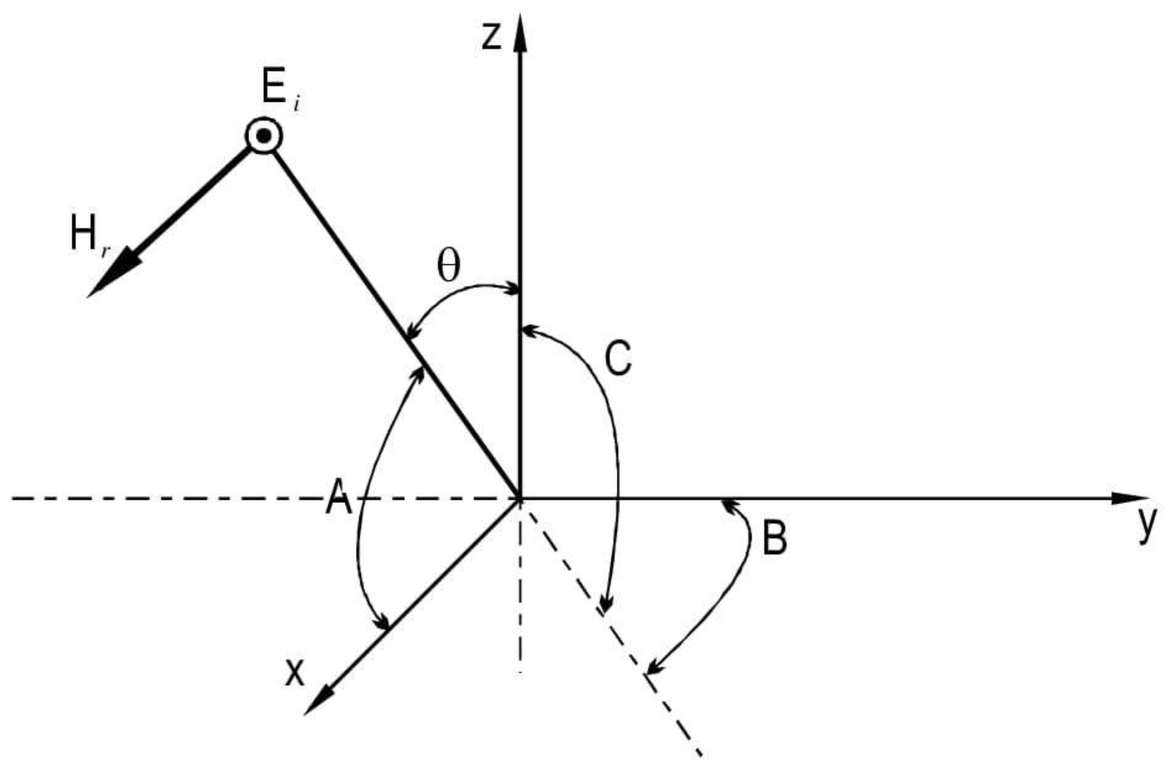


FIGURA 10-5: Onda Incidente

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r} = x\cos\frac{\pi}{2} + y\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + z\cos(\pi-\theta) = y\,\mathrm{sen}\,\theta - z\cos\theta$$

$$A = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$C = \pi - \theta$$

y

$$E_{incidente} = E_i\, e^{-j\beta(y\,\mathrm{sen}\,\theta - z\cos\theta)}$$

- la expresión de la onda reflejada es

$$E_{reflejada} = E_r\, e^{-j\beta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}}$$

$$E_{reflejada} = E_r\, e^{-j\beta(x\cos A' + y\cos B' + z\cos C')} \qquad [10\text{-}3]$$

siendo E_r la amplitud de la intensidad de campo eléctrico de la onda reflejada en el punto del origen. Como normal a la onda reflejada tendremos

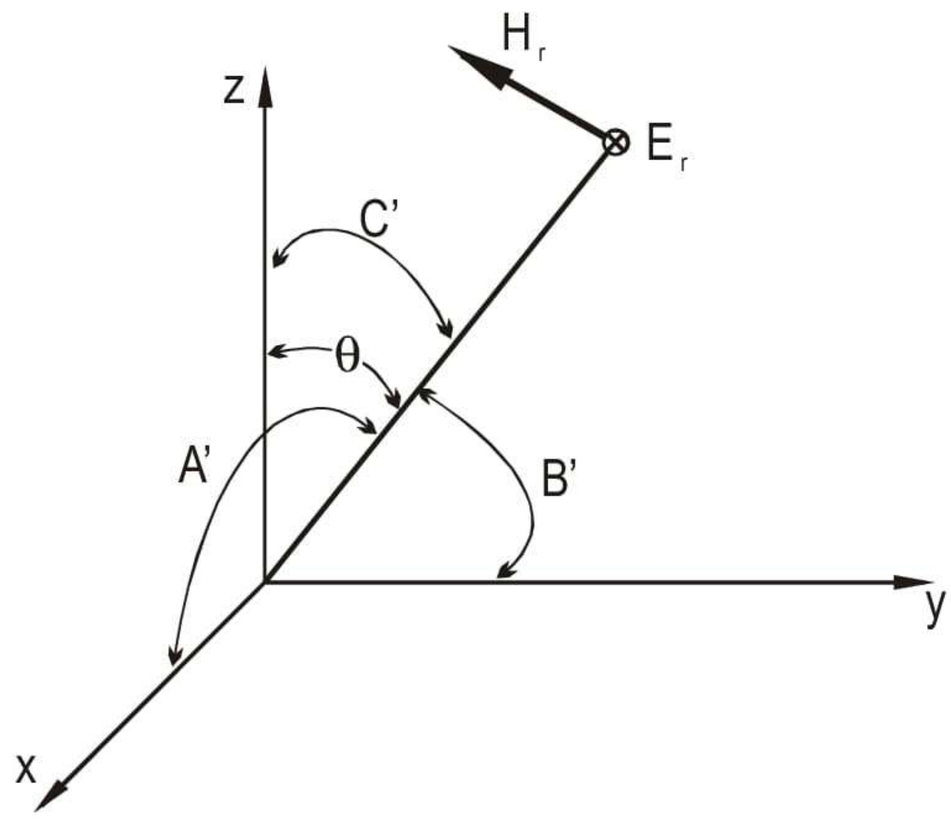


FIGURA 10-6: Onda Reflejada

$$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{r} = x\cos\frac{\pi}{2} + y\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + z\cos\theta = y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta$$

$$A' = \frac{\pi}{2}$$

$$B' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$C' = \theta$$

de manera que (10-3) adopta la forma

$$E_{reflejada} = E_r\, e^{-j\beta(y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta)} \qquad [10\text{-}4]$$

- de las condiciones en el límite

$$E_T = E_{incidente} + E_{reflejada} = E\ i\ e^{-jB\,y\,\mathrm{sen}\,\theta} + E\ r\ e^{-jB\,\mathrm{sen}\,\theta} = 0$$

$$z = 0$$

$$E_r = -E_i$$

por lo tanto, la intensidad de campo total (suma de las intensidades de las ondas incidente y reflejada) será

$$E_T = E_i\left[e^{-j\beta(y\,\mathrm{sen}\,\theta - z\cos\theta)} - e^{-j\beta(y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta)}\right]$$

sacando factor común

$$E_T = E_i\, e^{-jB\,y\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[e^{jB\,z\cos\theta} - e^{-jB\,z\cos\theta}\right]$$

recordando que

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{j\beta z\cos\theta} - e^{-j\beta z\cos\theta} = j\,2\,\mathrm{sen}\left(\beta z\cos\theta\right)$$

$$E_T = 2\,j\,E_i\,\mathrm{sen}\left(\beta z\cos\theta\right)e^{-j\beta y\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

si la expresamos en función del tiempo, multiplicamos por $e^{j\omega t}$

$$E_T = 2\,j\,E_i\,\mathrm{sen}\left(B z\cos\theta\right)e^{j(\omega t - B y\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

$$j\,e^{j(\omega t - B y\,\mathrm{sen}\,\theta)} = j\cos\left(\omega t - B\,y\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - \mathrm{sen}\left(\omega t - B\,y\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$\mathrm{Re}\left[E_T\right] = -2\,E_i\,\mathrm{sen}\left(B\cdot z\cos\theta\right)\cdot\mathrm{sen}\left(\omega t - B\,y\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

siendo

$\beta = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ **la constante de fase de la onda incidente**

$\beta_z = \beta\cos\theta$ **la constante de fase en dirección *z***

$\beta_y = \beta\,\mathrm{sen}\,\theta$ **la constante de fase en dirección *y***

La expresión del campo total es

$$\boxed{E_T(t) = -2\,E_i\cdot\mathrm{sen}\,\beta_z\,z\cdot\mathrm{sen}\left(\omega t - B_y\cdot y\right) \qquad [10\text{-}4]}$$

Puede verificarse que si $\theta = 0$, $\beta_z = \beta$ y $\beta_y = 0$, queda la expresión encontrada en el capítulo 8 de reflexión perpendicular en un medio conductor perfecto. (ver ecuación 8-9)

$$E_T(t) = -2\,E_i\,\mathrm{sen}\left(\beta z\right)\mathrm{sen}\left(\omega t\right)$$

La diferencia de signos es porque en este capítulo se toma el avance de la onda incidente en *z* negativo.

La ecuación (10-4) muestra una distribución estacionaria de la intensidad de campo eléctrico a lo largo del eje *z*. La longitud de onda λ_z (doble de la distancia entre puntos nodales), medida a lo largo de este eje, es mayor que la longitud de onda λ de la onda incidente. La relación entre longitudes de onda es

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\beta\cos\theta} = \frac{\lambda}{\cos\theta}$$

Los planos de intensidad eléctrico cero se presentan a múltiplos de $\dfrac{\lambda_z}{2}$ de la superficie reflectora.

Los planos de intensidad eléctrica máxima se presentan a distancia múltiplos impares de $\dfrac{\lambda_z}{4}$ de la superficie.

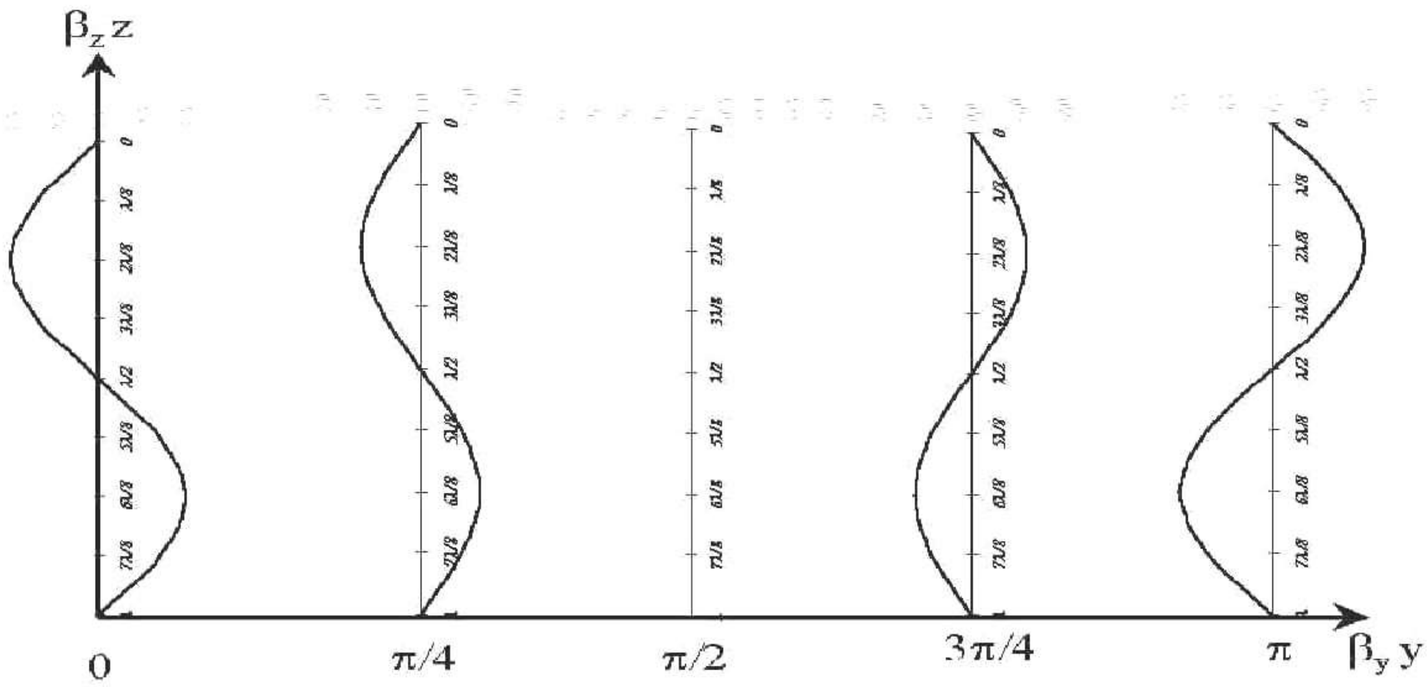
La estructura estacionaria completa de la intensidad de campo eléctrico se ve con (10-4) que se desplaza en dirección *y* con una velocidad

$$v_y = \frac{\omega}{\beta_y} = \frac{\omega}{\beta \operatorname{sen}\theta} = \frac{v}{\operatorname{sen}\theta}$$

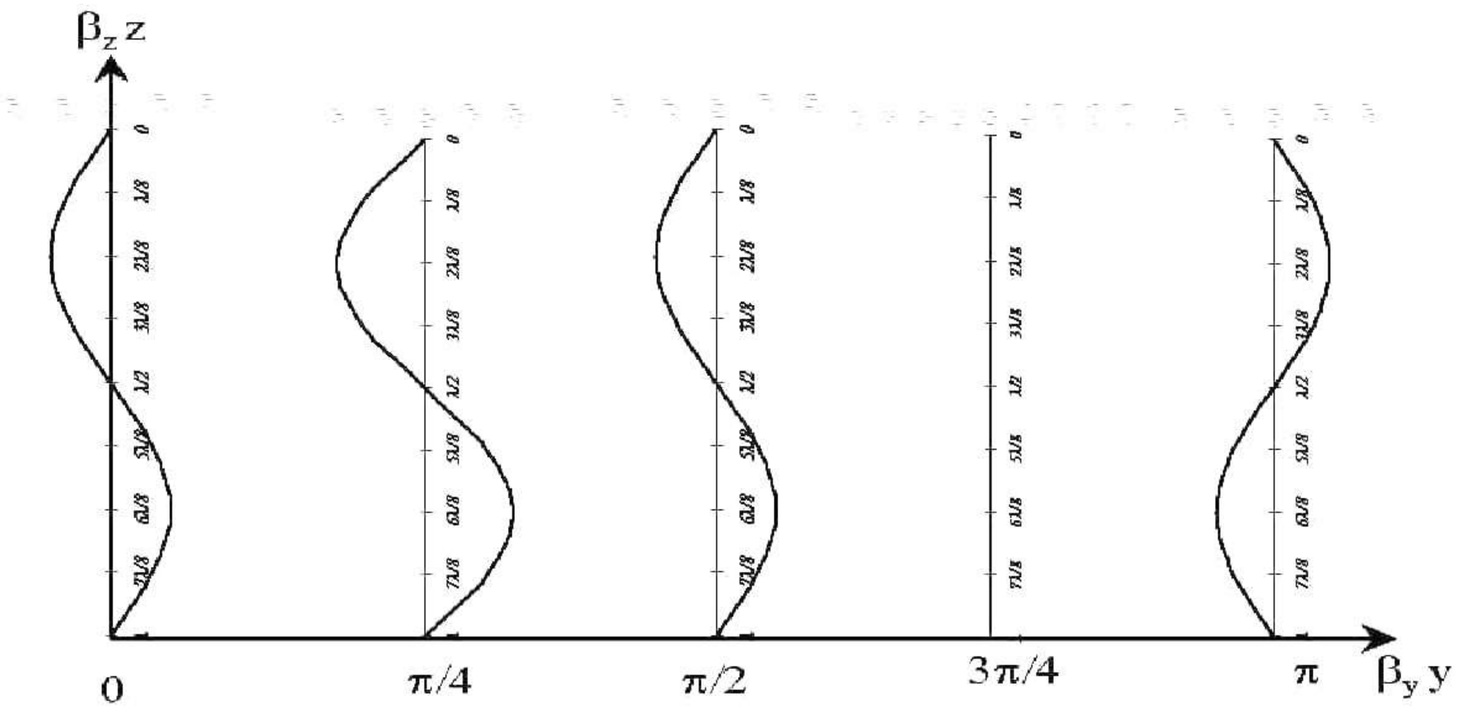
Esta es la velocidad con la que se desplaza la cresta de una onda incidente a lo largo del eje *y*. La longitud de onda en esta dirección es

$$\lambda_y = \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta}$$

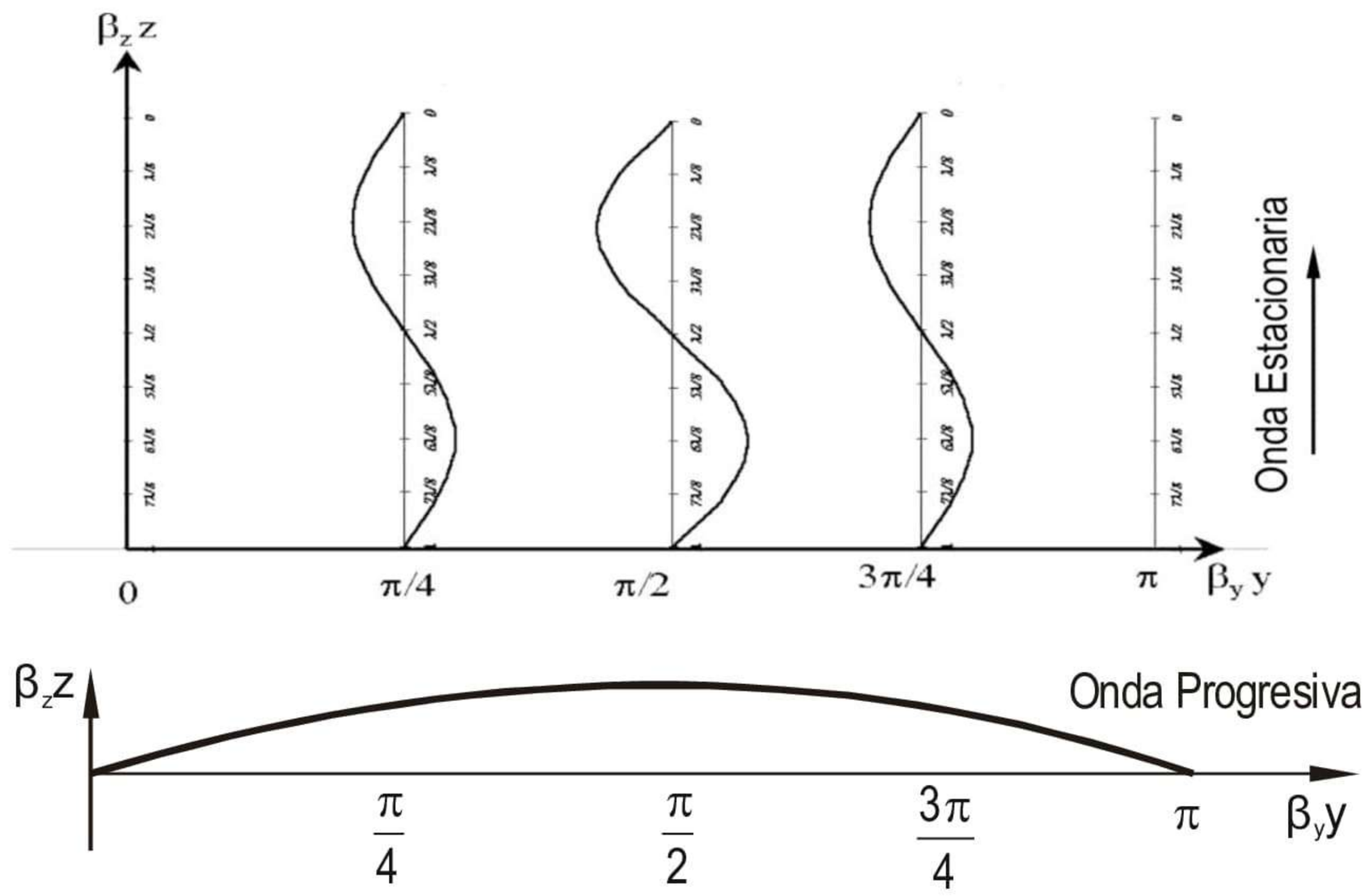
1.) Representación gráfica para ω t = π / 2



2.) Representación gráfica para ω t = 3 π / 4

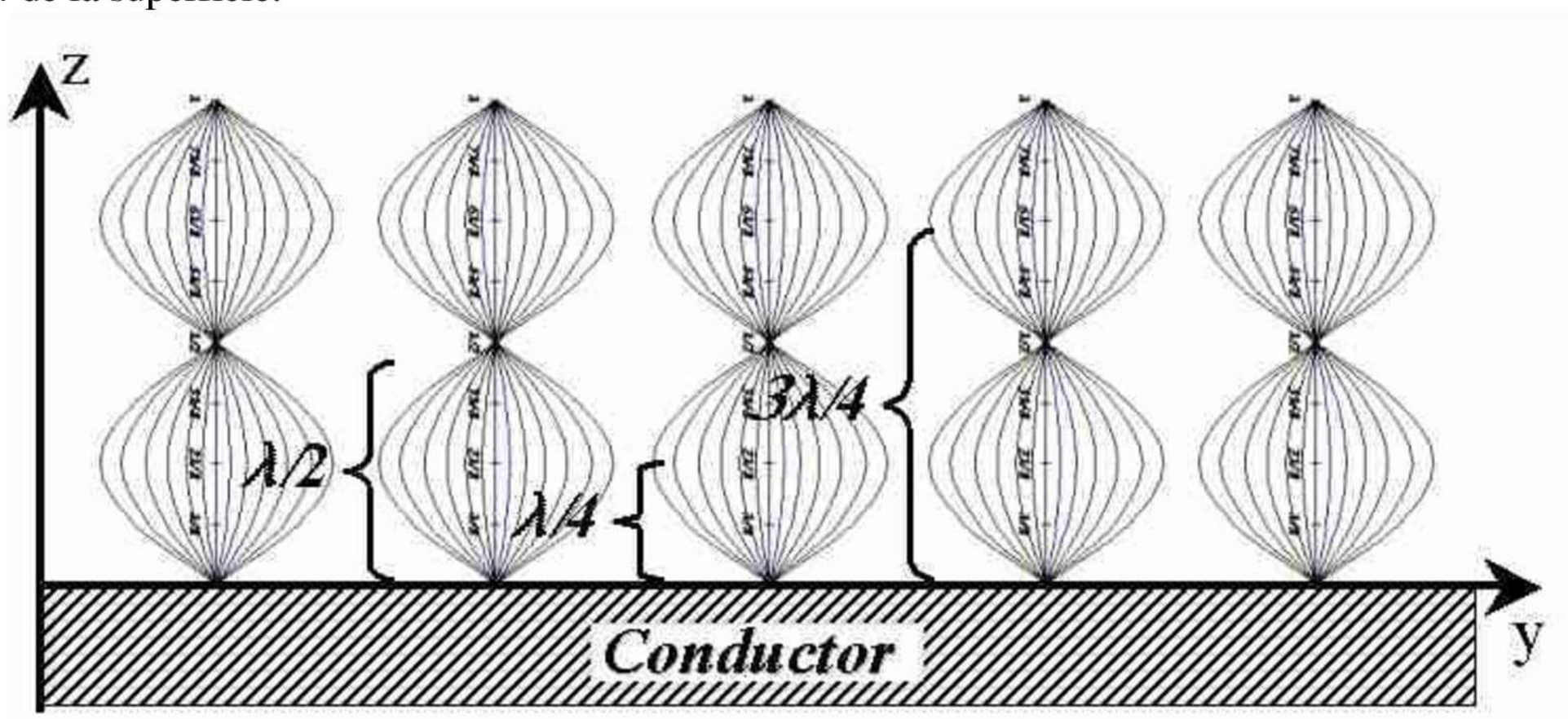


3.) Representación gráfica para ω t = π



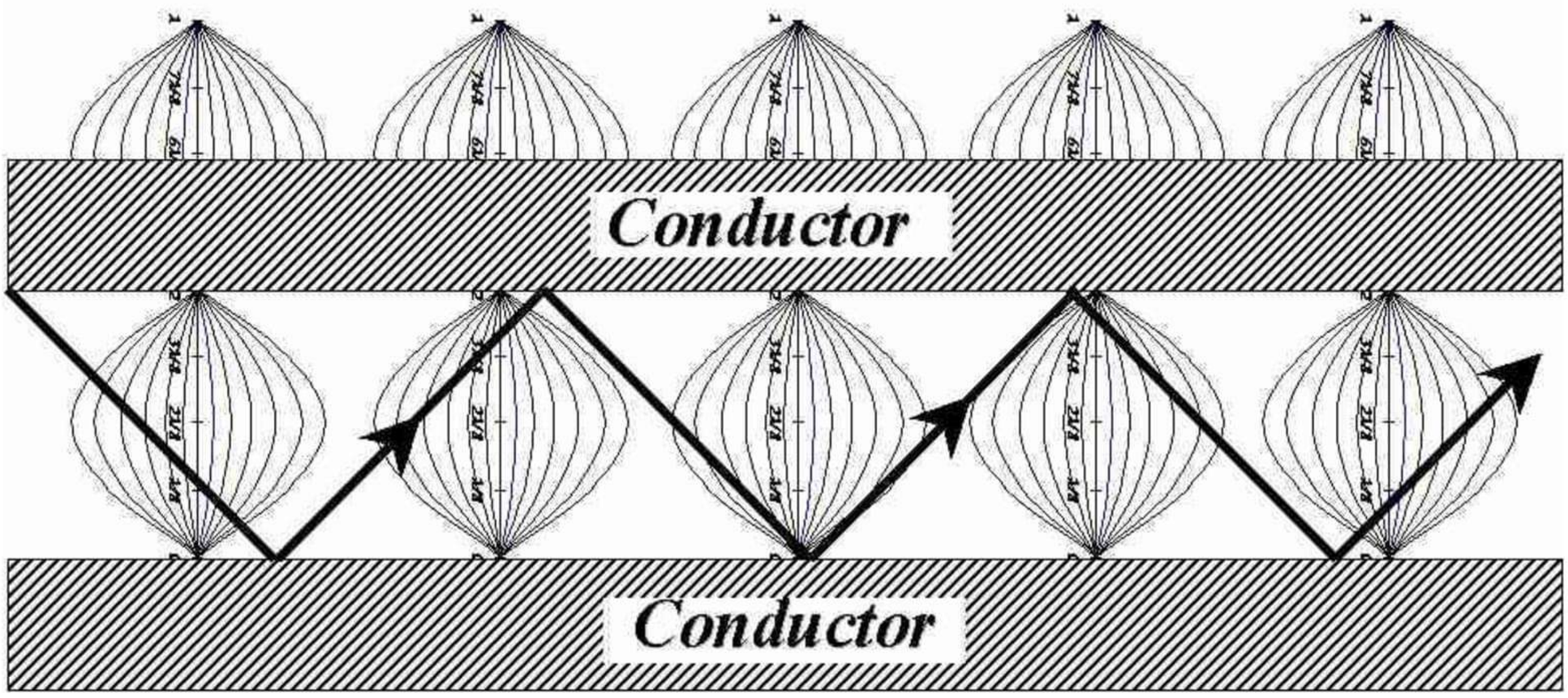
Los planos de intensidad de campo eléctrico cero se presentan a múltiplos de $\lambda_z/2$ de la superficie reflectora.

Los planos de intensidad de campo eléctrico máxima se presentan a distancia múltiplos impares de $\lambda_z/4$ de la superficie.



Principio de la guía de onda – incidencia oblicua entre dos planos conductores

Si colocamos otro conductor en λ/2 o nλ/2, la onda no se modifica en su interior o sea ponemos el conductor en los ceros del gráfico de la onda estacionaria., y si ponemos dos conductores verticales como paredes obtenemos una guía de onda;



Los planos conductores encierran 1 semiciclo.

Cuando analicemos guías de ondas, veremos que existen dos modos de transmisión: modo TM y modo TE y cada modo tiene subíndices m y n. Estos subíndices son números enteros de semiciclos contenidos en el ancho (*m*) y en el alto (*n*) de la guía de onda.

TM_{mn} TE_{mn}

Caso II: *E* paralelo al plano de incidencia

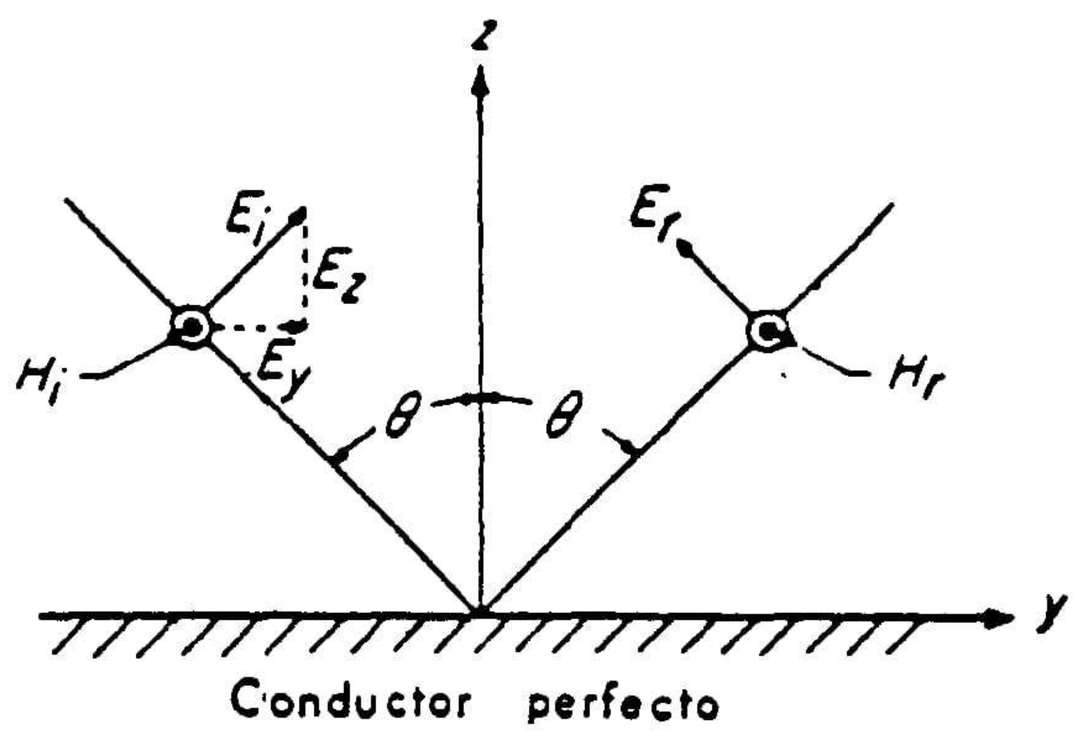


FIGURA 10-5: Reflexión de una onda con polarización paralela

En este caso E_i y E_r tendrán las direcciones instantáneas indicadas en la fig.10-5, ya que las componentes paralelas a una superficie perfectamente conductora deben ser iguales y opuestas. El vector **H** intensidad de campo magnético se reflejará sin inversión de fase como indicaría un examen de la dirección de la corriente. Las magnitudes de **E** y **H** están relacionadas por

$$\frac{E_i}{H_i} = \frac{E_r}{H_r} = \eta$$

La expresión del campo magnético incidente será

$$H_{incidente} = H_i\, e^{-j\beta(y\,\mathrm{sen}\,\theta - z\cos\theta)}$$

y para la onda reflejada

$$H_{reflejada} = H_r\, e^{-j\beta(y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta)}$$

y como $H_i = H_r$, la intensidad total del campo magnético será

$$H_T = H_i\, e^{-j\beta(y\,\mathrm{sen}\,\theta - z\cos\theta)} + e^{-j\beta(y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta)}$$

$$H_T = H_i\, e^{-j\beta\, y\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(e^{+j\beta\, z\cos\theta} + e^{-j\beta\, z\cos\theta}\right)$$

$$H_T = H_i\, e^{-j\beta\, y\,\mathrm{sen}\,\theta} \cdot 2\cos\left(\beta_z\, z\cos\theta\right)$$

Recordando que $\beta_z = \beta\cos\theta$

$$\beta_y = \beta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$H_T = 2\, H_i \cos\left(\beta_z\, z\right)\, e^{-j\beta\, y\,\mathrm{sen}\,\theta}\, e^{j\omega t}$$

$$H_T = 2 H_i \cos\beta_z\, z\, e^{-j\beta_y y} e^{j\omega t}$$

siendo, como antes

$$\boxed{H_T(t) = 2 H_i \cdot \cos\left(\beta_z \cdot z\right) \cdot \cos\left(\omega t - \beta_y \cdot y\right)}$$

La intensidad de campo magnético tiene una distribución estacionaria en dirección z con la planos de máximo H situados en la superficie conductora y a distancias múltiples de $\frac{\lambda_z}{2}$ de la misma. Los planos de intensidad magnética nula se hallan a distancias de las superficie de múltiplos impares de $\frac{\lambda_z}{4}$.

Para la suma de las intensidades del campo eléctrico de los campos incidente y reflejado es necesario considerar separadamente los componentes en las direcciones y y z. Para la onda incidente

$$E_i = \eta H_i \qquad E_z = \eta\,\mathrm{sen}\,\theta\, H_i \qquad E_y = \eta\cos\theta\, H_i$$

para la onda reflejada

$$H_r = H_i \qquad E_z = \eta\,\mathrm{sen}\,\theta\, H_r \qquad E_y = -\eta\cos\theta\, H_r$$

La componente total z de la intensidad de campo eléctrico es

$$E_z = 2\eta \operatorname{sen}\theta H_i \cos(\beta_z z) e^{-j\beta_y y} \qquad [10\text{-}5]$$

La componente total y será

$$E_y = 2j\eta \cos\theta H_i \operatorname{sen}(\beta_z z) e^{-j\beta_y y} \qquad [10\text{-}6]$$

siendo

$$\beta_z = \beta\cos\theta \qquad \text{y} \qquad \beta_y = \beta \operatorname{sen}\theta$$

Ambas componentes tiene una distribución estacionaria sobre el plano reflector. Sin embargo, para la componente normal z de **E** los máximos están en el plano y a múltiplos de $\frac{\lambda_z}{2}$ mientras que para la componente de **E** paralela al plano, los mínimos se hallan en el plano y a múltiplos de $\frac{\lambda_z}{2}$ del mismo.

10.3.3. Reflexión en un aislante perfecto. Incidencia oblicua

Si la onda plana incide sobre una superficie límite que no sea paralela al plano que contiene a **E** y **H**, las condiciones en tal límite son más complicadas. También en este caso parte de la onda será transmitida y parte reflejada, pero la onda transmitida será refractada; es decir, se alterará la dirección de propagación.

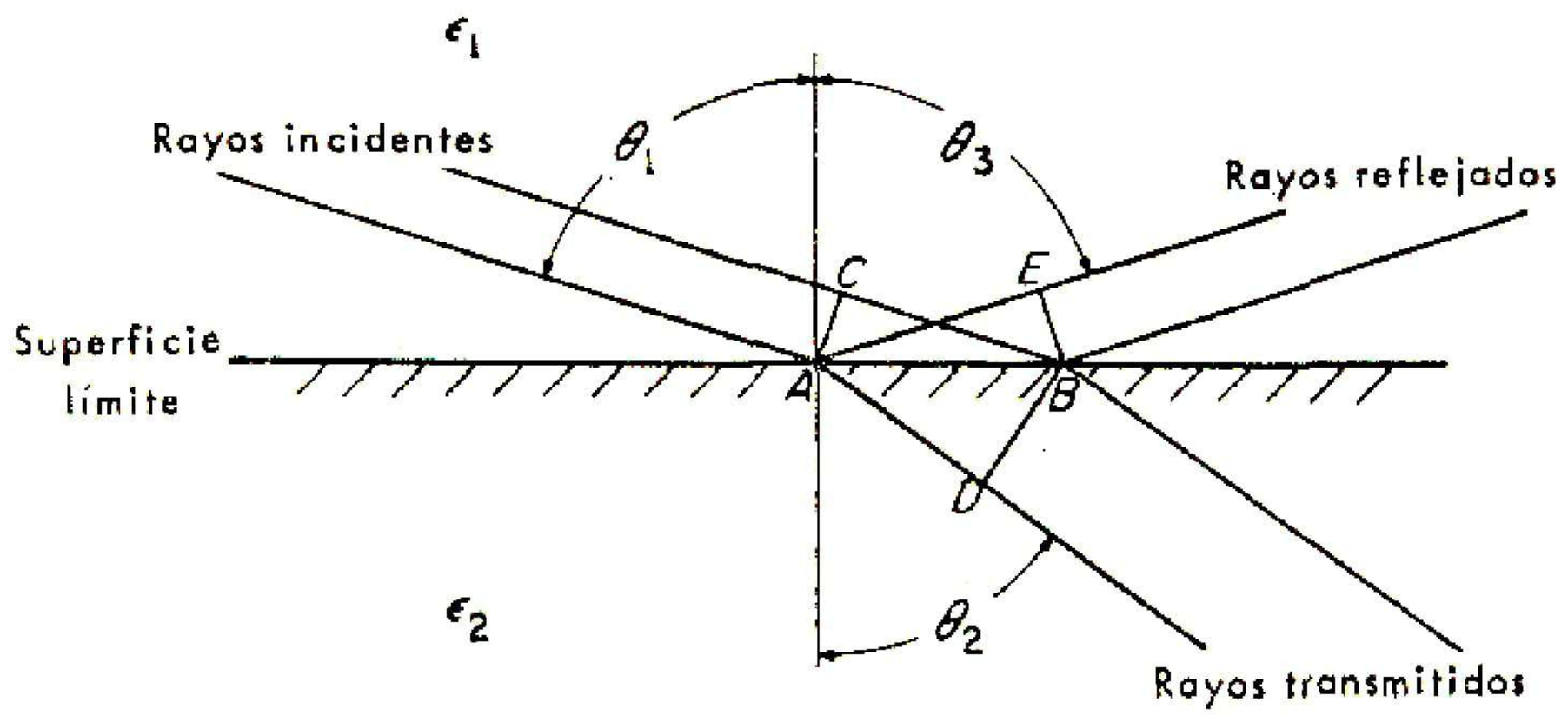


FIGURA 10-6

Considérese la fig.10-6, que indica dos rayos de la onda (un rayo es la línea normal a las superficies equifásicas).

En el diagrama, el rayo incidente (2) se desplaza la distancia *CB*, mientras que el rayo (1) reflejado la distancia *AE*. Si v_1 es la velocidad de la onda en el medio (1) y v_2 la velocidad en el medio (2), entonces

$$\frac{CB}{AD} = \frac{v_1}{v_2}$$

Como $CB = AB \operatorname{sen}\theta_1$ y $AD = AB \operatorname{sen}\theta_2$, resulta

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Las velocidades v_1 y v_2, se obtendrán en función de las constantes de los medios por las expresiones

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_v \varepsilon_1}}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_v \varepsilon_2}}$$

Por tanto

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad [10\text{-}7]$$

Además

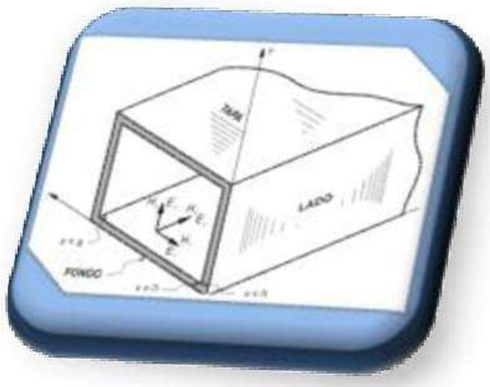
$$AE = CB$$

resultando con ello que $\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_3$, o sea

$$\theta_1 = \theta_3 \qquad [10\text{-}8]$$

El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión; el ángulo de incidencia se relaciones con el ángulo de refracción por la ecuación (10-8), que en óptica se conoce como *ley de los senos* o *de Snell.*

CAPÍTULO 11



GUIAS DE ONDAS

Objetivo

☞ Que el alumno adquiera un claro dominio en la fundamentación del comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en regiones limitadas por paredes conductoras paralelas a la dirección de propagación de la onda y de sección transversal uniforme.

En la propagación de ondas sólo se han considerado hasta aquí, las ondas planas uniformes alejadas de toda superficie guiadora. Desde ahora estudiaremos: ondas forzadas a seguir a lo largo de superficies conductoras o dieléctricas.

Ejemplos comunes de estas propagaciones los tenemos en las líneas ordinarias de los conductores o en cables coaxiales; ondas en las guías de ondas; fibras ópticas y las ondas guiadas sobre la superficie terrestre desde un transmisor hasta un receptor.

11.1. DEFINICIÓN DE GUÍA DE ONDA

Se denomina guía de onda propiamente dicha a todo conductor hueco utilizado para transmitir ondas electromagnéticas.

Toda configuración de campos eléctricos y magnéticos que exista dentro de una guía de onda, tiene que:

a) Ser una solución de las ecuaciones de Maxwell.

b) Deben satisfacer las condiciones de límite impuestas por las paredes de la guía. Por otra parte, si las paredes de la guía son conductores perfectos, no pueden existir componentes de campo eléctrico tangencial en las paredes.

Son muchas las configuraciones que pueden cumplir con estos requisitos. Cada una de ellas se denomina “Modo de Propagación”.

11.2. MODOS DE PROPAGACIÓN

El examen crítico de las diversas configuraciones o modos posibles en las guías de onda revela que todas ellas pertenecen a uno u otro modo de dos tipos fundamentales.

En uno de los tipos fundamentales, el campo eléctrico es en todas partes transversal al eje de la guía y no tiene componente alguna en la dirección del eje de la guía; el campo magnético asociado tiene, en cambio además de las componentes transversales, una componente en el eje de la guía. Los modos de este tipo se llaman: **Transversales Eléctricos, Modo TE o Modos H.**

En el otro tipo de distribución, la situación de los campos es inversa, siendo el campo magnético en todas partes transversal al eje guía, mientras que el campo eléctrico posee todas las componentes incluso en la dirección axial. Los modos de este tipo de llaman: **Transversales Magnéticos, Modos TM o Modos E.**

Ejemplo: el eje de la guía está en el eje Z del sistema de coordenadas

a) En el modo TE existe Ex, Ey, Hx, Hy, Hz. Ez igual a cero.

b) En el modo TM existe Hx, Hy, Ex, Ey, Ez. Hz igual a cero.

11.3. GUÍAS RECTANGULARES

Las guías de ondas prácticas toman usualmente la forma de prismas rectangulares o cilindros circulares. Son posibles otras formas de secciones transversales, pero en general estas otras formas no ofrecen ventajas eléctricas sobre las formas más simples en uso, y son más caras de fabricar.

11.3.1. Determinación de los Campos E y H dentro de la Guía de Ondas

Para determinar la configuración del campo electromagnético dentro de la guía se resuelven las ecuaciones de Maxwell sujetándolas a las condiciones límites en las paredes de la guía de ondas. Suponiendo de nuevo la perfecta conductibilidad de las paredes de la guía de ondas, las condiciones en los límites son simplemente que $E_{\tan}$ y H_{norm} sean cero en la superficie de los conductores. En las guías rectangulares las ecuaciones de Maxwell y de onda se expresarán en coordenadas rectangulares y la solución se obtendrá casi exactamente como en el caso de ondas entre planos paralelos.

Suponiendo que las variaciones en la dirección z pueden expresarse como $e^{-\gamma \cdot z}$, donde $\gamma=\alpha+j\beta$, las ecuaciones de Maxwell resultan en una región sin pérdidas $(\sigma = 0)$ dentro de la guía de onda:

$$\nabla \times \mathbf{H}\, e^{-\gamma z} = j\omega\varepsilon E e^{-\gamma z} \qquad [11\text{-}1]$$

$$\nabla \times E\, e^{-\gamma z} = -j\omega\mu H e^{-\gamma z} \qquad [11\text{-}2]$$

Buscaremos expresiones de los campos en el interior de la guía de ondas en función de *Ez* y *Hz*

Es decir:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad Hx = f\left(Hz;\, Ez\right) \\
&2) \quad Hy = f\left(Hz;\, Ez\right) \\
&3) \quad Ex = f\left(Hz;\, Ez\right) \\
&4) \quad Ey = f\left(Hz;\, Ez\right)
\end{aligned}
\qquad [11\text{-}3]
$$

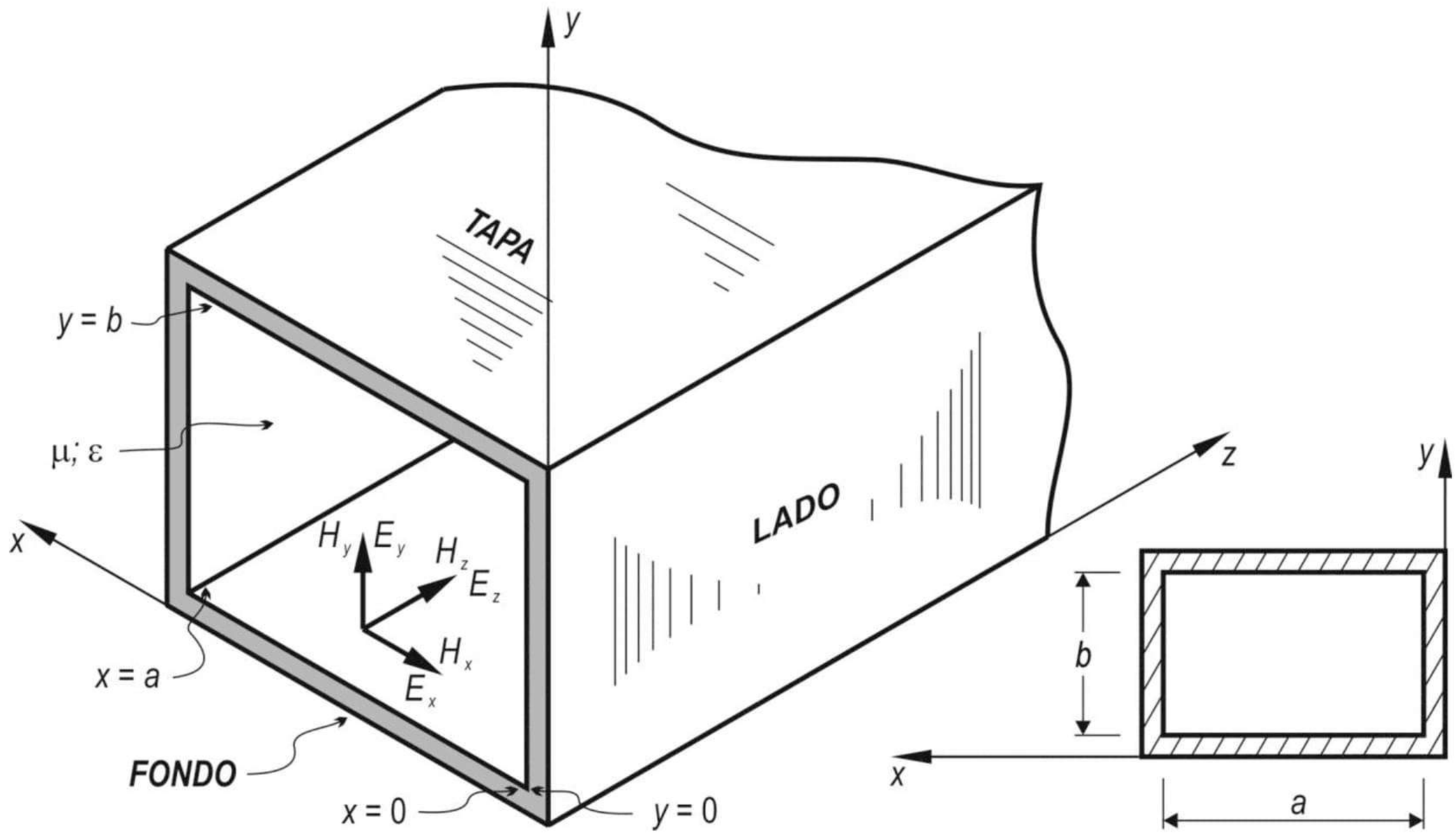


FIGURA 11-1

Partimos de la 1ra ecuación de Maxwell (11-1)

$$\nabla x H.e^{-\gamma.z} = j\varpi\varepsilon E e^{-\gamma.z}$$

Si realizamos el rotor del campo Magnético H y separamos las componentes de cada eje de la 1ra ecuación de Maxwell, tendremos:

$$\nabla x H.e^{-\gamma z} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_X & H_Y & H_Z \end{vmatrix} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial H_Z}{\partial y} - \frac{\partial H_Y}{\partial z}\right) - \hat{a}_y\left(\frac{\partial H_Z}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial z}\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial H_Y}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial y}\right)$$

Por lo tanto:

$$\hat{a}_x\left(\frac{\partial H_Z}{\partial y} - \frac{\partial H_Y}{\partial z}\right)e^{-\gamma Z} = j\varpi\varepsilon E_x e^{-\gamma Z}\,\hat{a}_x$$

$$\hat{a}_y\left(\frac{\partial H_Z}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial z}\right)e^{-\gamma Z} = -j\varpi\varepsilon E_Y e^{-\gamma Z}\,\hat{a}_y$$

$$\hat{a}_z\left(\frac{\partial H_Y}{\partial x}-\frac{\partial H_X}{\partial y}\right)e^{-\gamma Z}=j\varpi\varepsilon E_Z e^{-\gamma Z}\hat{a}_z$$

De la misma manera que hicimos con el campo magnético *H* en la primera ecuación de Maxwell, hacemos el rotor del campo eléctrico *E* de la segunda ecuación (11-22).

$$\nabla xE.e^{-\gamma.z}=-j\varpi\mu He^{-\gamma.z}$$

$$\nabla x\,E\cdot e^{-\gamma z}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_X & E_Y & E_Z\end{vmatrix}=\hat{a}_x\left(\frac{\partial E_Z}{\partial y}-\frac{\partial E_Y}{\partial z}\right)-\hat{a}_y\left(\frac{\partial E_Z}{\partial x}-\frac{\partial E_X}{\partial z}\right)+\hat{a}_z\left(\frac{\partial E_Y}{\partial x}-\frac{\partial E_X}{\partial y}\right)$$

Si ahora separamos las componentes de cada eje, tendremos:

$$\hat{a}_x\left(\frac{\partial E_Z}{\partial y}-\frac{\partial E_Y}{\partial z}\right)e^{-\gamma Z}=-j\varpi\mu H_x e^{-\gamma Z}\hat{a}_x$$

$$\hat{a}_y\left(\frac{\partial E_Z}{\partial x}-\frac{\partial E_X}{\partial z}\right)e^{-\gamma Z}=j\varpi\mu H_Y e^{-\gamma Z}\hat{a}_y \qquad [11\text{-}5]$$

$$\hat{a}_z\left(\frac{\partial E_Y}{\partial x}-\frac{\partial E_X}{\partial y}\right)e^{-\gamma Z}=-j\varpi\mu H_Z e^{-\gamma Z}\hat{a}_z$$

Resolvemos la derivada con respecto "z" en las componentes de la primera y segunda ecuación de Maxwell para poder simplificar los $e^{-\gamma z}$.

En definitiva nos quedan:

$$1)\quad \frac{\partial H_z}{\partial y}+\gamma H_y=j\omega\varepsilon E_x \qquad 4)\quad \frac{\partial E_z}{\partial y}+\gamma E_y=-j\omega\mu H_x$$

$$2)\quad \frac{\partial H_z}{\partial x}+\gamma H_x=-j\omega\varepsilon E_y \qquad 5)\quad \frac{\partial E_z}{\partial x}+\gamma E_x=j\omega\mu H_y \qquad [11\text{-}6]$$

$$3)\quad \frac{\partial H_y}{\partial x}+\frac{\partial H_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon E_z \qquad 6)\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial y}=-j\omega\mu H_z$$

11.3.1 Determinación de los campos E_X, E_Y, H_X y H_Y a partir de (11-6)

Con las ecuaciones 1 y 5 podremos encontrar las ecuaciones de las componentes H_y y E_x, mientras que con las ecuaciones 2 y 4 podremos encontrar las ecuaciones para H_x y E_y.

Buscaremos $Ex=f\left(Hz;\,Ez\right)$ y $Hy=f\left(Hz;\,Ez\right)$

Obtención de la ecuación de E_X

Partimos de la ecuación 5

$$\frac{\partial E_Z}{\partial x} + \gamma E_X = j\omega\mu H_Y$$

Despejando Hy

$$H_Y = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_X + \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_Z}{\partial x}$$

Reemplazando Hy en la ecuación 1

$$\frac{\partial H_Z}{\partial y} + \gamma H_Y = j\omega\varepsilon E_X$$

$$j\omega\varepsilon E_X = \frac{\partial H_Z}{\partial y} + \gamma\left(\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_X + \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_Z}{\partial x}\right)$$

Sacando factor común *Ex*

$$E_X\left(\frac{\gamma^2}{j\omega\mu} - j\omega\varepsilon\right) = -\frac{\gamma}{j\omega\mu}\frac{\partial E_Z}{\partial x} - \frac{\partial H_Z}{\partial y}$$

Multiplicando ambos miembros por j$\omega\mu$

$$E_X\left(\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon\right) = -\gamma\frac{\partial E_Z}{\partial x} - j\varpi\mu\frac{\partial H_Z}{\partial y}$$

Llamaremos

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon$$

En definitiva E_X queda:

$$E_X = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial x} - j\frac{\varpi\mu}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial y} \qquad [11\text{-}7]$$

Obtención de la ecuación de H_Y

Retornando a la ecuación 1

$$\frac{\partial H_Z}{\partial y} + \gamma H_Y = j\varpi\varepsilon E_x$$

Despejando H_Y

$$H_Y = \frac{j\varpi\varepsilon}{\gamma} E_x - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_Z}{\partial y}$$

Reemplazando la E_X obtenida en función de E_Z y H_Z

$$H_Y = \frac{j\varpi\varepsilon}{\gamma}\left(-\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial x} - j\frac{\varpi\mu}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial y}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_Z}{\partial y}$$

Sacando factor común $\frac{\partial H_z}{\partial y}$

$$H_Y = -\frac{j\varpi\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial x} + \frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{\gamma h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial y} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_Z}{\partial y} = -\frac{j\varpi\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial x} + \left(\frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{\gamma h^2} - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\partial H_Z}{\partial y}$$

Operando y reemplazando h^2 en el numerador del término entre paréntesis

$$\frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{\gamma h^2} - \frac{1}{\gamma} = \frac{\varpi^2\mu\varepsilon - h^2}{h^2\gamma} = \frac{\varpi^2\mu\varepsilon - \gamma^2 - \varpi^2\mu\varepsilon}{h^2\gamma} = -\frac{\gamma^2}{h^2\gamma} = -\frac{\gamma}{h^2}$$

En definitiva H_Y queda en función de E_Z y H_Z

$$H_Y = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial y} - j\frac{\omega\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial x} \qquad [11\text{-}8]$$

Obtención de la ecuación de E_Y

Partimos de la ecuación 4

$$\frac{\partial E_Z}{\partial y} + \gamma E_Y = -j\omega\mu H_X$$

Despejando H_X

$$H_X = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_Z}{\partial y} - \frac{\gamma}{j\omega\mu}E_Y$$

Reemplazo H_X en la ecuación 2

$$\frac{\partial H_Z}{\partial x} + \gamma H_X = -j\varpi\varepsilon E_Y$$

$$-j\varpi\varepsilon E_Y = \frac{\partial H_Z}{\partial x} + \gamma\left(-\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_Z}{\partial y} - \frac{\gamma}{j\omega\mu}E_Y\right)$$

Sacando factor común Ey

$$E_Y\left(\frac{\gamma^2}{j\varpi\mu} - j\varpi\varepsilon\right) = -\frac{\gamma}{j\omega\mu}\frac{\partial E_Z}{\partial y} + \frac{\partial H_Z}{\partial x}$$

Multiplicando ambos miembros por $j\omega\mu$

$$E_Y\left(\gamma^2 + \varpi^2\mu\varepsilon\right) = -\gamma\frac{\partial E_Z}{\partial y} + j\varpi\mu\frac{\partial H_Z}{\partial x}$$

Recordando que llamamos

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon$$

En definitiva E_Y queda en función de E_Z y H_Z

$$E_Y = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial y} + j\frac{\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial x} \qquad [11\text{-}9]$$

Obtención de la ecuación de H_X

Retornando a la ecuación 2

$$\frac{\partial H_Z}{\partial x} + \gamma H_X = -j\omega\varepsilon E_Y$$

Despejando Hx

$$H_X = -j\frac{\omega\varepsilon}{\gamma}E_Y - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_Z}{\partial x}$$

Reemplazando la Ey obtenida en función de E_Z y H_Z

$$H_X = -j\frac{\omega\varepsilon}{\gamma}\left(-\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial y} + j\frac{\varpi\mu}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial x}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_Z}{\partial x}$$

Sacando factor común $\frac{\partial H_Z}{\partial x}$

$$H_X = j\frac{\omega\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial y} + \left(\frac{\varpi^2\mu\varepsilon}{\gamma h^2} - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\partial H_Z}{\partial x} = j\frac{\omega\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial x}$$

En definitiva H_X queda en función de E_Z y H_Z:

$$H_X = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial x} + j\frac{\omega\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial y} \qquad [11\text{-}10]$$

Las ecuaciones obtenidas de H_X, H_Y, E_X y E_Y las presentamos en el siguiente cuadro:

$$H_X = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial x} + j\frac{\omega\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial y} \qquad [11\text{-}10]$$

$$H_Y = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial y} - j\frac{\omega\varepsilon}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial x} \qquad [11\text{-}8]$$

$$E_X = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial x} - j\frac{\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial y} \qquad [11\text{-}7]$$

$$E_Y = -\frac{\gamma}{h^2}\frac{\partial E_Z}{\partial y} + j\frac{\omega\mu}{h^2}\frac{\partial H_Z}{\partial x} \qquad [11\text{-}9]$$

Donde

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon$$

Estas ecuaciones dan las relaciones existentes entre los campos del interior de la guía de ondas.

Se notará que si *Ez* y *Hz* son ambas cero, *todos* los campos de la guía de ondas se desvanecerán. Por tanto, para la transmisión por guía de onda (sin conductor interior) debe existir una componente *Ez* o *Hz*.

Como en el caso de ondas entre planos paralelos, es conveniente dividir las configuraciones posibles del campo dentro de la guía en dos juegos: (TM) Transversal Magnético para $H_Z = 0$ y (TE) Transversal Eléctrico para $E_Z = 0$.

Para la guía de onda rectangular mostrado en la fig.11-2 las condiciones en los límites son:

$Ex = Ez = 0$	en	$y = 0$	e	$y = b$
$Ey = Ez = 0$	en	$x = 0$	y	$x = a$

11.3.2. Ecuaciones de E_Z y H_Z

Recordando el Laplaciano del campo eléctrico y magnético obtendremos ecuaciones diferenciales para luego encontrar las ecuaciones de E_Z y H_Z dentro de la guía de ondas.

$$\nabla^2 E\, e^{-\gamma z} = \gamma^2 E\, e^{-\gamma z}$$

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

para $\sigma = 0$ $\quad \gamma^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon$

$$\nabla^2 E\, e^{-\gamma Z} = -\omega^2 \mu \varepsilon E\, e^{-\gamma Z}$$
$$\nabla^2 H\, e^{-\gamma Z} = -\omega^2 \mu \varepsilon H\, e^{-\gamma Z} \qquad [11\text{-}11]$$

Resolviendo el Laplaciano las ecuaciones de onda para Ez y Hz serán:

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_Z = -\omega^2 \mu\varepsilon E_Z \qquad [11\text{-}12]$$

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial y^2} + \gamma^2 H_Z = -\omega^2 \mu\varepsilon H_Z \qquad [11\text{-}13]$$

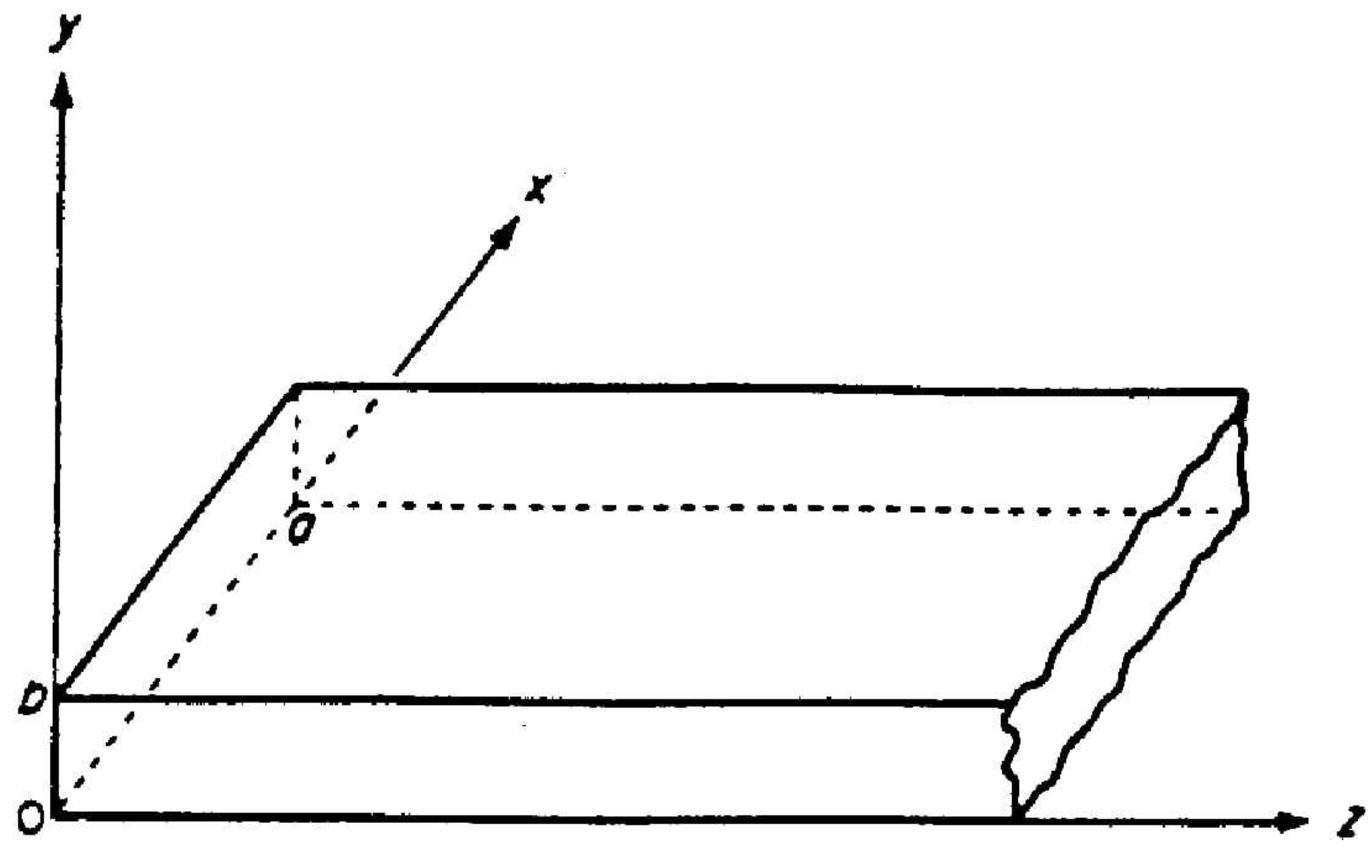


FIGURA 11-2: Guía rectangular

11.4. ONDAS TRANSVERSALMENTE MAGNÉTICAS (TM) EN GUÍAS RECTANGULARES.

Las ecuaciones de onda para E_Z y H_Z son ecuaciones en derivadas parciales que pueden resolverse por la técnica usual de suponer una solución producto. Este procedimiento conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyas soluciones son conocidas. Si tomamos la ecuación de E_Z notaremos que:

$$E_z(x, y, z) = E_z^0(x, y)e^{\gamma z}$$

Sea

$$E_z^0 = X\ Y \qquad [11\text{-}14]$$

Donde X es una función solamente de *x* e *Y* una función solo de *y*. Llevando (14) a (12) resulta

$$Y\ \frac{d^2X}{dx^2} + X\ \frac{d^2Y}{dy^2} + \gamma^2\ X\,Y = -\omega^2\,\mu\,\varepsilon\,X\,Y$$

Haciendo $h^2 = \gamma^2 + \omega^2\,\mu\,\varepsilon$, como antes, se convierte en

$$Y\ \frac{d^2X}{dx^2} + X\ \frac{d^2Y}{dy^2} + h^2 X\,Y = 0$$

Dividiendo por *XY*,

$$\frac{1}{X}\ \frac{d^2X}{dx^2} + h^2 = -\frac{1}{Y}\ \frac{d^2Y}{dy^2} \qquad [11\text{-}15]$$

La ecuación (11-15) iguala una función sólo de x y otra sólo de y. El único modo de que se pueda cumplir tal relación para todos los valores de x e y es haciendo que cada una de estas funciones sea igual a alguna constante, por ejemplo, A^2 . Así,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+h^2=A^2 \qquad [11\text{-}16]$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-A^2 \qquad [11\text{-}17]$$

Una solución de (11-16) es

$$X=C_1\cos Bx+C_2\,\mathrm{sen}\,Bx$$

Donde

$$B^2=h^2-A^2$$

La solución de (11-17) es

$$Y=C_3\cos Ay+C_4\,\mathrm{sen}\,Ay$$

Esto da

$$\begin{aligned}E_z^0=X\;Y=C_1C_3\cos Bx\cos Ay+C_1C_4\cos Bx\,\mathrm{sen}\,Ay+\\+C_2C_3\,\mathrm{sen}\,Bx\cos Ay+C_2C_4\,\mathrm{sen}\,Bx\;\mathrm{sen}\,Ay\end{aligned} \qquad [11\text{-}18]$$

Las constantes C_1, C_2, C_3, C_4, A y B deben seleccionarse para cumplir las condiciones en los límites, es decir,

$$E_z^0=0$$

cuando

$$x=0 \qquad x=a \qquad y=0 \qquad y=b$$

Si $x = 0$, la expresión general (11-18) se convierte en

$$E_z^0=C_1\;C_3\cos Ay+C_1\;C_4\,\mathrm{sen}\,Ay$$

Para que se desvanezca E_z^0 (para todo el valor de y) es evidente que C_1 debe ser cero. Entonces la expresión general de E_z^0 será

$$E_z^0=C_2C_3\,\mathrm{sen}\,Bx\;\cos Ay+C_2C_4\,\mathrm{sen}\,Bx\;\mathrm{sen}\,Ay \qquad [11\text{-}19]$$

Cuando $y = 0$, la ecuación (9) se reduce a

$$E_z^0=C_2C_3\,\mathrm{sen}\,Bx$$

Para que se haga cero para todo valor de x es posible lograrlo de dos modos: que C_2 sea cero o que sea C_3 (suponiendo $B\neq 0$). Haciendo C_2 = 0 en (11-19) resultaría E_z^0 idénticamente cero, así que en su lugar se hará cero a C_3, y entonces expresión general (11-19) de E_z^0 se reduce a

$$E_z^0=C_2C_4\,\mathrm{sen}\,Bx\;\mathrm{sen}\,Ay \qquad [11\text{-}20]$$

Además de las dos constantes de amplitud C = $C_2 C_4$, constantes desconocidas, A y B, sin embargo, hay todavía dos condiciones más en los límites a aplicar.

Si $x = a$

$$E_z^0 = C \text{ sen } Ba \text{ sen } Ay$$

Para que se anule a todo valor de y (y suponiendo $A \neq 0$, ya que $A = 0$ haría a E_z idénticamente cero), la constante B debe tener siempre el valor

$$B = \frac{m\pi}{a} \qquad \text{cuando} \qquad m = 1, 2, 3, ...$$

También si $y = b$,

$$E_z^0 = C \text{ sen} \frac{m\pi}{a} x \text{sen } Ab$$

Y para que se anule a todo valor de x, A debe tener el valor

$$A = \frac{n\pi}{b} \qquad \text{cuando} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Por tanto, la expresión final de E_Z es:

$$E_Z = C.\text{sen} \frac{m\pi}{a} x.\text{sen} \frac{n\pi}{b} y \qquad [11\text{-}21]$$

Haciendo uso de las ecuaciones (11-7), (11-8), (11-9), y (11-10) y poniendo $\bar{\gamma} = j\bar{\beta}$ (medio sin pérdidas $\alpha = 0$) para las frecuencias superiores a la corte, se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
E_X &= \frac{-j\beta C}{h^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x.\text{sen} \frac{n\pi}{b} y \\
E_Y &= \frac{-j\beta C}{h^2} \frac{n\pi}{b}.\text{sen} \frac{m\pi}{a} x.\cos \frac{n\pi}{b} y \\
H_X &= \frac{j\varpi\varepsilon C}{h^2} \frac{n\pi}{b}.\text{sen} \frac{m\pi}{a} x.\cos \frac{n\pi}{b} y \\
H_y &= \frac{-j\varpi\varepsilon C}{h^2} \frac{m\pi}{a}.\cos \frac{m\pi}{a} x.\text{sen} \frac{n\pi}{b} y
\end{aligned} \qquad [11\text{-}22]$$

Donde

$$B = \frac{m\pi}{a} \qquad \text{y} \qquad A = \frac{n\pi}{b} \qquad [11\text{-}23]$$

Estas expresiones muestran cómo cada uno de los componentes de las intensidades de campo eléctrico y magnético varía con x e y.

La variación en el tiempo a lo largo del eje de la guía, es decir, en dirección z, se expresa poniendo en cada una de estas expresiones el factor $e^{j\omega t - \bar{\gamma} z}$ y tomándose entonces su parte real.

11.4.1. Constante de Propagación y frecuencia de Corte

En la obtención de los campos se encontró necesario restringir las constantes A y B a valores dados por las expresiones (11-22). En estas expresiones a y b son el ancho y altura de la guía y m y n son números enteros de semiciclos en el ancho y en el alto de la guía.

Como por definición

$$A^2 + B^2 = h^2$$

Y también

$$h^2 = \bar{\gamma}^2 + \omega^2 \mu \varepsilon$$

Por lo tanto la constante de propagación $\bar{\gamma}$ resulta

$$\bar{\gamma} = \sqrt{h^2 - \omega^2 \mu \varepsilon}$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{A^2 + B^2 - \omega^2 \mu \varepsilon}$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon} \qquad [11\text{-}24]$$

La ecuación (11-24) define la constante de propagación para la guía rectangular en ondas TM. En bajas frecuencias, en las que $\omega^2\mu\varepsilon$ es pequeño, γ será un número real. La constante de propagación que se encuentra en la teoría de transmisión por líneas ordinarias es un número complejo, es decir, $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + j\bar{\beta}$ siendo $\bar{\alpha}$ la constante de atenuación (atenuación por unidad de longitud) y $\bar{\beta}$ la constante de fase (defasaje por unidad de longitud).

Si γ es real, $\bar{\beta}$ debe ser cero, y no puede haber defasaje a lo largo de la línea. Esto significa que no puede haber propagación de onda a lo largo del tubo en bajas frecuencias. Sin embargo, al tomar frecuencias mayores se alcanza un valor de ω que hará la expresión bajo radical de (11-24) igual a cero. Si llamamos a este valor ω_c (pulsación de corte); entonces – para todo valor de ω mayor que ω_c – la constante $\bar{\gamma}$ de propagación será imaginaria y tendrá la forma $\bar{\gamma} = j\bar{\beta}$ y habrá propagación. En el caso que consideramos (paredes perfectamente conductoras) la constante de atenuación α es cero para todas las frecuencias, tales que $\omega > \omega_c$. En estas frecuencias

$$\beta = \sqrt{\varpi^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad [11\text{-}25]$$

Para hallar la frecuencia de corte debemos hacer $\omega_c{}^2 \mu\ \varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

El valor de ω_c está dado por

$$\varpi_C = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad \omega_c = 2\pi f_c \qquad [11\text{-}26]$$

La frecuencia de corte, es decir, aquella bajo la cual no puede haber propagación de ondas, es

$$f_C = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad [11\text{-}27]$$

y la longitud de onda de corte correspondiente será

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \qquad [11\text{-}28]$$

con lo que resulta

$$f_c \lambda_c = v_0$$

La velocidad de propagación de la onda estará dada por

$$v = \frac{\varpi}{\beta} = \frac{\varpi}{\sqrt{\varpi^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \qquad [11\text{-}29]$$

Esta última expresión indica que la velocidad de propagación de la onda en el guiaondas es mayor que la velocidad de fase en el espacio libre. Al aumentar la frecuencia sobre la de corte, la velocidad de fase disminuye desde un valor infinitamente grande teniendo a *c*, velocidad en el espacio libre (vacío) cuando la frecuencia crece sin límite.

Como la longitud de onda en la guía está dada por $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{f}$, será más larga que la correspondiente en el espacio libre. Según la expresión de $\bar{v}$

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\beta} \qquad [11\text{-}30]$$

En las expresiones anteriores la única restricción sobre *m* y *n* es la de que sean números enteros. Sin embargo, según las ecuaciones (11-22) y (11-23) se ve que si *m* y *n* es cero, los campos son idénticamente nulos. Por tanto, el valor menor posible, tanto de *m* como de *n*, es cuando $m = n = 1$; sustituyendo estos valores en las ecuaciones (11-23) se obtienen los campos de menor frecuencia tipo TM, que pueden propagarse por la guía. Esta onda particular se denomina TM_{11}. Las ondas de mayor orden (mayores valores de *m* y *n*) requieren frecuencias mayores para propagarse a lo largo del guiaondas de dimensiones dadas.

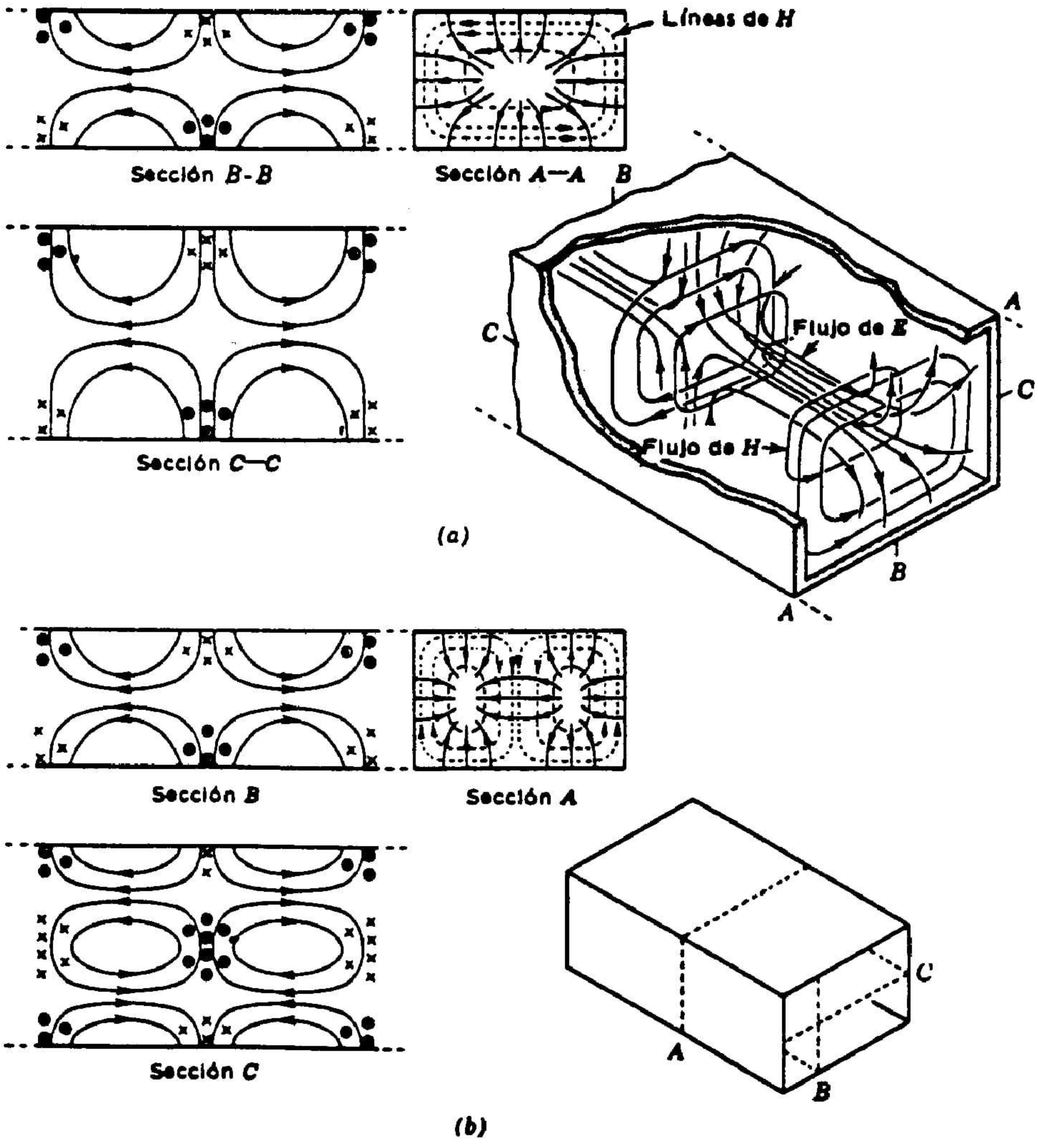


FIGURA 11-3: Dos modos TM de bajo orden en una guía de ondas rectangular. (a) El modo TM_{11} (b) El modo TM_{21}

11.5. ONDAS TRANSVERSALMENTE ELÉCTRICAS (TE) EN GUÍAS RECTANGULARES

Las ecuaciones de las ondas transversalmente eléctricas ($E_z = 0$) pueden obtenerse de un modo similar a las ondas magnéticamente transversales. Esta obtención se deja como ejercicio para el estudiante. Se encontrará que H_z^0 tiene la misma forma general que la de la ecuación (11-18). Esta se diferenciará respecto a x y a y para encontrar

E_x^0, E_y^0, H_x^0 y H_y^0. Las condiciones en los límites se aplican seguidamente a E_x^0 y E_y^0 para dar las expresiones

$$H_Z = C.\cos\frac{m\pi}{a}x.\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$H_X = \frac{j\beta C}{h^2}\frac{m\pi}{a}.\text{sen}\frac{m\pi}{a}x.\cos\frac{n\pi}{b}y \qquad [11\text{-}31]$$

$$E_X = \frac{j\varpi\mu C}{h^2}\frac{n\pi}{b}.\cos\frac{m\pi}{a}x.\text{sen}\frac{n\pi}{b}y$$

$$H_Y = \frac{j\beta C}{h^2}\frac{n\pi}{b}.\cos\frac{m\pi}{a}x.\text{sen}\frac{n\pi}{b}y$$

$$E_Y = \frac{-j\varpi\mu C}{h^2}\frac{m\pi}{a}.\text{sen}\frac{m\pi}{a}x.\cos\frac{n\pi}{b}y$$

En las expresiones anteriores se ha puesto $\bar{\gamma}$ igual a $j\bar{\beta}$, que es valedero para las frecuencias superiores a la de corte.

