

Resumen de Medios de enlace

Lianjoshō

Note: no están las unidades 1 y 2, ni teórico ni práctico. Tampoco están los ejercicios 74, 75, 76, 96, 97, 98, 99.

1- MEDIO LINEAL

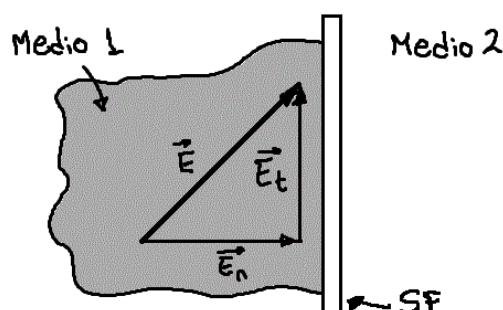
- 2 - COMPONENTES TANGENCIALES { Componente tg del campo E
Componente tg del campo H
- z dielectricos
1 dielect. → 1 cond.
- 3 - COMPONENTES NORMALES { Componente normal del campo D
Componente normal del campo B
- z dielectricos
1 dielect. → 1 cond.

1 - MEDIO LINEAL

En esta unidad se trabaja con medios lineales. Un medio es lineal cuando cumple con las siguientes condiciones:

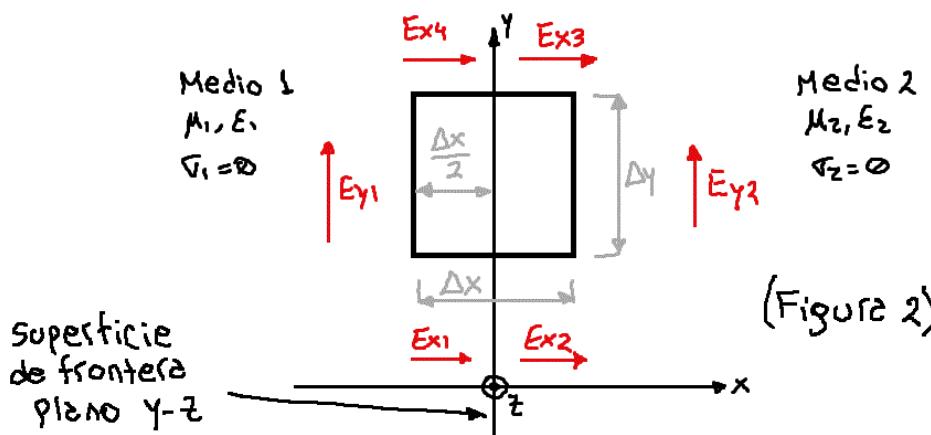
- Es homogéneo: ϵ , σ y μ son ctes.
- Es isotrópico: ϵ , σ y μ son reales.
- Es pasivo: no existe generador de OEM
- Es continuo: para poder usar las ec. Mx.

Se usa el siguiente gráfico para desarrollar los puntos:



2 - COMPONENTES TANGENCIALES

2.1 - Componente tangencial del campo "E"



Como en SF hay una discontinuidad uso las ec. $Mx(i)$; y como el campo normalizado es el E , uso una ecuación q' lo contiene (Z ec. Nx).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

**1*

$$Ex_1 \frac{\Delta x}{2} + Ex_2 \frac{\Delta x}{2} + Ey_2 Ay - Ex_3 \frac{\Delta x}{2} - Ex_4 \frac{\Delta x}{2} - Ey_1 \cdot \Delta y = - \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{*2} \iint_S d\vec{s} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \Delta x \Delta y$$

Aplico el $\lim \Delta x \rightarrow 0$ pues me interesa saber q' ocurre cuando el rectángulo ABCD.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(Ex_1 \frac{\Delta x}{2} + Ex_2 \frac{\Delta x}{2} + Ey_2 Ay - Ex_3 \frac{\Delta x}{2} - Ex_4 \frac{\Delta x}{2} - Ey_1 \cdot \Delta y \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \Delta x \Delta y \right)$$

$$(Ey_2 - Ey_1) \Delta y = 0$$

$$Ey_1 = Ey_2$$

(ec. 1)

2.2- Componente tangencial del campo "H"

2.2-1: Entre 2 medios dielectricos

uso la figura 2 pero en lugar de "E" uso la letra "H", pues estoy considerando este campo (por eso usare la tec. Nx).

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$Hx_1 \frac{\Delta x}{2} + Hx_2 \frac{\Delta x}{2} + Hy_2 Ay - Hx_3 \frac{\Delta x}{2} - Hx_4 \frac{\Delta x}{2} - Hy_1 \cdot \Delta y = \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \iint_S d\vec{s} = \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(Hx_1 \frac{\Delta x}{2} + Hx_2 \frac{\Delta x}{2} + Hy_2 Ay - Hx_3 \frac{\Delta x}{2} - Hx_4 \frac{\Delta x}{2} - Hy_1 \cdot \Delta y \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y$$

(ec. 2)

$$(Hy_2 - Hy_1) \Delta y = 0 \rightarrow Hy_1 = Hy_2$$

*1: Desarrollo la integral como la sumatoria de las contribuciones de los 6 lados del polígono ABCD.

*2: saco la derivada fuera de la integral pues es constante respecto de la superficie en la vecindad de la frontera.

*3: $\iint_S = \Delta x \Delta y$ es la superficie considerada.

2.2-2: Entre un dielectrónico y un conductor perfecto

Antes de hacer el desarrollo con las fórmulas veo los siguientes puntos:

- B en un conductor;
- Distribución de e^- en una superficie y
- Densidad de corriente lineal en una superficie.

Situación de la densidad de campo B en un medio conductor: en un medio conductor, el campo $E = \phi \Rightarrow B = \emptyset$. Esto significa que B_y es discontinua.

Distribución de los electrones libres en la superficie: la corriente en un conductor depende de los e^- , los cuales están sometidos a 2 fuerzas:

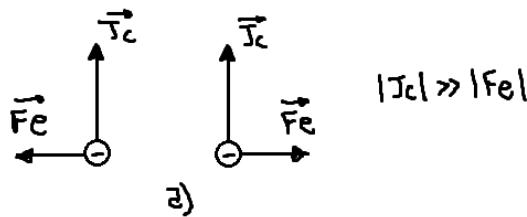
- J_c , que de origen a la densidad de corriente superficial J_{cs} .
- F_e , es la fuerza de repulsión ocasionada por un e^- adyacente.

$|J_{cs}| \gg |F_e|$ y $J_c \parallel J_{cs}$. Si $J_c = \text{sin } \omega t$, entonces los e^- quedan a merced solo de F_e cuando J_c (2 veces \times ciclo) y éstos hacen la redistribución en la superficie del conductor, dejándolo "vacío por dentro". Cuando $J_c = \text{cte}$, entonces \nexists momentos en que $J_c = \emptyset$ y como $|J_c| \gg |F_e|$, se distribuyen los e^- en toda la superficie transversal del conductor.