Se encuentra que para las ondas TE las ecuaciones $\bar{\beta}$, f_c, λ_c, $\bar{v}$ y $\bar{\lambda}$ son idénticas a las ondas TM. Sin embargo, en las ecuaciones (11-31) de las ondas TE se encontrará la posibilidad de hacer a *m* o a *n* (pero no a ambas simultáneamente) igual a cero sin dar lugar a que se anule la onda. Es decir, es posible la existencia de una onda de orden inferior al caso de las ondas TM. El orden inferior de la onda TE en guías rectangulares es, por tanto, la onda TE_{10}.

Este modo, que tiene la menor frecuencia de corte, se denomina *modo dominante*.

Se ve que los subíndices *m* y *n* representan el número de variaciones (alternativas) del campo a lo largo de las coordenadas *x* e *y*, respectivamente. Por convenio[1], se hace coincidir la coordenada x con la anchura (dimensión mayor), de manera que la onda TE_{10} tiene una frecuencia de corte inferior a la TE_{01}.

Por razones prácticas en la mayoría de la experimentación con guías rectangulares se emplea el modo dominante TE_{10}. Para esta onda, sustituyendo $m = 1$ y $n = 0$, se obtienen los campos

$$\left.\begin{aligned} H_z^0 &= C\cos\frac{\pi x}{a} \\ H_x^0 &= \frac{j\bar{\beta}aC}{\pi}\,\text{sen}\frac{\pi x}{a} \\ E_y^0 &= \frac{-j\omega\mu aC}{\pi}\,\text{sen}\frac{\pi x}{a} \\ E_x^0 &= H_y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11\text{-}32]$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$f_c = \frac{c}{2a} \qquad \lambda_c = 2a \qquad h = \frac{\pi}{a}$$

Para la onda TE_{10} la frecuencia de corte es aquella frecuencia para la que la media longitud de onda correspondiente (en el vacío) es igual a la anchura de la guía. En las ondas TE_{10} la frecuencia de corte es independiente de la dimensión *b*.

Modos "TE" o "H"

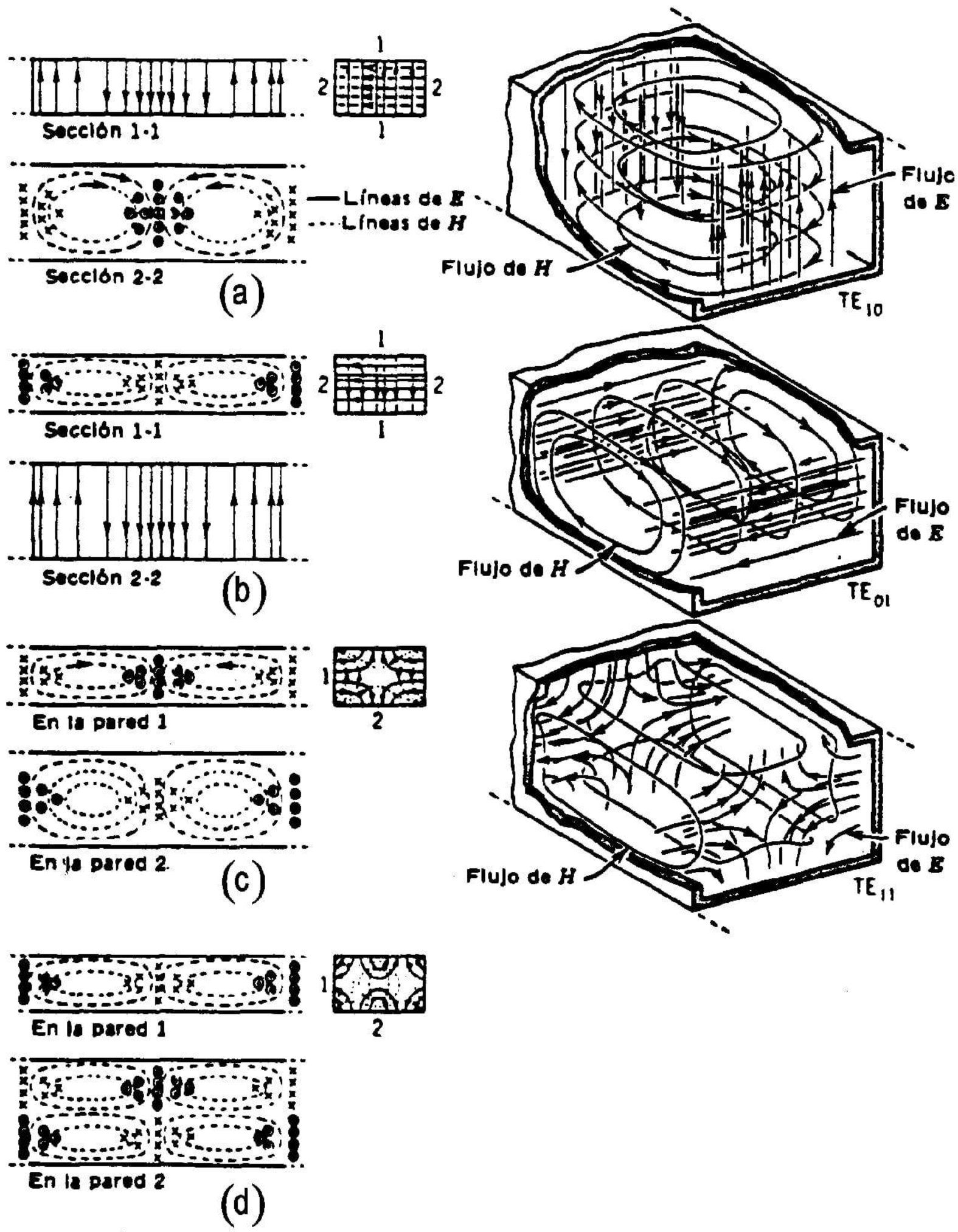


FIGURA 11-4: Unos cuantos modos TE_{mn} de bajo orden de la guía de ondas rectangular
(a) Modo TE_{10} (b) Modo TE_{01} (c) Modo TE_{11} (d) Modo TE_{21}

El tipo de onda representado en el conductor hueco rectangular de la fig. 11-4 recibe el nombre de *Onda-* H_{10} (onda uno-cero), *μ onda-TE*$_{10}$.

Las propiedades de esta onda difieren del modo de propagación de las ondas tratadas aquí:

- la longitud de onda en el conductor hueco es mayor de lo que sería en el espacio libre $\lambda > \lambda_0$;

- a causa de la mayor longitud de onda, también la velocidad de fase, es decir, la velocidad del frente de ondas, es mayor a la velocidad de la luz (en el tiempo de un período, es decir, de una oscilación, la fase de la onda recorre siempre una longitud de onda) $V_P > C_0$;

- por el contrario la velocidad de la energía, es decir, la velocidad de la energía de la onda, junto con la de transmisión de las informaciones, es menor que la velocidad de la luz, $V_E > C_0$; esto se debe al camino recorrido por cada una de las ondas planas que forman después la onda- TE_{10}.

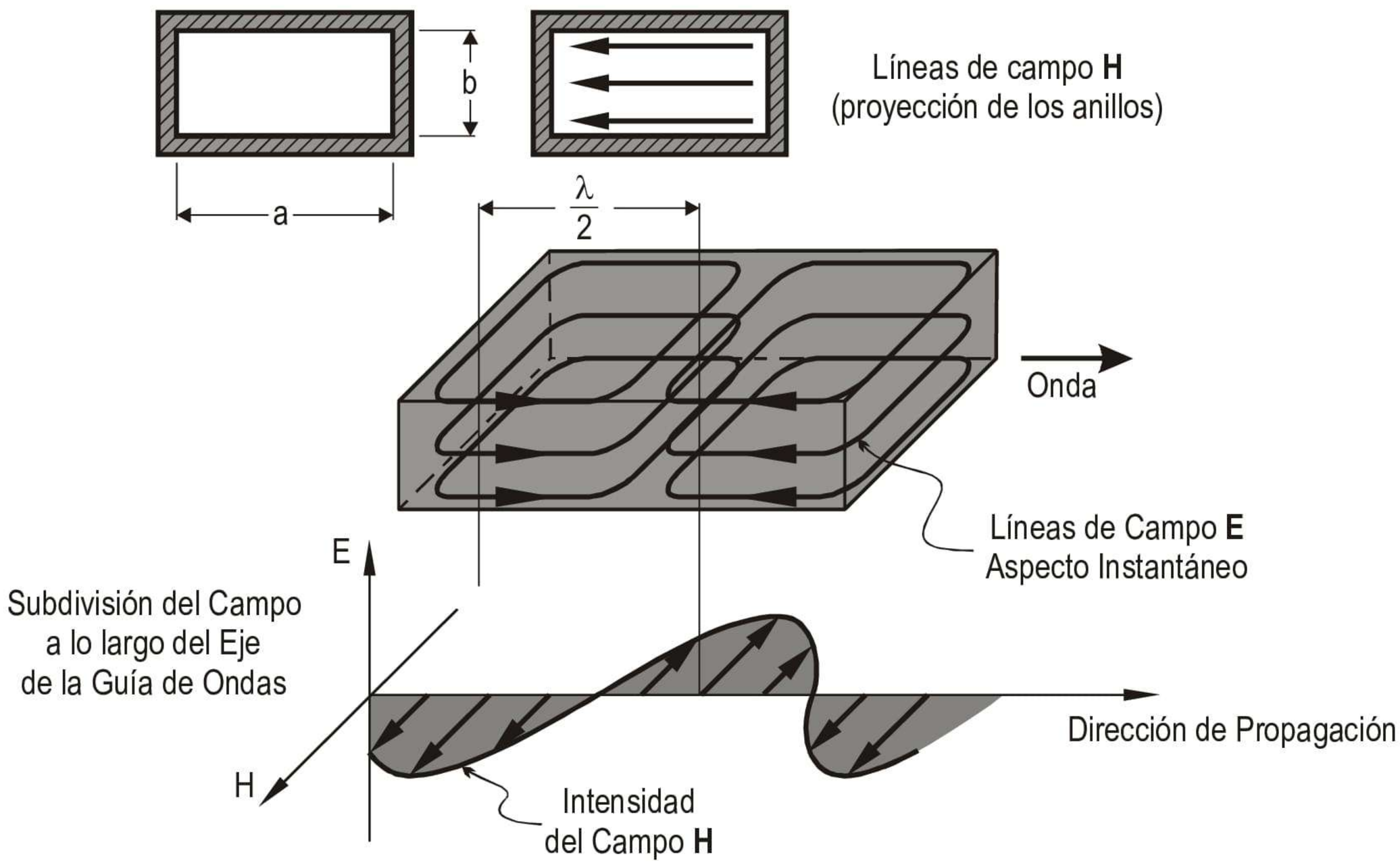


FIGURA 11-5: Líneas de los campos H y E generadas por una ondas que se propaga en el interior de un conductor hueco (guía de ondas)

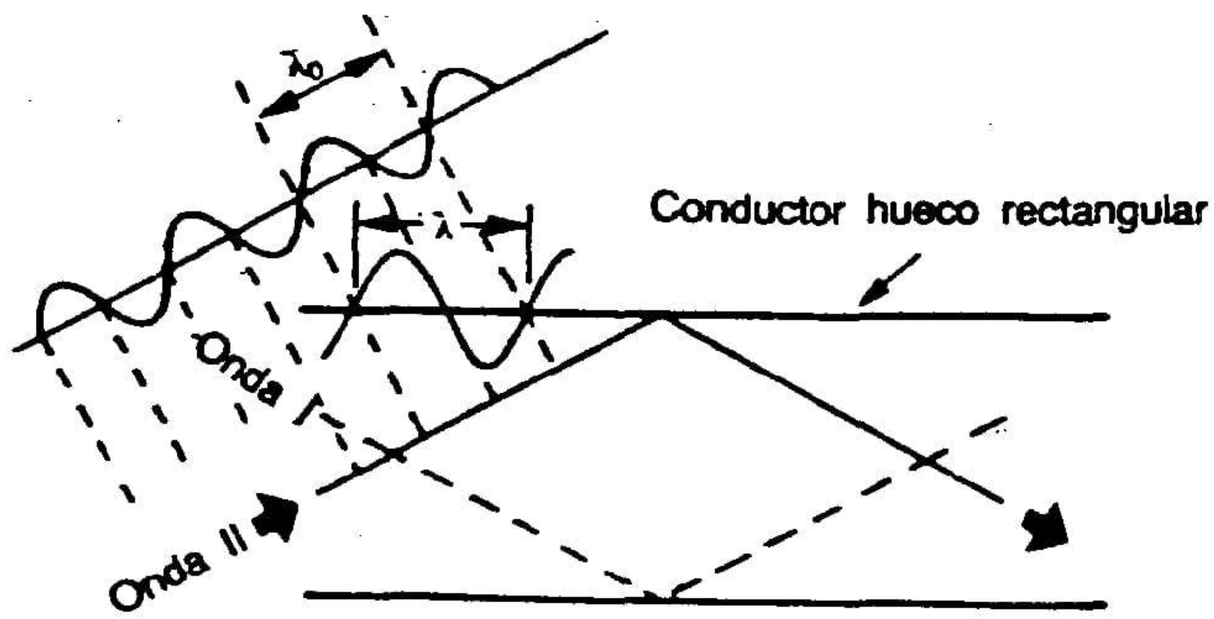


FIGURA 11-6: Longitud de onda y velocidad de la energía en un conductor hueco

En la fig.11-6 se puede ver que la longitud de onda del conductor hueco es mayor que la del espacio libre ($\lambda > \lambda_0$): λ es la proyección de λ_0 en las paredes del conductor hueco. A causa del camino en zigzag que cada una de las dos ondas recorre en el conductor hueco, la velocidad de la energía es

menor que la velocidad de la luz y va decreciendo según disminuye la frecuencia hasta que cesa la transmisión de la onda.

La causa de esto reside en el ángulo formado por las dos ondas planas (es la base de la formación de la onda TE_{10}) con el eje del conductor hueco: el ángulo y, por tanto, el número de recorridos en zig-zag aumenta al disminuir la frecuencia.

11.5.1. Frecuencias límites en una guía de ondas

El campo de frecuencias utilizable con un conductor hueco está limitado, tanto inferior como superiormente. Con frecuencias por debajo del límite mínimo $f_{mín}$ no existe propagación de las ondas en el conductor hueco (sistema de un conductor). Para las frecuencias más elevadas existe un valor límite f_{max} en el cual, junto a la onda fundamental, se superponen otros tipos de ondas muy complicadas y de altísima frecuencia. Se pueden calcular $f_{mín}$ y f_{max} para el conductor hueco según las dimensiones geométricas de la sección del conductor. Por ejemplo, para el conductor rectangular se tiene:

$$f_{mín} = \frac{C_0}{2a} \qquad\qquad f_{máx} = \frac{C_0}{a}$$

(siendo a = ancho del conductor hueco)

Como se ve, las frecuencias son independientes del alto b del conductor.

En la práctica, las guías de ondas de sección rectangular se utilizan únicamente en el campo de las frecuencias comprendidas entre $f_{mín}$ y f_{max}. En estas condiciones sólo se propaga la onda TE_{10}, onda fundamental del conductor hueco rectangular.

11.5.2. Otros tipos de guías de ondas

Existen otras varias formas de conductores de onda huecos, de los cuales el más importante es el de sección circular. Recientemente se ha creado un nuevo conductor de ondas: es el conductor de tiras, que consiste en dos conductores metálicos separados por un aislante, por ejemplo de cerámica (fig.11-7).

Como en la transmisión se debe perder la menor cantidad posible de energía, uno de los parámetros más importante a tener en cuenta al elegir los conductores es la atenuación de energía. Las ondas sufren notables pérdidas durante su propagación debido a las corrientes que se forman en las paredes del conductor (y en el caso del cable coaxial, también en el conductor interno). Comparando distintos tipos de conductores de ondas con la misma superficie de sección, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- a bajas frecuencias, el cable coaxial tiene el mejor valor de atenuación, es decir, pérdidas mínimas;
- por encima de cierta frecuencia, que depende de la superficie de la sección, las guías de ondas presentan pérdidas menores que los cables coaxiales.

FIGURA 11-7: Diferentes tipos de guías de ondas

Tabla de Guías de Ondas Standard de Hewlett Packard

	Designación de Bandas HP	Rango de Frecuencia Modo TE_{10} (GHz)	Material B-Bronce A-Aluminio P-Plata	Ancho (a) Pulgadas	Alto (b) Pul-gadas	Ancho (a) cm	Altura (b) cm	Frecuencia de corte (Ghz)
1		1,12 - 1,70	B A	6,500	3,250	16,510	8,255	0,909
2		1,45 - 2,20	B A	5,100	2,550	12,954	6,477	1,158
3		1,70 - 2,60	B A	4,300	2,150	10,922	5,461	1,373
4		2,20 - 3,30	B A	3,400	1,700	8,636	4,318	1,737
5	S	2,60 - 3,95	B A	2,840	1,340	7,214	3,404	2,079
6		3,30 - 4,90	B A	2,290	1,145	5,817	2,908	2,579
7	G	2,95 - 5,85	B A	1,872	0,872	4,755	2,215	3,155
8	C	4,90 - 7,05	B A	1,590	0,759	4,039	1,928	3,714
9	J	5,85 - 8,20	B A	1,372	0,622	3,485	1,580	4,304
10	H	7,05 - 10,00	B A	1,122	0,497	2,850	1,262	5,263
11		7,00 - 11,00	B A	1,020	0,510	2,591	1,295	5,790
12	**X**	**8,20 - 12,40**	**B A**	**0,900**	**0,400**	**2,286**	**1,016**	**6,562**
13	M	10,00 - 15,00	B A	0,750	0,375	1,905	0,953	7,874
14	P	12,40 - 18,00	B A P	0,622	0,311	1,580	0,790	9,494
15	N	15,00 - 22,00	B A P	0,510	0,255	1,295	0,648	11,579
16	K	18,00 - 26,50	B A P	0,420	0,170	1,067	0,432	14,061

	Designación de Bandas HP	Rango de Frecuencia Modo TE_{10} (GHz)	Material B-Bronce A-Aluminio P-Plata	Ancho (a) Pulgadas	Alto (b) Pulgadas	Ancho (a) cm	Altura (b) cm	Frecuencia de corte (Ghz)
17		22,00 - 33,00	B A P	0,340	0,170	0,864	0,432	17,369
18	R	28,50 - 40,00	B A P	0,280	0,140	0,711	0,356	21,091
19		33,00 - 50,00	B P	0,224	0,112	0,569	0,284	26,364
20		40,00 - 60,00	B P	0,188	0,094	0,478	0,239	31,412
21	V	50,00 - 75,00	B P	0,148	0,074	0,376	0,188	39,902
22		60,00 - 90,00	B P	0,122	0,061	0,310	0,155	48,406
23		75,00 - 110,00	B P	0,100	0,050	0,254	0,127	59,055

11.6. APLICACIÓN DE LA TABLA DE GUÍAS DE ONDAS DE HEWLETT PACKARD

Por ejemplo la llamada guía de ondas rectangular para la banda X, supuestamente llena de aire y de dimensiones interiores a = 0,9 pulg y b = 0,4 pulg (0,02286 x 0,01016 m) tiene la frecuencia de corte que se obtiene de

$$f_{c.10} = \frac{C}{2a} = \frac{3\times10^8}{2(0,02286)} = 6,557\ GHz$$

En tanto que la frecuencia de corte del siguiente modo de mayor orden, TE_{20}, queda como $f_{c.\,20}$ = 13.11 *GHz*.

$$f_{c.01} = \frac{c}{2b} = 14,77\ \ Ghz$$

De (8-59b), el modo TE_{01} da $f_{c.\,20}$ = 14.77 *GHz*, en tanto que usando (11-27) obtiene frecuencias de corte para los modos TE_{11} y TM_{11} todavía más altas ($f_{c.11}$ = 16.10 *GHz*). En la fig.11-8(*a)* se representan sus posiciones en una escala de frecuencias que muestra por qué es posible la propagación de energía electromagnética mediante el modo dominante más sencillo TE_{10} en una guía de ondas rectangular manteniendo la frecuencia generada f arriba de la frecuencia de corte para TE_{10} pero por debajo de las frecuencias de corte de los demás modos.

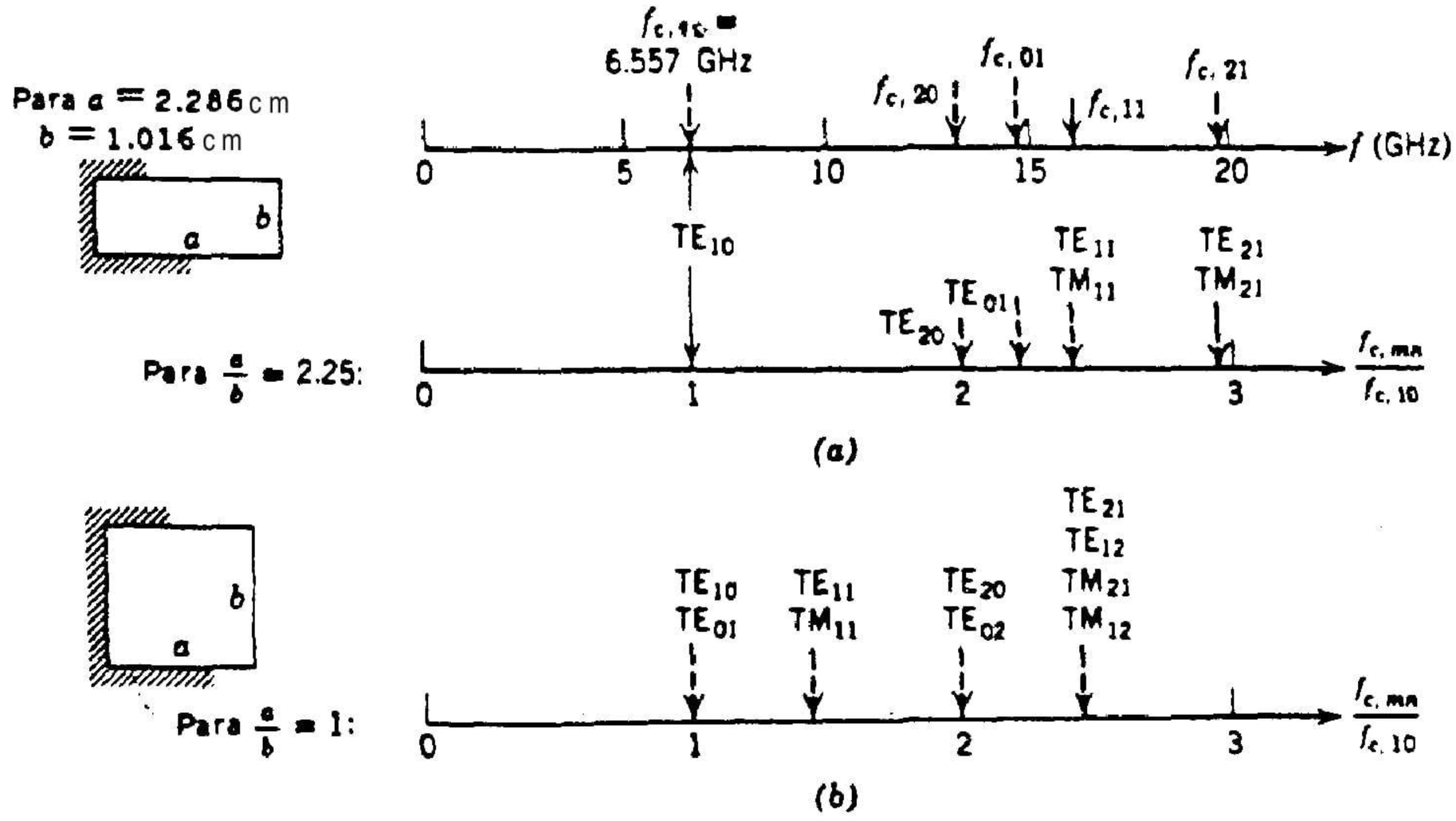


FIGURA 11-8: Frecuencias de corte pata los de menor orden en las guías de ondas rectangulares y cuadradas. (a) Para a/b = 2,25. En la gráfica inferior se muestran las frecuencias de corte relativas a $f_{c,10}$ (b) Para a/b = 1

Esta sección asegura un modo TE_{10} de onda viajera y el desvanecimiento de los demás modos, por lo que se justifica la designación dominante para el modo TE_{10} de propagación. Por ejemplo, se escoge la banda de 8.2 a 12.4 GHz como la banda *X*; las frecuencias que se propagan sólo en el modo TE_{10} dominante en una guía de ondas rectangular de 0.4 pulg x 0.9 pulg.

Es evidente que una guía de ondas *cuadrada* ($a = b$) no posee solamente un modo dominante, ya que entonces los modos TE_{10} y TE_{01} tienen frecuencias idénticas de corte. La figura 11-8(*b*) muestra las posiciones de las frecuencias de corte de los modos de menor orden para una guía de ondas cuadradas en una escala relativa de frecuencias. Comparando la figura 11-8(*a*) con (*b*) revela que el uso de una guía de ondas rectangular con $a > b$ como en (*a*) de esa figura proporciona un control deseable en la polarización del campo *E* del modo propagado.

11.7. USOS DE UNA GUÍA DE ONDA

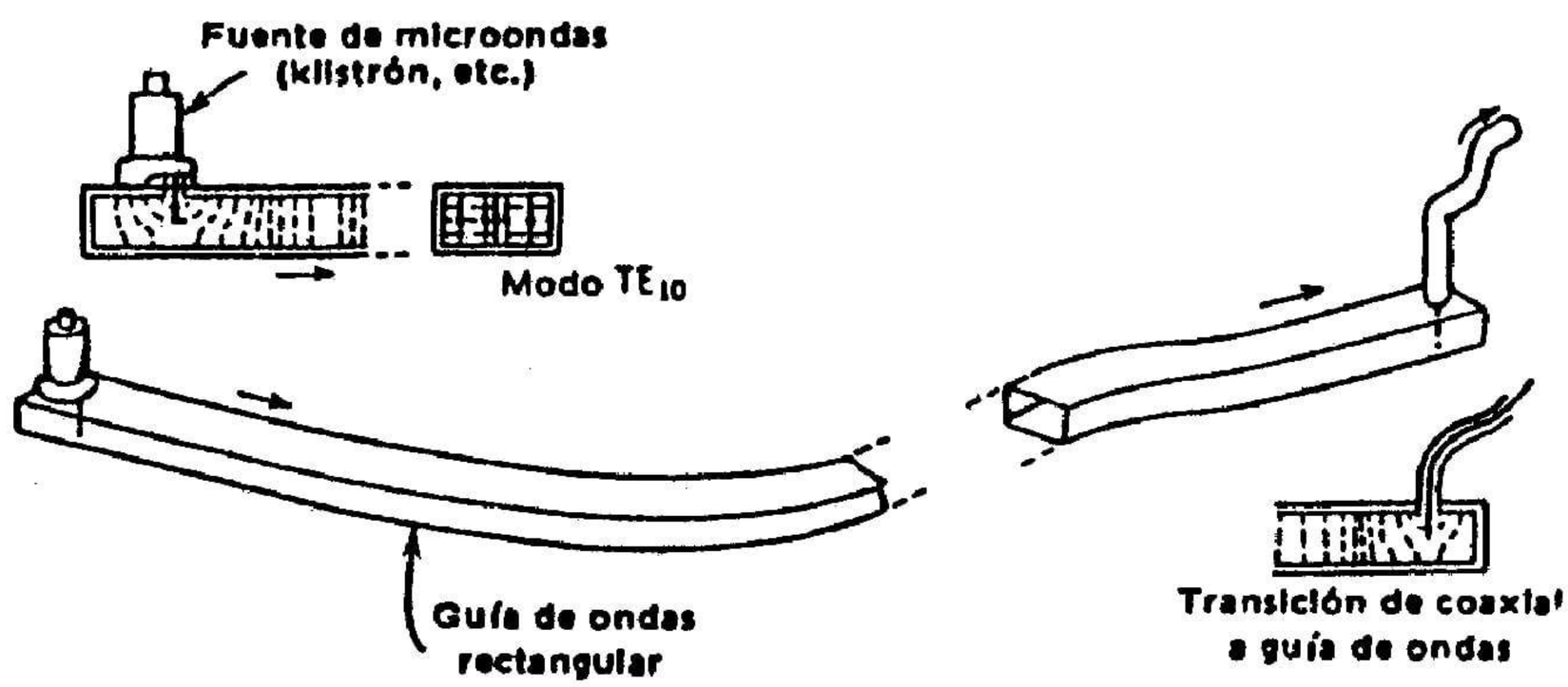


FIGURA 11-9: Sistema Típico con guía de ondas, que muestra el inicio del modo dominante y una transición de guía de ondas a línea de transmisión coaxial

La figura 11-9 ilustra la manera como se conecta una fuente de energía de microondas (un Klistrón, magnetrón, etc.) a una guía de ondas utilizando un pequeño alambre de antena que sobresale dentro de la guía de ondas, tal que el alineamiento del alambre concuerde con la polarización del modo dominante transmitido. También se puede extraer en forma semejante la energía del otro extremo, si se desea, mediante el conductor central de una línea coaxial que se utilice como una antena receptora (transición de guía de ondas a coaxial). De esa manera, la propagación de la energía a lo largo de la guía de ondas mediante el modo TE_{10} asegura la polarización conocida de campo, necesaria para la transmisión eficiente y la recuperación de la energía.

11.8. MÉTODOS DE EXCITAR UNA GUÍA DE ONDA

Los métodos posibles de alimentar o excitar las guías de ondas rectangulares de manera que puedan iniciarse o generarse estas ondas se indican en la fig.11-10.

Debemos recordar los conceptos de polarización teniendo en cuenta que "*el campo eléctrico es siempre paralelo al conductor*", para que exista E_Z el elemento radiante debe ser paralelo al eje de la guía; y para que E_Z sea cero, el elemento radiante debe estar perpendicular al eje de la guía.

Para producir un modo particular se elige la sonda o elemento radiante que produzca líneas de **E** y **H** acorde a lo definido en cada tipo de modo de propagación.

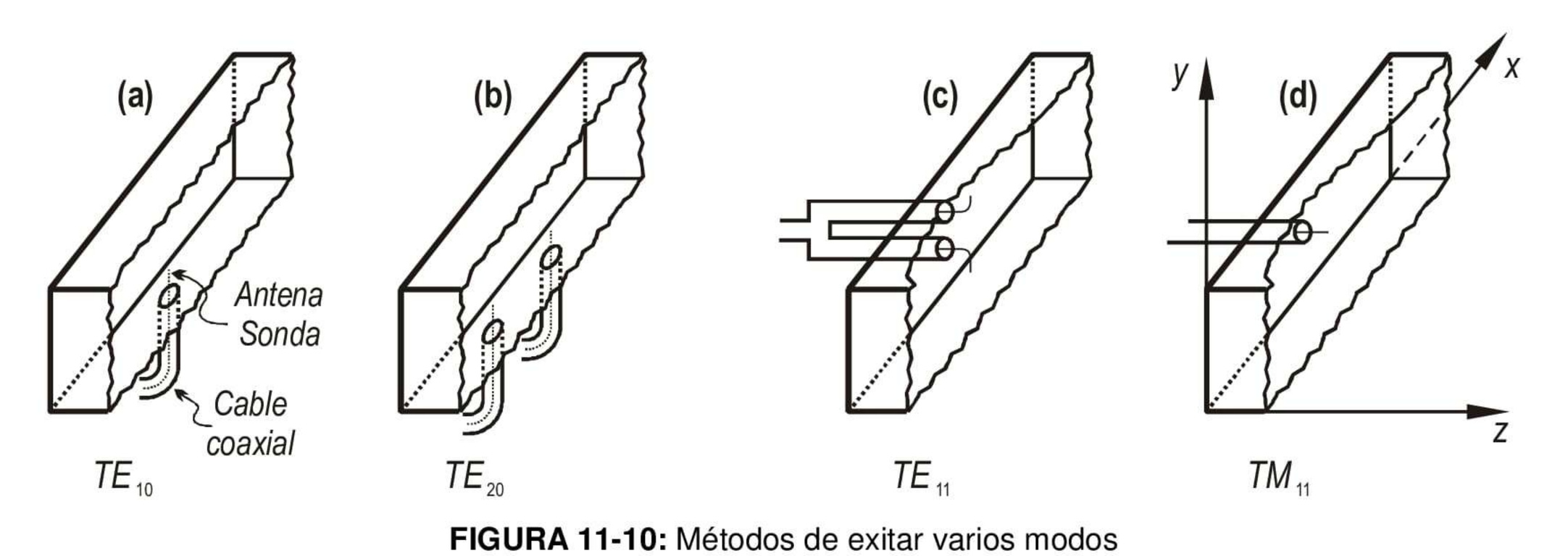


FIGURA 11-10: Métodos de exitar varios modos

Así, en la fig.11-10(a) la sonda es paralela al eje *y*; y produce líneas de campo magnético **H** que están en el plano *z-x*. Esta es la configuración correcta para el modo TE_{10}. En (b) las sondas paralelas inyectan fases opuestas, tendiendo a producir el modo TE_{20}. En (c) puede observarse la disposición de los elementos radiantes o sondas para el modo TE_{11}. En (d) la sonda paralela al eje *z* produce líneas de campo magnético en el plano *x-y* que es lo correcto para los modos *TM*. La configuración de los campos debido a las sondas puede obtenerse con las ecuaciones de cada componente analizadas en los puntos 11.4. y 11.5.

Es posible la existencia de varios modos simultáneos en una guía si la frecuencia es superior a la de corte de tales modos particulares. Sin embargo, se eligen a menudo las dimensiones de las guías para que sólo pueda existir el modo dominante.

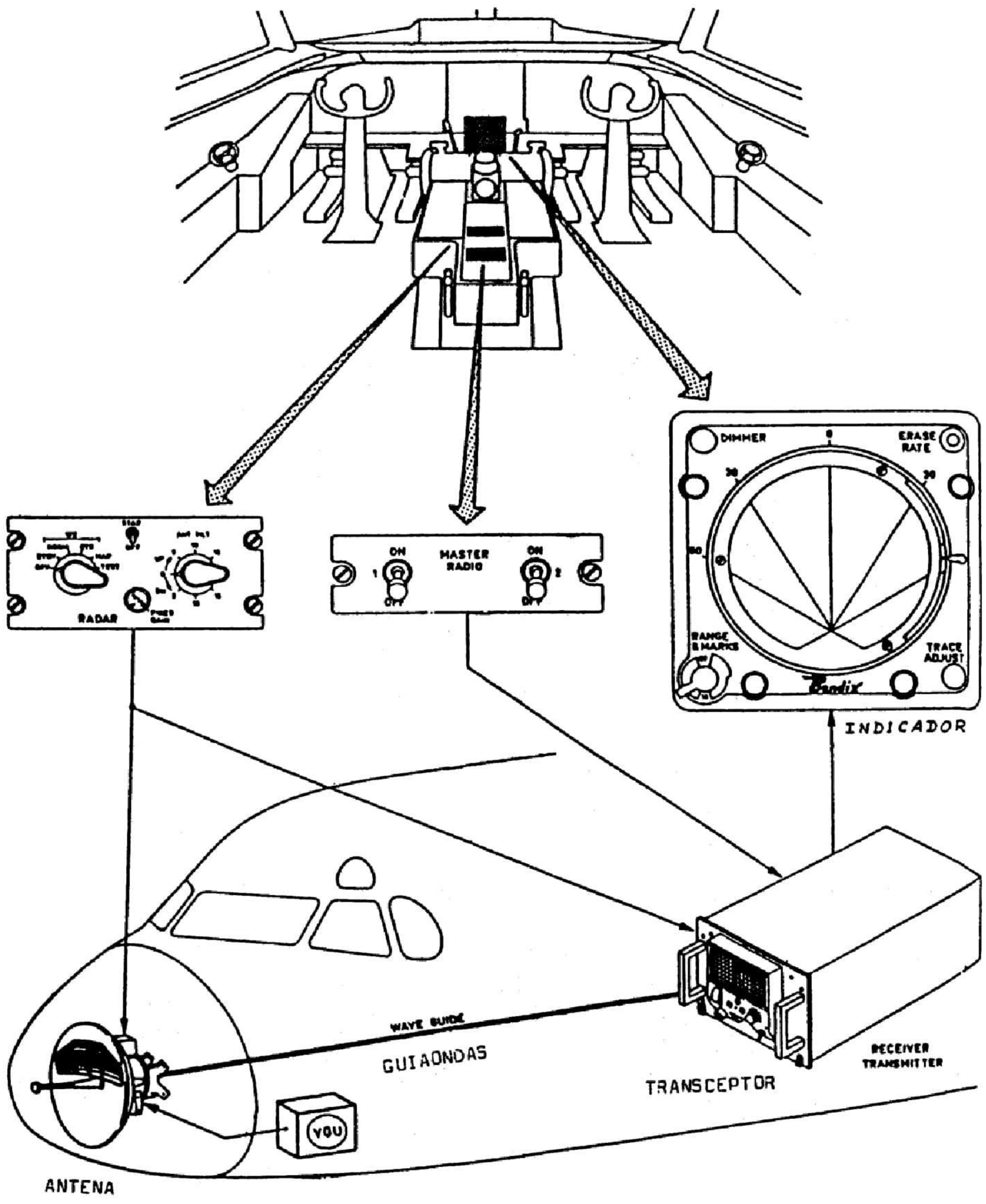


FIGURA 11-11: Aplicación de una Guía de Onda en un Radar Meteorológico

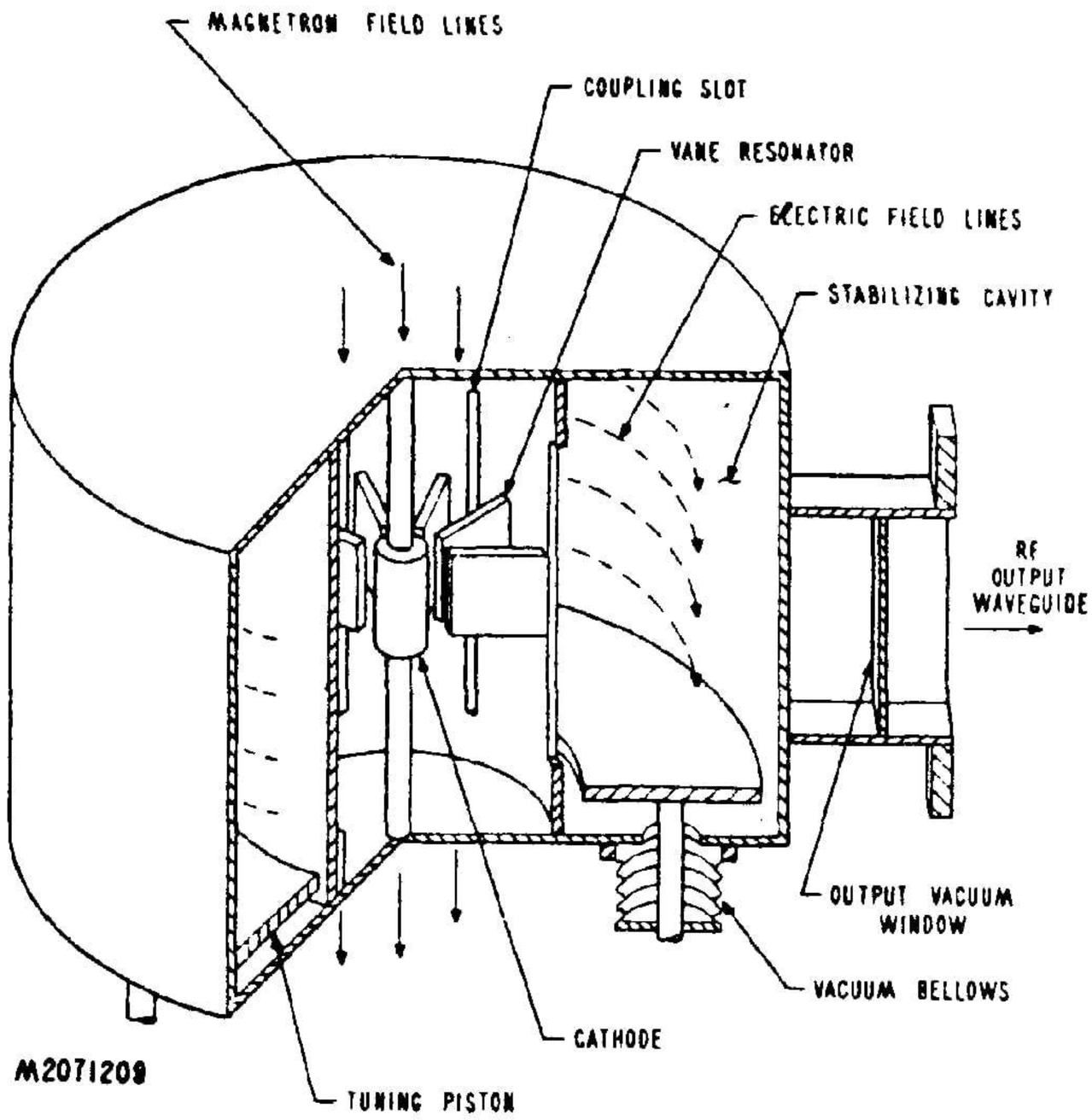


FIGURA 11-9: Vista esquemática de un Magnetrón Coaxial

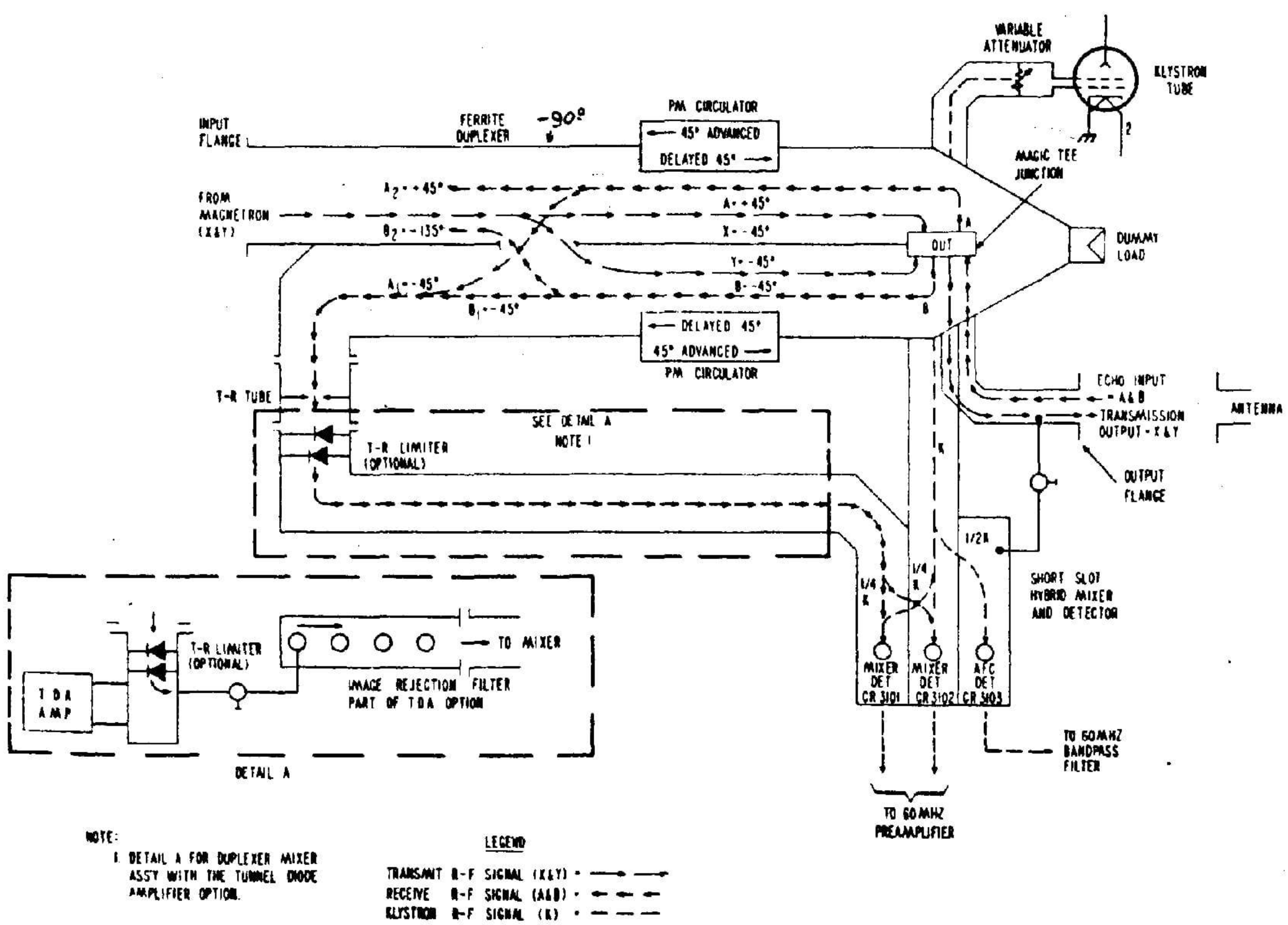
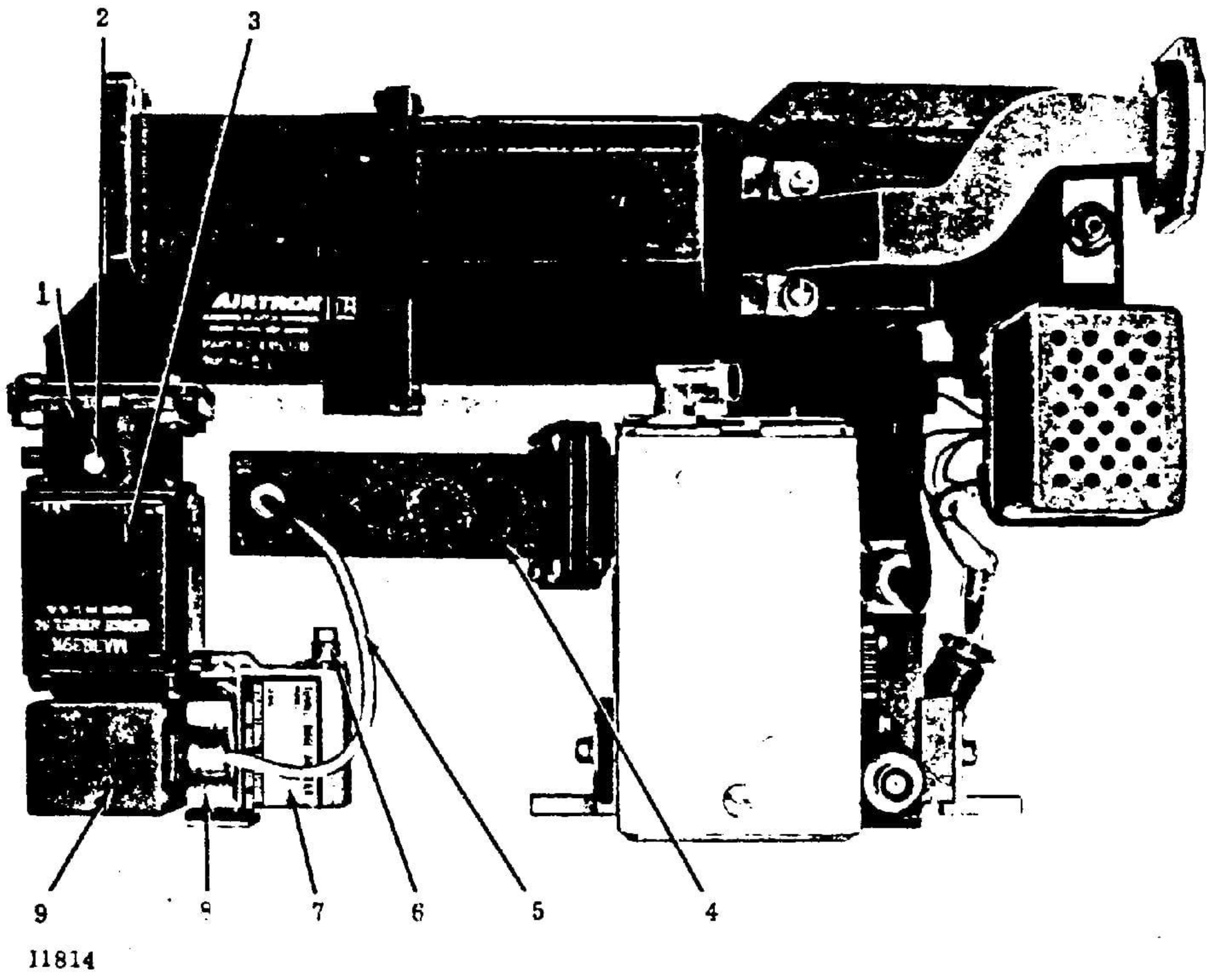


FIGURA 11-10: Duplexer Mixer Assembly



LEGEND FOR FIGURE

1. TR LIMITER, P/O V3901 (PRESSURIZED T-R TUBE SECTION)
2. CAP, KEEP ALIVE VOLTAGE INPUT, P/O V3901
3. TR LIMITER, P/O V3901 (DIODE CAVITY SECTION)
4. IMAGE REJECTION FILTER, FL3901
5. CABLE, COAXIAL, W3901 (TDA OUTPUT TO FL3901)
6. CONNECTOR, J3901 (12 VDC INPUT FROM R-T UNIT POWER SUPPLY)
7. TDA, TUNNEL DIODE AMPLIFIER (AMPLIFIER SECTION OF A3901)
8. CONNECTOR, COAXIAL ASSEMBLY, P/O A3901 (CONNECTS TDA AND CIRCULATOR)
9. CIRCULATOR, FOUR PORT, P/O A3901

FIGURA 11-11: X Band Preamplifier Assembly (Option 10RDX-1A)

11.9. MECANISMO DE RADIACIÓN DE UNA GUÍA DE ONDA

La propiedad del momento de las líneas de fuerza ofrece una imagen física del mecanismo de la radiación. Una onda que se desplaza en una guía de ondas terminada en una bocina propaga energía en un espacio en la forma ilustrada.

Las cargas son transportadas por la onda hacia la abertura de la bocina, estas cargas móviles constituyen las corrientes de propagación en la guía. En la abertura, las corrientes son abruptamente terminadas, y el momento de las líneas las transporta una corta distancia hacia el interior del espacio, terminando sin embargo sobre cargas que se han reunido cerca de la abertura. Luego la onda que

llega a la abertura de la bocina alterna su sentido, y las cargas que terminan en las líneas precedentes son neutralizadas, liberando sus puntos terminales.

Estas líneas, en lugar de desaparecer unen sus extremos de polaridad opuesta, formando así lazos cerrados. Como lazos cerrados, se propagan hacia la derecha, empujadas por la presión de radiación de las líneas próximas.

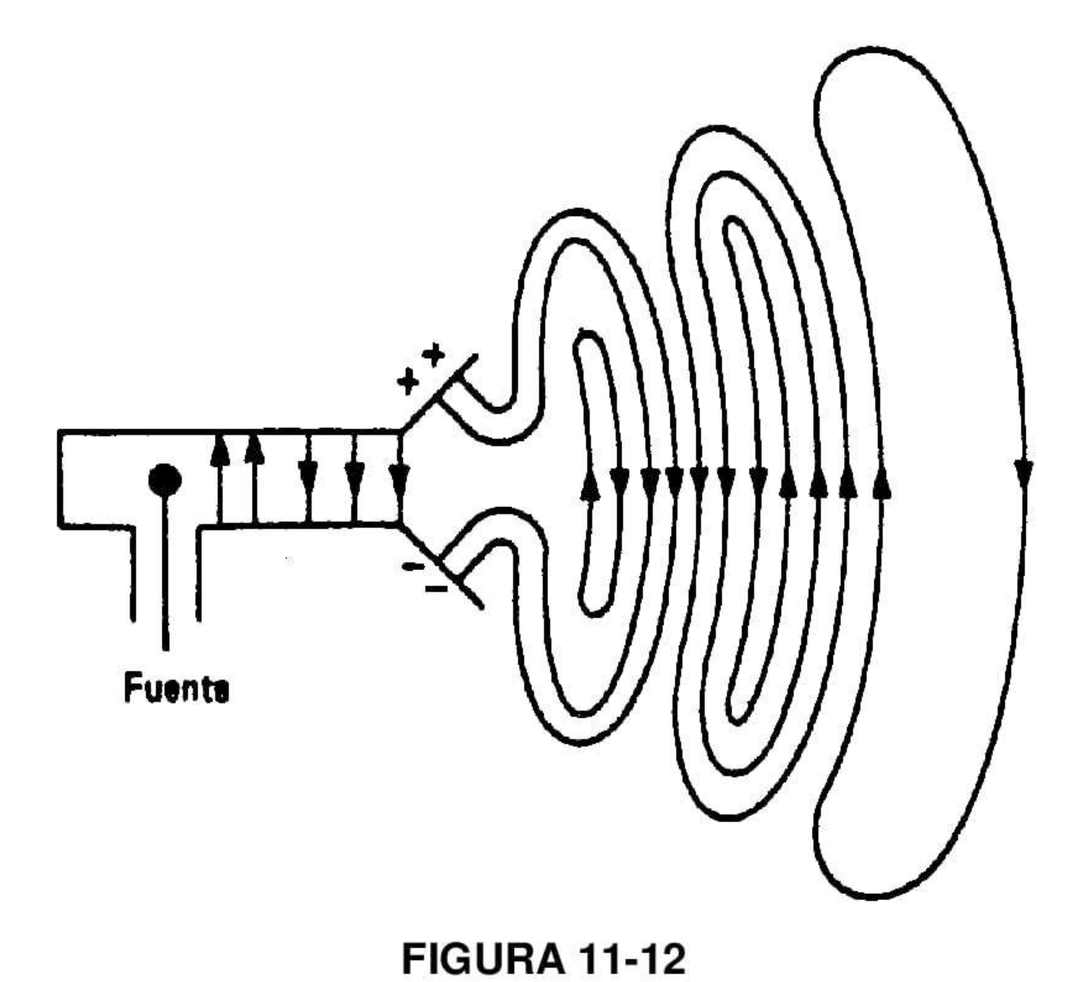


FIGURA 11-12

No se irradia toda la energía incidente. Algo de ella se refleja en la continuidad de la abertura y vuelve hacia la fuente, formando una onda estacionaria en la guía. Cierta cantidad es almacenada cerca de la abertura, creando una carga reactiva. Este es el *campo de inducción*, que influye en la impedancia de la bocina.

En la vecindad inmediata a la bocina, el campo de radiación no tiene exactamente la misma distribución y constancia que más allá de la misma. Esta región es denominada el *campo cercano o región de Fresnel.*

A grandes distancias de la bocina, la intensidad relativa de la radiación *como una función del ángulo barrido por la bocina* no cambia con la distancia desde la bocina. El "modelo" electromagnético de la bocina ya ha sido establecido. Esta región es denominada el *campo lejano* o *región de Fraunhofer*.

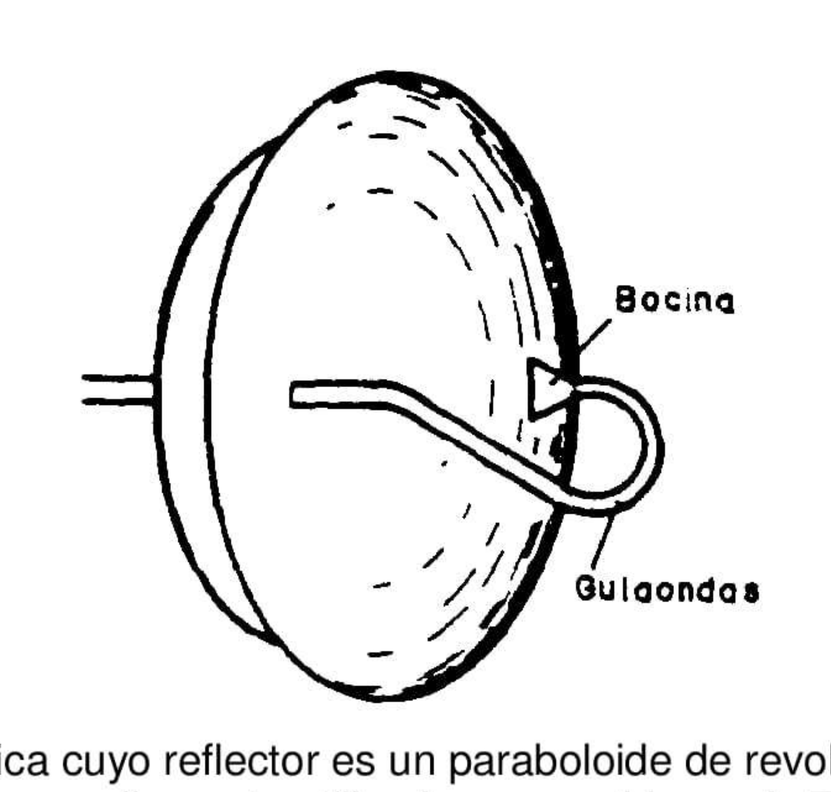
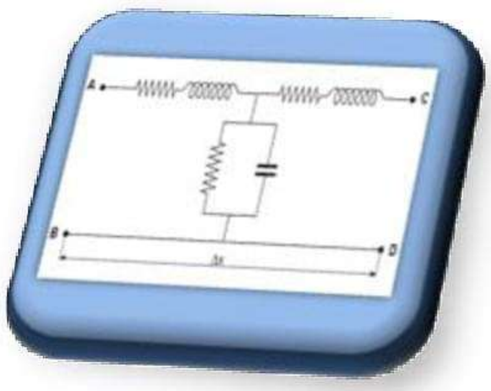


FIGURA 11-13: Antena parabólica cuyo reflector es un paraboloide de revolución de boca circular. Este tipo de antena es ampliamente utilizado en repetidores de TV terrestres

CAPÍTULO 12



LINEAS DE TRANSMISIÓN

Objetivo:

- Que el alumno adquiera la capacidad de análisis de las diferencias entre teoría de circuitos y teoría de líneas de transmisión y comprenda el comportamiento de los cables conductores a una frecuencia de trabajo elevada representándola como un cuadripolo formado por parámetros distribuidos.

12.1. TEORÍA DE CIRCUITOS Y DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

12.1.1. Introducción

Cuando las cargas son puestas en movimiento, el campo magnético causado por el movimiento de dichas cargas, y el campo eléctrico originado por la presencia de las mismas, no se establecen en el espacio instantáneamente, sino que viajan a través de él a velocidad finita. En el aire esta velocidad es la de la luz en el vacío que es aproximadamente 3×10^8 m/s.

Imaginemos dos conductores paralelos que conectan una carga a un generador; el voltaje aplicado por el generador en un extremo de la línea no alcanza la carga instantáneamente sino que viaja a velocidad finita y llega a la carga un momento más tarde.

Esto puede ser explicado por la acción de los campos eléctricos y magnéticos que son guiados por los conductores desde el generador hacia la carga pero es más sencillo resolverlos en términos de las lnductancias y capacitancias distribuidas en los cables. La velocidad de propagación depende del medio que rodea a los conductores en los que existen los campos magnéticos y eléctricos. Para líneas en el aire la velocidad es muy cercana a la de la luz en el vacío, y un poco menor para líneas en dieléctricos sólidos.

Cuando el voltaje del generador varía sinusoidalmente con el tiempo, la distancia que una onda recorre en un ciclo es igual a 1 longitud de onda (λ).

$\lambda = v.\ T =$ velocidad x *Período*

ó

$$\lambda = \frac{v}{f} = \text{velocidad sobre frecuencia de la fuente}$$

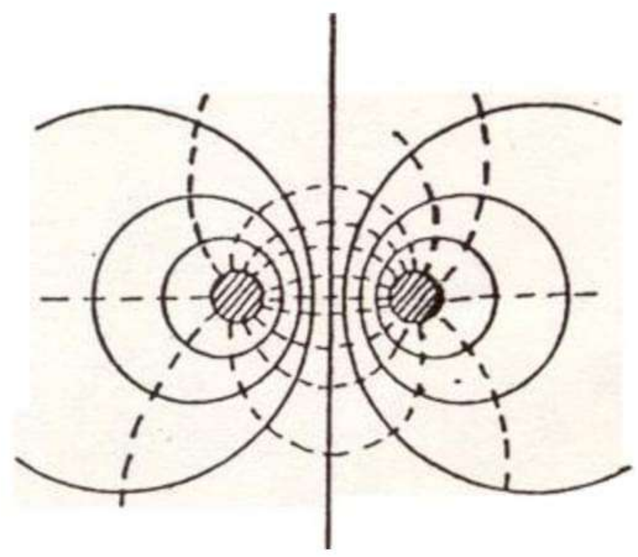
Tomando v = 3 x 10^8 m/s podemos calcular las longitudes de onda correspondientes a diversas frecuencias:

para 60 Hertz, ℓ = 3100 Millas; 1 milla = 1.609,34 metros

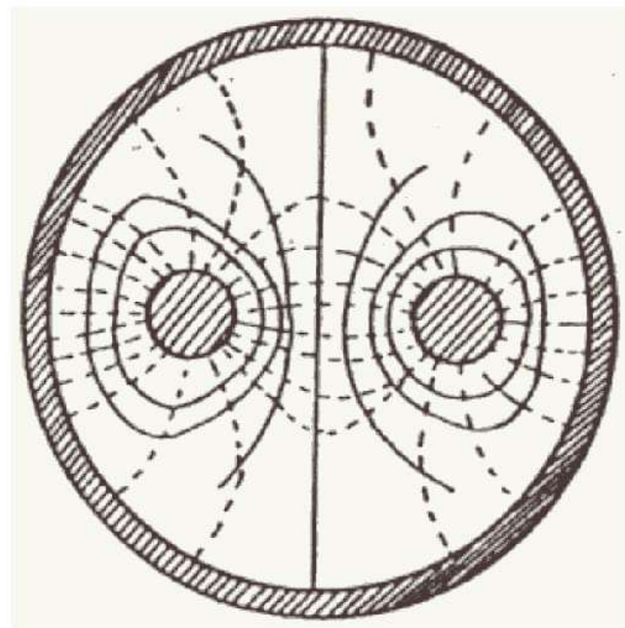
para 3 Mhz, ℓ = 100 metros; 1 metro = 0,00062 millas

para 3.000 Mhz, ℓ = 10 cm.

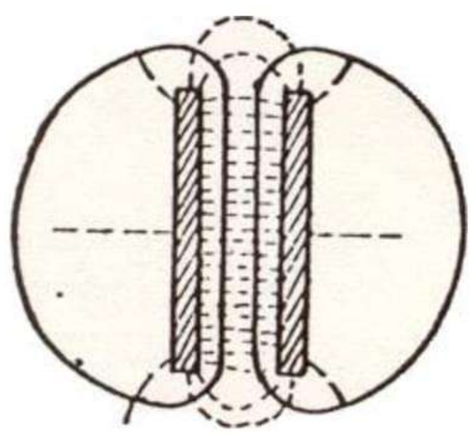
El tiempo de retraso entre los extremos generador y receptor de una línea de transmisión es importante siempre que la línea sea tan larga, o la frecuencia tan alta, como para que la onda tarde una porción apreciable de ciclo para recorrer toda la línea. Esto puede expresarse mejor en función de las longitudes de onda. La teoría de las líneas de transmisión puede ser usada siempre y cuando la longitud de la línea sea apreciable con respecto a 1/4 de longitud de onda (λ). Cuando los cables son mucho más cortos que 1/4 de longitud de onda (λ), el retraso de tiempo de propagación, será sólo una pequeña parte de un ciclo, y el sistema, puede ser analizado por la teoría común de circuitos de corriente alterna ("teoría de circuitos = circuitos con constantes concentradas").



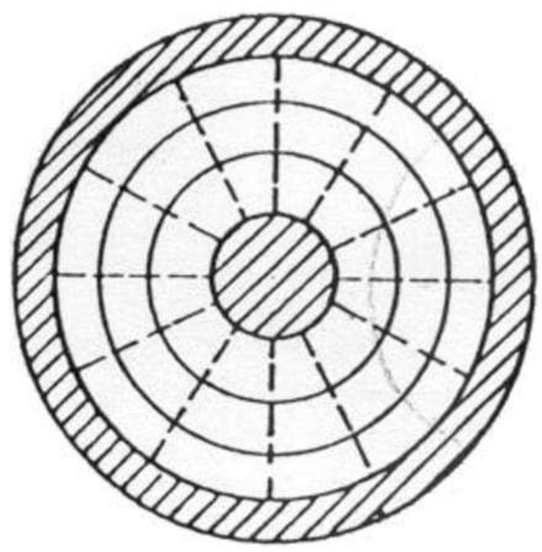
(a) Línea de 2 alambres desnudos



(b) Par blindado



(c) Línea de cintas paralelas



(d) Cable coaxil

FIGURA 12.1. Vistas transversales de algunas tipos comunes de líneas de transmisión, mostrando la disposición de los conductores y la configuración de los campos eléctricos y magnéticos.

El uso primario de las líneas de transmisión es transmitir potencias en corriente alterna entre dos puntos situados a distancias considerables comparado, con 1/4 de longitud de onda (λ). Para ondas cortas también encuentran importante uso como elementos de circuitos reactivos, como circuitos resonantes, como transformadores de lmpedencias, etc.

La fig. (12.1) muestra la distribución de conductores y la configuración de campos eléctricos y magnéticos para varios tipos comunes de líneas de transmisión:

La línea abierta de dos alambres (12-1.a) es fácil de construir y sus características son fácilmente regulables cambiando el espacio entre los hilos, sin embargo los campos se extienden mucho más allá de la línea y las pérdidas por radiación pasan a ser excesivas a frecuencias más altas. Las líneas de alambres abiertos no son generalmente, usados a frecuencias superiores de unos cientos de megahertz.

A veces es coloca una pantalla conductora alrededor de los cables para conectar los campos, como se muestra en la fig. (12-1.b). Las líneas cuyos conductores son cintas planas paralelas esquematizadas en la fig.(12-1.c) se usan para obtener un bajo nivel de impedancia.

El cable coaxil consiste en un tubo hueco con un conductor concéntrico Fig. (12-1.d); el conductor del centro puede ser mantenido en su lugar mediante un dieléctrico sólido continuo que llena el espacio anular. Cuando se usa este tipo de dieléctrico, el coaxil puede ser hecho flexible construyendo el conductor exterior con un tejido de alambres muy finos. Este cable es autoblindado y no tiene campos externos, excepto quizás cerca de las terminaciones. Por esta razón es usado en todo el rango de radio-frecuencias, hasta longitudes de onda cercanas a los 10 cm (3.000 Mhz.); estas frecuencias es encuentran en la región de las microondas, nombre dado al espectro de radio para longitudes de onda inferiores a 0,5 metros. Las líneas abiertas están normalmente balanceadas con respecto a masa, cosa que no ocurre con un cable coaxil que es asimétrico.

Cuando el problema de las líneas de transmisión es analizado mediante la teoría de los campos encontramos que el tipo de transmisión que estamos estudiando, no es el único que existe en dos conductores paralelos. Nuestro análisis se aplicará al llamado "modo principal" en el cual los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de los cables fig. (12.1).

Este tipo de onda es a menudo llamado "Transversal ElectroMagnética " o T.E.M., y es la única que puede existir en una línea de transmisión a baja frecuencia. Cuando la frecuencia alcanza valores tan altos de tal manera que la longitud de onda es comparable con la distancia entre los conductores, es posible encontrar otras ondas, del tipo similar a las existentes en “guías de onda huecas”. Con excepción de casos muy especiales consideraremos como indeseables estos “modos más altos” de onda en las líneas de transmisión de nuestro estudio; por lo tanto, siempre que sea posible debemos mantener la distancia entre dos conductores mucho menor que 1/4 de longitud de onda (λ). Además, cuando en una línea no aislada, la distancia entre los conductores se aproxima a ¼ de longitud de onda (λ) , dicha línea actúa como antena y radia gran parte de la energía que transporta.

En nuestro análisis consideraremos una pequeña distancia entre las líneas pero despreciaremos potencia radiada.

12.2. PARÁMETROS DISTRIBUIDOS DE LA LÍNEA

Las líneas de transmisión pueden ser analizadas en forma más fácil como una extensión de la teoría de las constantes concentradas es decir de la "Teoría de Circuitos". Esta misma teoría se aplicará en todos las líneas mostradas en la fig. (12.1.)

Los parámetros distribuidos de una línea no existen físicamente, los representamos como parámetros concentrados solo para analizar un tramo de línea mediante la teoría de cuadripolos.

Las constantes más importantes de una línea son su inductancia y capacitancia distribuida. Cuando una corriente circula por los conductores de una línea de transmisión, un flujo magnético se establece alrededor de los conductores. Cualquier cambio en este flujo inducirá un voltaje (la conocida L de la teoría de las constantes concentradas). La lnductancia de los conductores de una línea, está uniformemente distribuida a través de toda su longitud. A esta inductancia dístribuida, representativa del efecto total de todos los conductores de la *línea, se* le da el símbolo L y será expresado en henrios por unidad de longitud.

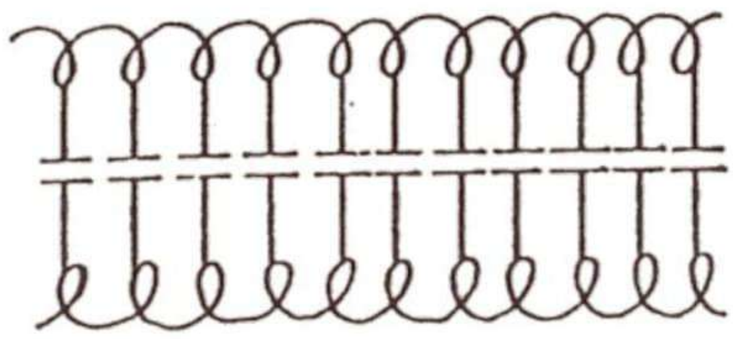


FIGURA 12.2: Representación esquemática de la capacitancia e inductancia distribuidas de una línea de transmisión.

Entre los conductores de la línea existe una capacitancia uniformemente distribuida C, que será la medida en Faradios por unidad de longitud. La lnductancia y capacitancia distribuidas están ilustradas en el esquema de la Fig. (12.2). Cuando la línea se ve en esta forma no es difícil notar que el voltaje y la corriente pueden variar de un punto a otro de la misma y puede existir resonancia bajo ciertas condiciones.

Además de la lnductancia y capacidad, los conductores tienen una resistencia de R medida en Ω por unidad de longitud. Este R incluye la resistencia de todos los conductores que forman la línea.

Finalmente, la aislación de la línea puede permitir el escape de una pequeña corriente de un conductor al otro. Esto se indica con una conductancia G medida en 1/Ω por unidad de longitud. De *la* misma manera que R representa la imperfección del conductor, G representa la imperfección del aislante. El estudiante no debe perder de vista el hecho de que en la notación de la teoría de las líneas, G no significa la recíproca de R. Cuando se utiliza aislante sólido a muy altas frecuencias, las pérdidas del dieléctrico pueden ser considerables. Tienen el mismo efecto de una caída *ohmica y* forman la mayor contribución a G a estas frecuencias.

A pesar de que las constantes de la línea están uniformemente distribuidas a lo largo de ella, podemos tener una idea relativa de sus efectos imaginando a ésta como formada por pequeños segmentos de longitudid Δx, como se ve en la Fig. (12.3). Si L es la inductancia por unidad de longitud, la inductancia del pequeño segmento será LΔx (Hy). De la misma forma, la resistencia de dicho segmento será RΔx (Ω); la capacidad CΔx *(F) y* la conductancia de pérdida GΔx (1/Ω).

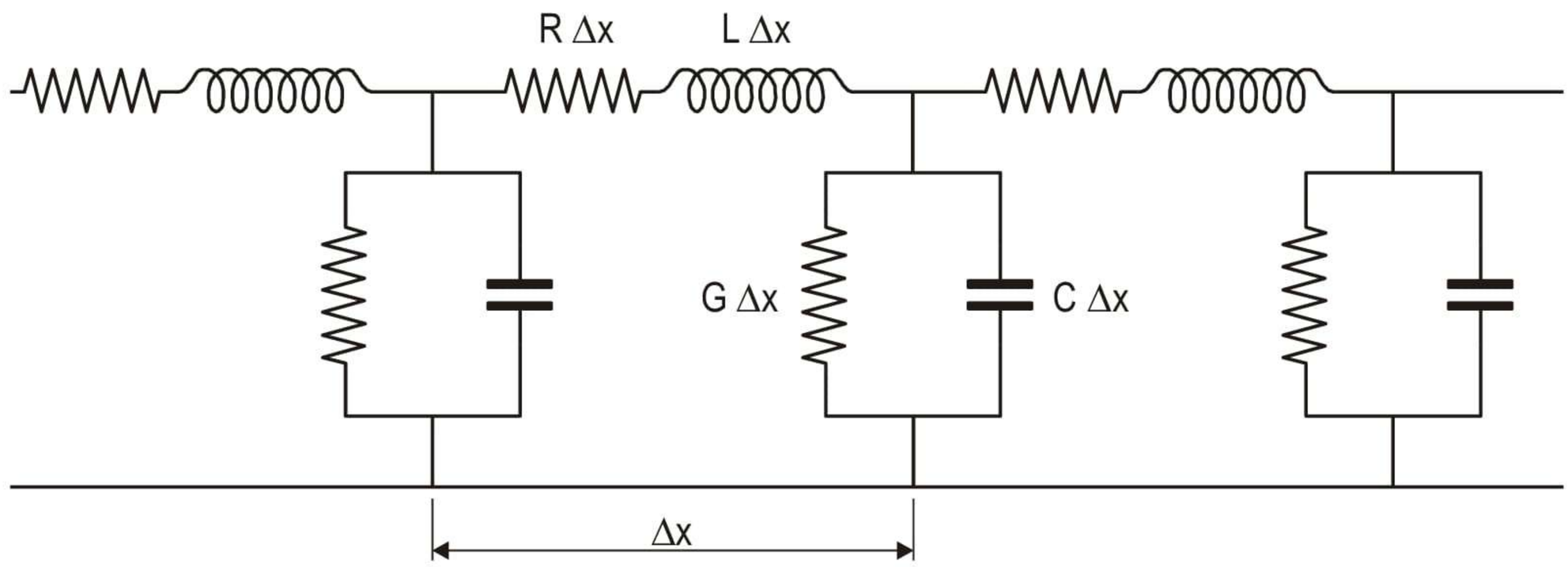


FIGURA 12-3: Representación aproximada de un pequeño tramo de línea

A pesar de que la inductancia y la resistencia están agrupadas, en el conductor de la fig.12-3, ellas representan el efecto total de ambos conductores en el segmento Δx. A medida que los Δx son hechos cada vez más pequeños, la línea de constantes concentradas de la fig.12-3 se aproximará en mayor medida a la "lineal real".

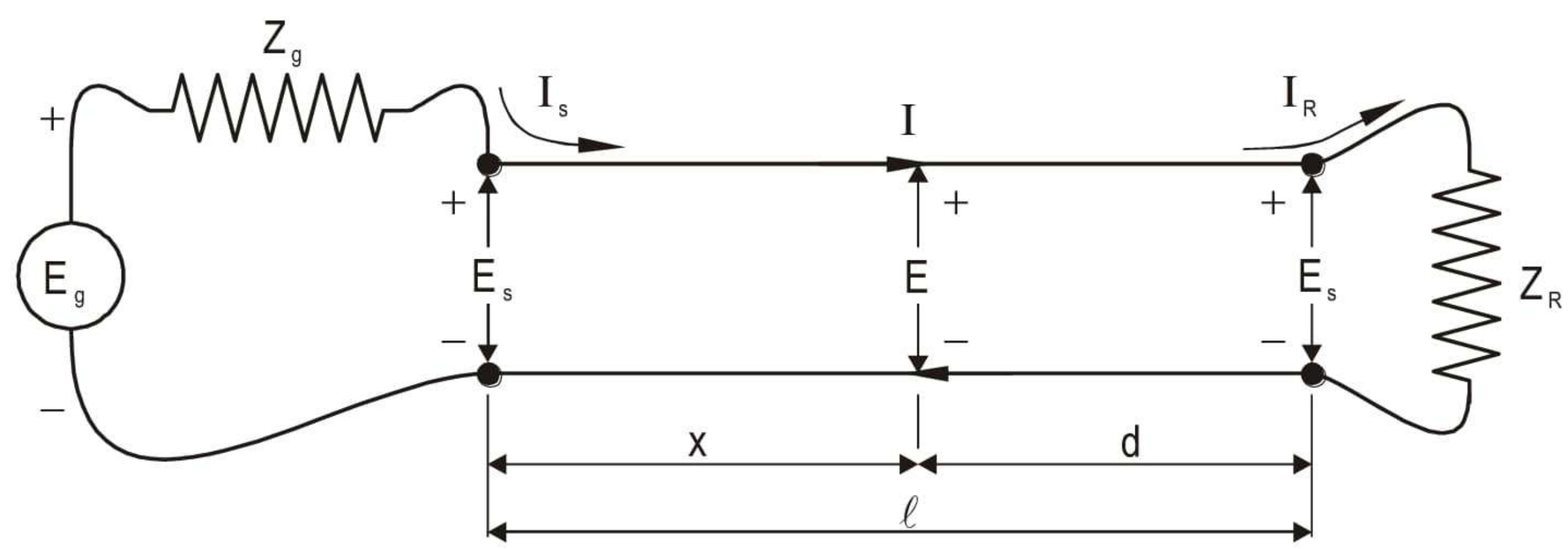


FIGURA 12-4: Diagrama esquemático de una línea de transmisión

12.2.1. Notaciones y unidades

Visualizaremos el problema básico de las líneas de transmisión de la manera mostrada en el diagrama esquemático de la fig.12-4. Lo indicado con *g* y *R* se refiere a los extremos transmisor o generador y receptor de la línea respectivamente. La línea es terminada en su extremo receptor mediante una impedancia de carga Z_R *ohms* complejos y está alimentado por un generador con tensión E_g a circuito abierto y una impedancia Z_g.

La unidad de longitud generalmente usada en líneas telefónicas es la milla, mientras que el metro es preferido por las líneas de radio-frecuencia. Las constantes de línea *L, C, R,* y *G* son expresadas en términos de las unidades de longitud elegidas, por ejemplo, *L* será expresada en henrios por milla o henrios por metro.

Denotaremos la corriente y el voltaje instantáneos por *"i"* y *"e"* respectivamente y usaremos *E* e *I* para mostrar cantidades complejas en alternas.

12.3. ANÁLISIS DE LA LÍNEA COMO CUADRIPOLO

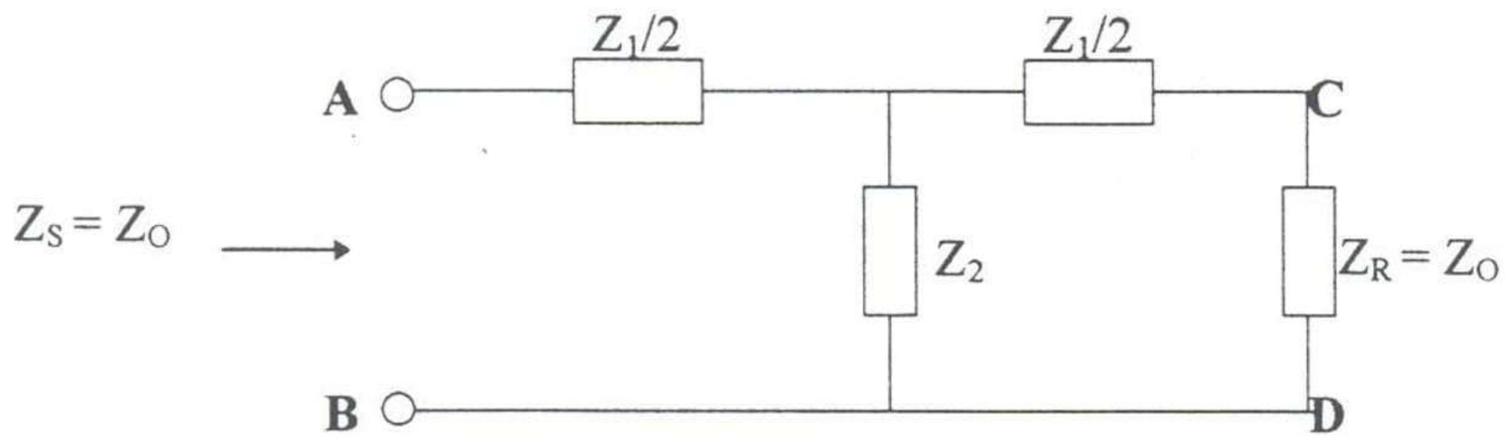


FIGURA 12-5

La fig.12-5 muestra un cuadripolo simétrico, compuesto por elementos concentrados. La teoría de las redes o Teoría de Circuitos, muestra que existe un valor particular de impedancia de carga (Z_R), que hace a la impedancia de entrada (Zs) precisamente igual a Z_R; tal como si el cuadripolo no existiera.

Esta impedancia particular, es denominada, "***Impedancia Característica***" (Z_0) de la red.

Por medio de la Teoría de Circuitos, vamos a demostrar cómo podemos hallar el valor de Impedancia Característica:

$$Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \frac{\left(\frac{Z_1}{2} + Z_0\right)\cdot Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_0 + Z_2} = \frac{Z_1}{2} + \frac{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{2} + Z_0 \cdot Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Z_0 + Z_2}$$

$$Zo = \frac{\frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1.Zo}{2} + \frac{Z_1.Z_2}{2} + \frac{Z_1.Z_2}{2} + Zo.Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Zo + Z_2} = \frac{\frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1.Zo}{2} + Z_1.Z_2 + Zo.Z_2}{\frac{Z_1}{2} + Zo + Z_2}$$

El denominador del segundo miembro, lo pasamos al numerador del primer miembro:

$$Zo.\left(\frac{Z_1}{2} + Zo + Z_2\right) = \frac{Z_1^2}{4} + \frac{Z_1.Zo}{2} + Z_1.Z_2 + Zo.Z_2$$

Simplificando términos iguales:

$$\cancel{\frac{Z_1 Z_0}{2}} + Z_0^2 + \cancel{Z_0 Z_2} = \frac{Z_1^2}{4} + \cancel{\frac{Z_1 Z_0}{2}} + Z_1 Z_2 + \cancel{Z_0 Z_2}$$

$$Zo^2 = Z_1.Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}$$

$$\boxed{Zo = \sqrt{Z_1.Z_2 + \frac{Z_1^2}{4}}}$$ **Impedancia Característica**

Si sacamos factor común Z_1 y Z_2 tendremos otra forma de expresar la misma ecuación:

$$Zo = \sqrt{Z_1.Z_2\left(1+\frac{Z_1}{4Z_2}\right)}$$

12.4. IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA APLICADA A LA LÍNEA (EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS DISTRIBUIDOS)

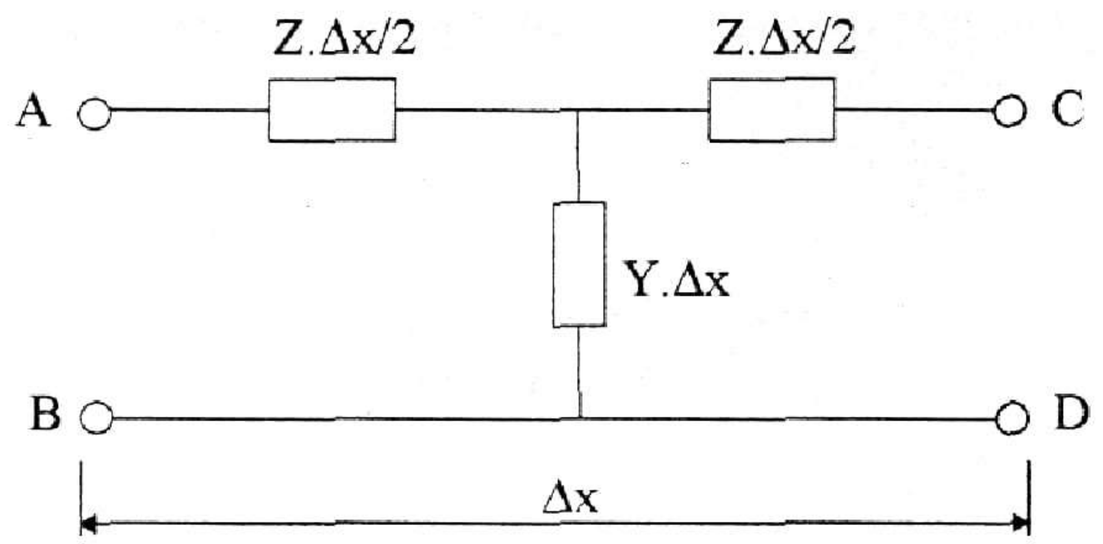


FIGURA 12-6(a)

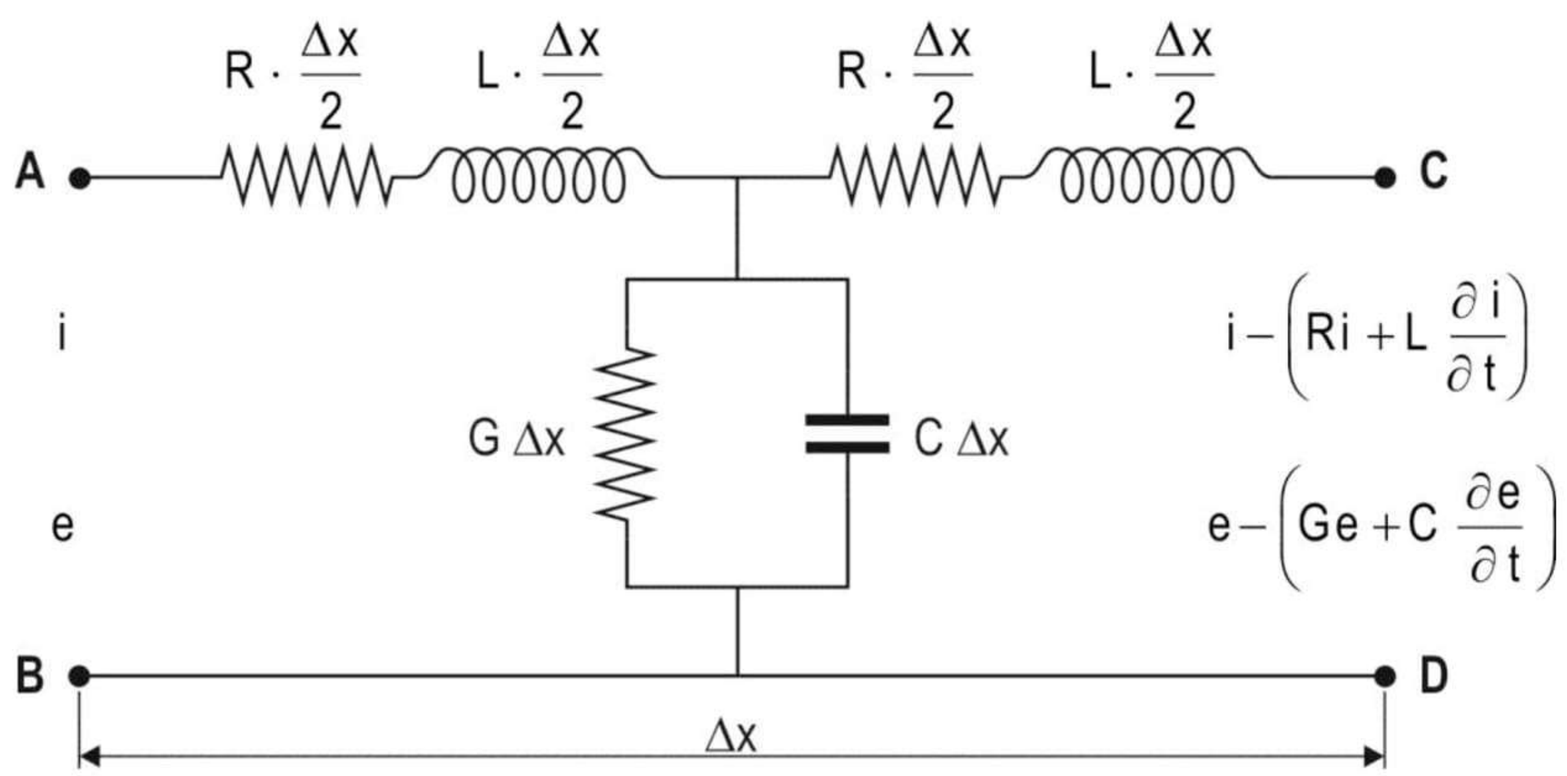


FIGURA 12-6(b)

Tomamos un Δx en la línea y calculamos la impedancia característica:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}\,\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}\cdot\left(1+\frac{Z\,\Delta x\cdot Y\,\Delta y}{4}\right)} \qquad \begin{aligned} Z_1 &= Z\ \Delta x \\ Z_2 &= \frac{1}{Y\ \Delta x} \end{aligned}$$

Si tomamos límite para Δx que tiende a cero:

$$Lim.Zo = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

$$\Delta x \to 0$$

Para altas frecuencias se desprecia R (resistencia del conductor) y G (conductancia del aislante)

$$Zo = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Impedancia característica para altas frecuencias

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

12.5. COEFICIENTE DE REFLEXIÓN EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Considerando una onda de tensión " e " y una onda de corriente " i ", en función del tiempo y del espacio, podemos expresarlas a ambas como:

$$e = C_1.f\left(x - \frac{t}{\sqrt{\mu.\xi}}\right) \qquad i = \frac{C_1}{\eta}.f\left(x - \frac{t}{\sqrt{\mu.\xi}}\right)$$

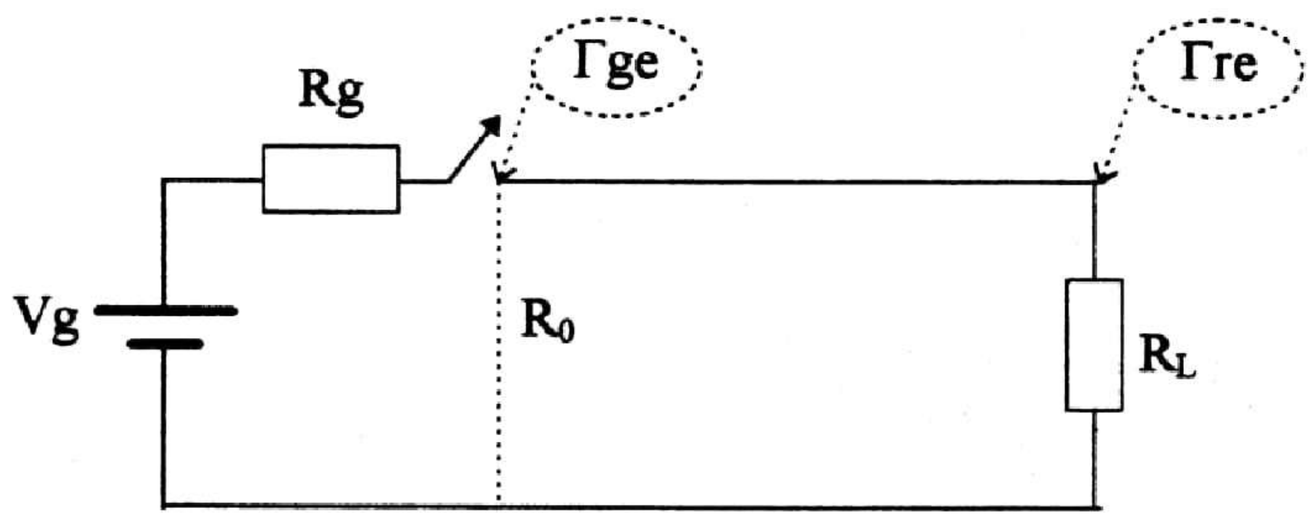


FIGURA 12-7

Si la resistencia de carga R_L no es igual a la resistencia característica de la línea R_0, la onda incidente e^+ al llegar a la carga, da lugar a una onda reflejada e^- , de la misma manera ocurre con la onda de corriente incidente i^+ que da lugar a una corriente reflejada i^- .

La resistencia de carga R_L, es igual al cociente entre la tensión total y la corriente total en la carga:

$$R_L = \frac{e^+ + e^-}{i^+ + i^-} = \frac{e^+\left(1 + \frac{e^-}{e^+}\right)}{\frac{e^+}{Ro} - \frac{e^-}{Ro}} = \frac{e^+\left(1 + \frac{e^-}{e^+}\right)}{\frac{e^+}{Ro}.\left(1 - \frac{e^-}{e^+}\right)}$$

Llamaremos $\Gamma_e = \frac{e^-}{e^+}$ coeficiente de reflexión de la tensión.

$$R_L = R_0 . \frac{(1+\Gamma e)}{(1-\Gamma e)}$$

Despejando el coeficiente de reflexión obtenemos:

$$R_L.(1-\Gamma e) = R_0.(1+\Gamma e) \qquad R_L.-R_L.\Gamma e = R_0.+R_0.\Gamma e$$

$$(R_L + R_0).\Gamma e = R_L - R_0$$

Coeficiente de Reflexión de Tensión en la Carga

$$\Gamma re = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$$

Coeficiente de Reflexión de Tensión en el Generador

$$\Gamma ge = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0}$$

De la misma manera podemos obtener el coeficiente de reflexión de corriente en la carga y en el generador:

Coeficiente de Reflexión de Corriente en la Carga

$$\Gamma ri = -\frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}$$

Coeficiente de Reflexión de Corriente en el Generador

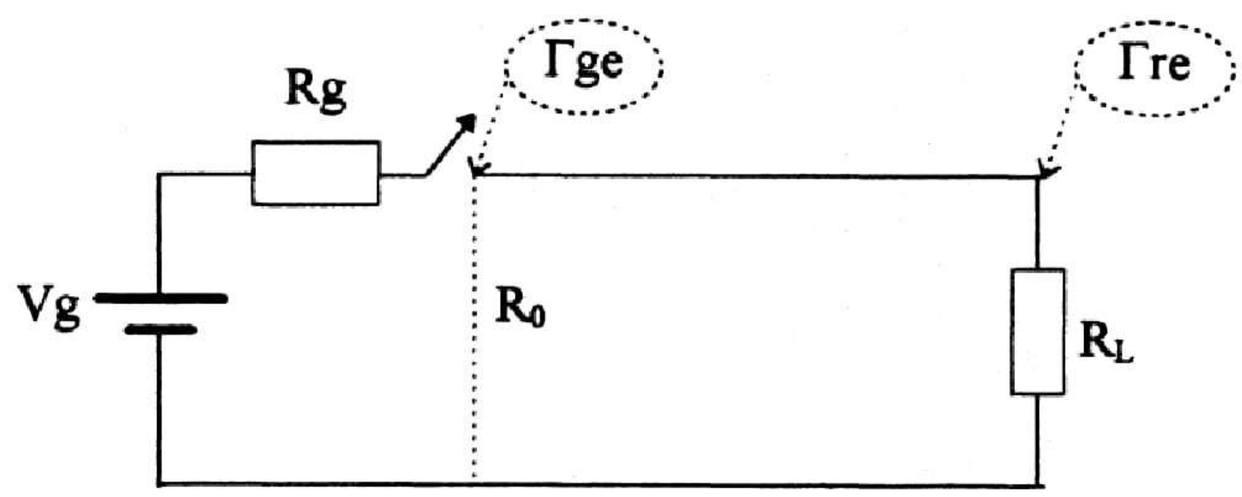
$$\Gamma gi = -\frac{R_g - R_0}{R_g + R_0}$$

De donde podemos comprobar que:

$$\boxed{\Gamma i = -\Gamma e}$$

12.6. PERIODO TRANSITORIO EN LÍNEA DE TRANSMISIÓN CON FUENTE DE TENSIÓN CONTINUA

Se posee una línea de transmisión de impedancia característica Ro alimentada con una batería de tensión Vg y una resistencia interna Rg. La carga la representamos con una resistencia R_L distinta a Ro.



Γge = coeficiente de reflexión de tensión en el extremo generador.
Γre = coeficiente de reflexión de tensión en la carga.

FIGURA 12-8

En el momento inicial, cuando cerramos el interruptor s, el circuito equivalente es el siguiente:

$$e^{+} = \frac{Vg}{R_g + R_0}.R_0 \qquad\qquad i^{+} = \frac{Vg}{R_g + R_0}$$

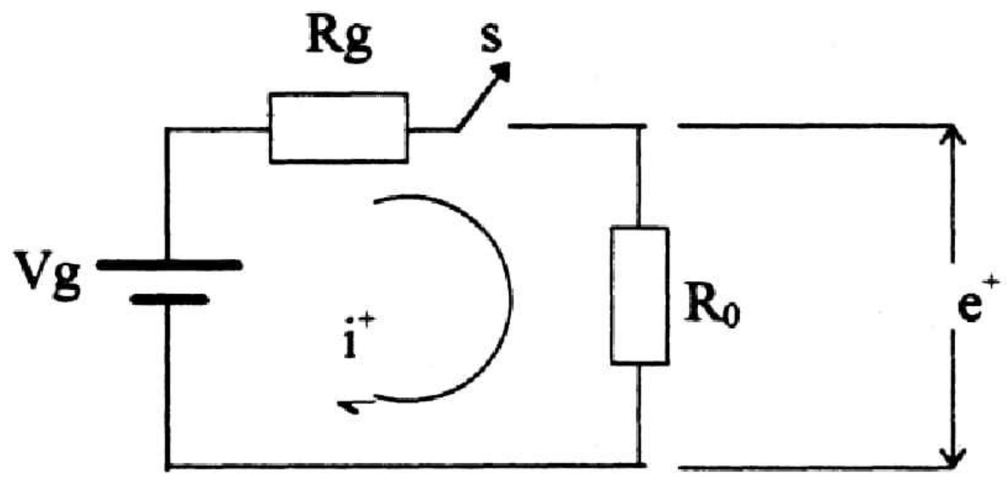


FIGURA 12-9

El coeficiente de reflexión de la tensión es:

$$\Gamma_e = \frac{e^{-}}{e^{+}} = -\Gamma_i$$

Podemos hallar la expresión de las ondas reflejadas en la carga:

$$e^{-} = e^{+}.\Gamma_{re} \qquad\qquad i^{-} = i^{+}.\Gamma_{ri}$$

La onda resultante será la suma de la onda incidente y la onda reflejada:

$$e_T = e^{+} + e^{-} \qquad\qquad i_T = i^{+} + i^{-}$$

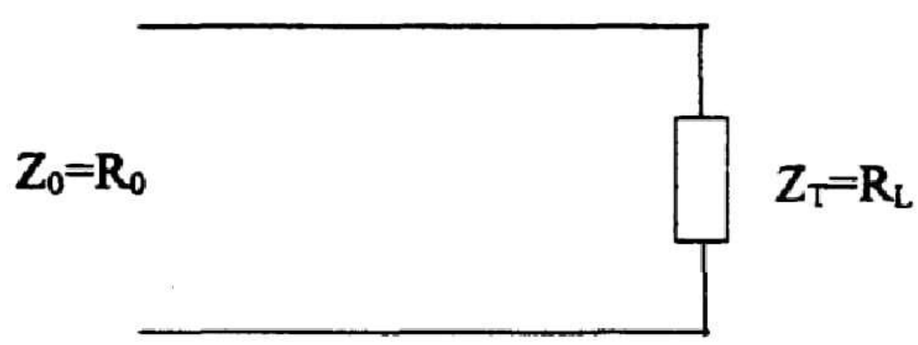


FIGURA 12-10

La figura muestra un extremo de línea terminada en una impedancia Z_T. Por el momento vamos a dirigir nuestra atención solamente a resistencias puras, por lo tanto $Z_T = R_L$ resistencia de carga.

Imagínese una onda de tensión incidente que denotaremos e^{+}, viajando hacia la derecha, acompañada por una corriente $i^{+} = e^{+}/Z_O$. En el extremo de carga, sin embargo, debemos tener:

$$R_L = \frac{e_T}{i_T} = \frac{e^{+} + e^{-}}{i^{+} + i^{-}}$$

Ahora, a menos que R_L sea numéricamente igual a Ro, parte de la onda incidente será reflejada.

Ejemplo 1

Consideremos por ejemplo un generador de corriente continua o una batería con una f.e.m. E cuya resistencia interna Rg = 0, que es conectada a un extremo para un tiempo t=0, con dos conductores paralelos, terminados en el otro extremo con una resistencia $R_L = 3\ R_0$.

Las pérdidas de la línea serán ignoradas.

El extremo transmisor o generador no puede "saber" que la línea no es infinita hasta el arribo de la primera reflexión desde el extremo receptor; por lo tanto, inicialmente parecerá que la línea tiene una impedancia Z_0 en el extremo generador o transmisor. Encontraremos el coeficiente de reflexión en el extremo generador, teniendo en cuenta para este caso que su resistencia interna es Rg=0, con la siguiente ecuación:

$$\Gamma ge = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0} = \frac{-R_0}{R_0} = -1$$

Cuando la onda de tensión alcanza el extremo receptor, será reflejada con un coeficiente que puede ser obtenido con la siguiente ecuación:

$$\Gamma re = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \frac{3R_0 - R_0}{3R_0 + R_0} = \frac{2R_0}{4R_0} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto habrá una onda reflejada con una magnitud E/2, acompañada de una onda de corriente igual a $-E/2R_0$. La primera onda reflejada volverá a ser reflejada cuando alcance el extremo transmisor y como el coeficiente de reflexión Γge es igual a -1 el voltaje será reflejado nuevamente a (E/2). Γge=-E/2 y para esta nueva onda directa, la corriente asociada será -E/2Zo. Si las sucesivas reflexiones son analizadas, el resultado en la carga podrá ser obtenido fácilmente.

En cada momento la relación entre el voltaje recibido en el extremo receptor y la corriente recibida, es igual a la resistencia de carga. A medida que transcurre el tiempo, la tensión en el extremo receptor tiende gradualmente al estado de régimen de valor E, y la corriente tiene el valor $E/R_L = 3E/R_0$.

Un diagrama espacio tiempo es un medio conveniente para poder seguir las distintas reflexiones y las sumas, la distancia es graficada horizontalmente y el tiempo hacia abajo. El tiempo requerido por una onda para recorrer la longitud de la línea se denomina T, donde T = l/v (largo total de la línea sobre la velocidad).

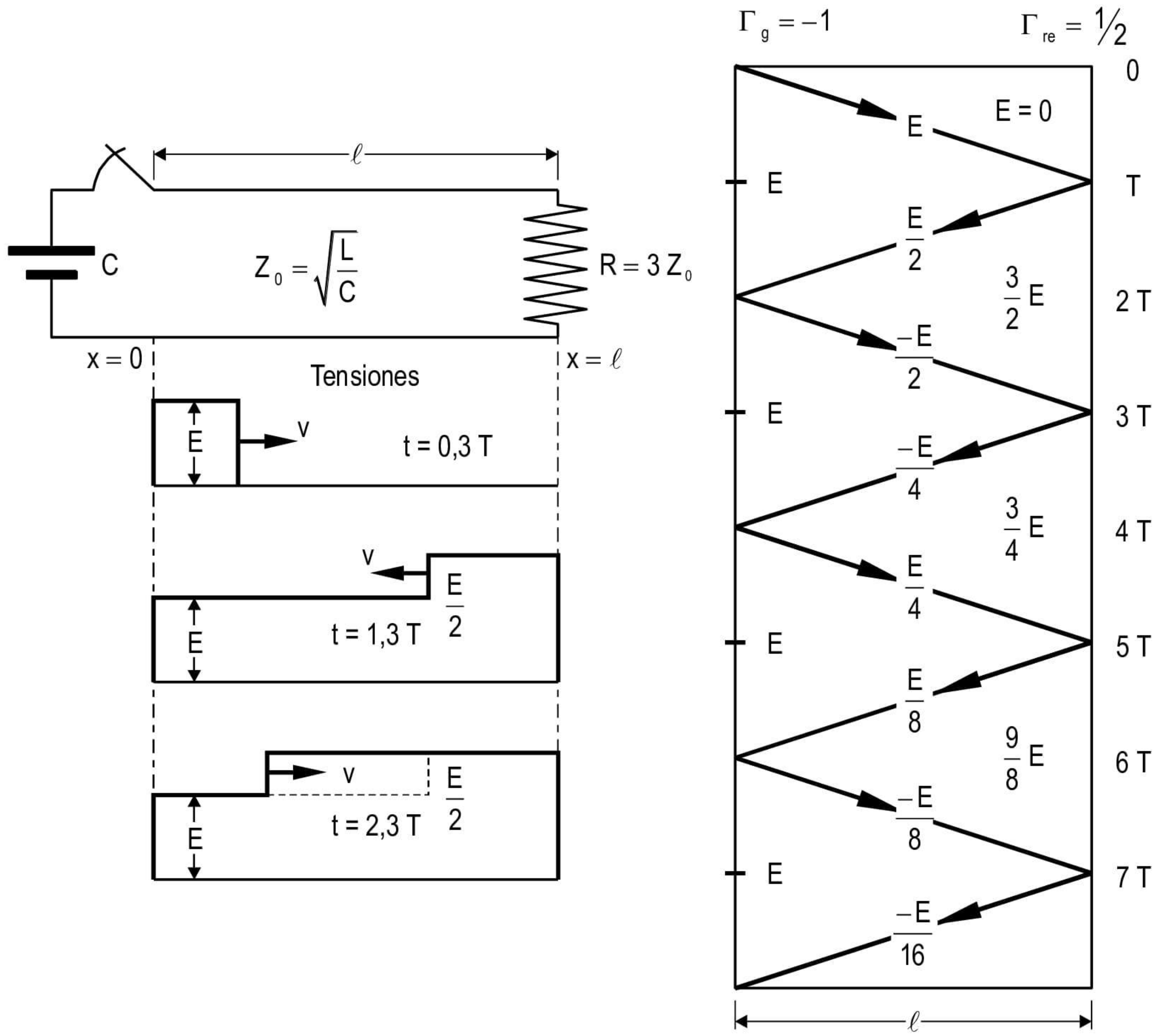


FIGURA 12-11

Las líneas zig-zag son trazos de los frentes de onda de las distintas reflexiones. Los números adozados a las líneas indican las magnitudes de las ondas individuales. La magnitud de cada reflexión se obtiene de multiplicar la magnitud de la onda precedente por el coeficiente de reflexión en el punto en que la reflexión tenga lugar. El número mostrado en cada triángulo es la suma de las ondas individuales sobre ese punto, y representa la tensión neta en esa región del gráfico. El voltaje en cualquier punto y posición pueden ser fácilmente obtenido usando este diagrama.

Para obtener un diagrama de la tensión en la carga R_L en función del tiempo, tendremos la siguiente figura:

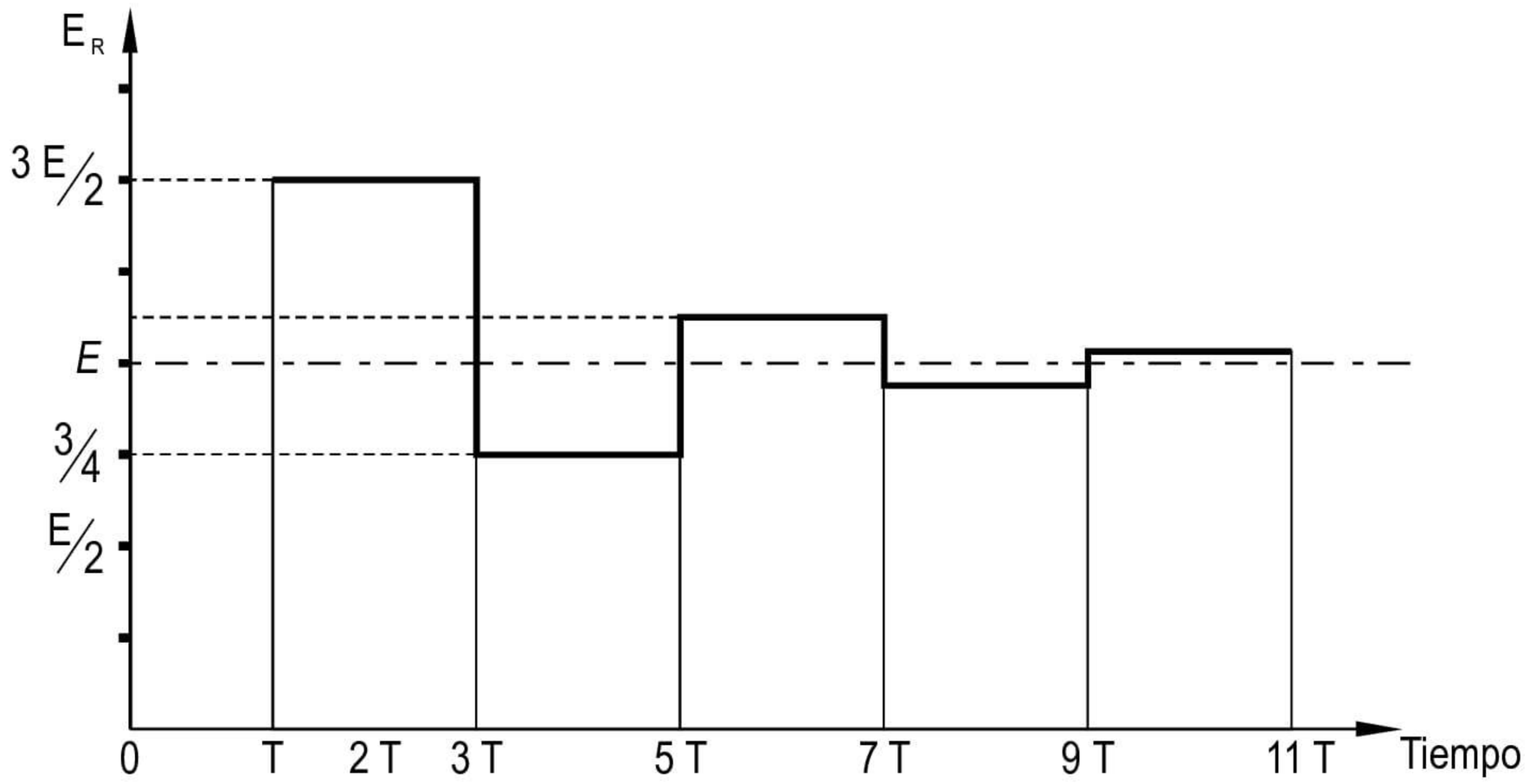


FIGURA 12-12

Ejemplo 2

Consideremos por ejemplo un generador de corriente continua o una batería con una f.e.m. E cuya resistencia interna Rg = 3 R_0, que es conectada a un extremo para un tiempo t=0, con dos conductores paralelos, terminados en el otro extremo con una resistencia $R_L = \infty$ (circ. abierto).

Las pérdidas de la línea serán ignoradas.

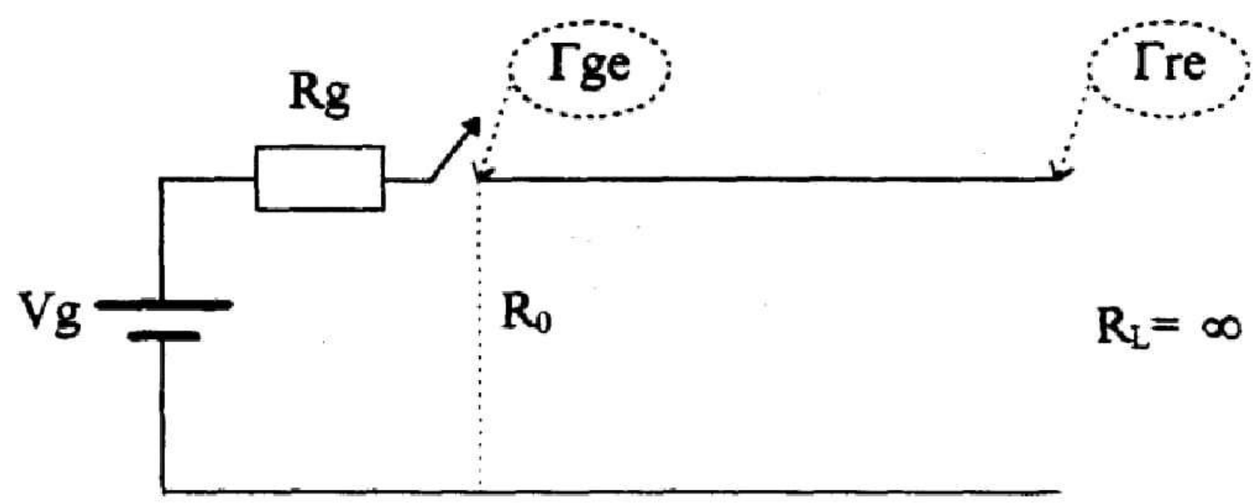


FIGURA 12-13

Para calcular la tensión en la entrada de la línea de transmisión debemos considerar el circuito de la figura 16.6.2 en la cual usamos el principio del divisor de tensión:

$$e^{+} = \frac{Vg}{R_g + R_0}.R_0 = \frac{Vg}{3R_0 + R_0}.R_0 = \frac{Vg.R_0}{4R_0} = \frac{Vg}{4}$$

Cuando la onda de tensión alcanza el extremo receptor, será reflejada con un coeficiente que puede ser obtenido con la siguiente ecuación:

$$\Gamma re = lim\frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = lim\frac{\infty - R_0}{\infty + R_0} = lim\frac{\infty}{\infty} = 1$$

Una onda de voltaje de este valor viaja hacia el extremo donde es reflejado con el coeficiente de reflexión:

$$\Gamma ge = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0} = \frac{3R_0 - R_0}{3R_0 + R_0} = \frac{2R_0}{4R_0} = \frac{1}{2}$$

Las sucesivas reflexiones y re-reflexiones y el gráfico de tensión en el extremo transmisor está dado en la figura 12-14.

La construcción del gráfico de voltaje en el extremo transmisor se asemeja al voltaje obtenido entre las placas de un condensador cuando es cargado desde una batería y a través de una resistencia.

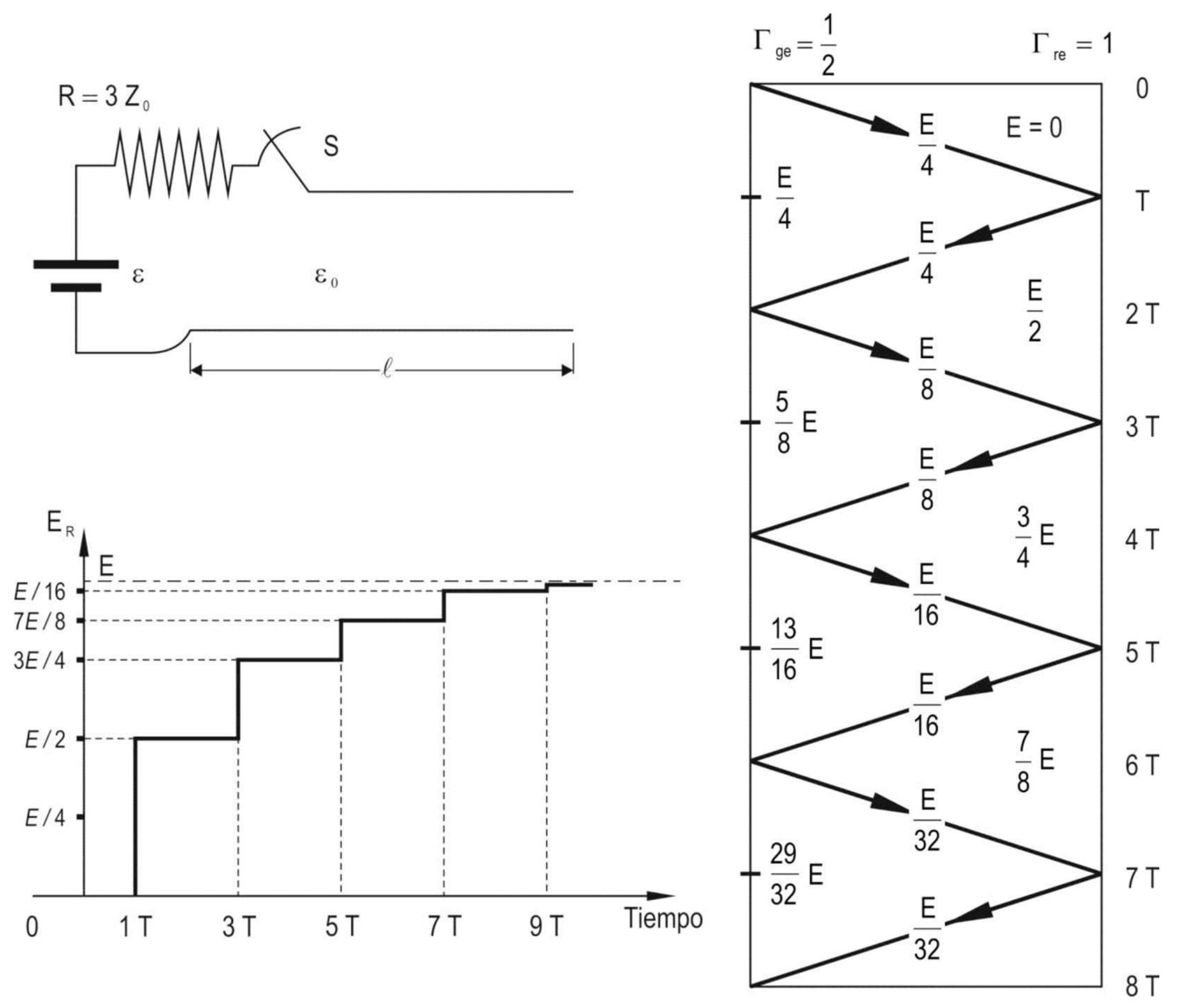


FIGURA 12-14

La reflexión vuelve hacia el generador donde es reflejada con el coeficiente de reflexión del generador:

12.7. ECUACIONES BÁSICAS DEL TELEGRAFISTA

Tomada una porción infinitesimal de línea como se muestra en la figura 12-15, consideremos la tensión instantánea **e** y la corriente instantánea **i**.

La inductancia serie de la porción será L.Δx (Hy) y la resistencia serie R.Δx (Ω), en la figura se los divide en dos ramales para representar un cuadripolo simétrico. De la misma manera, la capacidad en paralelo o shunt será C.Δx (F), y la conductancia en paralelo o shunt G.Δx (1/Ω).

La derivada parcial debe ser usada porque hay dos variables independientes, distancia x y tiempo t.

El circuito equivalente de un diferencial de longitud de la línea considerado como cuadripolo simétrico, es el siguiente:

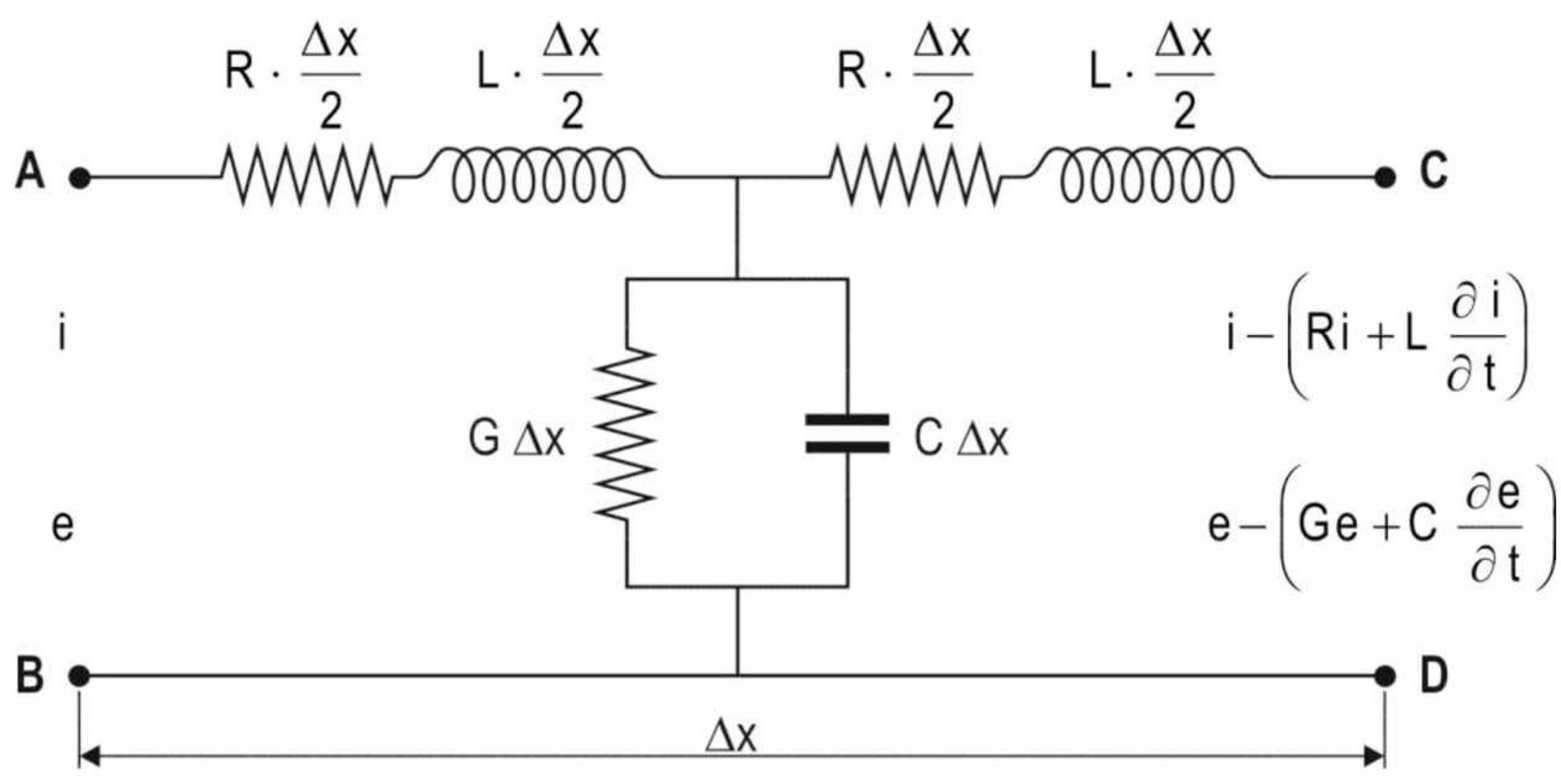


FIGURA 12-15: Tramo infinitesimal de línea de transmisión

La ecuación diferencial que indica la caída de tensión de la línea es:

$$\frac{\partial.e}{\partial.x} = -Ri - L\frac{\partial.i}{\partial.t}$$

La pérdida de corriente por lo tanto es:

$$\frac{\partial.i}{\partial.x} = -Ge - C\frac{\partial.e}{\partial.t}$$

El signo negativo es usado aquí porque los valores positivos de i y de la derivada de i con respecto a t, causan una disminución de e a medida que aumenta x.

Tomamos las componentes con variación cosenoidal en el tiempo, expresado en forma fasorial:

$$e = \text{Re.}\left[V_m.e^{j\omega t}\right] \qquad i = \text{Re.}\left[I_m.e^{j\omega t}\right]$$

$$\frac{dV_m}{dx} = -RI_m - j\omega LI_m$$

$$\frac{dI_m}{dx} = -GV_m - j\omega C dV_m$$

Ahora usamos derivadas totales porque existe una sola variable independiente que es x. Los valores eficaces de V e I están relacionados a las amplitudes Vm e Im de la siguiente forma:

$$V_m = \sqrt{2}.V \qquad \text{y} \qquad I_m = \sqrt{2}.I$$

Haciendo esta substitución, obtendremos:

$$\frac{dV}{dx} = -(R + j\omega L)I$$

$$\frac{dI}{dx} = -(G + j\omega C)V$$

12.8. ECUACIONES DE ONDA EN EL MEDIO CONDUCTOR

Es usual en la teoría de las líneas de transmisión denotar la impedancia serie de corriente alterna por unidad de longitud con el símbolo de Z y la admitancia shunt por la letra Y:

Impedancia	$Z = R + j\omega L$	ohms por unidad de longitud
Admitancia	$Y = G + j\omega C$	mhos por unidad de longitud

$$\frac{dV}{dx} = -Z.I \qquad \frac{dI}{dx} = -Y.V$$

Sacando la derivada segunda de la expresión anterior queda:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -Z.\frac{dI}{dx} \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = +ZY.V$$

Ecuación diferencial homogénea de 2do orden de la caída de tensión en un tramo de línea:

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} - ZY.V = 0}$$

Haciendo lo mismo con la corriente tendremos:

$$\frac{d^2I}{dx^2} = -Y.\frac{dV}{dx} \qquad \frac{d^2I}{dx^2} = +ZY.I$$

Ecuación diferencial homogénea de 2do orden de la pérdida de corriente en un tramo de línea:

$$\boxed{\frac{d^2 I}{dx^2} - ZY.I = 0}$$

La solución general de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden es:

$$V = A_1.e^{-\sqrt{ZY}x} + A_2.e^{+\sqrt{ZY}x}$$

Llamaremos $\sqrt{ZY} = \gamma$ constante de propagación, por lo tanto la ecuación queda:

$$\boxed{V = A_1.e^{-\gamma x} + A_2.e^{+\gamma x}}$$

Para hallar la ecuación de la corriente partimos de:

$$\frac{dV}{dx} = -Z.I$$

despejando la corriente tendremos:

$$I = -\frac{1}{Z}.\frac{dV}{dx}$$

Sacando la derivada de la tensión V (solución de la ecuación homogénea de 2do grado), obtenemos:

$$I = -\frac{1}{Z}.\frac{d\left(A_1.e^{-\sqrt{ZY}x} + A_2.e^{+\sqrt{ZY}x}\right)}{dx} = -\frac{1}{Z}.\left(-A_1.\sqrt{ZY}.e^{-\sqrt{ZY}x} + A_2.\sqrt{ZY}.e^{+\sqrt{ZY}x}\right)$$

$$I = -\left(-\frac{A_1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}}.e^{-\sqrt{ZY}x} + \frac{A_2}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}}.e^{+\sqrt{ZY}x}\right)$$

Llamaremos

$$\sqrt{\frac{Z}{Y}} = Zo$$ **Impedancia característica de la línea de transmisión**

Recordamos

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta$$ **Impedancia intrínseca del medio.**

La ecuación de la corriente queda:

$$I = +\frac{A_1}{Zo}.e^{-\sqrt{ZY}x} - \frac{A_2}{Zo}.e^{+\sqrt{ZY}x}$$

$$I = +\frac{A_1}{Zo}.e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Zo}.e^{+\gamma x}$$

Hemos resuelto las ecuaciones diferenciales para estado de régimen para la línea de transmisión uniforme y demostramos que la tensión y corriente pueden ser escritas como:

$$V = A_1.e^{-\gamma x} + A_2.e^{+\gamma x}$$

$$I = \frac{1}{Z_0}\left(A_1.e^{-\gamma x} - A_2.e^{+\gamma x}\right)$$

Donde A_1 Y A_2 son constantes con dimensiones de tensión, y x es la distancia medida a partir del extremo generador. Las cantidades Z_0 y γ son respectivamente la impedancia característica y la constante de propagación de la línea.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\varpi L}{G + j\varpi C}}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(R + j\varpi L\right).\left(G + j\varpi C\right)}$$

Vimos que la parte real e imaginaria de γ juegan roles completamente diferentes en la propagación de las ondas; la parte real es la constante de atenuación α, y la parte imaginaria es la constante de fase β.

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

12.9. CALCULO DE AMPLITUDES A_1 Y A_2

12.9.1. Calculo de las constantes en el extremo generador

Con el siguiente análisis podemos encontrar el valor de las constantes A_1 y A_2.:

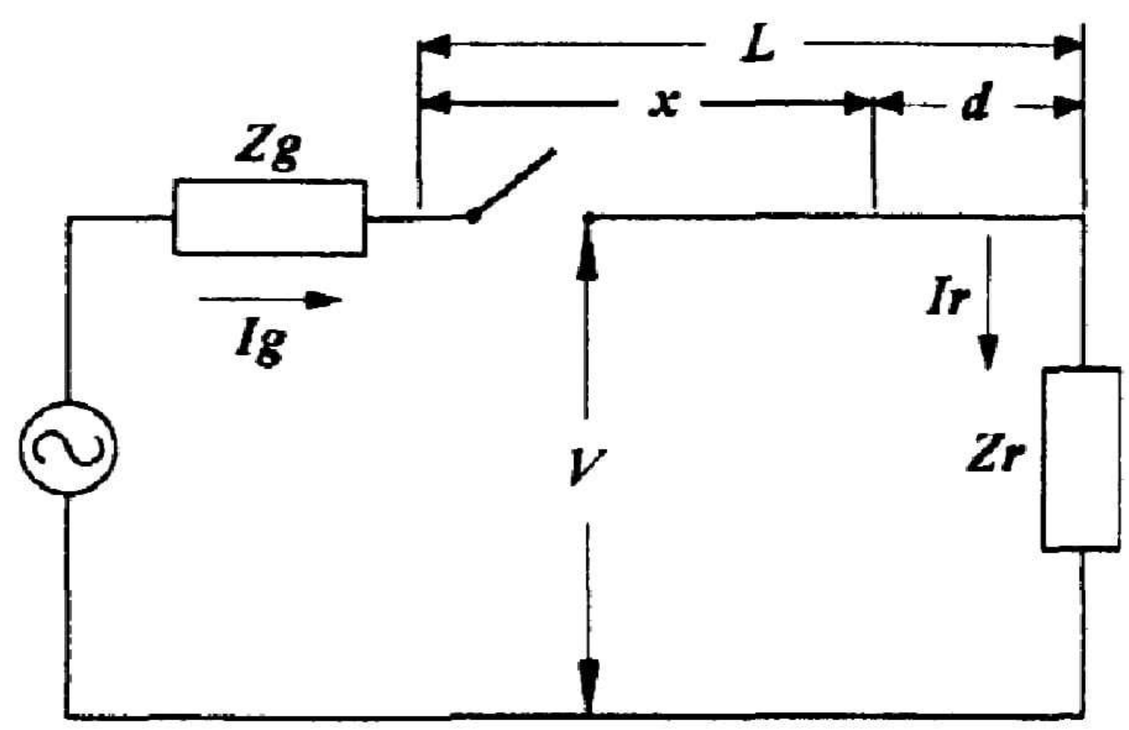


FIGURA 12-16

En los bornes del generador tenemos:

$V = Ig..Zg$ e $I = Ig$

La ecuación de la tensión es:

$$V = A_1.e^{-\gamma x} + A_2.e^{+\gamma x}$$

La ecuación de la corriente se expresa:

$$I = \frac{1}{Z_0}\left(A_1.e^{-\gamma x} - A_2.e^{+\gamma x}\right)$$

Si hacemos x = 0

$$Ig.Zg = A_1 + A_2$$

$$Ig.Zo = A_1 - A_2$$

Sumando y luego restando ambas expresiones obtenemos los valores de A_1 y A_2 :

$$I_g Z_g + I_g Z_0 = 2\ A_1$$
$$I_g Z_g - I_g Z_0 = 2\ A_2$$

$$2.A_1 = \left(Zg + Z_0\right)Ig$$

Entonces

$$\boxed{A_1 = \left(\frac{Zg + Z_0}{2}\right)Ig}$$

$$2.A_2 = \left(Zg - Z_0\right)Ig$$

Entonces

$$\boxed{A_2 = \left(\frac{Zg - Z_0}{2}\right)Ig}$$

Las ecuaciones de tensión y corriente en función del extremo generador quedan:

$$V = Ig.\left(\frac{Zg + Z_0}{2}\right).e^{-\gamma x} + Ig.\left(\frac{Zg - Z_0}{2}\right).e^{+\gamma x}$$

$$I = \frac{Ig}{Z_O}.\left[\left(\frac{Zg + Z_0}{2}\right).e^{-\gamma x} - \left(\frac{Zg - Z_0}{2}\right).e^{+\gamma x}\right]$$

12.9.2. Calculo de las constantes en el extremo receptor

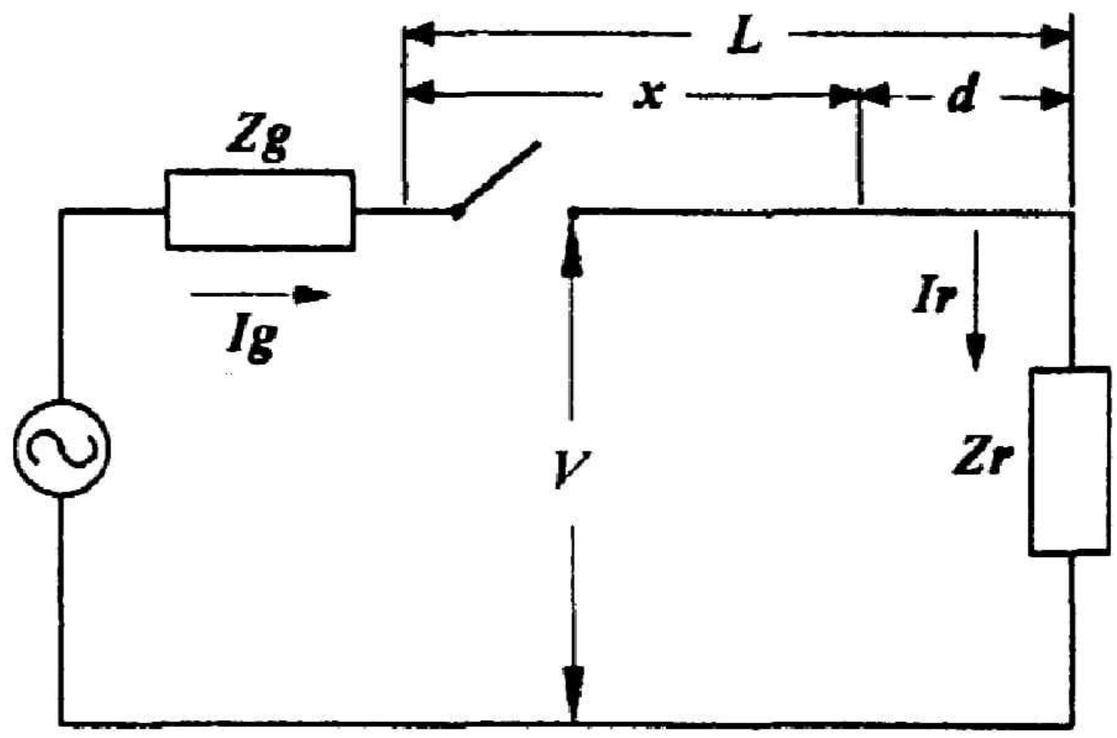


FIGURA 12-17

Es conveniente en muchos propósitos expresar las constantes en función de las cantidades del extremo receptor

$$V = I_R \,.\, Z_R \qquad \text{e} \qquad I = I_R$$

$$V = \mathrm{I_R} \,.\, \mathrm{Z_R} = A_1 . e^{-\gamma x} + A_2 . e^{+\gamma x}$$

$$I = I_R = \frac{1}{Z_0}\left(A_1 . e^{-\gamma x} - A_2 . e^{+\gamma x}\right)$$

$$I_R . Z_0 = A_1 . e^{-\gamma x} - A_2 . e^{+\gamma x}$$

Hacemos x = L, en primer lugar sumamos y restamos las ecuaciones anteriores, luego despejamos A_1 y A_2:

$$\left(Z_R + Z_0\right) I_R = 2.A_1 . e^{-\gamma L}$$

entonces

$$\boxed{A_1 = \frac{I_R}{2} . \left(Z_R + Z_0\right) e^{+\gamma L}}$$

$$\left(Z_R - Z_0\right) I_R = 2.A_2 . e^{+\gamma L}$$

entonces

$$\boxed{A_2 = \frac{I_R}{2} . \left(Z_R - Z_0\right) e^{-\gamma L}}$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones y usando luego d = L - x por conveniencia, tendremos las ecuaciones de tensión y corriente ahora para cualquier distancia medida desde el extremo de la carga o receptor.

$$V = \frac{I_R}{2}.\left(Z_R + Z_0\right).e^{+\gamma(L-x)} + \frac{I_R}{2}.\left(Z_R - Z_0\right).e^{-\gamma(L-x)}$$

$$I = \frac{I_R}{2.Zo}.\left(Z_R + Z_0\right).e^{+\gamma(L-x)} - \frac{I_R}{2.Zo}.\left(Z_R - Z_0\right).e^{-\gamma(L-x)}$$

$$V = I_R.\left(\frac{Z_R + Z_0}{2}\right).e^{+\gamma d} + I_R.\left(\frac{Z_R - Z_0}{2}\right).e^{-\gamma d}$$

$$I = I_R.\left(\frac{Z_R + Z_0}{2.Zo}\right).e^{+\gamma d} - I_R.\left(\frac{Z_R - Z_0}{2.Zo}\right).e^{-\gamma d}$$

Tensión y corriente para cualquier punto de la línea, medida desde el extremo de carga

12.10. COEFICIENTE DE REFLEXIÓN

12.10.1. Coeficiente de reflexión en el generador

Partimos de la ecuación general de la tensión en el extremo generador teniendo en cuenta que es igual a la suma entre la tensión incidente V^+ y la tensión reflejada V^-.

$$V = V^+ + V^- = Ig.\left(\frac{Zg + Z_0}{2}\right).e^{-\gamma x} + Ig.\left(\frac{Zg - Z_0}{2}\right).e^{+\gamma x}$$

El coeficiente de reflexión hemos visto que es igual al cociente entre la tensión reflejada y la tensión incidente:

$$\Gamma g = \frac{V^-}{V^+} = \frac{\left(\frac{Zg - Z_0}{2}\right).e^{+\gamma x}}{\left(\frac{Zg + Z_0}{2}\right).e^{-\gamma x}}$$

Por último nos queda:

Coeficiente de reflexión en el generador

$$\boxed{\Gamma g = \left[\frac{Zg - Z_0}{Zg + Z_0}\right].e^{+2\gamma x}}$$

12.10.2. Coeficiente de reflexión en el receptor (carga)

$$V = I_R.\left(\frac{Z_R + Z_0}{2}\right)\cdot e^{+\gamma d} + I_R\cdot\left(\frac{Z_R - Z_0}{2}\right)\cdot e^{-\gamma d} = V^+ + V^-$$

$$\Gamma_R = \frac{V^-}{V^+} = \frac{\left(\frac{Z_R - Z_0}{2}\right).e^{-\gamma d}}{\left(\frac{Z_R + Z_0}{2}\right).e^{+\gamma d}}$$

Por último nos queda:

Coeficiente de reflexión en el receptor

$$\boxed{\Gamma_R = \left[\frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}\right].e^{-2\gamma d}}$$

12.11. CALCULO DE IMPEDANCIA EN CUALQUIER PUNTO DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Partimos de

$$Zi = \frac{V}{I}$$

$$V = I_R.\left(\frac{Z_R + Z_0}{2}\right).e^{+\gamma d} + I_R.\left(\frac{Z_R - Z_0}{2}\right).e^{-\gamma d}$$

$$I = I_R.\left(\frac{Z_R + Z_0}{2.Zo}\right).e^{+\gamma d} - I_R.\left(\frac{Z_R - Z_0}{2.Zo}\right).e^{-\gamma d}$$

$$Zi = \frac{I_R.\left(\frac{Z_R + Z_0}{2}\right).e^{+\gamma d}\left[1 + \left(\frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}\right).e^{-2\gamma d}\right]}{I_R.\left(\frac{Z_R + Z_0}{2.Z_0}\right).e^{+\gamma d}\left[1 - \left(\frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}\right).e^{-2\gamma d}\right]}$$

$$Zi = Z_0.\frac{.\left[1 + \left(\frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}\right).e^{-2\gamma d}\right]}{\left[1 - \left(\frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0}\right).e^{-2\gamma d}\right]}$$

Sacando factor común $\frac{1}{(Z_R + Z_0).e^{+\gamma d}}$ en numerador y denominador:

$$Zi = Z_0.\frac{\left[(Z_R + Z_0).e^{+\gamma d} + (Z_R - Z_0).e^{-\gamma d}\right]}{\left[(Z_R + Z_0).e^{+\gamma d} - (Z_R - Z_0).e^{-\gamma d}\right]}$$

$$Zi = Z_0.\frac{\left[Z_R.\left(e^{+\gamma d} + e^{-\gamma d}\right) + Z_O\left(e^{+\gamma d} - e^{-\gamma d}\right)\right]}{\left[Z_R.\left(e^{+\gamma d} - e^{-\gamma d}\right) + Z_O\left(e^{+\gamma d} + e^{-\gamma d}\right)\right]}$$

Las fórmulas de Euler para un exponencial con exponente imaginario son:

$$e^{+jd} = \cos d + j\,\mathrm{sen}\,d$$

$$e^{-jd} = \cos d - j\,\mathrm{sen}\,d$$

Sumando y restando estas expresiones obtenemos los exponenciales del seno y del coseno.

$$\mathrm{sen}\cdot d = \frac{\left(e^{+jd} - e^{-jd}\right)}{2j} \qquad \cos.d = \frac{\left(e^{+jd} + e^{-jd}\right)}{2}$$

12.11.1. Funciones hiperbólicas

Muchas veces es conveniente definir una combinación diferente de exponenciales, denominadas seno hiperbólico y coseno hiperbólico.

$$\mathrm{senh}.d = \frac{\left(e^{+jd} - e^{-jd}\right)}{2} \qquad \cosh.d = \frac{\left(e^{+jd} + e^{-jd}\right)}{2}$$

Para valores reales de d los exponentes son reales y las expresiones exponenciales para las funciones hiperbólicas son más simples que las correspondientes a las funciones circulares.

$$e^{+jd} = \cosh d + \mathrm{senh}\,d \qquad e^{-jd} = \cosh d - \mathrm{senh}\,d$$

La ecuación de la impedancia de entrada queda:

$$Zi = Z_0.\frac{\left[Z_R.\cosh\gamma d + Z_O\,\mathrm{senh}\,\gamma d\right]}{\left[Z_R.\mathrm{senh}\,\gamma d + Z_O\cosh\gamma d\right]}$$

Dividiendo numerador y denominador por coshγd, obtenemos:

$$Zi = Z_0.\frac{\left[Z_R.\cancel{\frac{\cosh\gamma d}{\cosh\gamma d}} + Z_O.\frac{\mathrm{senh}\,\gamma d}{\cosh\gamma d}\right]}{\left[Z_R.\frac{\mathrm{senh}\,\gamma d}{\cosh\gamma d} + Z_O.\cancel{\frac{\cosh\gamma d}{\cosh\gamma d}}\right]}$$

$$Zi = Z_0 . \frac{\left[Z_R . + Z_O . \text{tgh}\, \gamma d\right]}{\left[Z_O . + Z_R . \text{tgh}\, \gamma d\right]}$$

Cuando d se hace igual a la longitud de la línea, esta expresión nos lleva a la impedancia del extremo transmisor.

12.11.2. Calculo de zi para una línea con atenuación nula ($\alpha = 0$)

Recordando que:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Si $\alpha = 0$, tendremos $\gamma = j\beta$

$$Zi = Z_0 . \frac{\left[Z_R . + Z_O . \text{tgh}\, j\beta d\right]}{\left[Z_O . + Z_R . \text{tgh}\, j\beta d\right]}$$

Comparando las ecuaciones siguientes se demuestra que las funciones hiperbólicas con un argumento imaginario cumplen con una relación simple con respecto a las funciones circulares de argumentos reales, es decir:

$$\text{senh.}\, j\beta d = j\, \text{sen}\, \beta d \qquad \cosh.\, j\beta d = j \cos \beta d$$

de la misma manera:

$$\text{tgh.}\, j\beta d = j\, \text{tg}\, \beta d$$

Por lo tanto la ecuación para el cálculo de la impedancia de entrada de una línea de transmisión la expresamos:

$Zi = Z_0 . \frac{\left[Z_R . + jZ_O . \text{tg}\, \beta d\right]}{\left[Z_O . + jZ_R . \text{tg}\, \beta d\right]}$	Ecuación de la impedancia de entrada de una sección de línea de transmisión sin pérdida

Nota: Ver Capítulo 7.8. ecuación (7-41)

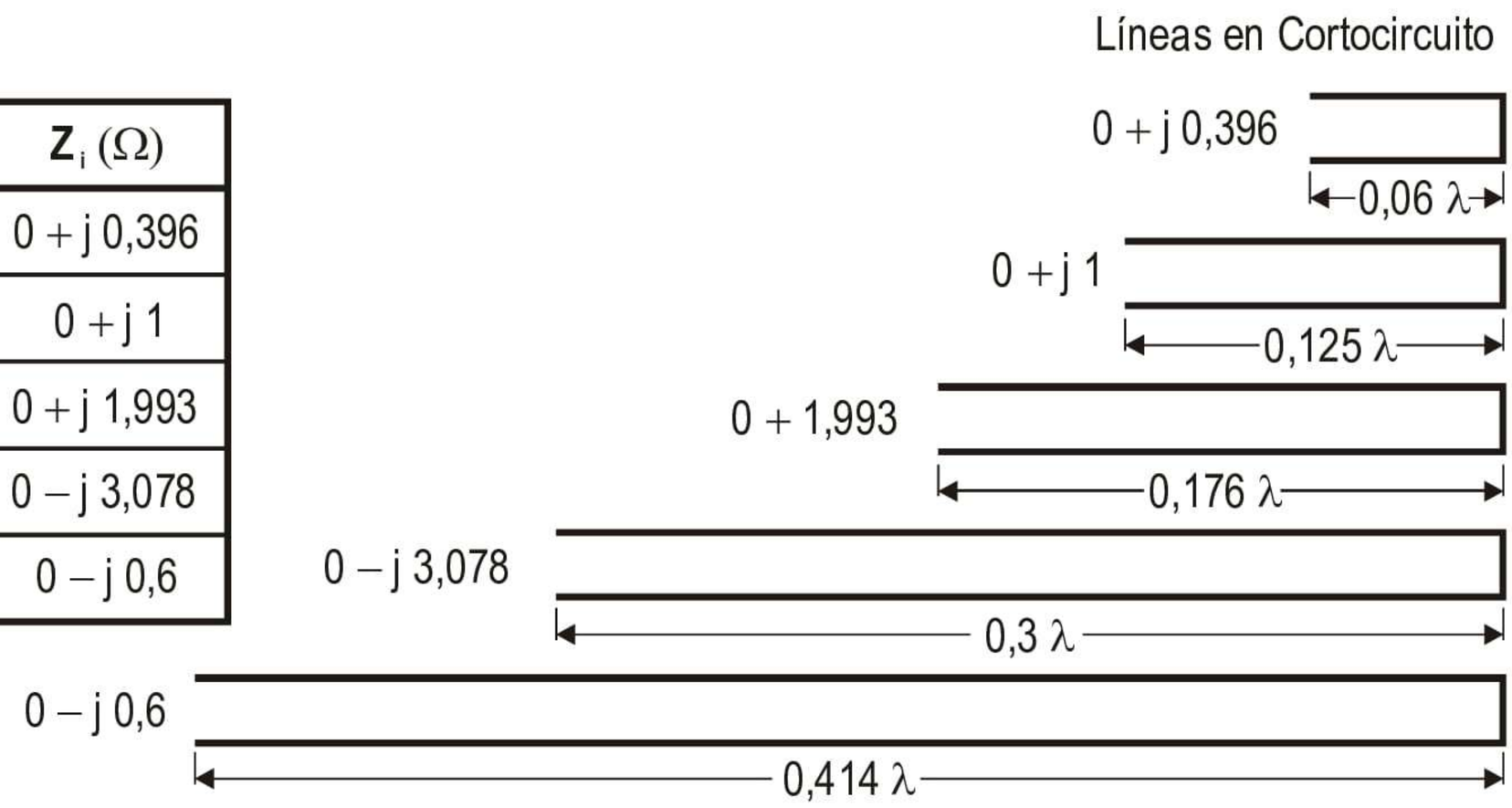
12.11.3. Análisis para una línea sin perdidas con carga en corto circuito

$Z_R = 0$

$$Zi = Z_0 . \frac{jZ_O . \text{tg}\, \beta d}{Z_O} = jZ_O . \text{tg}\, \beta d \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Dando valores a d en longitudes de onda y considerando Zo=1 obtenemos la tabla siguiente, cuyos valores pueden ser comprobados directamente con el ábaco de Smith.

	d (λ)	**Z**$_i$ (Ω)
1	0,06	0 + j 0,396
2	0,125	0 + j 1
3	0,176	0 + j 1,993
4	0,3	0 – j 3,078
5	0,414	0 – j 0,6



Aplicando el ábaco de Smith como carta de impedancias obtenemos los mismos valores que en la tabla:

1		$Z_1 = 0 + j0,396$
2		$Z_2 = 0 + j1$
3		$Z_3 = 0 + j1,993$
4		$Z_4 = 0 - j3,078$
5		$Z_5 = 0 - j0,6$

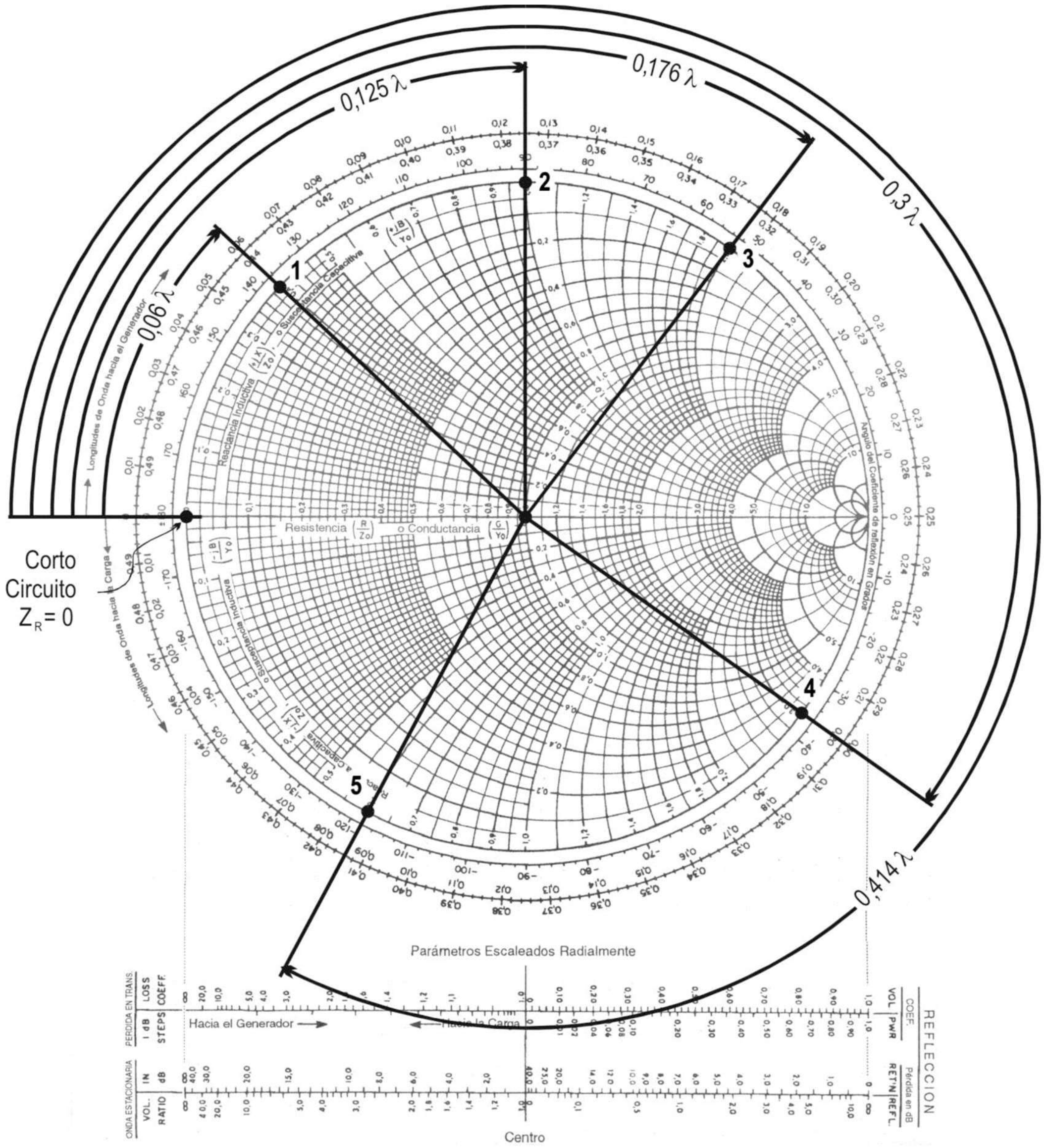


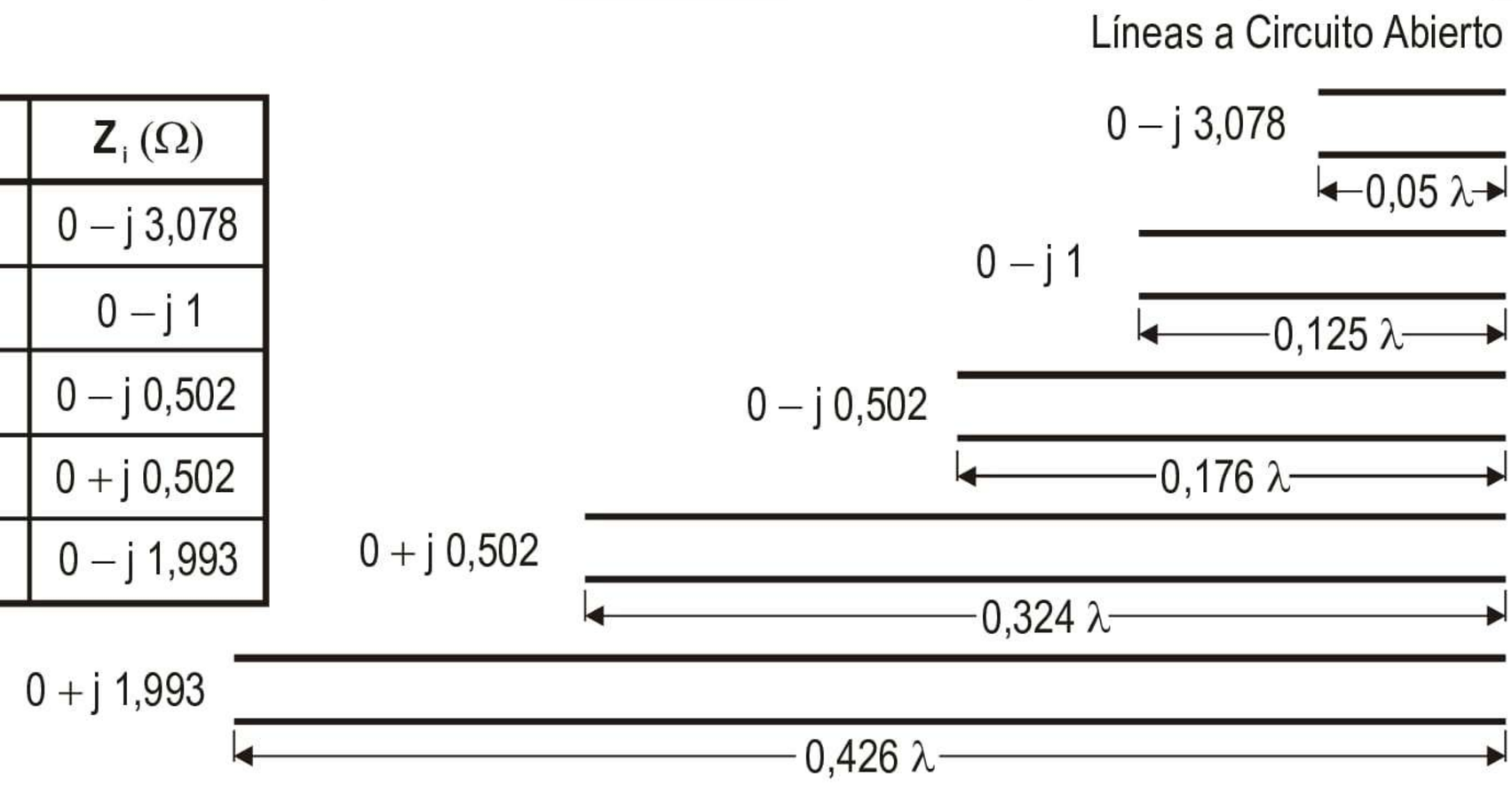
FIGURA 12-18

12.11.4. Análisis para una línea sin perdidas con carga en circuito abierto

$$Z_R = \infty$$

$$Zi = Z_0 \frac{[Z_R.]}{[jZ_R.\operatorname{tg}\beta d]} = \frac{Z_0}{j\operatorname{tg}\beta d} = \frac{-jZ_0}{\operatorname{tg}\beta d} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

	d (λ)	Z_i (Ω)
1	0,05	0 – j 3,078
2	0,125	0 – j 1
3	0,176	0 – j 0,502
4	0,324	0 + j 0,502
5	0,426	0 – j 1,993



En estos dos casos calculados hemos obtenido la impedancia de entrada según el largo de la línea de transmisión y lo comprobamos con el ábaco de Smith en las figuras 12-18 y 12-19, pero de igual forma es aplicable utilizando el ábaco de Smith como carta de admitancias para encontrar la admitancia de entrada de los ramales sintonizadores de línea (STUBS) lo cual se verá en la unidad siguiente.