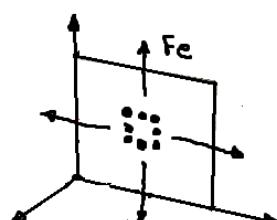
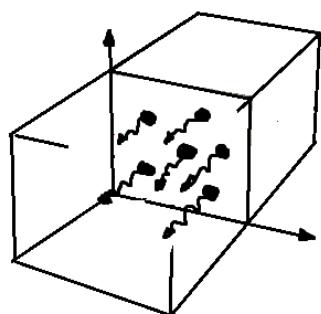
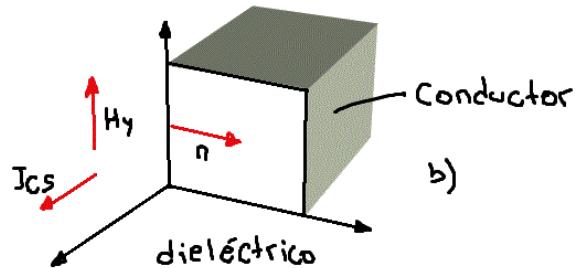
Densidad de corriente lineal en la superficie: J_c se la puede poner como:

$$\vec{J}_c = \frac{I_c}{\Delta S} \hat{k} = \frac{I_c \cdot \hat{k}}{\Delta x \Delta y} = \frac{I_c \cdot \hat{k}}{\Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{\vec{J}_{cs}}{\Delta x}$$

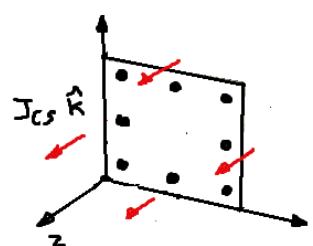
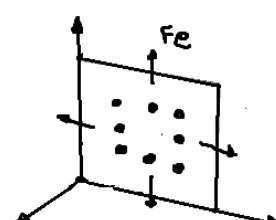
J_{cs} es la densidad de corriente lineal en la superficie. Se puede ver esto si por cada unidad de longitud en el eje "x" tengo una densidad de líneas cuya distribución de corriente es paralela al eje "y".



$$|J_c| \gg |F_e|$$



c)



Desarrollo: arranco con la ZecMx.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

$$Hx_1 \frac{\Delta x}{2} + Hx_2 \frac{\Delta x}{2} + Hy_1 \Delta y - Hx_3 \frac{\Delta x}{2} - Hx_4 \frac{\Delta x}{2} - Hy_1 \cdot \Delta y = \left(J_c + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot \Delta x \Delta y$$

$$= \left(\frac{J_{cs}}{\Delta x} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(Hx_1 \frac{\Delta x}{2} + Hx_2 \frac{\Delta x}{2} + Hy_1 \Delta y - Hx_3 \frac{\Delta x}{2} - Hx_4 \frac{\Delta x}{2} - Hy_1 \cdot \Delta y \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{J_{cs}}{\Delta x} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y$$

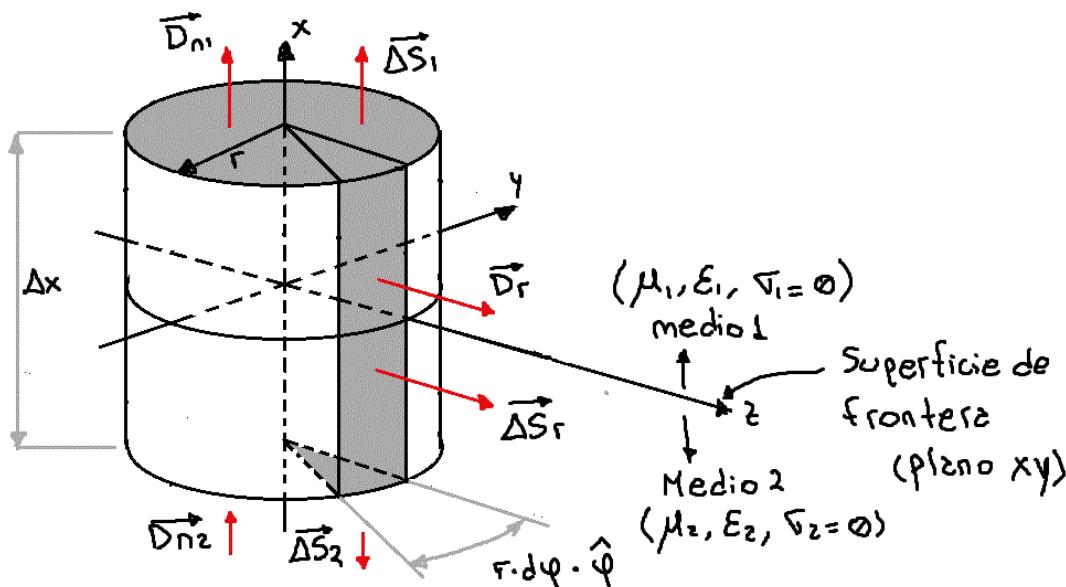
$$(Hy_2 - Hy_1) \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\vec{J}_{cs} \Delta y + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Delta x \Delta y \right)$$

$$-Hy_1 \Delta y = \vec{J}_{cs} \cdot \Delta y$$

$$-Hy_1 = \vec{J}_{cs} \quad (\text{ec. 3})$$

3- COMPONENTES NORMALES

Para esta subsección me baso en la siguiente figura:



*1: $J_c = J_{cs}/\Delta x$ hago el reemplazo J_c como función de la densidad de corriente lineal en la superficie.

*2: Dentro de un conductor $E = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow Hy_2 = 0$.

3.1 - Componente normal de la densidad de campo eléctrico "D"

3.1-1: Entre dos dielectricos

Como este D involucrada, uso la 3ec.Mx

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q = \int_V \rho \cdot dV$$

**1 *2*

$$-D_{n2} \Delta S_2 + D_r \Delta S_r + D_{n1} \Delta S_1 = \rho \int_V dV$$

$$(-D_{n2} + D_{n1}) \Delta S + D_r (\tau \Delta \varphi \Delta x) = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(-D_{n2} + D_{n1}) \Delta S + D_r (\tau \Delta \varphi \Delta x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho \Delta S \Delta x$$

$$(-D_{n2} + D_{n1}) \Delta S = 0$$

$D_{n1} = D_{n2}$ (ec. 4)

3.1-2: Entre un dielectrico y un conductor perfecto

Sucede lo mismo que en el caso de la componente tangencial de H cuando pasa de un dielectrico a un conductor perfecto, las cargas se acumulan en la superficie generando así una densidad de carga superficial ρ_s . Para evitar la indeterminación pongo a esta densidad " ρ_s " como una densidad volumétrica " ρ " cuyo volumen es " Δx ":

$$\rho = \frac{\Delta \rho}{\Delta V} = \frac{\Delta \rho}{\Delta S \cdot \Delta x} = \frac{\rho_s}{\Delta x}$$

Parto ahora de la 3ec.Mx: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q = \int_V \rho dV$

$$-D_{n2} \Delta S_2 + D_r \Delta S_r + D_{n1} \Delta S_1 = \rho \int_V dV = \rho \cdot \Delta V = \frac{\rho_s}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta x$$

$$(-D_{n2} + D_{n1}) \Delta S + D_r (\tau \Delta \varphi \Delta x) = \rho_s \cdot \Delta S$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(-D_{n2} + D_{n1}) \Delta S + D_r (\tau \Delta \varphi \Delta x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho_s \cdot \Delta S$$

Δ

$$\Delta S \cdot (-D_{n2} + D_{n1}) = \rho_s \cdot \Delta S$$

*3 = 0

$D_{n1} = \rho_s$ (ec. 5)

*1: $\Delta S_1 = \Delta S_2$, por lo que uso un sólo ΔS .

*2: La superficie $\Delta S_r = \text{altura} \times \text{base} = \Delta x \cdot (\rho \cdot \Delta \varphi)$

*3: En un conductor $E = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow D_{n2} = 0$

3.2 - Componente normal de la densidad de campo "B"

Uso la ec.Mx pues ahí aparece "B".