1		$Z_1 = 0 - j3{,}078$
2		$Z_2 = 0 - j1$
3		$Z_3 = 0 - j0{,}502$
4		$Z_4 = 0 + j0{,}502$
5		$Z_5 = 0 + j1{,}993$

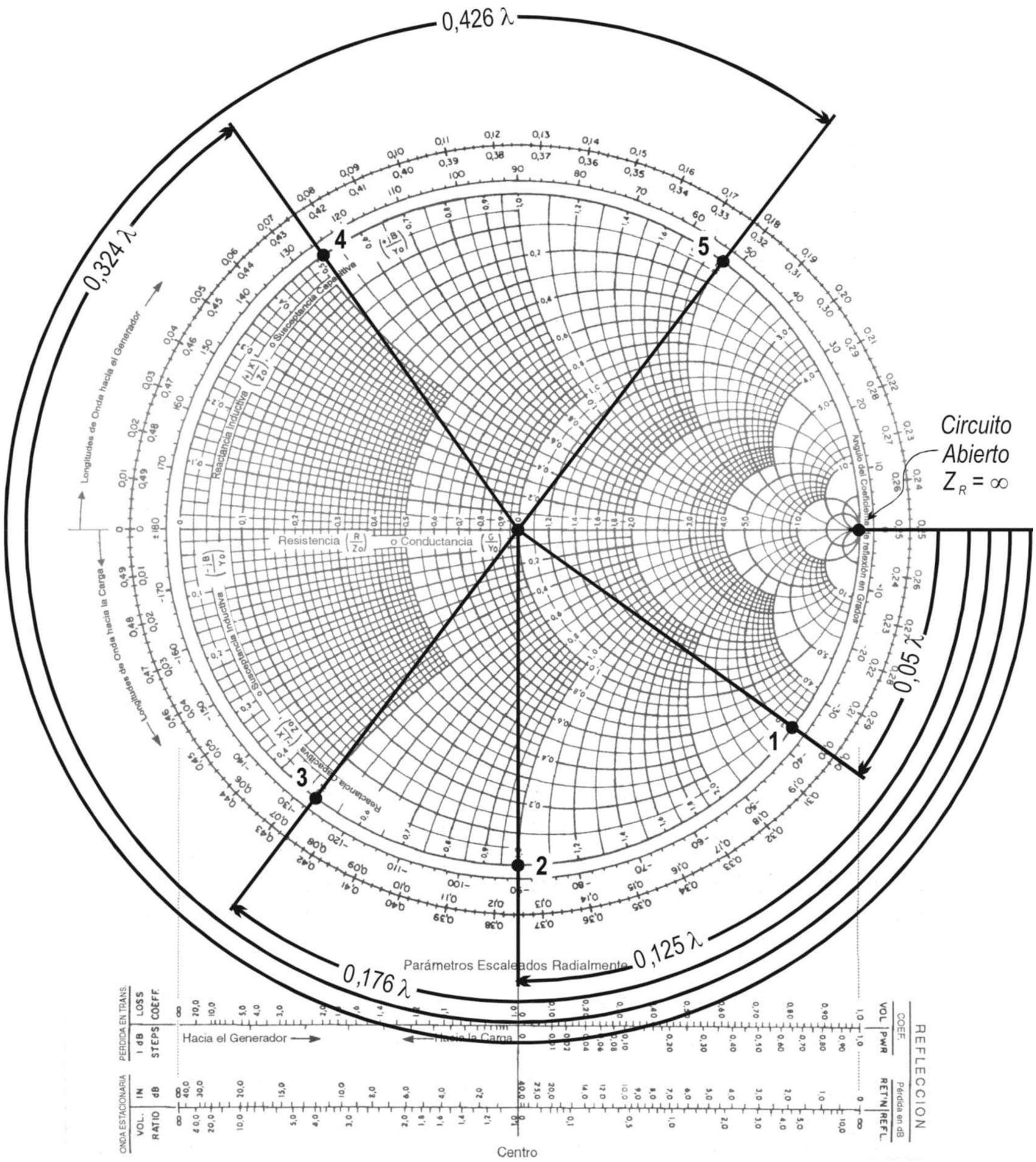
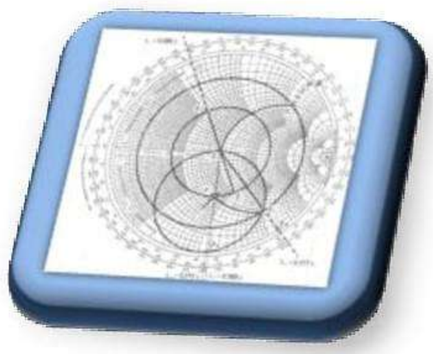

0,426 λ
0,324 λ
0,05 λ
0,125 λ
0,176 λ
Circuito
Abierto
$Z_R = \infty$
1
2
3
4
5
Longitudes de Onda hacia el Generador
Longitudes de Onda hacia la Carga
Resistencia $\left(\frac{R}{Z_0}\right)$ o Conductancia $\left(\frac{G}{Y_0}\right)$
Reactancia Inductiva $\left(\frac{+jX}{Z_0}\right)$ o Susceptancia Capacitiva
Reactancia Capacitiva $\left(\frac{-jX}{Z_0}\right)$ o Susceptancia Inductiva
Ángulo del Coeficiente de reflexión en Grados
Parámetros Escaleados Radialmente
Hacia el Generador
Hacia la Carga
Centro
REFLECCION
COEF.
VOL.
PWR
Pérdida en dB
RET'N
REFL.
PERDIDA EN TRANS.
LOSS
COEFF.
1 dB
STEPS
ONDA ESTACIONARIA
IN
dB
VOL.
RATIO

FIGURA 12-19

CAPÍTULO 13



ADAPTACIÓN DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Objetivo

☞ Que el alumno adquiera destreza en el cálculo de ramales sintonizadores y la adaptación de líneas de transmisión, a fin de evitar ondas reflejadas en el extremo generador cuando la impedancia de carga es diferente a la impedancia característica de la línea.

INTRODUCCIÓN

Cuando una línea está terminada en una impedancia de carga Z_R distinta de la impedancia característica de la línea Z_O, aparece la reflexión y habrá ondas estacionarias de voltaje y de corriente a lo largo de la línea, que pueden ser muy grandes según la magnitud de la desadaptación. En general, estas ondas estacionarias son indeseables, porque impiden la máxima transferencia de potencia y porque aumentan las pérdidas en la línea. En este capítulo veremos tres tipos de adaptación:

- Con un stub o ramal sintonizador de línea
- Con dos stubs
- Con Transformador de cuarto de longitud de onda

13.1. ADAPTACIÓN CON UN STUB.

Es posible obtener una adaptación mediante trozos de línea a modo de ramas de línea de transmisión conectadas en las proximidades de la carga y en sitios bien definidos. Los llamaremos "ramal sintonizador" de línea (stub).

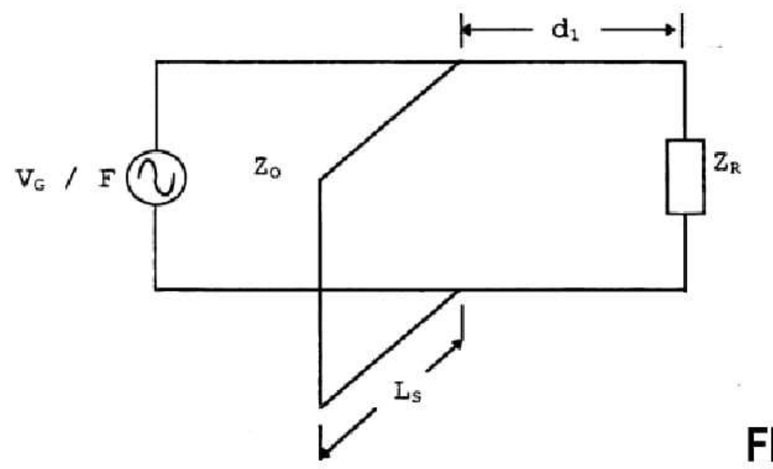
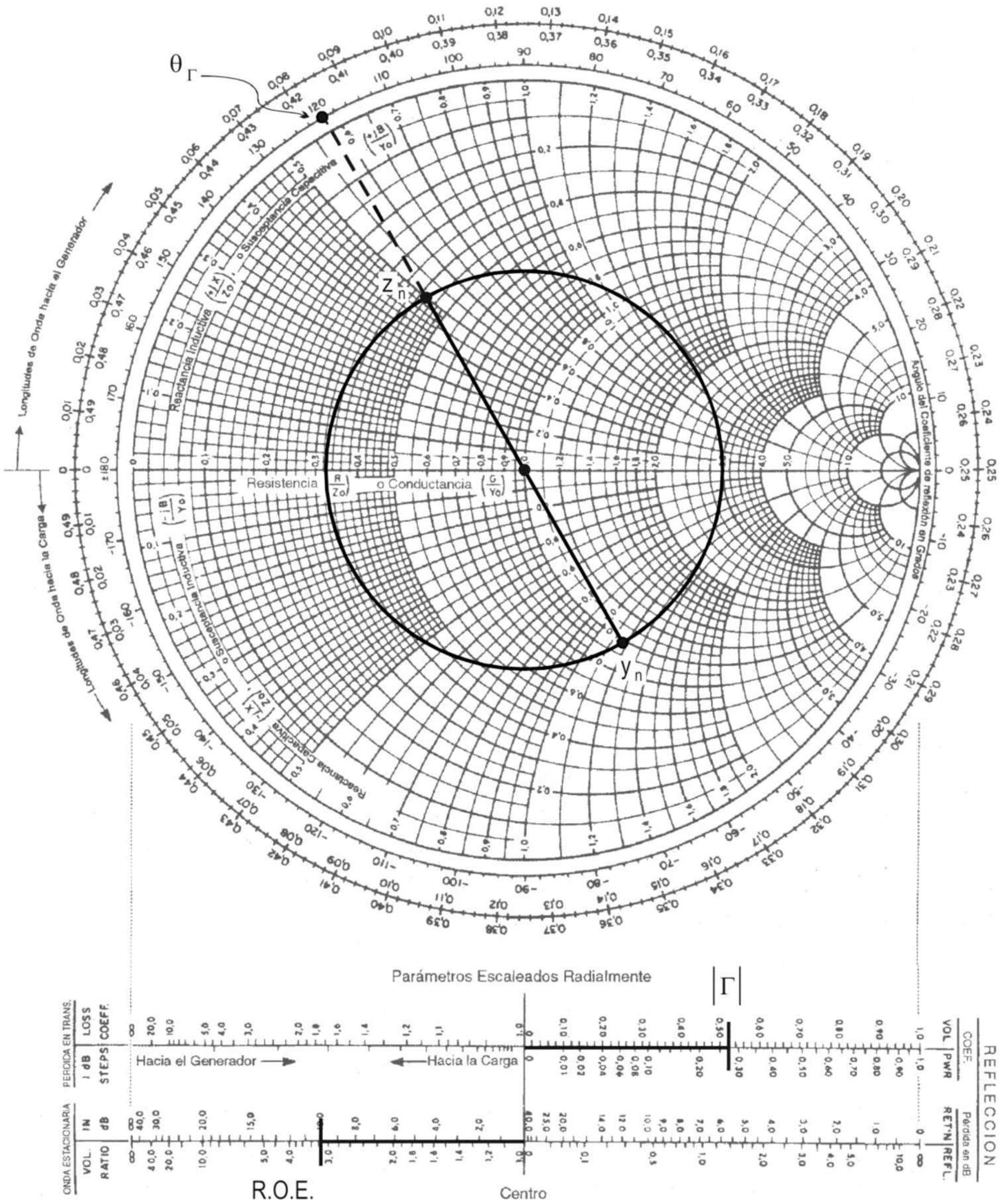


FIGURA 13-1

El stub es un ramal de la misma línea de transmisión terminado en circuito abierto o corto circuito y como se vió en la unidad anterior, según su largo es la impedancia de entrada Zs que presenta, la cual será siempre puramente imaginaria.

Consideremos el problema de adaptar una impedancia de carga Z_R al extremo de una línea sin pérdidas empleando un corto ramal de línea *(stub line),* tal como se muestra en la figura 13-2



13.1.1. Impedancia y admitancia normalizada de carga

Lo primero que debemos hacer es normalizar la impedancia de carga Z_R para poder ubicar este punto en el ábaco de Smith.

$$z_N = r + j(x_C - x_L)$$

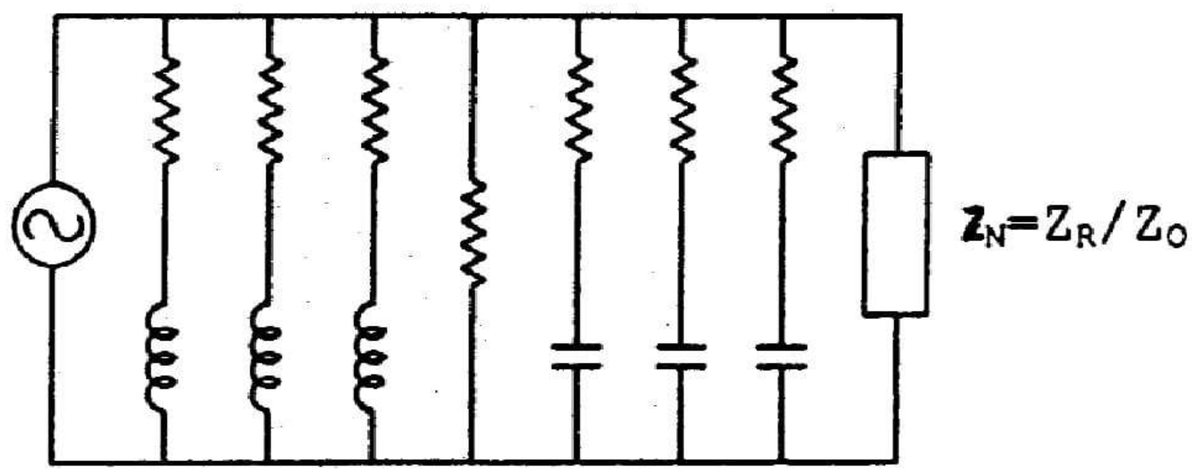


FIGURA 13-2

Luego encontramos la admitancia normalizada de carga yn para convertir los parámetros distribuídos en elementos en paralelos.

$$y_N = g + j(b_C - b_L)$$

Esto lo logramos girando 180º desde el punto de zn con módulo de coeficiente de reflexión constante.

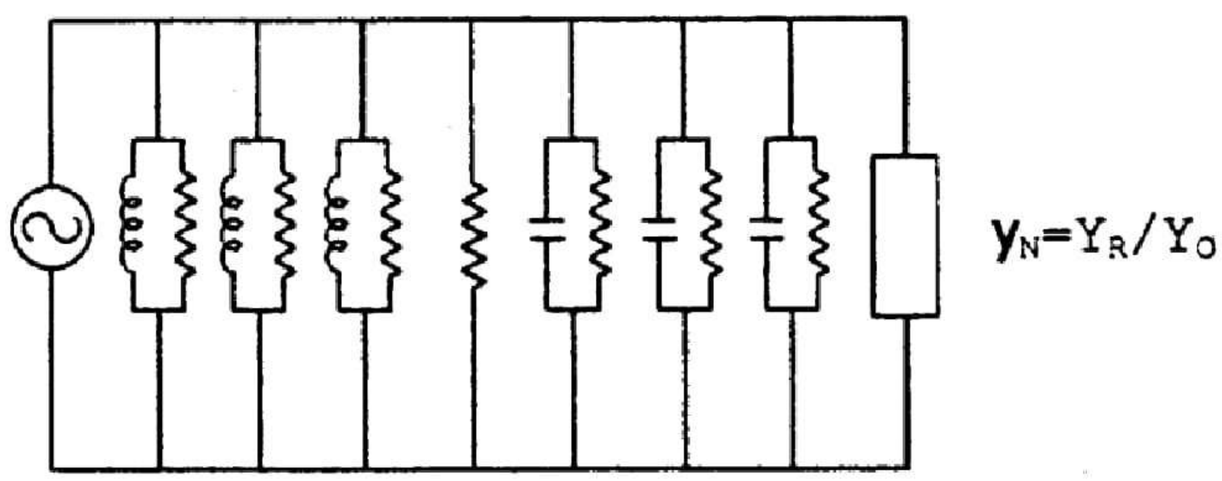


FIGURA 13-3

13.1.2 Coeficiente de reflexión y R.O.E.

a) Para encontrar gráficamente el módulo del coeficiente de reflexión debemos tomar el vector que va desde el centro del ábaco al punto de impedancia normalizada de carga zn. Con este vector marcamos en la escala superior derecha REF. COEF. VOL y obtenemos el valor del módulo del coeficiente de reflexión cuyo valor estará comprendido entre cero y uno.

b) Para calcular el argumento del coeficiente de reflexión trazamos una recta desde el centro del ábaco que pase por el punto de impedancia normalizada de carga y que corte la escala denominada “reflection coeficient degrees” el punto por donde pasa la línea en esta escala nos da el valor buscado.

c) El R.O.E. lo calculamos con el mismo vector utilizado para el módulo del coeficiente de reflexión pero marcando en la escala inferior izquierda “STANDING WAVE, VOL RATIO” su valor estará comprendido entre uno e infinito.

13.1.3 Distancia de la carga a los puntos de adaptación

Desde el punto de yn giramos con módulo de coeficiente de reflexión constante en sentido horario, hasta cortar el circulo de parte real de la admitancia igual a la unidad (vemos que hay dos puntos de corte, elegimos el más cercano) el punto elegido lo llamaremos y_1. Este valor de y_1 está ubicado a una distancia d_1 de la carga y es aquí donde colocaremos el stub.

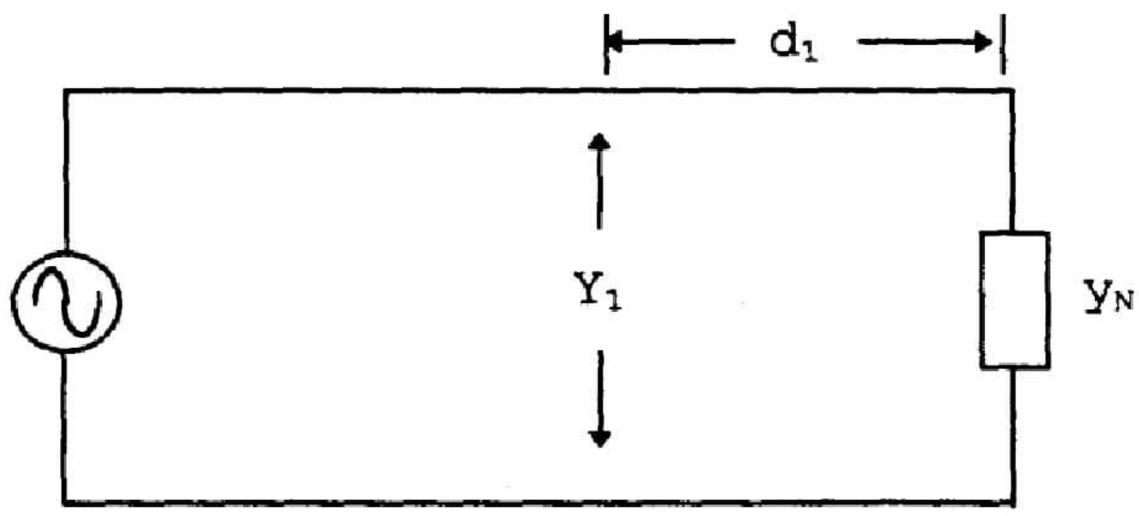


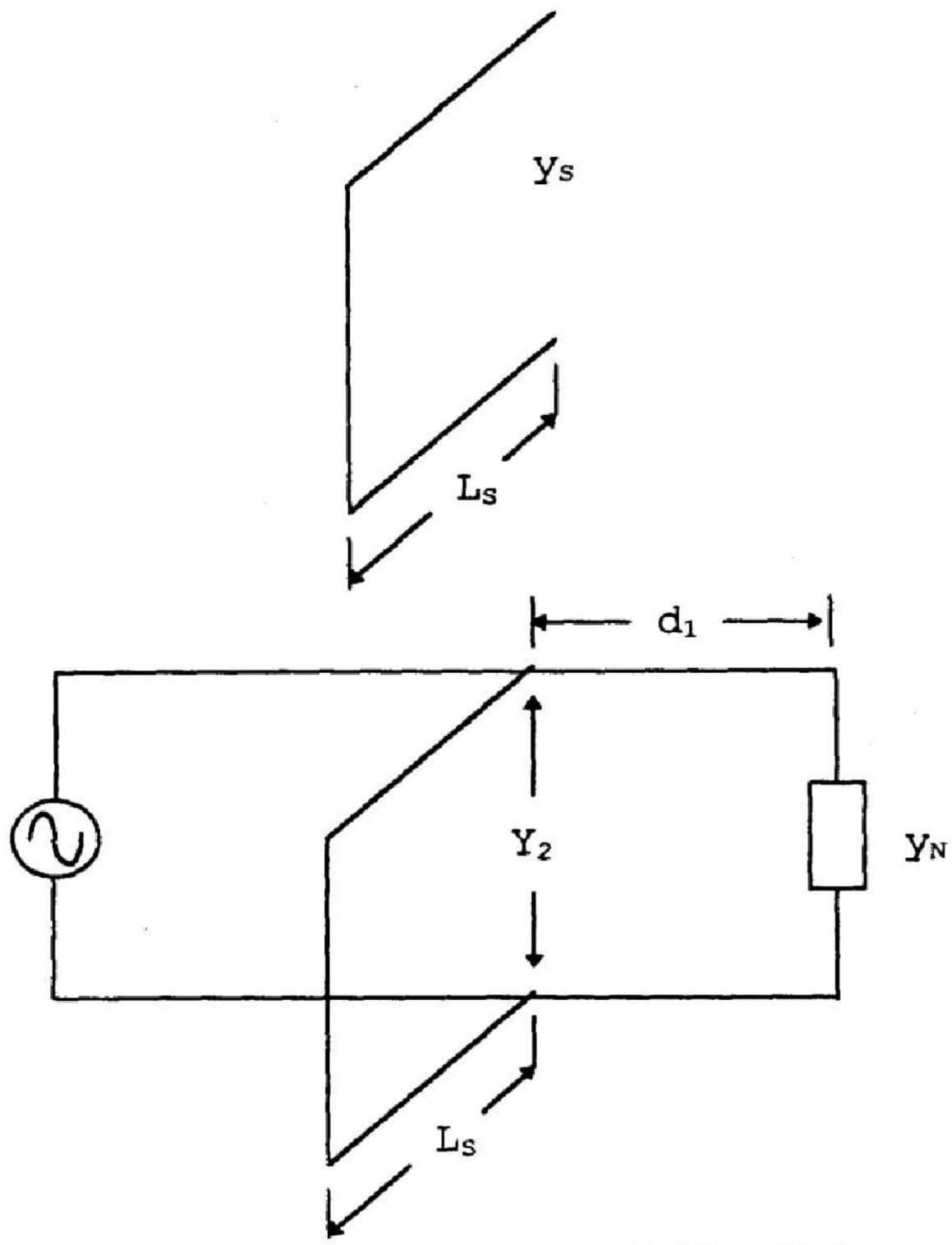
FIGURA 13-4

13.1.4 Relación entre la longitud del stub y la admitancia en sus terminales de entrada

Variando la longitud del ramal L_S se varía sólo la susceptancia, de manera que debe elegirse la longitud d_1, para que la admitancia en ese punto y1, pueda llevarse al centro de la carta de Smith sumándole una susceptancia shunt provista por el stub. Así a la distancia d_1 la admitancia y_1 $(1+jb_1)$ está en la circunferencia de conductancia constante que pasa por el centro del ábaco (1+j0).

La admitancia del ramal ys, (susceptancia) se determina por la longitud L_S elegida para que se obtenga $y_2 = 1 + j0$.
Nótese que la línea puede adaptarse también empleando el punto y_1', en lugar del y_1. La razón de onda estacionaria (R.O.E.) entre la carga y el ramal puede leerse en la escala de resistencia (conductancia) en el punto en que el círculo de coeficiente de reflexión constante cruza el eje de parte imaginaria igual a cero del lado derecho del ábaco de Smith.

El simple ramal descrito tiene la ventaja de que adaptará toda carga, pero tiene la desventaja de que la longitud L_S debe ser ajustable, requisito que muy a menudo es impracticable, particularmente en las líneas coaxiales.



$y_2 = y_1 + y_S = 1+j0$

FIGURA 13-5

13.1.5 Pasos para la adaptación con 1 ramal sintonizador (STUB)

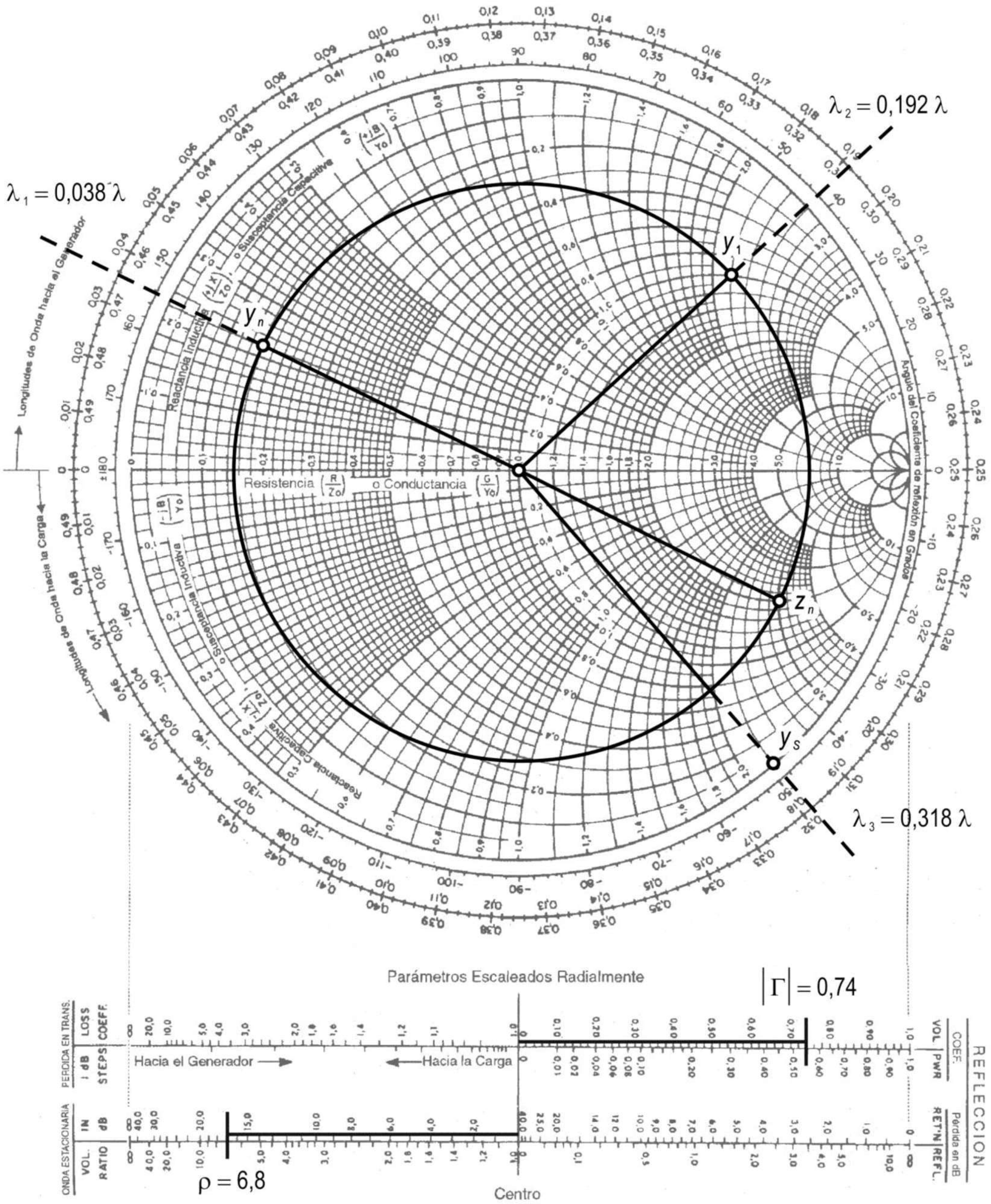
A fin de interpretar mejor el procedimiento de adaptación con un stub, haremos un ejemplo:

Datos

Imp. Característica	Zo=50	[Ω]
Imp. de carga	Zr=100-j150	[Ω]
Frec. Generador	F= $2{,}5 \times 10^8$	[Hz]
Tensión generador	V= 100	[V]

Paso	Procedimiento a Realizar	Símbolo	Valor
1	Normalizar la impedancia de carga y marcar en el ábaco de Smith	z_n	**2-j3**
2	Desde el punto de zn girar con módulo de "coeficiente de reflexión" constante 180º y marcar la admitancia yn en el ábaco de Smith.	y_n	**0,16+j0,24**
3	Trazar una recta desde el centro del ábaco que pase por yn y encontrar la longitud de onda normalizada de yn	λ_1	**0,038 λ**
4	Desde el punto de yn girar con módulo de "coeficiente de reflexión" constante hasta cortar el circulo de parte real igual a 1.	y_1	**1+j2,2**
5	Trazar una recta desde el centro del ábaco que pase por y_1 y encontrar la longitud de onda normalizada de y_1.	λ_2	**0,192 λ**
6	Calcular la distancia en longitudes de onda desde la admitancia de carga normalizada al punto donde colocaremos el stub ($\lambda_d = \lambda_2 - \lambda_1$)	λ_d	**0,154 λ**
7	Para anular la parte imaginaria de y_1 necesitamos conectar una susceptancia de igual valor y de signo contrario	y_S	**0-j2,2**
8	Trazar una recta desde el centro del ábaco que pase por y_s y encontrar la longitud de onda normalizada de y_s.	λ_3	**0,318 λ**
9	Calcular el largo del stub en longitudes de onda tomando la distancia desde el punto de corto circuito al punto donde obtuvimos la admitancia y_s ($\lambda_s = \lambda_c - \lambda_3$)	λ_S	**0,068 λ**
10	Comprobar que la admitancia resultante de sumar y_1 e y_S da $y_2 = 1 + j0$	y_2	**1+j0**
11	Calcular la longitud de onda de la señal del generador	λ_G	**1,2 [m]**
12	Calcular la distancia en metros de la carga al punto donde colocamos el stub ($d = \lambda_d.\lambda_G$)	**d**	**0.1848 [m]**
13	Calcular el largo del ramal sintonizador (stub) en metros ($d = \lambda_S.\lambda_G$)	L_S	**0,0816 [m]**

Nota: Tanto λ_d como λ_S son distancias gráficas por lo tanto el cálculo puede variar según la ubicación de y_1 ó y_S respectivamente


$\lambda_2 = 0{,}192\ \lambda$
$\lambda_1 = 0{,}038\ \lambda$
y_1
y_n
z_n
y_s
$\lambda_3 = 0{,}318\ \lambda$
Longitudes de Onda hacia el Generador
Longitudes de Onda hacia la Carga
Reactancia Inductiva
o Susceptancia Capacitiva
Resistencia
o Conductancia
Reactancia Capacitiva
o Susceptancia Inductiva
Angulo del Coeficiente de reflexión en Grados
Parámetros Escaleados Radialmente
$|\Gamma| = 0{,}74$
Hacia el Generador
Hacia la Carga
$\rho = 6{,}8$
Centro
REFLECCION
Pérdida en dB
RET'N LOSS
REFL. COEF.
VOL. PWR
PERDIDA EN TRANS.
1 dB STEPS
LOSS COEFF.
ONDA ESTACIONARIA
IN dB
VOL. RATIO

13.2. ADAPTACIÓN CON DOS STUBS

Una solución al problema de ajuste de la longitud Ls que mencionamos en la adaptación con un stub, es el empleo de dos ramales, como indica la figura 13-7. El ramal de longitud L_{S1} (primer stub), añade la susceptancia necesaria para llevar al punto $\mathbf{y_1}$, al punto $\mathbf{y_2}$ sobre el círculo situado en la mitad inferior de la carta de Smith; este círculo es llamado círculo auxiliar y es el de conductancia unidad girado 3λ/8. La transformación con el segmento 3λ/8, lleva la admitancia al punto $\mathbf{y_3}$, que puede entonces llevarse a la unidad añadiéndole la susceptancia debida al ramal de longitud $\mathbf{L_{S2}}$ (segundo stub).

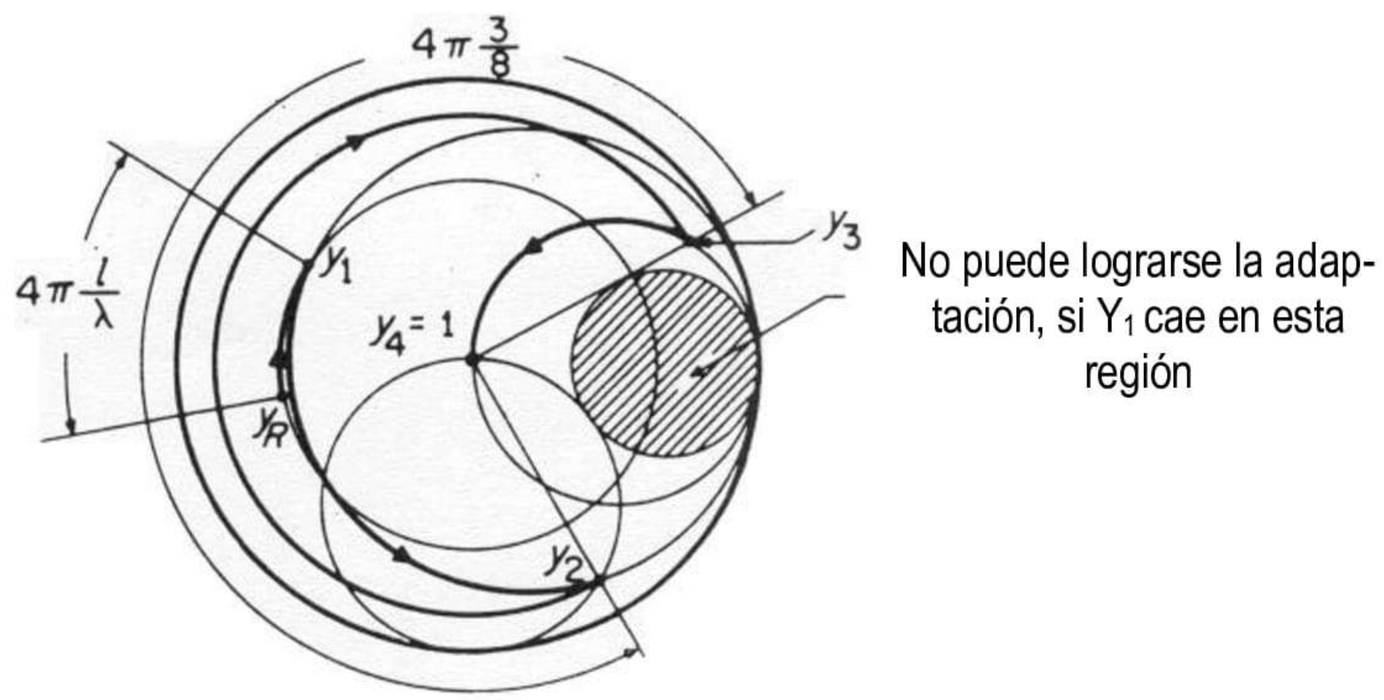


FIGURA 13-6: Sintonizador de dos ramales en una línea sin pérdidas

Si no se puede adaptar una carga particular (es decir, si y, cae dentro de la región sombreada de la figura 13-6), un cambio de l lo hará posible. Las longitudes de los ramales y las razones de ondas estacionarias en la línea pueden encontrarse del mismo modo que en el caso de un solo ramal sintonizador. En el caso de dos ramales sintonizadores debe hacerse notar que hay dos juegos de longitudes de ramal que adaptarán la carga a la línea. El lector debe obtener por sí mismo el segundo juego de longitudes, tal como se hizo en la figura 13-6

13.2.1. Pasos para la adaptación con 2 ramales sintonizadores (2 STUB)

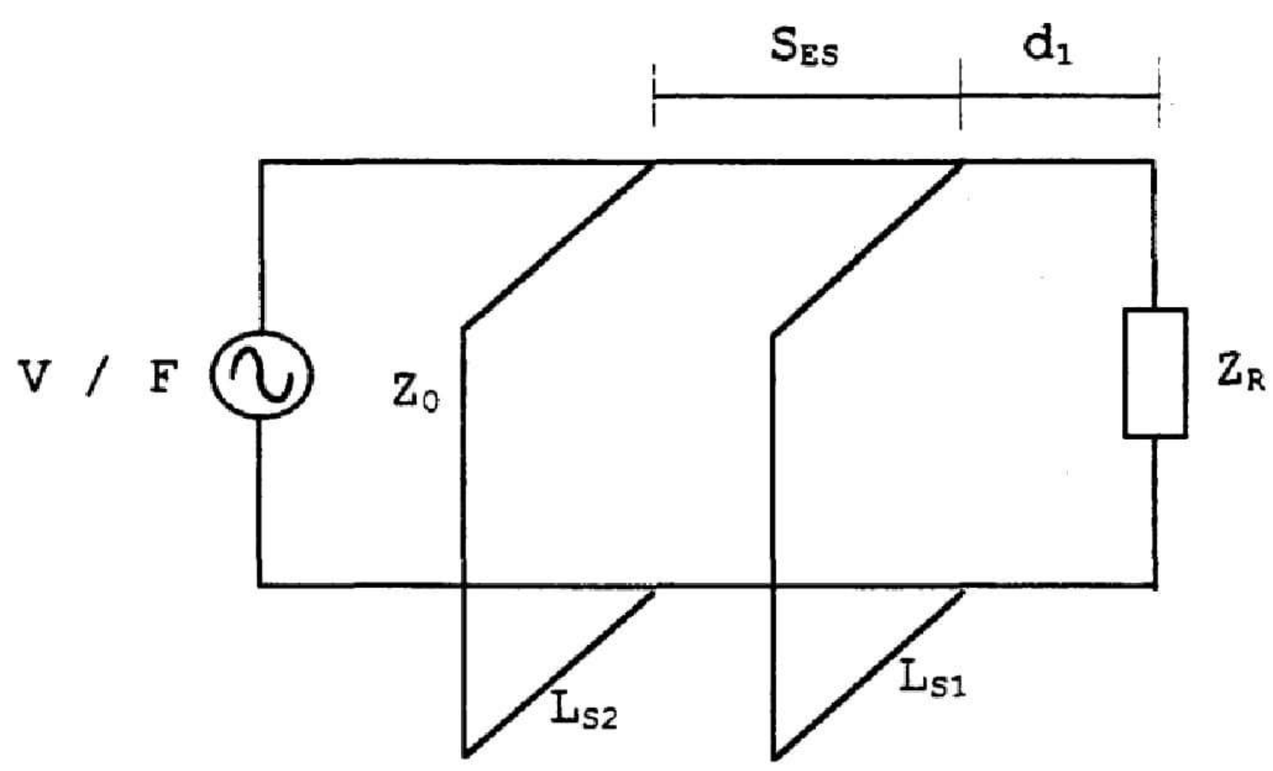


FIGURA 13-7: Línea sin perdidas adaptada con dos stubs.

Datos

Imp. Característica	Zo= 50	[Ω]
Imp. de carga	Zr= 50-j50	[Ω]
Frec. Generador	F= $3x10^8$	[Hz]
Tensión generador	V= 100	[V]
Separación entre stubs	= 3/8	[λ]
R.o.e. entre stubs	ROE_{ES}= 7	

Paso	Procedimiento a Realizar	Símbolo	Valor
1	Trazar el círculo auxiliar con el centro separado a una distancia igual a la separación entre los stub, del centro del círculo de parte real igual a 1 (en sentido antihorario).		
2	Normalizar la impedancia de carga y marcar en el ábaco de Smith	z_n	**1-j1**
3	Desde el punto de z_n girar, con módulo de "coeficiente de reflexión" constante, 180º y marcar la admitancia **yn** en el ábaco de Smith.	y_n	**0,5+j0,5**
4	Trazar una recta desde el centro del ábaco que pase por yn y encontrar la longitud de onda normalizada de **yn**	λ_1	**0,088 λ**
5	Desde el punto de **yn** girar, con módulo de "coeficiente de reflexión" constante, hasta un punto arbitrario que este sobre el circulo de coeficiente de reflexión constante y dentro del circulo auxiliar. (si se condiciona el R.O.E. entre los stub (ROE_{ES}), este punto deja de ser arbitrario, ver capítulo 13.2.3). y_1 es la admitancia en el punto que colocaremos el primer stub.	y_1	**0,7-j0,8**
6	Trazar una recta desde el centro del ábaco que pase por y_1 y encontrar la longitud de onda normalizada de y_1.	λ_2	**0,370 λ**
7	Calcular la distancia en longitudes de onda desde la admitancia de carga normalizada al punto donde colocaremos el 1er stub ($\lambda_d = \lambda_2 - \lambda_1$)	λ_d	**0,282 λ**
8	Desde y_1 girar por el circulo de parte real constante hasta cortar el circulo auxiliar .Admitancia en el punto que colocamos el primer stub, con el stub colocado.	y_2	**0,7-j1,9**
9	Encontrar la admitancia del 1er stub, haciendo la diferencia entre y_2 e y_1.	y_{S1}	**0-j1,1**
10	Trazar una recta desde el centro del ábaco que pase por y_{S1} y encontrar la longitud de onda normalizada de y_{S1}.	λ_3	**0,368 λ**
11	Calcular el largo del 1er stub en longitudes de onda tomando la distancia desde el punto de corto circuito al punto donde obtuvimos la admitancia y_{S1} ($\lambda_{S1} = \lambda_3 - \lambda_C$)	λ_{S1}	**0,118 λ**

Paso	Procedimiento a Realizar	Símbolo	Valor
12	Girar con módulo de coeficiente de reflexión constante desde y_2 una distancia igual a la separación entre los stub en sentido horario.	y_3	**1+j2,21**
13	Para anular la parte imaginaria de y_3 necesitamos conectar una susceptancia de igual valor y de signo contrario.	y_{S2}	**0-j2,21**
14	Trazar una recta desde el centro del ábaco que pase por y_{S2} y encontrar la longitud de onda normalizada de y_{S2} .	λ_4	**0,317 λ**
15	Calcular el largo del 2do stub en longitudes de onda, tomando la distancia desde el punto donde obtuvimos la admitancia y_{S2} hasta el punto de corto circuito λ_C . ($\lambda_{S2} = \lambda_4 - \lambda_C$)	λ_{S2}	**0,067 λ**
16	Comprobar que la admitancia resultante de sumar y_3 e y_{S2} da $y_4 = 1 + j0$	y_4	**1+j0**
17	Calcular la longitud de onda de la señal del generador [m]	λ_G	**1 [m]**
18	Calcular la distancia en metros de la carga al punto donde colocamos el primer stub.	**d**	**0,282[m]**
19	Calcular el largo del primer ramal sintonizador (1er stub) en metros	L_{S1}	**0,118 [m]**
20	Calcular el largo del segundo ramal sintonizador (2do stub) en metros	L_{S2}	**0,067 [m]**

Nota: Tanto λ_d ; λ_{S1} y λ_{S2} son distancias gráficas.

13.2.2 Separación standard entre los STUBS

13.2.2.1. Separación 3λ / 8 = 0,375 λ

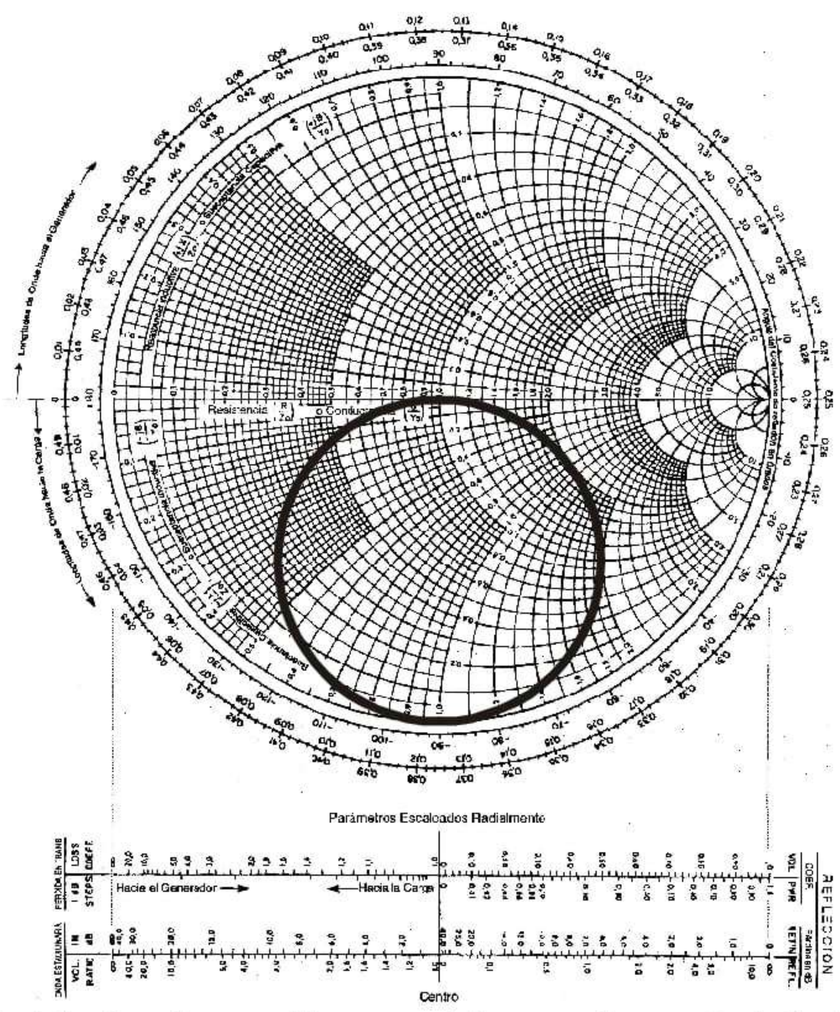


FIGURA 13-8: El círculo auxiliar se ubica en la parte inferior del ábaco.

13.2.2.2 Separación λ\4 = 0,25 λ

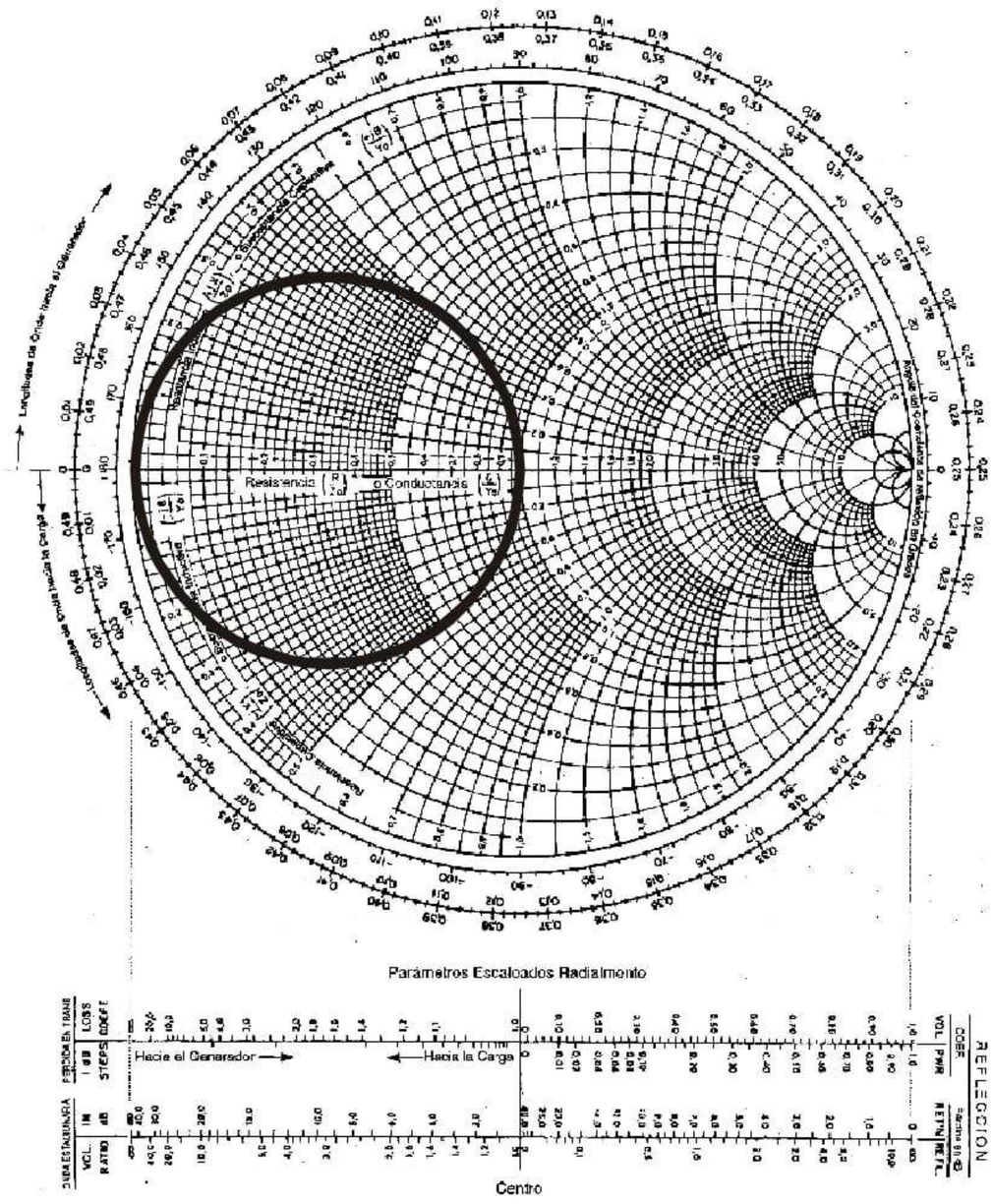


FIGURA 13-9: El círculo auxiliar se ubica en la parte izquierda del ábaco.

13.2.2.3. Separación λ\8 = 0,125 λ

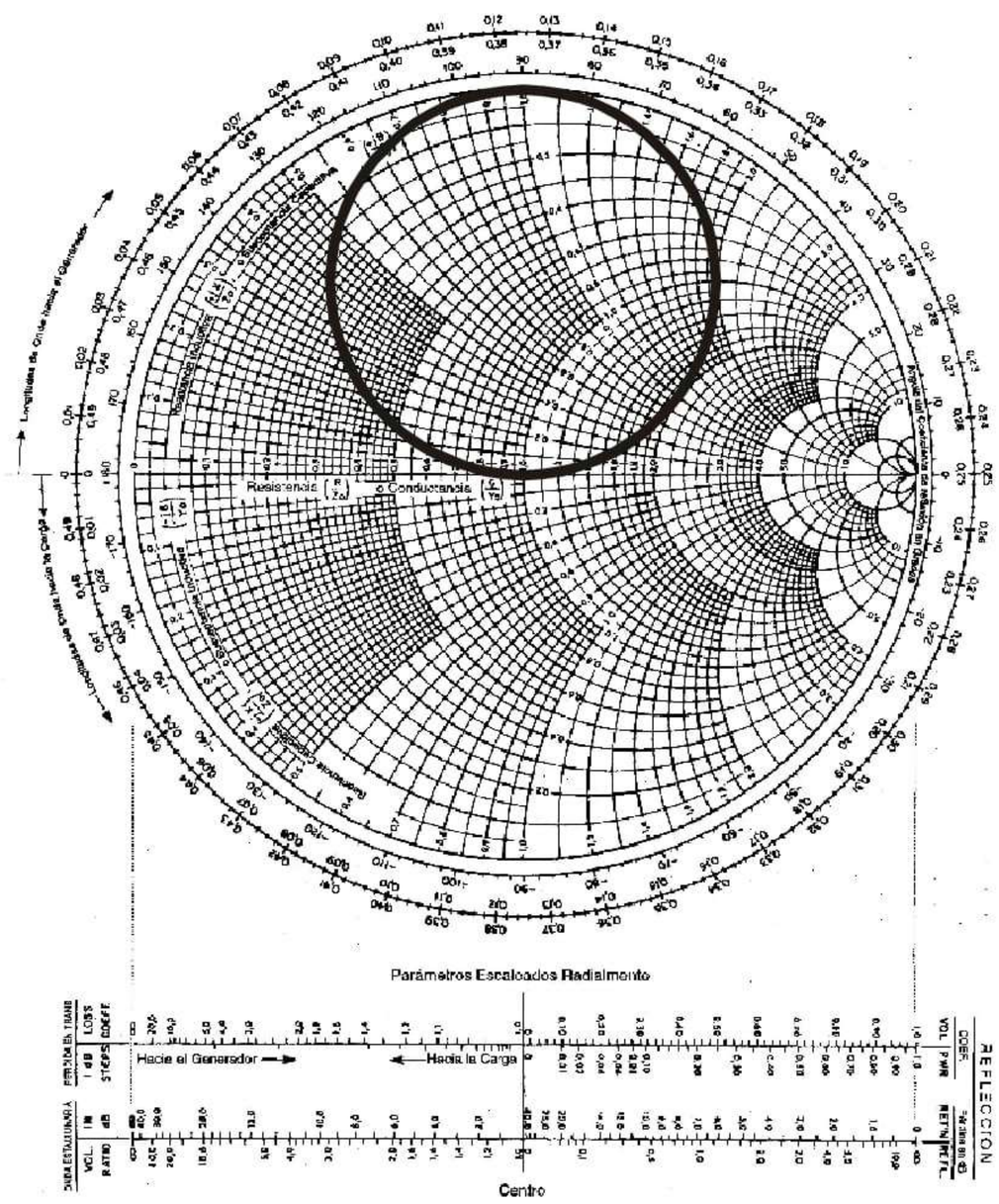


FIGURA 13-10: El círculo auxiliar se ubica en la parte superior del ábaco.

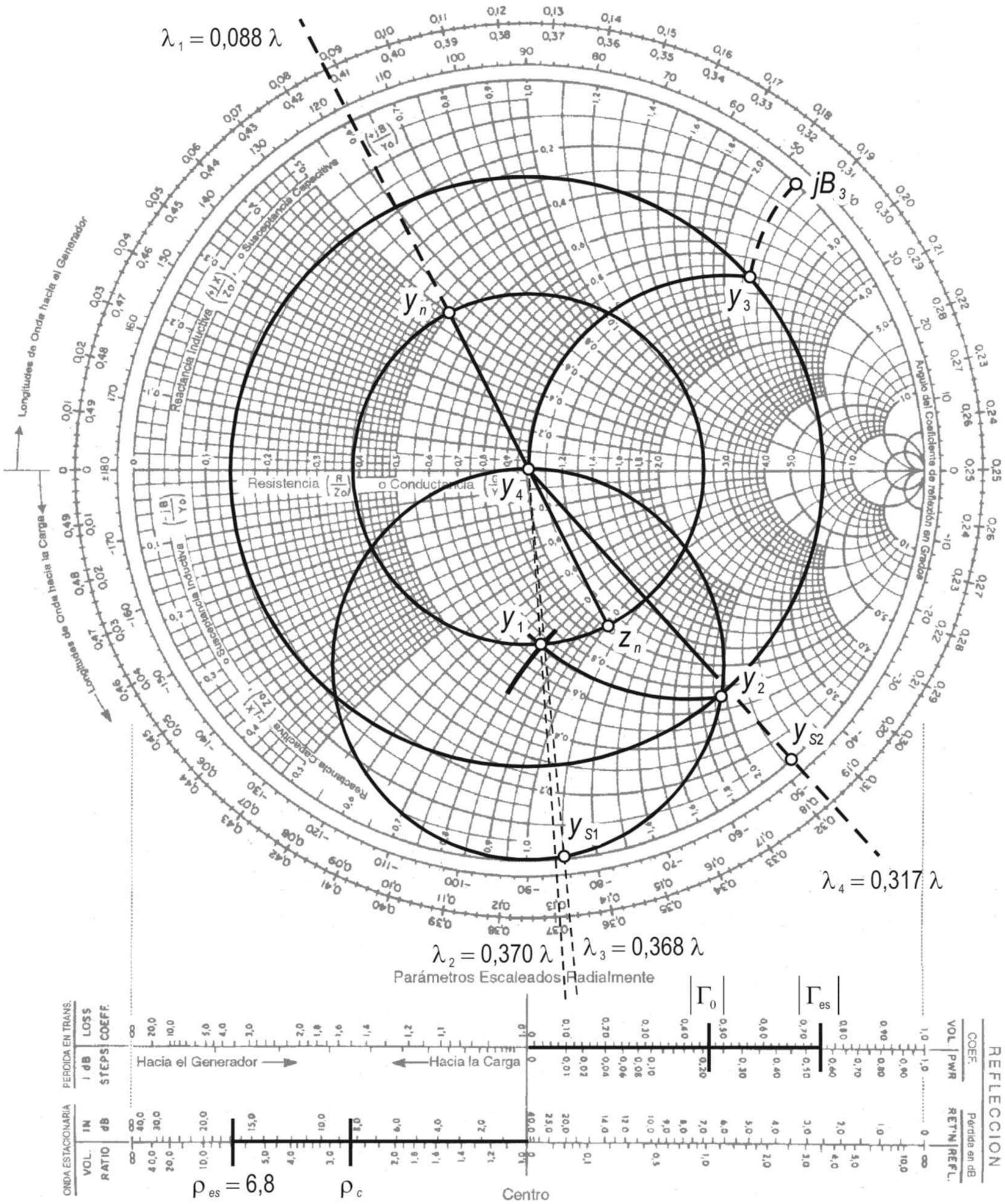
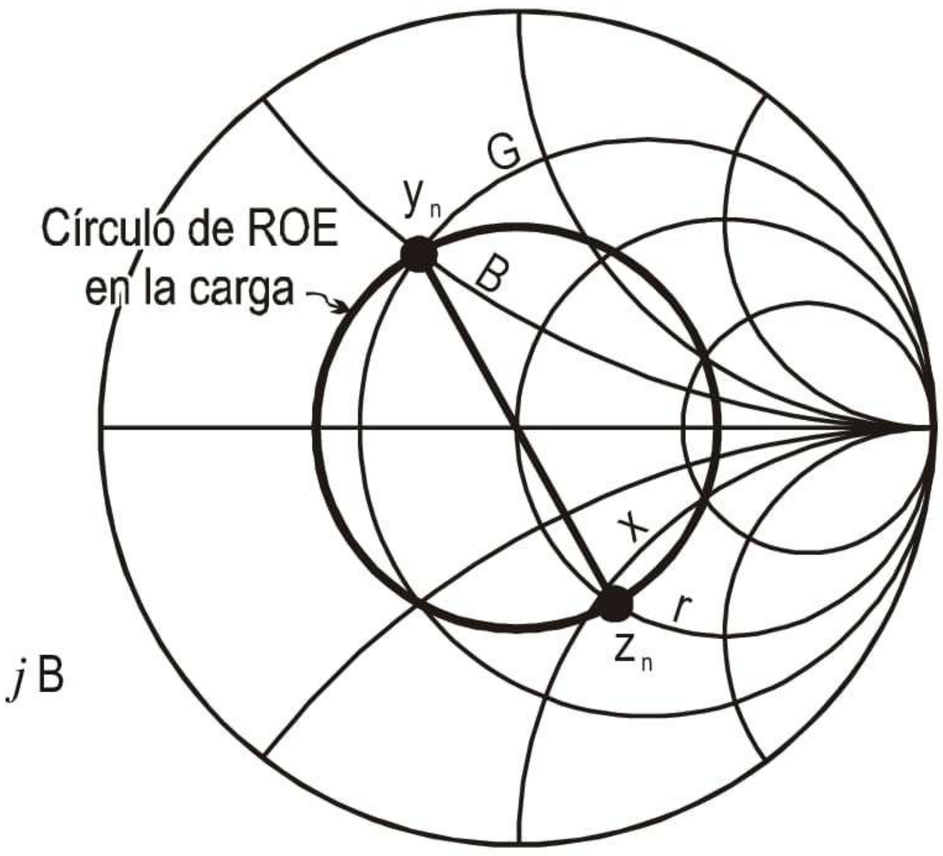

$\lambda_1 = 0{,}088\ \lambda$
jB_3
y_n
y_3
y_4
y_1
z_n
y_2
y_{S2}
y_{S1}
$\lambda_4 = 0{,}317\ \lambda$
$\lambda_2 = 0{,}370\ \lambda$
$\lambda_3 = 0{,}368\ \lambda$
Parámetros Escaleados Radialmente
$|\Gamma_0|$
$|\Gamma_{es}|$
Longitudes de Onda hacia el Generador
Longitudes de Onda hacia la Carga
Resistencia $\left(\frac{R}{Z_0}\right)$ o Conductancia $\left(\frac{G}{Y_0}\right)$
Reactancia Inductiva $\left(\frac{+jX}{Z_0}\right)$ o Susceptancia Capacitiva
Reactancia Capacitiva $\left(\frac{-jX}{Z_0}\right)$ o Susceptancia Inductiva
Angulo del Coeficiente de reflexión en Grados
Hacia el Generador
Hacia la Carga
PERDIDA EN TRANS.
LOSS
COEFF.
dB
STEPS
ONDA ESTACIONARIA
IN
dB
VOL.
RATIO
$\rho_{es} = 6{,}8$
ρ_c
Centro
COEF.
VOL.
PWR
Pérdida en dB
RET'N
REFL.
REFLECCION

Diagrama esquemático y gráfico para adaptación con 2 stubs

1



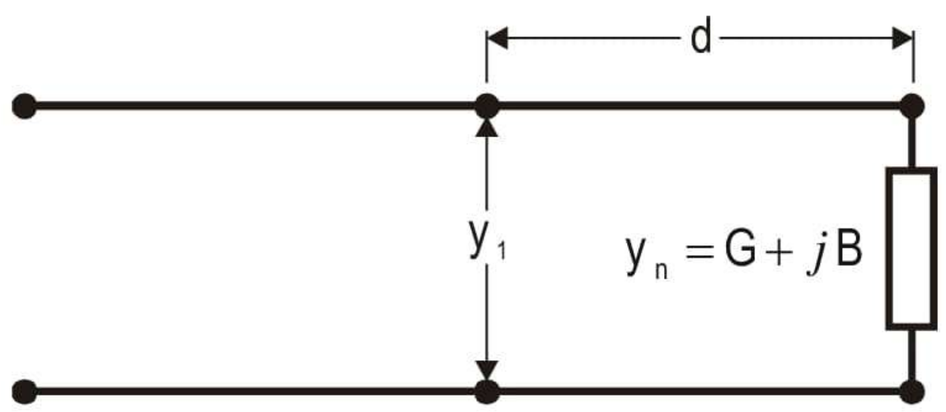
Frecuencia $= F$

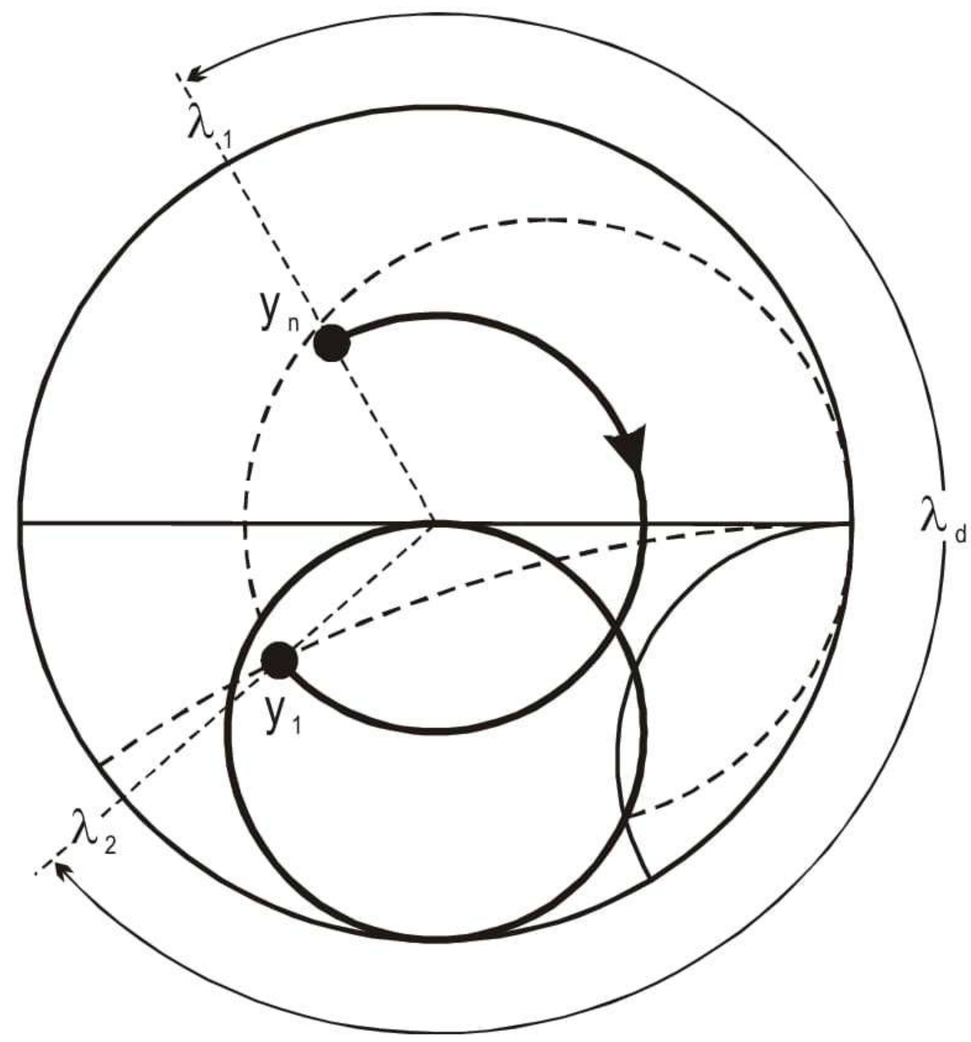
$C = 3 \times 10^8 \ \frac{m}{s}$ $\qquad \lambda_G = \frac{C}{F}$

$z_n = \frac{Z_R}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} - \frac{jX}{Z_0} = r - jx$ $\qquad \frac{1}{z_n} = y_n = G + jB$

$\lambda_G =$ Longitud de onda del generador

2





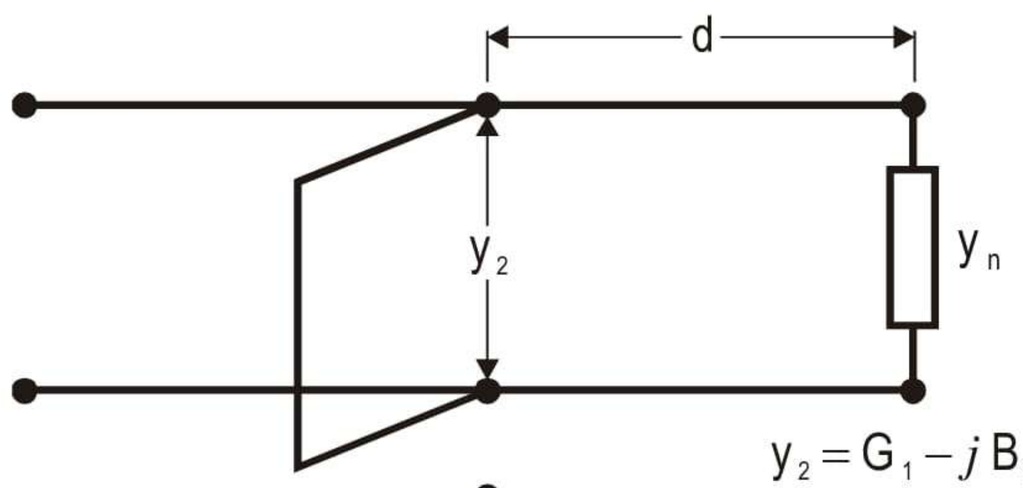
$d = \lambda_2 - \lambda_1$

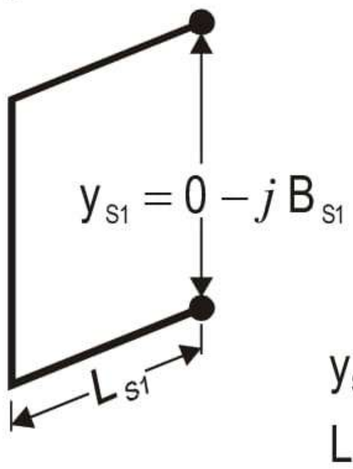
$d = \lambda_d \times \lambda_G$ [Mts]

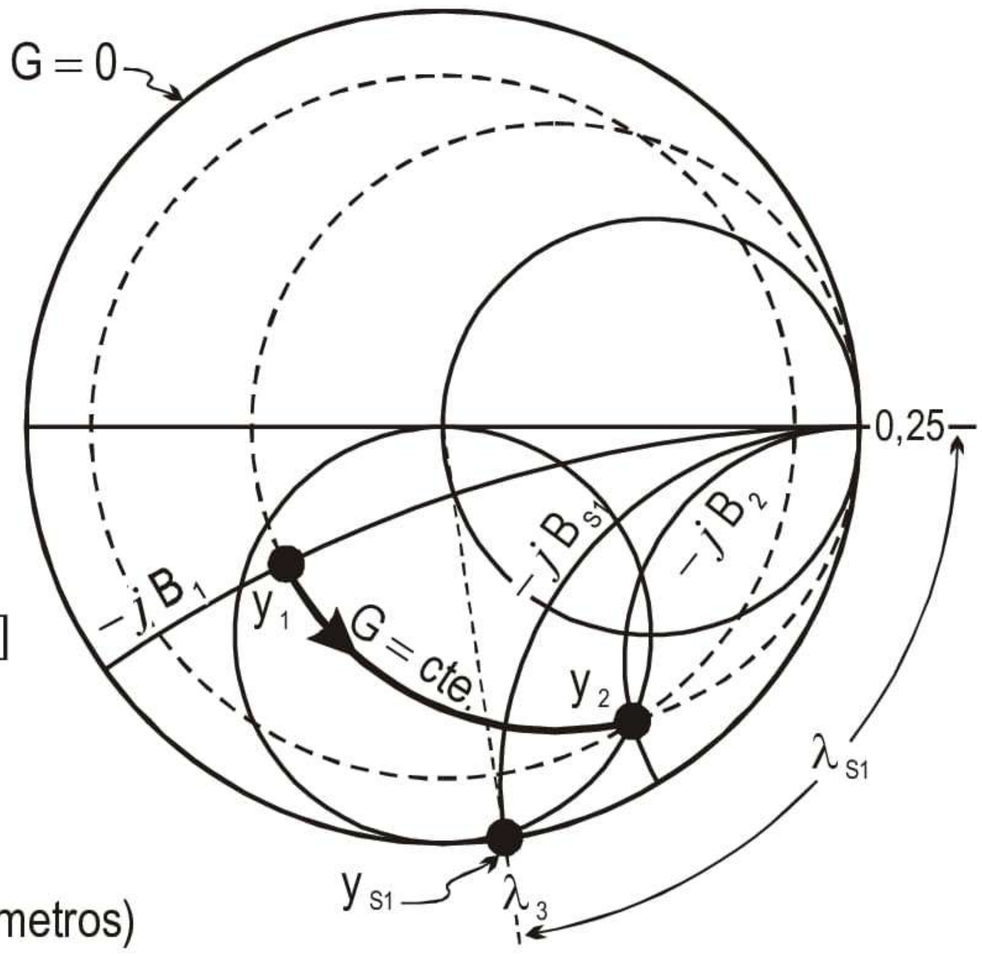
$y_1 = G_1 - jB_1$

d = distancia de la carga al Stub 1 (en metros)

3







$y_2 = G_1 - jB_2$

$\lambda_{S1} = \lambda_3 - 0{,}25$

$L_{S1} = \lambda_3 \times \lambda_G =$ [MHz]