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$-B_{n2}\Delta S + B_r \Gamma \Delta \varphi \Delta x + B_{n1}\Delta S = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-B_{n2}\Delta S + B_r \Gamma \Delta \varphi \Delta x + B_{n1}\Delta S) = 0$$

$$(-B_{n2} + B_{n1})\Delta S = 0$$

$$\boxed{B_{n1} = B_{n2}} \quad (\text{ec. 6})$$

4 - TABLA RESUMEN

ec.Mx usada	$\nabla_1 = \nabla_2 = 0$	$\nabla_1 = \infty, \nabla_2 \rightarrow \infty$	Nro de condición
2da $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \vec{dS}$	$E_{t1} = E_{t2}$		1r2
1ra $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (J + \partial \vec{D} / \partial t) \vec{dS}$	$H_{t1} = H_{t2}$	$-H_{t1} = J_{cs}$	2d2
3ra $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q = \int_V \rho dV$	$D_{n1} = D_{n2}$	$D_{n1} = \rho_s$	3r2
4ta $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$		$B_{n1} = B_{n2}$	4t2

Problema 24: Expresar las condiciones de contorno que cumplen E y H en la frontera de un medio.

Componentes tangenciales

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

(dos dielectricos)

$$H_{t1} = J_s \quad H_{t2} = 0$$

(1 dielectrico y un cond. perf.)

Componentes normales

$$D_{n1} = D_{n2}$$

(dos dielectricos)

$$D_{n1} = \rho_s \quad D_{n2} = 0$$

(1 dielec. y 1 cond. perf.)

$$B_{n1} = B_{n2}$$

Problema 25: Hallar θ_1 con el que emerge un campo E de un material con $\epsilon_1 = \epsilon_0$, si en el medio 2 de $\epsilon_2 = 10\epsilon_0$ su ángulo $\theta_2 = 84,3^\circ$.

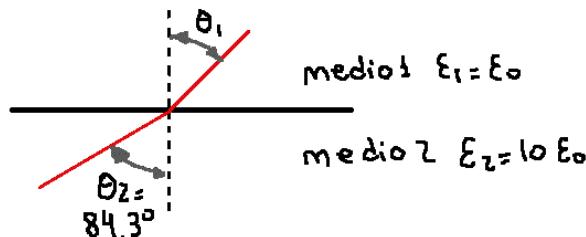
$$E_{t1} = E_{t2} \quad (\text{ec. 1})$$

$$D_{n1} = E_1 \cdot E_{n1} = D_{n2} = E_2 \cdot E_{n2} \quad (\text{ec. 4})$$

Divido las 2 ec. y tengo:

$$\frac{E_{t1}}{\epsilon_1 \cdot E_{n1}} = \frac{E_{t2}}{\epsilon_2 \cdot E_{n2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\epsilon_2} \rightarrow \theta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \operatorname{tg} \theta_2 \right) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\epsilon_0}{10\epsilon_0} \operatorname{tg} 84,3^\circ \right) = 45^\circ = \theta_1$$



Problema 26: Halla θ_1 con el que emerge un campo B de un material con $\mu_1 = \mu_0$, si en el medio 2 de $\mu_2 = 10\mu_0$ su ángulo $\theta_2 = 74,6^\circ$.

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (\text{ec. 2})$$

$$B_{n1} = \mu_1 \cdot H_{n1} = B_{n2} = \mu_2 \cdot H_{n2} \quad (\text{ec. 6})$$

La división da:

$$\frac{H_{t1}}{\mu_1 \cdot H_{n1}} = \frac{H_{t2}}{\mu_2 \cdot H_{n2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\mu_2} \rightarrow \theta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \theta_2 \right) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\mu_0}{10\mu_0} \operatorname{tg} 74,6^\circ \right) = 19,95^\circ = \theta_1$$

1-DEFINICIONES

$\left\{ \begin{array}{l} \text{OEM en un medio homogéneo y libre de } e^- \\ \text{EcMx en un medio libre de cargas.} \\ \text{Onda plana.} \\ \text{Fasores.} \end{array} \right.$

2-ECUACIÓN DE OEM

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cálculo de las constantes de la ec. de onda.} \\ \text{Ec. de onda plana.} \\ \text{Ec. de onda en conductores y dielectricos.} \end{array} \right.$

3- POLARIZACIÓN

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Clasificación de la polarización lineal.} \\ \text{Resón de polarización usando coord. rectang.} \end{array} \right.$

1-DEFINICIONES

1.1-OEM en un medio homogéneo y libre de cargas

Trabajo con un medio lineal. Un medio es lineal cuando las constantes que caracterizan al medio (E , μ y ∇) son invariables (medio homogéneo) y reales (medio isotrópico).

En un medio homogéneo $\rightarrow D/E = \text{cte}$, $B/H = \text{cte}$ y $J/E = \text{cte}$.

" " " isotrópico $\rightarrow D \parallel E$, $B \parallel H$ y $J \parallel E$.

1.2-Ecuaciones de Maxwell en un medio libre de cargas (ec. de Helmholtz)

Si el medio no tiene cargas libres entonces la densidad volumétrica de carga y la densidad de corriente son nulas (si $e^- = 0 \Rightarrow \rho = J = 0$) y las ecuaciones de Maxwell quedan

$$\begin{array}{ll} 1r & \nabla \cdot H = J_c + \partial D / \partial t = E \partial E / \partial t \\ 2d & \nabla \cdot E = -\mu \partial H / \partial t \\ 3s & \nabla \cdot D = \rho = 0 \\ 4t & \nabla \cdot B = 0 \end{array}$$

Arranco de la ecuación 2d

$$\nabla \cdot E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{***}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot E) = \nabla \cdot \left(-\mu \frac{\partial H}{\partial t} \right)$$

*1: Aplico el rotor a ambos miembros de la ecuación.

$$*1 \rightarrow \underbrace{\nabla(\nabla \cdot E)}_{*3} - \nabla^2 E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla H) \quad *2$$

$$-\nabla^2 E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(E \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\nabla^2 E = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}$$

(ec. 1) 1ra ecuación de Helmholtz

Ahora hago lo mismo con la Ecmx.

$$\nabla \cdot H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot \left(\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$$\underbrace{\nabla(\nabla \cdot H)}_{*5} - \nabla^2 H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot E) \quad *4$$

$$-\nabla^2 H = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial H}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\nabla^2 H = \mu \epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}}$$

(ec. 2) 2da ecuación de Helmholtz

Estas son las dos condiciones que deben cumplir los campos E y H en una ecuación de onda; no puedo tener E y H por separado.

1.3 - Onda plana

Una onda es plana cuando se propaga en una sola dirección. Ondas de este tipo se encuentran solo a una distancia muy grande de las fuentes de origen.

1.3-1: Propagación de una onda plana (ecuación de Helmholtz)

Parte del laplaciano (del campo E) expresado en sus coordenadas cartesianas.

*1: El rotor del rotar de una función vectorial es igual al gradiente de su divergencia menos su laplaciano (identidad vectorial).

*2: Reemplazo $\nabla \times H$ por la 2da Ecmx.

*3: Como es un medio libre de cargas $\nabla D = \epsilon \nabla E = 0$.

*4: Reemplazo $\nabla \cdot E$ por la 1ra Ecmx.