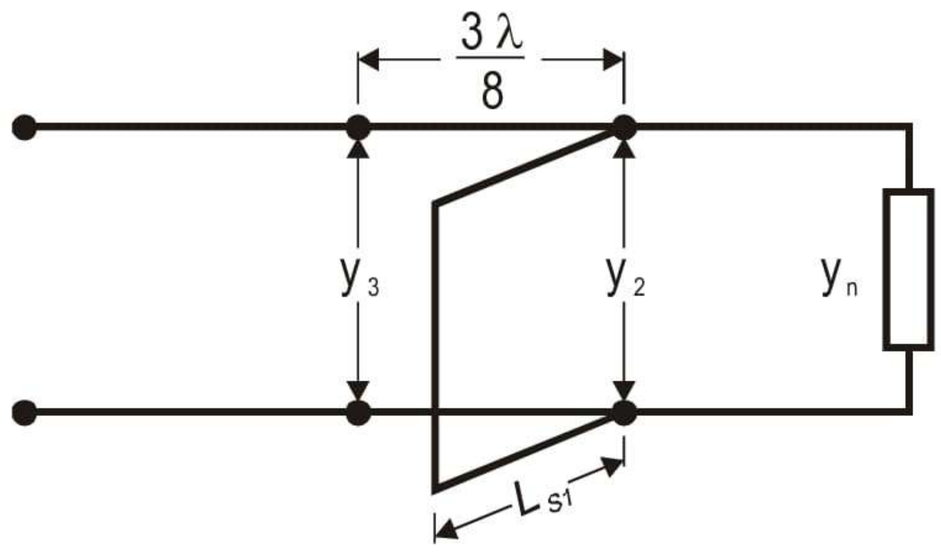
$y_{S1} = 0 - jB_{S1}$

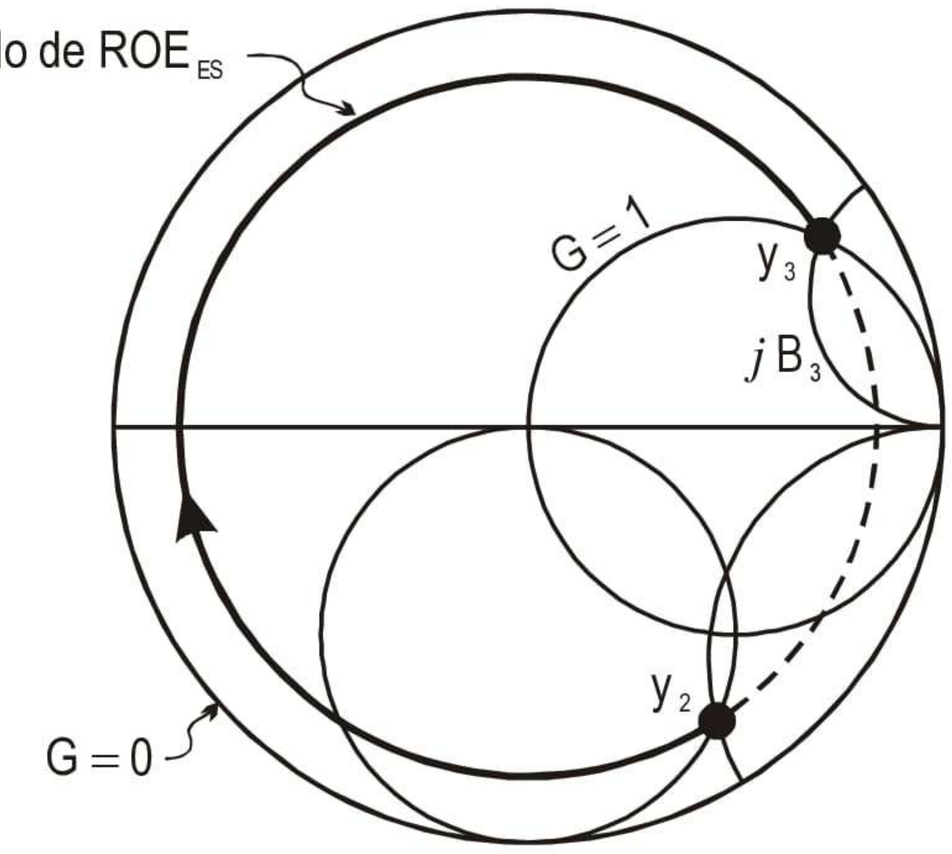
$y_{31} = y_2 - y_1$

y_{S1} = admitancia de Stub 1

L_{S1} = largo del Stub 1 (en metros)

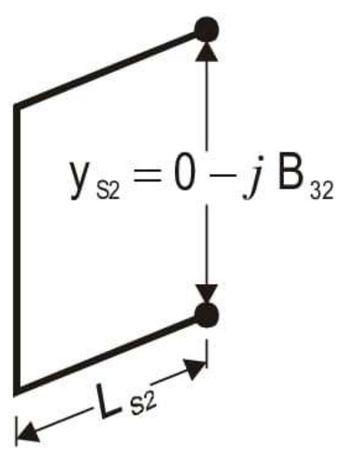
4





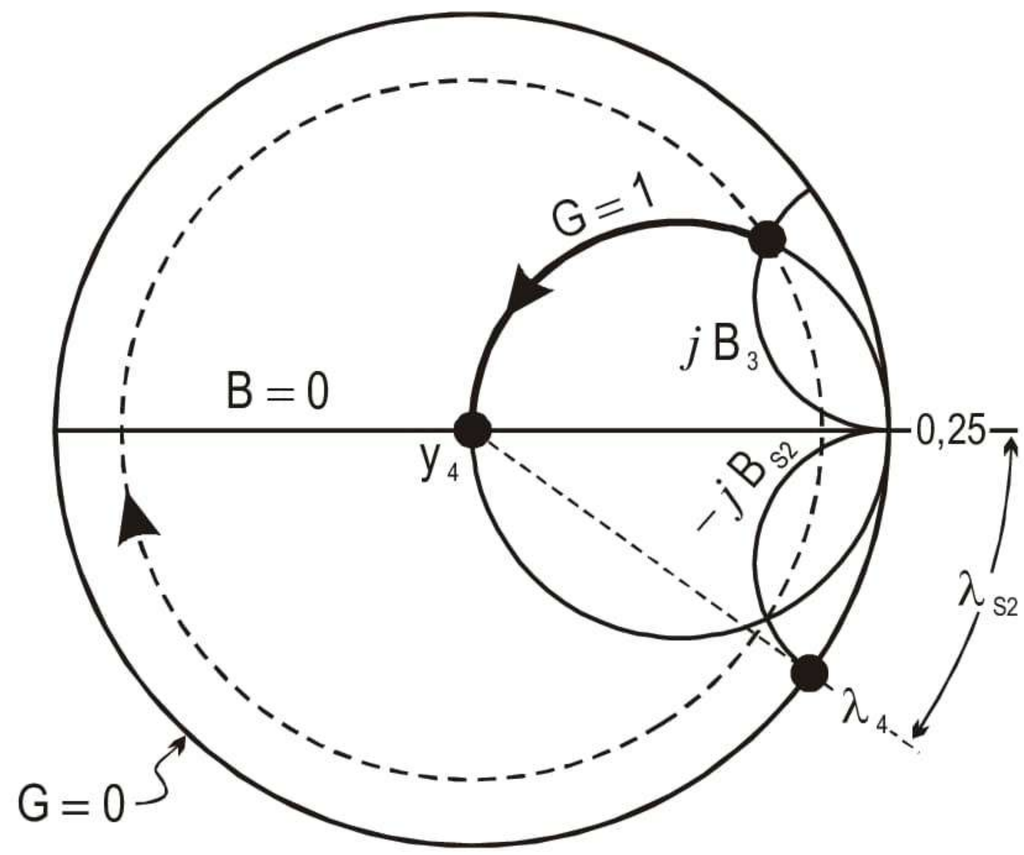
$y_3 = 1 + j\,B_3$ $\qquad$ $-j\,B_{32} = j\,B_3$

5



$\lambda_{S2} = \lambda_4 - 0{,}25$

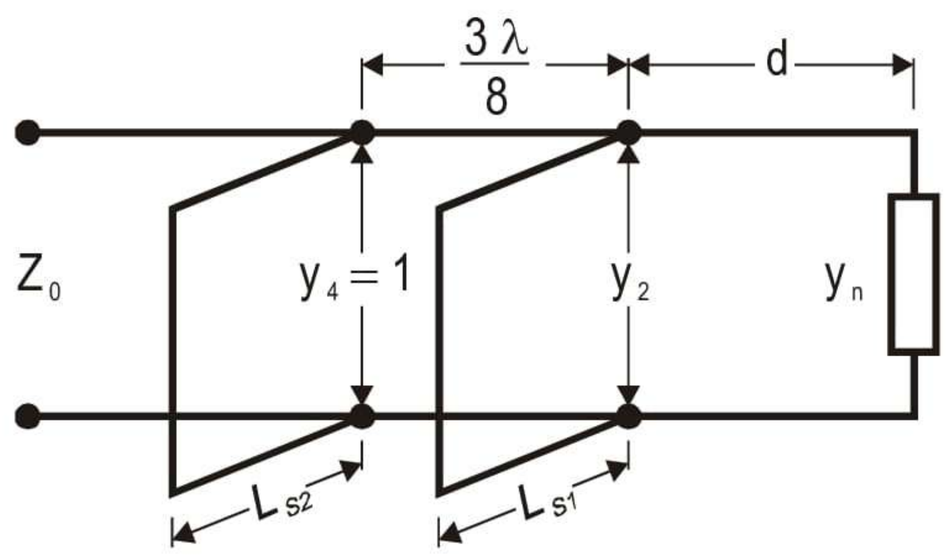
$L_{S2} = \lambda_{S2} \times \lambda_G$ = [Mts]



y_{S2} = admitancia de Stub 2

L_{S2} = largo del Stub 2 (en metros)

6

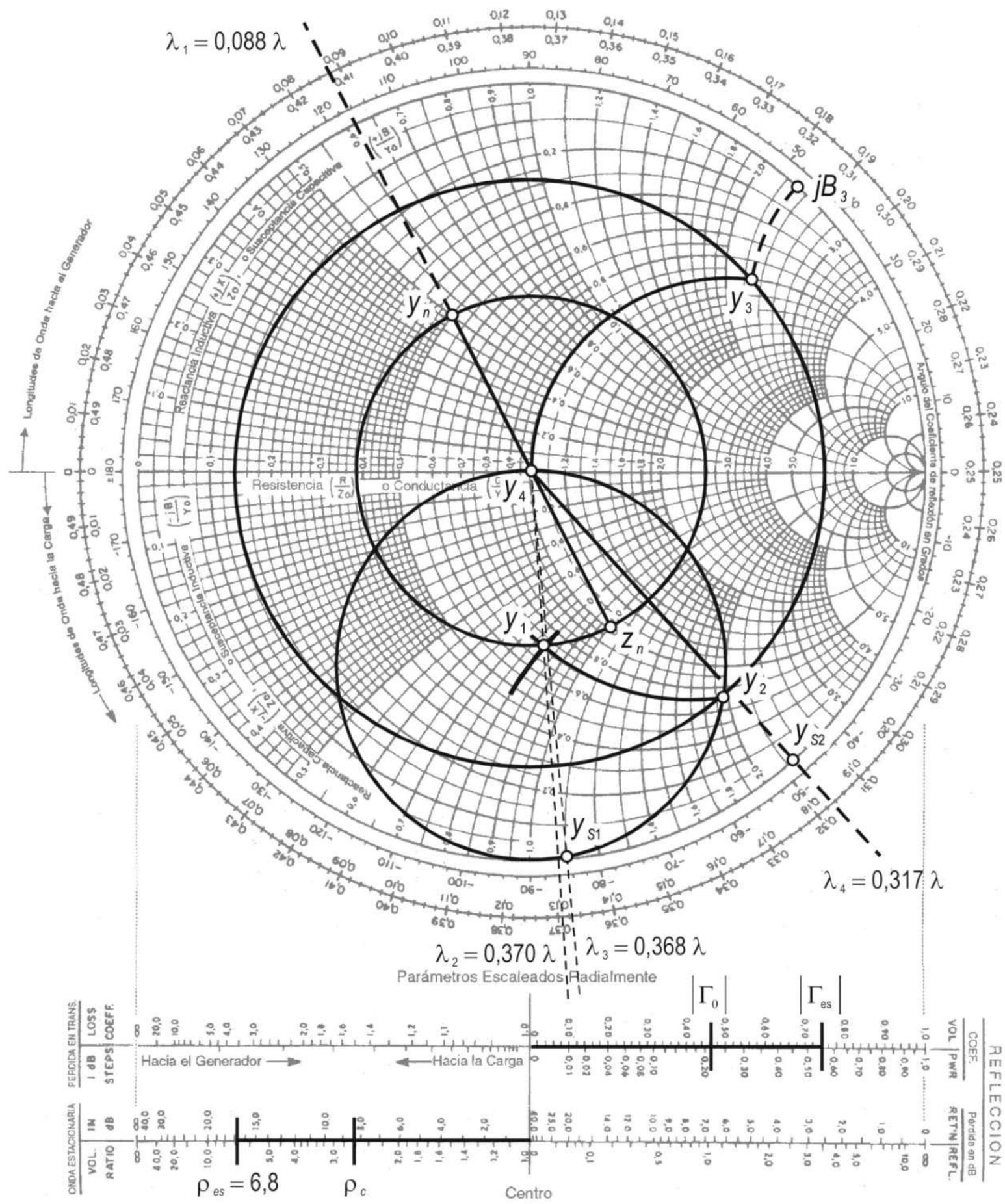


Círculo de ROE_{ES} es el círculo de ROE entre stubs.

13.2.3 ROE entre STUBS (ROE_{ES})

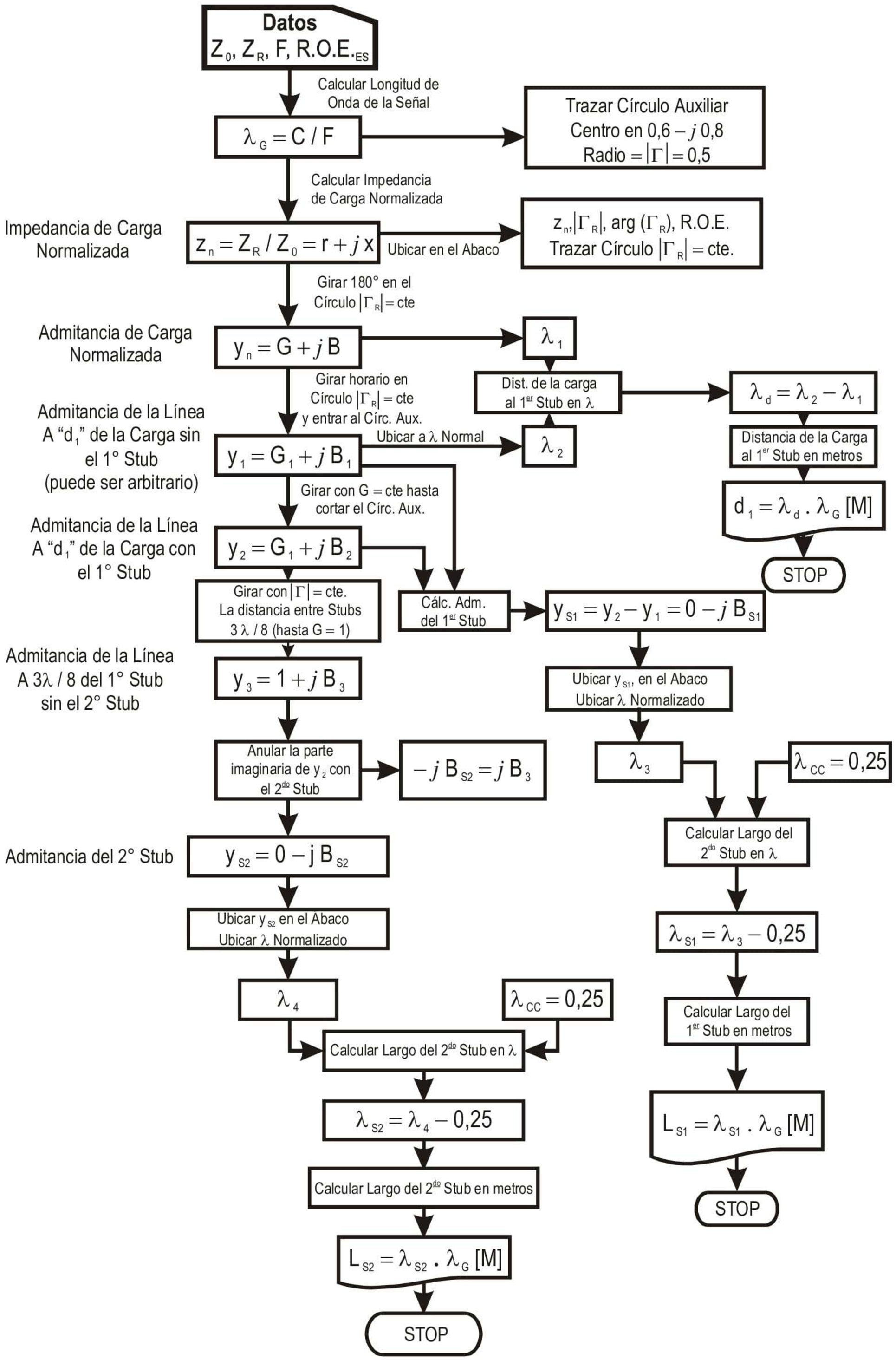
Cuando se da como dato del problema la relación de onda estacionaria entre los dos STUBS (ROE_{ES}) el punto donde se une el círculo auxiliar con el círculo de ROE entre los STUBS es la admitancia y_2 (admitancia del punto donde se coloca el primer STUB con el STUB colocado). Por lo tanto

la admitancia y_1 ya no es arbitraria sino que se encuentra desplazándose desde y_2 con parte real constante hasta cortar el círculo de coeficiente de reflexión de la admitancia de carga.



Resumiendo: cuando se da el valor de ROEes en vez de ir de y_1 a y_2 se marca primero y_2 en la intersección de los dos círculos y desde allí por g = cte. se va a y_1.

Diagrama de Flujo para adaptación con 2 stubs



13.3. ADAPTACIÓN CON TRANSFORMADOR DE CUARTO DE LONGITUD DE ONDA

Los transformadores son utilizados comúnmente para hacer acoples de impedancias y ésta no es la excepción. En el caso particular de las líneas de transmisión se acostumbra comúnmente el uso de transformadores de un cuarto de longitud de onda, el cual está encargado de realizar procesos de compensación en las líneas de transmisión con cargas **netamente resistivas** y de valor diferente a la impedancia característica de la línea.

La adaptación con λ/4 está basada en la ecuación para el cálculo de la impedancia de entrada de una línea de transmisión (ya desarrollada en capítulos anteriores) a la cual expresamos:

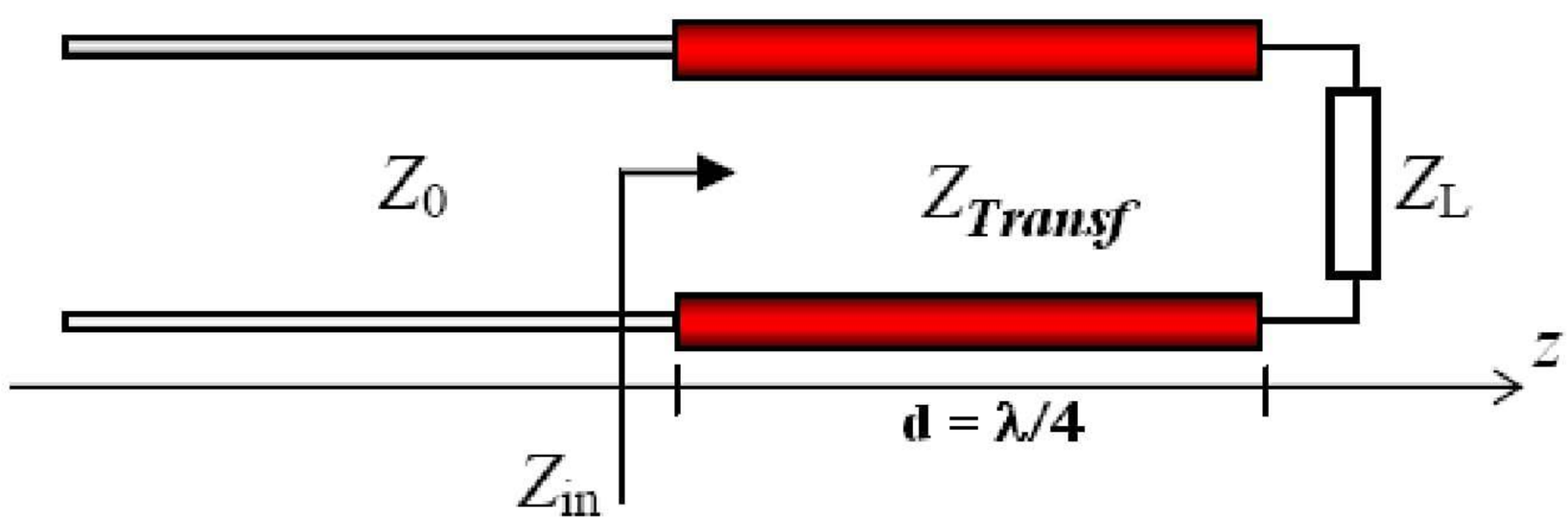
$Zi = Z_0 . \dfrac{[Z_R . + jZ_O . \mathrm{tg}\,\beta d]}{[Z_O . + jZ_R . \mathrm{tg}\,\beta d]}$	Ecuación de la impedancia de entrada de una sección de línea de transmisión sin pérdida

Si la longitud "d" es igual a λ/4 , la tg βd tiende a infinito por lo tanto es mucho mayor que el primer término y la ecuación queda:

$$Zi = Z_0 . \frac{[jZ_O . tg\,\beta d]}{[jZ_R . tg\,\beta d]} = Z_0 . \frac{Z_O}{Z_R} = \frac{Z_O^2}{Z_R}$$

De donde

$Z_0 = \sqrt{Z_R . Zi}$	Ecuación para adaptación con línea de d = λ/4



Transformador de un cuarto de longitud

Dependiendo del valor de la impedancia de carga, el transformador de un cuarto de longitud de onda puede comportarse como un transformador elevador o reductor cuando la impedancia de carga sea inferior o superior a la impedancia característica respectivamente. Este dispositivo no funciona dentro de un rango de frecuencias sino en una sola frecuencia. A continuación se explica el comporta-

miento del transformador de un cuarto de longitud de onda según el valor de la impedancia de carga (Z_L=R_L), Z_L y Zo deben ser valores reales para aplicar este procedimiento.

Z_L=Zo: El transformador se comporta como un transformador 1:1, quiere decir, que la señal de entrada es igual a la señal de salida

Z_L>Zo: El transformador se comporta como reductor

Z_L<Zo: El transformador se comporta como elevador

Un transformador de un cuarto de longitud de onda, en realidad no es un transformador sino una línea de transmisión que presenta un comportamiento semejante al de un transformador. Esta línea o transformador se conecta entre la línea de transmisión y la carga. La impedancia característica del transformador de un cuarto de longitud de onda se calcula de la siguiente forma:

$$Z_{TRANSF} = \sqrt{Z_O.Z_L} = \sqrt{Z_{in}.Z_L}$$

Z_{TRANSF}= Impedancia característica de un transformador de un cuarto de longitud de onda.

Z_O= Impedancia característica de la línea a la que se quiere hacer igual la Z_{in}.

Z_L= Impedancia de carga

Ejemplo para Z_L real

Calcular la longitud e impedancia característica de un transformador de un cuarto de longitud de onda, el cual se utilizará para compensar una línea de transmisión con impedancia característica Zo=50 Ω, con una carga resistiva de 200 Ω y a una frecuencia de 100 Mhz.

Solución:

Para calcular la longitud física, es necesario calcular el valor de λ/4, por lo tanto:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3*10^8}{100*10^6} = 3m$$

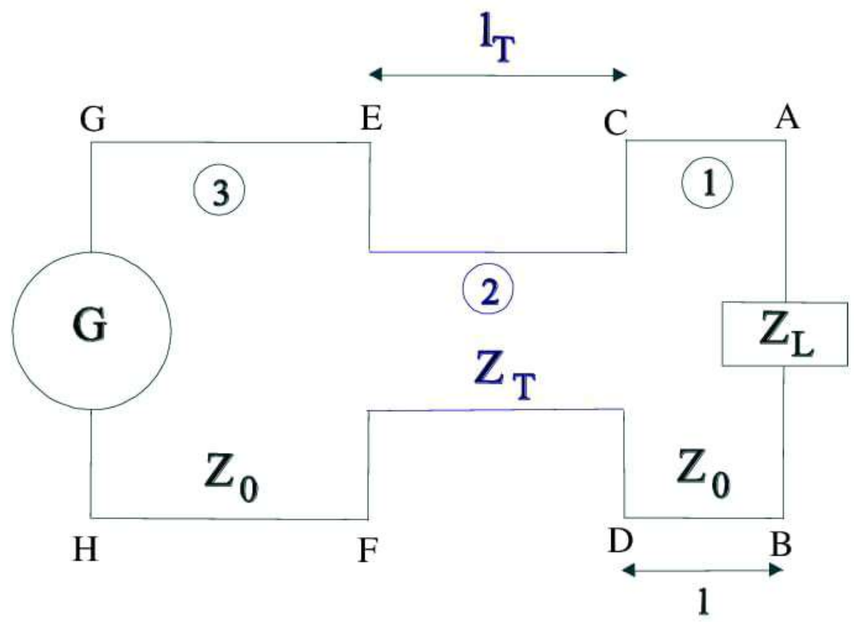
$$\frac{\lambda}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75m$$

Para calcular la impedancia característica basta simplemente con aplicar la expresión:

$$Z_{TRANSF} = \sqrt{Z_O.Z_L} = \sqrt{50*200} = 100\Omega$$

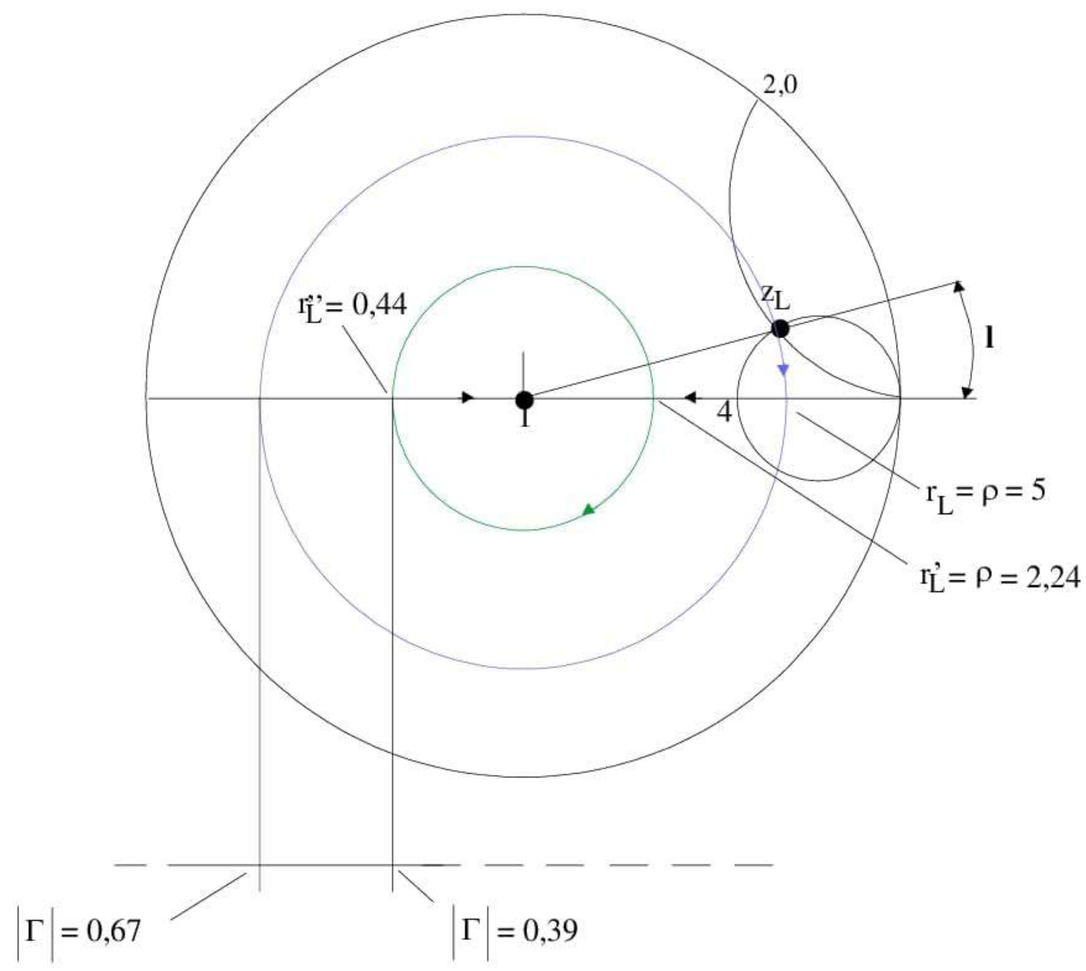
Ejemplo para Z_L complejo

Se desea adaptar con un transformador de cuarto de onda una impedancia de carga Z_L = 200 + j100 Ω a una línea de transmisión coaxial sin pérdidas de impedancia característica Z_0 = 50 Ω. Determine la relación de onda estacionaria ρ y el módulo del coeficiente de reflexión $|\Gamma_L|$ para cada tramo de línea; calcule y dibuje el transformador si se dispone de un tubo de latón plateado de 10 mm de diámetro y se opera a f = 600MHz. Considere ε_r = 2,3.



Llamamos z_L a la impedancia normalizada respecto de la impedancia característica Z_0:

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{(200 + j100)\,\Omega}{50\Omega} = 4 + j2$$ marcamos un punto con este valor en el diagrama:



Se traza una circunferencia centrada en el diagrama de Smith y que pase por el punto 4 + j2 (posición AB en el gráfico representativo). Esta circunferencia, de ρ = cte., corta al trazo rectilíneo diametral del diagrama (donde se ubican las impedancias resistivas puras), en $r_L = \rho = 5$: nos hemos desplazado en la línea una distancia que en fracciones de longitudes de onda es $0{,}0165\lambda$;
si f = 600 MHz y $c = 3.10^8$ m/s $\longrightarrow$ $0{,}0165\lambda = 8{,}25$ mm.

$$l = 8{,}25 \text{ mm}$$

Esta es la distancia física l que debemos movernos en la línea de transmisión para obtener el valor real de r_L

Desnormalizamos la r_L encontrada: $R_L = r_L x Z_0 = 5x50 = 250\Omega$

Con este valor de R_L hallaremos el valor de la impedancia característica del transformador Z_T igual que lo hicimos para Z_L real:

$$Z_T = \sqrt{Z_0 R_L} = \sqrt{50\,\Omega . 250\,\Omega} = 111{,}8\,\Omega$$

Comprobación:

Estamos ubicados en CD en el gráfico, debemos desnormalizar con respecto a Z_0 y normalizar con respecto a Z_T:

$r'_L = \frac{r_L . Z_0}{Z_T} = \frac{5.50\,\Omega}{111{,}8\,\Omega} = 2{,}24$, valor que le corresponde (diagrama). a $|\Gamma_L| = 0{,}39$

Ahora nos desplazamos por ρ_T = cte., hacia el generador, una longitud $l_T = \frac{\lambda}{4}$

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{3.10^8\,m/s}{4.6.10^8\,1/s} = 0{,}125\,m = 12{,}5\,cm$$

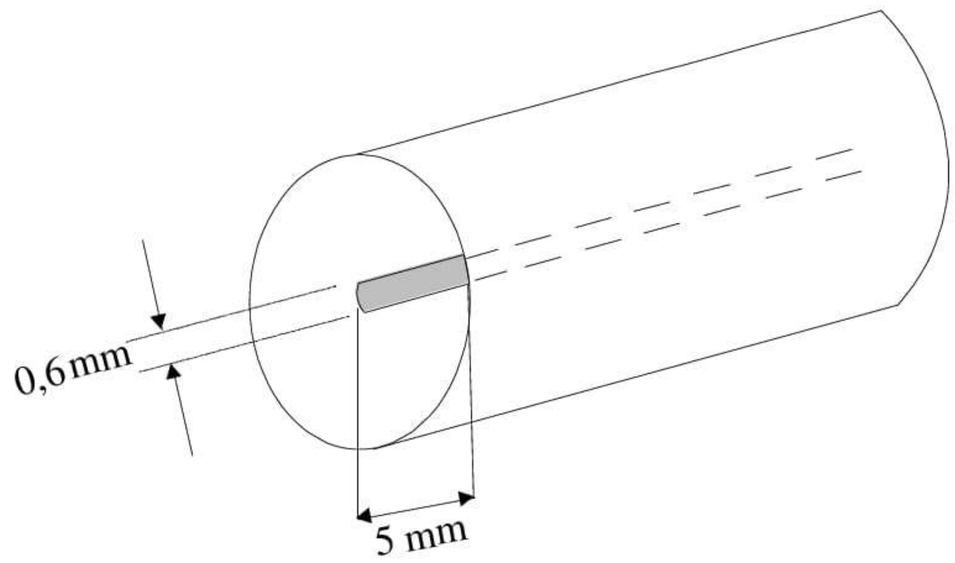
$$l_T = 12{,}5\ cm$$

Allí nos encontramos en EF (gráfico) y el valor $r''_L = 0{,}44$ en el diagrama de Smith; debemos desnormalizar con respecto a Z_T y normalizar con respecto a Z_0, así nos encontramos con $r_L = 1$, ya que:

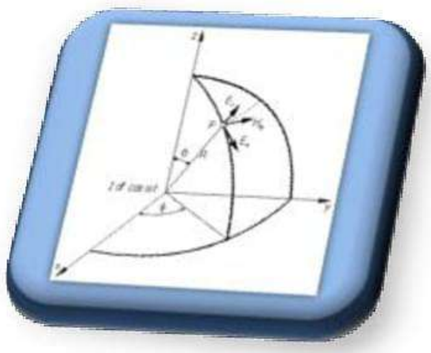
$$0{,}44\frac{111{,}8\,\Omega}{50\,\Omega} = 1 \longrightarrow \text{adaptación total} \ \therefore\ \Gamma = 0,\ \rho = 1$$

b) $$Z_T = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\frac{r_2}{r_1};\ \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r} Z_T}{60}, \text{ entonces: } \frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{\sqrt{\varepsilon_r} Z_T}{60}}$$

$$r_1 = \frac{5mm}{e^{\frac{\sqrt{2{,}3}.111{,}8\Omega}{60}}} = 0{,}3\ mm \longrightarrow r_1 = 0{,}3\ mm$$



CAPÍTULO 14



RADIACIÓN

Objetivo:

- Que el alumno adquiera un claro dominio en la definición y fundamentación de la generación de ondas electromagnéticas como consecuencia de la radiación de un elemento conductor de corriente.

14.1. FUNCIÓN POTENCIAL Y CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

En los capítulos precedentes se han estudiado relaciones que existen entre los vectores de un campo electromagnético, pero no se ha tomado en consideración a los medios mediante los cuales se generan tales campos. Vamos ahora a considerar cómo están relacionados estos campos con sus *fuentes* o generadores, es decir, con las cargas y corrientes que los producen. Aunque, en teoría, es posible obtener expresiones para las intensidades **E** y **H** de los campos eléctrico y magnético de un modo directo en función de las densidades de carga y de corriente ρ y **J**, tal cálculo es, en general bastante difícil.

Se recordará que en el estudio del campo electrostático y del campo magnético estático se encontró como posible, y a menudo más simple, establecer en primer lugar *potenciales* en función de las cargas o corrientes, y obtener entonces de estos potenciales los campos eléctrico o magnético. Análogamente, en el campo electromagnético cabe esperar que será mucho más simple establecer primero potenciales que estén relacionados con las cargas y corrientes, y obtener después **E** y **H** de dichos potenciales.

El problema de determinar potenciales adecuados para un campo electromagnético puede plantearse de varias formas distintas, necesitando todas ellas ciertos tanteos e hipótesis basadas en un conocimiento anterior.

a) **Un modo simple**, empleando el *método heurístico*, es el de generalizar los potenciales ya desarrollados para los campo electrostático y magnetostático, esperando que estos potenciales generalizados satisfarán las ecuaciones de Maxwell y los requisitos del problema.

b) **Un segundo método** es el de partir de las ecuaciones de Maxwell y con ellas obtener ecuaciones diferenciales que deban satisfacer los potenciales. De nuevo se suponen ciertos potenciales y entonces se hace que satisfagan las ecuaciones diferenciales.

c) **El tercer método** es el de buscar una *resolución directa* de las ecuaciones diferenciales obtenidas para los potenciales.

Por la importancia que tienen para comprender el uso de potenciales en la teoría electromagnética se desarrollarán estos tres métodos; los dos primeros en esta ocasión, y en la sección 14.7 se resolverá la forma fasorial de las ecuaciones diferenciales.

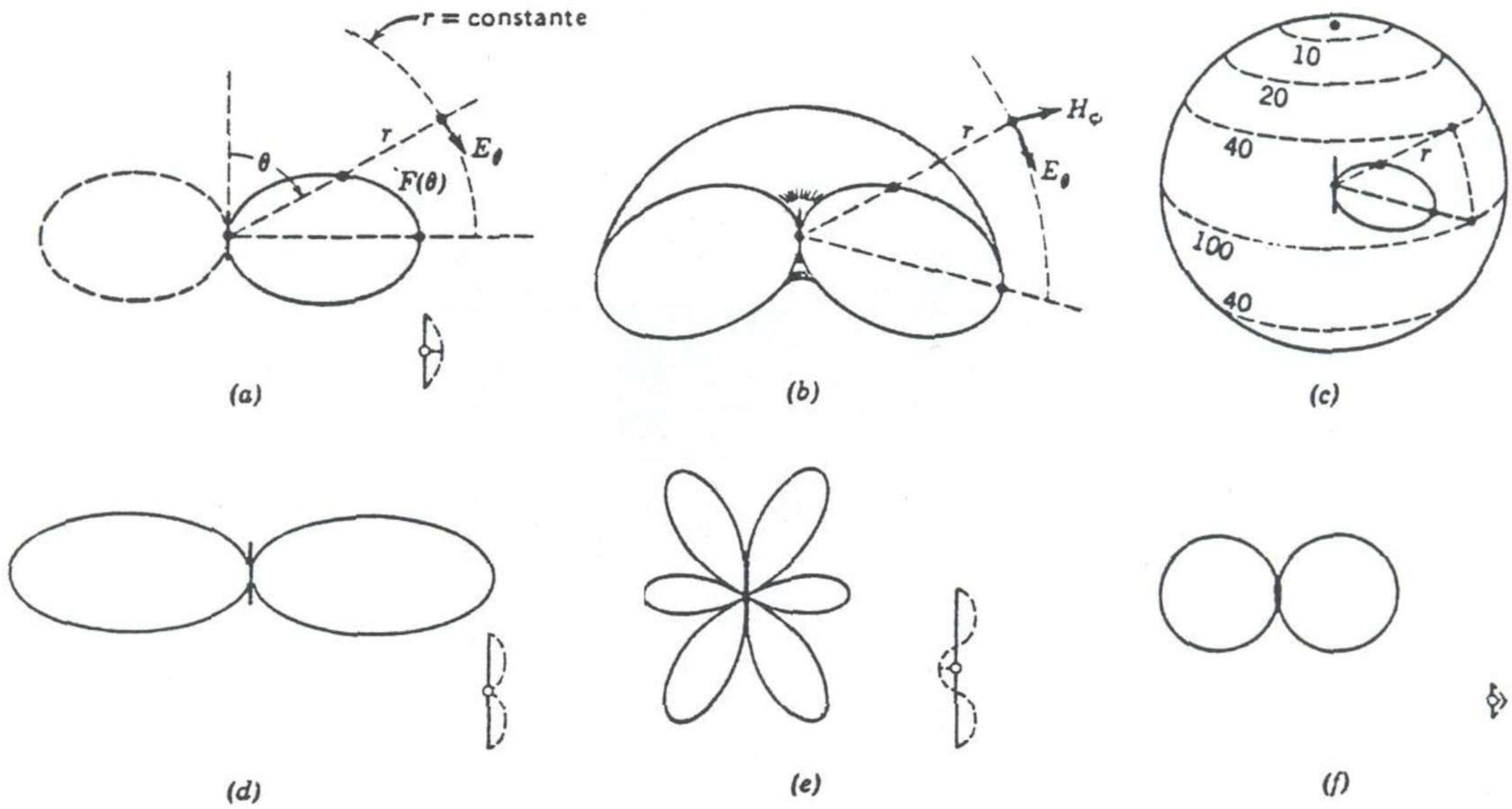


FIGURA 14-1: Patrones de radiación $F(\theta)$ para varias antenas lineales alimentadas al centro. Están relacionadas las distribuciones de onda estacionaria de corriente.

(a) Patrón de radiación de un dipolo de media onda $\left(2\ell = \frac{\lambda_0}{2}\right)$, para cualquier ϕ -

(b) $F(\theta)$ como patrón sólido de revolución alrededor del eje de la antena.

(c) $F(\theta)$ representado por contornos de intensidad relativa en una esfera de $r = cte.$.

(d) Patrón de radiación de un dipolo de onda completa $(2\ell = \lambda_0)$.

(e) Patrón del dipolo con tres medios de longitud de onda $\left(2\ell = \frac{3\lambda_0}{2}\right)$

(f) Patrón de radiación de un dipolo muy corto $(2\ell \to dz')$.

14.1.1. Método heurístico

Del diccionario, heurística es el arte de inventar.

En electrostática se estableció un potencial escalar *V*, relacionado con la distribución de las cargas eléctricas por

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\, dV' \qquad [14\text{-}1]$$

de este potencial se obtuvo el campo eléctrico mediante la expresión

$$\mathbf{E} = -\nabla V \qquad [14\text{-}2]$$

Para un campo magnético estático en un medio homogéneo, se obtuvo un potencial vector **A** relacionado con las corrientes generadoras del mismo por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\, dV' \qquad [14\text{-}3]$$

de este potencial magnético se obtuvo el campo magnético mediante

$$\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad [14\text{-}4]$$

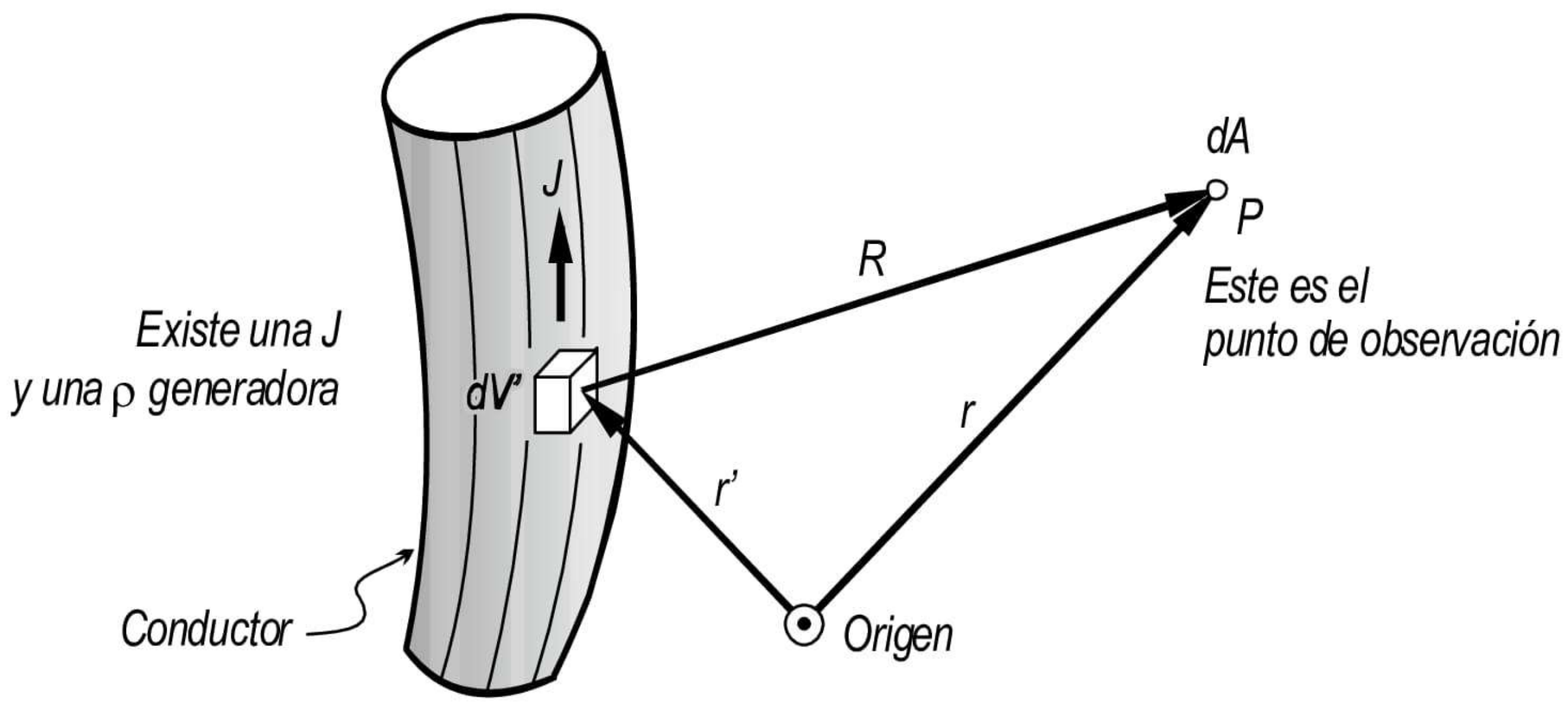


FIGURA 14-2

Las fuentes generadoras del campo *electromagnético* son las distribuciones de corriente y de carga que varían con el tiempo, de modo que se razonable ensayar estos mismos potenciales, generalizados para las variaciones en el tiempo. Es decir, cabe esperar que podamos escribir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{R}\, dV' \qquad [14\text{-}5]$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R}\, dV' \qquad [14\text{-}6]$$

en donde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Según lo dicho, las intensidades de estos potenciales varían instantáneamente con las intensidades de las fuentes generadoras. Sin embargo, el principal resultado de la teoría de su variación en el tiempo (teoría de ondas) discutida hasta aquí, es la aparición de un tiempo de propagación finito para las ondas electromagnéticas debido a que el punto *P* está lejos. Es lógico pensar que los potenciales de los que se obtendrán los campos deben ser obtenidos también exhibiendo un tiempo de propagación finito. Esto puede hacerse fácilmente modificando las relaciones anteriores dándoles la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' \qquad [14\text{-}7]$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' \qquad [14\text{-}8]$$

En estas expresiones se ha introducido un tiempo de retraso de $\frac{R}{v}$ segundos, de esta manera los potenciales han sido retardados en dicho valor. Por esta razón se les conoce por *potenciales retardados*.

Habiendo supuesto tales potenciales, podría esperarse la obtención de los campos eléctrico y magnético por las relaciones

$$\mu \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = J = \sigma \cdot E \qquad [2\text{-}139]$$

y

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{V} \qquad [2\text{-}91]$$

Se vería que mientras la primera relación es correcta, la segunda es incompleta. La razón de esto es la de que los campos eléctrico y magnético obtenidos no son independientes entre sí, sino que deben relacionarse a través de las ecuaciones de Maxwell del mismo modo que las distribuciones de las fuentes generadoras (corrientes y cargas) no pueden especificarse separadamente, sino relacionadas por la ecuación de continuidad. Estas ecuaciones son automáticamente satisfechas en el siguiente paso, que arranca con el requisito de que los potenciales y campo de ellos obtenidos satisfagan las ecuaciones de Maxwell.

14.1.2. Método de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial, variable en el tiempo, son (para valores escalares constantes de ε y μ)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \sigma \overline{E} = \frac{\partial D}{\partial t} + J \qquad [14\text{-}9]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \qquad [14\text{-}10]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \nabla D = \rho \qquad [14\text{-}11]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla B = 0 \qquad [14\text{-}12]$$

$\mathbf{J}$ y ρ son la densidad de corriente generadora y la densidad de carga también generadora, respectivamente, estando relacionadas por la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad [14\text{-}13]$$

La ecuación (14-12) se satisface si se representa a **H** como rotacional de algún vector. Esto conduce a la definición del *potencial vector* **A**

$$\mu \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad [14\text{-}14]$$

llevando (14-14) a (14-10) resulta

$$\nabla \times E = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \qquad [14\text{-}15]$$

La ecuación (14-15) se satisface si $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ es representada por el gradiente de un escalar (ver tabla 2-2[20]). Haciendo $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ igual a $-\nabla V$ se define el *potencial escalar V* de tal modo que para campos de variación muy lenta resulta igual al potencial escalar empleado en el capítulo 2. Así la intensidad del campo eléctrico puede expresarse como

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad [14\text{-}16]$$

Las ecuaciones (14-14) y (14-16) muestran cómo pueden expresarse las cantidades **E** y **H** en función del potencial vector **A** y el potencial escalar *V*. En el caso de campos estáticos ambas (14-14) y (14-16) son idénticas a las expresiones ya obtenidas en los capítulos 2 y 3.

Las expresiones (14-14) y (14-16) de **H** y **E** satisfacen dos (14-10) y (14-12), de las ecuaciones de Maxwell. Las restantes ecuaciones de Maxwell deben emplearse para obtener ecuaciones diferenciales de las funciones potencial. La sustitución de (14-14) y (14-16) en (14-9) da

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\varepsilon \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{A}}}{\partial t^2} + \mathbf{J}$$

La identidad $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ permite escribir lo anterior así escalar (ver tabla 2-2[21])

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} \qquad [14\text{-}17]$$

esta es una de las ecuaciones diferenciales necesitadas; la segunda puede obtenerse sustituyendo (14-16) en (14-11) así

$$\nabla^2 V + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad [14\text{-}18]$$

Las ecuaciones (14-17) y (14-18) se complican por el hecho de que están "acopladas", es decir, las ecuaciones **A** y *V* aparecen en ambas. Una nueva complicación nace del hecho de que (14-17) y (14-18) no dan una solución única para los potenciales. La verdad de lo dicho puede inferirse del *teorema de Helmholtz.*

> *Todo campo vectorial debido a una fuente finita está especificado de un modo único si se especifican tanto el rotacional como la divergencia del campo.*

El rotacional de **A** está dado en (14-14), pero su divergencia queda sin especificar. Es más, de la relación de definición (14-15) es evidente que hay cierta arbitrariedad también sobre el potencial escalar. El examen de las ecuaciones (14-17) y (14-18) muestra que la divergencia de **A** se ha hecho igual a $-\mu\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial t}$; estas ecuaciones se independizan entre sí y se reducen a las ecuaciones de onda normales con la inclusión de términos debidos a sus fuentes, es decir,

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J} \qquad [14\text{-}19]$$

$$\nabla^2 V-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad [14\text{-}20]$$

la selección particular que se acaba de establecer, o sea

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t} \qquad [14\text{-}21]$$

se conoce como *condición calibradora de Lorentz*. Son posibles también otras de estas condiciones[2], pero si es necesario que las soluciones de **A** y *V* representen potenciales electromagnéticos retardados puede demostrarse[2] que (14-21) debe ser satisfecha, cosa que ocurrirá siempre que las distribuciones de las cargas y corrientes generadoras estén relacionadas por la ecuación de continuidad.

Ya se han obtenido ecuaciones similares a (14-19) (14-20) en los capítulos sobre campos eléctricos y magnéticos estáticos. Las correspondientes ecuaciones estáticas son

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J} \qquad [14\text{-}22]$$

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad [14\text{-}23]$$

---

[2] Por ejemplo, la condición calibradora de Coulomb establece la divergencia de **A** igual a cero; este resultado reduce (14-18) a la ecuación de Poisson, pero tiene la deventaja de dar potenciales que no tienen retardo.

[2] J. Grossokopf. "*On the Application of the Two Methods of Solution of Maxwell's Ecuations in the Calculation of the Electromagnetic Fields of Radiation Conductors" Hochfrequnz. Technik and Electro-akustic* 49, 205-211 (1937); también J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory.* McGraw-Hill Book. Company, New York, 1941, p.429.

y tienen soluciones ya dadas en (14-5) y (14-6). Estas soluciones pueden emplearse como guía para intentar suponer las soluciones de (14-19) y (14-20) y, por supuesto, tales soluciones deben comprobarse por sustitución. Por otro lado, podría haberse intentado una resolución directa de (14-19) y (14-20).

Este último modelo es, en general algo complicado[2] , pero se discutirá más adelante es este capítulo para el caso especial de oscilaciones sinusoidales.

Las funciones potenciales pueden suponerse siguiendo los razonamientos ya discutidos [véase la discusión de las ecuaciones (14-7) y (14-8)]. Las funciones son

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' \qquad [14\text{-}24]$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' \qquad [14\text{-}25]$$

Las ecuaciones (14-24) y (14-25) son las soluciones de (14-19) y (14-20), como puede comprobarse por una sustitución directa[3] . Como interviene una demora, **A** y *V*, como se definió antes, son *potenciales retardados*. En general, no es necesario calcular (14-25), ya que **E** puede obtenerse empleando una (14-9), de las ecuaciones de Maxwell; el procedimiento es el de obtener **H** de **A** con (14-14) y entonces obtener **E** de **H** tomando su rotacional e integrando respecto al tiempo.

Debe hacerse notar que $\mathbf{J} = 0$ (14-9) cuando se calcula el campo en el espacio libre, es decir, exterior a la región de las corrientes generadoras.

14.2. FUNCIONES POTENCIAL PARA OSCILACIONES SINUSOIDALES

En el estado sinusoidal permanente se simplifican mucho los cálculos con las funciones potencial. Pueden expresarse (14-19) y (14-20), empleando la notación fasorial $A\ e^{j\omega t}$, así

$$\frac{\partial A}{\partial t} = j\,\omega A e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\,\omega^2\, A\, e^{j\omega t}$$

[2] La resolución de la ecuación de onda dependiente del tiempo se discute por J. D. Jackson, en *Classical Electrodynamics*. Jhon Wiley & Sons, Inc. New York, 1962 pp.183-186.

[3] Este proceso, que usualmente es bastante directo, resulta algo complicado en este caso, refiriéndonos para ello a los textos siguientes: H. A. Lorentz. *Theory of Electrons*, pp. 17-19; M. Mason y W. Weaver, *The electromagnetic Field,* University of Chicago. 1929 (P. 282).

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \qquad [14\text{-}26]$$

$$\nabla^2 V + \omega^2 \mu \varepsilon V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad [14\text{-}27]$$

teniendo ambas ecuaciones la forma de la ecuación de onda de Helmholtz, que incluye un término generador. Como antes, puede suponerse una solución generalizando las soluciones de los casos estáticos para tener en cuenta el retraso de fase debido a la distancia R entre el foco generador puntual y el de observación. Se sabe que una onda plana uniforme viajando en dirección **R** tendría una variación de fase dada por el factor $e^{-j\beta R}$. Esto sugiere que las integrales de los potenciales se modifiquen por la inclusión de un factor exponencial de fase, como sigue

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) == \frac{\mu}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV' \qquad [14\text{-}28]$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV' \qquad [14\text{-}29]$$

Esta solución puede comprobarse sustituyendo (14-26) y (14-27)[2] o (como se verá en la sección 14.7) resolviendo (14-26) y (14-27) directamente.

Hay que resaltar aquí un punto importante: el que la relación de la condición calibradora entre **A** y V empleando la integral (14-29). Con la notación fasorial las expresiones de las intensidades de los campos magnético y eléctrico son

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{1}}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \qquad [14\text{-}30]$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega \mathbf{A} \qquad [14\text{-}31]$$

En las que los potenciales vectores y escalares están relacionados por la condición calibradora de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\varepsilon V \qquad [14\text{-}32]$$

Puede eliminarse el potencial escalar V entre (14-31) y (14-32) para dar

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\mu\varepsilon} - j\omega \mathbf{A} \qquad [14\text{-}33]$$

Las ecuaciones (14-30) y (14-33) demuestran que **E** y **H** pueden expresarse enteramente en función de **A**.

[2] La comprobación la realizó R. Plonsey y R. E. Collin en *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961 pp. 324-325.

Otra forma de (14-33) puede obtenerse de una de las ecuaciones de rotacionales de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} = j\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{J} \qquad [14\text{-}34]$$

Sustituyendo (14-30) en (14-34) resulta

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mu \mathbf{J}\right) \qquad [14\text{-}35]$$

en donde **E** está expresado sólo en función de **A**. Desde luego $\mathbf{J} = 0$ si se calcula **E** fuera de la distribución de corriente.

Puede demostrarse que 14-33 y 14-35 son iguales aplicando la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$.

14.3. ELEMENTO DE CORRIENTE ALTERNA (DIPOLO ELÉCTRICO OSCILANTE)

Un buen ejemplo del empleo de un potencial vector retardado se encuentra en el cálculo del campo electromagnético producido por un elemento de corriente alterna (o dipolo eléctrico oscilante) en el espacio libre. Se entiende por *elemento de corriente* $I\ d\ell$ a una corriente filamentosa *I* circulando a lo largo de una longitud elemental $d\ell$. Esto ocurre aproximadamente cuando circula una corriente *I* en un trozo muy corto de alambre delgado, si la longitud $d\ell$ considerada es tan corta que la corriente es esencialmente constante a lo largo de dicha longitud.

Aunque un elemento de corriente aislada pueda parecer un concepto irreal, todo circuito físico o antena, portadores de corriente, pueden considerarse como consistentes de un gran número de tales elementos unidos por sus extremos. Por tanto, si se conoce el campo electromagnético de este "bloque" puede calcularse el campo electromagnético de cualquier antena real que tenga una distribución de corriente especificada.

La figura 14.3 muestra un elemento de corriente alterna $I\ d\ell \cos(\omega t)$ situado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas. El problema consiste en calcular el campo electromagnético en un punto arbitrario *P*. El primer paso es el de obtener el potencial vector **A** en *P*. La expresión general de **A** está dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{R}\, dV' \qquad [14\text{-}36]$$

La integración en el volumen en (14-36) consiste en una integración sobre área transversal del alambre y una integración a lo largo de su longitud.

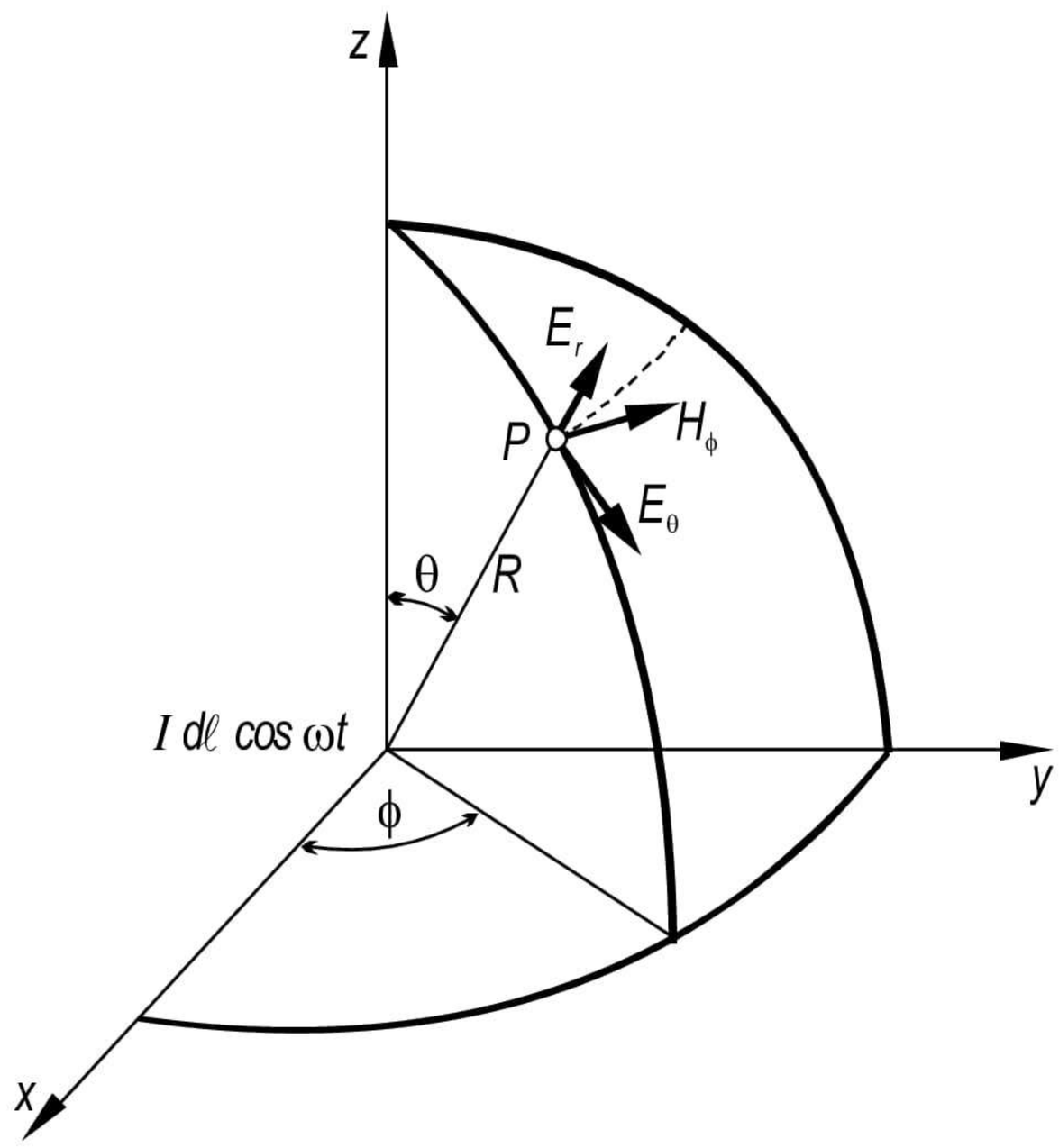


FIGURA 14-3: Elemento diferencial de corriente situado en el centro de un sistema esférico de coordenadas

La densidad de corriente $\mathbf{J}$, integrada en el área transversal del alambre es precisamente la corriente I y, como se supone que es constante a lo largo de su longitud, la integración en la longitud da $I\ d\ell$. Por tanto, en este ejemplo sencillo la expresión del potencial vector resulta[2]

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi}\ \frac{I\ d\ell\ \cos\omega\left(t-\dfrac{r}{v}\right)}{r} \qquad [14\text{-}37]$$

El potencial vector tiene la misma dirección que el elemento de corriente, en este caso la dirección z, y está retardado en $\dfrac{r}{v}$ segundos. La intensidad de campo magnético **H** se obtiene con la relación

$$\mu\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A}$$

[2] La ecuación (14-37) puede obtenerse también escribiendo la densidad ed corriente **J** en función de las deltas de Diracs presentadas en el capítulo 1 empleadas en los capítulos 2 y 3. Representaciones delta adecuadas son

$$\mathbf{J} = \hat{z}\ I\ d\ell\ \cos(\omega t)\ \delta(\mathbf{r}) \qquad [14\text{-}38]$$

$$\mathbf{J} = \hat{z}\ I\ d\ell\ \cos(\omega t)\ \delta(x)\ \delta(y)\ \delta(z) \qquad [10\text{-}39]$$

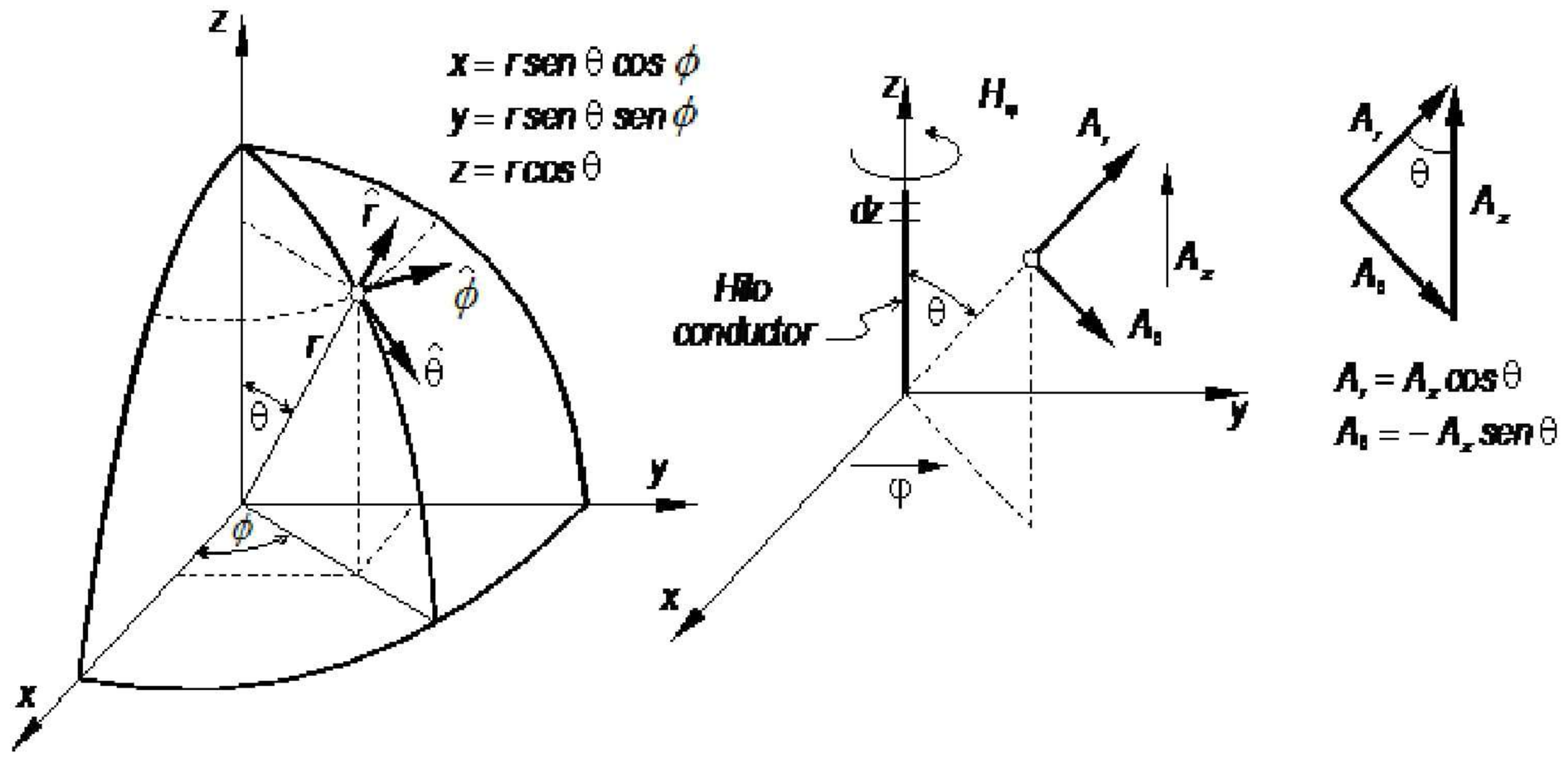


FIGURA 14-4: Componentes del potencial vectorial

Rotacional

si calculamos el rotor de A debemos recordar la operación realizada en algebra vectorial:

$$\left(\nabla \times A\right)_{(u_1,u_2,u_3)} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{a}_1 & h_2\hat{a}_2 & h_3\hat{a}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

Del análisis de coordenadas generalizadas obtuvimos que en el pasaje a coordenadas esféricas debemos reemplazar: $h_1 = 1$; $h_2 = r$; $h_3 = r.\text{sen}\,\theta$, con lo cual nos queda:

$$\left(\nabla \times A\right)_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{r^2.sen\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r.\hat{a}_\theta & r.sen\theta.\hat{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r_1} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r.sen\theta.A_\phi \end{vmatrix}$$

Resolviendo por separado cada una de las componentes del vector Potencial Magnético *A las tres componentes expresadas en el sistema de coordenadas esféricas son*:

$$\left(\nabla \times A\right)_r = \frac{1}{r^2.sen\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r.sen\theta.A_\phi\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r.A_\theta\right)\right] = \frac{1}{r.sen\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta.A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]$$

$$\left(\nabla \times A\right)_\theta = \left[\frac{1}{r.sen\theta}\cdot\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r.A_\phi\right)\right] = \frac{1}{r}\cdot\left[\frac{1}{sen\theta}\cdot\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r.A_\phi\right)\right]$$

$$\left(\nabla\times A\right)_{\varphi}=\frac{1}{r^{2}.sen\theta}\cdot r.sen\theta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r.A_{\theta}\right)-\frac{\partial A_{r}}{\partial\theta}\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r.A_{\theta}\right)-\frac{\partial A_{r}}{\partial\theta}\right]$$

Si el elemento de corriente está paralelo al eje z, recordando la Ley de Ampere, la intensidad de campo magnético H estará a su alrededor, por lo tanto la componente de H estará solo en la dirección ϕ. Las otras dos componentes no existen $\mathbf{H_r = H_\theta = 0}$.

$$\mu.H_{\phi}=\left(\nabla\times A\right)_{\phi}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r.A_{\theta}\right)-\frac{\partial A_{r}}{\partial\theta}\right]$$

de donde

$$H_{\phi}=\frac{1}{\mu}\left(\nabla\times A\right)_{\phi}=\frac{1}{\mu.r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r.A_{\theta}\right)-\frac{\partial A_{r}}{\partial\theta}\right]$$

Además el vector Potencial Magnético tendrá la componente A_Z por lo anteriormente dicho, entonces debemos encontrar la equivalencia entre las componentes en el sistema de coordenadas esféricas y A_Z:

$$\begin{aligned}A_{r}&=\quad A_{Z}.\cos\theta\\A_{\theta}&=-A_{Z}.\operatorname{sen}\theta\\A_{\phi}&=\quad 0\end{aligned}\qquad\qquad A_{Z}=\frac{\mu}{4.\pi}\cdot\frac{I.dl.\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}$$

Reemplazando las equivalencias:

$$H_{\phi}=\frac{1}{\mu.r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-r.A_{Z}.sen\theta\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_{Z}.\cos\theta\right)\right]$$

Reemplazando A_Z:

$$H_{\phi}=\frac{I.dl}{4.\pi.r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-sen\theta.\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta.\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)\right]$$

Realizando las derivadas:

$$H_{\phi}=\frac{I.dl}{4.\pi.r}\left[-sen\theta.\left(-\frac{\varpi}{v}\right).\left(-sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)\right)-\frac{\left(-sen\theta\right).\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right]$$

Sacando factor común senθ tenemos:

$$H_\phi = \frac{I.dl.sen\theta}{4.\pi}\left[-\frac{\varpi.sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r.v}+\frac{\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2}\right] \qquad [14\text{-}40]$$

Para el cálculo de las componentes del campo eléctrico aplicaremos la 1ra Ecuación de Maxwell teniendo en cuenta que la conductividad σ = 0 porque lo analizamos en un medio dieléctrico perfecto.

$$\nabla\times H = \varepsilon\cdot\frac{\partial E}{\partial t} \qquad \therefore \qquad E = \frac{1}{\varepsilon}\int(\nabla\times H)dt$$

En primer lugar calcularemos el rotor de H y luego haremos la integral con respecto al tiempo.

$$(\nabla\times H)_{(u_1,u_2,u_3)} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{a}_1 & h_2\hat{a}_2 & h_3\hat{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1H_1 & h_2H_2 & h_3H_3 \end{vmatrix}$$

Expresado en coordenadas esféricas: $h_1 = 1$; $h_2 = r$; $h_3 = r.sen\ \theta$

$$(\nabla\times H)_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{r^2.sen\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r.\hat{a}_\theta & r.sen\theta.\hat{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ H_r & r.H_\theta & r.sen\theta.H_\phi \end{vmatrix}$$

Realizamos el rotor analizado en la dirección radial

$$(\nabla\times H)_{(r)} = \frac{1}{r^2.sen\theta}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r.sen\theta.H_\phi)-\frac{\partial}{\partial\phi}(r.H_\theta)\right]$$

En el numerador podemos sacar r factor común porque no es afectado por ninguna de las dos derivadas y luego lo simplificamos con uno de las r del denominador. Como H_θ es igual a cero, no la tomamos en cuenta.

$$(\nabla\times H)_{(r)} = \frac{1}{r.sen\theta}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(sen\theta.H_\phi)\right]$$

Esta última ecuación la utilizaremos para el cálculo de E_r

Si ahora realizamos el rotor analizado para la componente θ para luego utilizarlo en el cálculo de E_θ.

$$(\nabla \times H)_{(\theta)} = \frac{1}{r^2.sen\theta} \cdot -r \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r.sen\theta.H_\phi\right) - \frac{\partial}{\partial \phi}\left(r.H_r\right) \right]$$

simplificando términos y ordenando los signos:

$$(\nabla \times H)_{(\theta)} = \frac{1}{r.sen\theta} \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(r.sen\theta.H_\phi\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(r.H_r\right) \right]$$

al igual que en la otra expresión del rotor solo tomamos el término que tiene H_ϕ

y simplificando

$$\boxed{(\nabla \times H)_{(\theta)} = -\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r.H_\phi\right) \right]}$$

Esta última ecuación la utilizaremos para el cálculo de E_θ

Si hacemos la operación de cálculo del rotor en la dirección ϕ veremos que:

$$(\nabla \times H)_{(\phi)} = 0$$

Cálculo de la componente radial del campo eléctrico E_r

$$(\nabla \times H)_{(r)} = \frac{1}{r.sen\theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta.H_\phi\right) \right]$$

Debemos reemplazar por H_ϕ

$$H_\phi = \frac{I.dl.sen\theta}{4.\pi} \cdot \left[-\frac{\varpi.sen\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r.v} + \frac{\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^2} \right]$$

$$(\nabla \times H)_{(r)} = \frac{I.dl}{4.\pi.r.sen\theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left[sen^2\theta \cdot \left[-\frac{\varpi.sen\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r.v} + \frac{\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^2} \right] \right] \right]$$

Recordamos la siguiente derivada:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} sen^2\theta = 2.\cos\theta.sen\theta$$

resolviendo la derivada nos da:

$$(\nabla \times H)_{(r)} = \frac{I.dl}{4.\pi.r.sen\theta} \cdot \left[\frac{2.sen\theta.\cos\theta}{} \cdot \left[-\frac{\varpi.sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r.v} + \frac{\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2} \right] \right]$$

Simplificando senθ e introduciendo 1/r en el paréntesis

$$(\nabla \times H)_{(r)} = \frac{2.I.dl.\cos\theta}{4.\pi} \cdot \left[-\frac{\varpi.sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2.v} + \frac{\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^3} \right]$$

No simplificamos el 2 con el 4 para que todas las componentes tengan una estructura similar, ver más adelante las otras componentes.

$$E_r = \frac{1}{\varepsilon}\int (\nabla \times H)_r dt$$

$$E_r = \frac{2.I.dl.\cos\theta}{4.\pi.\varepsilon}\int \left(-\frac{\varpi.sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2.v} + \frac{\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^3} \right) \cdot dt$$

Recordando integrales:

$$\int (sen\omega.t)dt = -\frac{1}{\omega} \cdot \cos\varpi t$$

$$\int (\cos\omega.t)dt = \frac{1}{\omega} \cdot sen\varpi t$$

Nos queda la expresión final de la componente radial del campo eléctrico:

$$E_r = \frac{2.I.dl.\cos\theta}{4.\pi.\varepsilon} \cdot \left[\frac{\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2.v} + \frac{sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{\varpi.r^3} \right] \qquad [14\text{-}41]$$

Cálculo de la componente del campo eléctrico E_θ

Recordando la expresión que obtuvimos en el rotor de H:

$$(\nabla \times H)_{(\theta)} = -\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r.H_\phi) \right]$$

$$H_\phi = \frac{I.dl.sen\theta}{4.\pi} \cdot \left[-\frac{\varpi.sen\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r.v} + \frac{\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^2} \right]$$

$$(\nabla \times H)_{(\theta)} = -\frac{I.dl.sen\theta}{4.\pi.r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-\varpi.sen\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{v} + \frac{\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \right) \right]$$

Cambiando de signo a los términos

$$(\nabla \times H)_{(\theta)} = \frac{I.dl.sen\theta}{4.\pi.r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\varpi.sen\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{v} - \frac{\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \right] \right]$$

Resolveremos por separado las derivadas de los términos del segundo miembro

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\varpi.sen\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{v} \right] = \left(-\frac{\varpi}{v} \right) \cdot \frac{\varpi.\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{v} = -\frac{\varpi^2.\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{v^2}$$

Derivando el segundo término nos encontramos que es una función de funciones cuya derivada es:

y = u . v donde y´ = u . v´ + u´ . v

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[-r^{-1}.\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right) \right] =$$

$$-\left(-r^{-2}\right).\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right) - r^{-1} \cdot \left(-\frac{\varpi}{v} \right) \cdot \left(-sen\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right) \right) = \frac{\cos\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r^2} - \frac{-\varpi.sen\varpi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r.v}$$

Si ponemos todos los términos de la ecuación de H_θ:

$$(\nabla \times H)_{(\theta)} = \frac{I.dl.sen\theta}{4.\pi.r} \cdot \left[\frac{-\varpi^2.\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{v^2} - \frac{\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2} - \frac{-\varpi.sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r.v} \right]$$

$$(\nabla \times H)_{(\theta)} = \frac{I.dl.sen\theta}{4.\pi} \cdot \left[\frac{-\varpi^2.\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r.v^2} - \frac{-\varpi.sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2.v} + \frac{\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^3} \right]$$

Recordando que al campo eléctrico lo calculamos mediante:

$$E_\theta = \frac{1}{\varepsilon}\int (\nabla \times H)_\theta dt$$

Las integrales las debemos resolver:

$$\int (\cos \varpi t).dt = \frac{1}{\varpi} sen\, \varpi t$$

$$\int (sen\, \varpi t).dt = -\frac{1}{\varpi}\cos \varpi t$$

Nos queda la expresión final de E_θ

$$\boxed{E_\theta = \frac{I.dl.sen\theta}{4.\pi.\varepsilon} \cdot \left[\frac{-\varpi.sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r.v^2} + \frac{\cos\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2.v} + \frac{sen\varpi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{\varpi.r^3} \right] \qquad [14\text{-}42]}$$

Si hacemos: $t' = \left(t - \frac{r}{v}\right)$

Nos queda:

$$H_\phi = \frac{I\, d\ell \,\mathrm{sen}\,\theta}{4\pi} \left(\underbrace{\frac{-\omega\, \mathrm{sen}\,\omega t'}{rv}}_{\textit{Término de Radiación}} + \underbrace{\frac{\cos \omega t'}{r^2}}_{\textit{Término de Inducción}} \right) \qquad [14\text{-}43]$$

$$E_\theta = \frac{I\ d\ell\ \mathrm{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{-\omega\, \mathrm{sen}(\omega t')}{r v^2} + \frac{\cos(\omega t')}{r^2 v} + \frac{\mathrm{sen}(\omega t')}{\omega r^3} \right) \qquad [14\text{-}44]$$

$$E_r = \frac{2\,I\,d\ell\cos\theta}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\cos\,\omega\,t'}{r^2 v} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\omega\,t'}{\omega\,r^3}}_{\textit{Término electrostático}}\right) \qquad [14\text{-}45]$$

Es un tanto sorprendente encontrar que algo tan aparentemente simple como un elemento de corrientes dé lugar a un campo electromagnético tan complicado como el dado por (14-43), (14-44) y (14-45). Sin embargo, el estudio de estas expresiones pronto da el significado y necesidad de cada uno de sus términos.