*5: Reemplazo $\nabla \cdot H$ por la 2da Ecmx.

$$\nabla^2 E = (\nabla^2 E_x) \hat{i} + (\nabla^2 E_y) \hat{j} + (\nabla^2 E_z) \hat{k} \quad (\text{ec. 3})$$

$$\begin{aligned} \circ \nabla^2 E_x &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}} \\ \circ \nabla^2 E_y &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}} \\ \circ \nabla^2 E_z &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}} \end{aligned} \quad (\text{ec. 3.1})$$

Tomo por ejemplo una onda cuyo eje de propagación sea "z", entonces $\partial E_x / \partial x = \partial E_y / \partial y = 0$. Con esta restricción lo único no nulo es lo señalado con gris. Tomo ahora la componente en "x" (versor \hat{i}) de la ec. 3 y le aplico la 1ra ecuación de Helmholtz (ec. 1).

$$\underbrace{\nabla^2 E}_{\substack{\text{ec. 3 en "x"} \\ \text{}}}= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

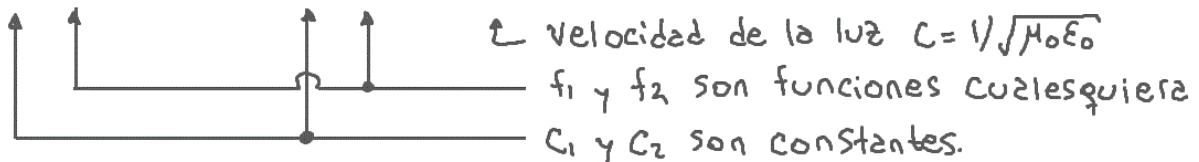
Igualdad de Helmholtz
(ec. 1)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

La solución a esta ecuación diferencial homogénea de 2do orden es la "ecuación de onda" y tiene la forma de

Onda incidente
(se aleja del generador) Onda reflejada
(ausente si \exists superf. reflectora)

$$E(z,t) = C_1 \cdot f_1(z - v_0 t) - C_2 \cdot f_2(z + v_0 t) \quad (\text{ec. 4}) \text{ Solución a la ec. de Helmholtz}$$



1.3-2: Ecuación de una onda plana uniforme

Una onda plana y uniforme es aquella en la cual sus campos E y H son independientes de 2 dimensiones ("x" e "y" en este material) y funciones de la dimensión restante ("z" en este caso).

Parto de aplicar a las componentes del campo E la 1ra ecuación de Helmholtz (ec. 1).

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

(ec. 5)

Por otro lado, se que en un medio libre de cargas la densidad volumétrica de cargas es nula ($\rho = 0$), esto implica que

$$0 = \rho = \nabla \cdot D = E \cdot (\nabla \cdot E) = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}_{*1} = 0 + 0 + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{1ra condición})$$

Reemplazando ahora la 1ra condición en la ec. 5

$$\mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{2da condición})$$

Conclusión: una onda que cumple con cualquiera de estas dos condiciones no puede formar parte de una onda móvil, y por este motivo se puede hacer que $E_z = 0$.

Relación entre E_y y H : luego de un pedorro e inutil desarrollo, Abad llega a la siguiente relación

$$\eta = \frac{E_y}{H_y} = - \frac{E_y}{H_x} = \sqrt{\epsilon/\mu}$$

(la constante η se llama "impedancia intrínseca del medio". Para el vacío, η vale $\eta_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \approx 377 \Omega$).

1.4 - Fasores

En las ecuaciones y las ec. de Helmholtz hago los siguientes reemplazos

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \{ E \cdot e^{j\omega t} \} \quad \vec{H} = \operatorname{Re} \{ H \cdot e^{j\omega t} \}$$

En las lec Mx tengo

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$\nabla \times (H e^{j\omega t}) = \nabla (E e^{j\omega t}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (E e^{j\omega t})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \vec{E} + \epsilon j\omega (E e^{j\omega t})$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = (\nabla + j\omega \epsilon) \vec{E}} \quad (\text{ec. 6}) \quad \text{lec Mx(f)}$$

*1: Recordar que en una onda plana y uniforme la ecuación de onda no depende ni de "x" ni de "y".

Con la 3 ecMx tengo:

$$\nabla \cdot D = \rho$$
$$\nabla \cdot \left\langle E \operatorname{Re} \left\{ E e^{j\omega t} \right\} \right\rangle = \rho$$

$\nabla \cdot D = \rho$

(ec.7) 3 ecMx(f)

De la 3 ecMx tengo

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (H e^{j\omega t})$$
$$= -j\omega \mu (H e^{j\omega t})$$

$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}$

(ec.8) 2 ecMx(f)

Si aplico divergencia a esta ecuación tengo

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (-j\omega \mu \vec{H})$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = -j\omega \nabla \cdot (\mu \vec{H})$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = -j\omega \nabla \cdot \vec{B}$$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(ec.9) 4 ecMx(f)

Puedo decir que reemplazo $\partial/\partial t = j\omega$, hago esto en las ecuaciones 1 y 2

$$\nabla^2 E = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu \epsilon (j\omega)^2 E = -\omega^2 \mu \epsilon \cdot \vec{E} = \nabla^2 E$$
(ec.10) 1 ecHelmholtz(f)

$$\nabla^2 H = \mu \epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \mu \epsilon (j\omega)^2 H = -\omega^2 \mu \epsilon \cdot \vec{H} = \nabla^2 H$$
(ec.11) 2 ecHelmholtz(f)

*1: La divergencia del rotor de una función es igual a cero, es una identidad vectorial.

*2: Reemplazo $\nabla \cdot D = \rho$ (3 ecMx).

2- ECUACIÓN DE OEM

2.1- Cálculo de las constantes de la ecuación de onda

Calculo primero las constantes de la columna izquierda; y cuando tengo más datos, los de la derecha.

γ : Constante de propagación.

β : constante de fase.

α : constante de atenuación.

δ : constante de profundidad
de penetración.

ω : frecuencia angular.

λ : longitud de onda.

T : periodo.

f : frecuencia de trabajo.

v_p : velocidad de propagación.

η : impedancia intrínseca del medio.

2.1-1: Constante de propagación γ

Acomodando la ecuación lo tengo

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu \epsilon E = 0$$

pero este ecuación es cuando el medio está libre de cargas. La ecuación completa es

$$\nabla^2 E + \underbrace{(\omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma)}_{-\gamma^2} E = 0 \quad \text{ec. 12}$$

donde lo que está entre paréntesis es $-\gamma^2$. Por otro lado, se define a γ como

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Igualo esta ecuación con la anterior y tengo

$$-\gamma^2 = -\gamma^2$$

$$\omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma = -(\alpha + j\beta)^2$$

$$\omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma = -(\alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta)$$

$$-\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta$$

Igualo las partes reales e imaginarias

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \quad (\text{ec. 13})$$

$$2\alpha\beta = \omega \mu \sigma \quad (\text{ec. 14})$$

Antes de continuar, despejo γ de la ec. 12

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma} \quad (\text{ec. 15})$$

La constante σ (de conductividad) produce un gran cambio en el comportamiento de la onda, y su valor hace que el medio sea dielectrónico ($\sigma=0$) o conductor ($\sigma \rightarrow \infty$).

$$\text{Dielectrónico } \beta_d = \beta|_{\sigma=0} = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + j \mu \sigma \epsilon} = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + j \mu \sigma \epsilon} = \sqrt{-1} \omega \sqrt{\mu \epsilon} = j \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (\text{ec. 16})$$

$$\text{Conductor } \beta_c = \beta|_{\sigma \rightarrow \infty} \approx \sqrt{j \mu \omega \epsilon} = (\omega \mu \epsilon e^{j\pi/2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\omega \mu \epsilon} e^{j\pi/4} \quad (\text{ec. 17})$$

2.1-2: Constante de fase β

Despejo α de la ec. 14 y lo reemplazo en la ec. 13.

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mu \epsilon &= \beta^2 - \underbrace{\left(\frac{\omega \mu \sigma}{2\beta}\right)^2}_{\alpha \text{ despejado de la ec. 14}} \\ \beta^2 - \left(\frac{\omega \mu \sigma}{2\beta}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon &= 0 \\ \beta^4 - \omega^2 \mu \epsilon \beta^2 - \left(\frac{\omega \mu \sigma}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resuelvo por Bézout:

$$\beta^2 = -\frac{(-\omega^2 \mu \epsilon)}{2} + \frac{\sqrt{(-\omega^2 \mu \epsilon)^2 - 4(-1)\left(\frac{\omega \mu \sigma}{2}\right)^2}}{2} = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} + \frac{\sqrt{(\omega^2 \mu \epsilon)^2 + 4\left(\frac{\omega \mu \sigma}{2}\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} + \frac{\sqrt{\omega^4 \mu^2 \epsilon^2 + \omega^2 \mu^2 \sigma^2}}{2} = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} + \frac{\sqrt{\omega^4 \mu^2 \epsilon^2 \left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}\right)}}{2} =$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} + \frac{\omega^2 \mu \epsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}}{2} = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}\right]$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}\right]} \quad (\text{ec. 18}) \text{ constante de fase}$$

$$\text{Dielectrónico } \beta_d = \beta|_{\sigma=0} = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1+0}\right)} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (\text{ec. 19})$$

$$\text{Vacío } \beta_0 = \beta|_{\epsilon=\epsilon_0, \mu=\mu_0} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx (3,35n) \omega \quad (\text{ec. 20})$$

$$\text{Conductor } \beta_c = \beta|_{\sigma \rightarrow \infty} \approx \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}\right]} \approx \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \cdot \frac{\sigma}{\omega \mu}} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \epsilon}{2}} \quad (\text{ec. 21})$$

2.1-3: Constante de atenuación

Reemplazo el β de ec.18 en la ec.13

$$\alpha^2 - \left\{ \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \right] \right\}^2 = -\omega^2 \mu\epsilon$$

$$\alpha^2 = -\omega^2 \mu\epsilon + \omega^2 \frac{\mu\epsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \right] = -\omega^2 \mu\epsilon + \frac{\omega^2 \mu\epsilon}{2} + \frac{\omega^2 \mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2}$$

$$\alpha^2 = -\frac{\omega^2 \mu\epsilon}{2} + \frac{\omega^2 \mu\epsilon}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} = \frac{\omega^2 \mu\epsilon}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \right]$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \right]} \quad (\text{ec. 22}) \quad \text{constante de atenuación}$$

$$\text{Dielectrónico: } \alpha_d = \alpha|_{\sigma=0} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} (-1 + \sqrt{1 + 0})} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} (-1 + 1)} = 0 \quad (\text{ec. 23})$$

$$\text{Vacio: } \alpha_0 = \alpha|_{\mu=\mu_0, \epsilon=\epsilon_0} = 0 \quad (\text{ec. 24})$$

$$\text{Conductores: } \alpha_c = \alpha|_{\sigma \rightarrow \infty} \cong \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(-1 + \frac{\sigma}{\omega\mu} \right)} \cong \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (\text{ec. 25})$$

Nomenclatura:

$$\text{cambio de variable: } h_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \quad h_2 = \frac{\omega^2 \mu\epsilon}{2}$$

$$\text{entonces } \alpha \text{ y } \beta \text{ quedan: } \alpha = \sqrt{h_2(h_1 - 1)} \quad \beta = \sqrt{h_2(h_1 + 1)}$$

2.1-4: Constante de profundidad de penetración δ

Es la longitud que penetra una OEW en un conductor perfecto en donde se reduce a un 36,78% de su valor en el dielectrónico. Se define como

$$\delta [m] = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{ec. 26})$$

2.2 - Ecuación de onda plana

2.2-1: Ecuación de una onda en un medio con pérdidas

Parto de la ec.12 en el eje "x" y al reemplazo del campo E la zóptico la igualdad de la ec. 3.1

$$\nabla^2 E_x - \gamma^2 E_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x = 0$$

La solución para esta ecuación diferencial es

$$\tilde{E}_x(z) = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{+\gamma z} = C_1 e^{-(\alpha+j\beta)z} + C_2 e^{+(\alpha+j\beta)z}$$

La solución completa involucra el tiempo, es decir

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x(z;t) &= \tilde{E}_x(z) e^{j\omega t} = C_1 e^{-(\alpha+j\beta)z} e^{j\omega t} + C_2 e^{+(\alpha+j\beta)z} e^{j\omega t} \\ &= C_1 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} + C_2 e^{+\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} \end{aligned} \quad (\text{ec. 27})$$

Para trabajar con la parte real de este tensor hago

$$E_x(z;t) = \operatorname{Re}\{\tilde{E}_x(z;t)\} = C_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + C_2 e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

donde el primer término es una onda que se mueve en el eje positivo de "z", llamaremos a esta onda la "onda incidente", por esto $C_1 = E_i$; el segundo término es una onda que se mueve en el eje negativo "z", por esto la llamaremos "onda reflejada", entonces $C_2 = E_r$. La ecuación anterior queda

$$E_x(z;t) = E_i e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + E_r e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \quad (\text{ec. 28})$$

A un campo E en "x" le corresponde un campo H en "y". Para hallarlo utilizo de $\nabla \times M_x(f)$ y desarrollo $\nabla \times E$.

$$\underbrace{-j\mu\omega H}_{\text{2ecMx}(f)} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{j} \left(0 - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \hat{k} \left(0 - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \hat{j} \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad *1$$

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{1}{-j\mu\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{E_x}_{*2} = \frac{1}{-j\mu\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[E_i e^{-(\alpha+j\beta)z} e^{j\omega t} + E_r e^{+(\alpha+j\beta)z} e^{j\omega t} \right] \\ &= \frac{1}{-j\omega\mu} e^{j\omega t} \left[E_i (-\gamma) e^{-\gamma z} + E_r \cdot \gamma \cdot e^{+\gamma z} \right] = \end{aligned}$$

*3

*1: $E \neq f(x,y) \Rightarrow E_x \neq f(x,y) \Rightarrow \partial E_x / \partial y = 0$.

*2: Reemplazo E_x por la ecuación 27 (con $C_1 = E_i$ y $C_2 = E_r$) para que sea más fácil derivar.

*3: Reemplazo $\alpha + j\beta = \gamma$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_y(z; t) &= \frac{1}{-j\omega\mu} e^{j\omega t} \left[E_i(-\gamma) e^{-\gamma z} + E_r \cdot \gamma \cdot e^{+\gamma z} \right] = \\
 &= e^{j\omega t} \left[E_i \cdot \frac{\gamma}{j\omega\mu} e^{-(\alpha+j\beta)z} - E_r \cdot \frac{\gamma}{j\omega\mu} e^{+(\alpha+j\beta)z} \right] \\
 &= e^{j\omega t} \left[\frac{E_i}{\eta} e^{-(\alpha+j\beta)z} - \frac{E_r}{\eta} e^{+(\alpha+j\beta)z} \right] \\
 &= e^{j\omega t} \left[H_i \cdot e^{-(\alpha+j\beta)z} - H_r \cdot e^{+(\alpha+j\beta)z} \right]
 \end{aligned}$$

$$H_y = H_i \cdot e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) - H_r e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \quad (\text{ec. 29})$$

Donde en el medio definí la impedancia intrínseca como $\eta = \frac{\gamma}{j\omega\mu}$ (ec. 30)

2.2-2: Parámetros restantes de la ecuación de onda

De la ecuación 28 veo que tiene dos frecuencias angulares (ω_z y ω_t), por ende tendrá dos longitudes de onda (λ_z y λ_t) y dos frecuencias de trabajo (f_z y f_t). Suponer la siguiente ecuación

$$E_x(z; t) = E_i \cdot \cos(\omega_t t - \omega_z z)$$

<u>Parámetro</u>	<u>Cálculo</u>	<u>Unidad</u>	<u>Nombre en los TP</u>
ω	temporal $\omega = \omega_t$ espacial $\beta = \omega_z$	[rad/s]	Frecuencia angular.
		[rad/m]	Constante de fase.

f	temporal $F = \omega_t / 2\pi = \omega / 2\pi$ espacial Por lo gral. no se trabaja con este parámetro.	[Hz]	Frecuencia de trabajo.
-----	---	------	------------------------