Consideremos primero la expresión de H_ϕ. Se ve que consiste de dos términos, uno de los cuales varía inversamente con r^2. El segundo de estos términos, llamado campo de *inducción* predominará en puntos próximos al elemento de corriente en los que *r* es pequeña, mientras que a gran distancia, donde *r* es grande, el segundo término es despreciable comparado con el primero. El primer término, inverso a la distancia, se denomina *campo de radiación o alejado*. Los dos campos tendrán *iguales amplitudes* para el valor de *r* que haga

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\omega}{r\,v}$$

es decir, que

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} \approx \frac{\lambda}{6} \qquad \text{siendo } \omega = 2\pi f \text{ y } \lambda = v/f$$

salvo que se ha sustituido *t* por *t'*, el término de inducción

$$\frac{I\;d\ell\;\operatorname{sen}\theta\;\cos\omega t'}{4\pi r^2}$$

es precisamente la intensidad de campo magnético que daría la aplicación directa de la ley de Bio-Savart (o ley de Ampere para el elemento de corriente), si se hubiera extendido para cubrir el caso de una corriente alterna $I\cos\omega t$. El hecho de que el campo verdadero es una función de $t' = t - \left(\frac{r}{v}\right)$ en lugar de *t*, incluye el tiempo de propagación. Sin embargo, en puntos próximos al elemento en los que predomina el término de inducción, $\frac{r}{v}$ es una cantidad muy pequeña y $t' \approx t$.

El término inverso a la distancia (de radiación) es un término nuevo no presente para las corrientes continuas. Este término resulta del tiempo finito de propagación, que no puede considerarse en el caso de un campo estático. Se demostrará más adelante que este término de radiación contribuye a un flujo de energía que se aleja de la fuente (elemento de corriente), mientras que el término de inducción contribuye a una energía que queda almacenada en el campo durante un cuarto ciclo y devuelta al circuito el siguiente.

El examen de las expresiones de E_θ y E_r muestra que E_θ tiene un término de **inducción** $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ y otro $\left(\frac{1}{r}\right)$ de **radiación**, y E_r tiene un término $\frac{1}{r^2}$. Además, ambas componentes de **E** tienen un término que varía como $\frac{1}{r^3}$. De su semejanza con las componentes del campo de un dipolo electrostático (véase capítulo 2, ejemplo 3), estos términos $\frac{1}{r^3}$ se llaman términos **electrostáticos** (o a veces simplemente términos **eléctricos**).

14.3.1. Relación entre un elemento de corriente y un dipolo eléctrico

No es precisamente una coincidencia que las expresiones del campo eléctrico de un elemento de corriente eléctrica alterna contengan términos que corresponden al campo de un dipolo eléctrico oscilante. Aunque se especificó una *corriente* al establecer el hipotético elemento de corriente, la ecuación de continuidad (o conservación de la carga) requiere que exista una acumulación de carga en los extremos del elemento y que esté dada por

$$\frac{dq}{dt} = I\ \cos\omega t \qquad\qquad q = \frac{I\ \operatorname{sen}\omega t}{\omega}$$

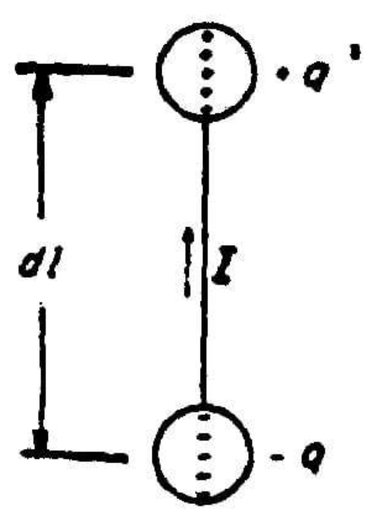


FIGURA 14-5: Dipolo Hertziano

FIGURA 14-6: Cadena de dipolos hertzianos

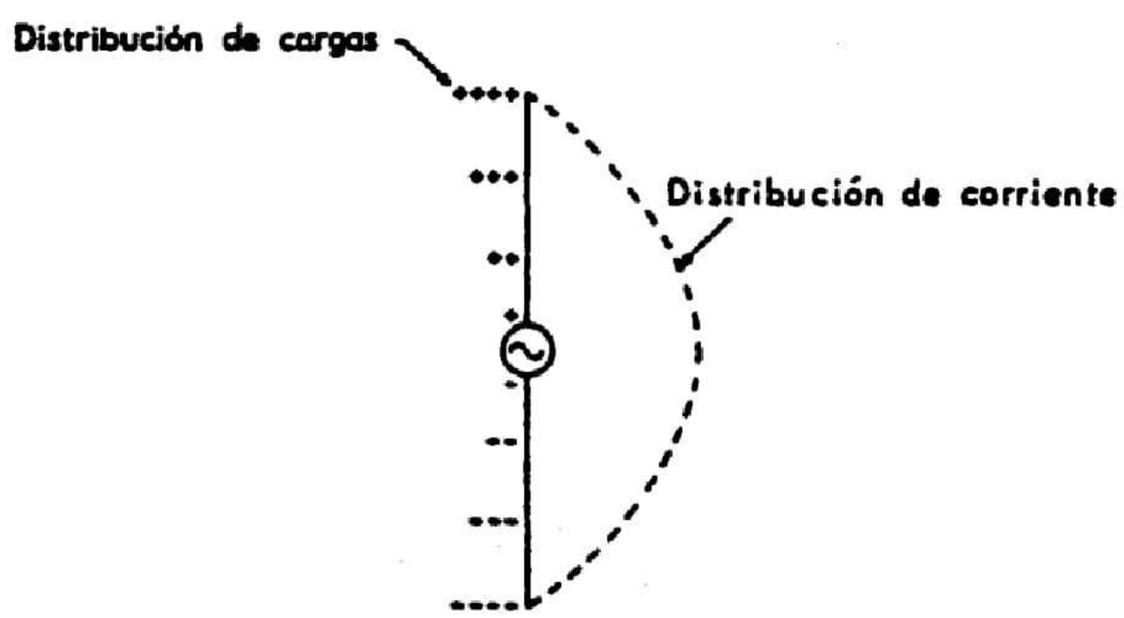


FIGURA 14-7: distribuciones de corriente y de carga en una antena lineal

es decir, crece la carga en un extremo y disminuye en el otro en el valor del flujo de corriente (culombios por segundo). Para obtener una aproximación física a un elemento de corriente por dos pequeñas esferas o discos en los que pudieran acumularse las cargas. Si el alambre es muy delgado comparado con el radio de las esferas (de manera que su capacidad distribuida sea despreciable respecto a la capacidad entre esferas), la corriente en el alambre será uniforme. Además, los radios de las esferas deben de ser pequeños respecto a $d\ell$, su separación, y a su vez $d\ell$ debe ser mucho menor que la longitud de onda. La disposición es esencialmente al dipolo eléctrico oscilante de Hertz (fig.14-5).

Comparando con el dipolo electrostático, la intensidad del campo eléctrico que se producirá debido a las cargas separadas en los extremos del elemento de corriente serían

$$E_\theta = \frac{q\ d\ell\ \text{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{I\ d\ell\ \text{sen}\,\theta\ \text{sen}\,\omega t'}{4\pi\varepsilon\omega r^3} \qquad [14\text{-}46]$$

$$E_r = \frac{2q\ d\ell\ \cos\theta}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{2I\,d\ell\cos\theta\ \text{sen}\,\omega t'}{4\pi\omega r^3} \qquad [14\text{-}47]$$

Estas expresiones en $\frac{1}{r^3}$ son precisamente las que aparecerían en la solución del campo electromagnético del elemento de corriente.

Cuando un elemento de corriente forma parte de un circuito completo no hay acumulación de carga en sus extremos y la corriente es uniforme en todo circuito, pues la corriente de un elemento fluye en el siguiente.

En este caso, como podría esperarse, los términos en $\frac{1}{r^3}$ debidos a las cargas acumuladas se desvanecen, dejando solamente los campos de radiación. Hablando de una cadena de dipolos hertzianos (fig.14-6), la carga positiva en el extremo de un dipolo queda anulada por una carga de igual valor, pero negativo, del extremo opuesto del dipolo siguiente. Sin embargo, si la corriente a lo largo del circuito o antena no es uniforme a lo largo de su longitud, sino que está distribuida, como, por ejemplo, en la fig.14-7, ello podría representarse por una cadena de elementos de corriente, o dipolos hertzianos, teniendo amplitudes ligeramente distintas. En este caso las cargas adyacentes no se anulan por completo y hay una acumulación de carga en la superficie del alambre, tal como indica la fig.14-6. Estas cargas superficiales son las responsables de una componente relativamente grande de la intensidad del campo eléctrico normal a la superficie del alambre.

14.4. POTENCIA RADIADA POR UN ELEMENTO DE CORRIENTE

El flujo de potencia por unidad de área en el punto *P* estará dado por el vector de Poynting en tal punto. El vector de Poynting instantáneo está dado por $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ y tendrá componentes θ y *r*. Sustituyendo *v* por $c \approx 3\times10^8$ para una propagación en el espacio libre, la componente θ del vector instantáneo de Poynting será

$$P_\theta = -E_r\,H_\phi$$

$$sen\omega t^1.\cos\omega t^1 = \frac{1}{2}sen2\omega t^1$$

$$sen^2\omega t^1 - \cos^2\omega t^1 = -\cos^2\omega t^1$$

$$P_\theta = \frac{I^2\,d\ell^2\,\text{sen}\,2\theta}{16\pi^2\varepsilon}\left(\frac{\text{sen}^2\,\omega t'}{r^4 c} - \frac{\cos^2\omega t'}{r^4 c} - \frac{\text{sen}\,\omega t'\cos\omega t'}{\omega r^5} + \frac{\omega\ \text{sen}\,\omega t'\cos\omega t'}{r^3 c^2}\right)$$

$$P_\theta = \frac{I^2\,d\ell^2\,\text{sen}\,2\theta}{16\pi^2\varepsilon}\left(\frac{-\cos 2\omega t'}{r^4 c} - \frac{\text{sen}\,2\omega t'}{2\omega r^5} + \frac{\omega\text{sen}\,2\omega t'}{2r^3 c^2}\right) \qquad [14\text{-}48]$$

El valor medio de $\operatorname{sen} 2\omega t'$ y $\cos 2\omega t'$ en un ciclo completo es cero. Por tanto, para todo valor de r, el valor medio de P_θ en un ciclo completo es cero. P_θ representa solamente unos flujos transitorios de potencia que van y vienen en la dirección θ sin producir flujo neto medio de potencia. El vector radial de Poynting está dado por

$$P_r = E_\theta H_\phi$$

$$P_r = \frac{I^2 d\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{16\pi^2\varepsilon}\left(\frac{\operatorname{sen}\omega t'\cos\omega t'}{\omega r^5} + \frac{\cos\omega t'}{r^4 c} + \frac{\omega \operatorname{sen}\omega t'\cos\omega t'}{r^3 c^2} - \frac{\operatorname{sen}^2\omega t'}{r^4 c} - \frac{\omega \operatorname{sen}\omega t'\cos\omega t'}{r^3 c^2} + \frac{\omega^2 \operatorname{sen}^2\omega t'}{r^2 c^3}\right)$$

$$P_r = \frac{I^2 d\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{16\pi^2\varepsilon}\left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2\omega t'}{2\omega r^5} + \frac{\cos 2\omega t'}{r^4 c} - \frac{\omega \operatorname{sen} 2\omega t'}{r^3 c^2}} + \frac{\omega^2\left(1-\cos 2\omega t'\right)}{2 r^2 c^3}\right) \qquad [14\text{-}49]$$

El **valor medio** del vector radial de Poynting en un ciclo se deberá a parte del último término y será

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad \mu = \frac{1}{c^2\varepsilon} \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad \eta = \frac{1}{c\varepsilon}$$

$$P_{r(av)} = \frac{\omega^2 I^2 d\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{32\pi^2 r^2 c^3 \varepsilon}$$

$$P_{r(av)} = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\omega I\, d\ell \operatorname{sen}\theta}{4\pi r c}\right)^2 \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad [14\text{-}50]$$

Ninguno de los términos de las expresiones de los vectores de Poynting representa un **flujo medio** de potencia, salvo el de la expresión (14-50). Los únicos términos de **E** y **H** que contribuyen a este flujo medio de potencia son los términos de radiación o inversos a la distancia. A gran distancia de la fuente estos términos de radiación son los únicos que tienen valores apreciables, pero incluso en las proximidades del elemento de corriente, en donde predominan los campos de inducción y eléctrico, sólo los términos en $\frac{1}{r}$ contribuyen a un flujo saliente medio de potencia.

Puede probarse que sólo los términos inversos a la distancia son los que contribuyen al flujo saliente de potencial de la fuente con sólo un simple razonamiento. Si se consideran dos capas concéntricas de radios r_1 y r_2 que encierren a la fuente, entonces la velocidad del flujo medio de energía a través de la capa r_2 debe ser la misma que a través de la capa r_1, pues de otra forma habría una acumulación (o pérdida) de energía almacenada en la región entre capas.

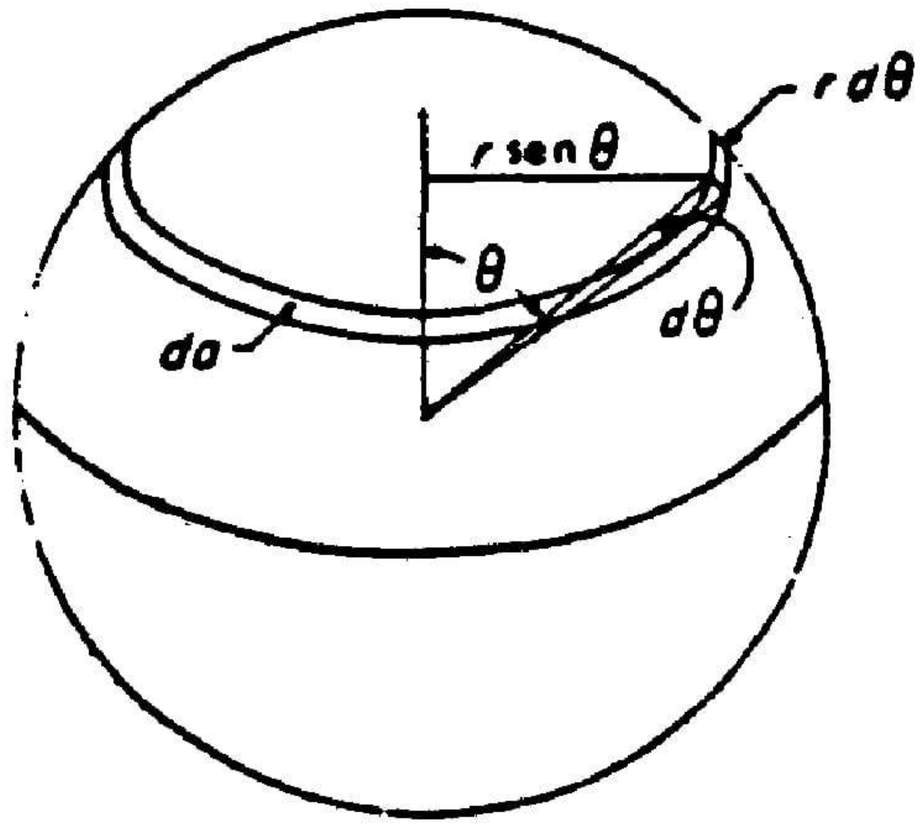


FIGURA 14-5

Esto requiere que la densidad de potencia disminuya como $\frac{1}{r^2}$, ya que el área de las capas crece según r^2. La densidad de potencia es proporcional al producto de E y H (o bien a E^2 o H^2), de manera que E y H, que contribuyen al flujo medio radial de potencia, deben ser proporcionales a $\frac{1}{r}$. Las componentes de E o H que son inversamente proporcionales a r^2 o r^3 pueden contribuir a un flujo transitorio de energía en la región entre capas, pero esta energía debe volver a la fuente, pues no puede ser almacenada permanentemente en un volumen finito del medio. Recordando

$$\omega = 2\pi f \qquad \lambda = v / f \qquad \eta_0 = 120\,\pi$$

será

$$E_\theta = \frac{\omega I\, d\ell \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon v^2 r}$$

$$E_\theta = \frac{\eta I\, d\ell \operatorname{sen}\theta}{2\lambda r}$$

$$E_\theta = \frac{60\pi I \operatorname{sen}\theta}{r\lambda} \qquad [14\text{-}51]$$

Según la ecuaciones (14-43) (14-44) y (14-45), las amplitudes de los campos de *radiación* de un elemento de corriente $I\,d\ell$ son

$$H_\phi = \frac{\omega I\, d\ell \operatorname{sen}\theta}{4\pi v r}$$

$$H_\phi = \frac{I\, d\ell \operatorname{sen}\theta}{2\lambda r} \qquad [14\text{-}52]$$

Los términos de radiación de E_θ y H_ϕ están en fase y relacionados por

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \eta \qquad [14\text{-}53]$$

La potencia total radiada por elemento de corriente puede valorarse integrando el vector radial de Poynting en una superficie esférica centrada en el elemento. *P* es independiente del ángulo azimutal ϕ, de manera que como elemento de parte de la capa esférica se tomará la cinta *da* en la que

$$da = 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

Entonces la potencia radiada total será

$$Potencia = \oint_{Superficie} P_{r(a\,v)}\, da = \int_0^\pi \frac{\eta}{2}\left(\frac{\omega I\, d\ell \operatorname{sen}\theta}{4\pi r c}\right) 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$Potencia = \frac{\eta\omega^2 I^2 d\ell^2}{16\pi c^2} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta$$

$$Potencia = \frac{\eta\omega^2 I^2 d\ell^2}{16\pi c^2}\left[\frac{-\cos\theta}{3}\left(\operatorname{sen}^2\theta + 2\right)\right]_0^\pi$$

$$Potencia = \frac{\eta\omega^2 I^2 d\ell^2}{12\pi c^2} \qquad [14\text{-}54]$$

En esta expresión *I* es la corriente máxima. La potencia radiada en función de la corriente eficaz será

$$Potencia = \frac{\eta\omega^2 I_\alpha^2 d\ell^2}{6\pi c^2}$$

Si hacemos

$$\frac{\eta\,\omega^2}{6\pi\, c^2} = \frac{\eta\left(2\pi f\right)^2}{6\pi c^2} = \frac{\eta 4\pi^2}{6\pi}\,\frac{f^2}{c^2}$$

$$\frac{\eta 4\pi}{6\lambda^2} = \frac{120\pi\; 4\pi}{6\lambda^2} = \frac{80\pi^2}{\lambda^2}$$

$$Potencia = 80\pi^2\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 I_\alpha^2$$

El coeficiente de I_α^2 tiene las dimensiones de una resistencia y se denomina *resistencia de radiación* del elemento de corriente. Así, para un elemento de corriente

$$R_{rad} = 80\pi^2\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2 \qquad [14\text{-}55]$$

14.5. APLICACIÓN A LAS ANTENAS CORTAS

El hipotético elemento de corriente es una herramienta útil para el trabajo teórico, pero no es una antena práctica. El "dipolo elemental" *práctico* es una antena alimentada en su centro, de una longitud muy corta en longitudes de onda. La amplitud de la corriente en tal antena disminuye uniformemente desde un máximo en el centro a cero en sus extremos (fig.14-8a).

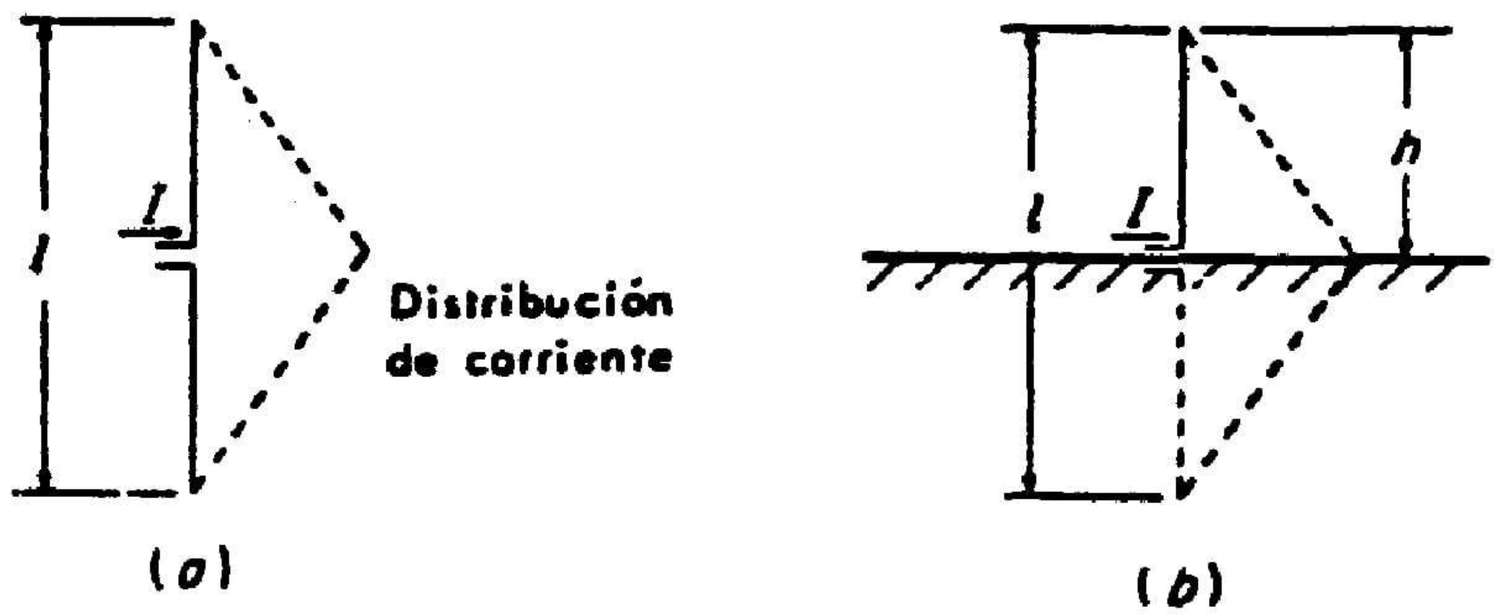


FIGURA 14-8: distribuciones de corriente de antenas cortas: (a) Dipolo corto; y (b) Monopolo corto

Para la misma corriente I (en los terminales) el (corto) dipolo práctico de longitud ℓ radiará sólo la cuarta parte de potencia que el elemento de corriente de igual longitud que tenga una corriente de I en toda su longitud. (Las intensidades de campo en cada punto se reducen a la mitad y la densidad de potencia se reducirá a la cuarta parte). Por tanto, la resistencia de radiación de un corto dipolo práctico será la cuarta parte de la de un elemento de corriente de la misma longitud. Es decir

$$R_{rad} = (dipolo\ corto) = \frac{80\pi^2}{4}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = 20\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

$$R_{rad} = (dipolo\ corto) \approx 200\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \quad [Ohms] \qquad [14\text{-}56a]$$

El monopolo de altura h (fig.14-8(b)) o corta antena vertical montada sobre un plano reflector, produce la misma intensidad de campo sobre el plano que daría el dipolo de longitud $\ell = 2h$ cuando ambos estuvieran alimentados por la misma corriente. Sin embargo, la antena vertical radiada es sólo en el hemisferio sobre el plano, de manera que su potencia radiada es sólo la mitad del correspondiente dipolo. Por tanto, la resistencia de radiación del monopolo de altura $h = \frac{\ell}{2}$ es

$$R_{rad}(monopolo) = 10\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

$$R_{rad}(monopolo) = 40\pi^2\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$

$$R_{rad}(monopolo) = 400\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \quad [Ohms] \qquad [14\text{-}56b]$$

Estas fórmulas sólo sirven estrictamente para antenas muy cortas[2], pero son aproximaciones para dipolos de longitudes hasta de un cuarto de longitud de onda y de monopolos de alturas de un octavo de longitud de onda.

14.6. DISTRIBUCIÓN SUPUESTA DE LA CORRIENTE

Para calcular los campos electromagnéticos de antenas más largas es necesario conocer la distribución de la corriente a lo largo de las mismas. Esta información se obtendría resolviendo las ecuaciones de Maxwell sujetas a las condiciones aproximadas de los límites a lo largo de la antena. Sin embargo, para una antena cilíndrica esto es un problema comparativamente difícil, y sólo en los últimos años se han obtenido soluciones satisfactorias. Una de éstas se considerará en el capítulo 15. Desconociendo la corriente de la antena es posible *suponer* una cierta distribución, y de ésta calcular las distribuciones aproximadas de los campos. La precisión de los campos así calculados dependerá, por tanto, del acierto de la distribución supuesta de la corriente. Pensando que una antena alimentada en su centro es una línea de transmisión en circuito abierto, que ha sido modificada separando entre sí el trozo final de la misma, puede sugerirse una distribución sinusoidal de la corriente con nodos de intensidad en sus extremos. El hecho que se conoce, del trabajo de Abraham sobre elipsoides delgados, de que la corriente será verdaderamente sinusoidal para el caso infinitamente delgado, justifica más esta hipótesis. Resulta ser un buen supuesto para las antenas delgadas, suficientemente bueno de hecho, que incluso con fórmulas más precisas de que se dispone (y mucho más complicadas), el que la distribución sinusoidal todavía se emplee en muchos trabajos sobre el campo de una antena. Cuando se desea una mayor precisión, y en aquellos casos particulares en que no puede emplearse por entero la distribución más aproximada a la verdadera.

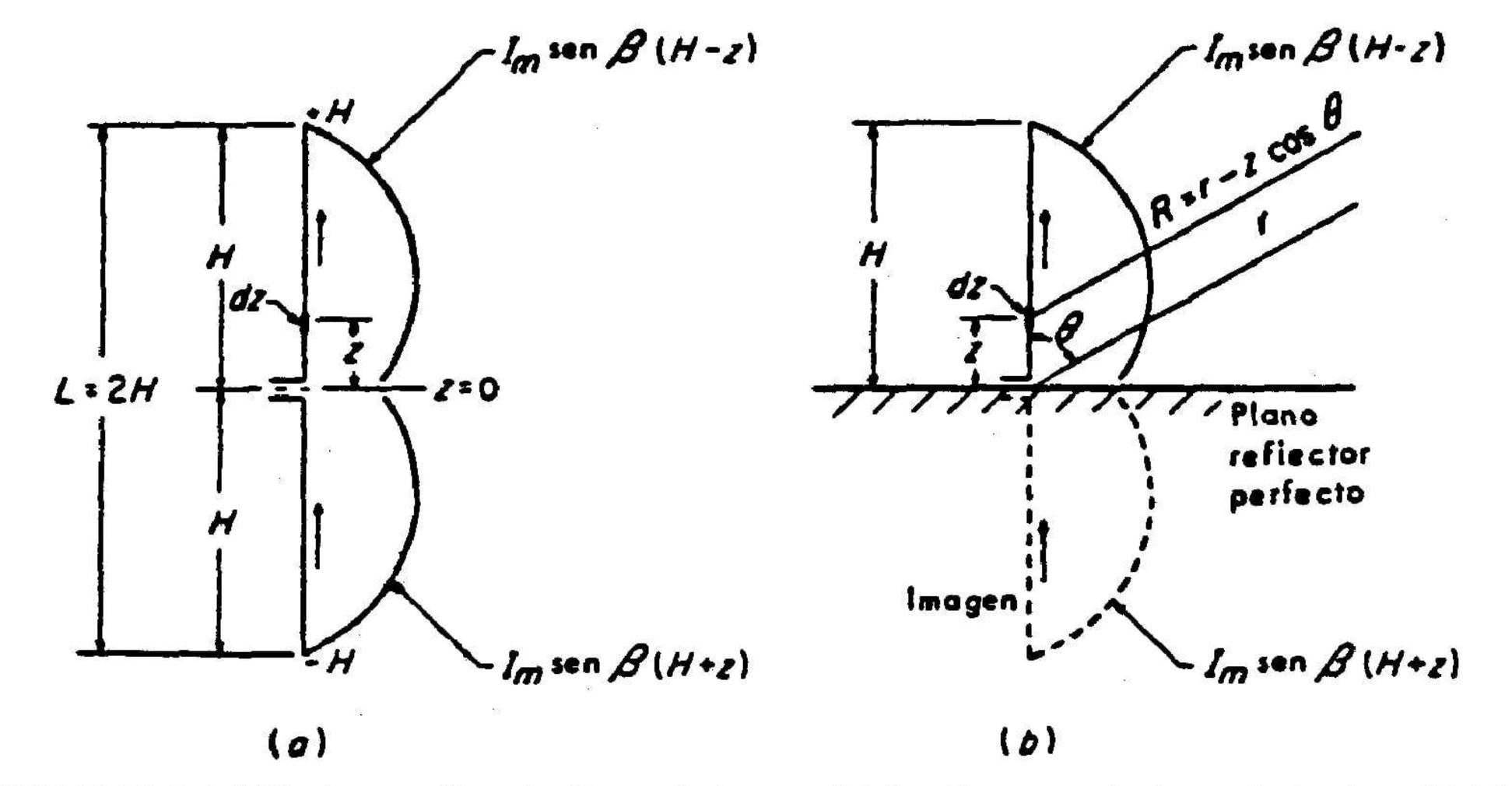


FIGURA 14-9: (a) Dipolo con alimentación central y una distribución supuesta de corriente sinusoidal.(b) Monopolo correspondiente.

[2] Los símbolos ℓ y h, en minúsculas, se han empleado en la ecuación (14-56) para estas antenas *cortas*. En las antenas en general, discutidas en la sección siguiente, se emplearán los símbolos L y H.

La fig.14-9(a) muestra un dipolo alimentado en su centro con una distribución sinusoidal de corriente, y la fig.14-9(b) muestra el monopolo correspondiente. "Una *antena dipolo*" es un radiador recto, alimentado usualmente por su centro y produciendo una radiación máxima en el plano normal al eje.

La longitud que se especifica es la longitud total. La antena vertical (de altura $H = \frac{L}{2}$), alimentada respecto a un plano grande perfectamente conductor, tiene la misma característica de radiación sobre el plano que la de la antena dipolo de longitud L en el espacio libre. Esto se debe a que los campos debidos a un elemento de corriente $I\,dz$, al reflejarse en el plano, parecen originarse en un elemento imagen situado debajo del plano. Además, la impedancia de la antena vertical alimentada respecto al plano reflector es precisamente la mitad del correspondiente dipolo de longitud $L = 2H$. Así, el dipolo de la fig.14-9(a) y la antena vertical correspondiente alimentada en su base de la fig.14-9(b) se denominará simplemente *monopolo* de altura H, suponiéndose, salvo indicación en contra, la existencia del plano reflector infinitamente grande. El dipolo correspondiente alimentado en su centro se denominará dipolo de *longitud* $L = 2H$ o dipolo de *semilongitud* H.

14.7. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE POTENCIAL

Anteriormente en este mismo capítulo se obtuvieron ecuaciones diferenciales para el potencial vector y el potencial escalar y se dieron sus soluciones sin comprobación, ni indicando cómo se hallaron. Para completar la discusión de los fundamentos de la radiación se desarrollará la resolución de las ecuaciones fasoriales de Helmholtz

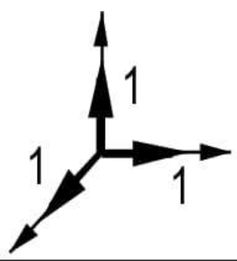
$$\nabla^2 \mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \qquad [14\text{-}57]$$

$$\nabla^2 V - \gamma^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \text{Ver [14-20]} \qquad [14\text{-}58]$$

ya obtenidas anteriormente. La constante de propagación γ se toma con un parte real positiva

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \qquad [14\text{-}59]$$

Las ecuaciones (14-57) y (14-58) son cuatro ecuaciones escalares (para V y las tres componentes de $\mathbf{A}$), pero sólo se necesita resolver una de ellas, ya que todas tienen la misma forma. De las ecuaciones de igual forma, la más sencilla es la que tiene un foco unitario puntual representado por un delta tridimensional de Dirac. La función G que satisface a esta ecuación se denomina *función de Green* y la ecuación es

$\nabla^2 G - \gamma^2 G = -\delta$		[14-60]

Se demostrará que la función G es parte importante de las soluciones de (14-57) y (14-58), y así es necesario primeramente encontrar una solución a (14-60).

Supongamos por simplicidad que la delta de Dirac en (14-60) está situada en el origen, haciendo a la solución de G esféricamente simétrica alrededor del origen. Así, en todo punto distinto del origen G debe satisfacer

$$\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dG}{dr}\right)}_{\nabla^2 G}-\gamma^2 G=0$$

que puede escribirse en una forma más conveniente

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rG)-\gamma^2 G=0 \qquad [14\text{-}61]$$

La ecuación (14-61) puede multiplicarse por r y ser integrada directamente para dar

$$G=C\frac{e^{\pm\gamma r}}{r} \qquad [14\text{-}62]$$

en donde C es una constante arbitraria. Se empleará la solución con un exponente negativo, ya que representa una onda cuya amplitud disminuye al aumentar la distancia a la fuente. El valor de C se determina por la intensidad de la fuente, y así puede encontrarse C volviendo a (14-60), que contiene la delta de Dirac de la fuente. El procedimiento es el de sustituir (14-62) en (14-60) e integrar entonces sobre un pequeño volumen esférico V que contenga al origen. El radio del volumen esférico se torna tan pequeño que en todo el volumen $e^{-\gamma r}\approx 1$. Así la integral es

$$C\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)dV-\gamma^2\int_V\frac{1}{r}\,dV=-\int_V\delta(\mathbf{r})\,dV \qquad [14\text{-}63]$$

El primer término puede evaluarse notando que el integrando aparece en la ecuación de Poisson para una carga puntual en el origen

$$\nabla^2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right)=-\frac{q}{\varepsilon}\delta(r)$$

Empleando la ecuación de Poisson, el primer término de (14-63) es

$$C\int_V \nabla^3\left(\frac{1}{r}\right)dV=C\int_V\left[-4\pi\delta(r)\right]dV=-4\pi C$$

El segundo término de (14-63) tiende a cero al tender a cero el radio de la esfera y el tercer término tiende a -1, resultando finalmente $C=(4\pi)^{-1}$. Así, la función de Green es

$$G=\frac{e^{-\gamma r}}{4\pi r} \qquad [14\text{-}64]$$

y representa la onda esférica saliente de la fuente unitaria en el origen. La función de Green se emplea para obtener las soluciones de ecuaciones (14-57) y (14-58). Consideremos una componente de (14-57), por ejemplo, la x

$$\nabla^2 A_x(\mathbf{r}')-\gamma^2 A_x(\mathbf{r}')=-\mu J_x(\mathbf{r}') \qquad [14\text{-}65]$$

(Se ha escrito **r'** a las coordenadas para simplificar el resultado final). La ecuación de la correspondiente función de Green es

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - \gamma^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \qquad [14\text{-}66]$$

que por comparación con (14-64) tiene la solución

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{e^{-\gamma R}}{4\pi R} \qquad [14\text{-}67]$$

en donde

$$R = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$$

Si se multiplica (14-65) por G y (14-66) por A_x la diferencia entre ambas será

$$\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\, A_x(\mathbf{r}') - \mu J_x(\mathbf{r}')\, G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\, \nabla^2 A_x(\mathbf{r}') - A_x(\mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \qquad [14\text{-}68]$$

esta ecuación puede integrarse ahora sobre un volumen arbitrario V rodeado por la superficie S. La aplicación del teorema de Green (1-X) da

$$\int_V \left[\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) A_x(\mathbf{r}') - \mu J_x G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\right] dV' =$$

$$= \int_S \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla^2 A_x(\mathbf{r}') - A_x(\mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\right] da' \qquad [14\text{-}69]$$

Si la superficie S es una esfera de radio r, entonces (14-69) resulta

$$\int_V \left[\delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}) A_x(\mathbf{r}') - \mu J_x(\mathbf{r}')\, G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\right] dV' =$$

$$= \int_V \left[G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial A_x(\mathbf{r}')}{\partial r'} - A_x(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial r'}\right] da' \qquad [14\text{-}70]$$

Si hacemos tender r a un valor infinito (de manera que V incluye todo el espacio) pueden escribirse las cantidades G y A_x sobre S como aproximaciones al campo alejado. Así, la función de Green tiene la forma general

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = M(\theta', \phi, \mathbf{r}) \frac{e^{-\gamma r'}}{r'} \qquad [14\text{-}71]$$

Es razonable suponer que A_x tiene también la forma de una onda esférica saliente

$$A_x(\mathbf{r}') = N(\theta', \phi, \mathbf{r}) \frac{e^{-\gamma r}}{r'} \qquad [14\text{-}72]$$

Es fácil ver que (14-71) y (14-72) hacen que el integrado del segundo miembro de (14-70) tienda a cero. El primer miembro de (14-70) resulta

$$A_x = (\mathbf{r}) = \mu \int J_x(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\, dV' \qquad [14\text{-}73]$$

Las componentes y y z de **A** pueden tratarse de un modo parecido y sumadas vectorialmente para dar una expresión única del potencial vector. Puede obtenerse una expresión similar para le potencial escalar. Así, las expresiones de los potenciales en función de sus fuentes son

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\, dV' \qquad [14\text{-}74]$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int \rho(\mathbf{r}')\, G(\mathbf{r}', \mathbf{r})\, dV' \qquad [14\text{-}75]$$

en las que G está dada por (14-67). Si se supone que no hay pérdidas en el medio entonces $\gamma = j\beta$ y (14-74) y (14-75) se reducen a (14-28) y (14-29).

$$A(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int J(r') \frac{e^{-j\beta R}}{R} \cdot dV'$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \rho(r') \frac{e^{-j\beta R}}{R} \cdot dV'$$

14.8. Resumen del Capítulo

14.8.1. Campos eléctricos y magnéticos estáticos

Potencial escalar V

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(r')}{R} dV'$$

Potencial vectorial A

$$A(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J(r')}{R} dV'$$

14.8.2. Campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo

$$V(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(r',t)}{R} dV'$$

$$A(r,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J(r',t)}{R} dV'$$

14.8.3. Potenciales retardados

$$V(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(r',t-R/v)}{R} dV' \qquad A(r,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J(r',t-R/v)}{R} dV'$$

Podemos obtener los campos eléctricos y magnéticos de dichos potenciales mediante tres métodos:

1) **Método Heurístico**, es generalizar los potenciales ya desarrollados para los campos estáticos que satisfagan los requisitos del problema.
2) **Método de las Ecuaciones de Maxwell**, es partir de las ecuaciones de Maxwell y con ellas obtener ecuaciones diferenciales.

3) **Forma Fasorial de las Ecuaciones Diferenciales,** es buscar una resolución directa de las ecuaciones diferenciales obtenidas para los potenciales.

14.8.4. Vector Potencial Magnético

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I\ d\ell \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$$

14.8.5. Campos Producidos por un Elemento de Corriente Alterna

$$H_\phi = \frac{Idl.\text{sen}\,\theta}{4\pi}\left[\frac{-\varpi.\text{sen}\,\varpi.\left(t-\frac{r}{v}\right)}{rv} + \frac{\cos\varpi.\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2}\right]$$

$$E_\theta = \frac{Idl.\text{sen}\,\theta}{4\pi.\varepsilon}\left[\frac{-\varpi.\text{sen}\,\varpi.\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r.v^2} + \frac{\cos\varpi.\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2 v} + \frac{\text{sen}\,\varpi.\left(t-\frac{r}{v}\right)}{\varpi.r^3}\right]$$

$$E_r = \frac{2Idl.\cos\theta}{4\pi.\varepsilon}\left[\frac{\cos\varpi.\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r^2 v} + \frac{\text{sen}\,\varpi.\left(t-\frac{r}{v}\right)}{\varpi.r^3}\right]$$

El examen de las expresiones de E_θ y E_r muestra que E_θ tiene un **término de inducción** ($1/r^2$) y otro ($1/r$) de **radiación**, mientras que E_r solo tiene un término ($1/r^2$). Además, ambas componentes de **E** tienen un término ($1/r^3$). De su semejanza con las componentes del campo de un dipolo electrostático estos términos ($1/r^3$) se llaman **términos electrostáticos** (o a veces términos eléctricos).

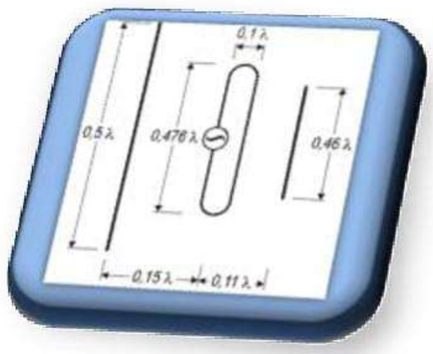
14.8.6. Potencia radiada por un elemento de corriente.

$$Potencia = \frac{\eta.\omega^2.I_{ef}^2.dl^2}{6.\pi.c^2} = 80.\pi^2.\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2.I_{ef}^2$$

El coeficiente de I_{ef}^2 tiene las dimensiones de una resistencia y se denomina resistencia de radiación del elemento de corriente. Así, para un elemento de corriente:

$$R_{rad} = 80.\pi^2.\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2$$

CAPÍTULO 15



ANTENAS

Objetivo:

- ☞ Que el alumno adquiera los conceptos fundamentales de las antenas y la capacidad de poderlas clasificar según sus características.

15.1. INTRODUCCIÓN

Una antena de radio es un elemento que realiza dos funciones primordiales:

- ☞ Convierte la energía electromagnética, procedente de un generador a través de una línea de transmisión, en energía electromagnética que se propaga libremente en el espacio.
- ☞ Adapta la impedancia interna del generador a la impedancia del espacio.

15.2. PARÁMETROS DE LAS ANTENAS

La antena está constituida por un conductor de dimensiones convenientes y formas diversas, en el cual coexisten una serie de parámetros inherentes a dichas dimensiones.

Estos parámetros son:

1) Impedancia característica (Z_o)
2) Altura o longitud efectiva $(H_e; L_e)$
3) Coeficiente de onda (β)
4) Longitud eléctrica (H)
5) Factor de atenuación (α)
6) Resistencia de radiación (R_r)
7) Inductancia (L_a)

8) Capacidad (C_a)
9) Q y ancho de banda
10) Reactancia (X_a)
11) Impedancia de entrada (Z_e)
12) Directividad $(G_{d\,máx})$
13) Área efectiva (A)

Vamos a definir estos conceptos.

Antes de entrar en detalles, hay que señalar que las fórmulas expuestas, en este capítulo, son escuetas y no se refleja su desarrollo, a veces complicado y que sería objeto de un estudio más profundo, que no es el objetivo de este libro.

Las fórmulas reseñadas son de aplicación directa y están referidas a las antenas más simples: dipolos y monopolos con plano de tierra.

15.2.1. Impedancia característica (Z_0)

Es un parámetro que depende de la relación longitud/diámetro del conductor y de la frecuencia de trabajo.

La Z_o de cada punto del conductor es también función de su distancia al punto de alimentación de la antena, por lo que la misma varía a lo largo del conductor.

Al referirse a la Z_o, se puede hablar de la correspondiente a un punto determinado o al valor medio de la misma. Este último concepto es el utilizado comúnmente en el cálculo de antenas.

La impedancia característica de un punto cualquiera de un dipolo delgado es:

$$Z_{op} = 120 \ln\left(\frac{2r}{a}\right)$$

siendo,

r = distancia del punto considerado al punto de alimentación del dipolo.

a = radio del conductor
(r y a, en las mismas unidades).

El valor más próximo al real nivel viene dado por las siguientes expresiones generales:

Monopolo

$$Z_o = 60\left(\ln\frac{H_o}{a} - 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{2H_o}{\lambda}\right)$$

Dipolo

$$Z_o = 120\left(\ln\frac{H_o}{a} - 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{2H_o}{\lambda}\right)$$

siendo

H_o = semilongitud o altura *física* del dipolo o monopolo,

a = radio del conductor

λ = longitud de onda de la frecuencia de trabajo

(todos en las mismas unidades).

15.2.2. Altura o longitud efectiva

En una antena Hertz (dipolo corto terminado en dos capacidades) se observa que la distribución de la corriente es uniforme a lo largo de ella.

Si se acorta la longitud de una antena determinada y se termina en sus extremos con unas capacidades adecuadas consiguiéndose una distribución uniforme de la corriente y que la energía radiada sea la misma que sin acortar, esta longitud acortada recibe el nombre de *longitud efectiva.* Si se trata de un monopolo, su nombre es *altura efectiva*.

Monopolo

$$H_e = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta H_0}{2}\right)}{\beta}$$

Dipolo

$$L_e = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\beta H_0}{2}\right)}{\beta}$$

siendo

H_o = semilongitud o altura *física* del dipolo o monopolo expresada en metros.

β = constante de fase (fórmula siguiente)

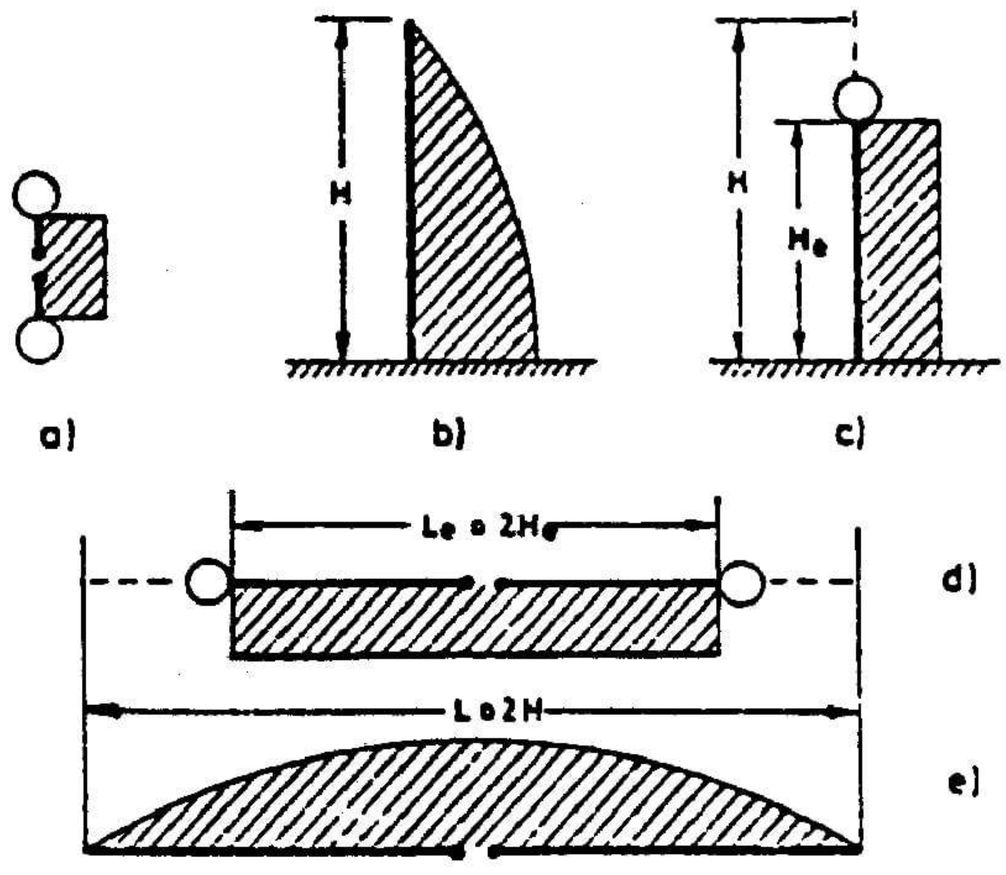


FIGURA 15-1

Esto se muestra gráficamente en la figura 15.1; en *a*) se muestra la distribución de corriente en una antena Hertz. En *b*) y *c*) se muestra la distribución de corriente en un monopolo de altura H y su correspondiente, acortado a su altura efectiva H_e. En *d*) y *e*) se muestran la distribución de corriente en un dipolo de longitud L o $2H$ y su correspondiente, acortado a su longitud efectiva L_e o $2H_e$.

Esto quiere decir que si disponemos de una antena de una longitud determinada con unas prestaciones concretas, conseguiremos los mismos resultados acortando la misma a su longitud o altura efectivas, terminada con una capacidad adecuada.

15.2.3. Coeficiente de onda o constante de fase

Este coeficiente es un ángulo unidad de valor $2\pi / \lambda$ radianes. También recibe el nombre de *constante de fase*. Son los radianes que corresponden a cada metro de longitud de onda.

Viene dada por

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ radianes}$$

15.2.4. Longitud eléctrica

En los estudios de la distribución de la corriente en un dipolo de media onda, o monopolio de cuarto de onda, teóricamente la corriente en los extremos alejados del punto de alimentación es cero.

Experimentalmente se sabe que esto no es así y que en realidad los nulos o nodos de corriente están en longitudes físicas algo más "largas". Este efecto se conoce como *efecto terminal*. Esto se debe a un aumento de L_a y una disminución de C_a en las proximidades de los extremos, dando lugar a una disminución de la Z_o puntual y a un aumento de corriente en esa *zona terminal* lo que produce un "alargamiento" aparente del conductor por lo que para que, al final de una longitud eléctrica de cuarto de onda para monopolos y media onda para dipolos, aparezca el cero de corriente, la longitud física debe ser algo menor.

La razón del acortamiento (H / H_o) es función de la longitud de onda y de Z_o y viene a resultar de una media del 5%.

H = longitud eléctrica

H_o = longitud física

La longitud eléctrica de una antena viene a ser con buena aproximación, un 5% más larga que la longitud física, por lo que:

$$H = H_o \text{ x } 1{,}05$$

Ejemplo: para una antena de $H = \lambda / 2$

$$H_0 = \frac{H}{1{,}05} = \frac{0{,}5\ \lambda}{1{,}05} = 0{,}476\ \lambda$$

Tanto una como otra longitud se pueden expresar en radianes:

Monopolo

Longitud física = βH_o radianes

Longitud eléctrica = βH radianes

Dipolo

Longitud física = $2\beta H_o$ radianes

Longitud eléctrica = $2\beta H$ radianes

Siendo

H y H_o semilongitudes ó altura del dipolo ó monopolo, expresadas en metros.

15.2.5. Factor de atenuación α

Este coeficiente determina la pérdida de energía que se produce en cada punto de la antena.

Es función de su longitud, resistencia de radiación y Z_o. Su unidad es el neper.

Viene determinado por:

$$\alpha = \frac{Rrv}{H \text{ x } Z_o} \text{ nepers}$$

siendo

R_{rv} = resistencia de radiación en el vientre de corriente (fórmula siguiente)

H = altura o semilongitud eléctrica en metros.

La atenuación total de una antena dipolo o monopolo, será:

$$\alpha H = \frac{R_{rv}}{Z_o} \text{ nepers}$$

15.2.6. Resistencia de radiación

Este es un parámetro que viene determinado por la capacidad que tiene la antena de disipar la energía que recibe del generador, radiándola al espacio.

Su valor en ohmios es el equivalente a una resistencia "física" que disipa la misma energía que radia la antena, cuando por las dos circula una corriente de igual intensidad.

Este valor está referido normalmente al punto en el que existe en la antena el máximo valor de corriente (vientre) y es función directa de la potencia radiada, o al punto de alimentación, donde este valor es la componente activa del valor complejo de la impedancia de entrada.

La resistencia de radiación es función de la longitud del conductor y de la frecuencia de trabajo.

Resistencia de radiación de un dipolo de semilongitud H $(H_o \text{ x } 1,05)$

$\frac{H}{\lambda}$	$R_{rv}(\Omega)$	$\frac{H}{\lambda}$	$R_{rv}(\Omega)$	$\frac{H}{\lambda}$	$R_{rv}(\Omega)$
0,125	6,4	0,325	144	0,525	185
0,150	13	0,50	168	0,550	166
0,175	23	0,375	187	0,575	145
0,2	36,5	0,4	200	0,6	121
0,225	54	0,425	209	0,625	105
0,25	73	0,45	212	0,65	93
0,275	96	0,475	210	0,675	87
0,3	120	0,5	199	0,7	85

Los valores para un monopolo de altura H $(H_o \text{ x } 1,05)$, son la mitad de los expuestos en la tabla.

Con esta tabla se puede construir una gráfica y así poder determinar las R_{rv} de los valores intermedios de H/λ.

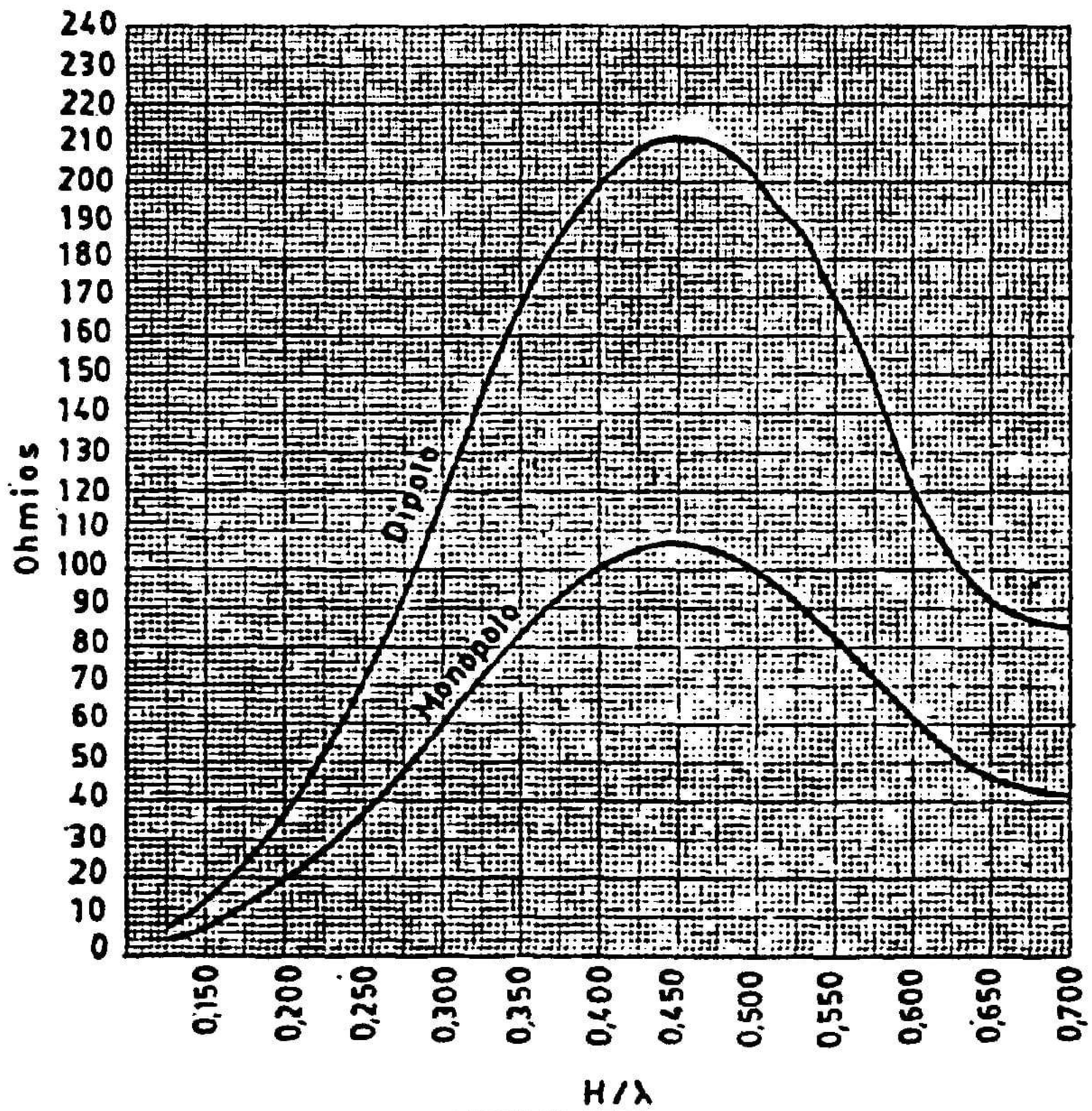


FIGURA 15-2

15.2.7. Inductancia

Es un valor intrínseco del conductor y su valor depende de Z_o y la frecuencia de trabajo.

Viene determinada por:

$$L_a = \frac{Z_o}{8F} \text{ henrios.}$$

Siendo

Z_o = ohmios

F = hercios

15.2.8. Capacidad

Es la resultante de todas las capacidades entre puntos del conductor por lo que, al igual que la inductancia, es un valor intrínseco del conductor y también función de Z_o y la frecuencia de trabajo.

Se determina por:

$$C_a = \frac{2}{\pi^2.F.Z_o} \text{ faradios.}$$

siendo

Z_o = ohmios

F = hercios

15.2.9. Q y ancho de banda

El Q de una antena o "factor de calidad" es un parámetro función de Z_o y la resistencia de radiación.

Determina la variación de frecuencia, respecto a la de trabajo, permitida por la antena para que ésta tenga un rendimiento aceptable (que la potencia radiada disminuya en un 50%).

El Q de una antena viene dado por:

$$Q_a = \frac{\pi.Z_o}{4.R_{rv}}$$

Dividiendo la frecuencia de resonancia de una antena por el Q, averiguamos la desviación de frecuencia que nos permite la antena y, por lo tanto, el "ancho de banda".

15.2.10. Reactancia

Es la resultante de la suma vectorial de la inductancia y la capacidad de la antena. Es función de la longitud del conductor, el radio del mismo, y la longitud de onda de la frecuencia de trabajo.

15.2.11. Impedancia de entrada

Es la impedancia que presenta la antena en su punto de alimentación y la cual es necesario conocer para conseguir un correcto acoplamiento con la impedancia del generador. Es un valor complejo, compuesto de una parte real (resistencia de entrada) y una parte imaginaria (reactancia de entrada).

La impedancia de entrada puede representarse con circuitos de constantes concentradas tal como se muestra en la figura 15-3.

Si la semilongitud de un dipolo es más corta que un cuarto de onda, puede representarse, como en *a*), por una resistencia en serie con una reactancia capacitiva. Si la semilongitud

es más larga que un cuarto de onda, se puede representar, como en *b*), con una resistencia en serie con una reactancia inductiva. Cuando la semilongitud es igual a un cuarto de longitud de onda, *c*), la suma vectorial de las reactancias inductiva y capacitiva es igual a cero, por lo que la impedancia de entrada se representa como una resistencia sola y decimos que la antena está en "resonancia".

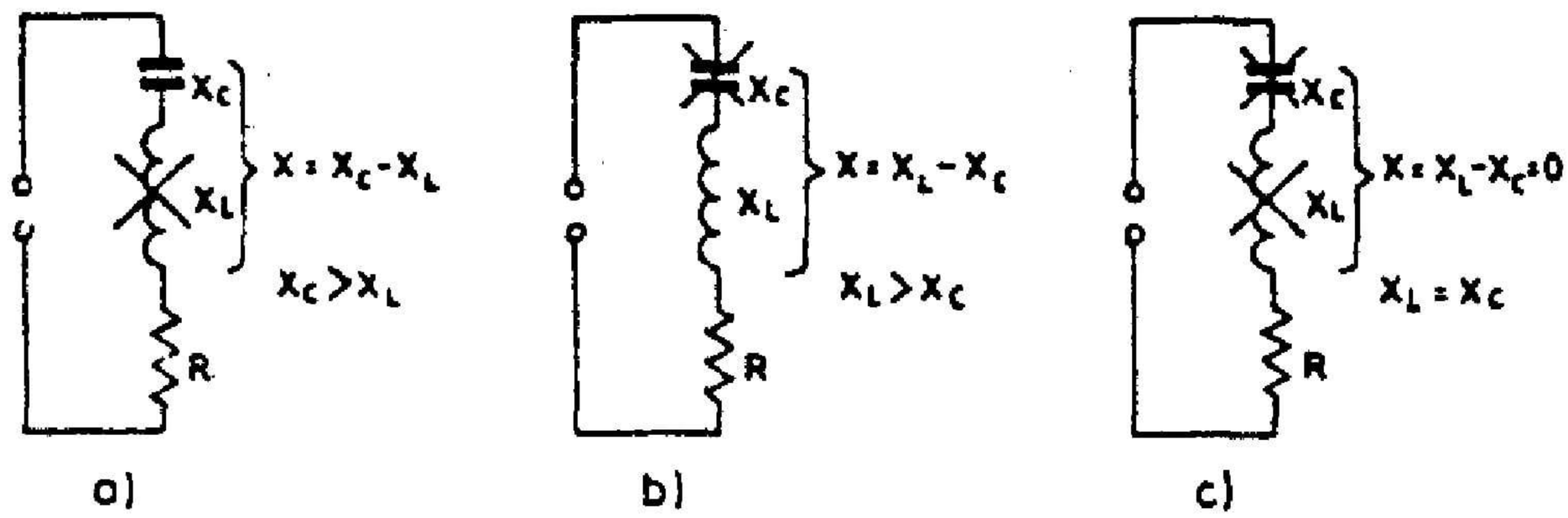


FIGURA 15-3

En los casos en que la semilongitud tiene dimensiones cercanas al cuarto de onda, el circuito de constantes concentradas se representa con sus elementos dispuestos en serie. Cuando estas dimensiones están en la vecindad de la media longitud de onda, los elementos se disponen en paralelo.

Asimismo decimos que un dipolo es resonante cuando sus elementos se disponen como un circuito resonante *serie* y, por otro lado, un dipolo es antirresonante cuando sus elementos se disponen como un circuito resonante *paralelo* (Figura 15-4).

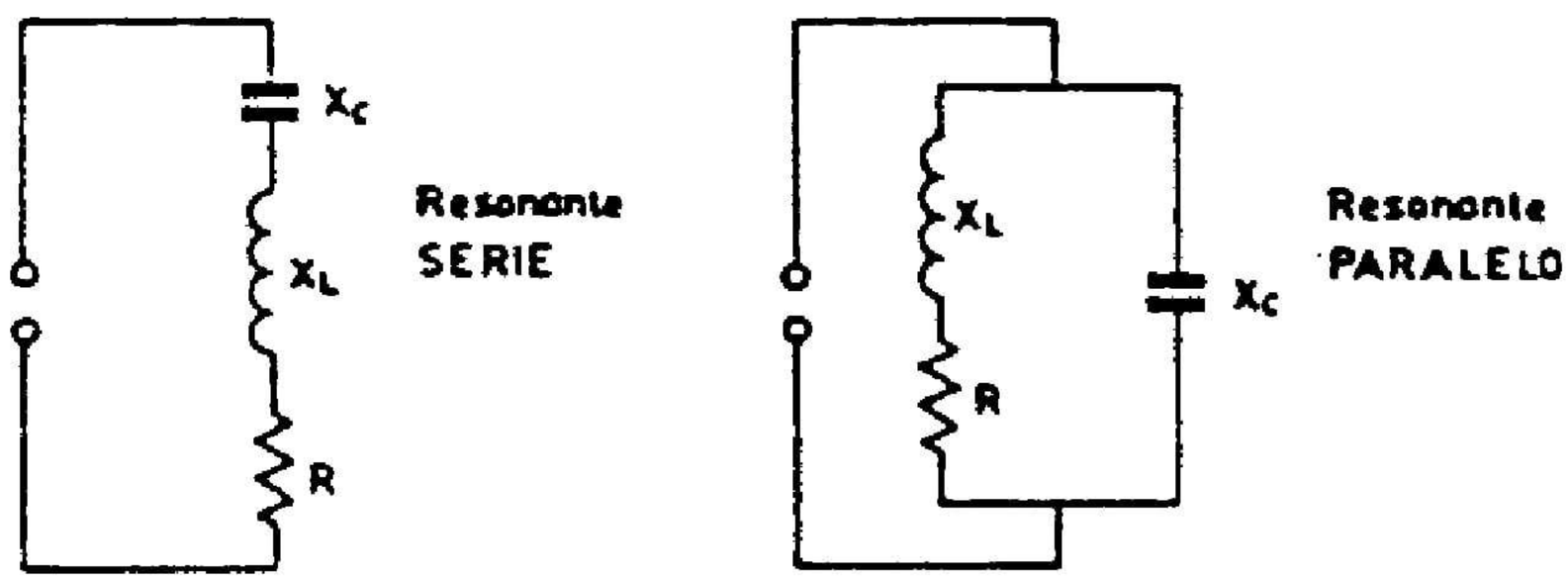


FIGURA 15-4

La parte real de la impedancia de entrada compleja es la *resistencia de entrada* que se determina por:

$$R_e = \frac{Z_o}{2}\left(\frac{senh(2\alpha H)}{\cosh^2(2\alpha H) - \cos^2(\beta H)}\right)$$

o bien por,

$$R_e = Z_o\left(\frac{senh(2\alpha H)}{\cosh(2\alpha H) - \cos(2\beta H)}\right)$$

Esta R_e corresponde a la resistencia de radiación referida al punto de alimentación de la antena, cuando ésta se comporta como un circuito resonante serie.

Asimismo, la parte imaginaria de la impedancia compleja de entrada es la *reactancia de entrada* que se determina por:

$$X_e = \frac{Z_o}{2}\left(\frac{-sen(2\beta H)}{\cosh^2(\alpha H)-\cos^2(\beta H)}\right)$$

o bien por,

$$X_e = Z_o\left(\frac{-sen(2\beta H)}{\cosh(2\alpha H)-\cos(2\beta H)}\right)$$

Recordemos que α *H* es la atenuación en nepers vista en el apartado 15.2.5.

Cuando X_e tiene signo negativo, la reactancia es capacitiva. En caso contrario, es inductiva.

El módulo de la impedancia de entrada es,

$$Z_e = \sqrt{R_c^2 + X_c^2}$$

Se puede determinar directamente por:

$$Z_e = Z_o \frac{\sqrt{senh^2(2\alpha H)+sen^2(2\beta H)}}{\cosh(2\alpha H)-\cos(2\beta H)}$$

15.2.12. Directividad

Cuando se realizan estudios de radiación de una antena, se supone que su punto medio esté situado en el origen de un sistema de coordenadas de tres dimensiones, tal como se ilustra en la figura 15-5. Estos estudios están destinados a calcular los valores de los campos eléctrico (*E*) y magnético (*H*) en un punto (*P*) alejado de la antena, cuya situación viene determinada por dos ángulos, θ y ϕ (theta y phi) y una distancia *r*, en función de una determinada potencia radiada.

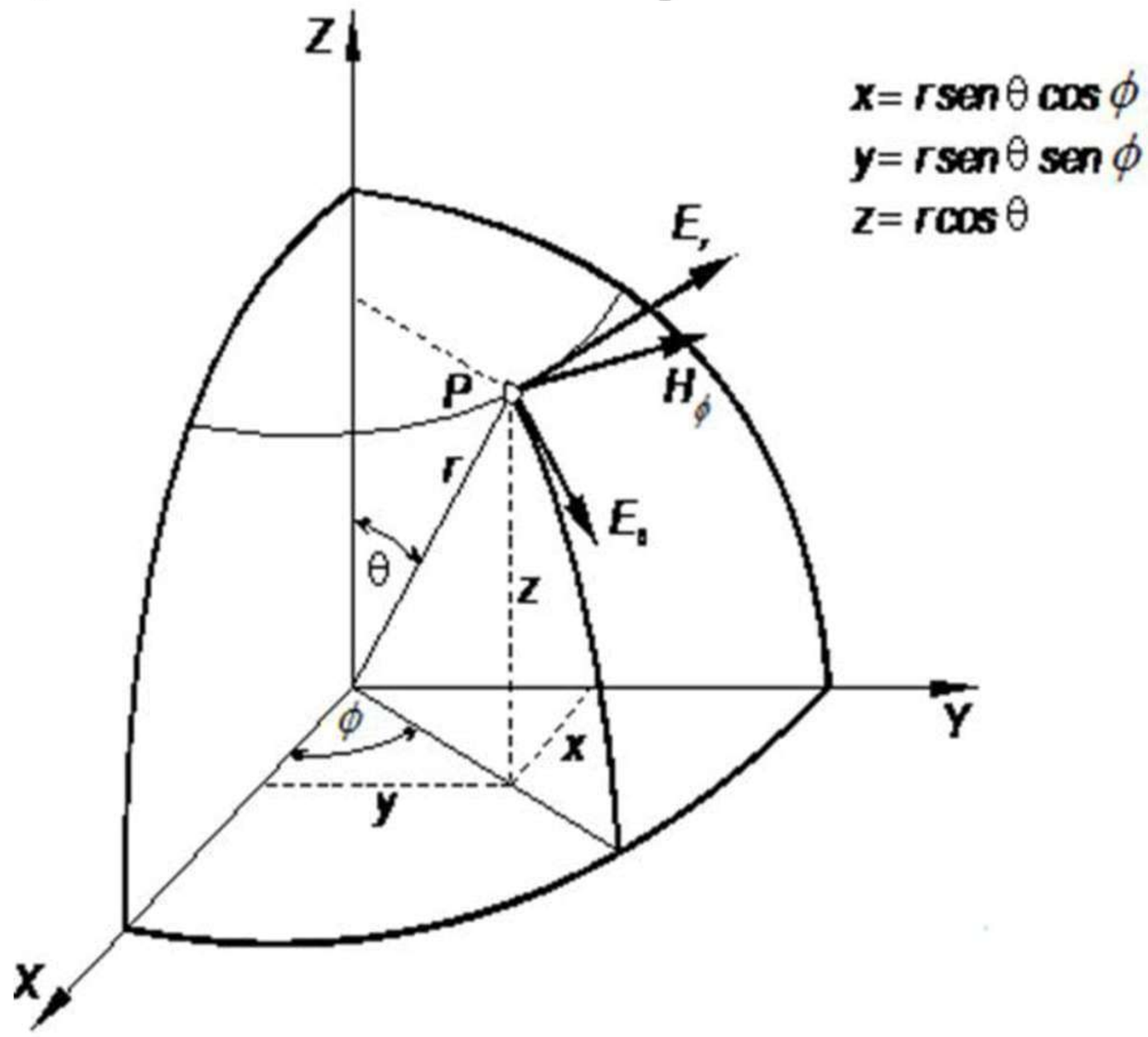


FIGURA 15-5

Dado que una antena, por elemental que sea, no radia uniformemente en todas las direcciones (sólo lo hace el radiador isotrópico que es un radiador hipotético), si se desplaza el punto *P* por la superficie de la esfera en la cual está situado y que tiene un radio *r* (distancia del centro de la esfera a *P*), obtendremos diversos valores de *E* y *H*.

La facultad de una antena para concentrar la energía de estos campos en uno o varios sectores de la esfera recibe el nombre de *ganancia directiva* $\left(G_d\right)$, que, como vemos en la figura 15-5, es función de los ángulos θ y ϕ.

La directividad (*D*) de una antena es su ganancia directiva en la dirección de radiación máxima $\left(G_{d\,\max}\right)$.

Estos valores son función de la potencia media *radiada*.

Cuando son función de la potencia total de entrada a la antena, el resultado es la *ganancia en potencia* $\left(G_p\right)$.

Es obvio que si toda la potencia de entrada es radiada, la "ganancia directiva" es igual a la "ganancia en potencia" y el rendimiento de la antena será de 100%.

Cuando se generaliza, el concepto de *ganancia de antena* se refiere indistintamente a la ganancia directiva máxima o a la ganancia en potencia; sin embargo, estos conceptos hay que distinguirlos en antenas eléctricamente cortas y en las directivas.

La ganancia directiva es función de la longitud o altura efectivas y la resistencia de radiación.

La ganancia de una antena se suele comparar con la de un dipolo de media longitud total de onda o con la de un monopolo de cuarto de longitud de onda, utilizados como patrón y se puede expresar en valores absolutos o en decibelios.

La ganancia directiva máxima de un dipolo en función de su resistencia de radiación y su longitud eléctrica (semilongitud *H*) es, en el supuesto de que la potencia radiada sea 1 vatio y medida la intensidad de campo a una distancia unidad,

$$G_{d\max} = \frac{120}{R_{rv}}\left[1-\cos\left(\alpha H\right)\right]^2$$

Esta fórmula sirve también para el monopolo.

Si consideramos la potencia de alimentación a la antena en vez de la potencia radiada, obtenemos la ganancia en potencia G_p.

Su relación con $G_{d\max}$ es:

$$G_{p\max} = G_{d\max} \times \text{ rendimiento de antena (tanto por uno).}$$

Usualmente, la ganancia de una antena se compara con la ganancia de un dipolo de media onda (2*H*) o de un modelo de cuarto de onda, según sea la antena considerada, y se da en dB.

La $G_{d\max}$ de un radiador isotrópico es: 1 (valor absoluto)

La $G_{d\max}$ de un radiador elemental es: 1,5 (valor absoluto)

La $G_{d\max}$ de un dipolo de media onda es: 1,64 (valor absoluto)

La $G_{d\max}$ de un monopolo de ¼ de onda es: 3,28 (valor absoluto)

La ganancia en dB de una antena será:

$$G = 10\log\frac{G_{d\max}\ \text{de antena en prueba}}{G_{d\max}\ \text{de antena patron}}$$

Se puede construir una tabla como la 15-1 en la que se muestran los valores de la $G_{d\max}$ para dipolos de diferentes semilongitudes relacionadas con la longitud de onda (H/λ).

Asimismo, con los valores obtenidos se puede construir una gráfica para determinar los valores intermedios de H/λ.

En la figura 15-6 se ha construido la gráfica correspondiente a los valores obtenidos en la tabla 15-1 y al correspondiente monopolo, que por ser su R_{rv} mitad que la del dipolo, aumenta su $G_{d\max}$ al doble del valor de la del dipolo.

Tabla 15-1. $G_{d\ máx}$ de un dipolo de semilongitud H ($H_0 \times 1,05$)

$\frac{H}{\lambda}$	$G_{d\ máx}$	$\frac{H}{\lambda}$	$G_{d\ máx}$	$\frac{H}{\lambda}$	$G_{d\ máx}$
0,125	1,6	0,325	1,76	0,525	2,56
0,150	1,56	0,350	1,8	0,550	2,75
0,175	1,55	0,375	1,87	0,575	2,95
0,2	1,59	0,4	1,96	0,6	3,24
0,225	1,58	0,425	2,05	0,625	3,33
0,25	1,64	0,450	2,15	0,650	3,25
0,275	1,67	0,475	2,25	0,675	2,91
0,3	1,71	0,5	2,41	0,7	2,41

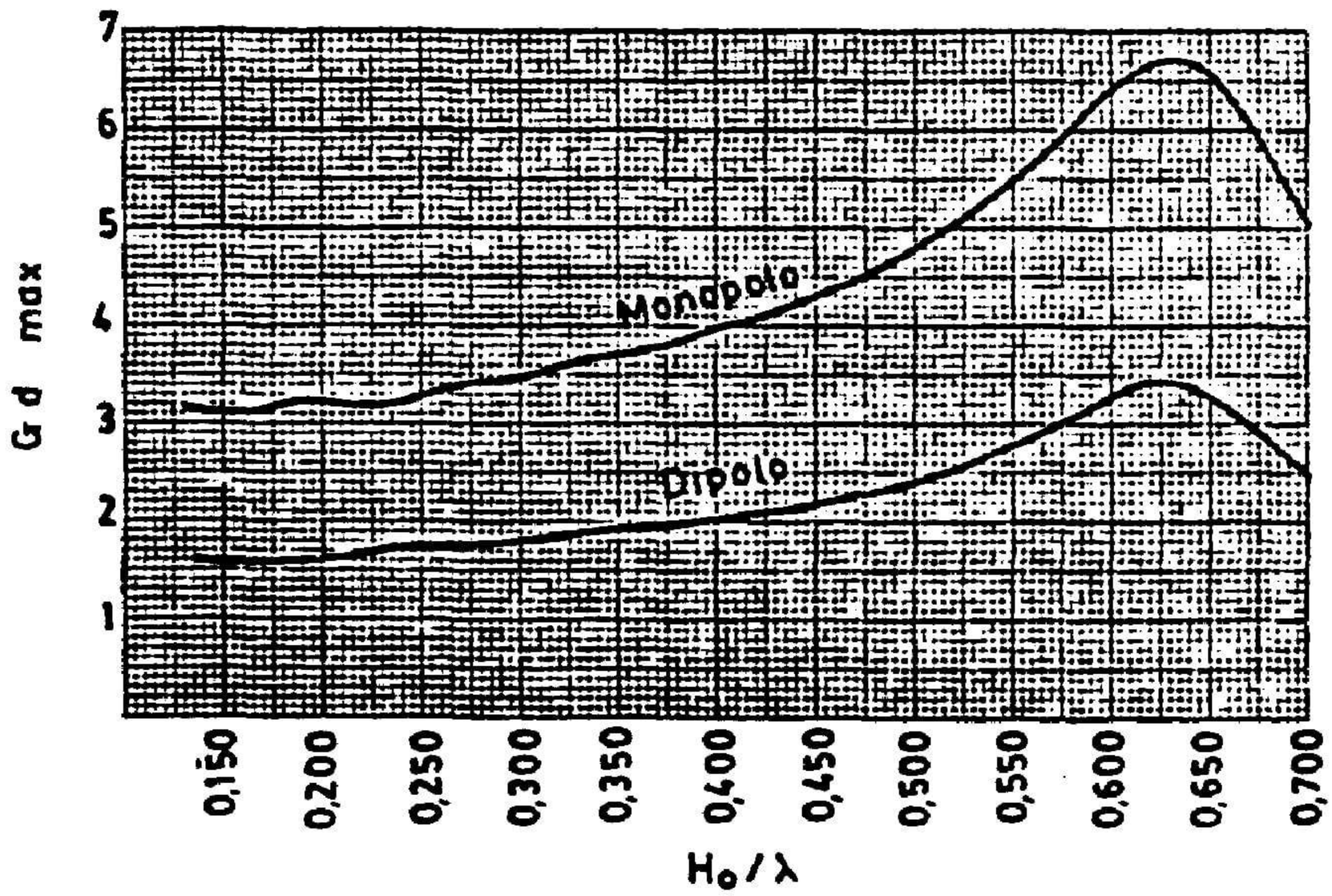


FIGURA 15-6

Para construir la gráfica de directividad de un dipolo de semilongitud H o monopolo de altura H, se emplea la fórmula de cálculo de la intensidad de campo eléctrico (potencia radiada = 1 W, a una distancia $r = 1$)

$$E = \frac{60}{R_{rv}}\left[\frac{\cos(\beta H) - \cos(\beta H \cos\theta)}{sen\theta}\right]$$

El resultado de aplicar valores al ángulo θ de 5 en 5 grados (o su equivalente en radianes) entre 0 y 360 grados en el segundo factor

$$\frac{\cos(\beta H) - \cos(\beta H \cos\theta)}{sen\theta} \qquad \text{Factor de Campo}$$

de la fórmula de E (también llamado "factor de campo"), que nos ha permitido construir la gráfica de la figura 15-7

Siendo θ el ángulo polar entre el eje de la antena y la dirección considerada

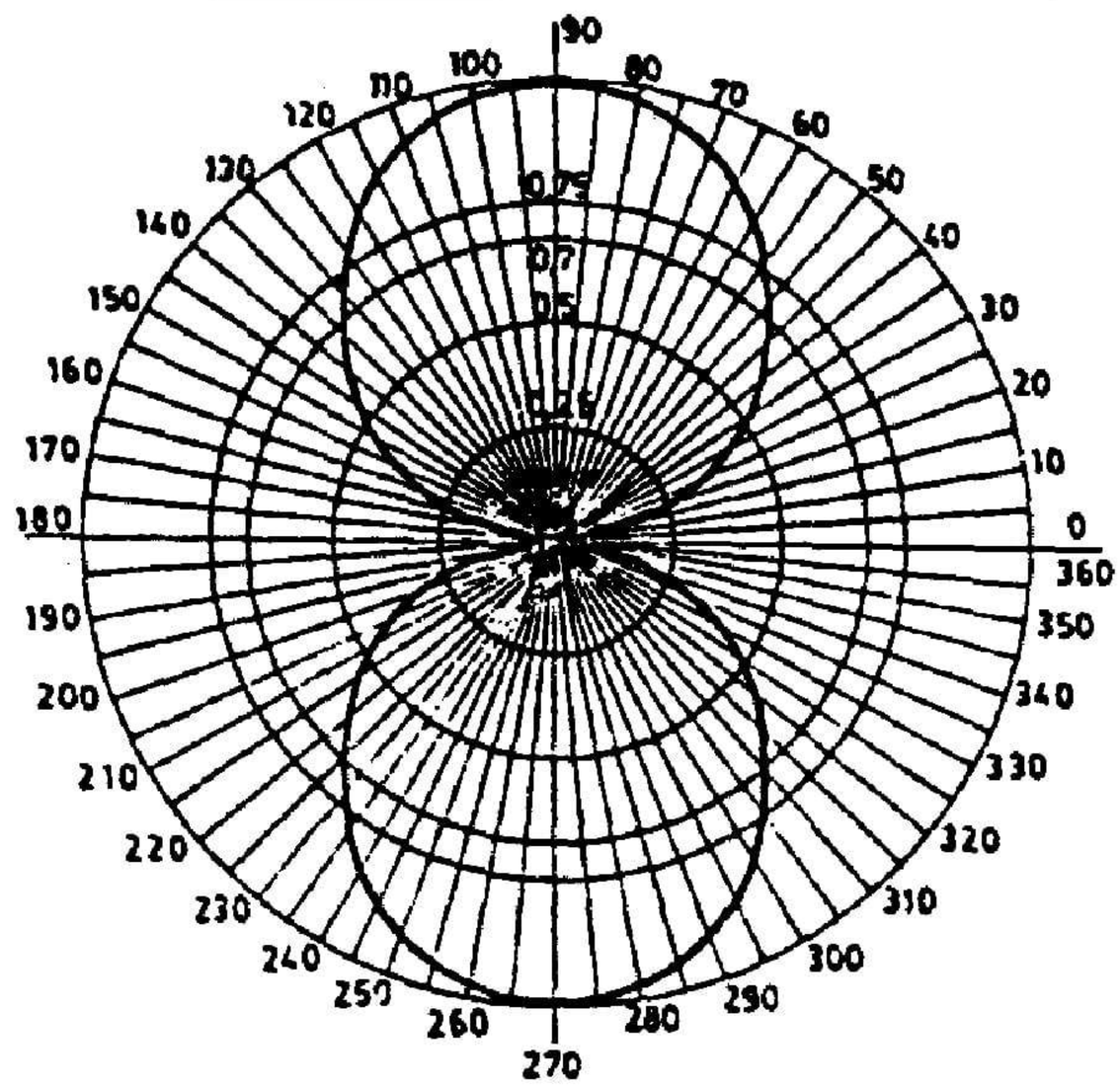


FIGURA 15-7: Diagrama de Radiación

Observando la gráfica de la figura 15-7 también determinamos la *anchura del lóbulo* que es aquella que está comprendida entre valores de 0,7 del máximo (en este caso corresponde a la zona comprendida entre los ángulos 50-130 y 230-310 o sea, 80º cada lóbulo).

15.2.13. Área efectiva

Cuando una antena se considera receptora, una expresión que tiene un significado especial, es el *área efectiva* llamada a veces "apertura efectiva".

Se define como "la razón de la potencia disponible en los terminales de antena a la potencia por unidad de área de una onda polarizada adecuadamente".

Es función de G_d si la antena no tiene pérdidas (rendimiento de 100%). Si la antena es eléctricamente corta, tiene pérdidas, o es directiva, es función de la G_p .

Se determina en función de la $G_{d\max}$ por:

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} \text{ x } G_{d\max}\ m^2$$

15.3. EFECTO DIRECCIONAL DE LAS ANTENAS

Ya se ha dicho anteriormente que un dipolo tiene una característica radial horizontal que se asemeja a un 8. La antena radia, pues, con la máxima intensidad hacia la derecha e izquierda de la figura. De igual forma, en el caso de antenas receptoras, capta a su vez con la máxima intensidad las señales procedentes de la derecha o izquierda, ya que toda antena tiene siempre propiedades emisores y receptoras.

Si se coloca paralelamente al dipolo un elemento *R* que no esté eléctricamente unido a la línea de antena, éste hace las funciones de *reflector*. Con esta disposición se deforma la característica radial de la antena *alargándose hacia la derecha.* Si se trata de una antena receptora, ésta captará mejor las señales procedentes de la derecha y empeorará la recepción de las señales procedentes de la izquierda. Añadiendo pues un elemento reflector a la antena ésta se hace *direccional*, es decir, mejora la recepción cuando se encuentra enfocada hacia una dirección determinada.

A grandes rasgos, el funcionamiento de una antena dipolo dotada de elemento reflector es como sigue: Las ondas procedentes de la emisora *E* inducen en el dipolo y en el reflector sendas corrientes de antena. Toda antena que sea recorrida por una corriente inducida o aplicada a ella se convierte en antena emisora, radiando parte de la energía de alta frecuencia recibida. El dipolo capta, pues, no sólo la onda procedente de la emisora, sino también a la radiada nuevamente por el elemento reflector. El reflector capta, a su vez, dos radiaciones, una procedente de la emisora y otra procedente del dipolo, surgiendo así una diferencia de fase entre las corrientes inducidas.

Como consecuencia de todo ello, para las ondas procedentes de *E* las corrientes que se inducen en el dipolo *se suman*, mientras que para las ondas procedentes de la dirección opuesta las corrientes que se inducen en el dipolo *se anulan* casi totalmente.

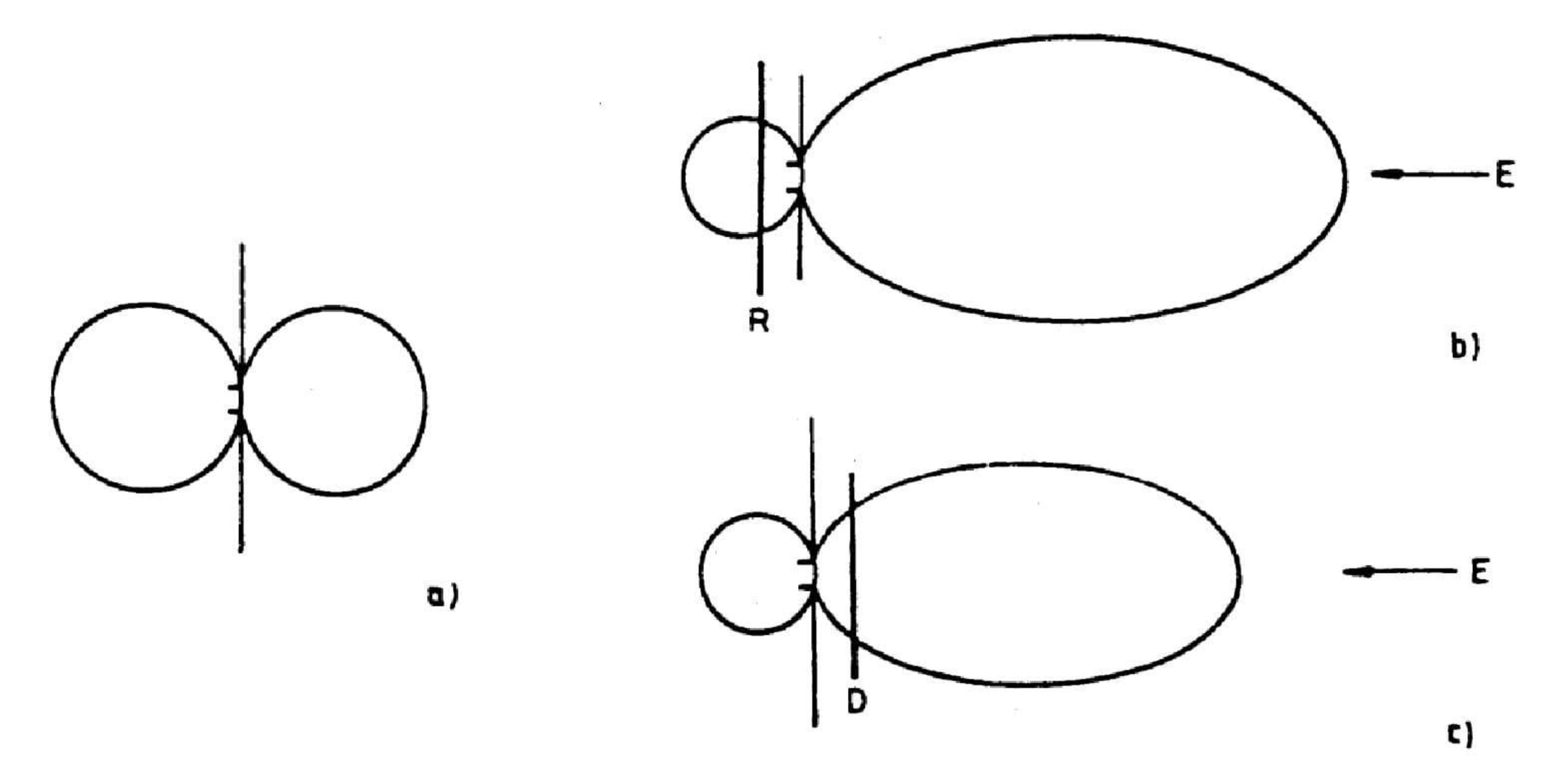


FIGURA 15-8: Característica radial horizontal: a) De un dipolo. B) De un dipolo dotado de un elemento reflector. c) De un dipolo dotado de un elemento director *D* entre él y la emisora.

Observe que el elemento reflector *R* es algo más largo que el dipolo; es decir, está ajustado o sintonizado a una frecuencia de resonancia algo inferior y a la del dipolo. Esto se hace así con el fin de que la tensión y la corriente tengan distinta fase.

Otro sistema de obtener un efecto direccional de la antena es colocar frente al dipolo, entre éste y la emisora, un elemento algo más corto que la antena dipolo y que recibe el nombre de *director*. Este elemento, en cierto modo, *dirige* las ondas hacia el dipolo. A una antena dipolo se la puede equipar con muchos directores, obteniéndose así una antena de varios elementos o *antena Yagi*.

El efecto direccional de una antena se expresa por la relación antero-posterior. Para obtener esta relación se mide la tensión de recepción cuando la antena está dirigida exactamente hacia el emisor. A continuación se hace girar la antena 180º y se mide de nuevo la tensión de recepción. La relación entre estas dos tensiones corresponde entonces a la llamada relación antero-posterior, o *delante-detrás* (como ya se ha mencionado).

En una antena dipolo sin ningún elemento reflector ni director la relación antero-posterior es de 1:1, puesto que la característica de radiación o recepción es idéntica en las dos direcciones.

En un dipolo dotado de elemento reflector la relación antero-posterior es de aproximadamente 3:1, y en un dipolo con reflector y director de 6:1.

La relación antero-posterior generalmente se expresa en decibelios, mediante la fórmula:

$$dB = 20 \text{ x } \log \frac{A}{P}$$

Así, en el caso de una antena dipolo con elemento reflector y director, cuya relación antero-posterior hemos cifrado en 6:1, esta misma relación expresada en decibelios será:

$$20 \text{ x } \log \frac{6}{1} = 20 \text{ x } \log 6 = 20 \text{ x } 0,7782 \approx 16dB$$

15.4. DIPOLO DE ONDA CORTA

Las antenas de onda corta se subdividen en *a*) lineales y *b*) de ondas superficiales; la diferencia consiste en los métodos de excitación. Para las antenas lineales, la alimentación se efectúa mediante la formación de una onda estacionaria, como sucede en el dipolo y en los arreglos de dipolos. Para alimentar las antenas de ondas superficiales se emplean bocinas y guías de onda, como en el caso de la antena parabólica. Estas antenas se comportan como sistemas ópticos, pues forman patrones de difracción.

En el caso que se cuente con dipolos de onda corta para la alimentación, se utilizan de dos tipos *a*) el dipolo simple, y *b*) el dipolo compuesto.

El dipolo simple es un elemento con 0.476 λ de longitud y radio *a* (figura 15-9(a)), excitado en el centro como se muestra en la figura.

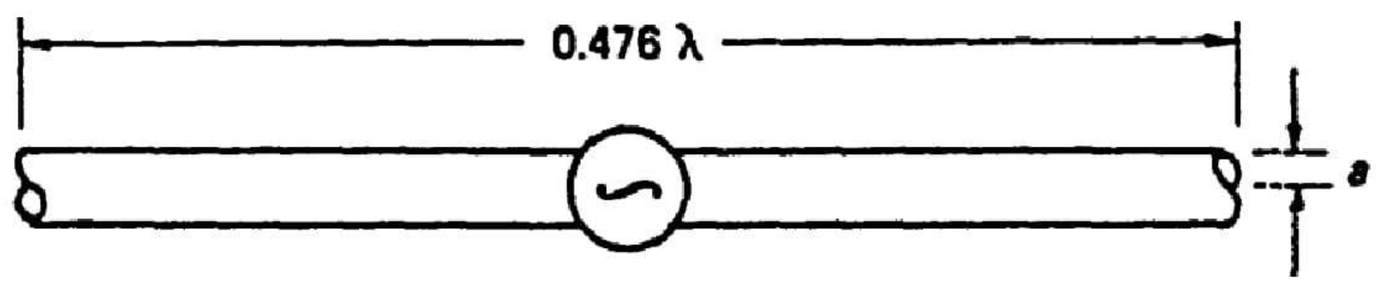


FIGURA 15-9(a): Dipolo simple

$$0,5\ \lambda\ /\ 1,05 = 0,476\ \lambda \qquad \Rightarrow \qquad 5\ \%\ \text{más corta}$$

El radio de la varilla se selecciona tomando en cuenta la impedancia característica en el punto de excitación del elemento, dada por la ecuación 2.21:

$$Z_o = 120\left[\ln\left(\frac{2H}{a}\right) - 1\right]$$

El dipolo compuesto o doblado (fig.15-9(b)) consta de dos dipolos conectados en paralelo, lo cual permite duplicar la potencia de recepción y utilizar la línea bifilar de 300 ohms para la alimentación.

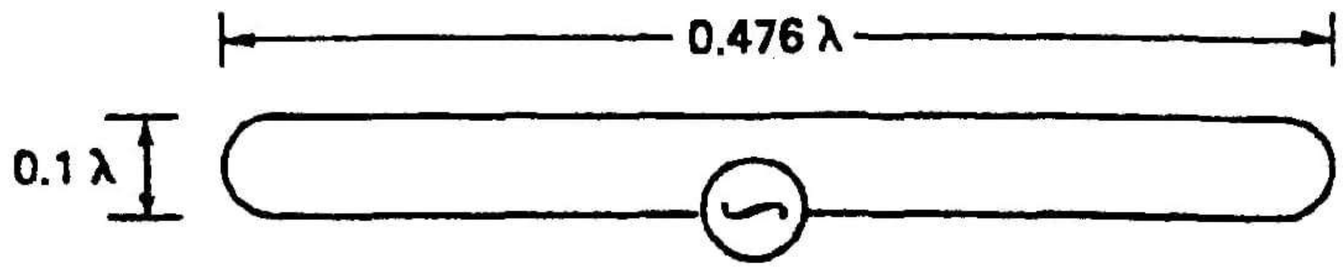


FIGURA 15-9(b): Dipolo compuesto o doblado.

Supóngase que R_{11} y R_{22} son las resistencias propias de cada varilla y que R_{21} y R_{12} son las resistencias mutuas. Si las varillas son del mismo diámetro y están muy próximas entre sí, se cumple que

$$R_{11} = R_{22} = R_{12} = R_{21}$$

entonces

$$W_1 = \left(R_{11} + R_{12}\right) I_1^2$$

$$W_2 = \left(R_{22} + R_{21}\right) I_2^2$$

donde I_1 e I_2 son las corrientes (de igual magnitud) en cada elemento. La potencia total W_t será

$$W_t = W_1 + W_2 = 4 R_1 I_1^2$$

Como el elemento de un dipolo con R_1 = 73.5 ohms, se tiene:

$$W_t = 4 \text{ x } 73.5 I_1^2,$$

de donde la resistencia equivalente es

4 x 73.5 = 292.4 ohms.

15.5. ANTENA YAGI

Las antenas Yagi comprenden una serie de elementos: directores, activos y reflectores. Los elementos directores dirigen el campo eléctrico, los activos radian el campo y los reflectores lo reflejan.

Los elementos no activados se denominan parásitos. La antena Yagi puede tener varios elementos activos y varios parásitos. Su ganancia está dada por

$$G = 10 \log n dB, \qquad [15\text{-}1]$$

donde *n* es el número de elementos por considerar.

Para la antena Yagi de tres elementos la distancia entre el reflector y el activo es de 0.15 λ, y entre el activo y el director es de 0.11 λ. Estas distancias de separación entre los elementos son las que proporcionan la óptima ganancia, ya que de otra manera los campos de los elementos interferirían destructivamente entre sí, bajando la ganancia.

Las figuras 15-10 a 15-13 proporcionan las longitudes de los elementos y la separación entre ellos para el funcionamiento con ganancia óptima de varias antenas Yagi.

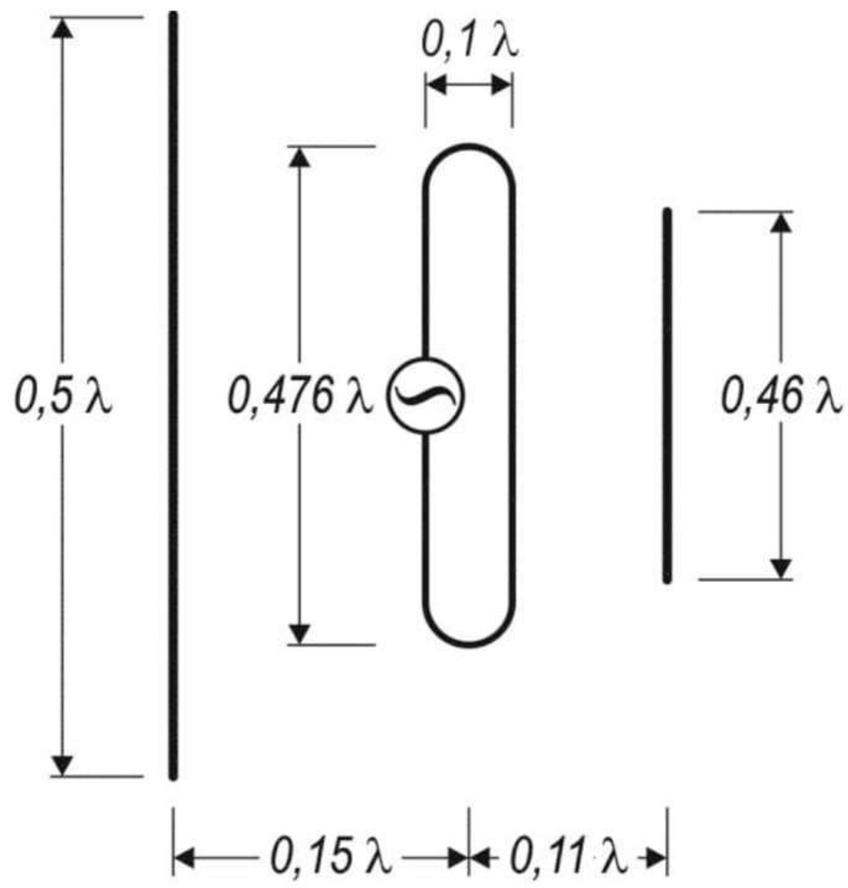


FIGURA 15-10: Antena Yagi de tres elementos.

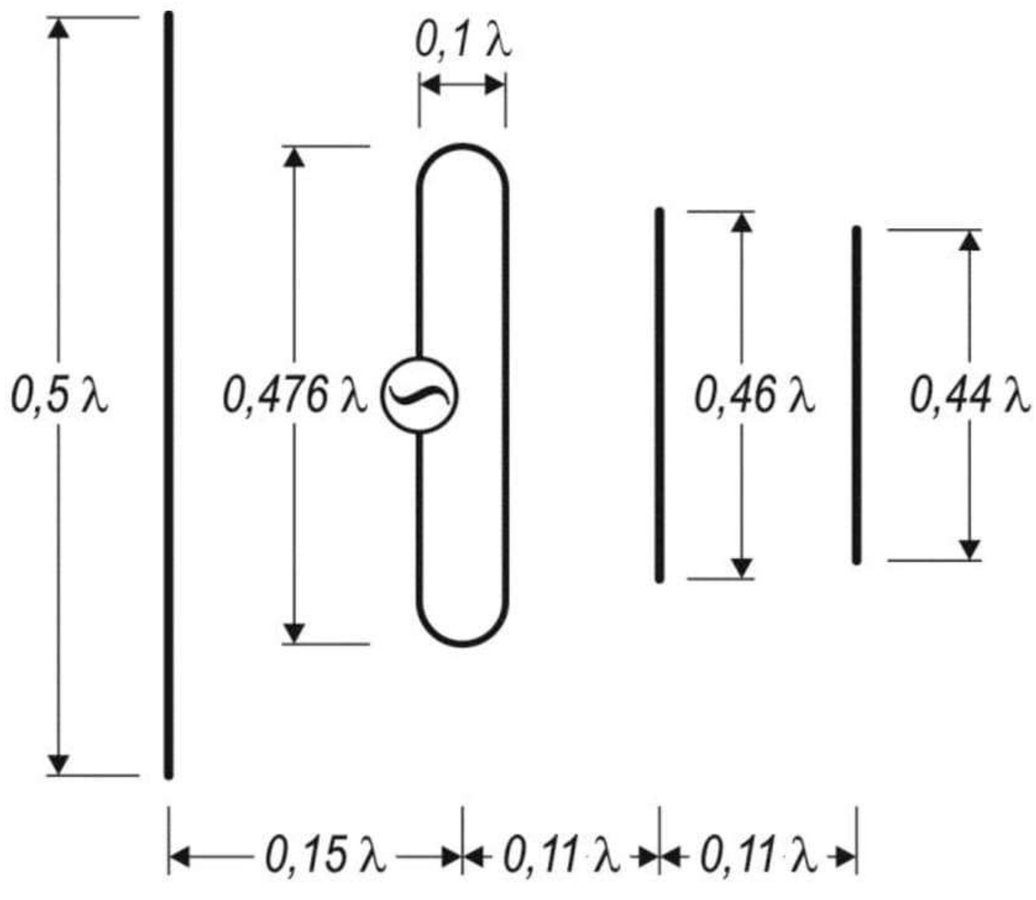


FIGURA 15-11: Antena Yagi de cuatro elementos.

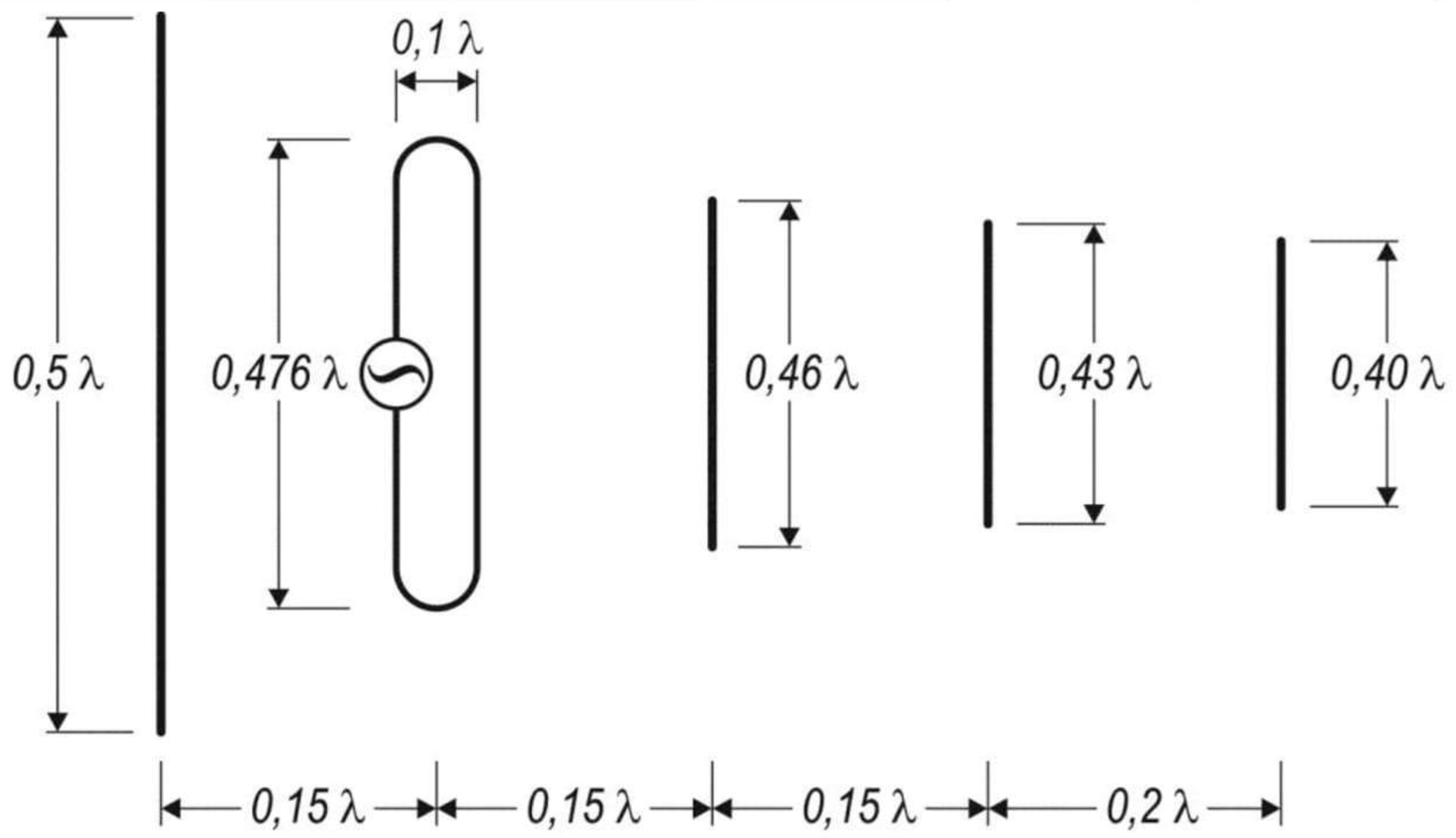


FIGURA 15-12: Antena Yagi de cinco elementos.

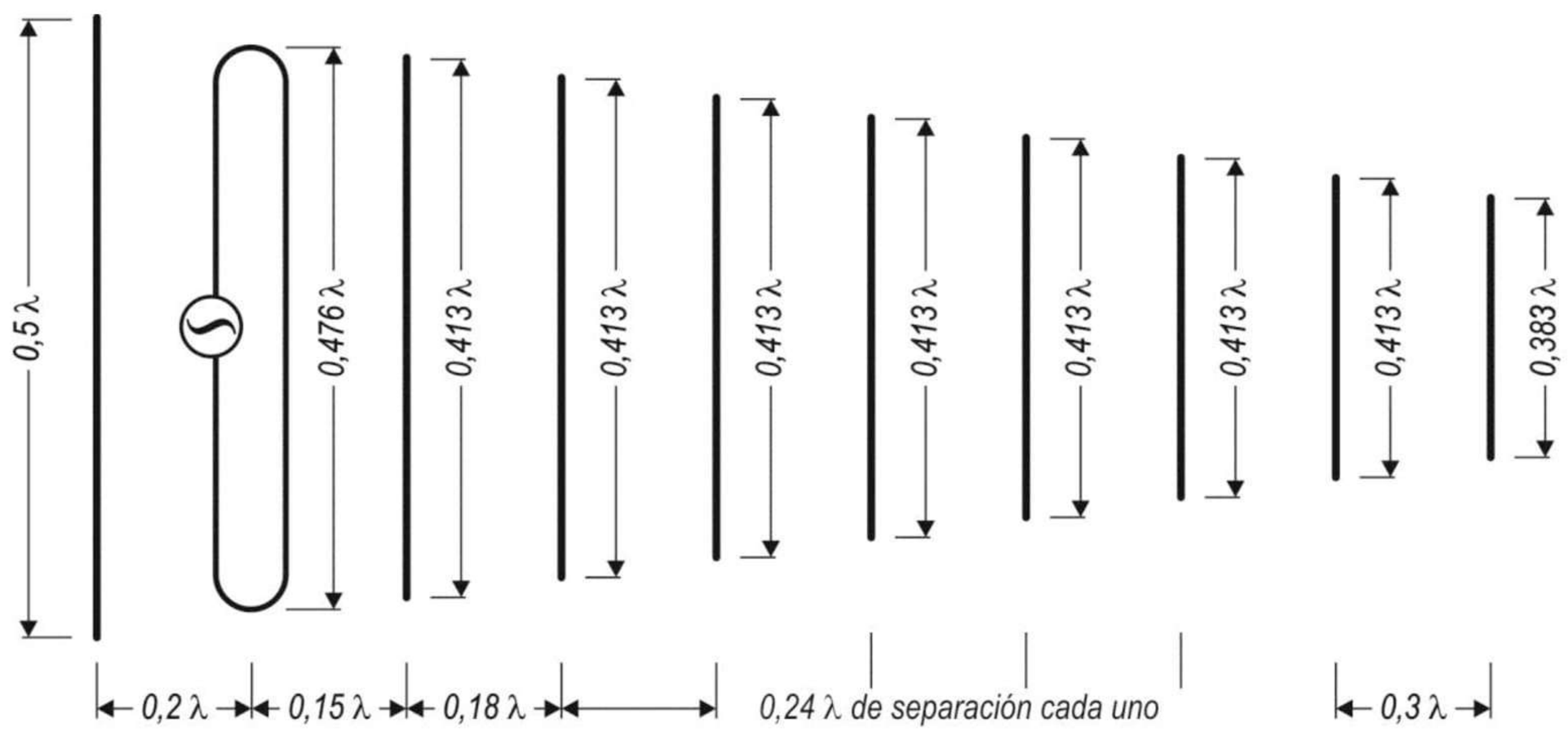


FIGURA 15-13: Antena Yagi de diez elementos.

15.6. ASOCIACIÓN DE DOS ANTENAS EN PARALELO

Para duplicar la ganancia pueden colocarse dos antenas en paralelo, como se muestra en la fig.15-14. En este tipo de arreglos es importante la separación adecuada entre las antenas para evitar la interferencia mutua.

Las antenas utilizadas pueden tener el número de elementos que se desee, pero dicho número debe ser el mismo para ambas.

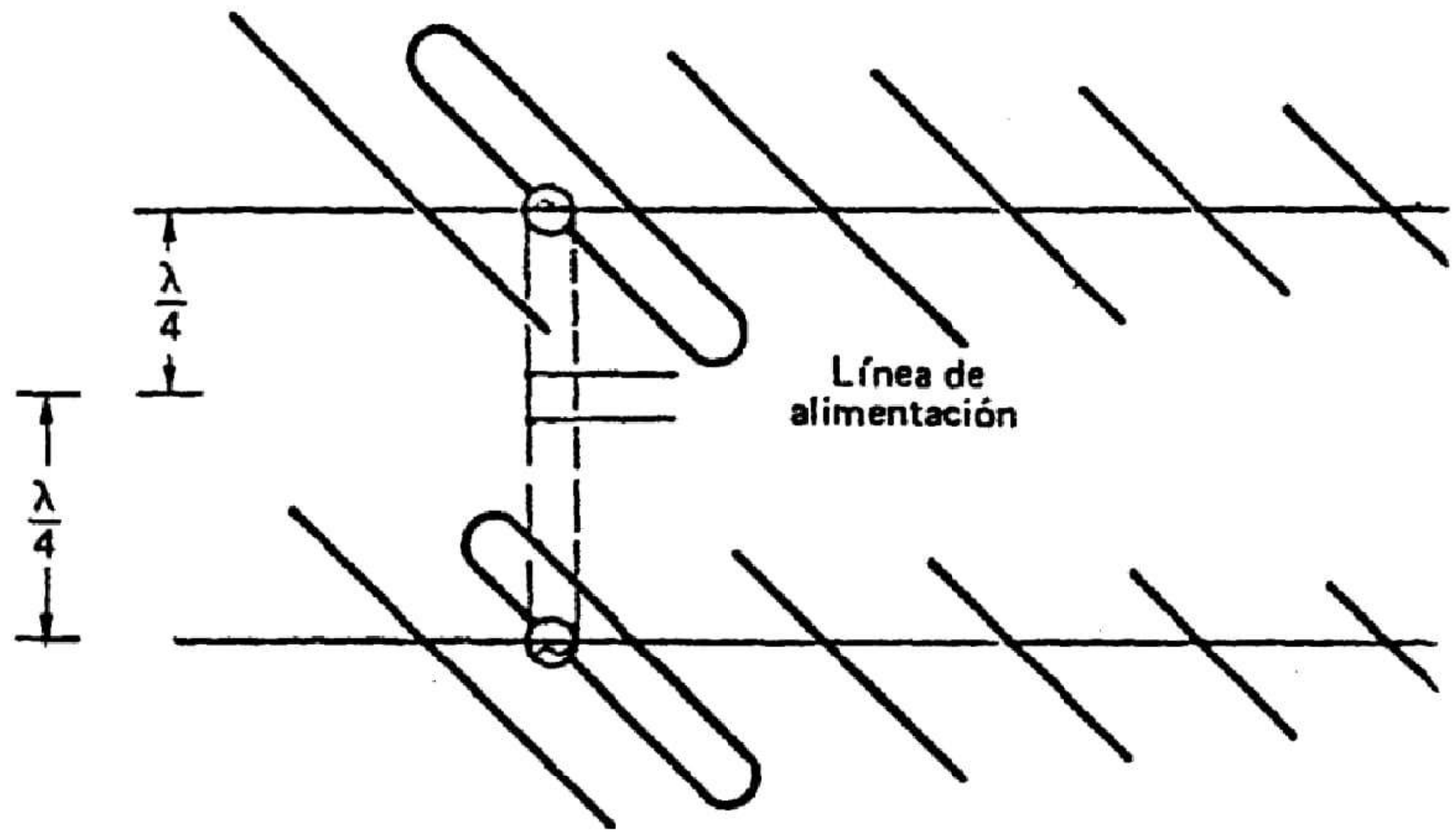


FIGURA 15-14: Asociación de antenas en paralelo.

15.7. POLARIZACIÓN DE UNA ANTENA

El término *polarización*, aplicado a una antena, se refiere a la *dirección* de los campos magnético y eléctrico de dicha antena. La polarización de una antena está determinada por la dirección del plano de la onda eléctrica. Así, una antena *horizontal* con respecto a la superficie de la tierra produce un plano de onda como el que se muestra en la figura. En dicha figura puede observarse que el campo eléctrico *E* es horizontal, y por tanto se dice que dicha antena está *polarizada horizontalmente*.

Si la antena es *perpendicular* a la superficie de la tierra, producirá el pleno de ondas que se ilustra en la figura, en la que el campo eléctrico *E* es vertical. Se dice entonces que la antena está *polarizada verticalmente*.

En ambas polarizaciones, salvo la inversión de fase de 180º durante el ciclo, la dirección del campo eléctrico no varía, es decir, una onda polarizada horizontalmente permanece siempre horizontal y una onda polarizada verticalmente permanece siempre vertical.

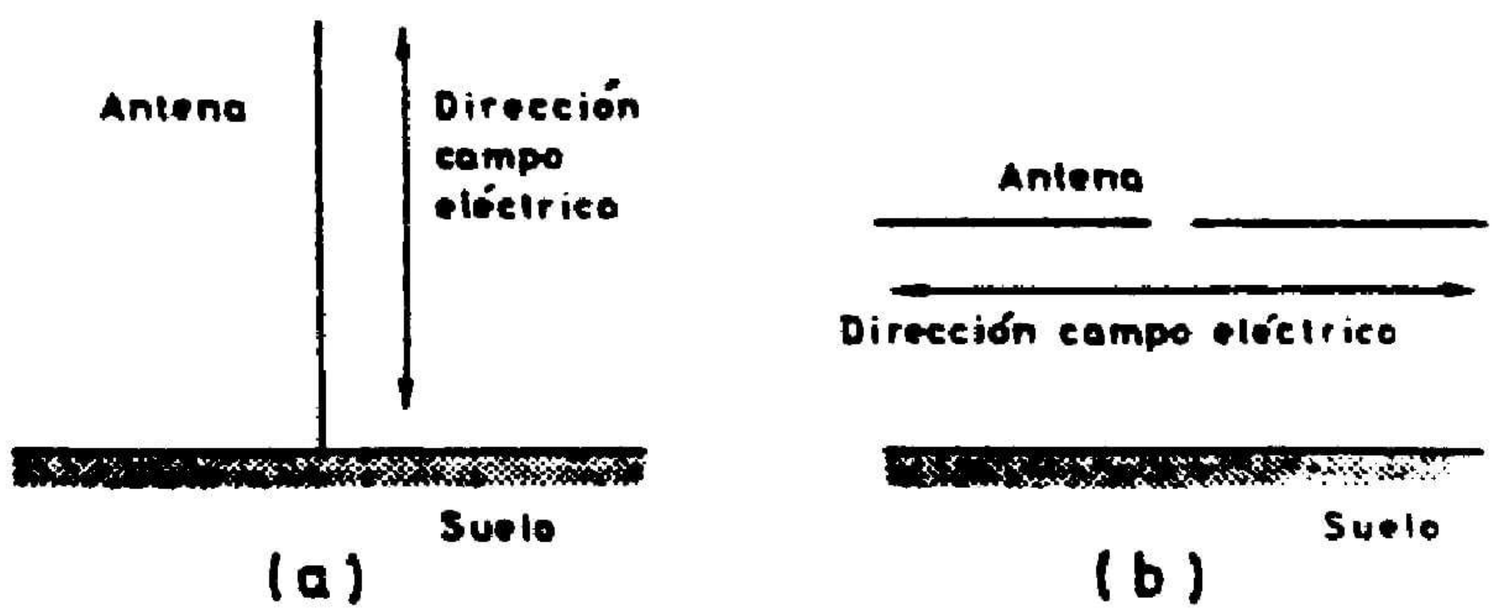


FIGURA 15-15: Diagrama de polarización de una antena: a) Posición vertical. b) Posición horizontal.

La elección de una u otra forma de polarización depende de la frecuencia de emisión y de los efectos resultantes de los modos de propagación terrestre e ionosférica. En el caso, poco frecuente en la práctica, de que la antena esté inclinada, el campo eléctrico tendrá dos componentes: una horizontal y otra vertical, de forma que su resultante será siempre *paralela* a la antena.

Existen antenas que radian con otros tipos de polarización. Entre las más conocidas se encuentran la *elíptica* y la *circular* que, además, pueden ser "a derecha" o "a izquierda", según el sentido de giro del campo eléctrico.

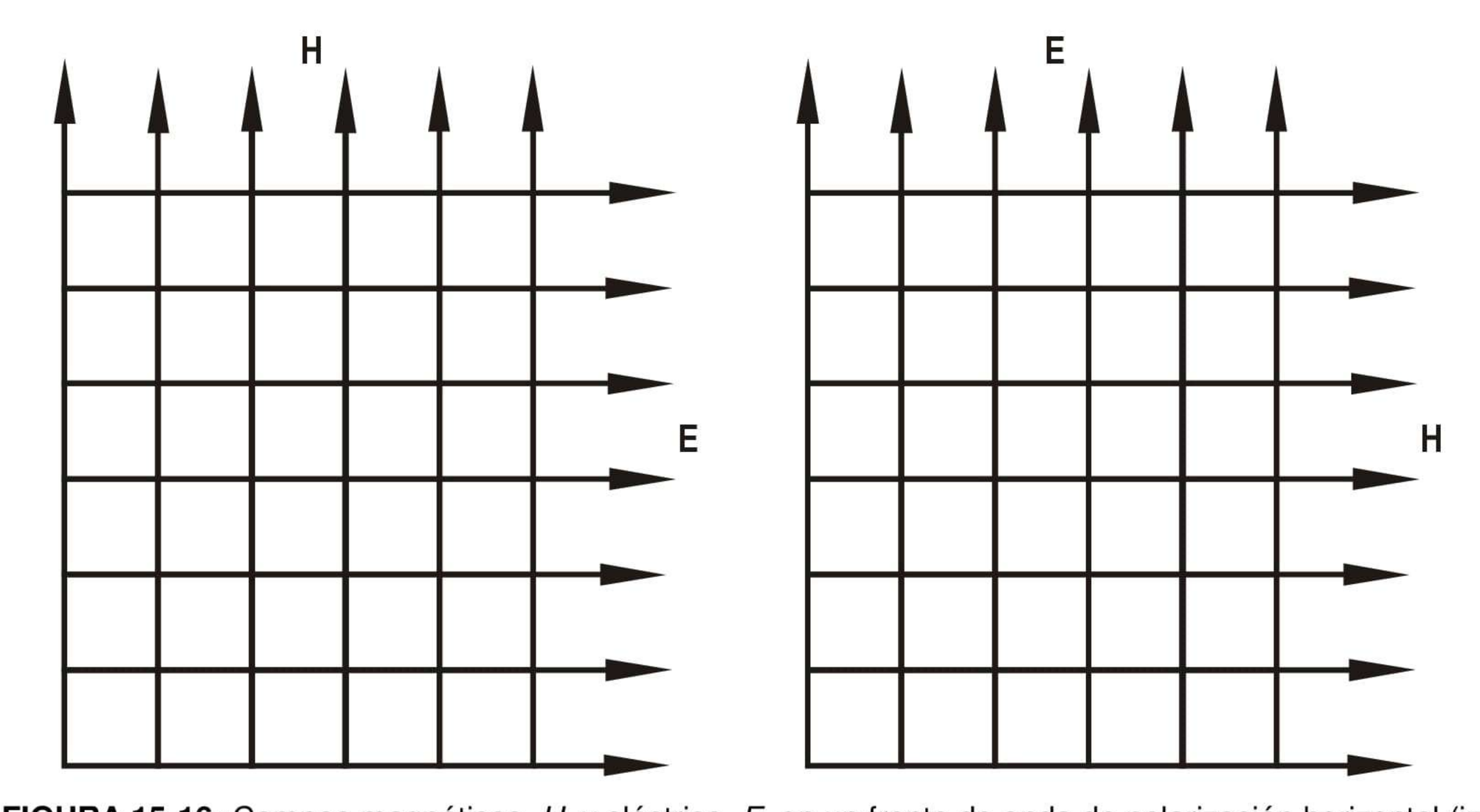


FIGURA 15-16: Campos magnéticos, *H*, y eléctrico, *E*, en un frente de onda de polarización horizontal (izquierda) y de polarización vertical (derecha).

La intensidad de campo eléctrico tiene la misma dirección que la antena. Si la antena emisora es vertical, las líneas de fuerza eléctrica son también verticales, hablándose en el caso de *polarización vertical*. Para la recepción de una onda polarizada verticalmente se necesita, pues, una antena vertical.

Dado que una antena vertical radia uniformemente en todas direcciones, resulta la más apropiada para la radio. Sin embargo, para las ondas ultracortas (emisión en FM) se utiliza la *polarización horizontal*. El motivo de esto estriba en el hecho de que la polarización horizontal proporciona menor nivel de ruidos y perturbaciones espúreas y mayor alcance en la transmisión. Por otro lado, las ondas polarizadas verticalmente son fuertemente absorbidas o reflejadas por los obstáculos existentes entre emisor y receptor.

Después de estas afirmaciones el lector seguramente se preguntará cómo entonces es posible captar ondas de radio ultracortas polarizadas horizontalmente con una antena vertical

de automóvil. El motivo de ello se encuentra en las reflecciones y refracciones de las ondas de radio, principalmente en los bordes metálicos del automóvil, lo cual lleva consigo un giro de polarización. Las ondas emitidas por la antena emisora *E*, polarizadas horizontalmente, alcanzan el canto *K*. Este canto actúa como un radiador secundario, es decir, que radia en distinta dirección una parte de la onda captada; es decir, la onda radiada por él varía su polarización y es captada por la antena *A*. Debido a que la dirección de la polarización no está definida exactamente, la tensión inducida en la antena es mucho más pequeña que lo que podría ser si la antena receptora fuera horizontal.

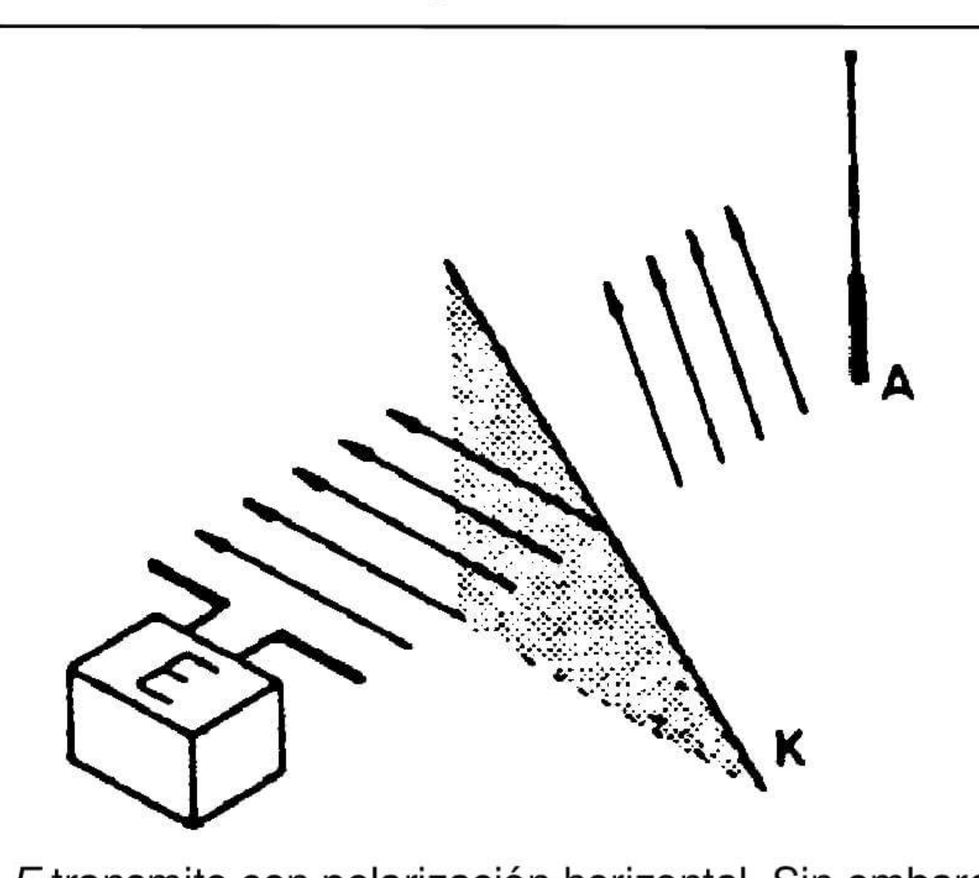


FIGURA 15-17: La emisora *E* transmite con polarización horizontal. Sin embargo, la antena vertical del automóvil la capta gracias al giro de 90º que le proporcionan a la onda las reflexiones y refracciones en los bordes metálicos del automóvil.

15.8. PLANOS DE TIERRA

Siempre que calculamos una antena práctica debemos imaginarla frente o sobre una pantalla perfectamente conductora, pero en la práctica es imposible conseguir tal pantalla, que consistiría en un círculo de cobre de diámetro infinito.

Dado que la mejor conductividad del suelo no suele corresponder a su superficie, no podemos determinar con exactitud la separación entre una antena y su imagen, por lo que los cálculos resultarán estimativos (fig.15-18).

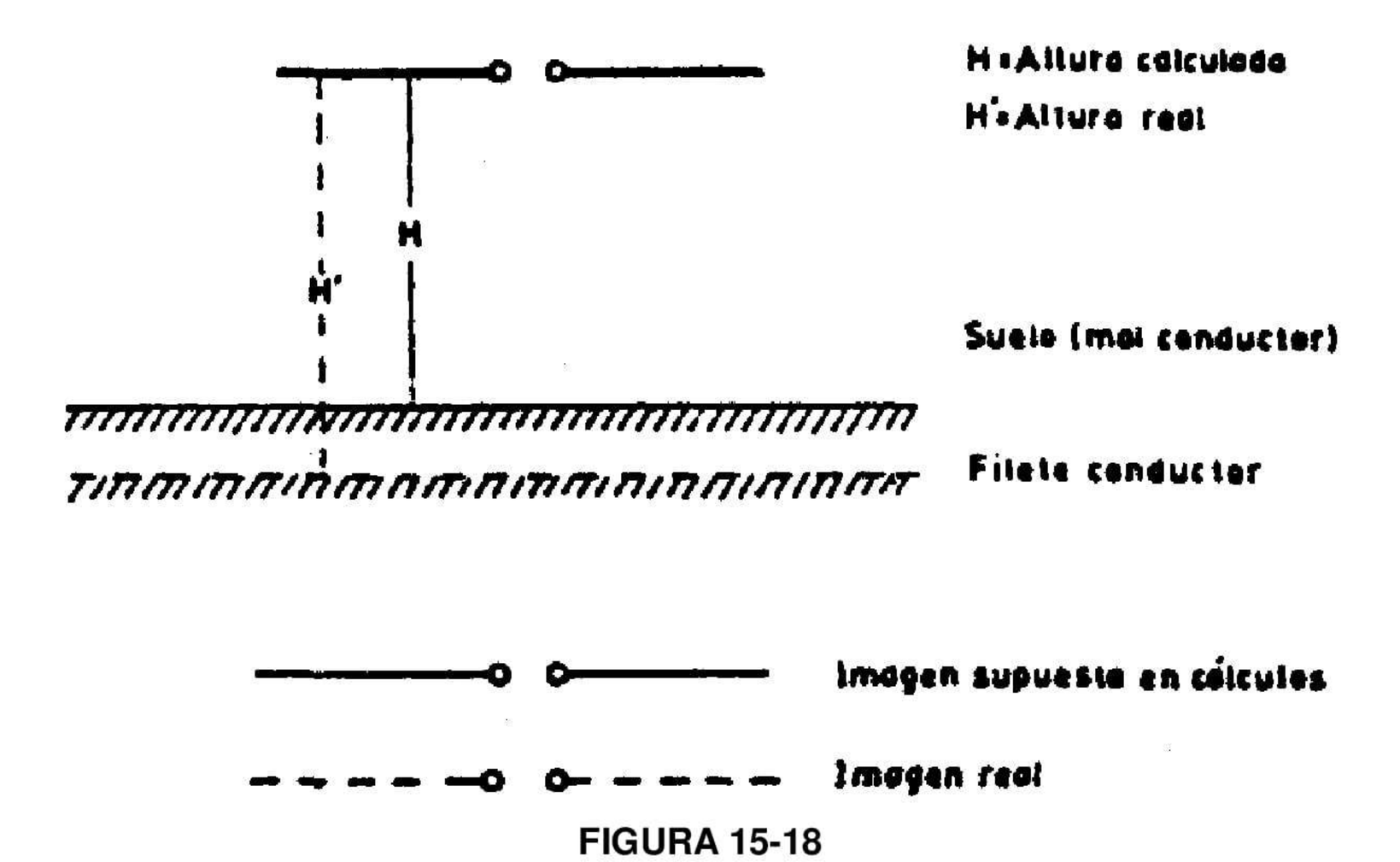


FIGURA 15-18

Asimismo, y referente a los monopolos con plano de tierra, puede ocurrir lo mostrado en la fig.15-19 en la que la resistencia de tierra se suma a la componente resistiva de la impedancia de entrada, modificando la impedancia calculada y, al mismo tiempo, dando lugar a un consumo de la potencia

aplicada que no va a ser radiada, por lo que disminuye su rendimiento y, al separarse su imagen, también se modifica su diagrama de radiación, deformándose.

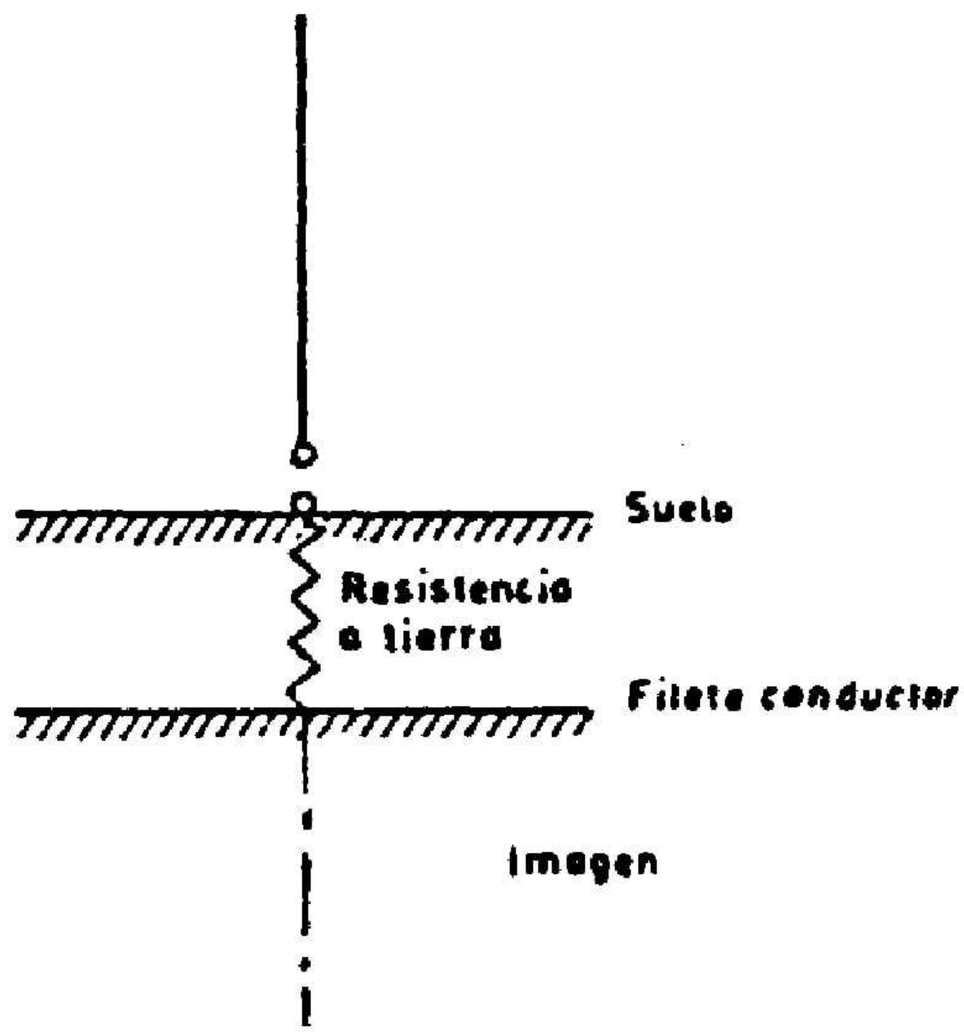


FIGURA 15-19

Para evitar esto, lo ideal sería construir una *tierra artificial* que sería el mencionado círculo de cobre. Dada su imposibilidad, recurrimos al plano de tierra o contraantena que no es más ni menos que un determinado número de líneas de transmisión abiertas y de una longitud eléctrica de cuarto de onda o múltiplos impares que presentan una impedancia muy pequeña, por ser resonantes en serie a la frecuencia de trabajo y estar puestas en paralelo con la resistencia de tierra, por lo que disminuyen ésta hasta valores despreciables. Esta disminución será tanto mayor cuanto mayor sea el número de estas líneas conectadas en paralelo. Cada semilongitud de una línea (cada rama), recibe el nombre de *radial* por estar extendidas al pie de la antena según los radios de una circunferencia (fig.15-20). Su longitud física debe ser algo mayor que la eléctrica (un 5% aproximadamente) para, con su mayor inductancia, compensar la capacidad adicional a tierra dada su proximidad a la misma. Todo esto nos permite situar los monopolos alejados del suelo.

El número de radiales varía según las necesidades de rendimiento de la antena, así como del espacio disponible para su ubicación.

Las antenas comerciales de radiodifusión suelen tener 120 radiales. Con 3 ó 4 radiales se consiguen pérdidas de tierra razonablemente bajas. Lógicamente, 1 radial es el mínimo admisible.

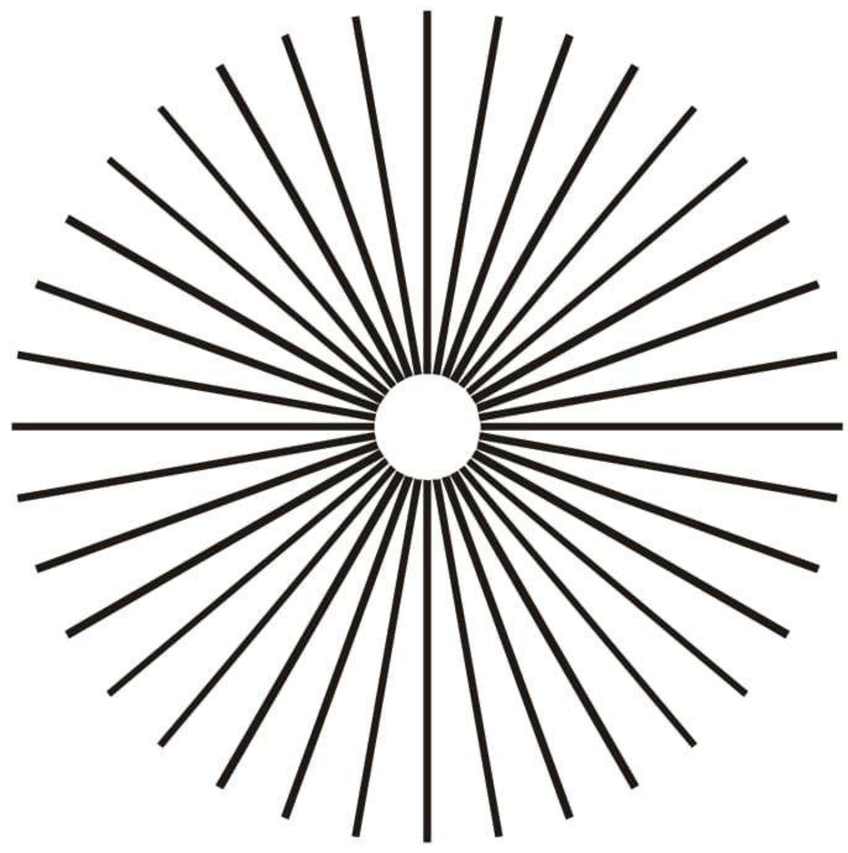


FIGURA 15-20: Plano de tierra con radiales de cuarto de onda.

El ancho de banda de trabajo de la antena está a su vez influido por los radiales, los cuales, para minimizar este efecto, deberán ser lo más numeroso y grueso posible.

Cuando el espacio disponible no es suficiente para albergar el plano de tierra anterior, se puede construir el mostrado en la fig.15-21, el cual sólo está condicionado a la altura del monopolo.

La figura 15-22 muestra los planos de tierra para una antena en L invertida y en T.

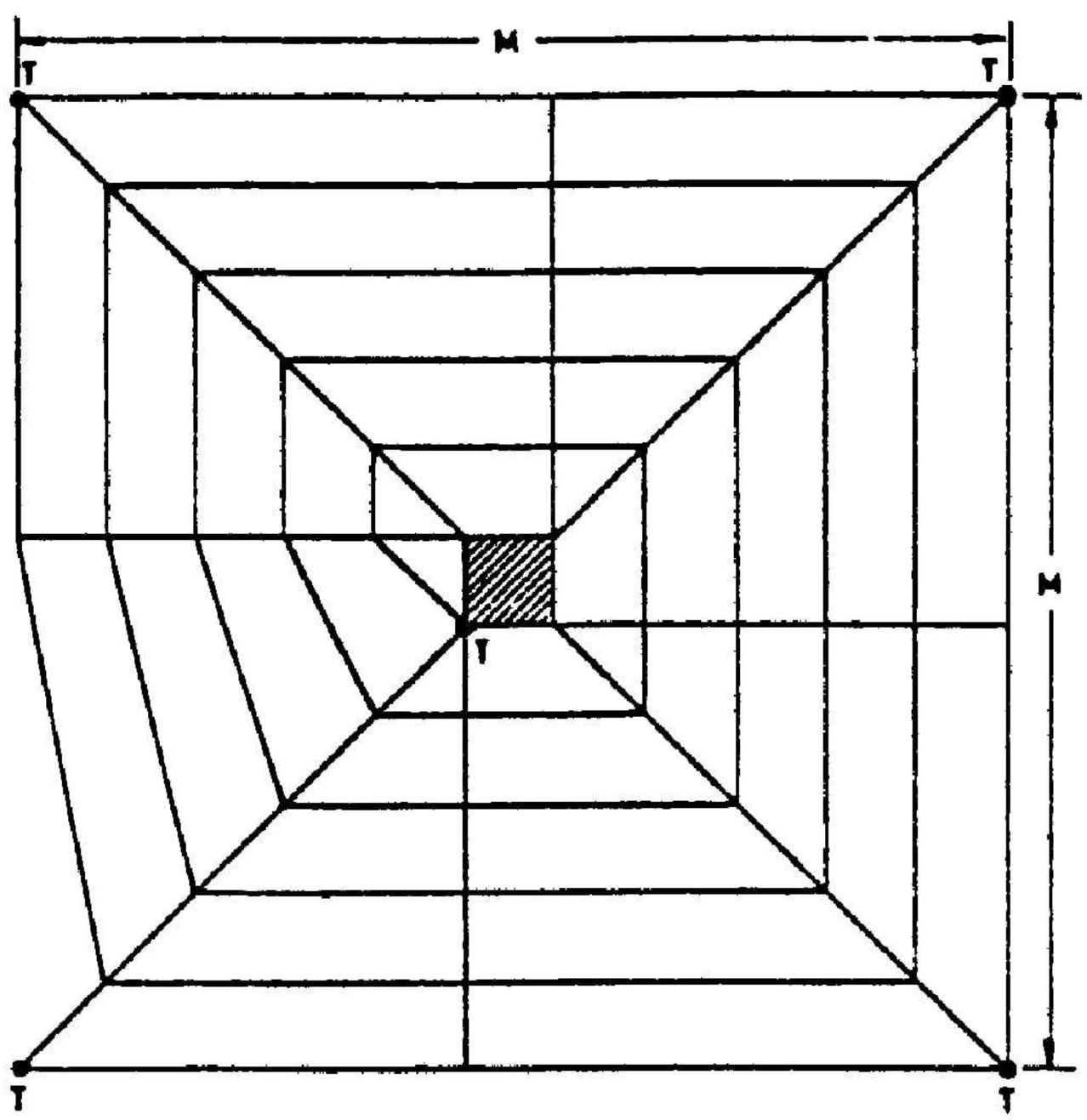


FIGURA 15-21: Plano de tierra con diversas tomas de tierra. Como mínimo, se debe conectar al menos una toma (la central) con un conductor lo más grueso y corto posible. Asimismo, al lado M debe ser al menos la mitad de la altura del monopolo.

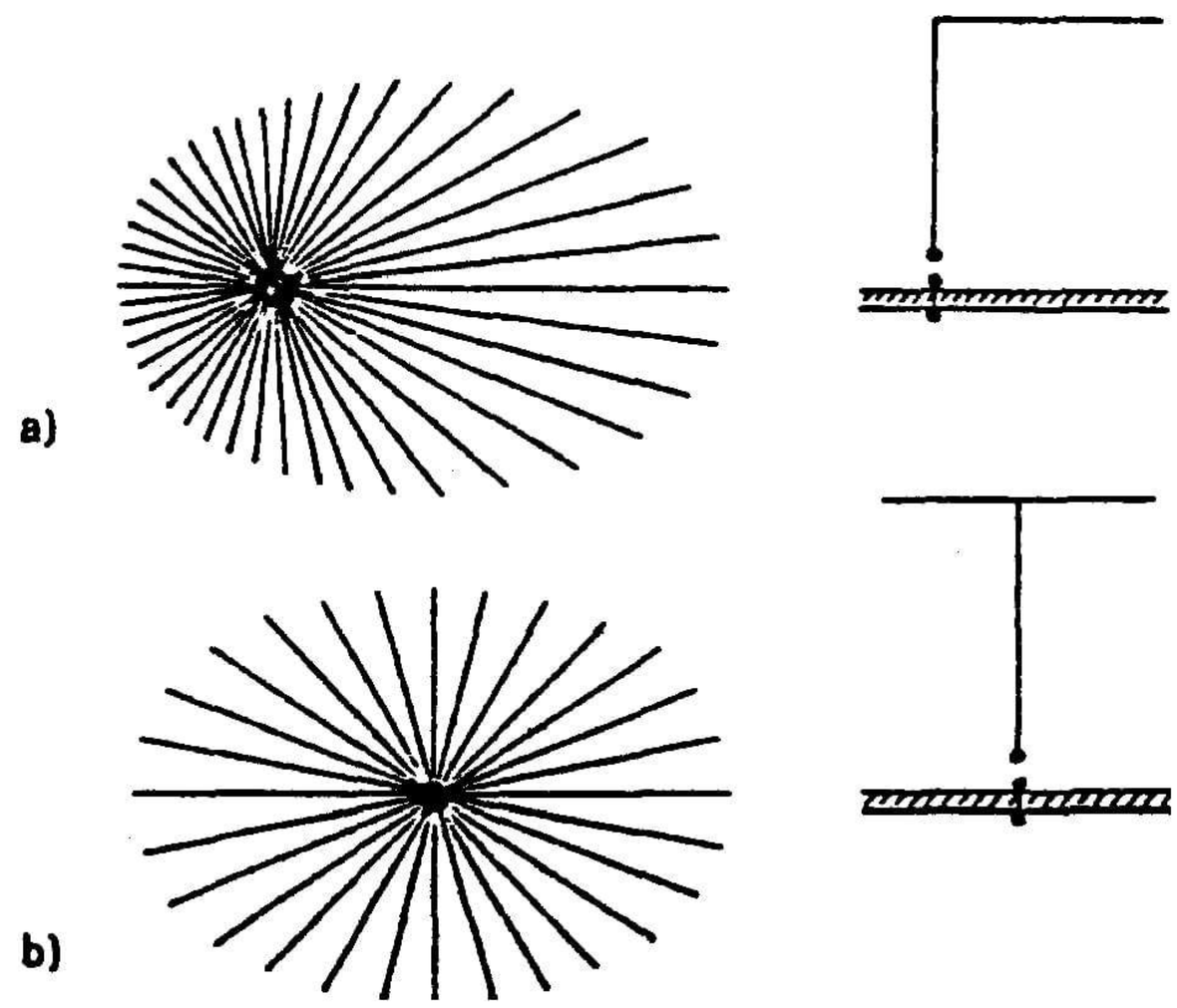


FIGURA 15-22: a) Plano de tierra para una antena en L invertida. B) Plano de tierra para una antena en T.

15.9. ANTENA RINGO

Antena fija omnidireccional 135Mhz a 174 Mhz Modelo: VHFO – 5db

Características Técnicas:

Impedancia de entrada	50 *Ohms*
Ganancia	5 *Db*
Potencia Máxima	250 *W*
Resistencia al viento	200 *Km/h*

Material Provisto Tubos de aluminio templado (Aleación 6162 – T.10. "CAMEA")

Armado de la base

Para el armado de la antena seguir indicaciones según croquis

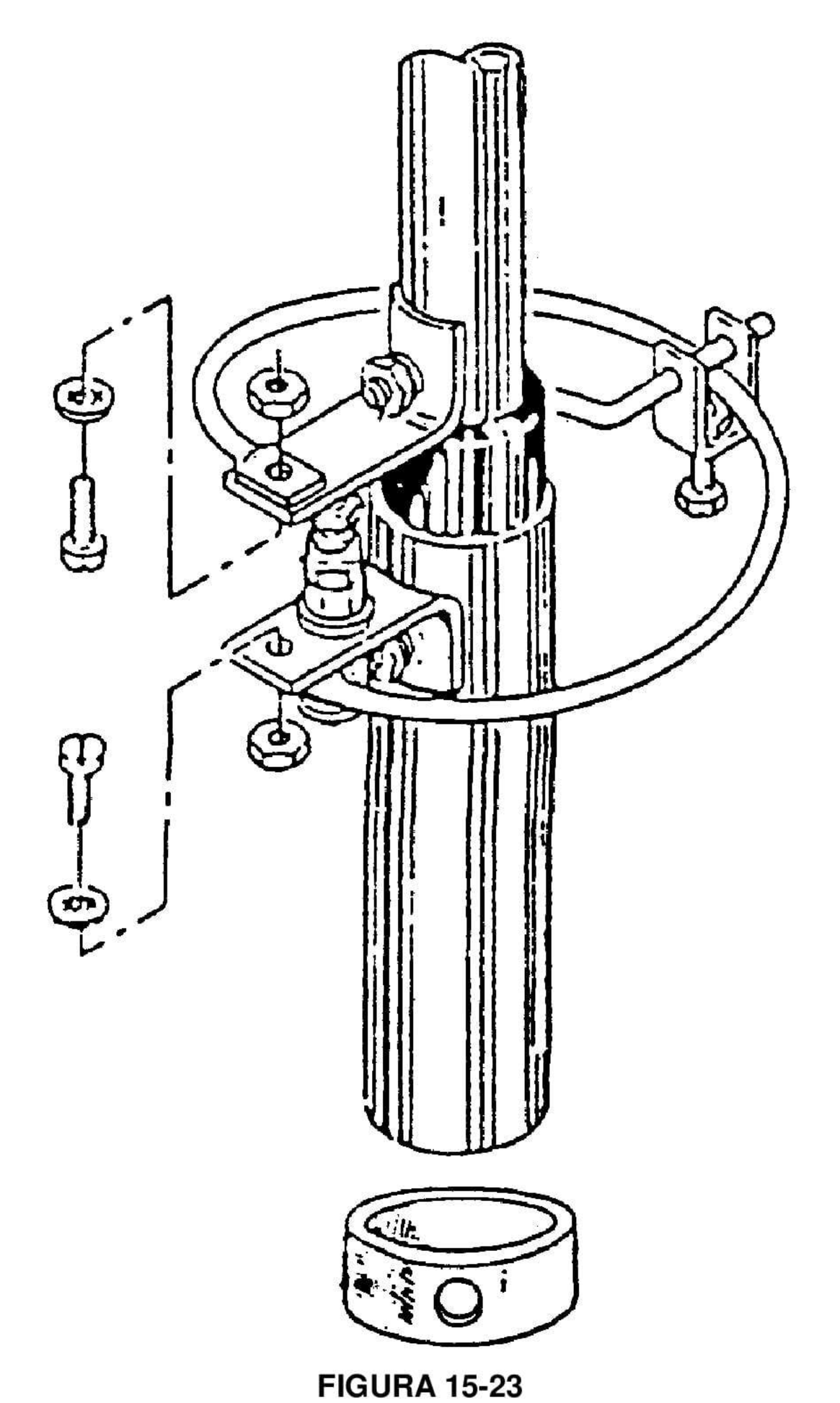


FIGURA 15-23

Antena fija omnidireccional 135 Mhz a 174 Mhz. Modelo: VFHO – 5 db.

Armado general

Para el armado general de la antena de acuerdo a la frecuencia a utilizar ver tabla de medidas A, B y C expresadas en mm.