λ	temporal $\lambda = \frac{1}{f_z} = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{\beta}$	[m]	Longitud de onda
	espacial $T = \frac{1}{f_t} = \frac{2\pi}{\omega_t} = \frac{2\pi}{\omega}$	[seg]	Período

- **Velocidad de propagación:** es el cociente entre la distancia que "recorre" un punto de la onda y el tiempo que le toma hacer ese recorrido.

$$v_p = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}} = \frac{\lambda z}{\lambda_f} = \frac{1/f_z}{1/f_f} = \frac{2\pi/\omega_z}{2\pi/\omega_f} = \frac{\omega_f}{\omega_z} = \frac{\omega}{\beta} \quad [\frac{m}{seg}]$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\beta} = F \cdot \lambda$$

• Impedancia intrínseca: para llegar a la ecuación 29 hace el sig. reemplazo

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\beta} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{(j\omega\mu)^2}{-\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\frac{-\omega^2\mu\varepsilon}{j\omega\mu} + \frac{j\omega\mu\sigma}{j\omega\mu}}} = \\ = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}} \quad (\text{ec. 31})$$

2.2-3: Ecuación de onda en un medio sin pérdidas

En un medio sin pérdidas $\alpha = 0$ entonces la ecuación de onda de los campos E y H de las ec. 28 y 29 quedan

$$E_x(z; t) = E_i \cdot \cos(\omega t - \beta z) + E_r \cos(\omega t + \beta z) \quad (\text{ec. 32})$$

$$H_y(z; t) = H_i \cdot \cos(\omega t - \beta z) - H_r \cos(\omega t + \beta z) \quad (\text{ec. 33})$$

2.3- Ecuación de onda en dielectrinos y conductores

2.3-1: Factor de disipación FD

El factor de disipación (FD) es la línea divisoria entre dielectrinos y conductores. De la ec. $\nabla \times (\mu \vec{H}) = \nabla \times (\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E}) = \vec{J}_c + j\vec{J}_D$

$$\text{lec. Mx(f)} \quad \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E} = \vec{J}_c + j\vec{J}_D \\ FD = \frac{J_c}{J_D} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{\omega\varepsilon\vec{E}} = \frac{\nabla}{\omega\varepsilon} \quad (\text{ec. 34})$$

2.3-2: Propagación en un dielectrino y en un buen conductor

Esto es un resumen de los parámetros de la onda en un dielectrino y en un buen conductor. Dos de ellos (α y β) ya los calculé, resta saber η y v_p .

$$v_{pd} = v_p \Big|_{\beta = \beta_d} = \underbrace{\frac{\omega}{\beta_d}}_{*1} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Dielectrico

$$\eta_d = \eta \Big|_{\sigma=0} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$v_{po} = v_{pd} \Big|_{\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 300 \cdot 10^6 \left[\frac{m}{seg} \right] = c$$

Vacío

$$\eta_0 = \eta_d \Big|_{\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0} = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \approx 377 [\Omega]$$

$$v_{pc} = v_p \Big|_{\beta = \beta_c} = \underbrace{\frac{\omega}{\beta_c}}_{*2} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \epsilon \sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}$$

Conductores

$$\eta_c = \eta \Big|_{\sigma \rightarrow \infty} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \left(\frac{\omega\mu}{\sigma} e^{j\pi/2} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\pi/4}$$

Resumen de las constantes de onda.

Medio	α	β	v_p	η
Dielectrico	\emptyset	$\omega \sqrt{\mu \epsilon}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$
Vacio	\emptyset	$3,35 \cdot 10^9 \omega$	$3 \cdot 10^8 [m/s]$	$377 [\Omega]$
Conductor	$\sqrt{\frac{\omega \epsilon \sigma}{2}}$	$\sqrt{\frac{\omega \epsilon \sigma}{2}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}$	$\sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} e^{j\pi/4}$

*1: Reemplazo β_d por la ecuación 19.

*2: Reemplazo β_c por la ecuación 21.

EJERCICIO 27: Expressar la ec. de la OEM plana incidente polarizada en "x" que se propaga en el eje "z" a) en un conductor y b) en un dielectrónico.

PUNTO A: $E_x(z; t) = E_i \cdot \cos(\omega t - \beta z)$ $H_i = \frac{E_i}{\eta} \cdot \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$

PUNTO B: $E_x(z; t) = E_i e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$ $H_i = \frac{E_i}{\eta} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$

EJERCICIO 28: Expressar todas las ecuaciones de la OEM. Comparar las del vacío con las de un dielectrónico.

Imped. intrínseca $\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad [\Omega]$

Constante de fase $\beta = \sqrt{h_2(h_1+1)} \quad [\text{rad/m}]$ $h_2 = \omega^2 \mu \epsilon / 2$

Cte. de atenuación $\alpha = \sqrt{h_2(h_1-1)} \quad [\text{nepes/m}]$ $h_1 = \sqrt{1 + (\sigma/\omega\epsilon)^2}$

Cte. de profundidad de penetración $\delta = \frac{1}{\alpha} \quad [\text{m}]$

Velocidad de propagación $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda \cdot f \quad [\text{m/seg}]$

Longitud de onda $\lambda = \frac{\omega}{\beta f} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi}{\beta} \quad [\text{m}]$

En un dielectrónico $\sigma=0$ y en el vacío, además, $\mu=\mu_0$ y $\epsilon=\epsilon_0$

Vacío

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma + j\omega\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377$$

$$\beta_0 = \sqrt{h_2(h_1+1)} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (1+1)}{2}} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

$$h_2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 / 2$$

$$h_1 = \sqrt{1 + (\sigma/\omega\epsilon_0)^2} = 1$$

$$\alpha_0 = \sqrt{h_2(h_1-1)} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (1-1)}{2}} = 0$$

$$\delta_0 = 1/\alpha_0 = 1/0 \rightarrow \infty$$

$$v_{p0} = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{\omega}{\omega/c} = c$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_0} = \frac{2\pi}{\omega/c} = \frac{2\pi \cdot c}{2\pi \cdot f} = \frac{c}{f}$$

Dielectrónico

$$\eta_d = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = 377 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

$$\beta_d = \omega \sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0} = \beta_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

$$\alpha_d = 0$$

$$\delta_d \rightarrow \infty$$

$$v_{pd} = \frac{\omega}{\beta_d} = \frac{\omega}{\beta_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$\lambda_d = \frac{2\pi}{\beta_d} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

EJERCICIO 29: Hallar η_0 y v_{po} en función de μ y ϵ .

$$\eta_0 = \eta \left|_{\begin{array}{l} \tau=0 \\ \mu=\mu_0, \epsilon=\epsilon_0 \end{array}} \right. = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\epsilon_0 + j\omega\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 [\Omega]$$

$$v_{po} = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}} = c \approx 3 \cdot 10^8 [m/s]$$

EJERCICIO 30: Partiendo de $E_x(z; t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{3} z)$, hallar:

- a) Longitud de onda λ ;
- b) Velocidad de propagación v_p ;
- c) Frecuencia F y periodo T ;
- d) Constante de fase β ;
- e) Gráficas del campo E para $0 < z < 3$, cada $0,375 [m]$.

e1) Para $t = 0$

e2) " $t = 0,864 \cdot 10^{-9} [\text{seg}]$

e3) " $t = 1,667 \cdot 10^{-9} [\text{seg}]$

f) El campo H asociado a la OEH que se propaga en el vacío.

PUNTO A: $\lambda = \lambda_z = \frac{1}{f_z} = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3 [m] = \lambda$

PUNTO B: $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega_t}{\omega_z} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{2\pi/3} = 3 \cdot 10^8 [m/s] = c = v_p$

PUNTO C: $F = f_t = \frac{\omega_t}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{2\pi} = 1 \cdot 10^8 [\text{Hz}] = F$

$$T = \lambda_t = \frac{1}{f_t} = \frac{1}{1 \cdot 10^8} = 100 [\text{ns}]$$

PUNTO D: $\beta = \omega_z = 2\pi/3 [\text{rad/s}]$

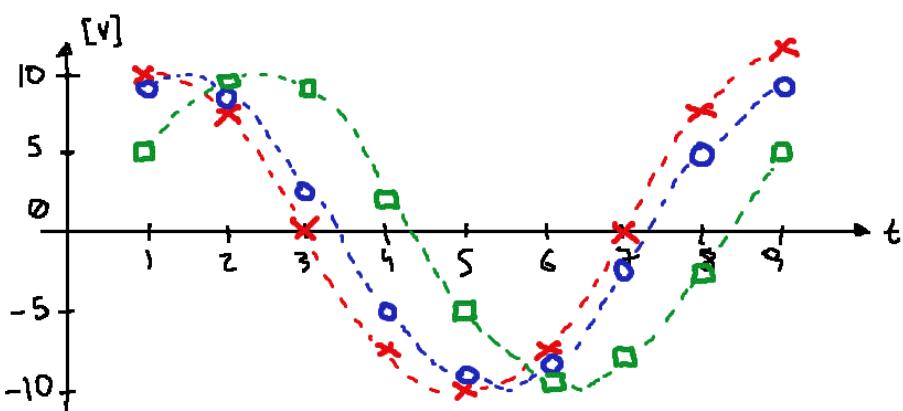
PUNTO E:

$$E_{x1} = E_x(z; t=0) = 10 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^8 \cdot 0 - \frac{2\pi}{3} z\right) = 10 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} z\right)$$

$$E_{x2} = E_x(z; t=0,384\pi) = 10 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 1 \cdot 10^8 \cdot 0,384\pi - \frac{2\pi}{3} z\right) = 10 \cdot \cos\left(0,0768\pi - \frac{2\pi}{3} z\right)$$

$$E_{x3} = E_x(z; t=1,667\pi) = 10 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 10^8 \cdot 1,667\pi - \frac{2\pi}{3} z\right) = 10 \cdot \cos\left(0,3334\pi - \frac{2\pi}{3} z\right)$$

Número	$z [m]$	$E_{x1} [V/m]$ ---x---	$E_{x2} [V/m]$ ---o---	$E_{x3} [V/m]$ ---□---
1	0,000	10	9,7	5
2	0,375	7,07	8,5	9,7
3	0,750	0	2,4	8,7
4	1,125	-7,07	-5,2	2,3
5	1,500	-10	-9,7	-5
6	1,875	-7,07	-8,5	-9,7
7	2,250	0	-2,4	-8,7
8	2,625	7,07	5,2	-2,3
9	3,000	10	9,7	5



PUNTO F: $H_1 = \frac{|E_{x1}|}{\eta} = \frac{10}{377} \approx 0,0265 [A/m] = H_1$

EJERCICIO 31: Ídem al punto anterior pero con $E_x(z,t) = 15 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^8 t - \frac{2\pi}{2,5} z)$. En e), el gráfico es entre $0 < z < 2,5$ (cada $0,3125 [m]$). Los e) son:

- e1) Para $t = 0$
- e2) " $\lambda = 1,25 \cdot 10^{-9} [\text{seg}]$
- e3) " $t = 1,944 \cdot 10^{-9} [\text{seg}]$

PUNTO A: $\lambda = \lambda_z = \frac{1}{f_z} = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2\pi/2,5} = 2,5 [m]$

PUNTO B: $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega_+}{\omega_z} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{2\pi/2,5} = 2,5 \cdot 10^8 [m/s]$

PUNTO C: $F = f_+ = \frac{\omega_+}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{2\pi} = 100 [MHz]$

$$T = \lambda_+ = \frac{1}{f_+} = \frac{1}{100 M} = 10 [ns]$$

PUNTO D: $\beta = \omega_2 = \frac{2\pi}{2,5} = 0,8\pi$

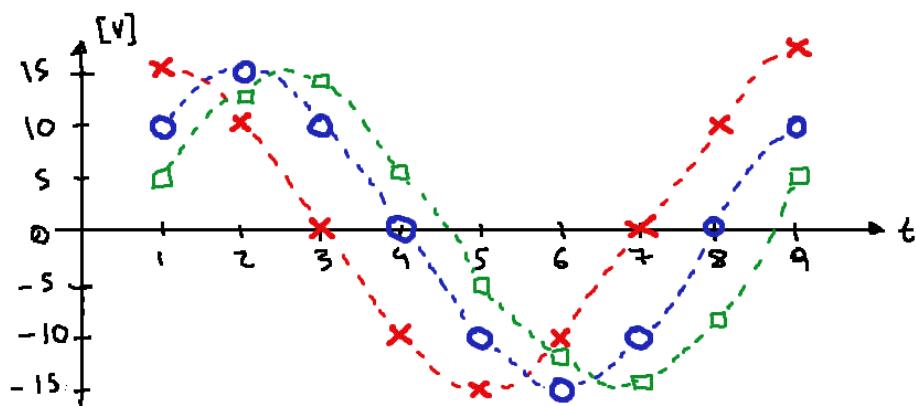
PUNTO E:

$$E_{x1} = E_x(z; t=0) = 15 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^8 \cdot 0 - \frac{2\pi}{2,5} z) = 15 \cdot \cos(0,8\pi z)$$

$$E_{x2} = E_x(z; t=1,25\pi) = 15 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 10^8 \cdot 1,25\pi - \frac{2\pi}{2,5} z) = 15 \cdot \cos(0,25\pi - 0,8\pi z)$$

$$E_{x3} = E_x(z; t=1,944\pi) = 15 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^8 \cdot 1,944\pi - \frac{2\pi}{2,5} z) = 15 \cdot \cos(0,388\pi - 0,8\pi z)$$

Número	z [m]	E_{x1} [V/m] ---x---	E_{x2} [V/m] ---o---	E_{x3} [V/m] ---□---
1	0,000	15	10,607	5,1696
2	0,3125	10,67	15	13,612
3	0,625	0	10,607	14,081
4	0,9375	-10,61	0	6,3013
5	1,25	-15	-10,61	-5,17
6	1,5625	-10,61	-15	-13,61
7	1,875	0	-10,61	-14,08
8	2,1875	10,607	0	-6,301
9	2,5	15	10,607	5,1696



PUNTO F: $|H_y| = \frac{|E_x|}{\eta} = \frac{15}{377} = 0,0395 \text{ [A/m]} = H_y$

EJERCICIO 32: Una onda viaja a $v_p = 210000$ [km/s], con $F = 125$ [MHz], $\mu_r = 1$ y $\epsilon_r = 1$. Hallar λ , β y η .

$$v_p = \lambda \cdot F \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{F} = \frac{210 \text{ m}}{125 \text{ MHz}} = 1,68 \text{ [m]} = \lambda$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \rightarrow \beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\omega_0}{v_p} = \frac{2\pi f_t}{v_p} = \frac{2\pi \cdot F}{v_p} = \frac{2\pi \cdot 125 \text{ MHz}}{210 \text{ m}} = 1,19\pi \text{ [rad/s]} = \beta$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{0 + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{18.4 \cdot 10^{-12}}} = 261,33 \text{ [S]} = \eta$$

$$\circ v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\epsilon}} \rightarrow \epsilon = \frac{1}{v_p^2\mu_r\mu_0} = \frac{1}{(210 \text{ m})^2 \cdot 1 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7})} \approx 18,4 \cdot 10^{-12}$$

EJERCICIO 33: Una OEM en "z" con $F = 200$ [MHz], $|E_i| = 100$ [V/m], $\mu_r = 1$ y $\epsilon_r = 4$. Hallar la ecuación de onda. (Medio dielectrónico).