Frecuencias en Mhz.	A	B	C
135	1511	1389	247
137	1492	1365	241
140	1460	1333	235
142	1441	1314	231
145	1409	1282	228
147	1390	1263	223
150	1359	1238	222
152	1339	1219	219
155	1320	1200	216
157	1295	1175	212
160	1271	1155	209
162	1161	1120	206
165	1141	1110	201
167	1121	1086	197
169	1095	1072	192
171	1077	1057	185
174	1053	1037	178

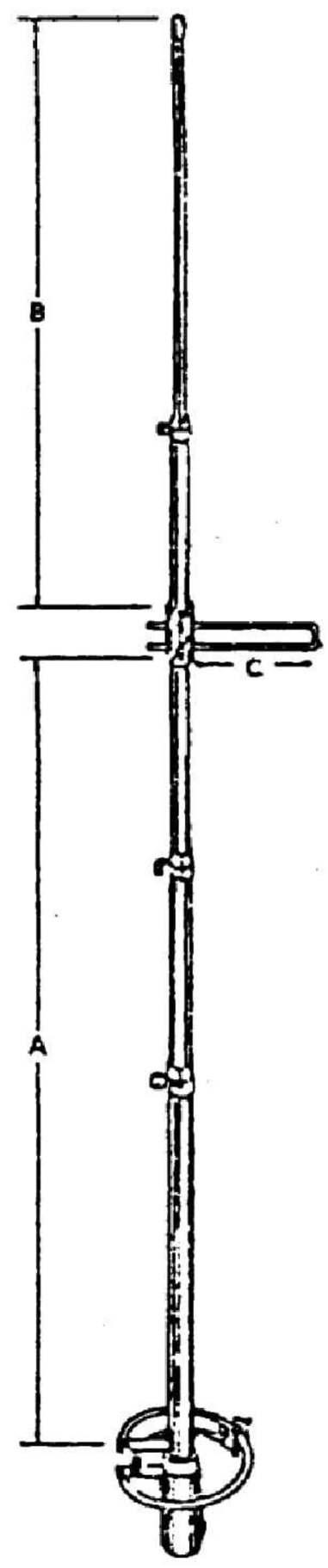


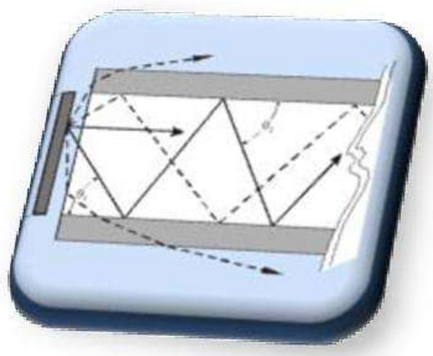
FIGURA 15-24

Ajuste

1º Paso: Colocar el wattímetro o medidor de R.O.E. al conector de la antena

2º Paso: Hacer deslizar la varilla de ajuste de impedancia sobre el aro adaptador, efectuar las mediciones hasta encontrar la mínima reflejada.

3º Paso: Una vez encontrada la mínima R.O.E. realizar ajuste general de tornillos.



CAPÍTULO 16

FIBRAS OPTICAS

Objetivo:

- ☞ Que el alumno adquiera la capacidad definir y fundamentar las características, usos y ventajas de las fibras ópticas

16.1. INTRODUCCIÓN

En 1626 Snell pronuncia las leyes de Reflexión y Refracción de la luz.

En 1668 Isaac Newton a través de sus experimentos con la luz, estudiándola como un fenómeno ondulatorio, encuentra que la luz se propaga de forma similar a las ondas sonoras, es decir que se puede estudiar como una onda mecánica.

En 1870 John Tyndall (físico Irlandés) demostró que un chorro de agua era capaz de conducir un haz de luz

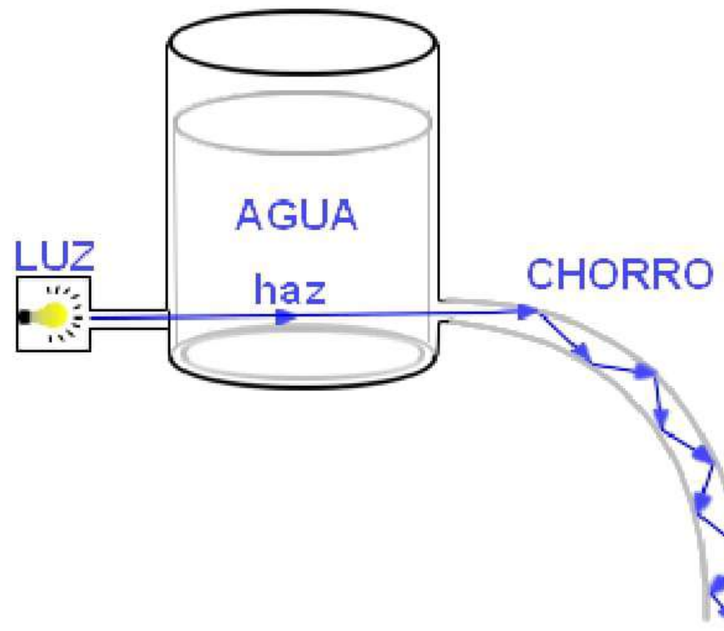


FIGURA 16-1a: Experimento de Tyndall

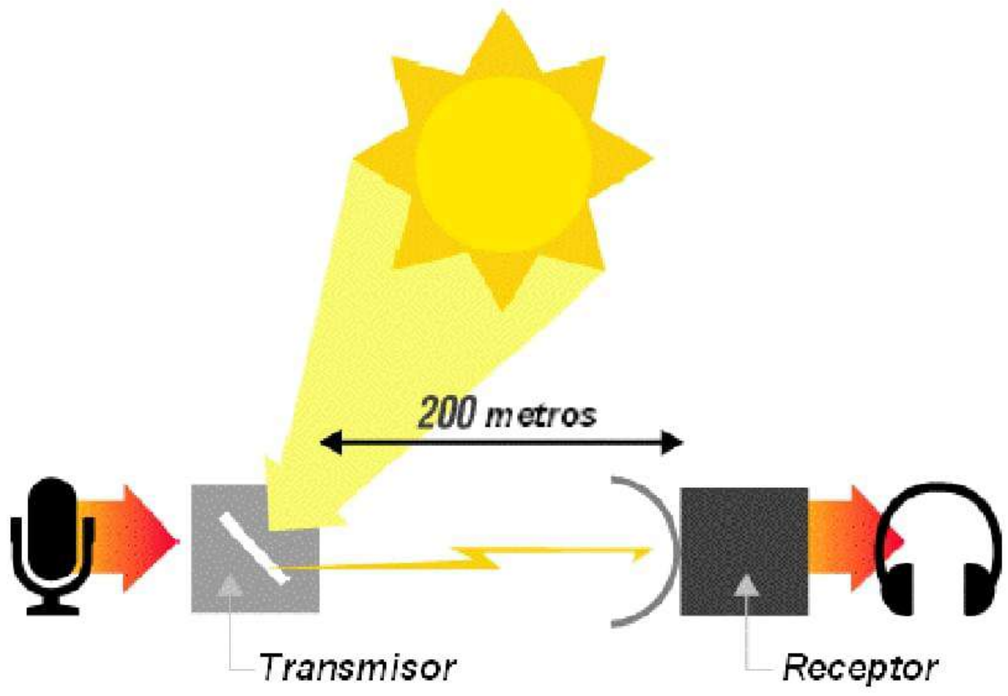


FIGURA 16-1b: Fotófono de Graham Bell

En 1873 James Clerck Maxwell demostró que la luz puede estudiarse como una onda electromagnética.

El empleo de la luz para transmitir mensajes ya se consideró por 1880 cuando Bell realiza transmisiones de la palabra por medio de un haz de luz en el espacio libre modulado por un espejo en vibración con las ondas sonoras. Más adelante se estudió la posibilidad de guiar la luz modulada por medio de una guía de onda dieléctrica.

Las señales ópticas enviadas en un medio de transmisión abierto son susceptibles de ser fácilmente perturbables, por lo que se pensó en medios cerrados, sumado a la gran atenuación de la atmósfera.

Las primeras experiencias (transmisión en medios cerrados) se realizan en 1954 aproximadamente (Van Hell, Hopkins y Kapany), con el desarrollo de la guía de onda dieléctrica recubierta que, como tal, tendrá varios modos de propagación.

Pero recién en 1970 se logran atenuaciones de 20 *dB/Km*, que se mejoró paulatinamente. Actualmente se logra atenuaciones menores a 1 *dB/Km*.

16.2. FUNDAMENTOS

Las fibras ópticas son conductos, rígidos o flexibles, de plástico o de vidrio (sílice), que son capaces de conducir un haz de luz inyectado en uno de sus extremos, mediante sucesivas reflexiones que lo mantienen dentro de sí para salir por el otro.

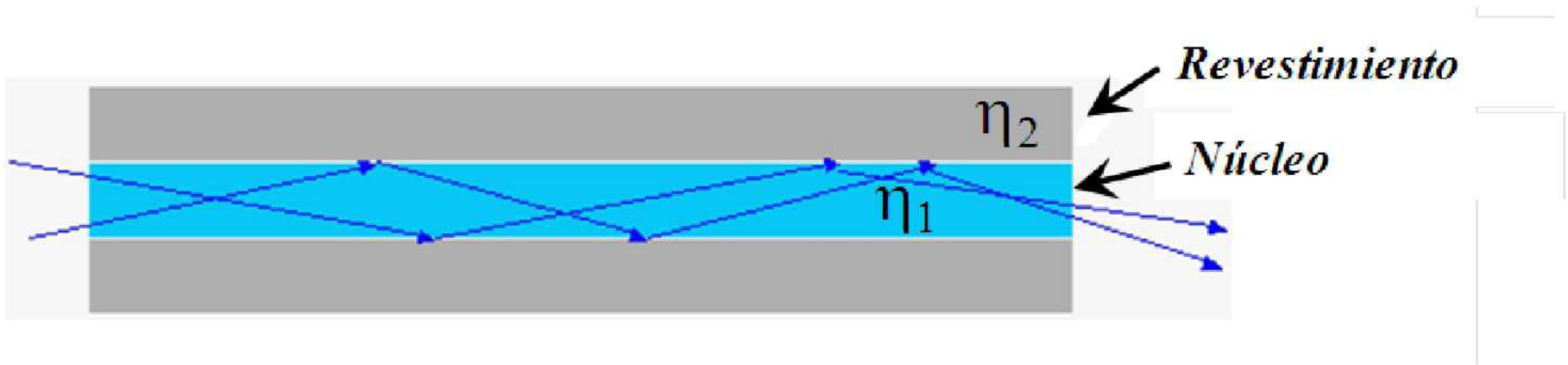


FIGURA 16-2

16.3. ÍNDICE DE REFRACCIÓN

Cuando un haz de luz que se propaga por un medio ingresa a otro distinto, una parte del haz se refleja mientras que la otra sufre una refracción, que consiste en el cambio de dirección del haz. Para esto se utiliza el llamado índice de refracción del material, que nos servirá para calcular la diferencia entre el ángulo de incidencia y el de refracción del haz (antes y después de ingresar al nuevo material).

El efecto de la refracción se puede observar fácilmente introduciendo una varilla en agua. Se puede ver que parece quebrarse bajo la superficie. En realidad lo que sucede es que la luz reflejada por la varilla (su imagen) cambia de dirección al salir del agua, debido a la diferencia de índices de refracción entre el agua y el aire.

Se utiliza la letra η (eta) para representar el índice de refracción del material, y se calcula por la siguiente fórmula:

$$\eta = \frac{c_0}{v}$$

η: índice de refracción del medio en cuestión

c_o: velocidad de la luz en el vacío ($3x10^8$ m/s)

v: velocidad de la luz en el medio en cuestión

Es decir que el índice de refracción η es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y en el medio.

Dado que la velocidad de la luz en cualquier medio es siempre menor que en el vacío, el índice de refracción será un número siempre mayor que 1.

En el vacío

$$\eta = 1$$

En otro medio

$$\eta > 1$$

La tecnología se basa en la transmisión de luz (rayos o modos de guías de ondas) a lo largo de filamentos transparentes de vidrio, plástico u otro medio de características ópticas convenientes.

Se funda en la reflexión interna total de la luz[2] . Un rayo de luz incidente sobre la superficie de separación de dos materiales ópticos transparentes que poseen diferentes índices de refracción, sufrirá una reflexión interna total (sin refracción) si se cumple:

a) El rayo incidente proviene del medio más denso (en sentido óptico)

b) El ángulo comprendido entre el rayo y la normal a la superficie de separación, en el punto de incidencia, es mayor que un cierto ángulo crítico, el cual depende sólo de esos índices de refracción.

16.4. APERTURA NUMÉRICA (AN)

Se define apertura numérica (*AN*) de la fibra óptica al seno del ángulo máximo de incidencia o penetración bajo los cuales la luz se propaga por el interior del núcleo.

Se considera una fibra multimodo de índice de refracción escalonada como se ve. El núcleo tiene un índice de refracción η_1 y está rodeado de una capa de índice $\eta_2 < \eta_1$ y es:

[2] Un rayo no paralelo al eje, al propagarse por una fibra de 50 micrones de diámetro puede reflejarse unas 10.000 veces por metro de fibra, variando (>>) al disminuir el diámetro. En cada reflexión la pérdida es de aproximadamente 0.001% (el aluminio da una pérdida del 10%), o sea, es muy eficiente.

$$\eta_2 = \eta_1 (1 - \Delta)$$

En general Δ vale aproximadamente 0.02 a 1%.

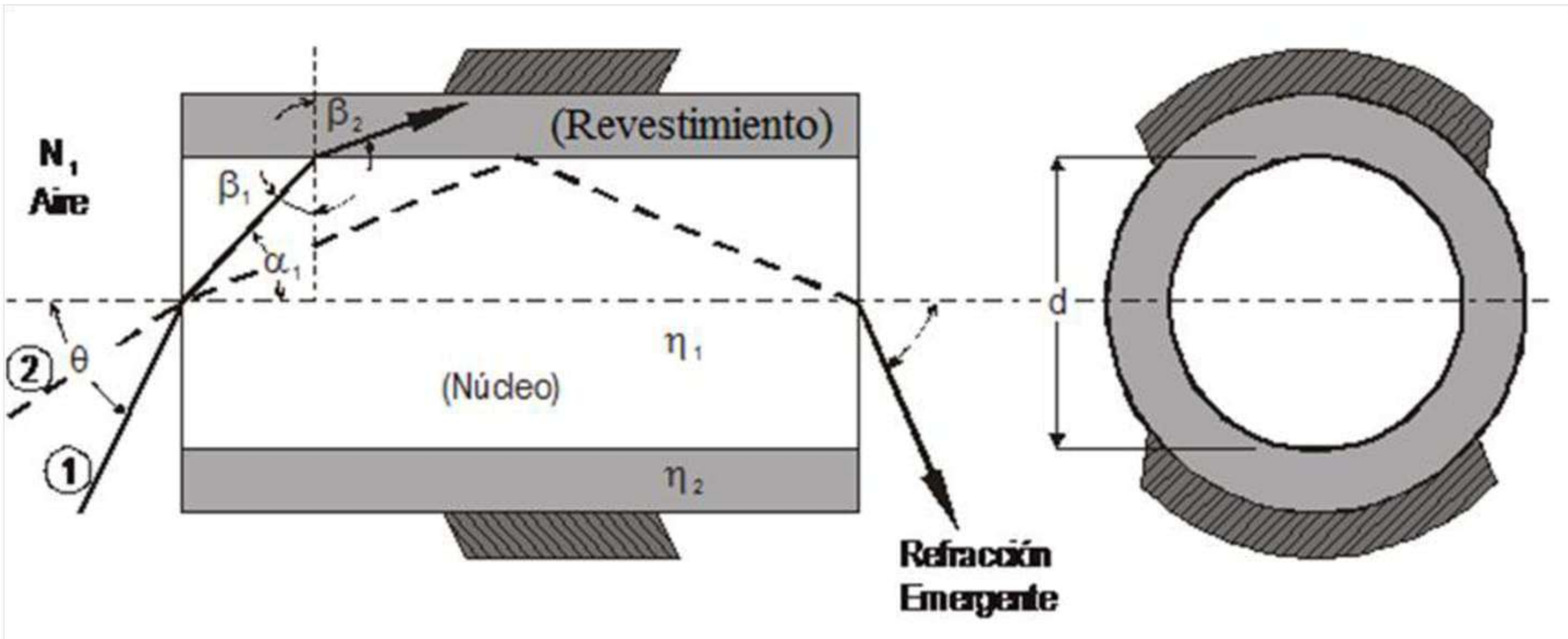


FIGURA 16-3

El rayo 1 incide bajo un cierto ángulo θ. En la primera superficie de interfaz en que el rayo proviene de un medio de índice menor (aire, $N_1 = 1$) hacia otro índice mayor (η_1). Se refracta acercándose a la normal y según la ley de Snell:

$$N_1 \cdot \operatorname{sen}\theta = \eta_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \qquad [16\text{-}1]$$

En la segunda interfaz en que $\eta_1 > \eta_2$, el rayo se refracta alejándose de la normal:

$$\eta_1 \operatorname{sen}\beta_1 = \eta_2 \operatorname{sen}\beta_2 \qquad [16\text{-}2]$$

Para que el rayo se propague a lo largo del medio η_1, debe disminuir el ángulo de incidencia θ en la primera interfaz hasta lograr su reflexión en la segunda, como sucede con el rayo 2 (en línea de trazos en la fig.16-3)

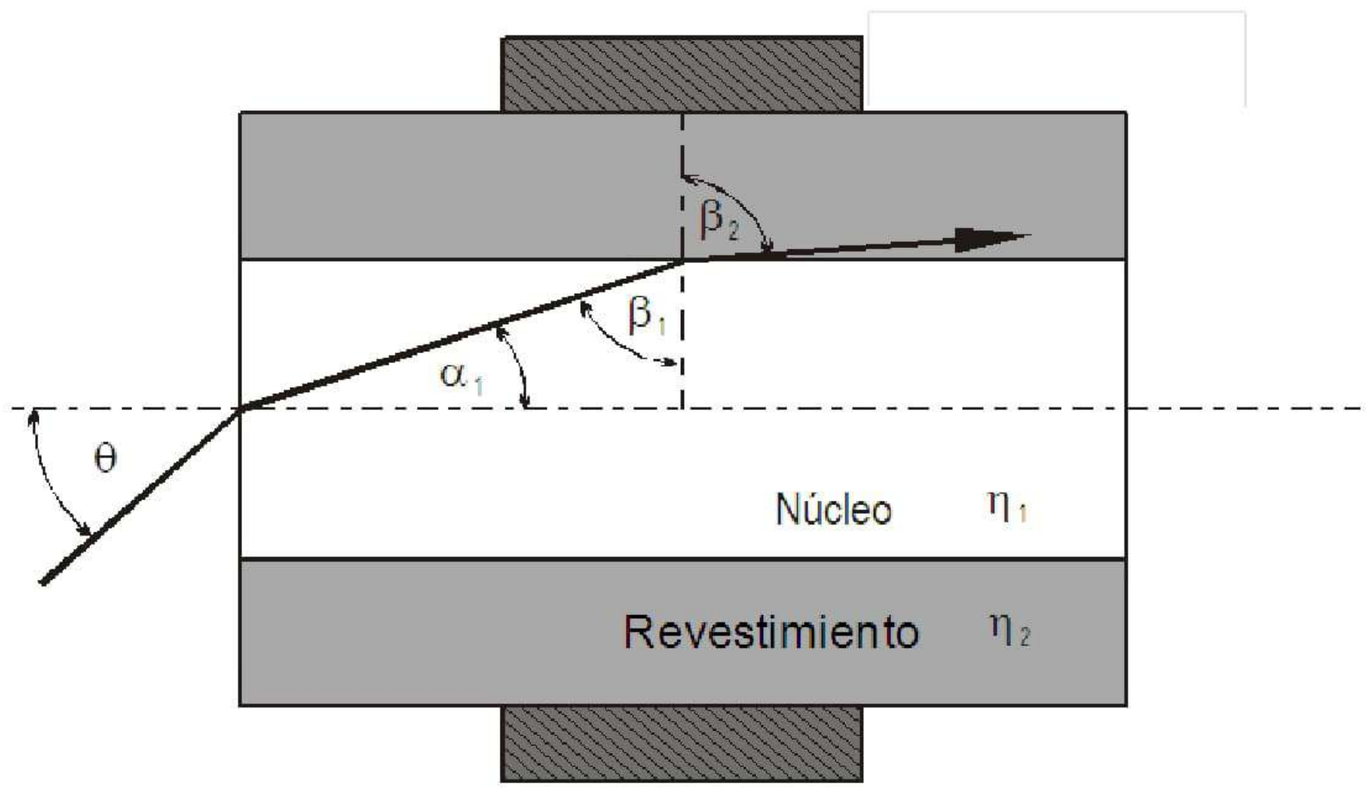


FIGURA 16-4

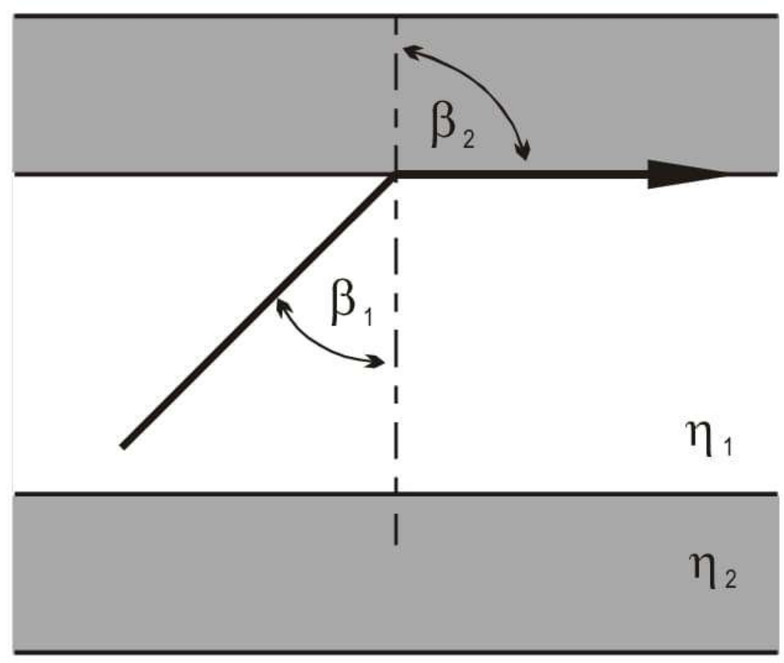


FIGURA 16-5

Para la condición anterior (16-2) queda

$$\operatorname{sen}\beta_1 = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \operatorname{sen}\beta_{1C} \qquad \operatorname{sen}\beta_2 = \operatorname{sen}90^{\circ} = 1 \qquad [16\text{-}3]$$

β_{1C} es denominado ángulo crítico debido a que es el mínimo valor del ángulo β_1 para el cual la reflexión interna total tiene lugar en la frontera *núcleo-cubierta* óptica.

Si tenemos en cuenta que

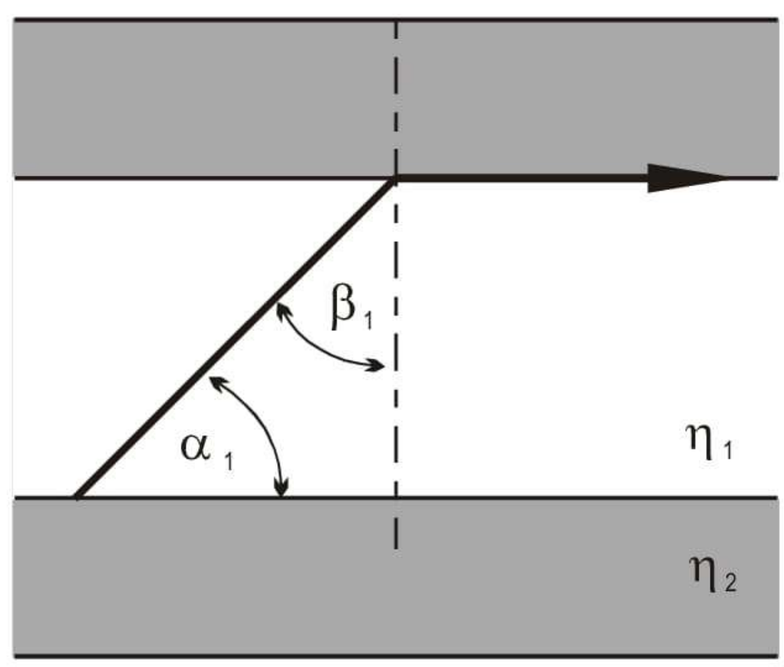


FIGURA 16-6

α_1 es el ángulo complementario de β_1 por lo tanto aplicando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b = 1 \qquad [16\text{-}4]$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \operatorname{sen}^2 \beta_1 = 1 \qquad [16\text{-}5]$$

tomando $\beta_1 = \beta_{1C}$ (mínimo ángulo permitido)

$$\text{sen}^2\alpha_1 = 1 - \text{sen}^2\beta_C = 1 - \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2} \qquad [16\text{-}6]$$

$$\text{sen}\,\alpha_1 = \frac{\sqrt{\eta_1^2 - \eta_2^2}}{\eta_1} \qquad [16\text{-}7]$$

Esta situación nos dará el ***"máximo ángulo permitido"*** con respecto a la normal de la superficie de la fibra, para el cual la reflexión interna total tiene lugar en la frontera *núcleo-cubierta* óptica.

$$\alpha_{1(máx)} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\eta_1^2 - \eta_2^2}}{\eta_1}\right) \qquad [16\text{-}8]$$

si ahora reemplazamos en (16-1) el valor de (16-7)

$$\text{sen}\,\theta_a = \eta_1\,\text{sen}\,\alpha_1 = \sqrt{\eta_1^2 - \eta_2^2} \qquad [16\text{-}9]$$

θ_a es el ángulo máximo del rayo proveniente del aire y se lo denomina ***"ángulo de aceptación"*** y a su seno se le denomina apertura numérica (*AN*).

$$\text{sen}\,\theta_a = \sqrt{\eta_1^2 - \eta_2^2} = AN \qquad [16\text{-}10]$$

Si se supone que el ángulo de aceptación es pequeño, entonces el ángulo salida de aceptación (Ω) se puede aproximar a

$$\Omega = \pi(NA)^2$$

Una representación gráfica de los rayos que puede aceptar una fibra óptica se muestra en la fig.16-5, donde el cono de aceptación tiene un ángulo igual a $2\theta_a$.

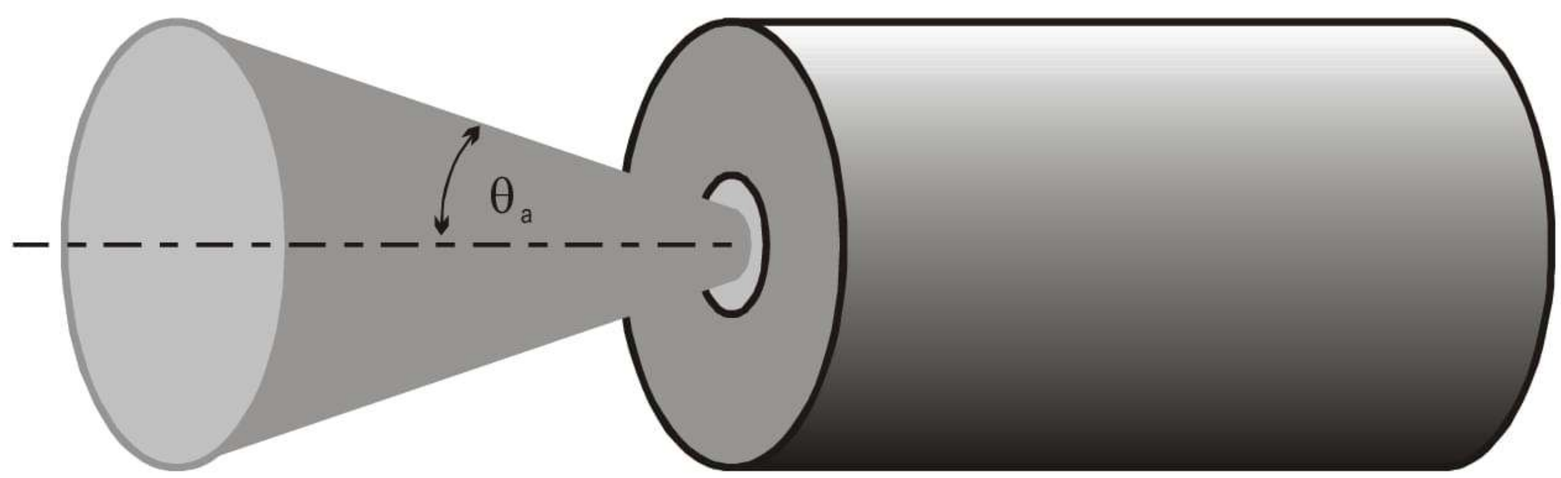


FIGURA 16-7: Cono de aceptación

A partir de la expresión de *AN* (16-10) se define la frecuencia normalizada, que es un parámetro que caracteriza los modos de conducción de una fibra:

$$V = K.d\sqrt{(\eta_1^2 - \eta_2^2)} \qquad \text{siendo} \qquad K = 2\pi/\lambda \qquad [16\text{-}11]$$

El número de modos de propagación lo da:

$$N = \left(\frac{V}{2}\right)^2 = \frac{0,5\left(\pi d\ A\ N\right)^2}{\lambda^2} \qquad \text{y es dependiente del } \lambda \qquad [16\text{-}12]$$

siendo d = diámetro del núcleo

Para una determinada apertura numérica (definida por η_1 y η_2), a medida que se reduce el diámetro, disminuye el número de modos de propagación.

Cuando el radio llegue a ser del orden de la long. De onda (λ), se tiene un modo simple de propagación.

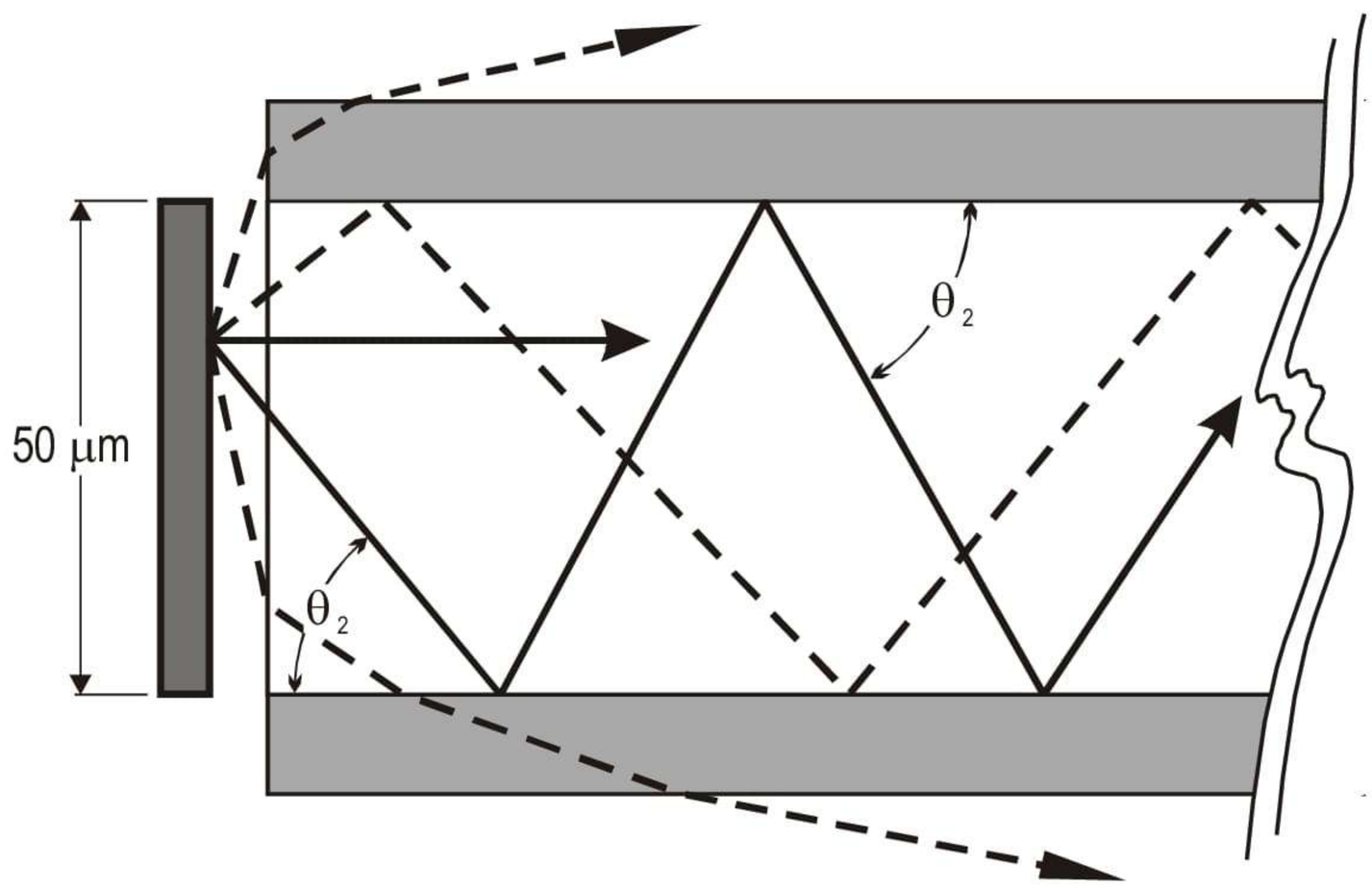


FIGURA 16-8

Esta es la distribución de los rayos incidentes en una fibra multimodo, proveniente de una fuente de luz tal como un LED. La superficie activa del diodo luminoso no debe ser mayor que el núcleo. Aun cuando se ajuste perfectamente a su superficie, sólo una parte de la luz emitida será transmitida, aquella que incide con un ángulo menor que el dado por A N.

Aumentando la A N mejora la emisión, pero aumentan los modos de propagación que inciden desfavorablemente en la propagación.

Entre los modos extremos hay mayor diferencia de caminos, estableciéndose intervalos de tiempo entre el más rápido y el más lento de los modos produciéndose una marcada limitación en la capacidad de transporte de información debido a la dispersión de modos.

Una guía con alto A N tiene un ancho de banda menor que otra de menor número de modos (A N).

En el multimodo de índice escalonado la variación del mismo (η) al pasar del núcleo al revestimiento es abrupta. El empleo de un núcleo así grande facilita el acoplamiento con el exterior pero con más dispersión por las grandes diferencias de recorrido entre los modos extremos de propagación.

Hay una convergencia focal periódica, los modos más exteriores tienen sus rayos con un recorrido mayor y al atravesar zonas de menor índice, lo hacen a mayor velocidad, se compensan así los retardos para los diferentes modos de propagación. El acoplamiento es adecuado.

Para una fibra de sílice con perfil de índice de refracción aproximadamente parabólico se observaron valores de dispersión de aproximadamente 0.9 n seg/*Km*, empleándose como fuente un láser de Ga As (Arseniuro de Galio).

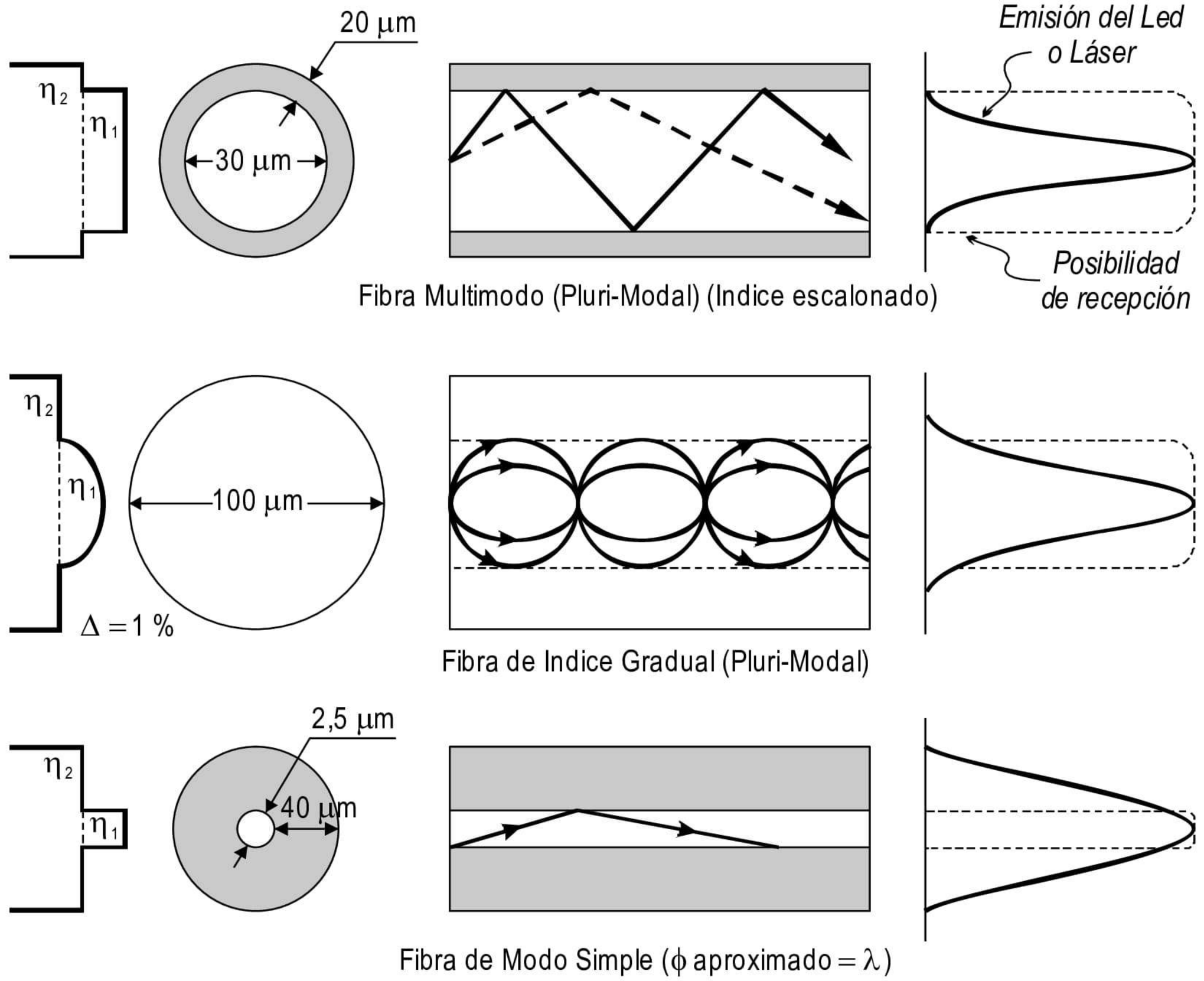


FIGURA 16-9

El de índice graduado, variedad del anterior, tiene un perfil cuyo índice de refracción disminuye en forma progresiva a partir del eje.

Esto proporciona iguales retardos a los diferentes modos, disminuyendo el efecto de dispersión.

El cable que permite la propagación de un solo modo tiene un núcleo de diámetro aproximado al valor de la long. de onda (λ).

Teóricamente con un solo modo no habría dispersión en la superficie, pero el inconveniente es que el pequeño diámetro hace un ineficiente acoplamiento a la fuente de luz del cable, ya que sólo se propaga el conjunto de rayos de ángulo de incidencia menor a θ_1.

Además, en la práctica las fuentes luminosas no son monocromáticas, por lo que se tendrá una dispersión, debido a la diferencia de velocidad de propagación que existe para las distintas λ que componen el espectro de la fuente.

Así un LED que emite alrededor del infrarrojo en una λ = 850 n m, tiene una banda de 50 n m; y un láser de Ga As puede tener una dispersión en λ de aproximadamente 2 a 4 n m.

Lo ideal sería un cable de modo único con una fuente monocromática.

Estos 2 factores vistos determinan el ancho de banda o la capacidad de régimen de bits del sistema de fibras ópticas.

16.5. ATENUACIÓN

En las fibras se hallan pérdidas lineales y no lineales, o sea, que son dependientes del nivel de la señal.

Las no lineales imponen un límite en la potencia máxima a utilizar (según Smith). La tendencia es reducir al mínimo dichos efectos con adecuados diseños, por lo que se analizarán las lineales.

Estas son:

- ☞ Absorción del material
- ☞ Dispersión del material
- ☞ Acoplamiento del modo al campo de radiación
- ☞ Radiación debida a las curvas
- ☞ Modos de fuga

Se analizarán las pérdidas que dependen del material: de absorción y de dispersión; mientras que para las restantes nos limitaremos a señalar que son pérdidas por radiación cuyo origen se encuentra en el diseño de la fibra o son inducidas mecánicamente como en el caso del acoplamiento del modo que fuera estudiado por Marcuse.

Los modos de fuga son aquellos que por su oblicuidad no son completamente conducidos sino que se pierden lentamente durante la propagación.

16.6. ABSORCIÓN DEL MATERIAL

El vidrio puro presenta dos mecanismos fundamentales de absorción de energía:

- ☞ Interacción de los fotones con las vibraciones moleculares, con bandas de absorción en la zona del infrarrojo.
- ☞ El límite de absorción fundamental debido al estímulo de la movilidad de los electrones por excitación con una energía más alta en las longitudes de onda del ultravioleta.

Se observa además una razón adicional en la absorción debida a la presencia de impurezas, tales como los iones metálicos (Sc, Ti, U, Cr, Fe, Co, Ni y Cu). Su influencia depende de la concentra-

ción y del estado de oxidación del elemento, dando lugar a distintas coloraciones en vidrios y cristales. Se debe cuidar de reducir al máximo dichas impurezas para obtener una baja absorción en las longitudes de onda de trabajo.

También tiene influencia la presencia de iones de hidroxilo (OH).

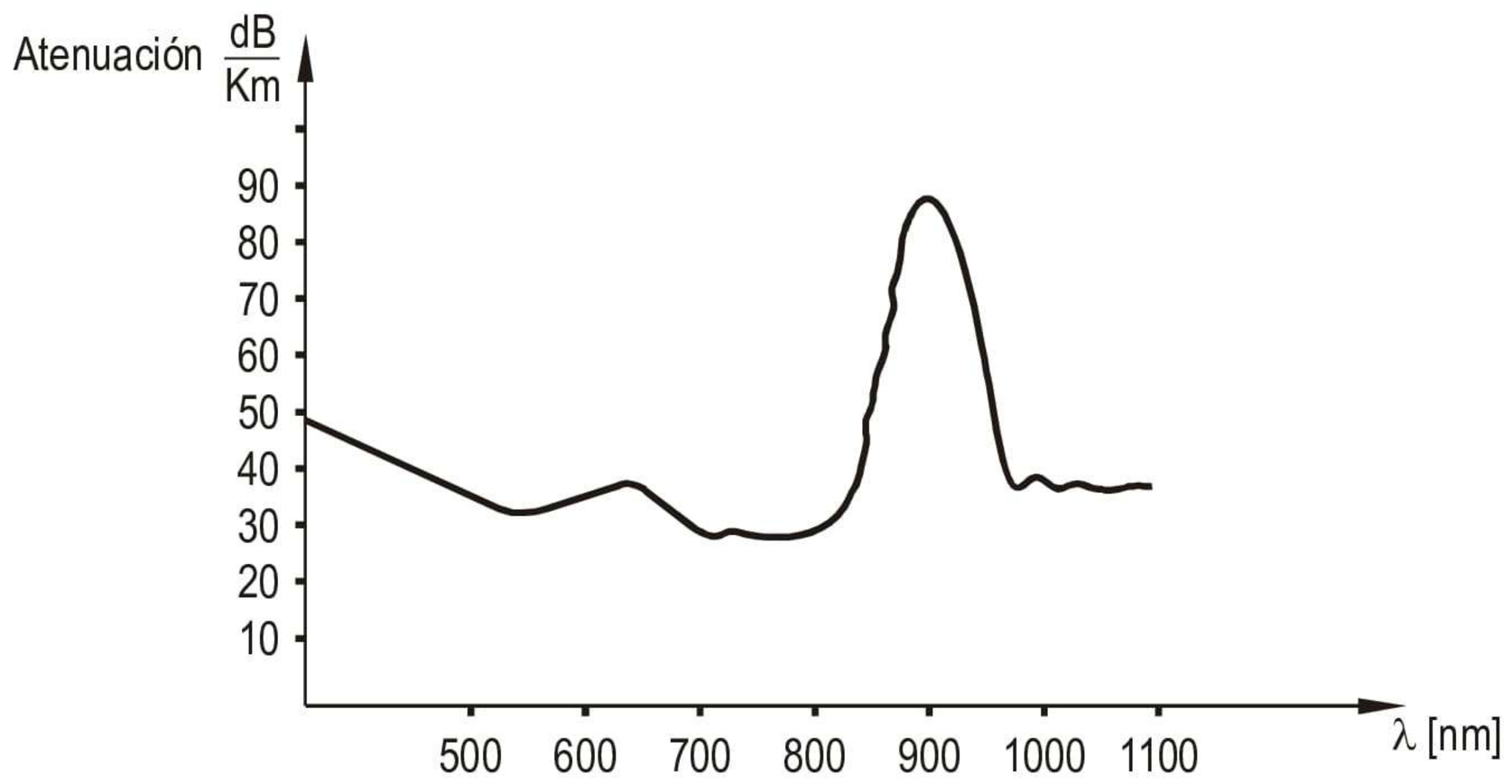


FIGURA 16-10

La atenuación en función de λ es la representada en el gráfico, en donde se observa una baja absorción óptica en el rango de 700 a 900 n m, adecuándose para la aplicación de fuentes semiconductoras como un LED de Ga As de 850 n m de long. de onda (λ). Otra causa de atenuación son las fallas estructurales del material.

16.7. DISPERSIÓN DEL MATERIAL

Una de las causas fundamentales es la falta de homogeneidad del material que produce variaciones del índice η a distancias pequeñas respecto al λ de la luz transmitida y la dispersión debida a defectos del vidrio o por la forma en que fue elaborado.

Por el primer motivo la dispersión es proporcional a 1/λ4, y tiene un valor límite, estando alrededor de 0.7 a 2 *dB/Km*.

Las grandes imperfecciones son independientes de λ y con una dependencia angular espúrea, en cuanto a la dispersión.

En cuanto a la atenuación o pérdida de transmisión se debe a la conversión de luz en calor provocada por iones de transmisión y moléculas de agua contenidas en el núcleo de la fibra. Esta atenuación se ha logrado reducir de aproximadamente 1000 *dB/Km* en 1967 a aproximadamente 1 *dB/Km* para una longitud de onda (λ) igual a 0.82 u m.

El vidrio dieléctrico usado para la fabricación es bastante resistente pero no suficiente para el manipuleo como cable individual, por ello se agrupan en forma de cables, reuniéndose a conectores para su acoplamiento, esto incrementa 1 *dB/Km* para la atenuación.

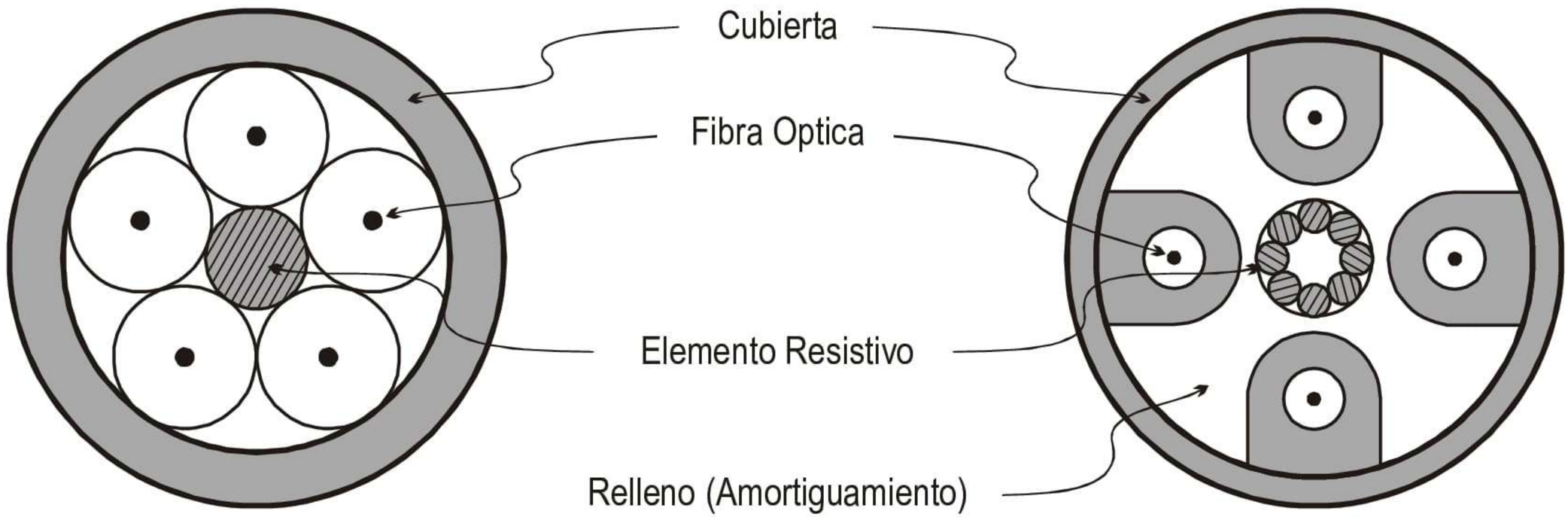


FIGURA 16-11

16.8. FUENTES DE LUZ

Fundamentalmente son: LED de Ga As (arseniuro de galio) y el Laser Semiconductor.

El LED o diodo fotoemisor es una unión PN polarizada en sentido directo. El salto de energía que existe entre bandas de valencia y banda de conducción determina la energía y long. de onda (λ) de los fotones en 850 n m aproximadamente.

Este dispositivo de luz coherente, resulta económico, funciona a baja temperatura y no requiere modulación externa. Se los construye para potencias de 0.1 m w a 1 m w y permiten utilizar frecuencias de modulación de aproximadamente 200 M bit/seg.

Requieren corrientes de excitación que puede modular con valores de pico de: 100 a 300 mA, para un valor de 100 mA, a una tensión de 2 Volts, se puede inyectar en una fibra plurimodal unos 50 mW de potencia luminosa, lo que da una eficiencia del 25%.

La dispersión del material es de 3 a 5 n seg/*Km*.

El **Laser** es fuente semi-coherente con alta radiación, lo que lo hace conveniente en circuitos con alta atenuación.

Se ha logrado que suministren 3 a 5 mW de onda continua durante más de 10.000 horas.

El laser es un dispositivo de umbral que comienza a "encenderse" para una corriente de excitación de unos 100 mA con un pico máximo de salida de 120 ó 130 mA. En la fibra puede inyectar unos pocos mW de potencia luminosa, siendo 10 a 50 veces más eficiente en cuanto al proceso de conversión de potencia. Es de mejor aplicación para aplicaciones digitales porque no es lineal su curva de potencia.

Su banda es de menor ancho respecto a los LED, 2 n m contra 50 n m.

La dispersión no es problema. Se lo puede modular con corrientes de excitación de hasta regímenes del orden de los G bits/seg.

Su problema respecto a los LED es su bajo tiempo de vida y la complejidad del excitador.

16.9. SISTEMA DE TRANSMISIÓN

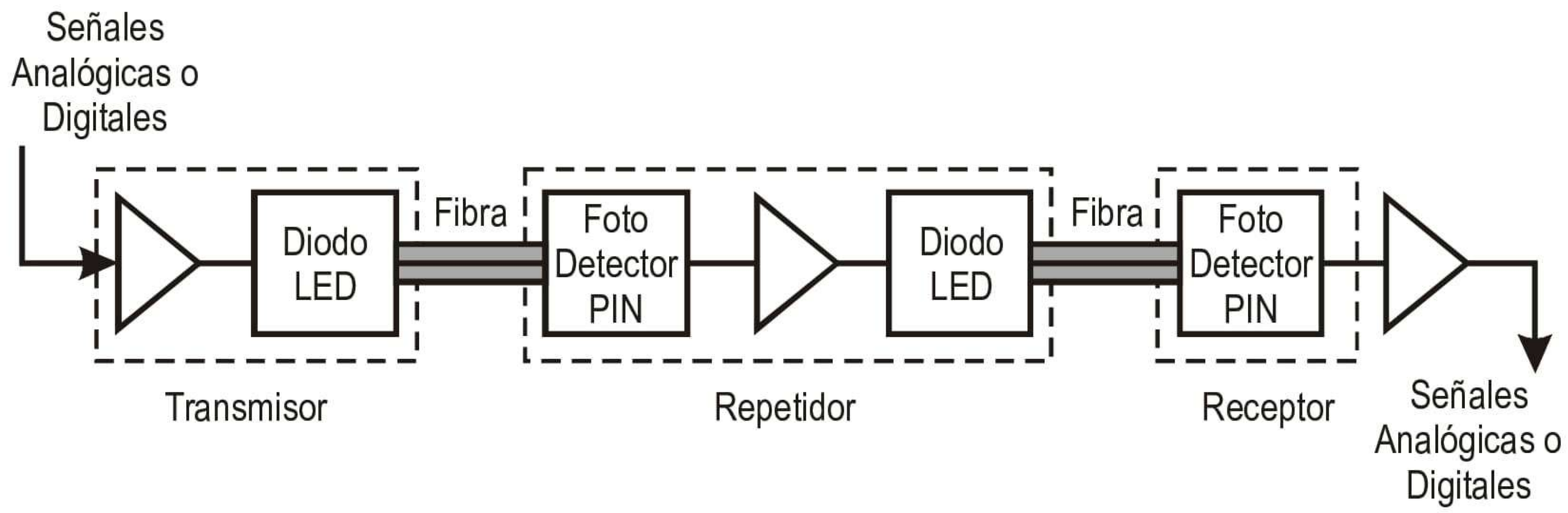


FIGURA 16-12

Se agrega un repetidor que regenera las señales ópticas que han sufrido atenuación y distorsión en el camino. En el extremo receptor, un fotodiodo (PIN), transforma las señales ópticas en eléctricas.

La modulación de mayor interés práctico resulta ser la modulación por impulso codificado (MIC). Se hace conducir directamente al laser con una corriente modulada por impulsos que conviene esté por encima del valor del umbral:

Ejemplo:

Para un umbral de onda continua de 190 mA es usual una polarización de aproximadamente 200 mA y una amplitud de modulación de aproximadamente 24 mA.

Con polarizaciones más bajas, cerca del umbral, aparecen oscilaciones amortiguadas en la salida de la luz, de segunda armónica.

El receptor puede estar constituido por un fotodiodo del tipo PIN (P – intrínseco – N), que presentan un ruido propio que se incrementa con la velocidad de operación. Para señales del orden de 10^8 pulsos/seg. su ruido es de aproximadamente 10^{-9} watts. Puede usarse un fotodiodo de avalancha (APD) con un ruido 10 veces menor. Su problema es la temperatura y el alto voltaje de polarización (100 Volts).

Se han desarrollado sistema de transmisión con micro circuitos acoplados directamente a guías ópticas con tamaño similar al de un sello postal. Además las distancias entre repetidoras son mucho mayores que las similares de Cu (cobre).

La temperatura que soportan las fibras oscila hasta los 600º centígrados, excepto, las de plástico (metil metacrilato), las que soportan solo 32º centígrados.

Las de vidrio tienen características de transmisión más favorables para el ultravioleta y mucho mayores aun cerca del infrarrojo, para una:

$$A\ N = 0.2 \text{ a } 1.$$

Las de plástico son más flexibles y baratas, y se cortan con facilidad; al vidrio hay que pulirlo.

Tipo	Uni Modo Núcleo $Ge\ O_2$ Cubierta Sílilce	Pluri Modal Borosilicato Ind. Escalonado	Pluri Modal Indice graduado
Indice núcleo (η_1)	1.471	1.527	1.562 (sobre eje)
Indice periferia (η_2)	1.457	1.517	1.540 (periferia)
Diámetro núcleo (*um*)	2.5	30	100 (diám. ext.)
Espesor Revestimiento (*um*)	40	20	–
Apertura Numérica (*A N*)	0.2	0.17	0.26
Angulo incidente máx. θ_1	11.68°	10.05°	15°
Angulo Propagación máx. θ_2	7.91°	6.56°	9.6°
Número de modos *M*	1	200	2000
Dispersión modo (*n seg. / Km*)	0	32	1
Dispersión del material $p/\text{laser}\ (2\ nm)$	0.18	0.266	0.280
Dispersión del material $p/\text{LED}\ (20\ nm)$	1.8	2.6	2.8

16.10. ANÁLISIS DE OPORTUNIDAD DE UN SISTEMA POR FIBRA ÓPTICA

La oportunidad en la utilización de un sistema por fibra óptica viene representada por las principales ventajas que se obtienen con el uso de la fibra óptica:

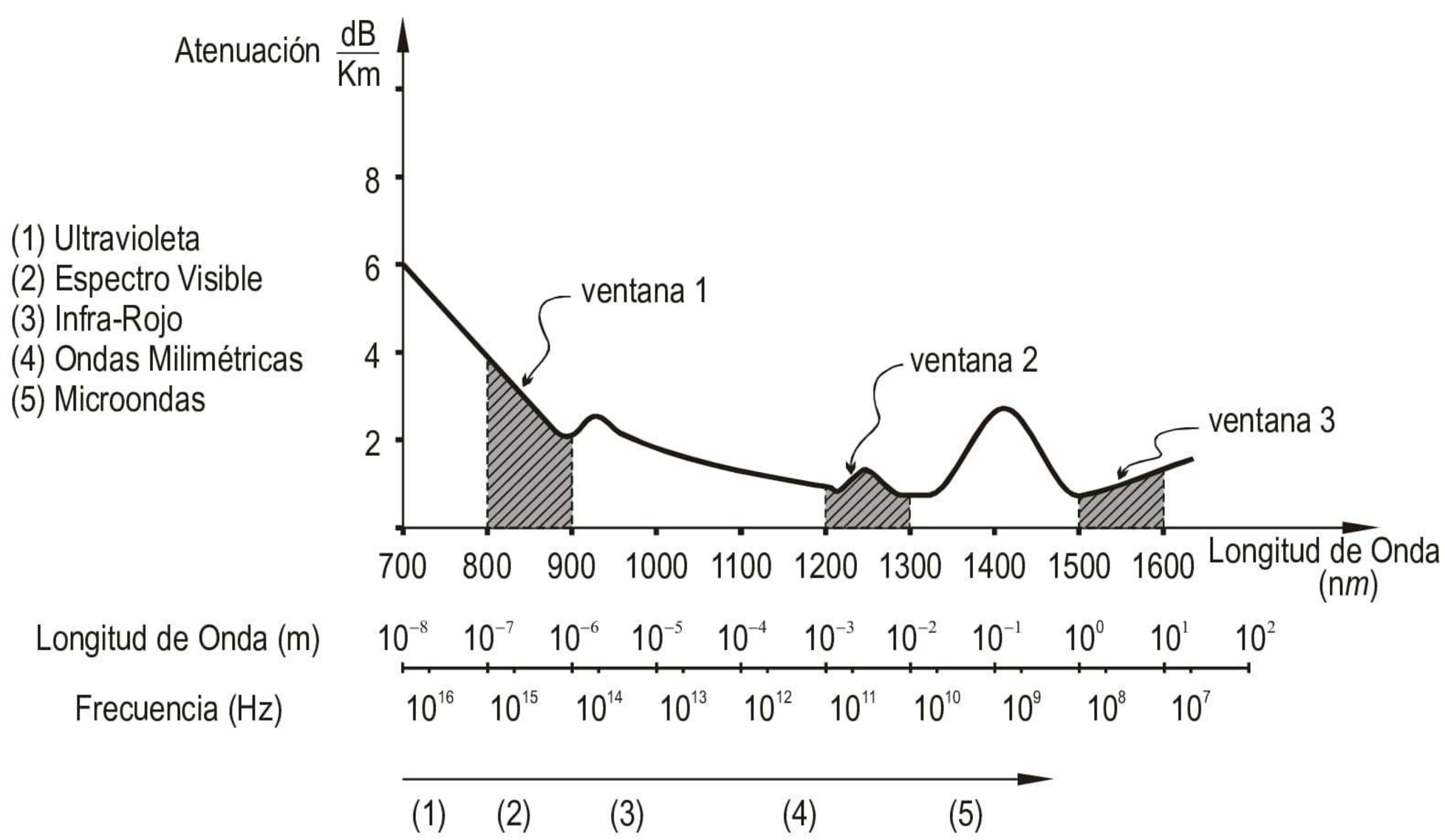


FIGURA 16-13: Pérdidas espectrales para una fibra óptica típica. Se observan las tres ventanas útiles y los picos de absorción debidas a la presencia del ion hidroxilo OH.

- **Menores pérdidas de potencia**, gracias a esta propiedad se logran mayores distancias de repetición (eventualmente puede no ser necesario incorporar repetidores), reduciendo así los costos del sistema, de su mantenimiento y aumentando la fiabilidad del mismo.
- **Inmunidad al ruido** gracias a que la fibra óptica es totalmente dieléctrica, es inmune a las interferencias de radiofrecuencia. Asimismo no genera interferencias ni provoca diafonía en otros equipos de comunicación y por lo tanto no son necesarios apantallamientos especiales.
- **Dimensiones reducidas** *y bajo peso* este aspecto, junto a la gran flexibilidad hace que la instalación de los cables ópticos sea comparativamente sencilla.
- **Seguridad** es prácticamente imposible interceptar la señal que viaja por una fibra óptica sin ser detectada.
- **Aislamiento eléctrico**, al ser dieléctrica la fibra, asegura el aislamiento eléctrico entre emisor y receptor, evitando así los lazos de tierra.
- **Gran ancho de banda**, esto permite la transmisión de mucha información simultáneamente, reduciendo la necesidad de cambiar el cable al aumentar el tráfico. Mediante el uso de técnicas de multiplexación especiales, la potencialidad de la fibra óptica se ve notablemente incrementada.
- **Rápida reducción de costos y mejoramiento de la calidad**, al igual que en todas las modernas tecnologías, existe un gran interés en la investigación de nuevas técnicas para obtener una mayor eficiencia y reducción de costos.

¿Cuál es el costo de un sistema de comunicación por fibra óptica comparado con el de un sistema convencional?

Aunque un estudio económico debería basarse en las necesidades del usuario, es posible dar una idea general de los costos actuales. Hasta hace poco un sistema por fibra óptica era más caro que uno convencional. Hoy en día esta situación ha cambiado radicalmente gracias a la disminución de precios, tanto de la fibra óptica como de los componentes optoelectrónicos. A este hecho se debe añadir que el costo de los cables de cobre y los equipos necesarios para transmitir por éstos aumenta día a día.

En muchos casos la diferencia de costos con un sistema convencional es muy pequeña y en otros, como por ejemplo en sistemas telefónicos interurbanos transmitiendo a 34 y 140 Mb/s, un sistema óptico es hoy más económico que uno tradicional. La factibilidad económica del proyecto de un sistema optoelectrónico depende, en última instancia, del alcance de su aplicación. Los sistemas optoelectrónicos se están convirtiendo día a día en una realidad cada vez más atractiva, siendo ya hoy la solución técnico-económica más conveniente en muchos casos y sin lugar a dudas serán la elección obligada del futuro.

Como conclusión se puede decir que la fibra óptica está revolucionando el mundo de las comunicaciones. Desde el año 2000 a esta parte la mayoría de los sistemas de corta/media distancia a instalar usan fibra óptica. Hoy ya son la elección predominante en larga distancia. Tan sólo en 1983 se habían instalado más de 100.000 *Km* de fibra óptica en todo el mundo (suficientes para dar 2,5 veces la vuelta a la Tierra).

La actividad de investigación y desarrollo efectuada en el mundo día a día, está dando como resultado una constante mejora de la eficiencia y una disminución cada vez más importante de los precios. Nuevos campos, tales como la óptica integrada y los sensores de fibra óptica, son sectores en los cuales la actividad de investigación está ya hoy dando importantes resultados.

AUTOEVALUACIÓN

CAPITULO 1: ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

1) ¿Qué entiende por modulación y que tipos de modulación existen?
2) Defina los la Modulación de Frecuencia y de Amplitud y sus características principales.
3) ¿Cuáles son las Bandas de Frecuencia y sus Márgenes?
4) Exprese y defina las tres formas en que se propaga una transmisión de Radio.
5) Explique las características de la propagación de las Frecuencias Muy Altas (VHF).
6) ¿Cuál es el alcance de las frecuencias Bajas, Medias y Altas de la Transmisión de AM?
7) ¿Qué es el umbral de audición y umbral de sensación desagradable?
8) Explique las características del espectro visible

CAPITULO 2: ECUACIONES DE MAXWELL

1) ¿Cuáles son los sistemas de coordenadas conocidos?
2) ¿Qué son y cómo se utilizan las coordenadas generalizadas?
3) ¿Cómo definimos un vector de posición?
4) ¿Para qué se realiza el cambio de variables o por que uno se mueve de un sistema coordenado a otro?
5) Cómo se calcula el volumen en cada uno de los sistemas de coordenadas.
6) Realice una tabla de equivalencias entre los sistemas.
7) ¿Cómo se utilizan en la práctica las coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas?
8) Definir campos escalares y vectoriales
9) ¿Qué es el teorema de Stokes ?

10) ¿En qué se diferencia el teorema de Stokes con el teorema de la divergencia?

11) ¿Qué son gradiente, divergencia y rotor? Explique las características de cada uno.

12) ¿Qué es el operador vector diferencial?

13) ¿Qué son las identidades vectoriales?

14) ¿Cuáles son los postulados de la electrostática en el espacio libre?.

15) ¿Qué dice la ley de Coulomb?

16) ¿ Cuáles son los postulados de la magnetostática en el espacio libre?.

17) ¿Cuál es la relación entre la densidad de desplazamiento eléctrico (D) y la intensidad de campo eléctrico (E)?

18) ¿Cuál es la relación entre la intensidad de campo magnético (H) y la densidad de flujo magnético (B).

19) ¿Cuál es la ecuación de continuidad? ¿Qué relación tiene con Teoría de los circuitos?

20) ¿Por qué se dice que la ley Ampere falla en algunas ocasiones?

21) ¿Qué aplicación tienen las ecuaciones de Maxwell?

22) ¿En que influyen las corrientes desplazamiento?

23) Confeccione una Tabla de las Ecuaciones de Maxwell en sus formas integral y vectorial/ diferencial, indique dónde se utiliza cada tipo.

24) ¿Qué entendemos por Inducción Electromagnética?

25) ¿Qué nos dice la generalización de la ley de Ampere?

26) ¿Qué significa el nuevo término agregado en la Ley de Ampere Generalizada?

27) Expresar Las cuatro ecuaciones de Maxwell en forma fasorial

CAPITULO 3: CONDICIONES DE FRONTERA O DE CONTORNO

1) ¿Qué constantes necesita para conocer el medio por el cual se propaga la onda?
2) ¿Grafique y explique las componentes tangenciales y normales de un vector.
3) ¿Qué características tiene un medio homogéneo e isotrópico?
4) Exprese la definición de frontera o contorno de un medio.
5) ¿Qué sucede con las componentes Tangenciales en el Campo Eléctrico?
6) ¿Qué sucede con las componentes Normales en el Campo Eléctrico?

7) ¿Qué sucede con las componentes Tangenciales en el Campo Magnético?

8) ¿Qué sucede con las componentes Normales en el Campo Magnético?

9) ¿Por qué si usamos medios discontinuos no podemos utilizar las ecuaciones de Maxwell en la forma vectorial diferencial?

10) ¿A qué se denomina profundidad de penetración o efecto Sking?

11) ¿Cómo se produce la densidad de corriente lineal en la superficie del medio conductor J_{cs}?

12) ¿Qué aplicación práctica tiene este fenómeno?

CAPITULO 4: ECUACIÓN. DE ONDA ELECTROMAGNÉTICA EN MEDIOS CONTINUOS

1) ¿Qué es una onda plana uniforme?

2) ¿Qué es la impedancia intrínseca de un medio?

3) ¿Cuál es la ecuación general de la onda del campo eléctrico y la del campo magnético?

4) ¿Cuál es la constante de atenuación, cuál es la constante de fase y cuál es la magnitud de cada una?

5) ¿Cuáles son las propiedades de las ondas electromagnéticas?

6) ¿Cuál es la relación de velocidad de propagación según el medio?

7) ¿Cuál es la expresión analítica de una onda Electromagnética en un medio homogéneo, isotrópico, libre de cargas y de corrientes?

8) ¿Qué información contiene la constante de propagación gama de un medio dado y que indica el factor de disipación?

9) ¿Qué nos indica la constante de profundidad de penetración?

CAPITULO 5: POLARIZACIÓN DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

1) ¿Qué se entiende por polarización?

2) Indique los diferentes tipos de polarización.

3) ¿Por qué para definir polarización usamos el campo eléctrico y no el magnético?

4) ¿A qué se refiere la polarización de una antena?

5) ¿Cómo es posible captar ondas polarizadas horizontalmente con una antena vertical de un automóvil?

6) ¿Cuándo hay polarización elíptica y cuando circular?

7) ¿Cuántos tipos de polarización lineal existen?

8) ¿Por qué, si una emisora de FM transmite con polarización horizontal un auto con una antena vertical puede captarla?

9) ¿Cómo se puede simular la gráfica de los distintos tipos de polarización con un osciloscopio?

CAPITULO 6: VECTOR DE POYNTING

1) ¿Qué propiedades tienen las ondas electromagnéticas?

2) ¿Qué es la modulación?

3) ¿A qué se denomina vector de Poynting?

4) Explique cada uno de los términos de la formula final del Teorema de Poynting.

5) ¿Qué conclusiones saca con el Teorema de Poynting?

6) ¿Cómo se comporta el vector de Poynting con respecto al tiempo?

7) ¿Cómo se comporta el vector de Poynting con respecto al espacio?

8) ¿Cuáles son los valores complejos, real e imaginario del Vector de Poynting?

9) ¿Cuál es la potencia transportada por una onda electromagnética plana y uniforme?

10) ¿Qué sucede cuando una onda electromagnética incide normalmente sobre la superficie de un medio muy conductor?

CAPÍTULO 7: REFLEXIÓN NORMAL ENTRE DOS MEDIOS DIELÉCTRICOS

1) ¿Qué es y cómo se produce la Reflexión normal entre dos medios dieléctricos perfectos?

2) ¿Cuáles son las condiciones de continuidad en dos medios dieléctricos?

3) ¿A qué definimos como coeficiente de reflexión y de refracción tanto de campos eléctricos como magnéticos? Expresar dichas ecuaciones.

4) ¿Por qué tiene que cambiar de sentido el campo eléctrico o magnético reflejado?

5) Demostrar que sucede con los coeficientes de reflexión tanto en los campos eléctricos como magnéticos para las distintas relaciones entre las impedancias intrínsecas de ambos medios.

6) ¿A que llamamos impedancia de campo? Expresar la ecuación correspondiente.

CAPÍTULO 8: REFLEXIÓN NORMAL ENTRE DIELÉCTRICO Y CONDUCTOR PERFECTO

1) ¿Qué se entiende por reflexión normal sobre un conductor perfecto?

2) ¿Cómo se determina y cuál es la expresión del campo eléctrico total?

3) ¿Cuál es la expresión de campo magnético total?

4) ¿Qué conclusiones sacamos al comparar de $E_t x(z,t)$ con $H_t y(z,t)$

5) ¿En un medio perfectamente conductor como es la intensidad de campo eléctrico y magnético?

6) ¿Qué representa el gráfico obtenido mediante el diagrama de Crank?

CAPÍTULO 9: CÁLCULO ANALÍTICO Y GRÁFICO EN REFLEXIÓN PERPENDICULAR

1) Explique el Teorema del Coseno.

2) ¿Qué es el diagrama de Crank?

3) ¿Cómo se calcula el campo Eléctrico total en una línea de transmisión con reflexión?

4) ¿Cómo se calcula el campo Eléctrico total utilizando el Diagrama de Crank?

5) Defina la Relación de Onda Estacionaria (ROE).

6) ¿Qué es al ábaco de Smith?

7) Defina los tipos de escalas (Circulares y Radiales) del Ábaco de Smith.

8) ¿Cómo se calcula una impedancia normalizada para ingresar al Ábaco de Smith?

9) ¿Cómo se calcula el valor y la distancia al máximo y al mínimo?

10) Explique la ubicación de impedancias y admitancias normalizadas en el ábaco.

CAPITULO 10: REFLEXIÓN OBLICUA

1) ¿Para qué se usan los cosenos directores?

2) ¿Cómo puede expresarse la ecuación de una onda que se propaga en una dirección arbitraria?

3) ¿Cómo puede expresarse la longitud de onda y la velocidad de fase?

4) ¿Qué características tiene la velocidad de fase y la longitud de onda?

5) ¿Cómo se definen planos de fase constante para una dirección arbitraria?

6) ¿Qué se entiende por incidencia oblicua?

7) ¿Qué podemos decir de la polarización horizontal?

8) ¿Qué es la velocidad de desplazamiento v_p ?

9) ¿Cuáles son los casos a considerar cuando se analiza la incidencia de una onda sobre una superficie límite separadora de dos medios?

10) ¿Por qué es más preciso utilizar los términos PARALELO O PERPENDICULAR al referirnos a cualquiera de los dos casos de reflexión?

11) ¿En qué se aplica principalmente el fenómeno de la reflexión oblicua en la práctica?

12) En una polarización perpendicular: ¿cómo se representa gráficamente la intensidad del campo eléctrico total?

13) ¿Cómo vincula la reflexión oblicua y los modos de propagación en una guía de onda?

14) ¿Cómo define y fundamenta la ley de Snell?

CAPITULO 11: GUÍAS DE ONDA

1) ¿Qué es una Guía de Onda?

2) ¿Cómo se clasifican los modos de propagación?

3) ¿Cómo determinamos la configuración del Campo Electromagnético dentro de la Guía de Onda y que condiciones limites debemos tener en cuenta?

4) ¿Cuáles son las ecuaciones para el modo TM?

5) ¿Cuáles son las ecuaciones para el modo TE?

6) ¿Qué formas de guías de onda existen?

7) ¿Qué es el Modo dominante?

8) ¿Qué es la frecuencia de corte y como se calcula?

9) ¿Cuál es la disposición de las líneas de campo de TM y de TE y cómo se ubica el elemento radiante?

10) ¿Cuáles son las ventajas de una Guía de Ondas sobre una Línea de Transmisión?

CAPITULO 12: LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

1) ¿ Qué se entiende por línea de transmisión?. Describa sus distintos tipos.

2) ¿Cómo se analiza una línea de transmisión?

3) Expresar los fundamentos y las magnitudes de los parámetros distribuidos.

4) ¿Qué es la impedancia característica de la línea?

5) ¿Qué es el coeficiente de reflexión?

6) ¿Qué consideraciones debemos tener en cuenta para un correcto funcionamiento de la Línea de Transmisión?

7) Realizar un análisis de la línea de transmisión como cuadripolo.

8) Que ocurre con la impedancia de entrada en una línea con carga en corto circuito o circuito abierto. Demostrar analíticamente.

CAPITULO 13: ADAPTACIÓN DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

1) ¿Por qué debe adaptarse una línea de transmisión?

2) ¿Qué es un STUB?

3) Cuáles son los pasos a seguir en el ábaco de Smith para adaptar una línea de transmisión con un ramal sintonizador (Stub)?

4) ¿Cómo se realiza el cálculo del ramal sintonizador (stub)?

5) ¿Qué es el círculo auxiliar?

6) ¿Cuáles son los pasos para la adaptación con dos stubs?

7) Por qué es mejor adaptar una línea con 2 Stubs?

CAPITULO 14: RADIACIÓN

1) ¿Qué es la Radiación electromagnética?

2) ¿Qué son los potenciales retardados?

3) ¿Cómo está determinado el Campo Electromagnético generado por un elemento de corriente en un punto cualquiera?

4) ¿A qué distancia marca la separación entre campo de inducción y de radiación? y ¿por qué?

5) ¿Cómo se obtiene un dipolo eléctrico Hertziano y que se debe tener en cuenta para el mismo?

6) ¿De qué depende el flujo medio de potencia saliente en un elemento de corriente?

7) ¿Cómo fundamenta el Poynting de Radiación?

8) ¿Qué es la Resistencia de Radiación?

9) ¿Cuál es la supuesta distribución de la corriente a lo largo de una antena?

CAPITULO 15: ANTENAS

1) ¿Qué es una antena y cuáles son sus dos funciones primordiales?
2) ¿Cuáles son los parámetros que coexisten en una antena?
3) ¿Cómo se clasifican las antenas de onda corta?
4) ¿Cómo está compuesta una antena Yagi?
5) ¿Qué es la polarización en una antena?
6) ¿De qué depende la impedancia característica en una antena y como se calcula?
7) ¿Qué significa resistencia de radiación en una antena?
8) ¿Qué es la Impedancia de Entrada de una antena?
9) Desarrolle el concepto de ganancia de antena.
10) ¿Qué es el Área Efectiva?
11) ¿Cómo influyen en el diagrama de directividad los elementos directores y reflectores?
12) ¿Qué otros tipos de agrupaciones de antenas se pueden encontrar, según sus características mas importantes?

CAPITULO 16: FIBRAS OPTICAS

1) ¿En que se basa la tecnología de la fibra óptica?
2) ¿Qué condiciones deben darse para que exista reflexión interna total?
3) ¿Cuál es el ángulo máximo de incidencia y cómo lo define?
4) ¿Cómo clasifica los tipos de fibras ópticas?
5) ¿Cuáles son las causas de perdida en la fibra óptica?
6) ¿Cuáles son las diferencias entre usar un LED o un láser semiconductor como fuente de luz?
7) ¿Cuáles son las principales ventajas que se obtienen con el uso de la fibra óptica?

La presente edición de *Campos Electro-magnéticos y Medios de Enlace*- se terminó de imprimir en Universitas en el mes de marzo de 2019.

Impreso en Argentina

UNIVERSITAS
Editorial
Científica
Universitaria
CÓRDOBA