$$E_x(z; t) = E_i \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z) = 100 \cdot \cos[(400 \text{ M})\pi \cdot t - \frac{8\pi}{3} z] = E_x(z; t)$$

$\circ \alpha = 0$ (el medio es un dielectrónico)

$$\circ \omega = \omega_0 = 2\pi \cdot f_t = 2\pi \cdot F = 2\pi \cdot 200 \text{ MHz} = (400 \text{ M})\pi$$

$$\circ v_p = \frac{\omega}{\beta} \rightarrow \beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{(400 \text{ M})\pi}{150 \text{ m}} = \frac{8\pi}{3} \text{ [rad/m]}$$

$$\circ v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{300 \text{ m}}{\sqrt{1 \cdot 4}} = 150 \text{ m/s}$$

$$H_y(z; t) = H_y \cdot \cos(\omega t - \beta z) = 0,53 \cdot \cos[(400 \text{ M})\pi \cdot t - \frac{8\pi}{3} z] = H_y$$

$$\circ H_y = |E_i| / R = 100 / 188 = 0,53 \text{ [A/m]}$$

$$\circ \eta \approx 377 \sqrt{\mu_r/\epsilon_r} = 377 \sqrt{1/4} = 188 \text{ [S]}$$

EJERCICIO 34: Hallar el factor de reducción de amplitud de una OEM que experimenta una atenuación de 1 [nepes].

$$\frac{E_i}{E_f} = e^{-\alpha z} = e^{-1} \approx 0,37 \text{ = reducción de amplitud}$$

EJERCICIO 35: Una OEM de $E_i = 250$ [V/m] y después de transmitirse por 500[m] llega al receptor con 220 [V/m]. Hallar atenuac. en [nepes] y α [nepes/m]

$$E(z=500) = 250 \cdot e^{-\alpha z} = 220 \rightarrow \alpha = \frac{-1}{500} \ln\left(\frac{220}{250}\right) = 255 \mu \text{ [nepes/m]} = \alpha$$

$$\text{Atenuación} = \alpha z = 255 \mu \cdot 500 = 0,13 \text{ [nepes]} = \text{atenuación}$$

EJERCICIO 36: Hallar la atenuación que sufre una ODE si se ve reducida en:

- a) 10 veces;
- b) 100 veces y
- c) 1000 veces.

$$E_{\text{alterada}} = E_{\text{original}} \cdot e^{-dZ} \rightarrow \therefore dZ = -\ln \frac{E_{\text{alterada}}}{E_{\text{original}}}$$

PUNTO A: $dZ = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) = 2,3 \text{ [neper]}$

PUNTO B: $dZ = -\ln\left(\frac{1}{100}\right) = 4,6 \text{ [neper]}$

PUNTO C: $dZ = -\ln\left(\frac{1}{1000}\right) = 6,9 \text{ [neper]}$

EJERCICIO 37: Hallar el factor de disipación de la tierra FD_T y analizar su comportamiento para frecuencias de emisores AM ($0,5$ a $1,6 \text{ MHz}$) y para FM (88 a 108 MHz). Con $\nabla_T = 1 \cdot 10^{-3} \text{ [V/m]}$ y $E_0 = 10 E_0$.

$$FD(f=500 \text{ K}) = \frac{\nabla}{\omega \epsilon} = \frac{\nabla}{2\pi f \cdot \epsilon_0 E_0} = \frac{1 \text{ m}}{2\pi \cdot 500 \text{ K} \cdot (10 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12})} \approx 3,6$$

$$FD(f=1,6 \text{ M}) = \frac{\nabla}{\omega \epsilon} = \frac{\nabla}{2\pi f \cdot \epsilon_0 E_0} = \frac{1 \text{ m}}{2\pi \cdot 1,6 \text{ M} \cdot (10 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12})} \approx 1,24$$

$$FD(f=88 \text{ M}) = \frac{\nabla}{\omega \epsilon} = \frac{\nabla}{2\pi f \cdot \epsilon_0 E_0} = \frac{1 \text{ m}}{2\pi \cdot 88 \text{ M} \cdot (10 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12})} \approx 20,4 \cdot 10^{-3}$$

$$FD(f=108 \text{ M}) = \frac{\nabla}{\omega \epsilon} = \frac{\nabla}{2\pi f \cdot \epsilon_0 E_0} = \frac{1 \text{ m}}{2\pi \cdot 108 \text{ M} \cdot (10 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12})} \approx 16,6 \cdot 10^{-3}$$

EJERCICIO 38: Graficar FD vs f . FD en escala logarítmica y f también, desde 10 [Hz] hasta 106 [MHz] .

a) $E_a = 10 E_0 \quad \nabla_a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ [V/m]}$

c) $E_c = 80 E_0 \quad \nabla_c = 4 \text{ [V/m]}$

b) $E_b = E_0 \quad \nabla_b = 5,8 \cdot 10^7 \text{ [V/m]}$

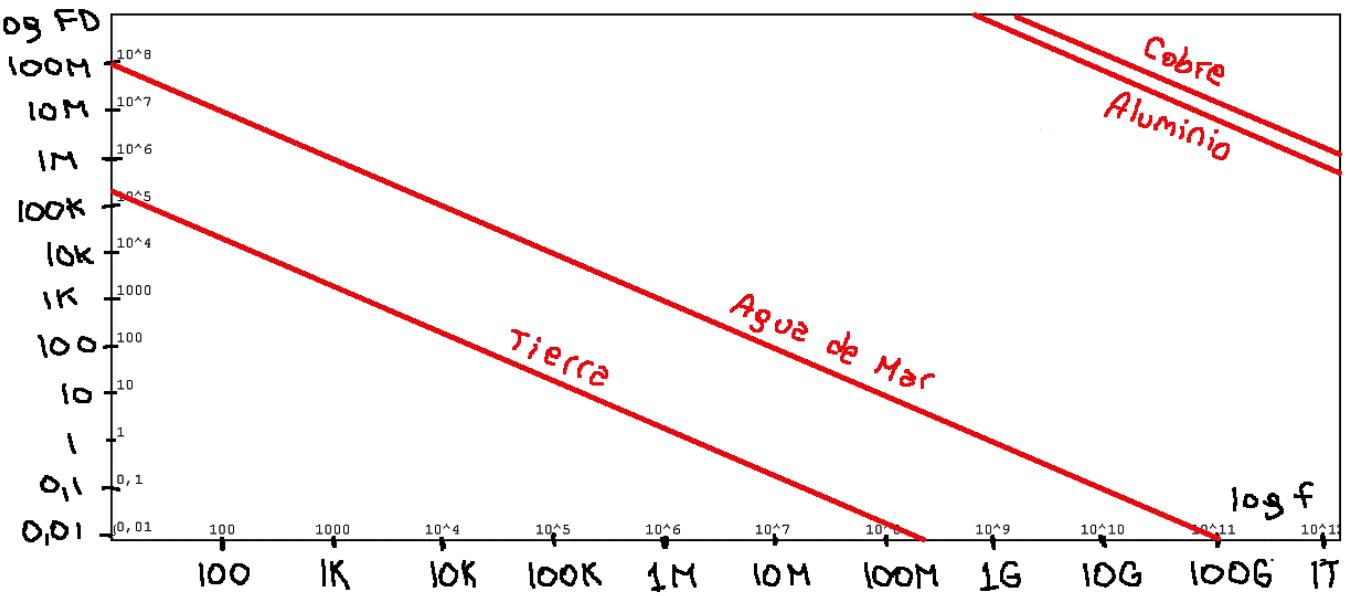
d) $E_d = E_0 \quad \nabla_d = 3,72 \cdot 10^7 \text{ [V/m]}$

$$FD_a = \frac{\nabla_a}{2\pi f \cdot E_a} = \frac{1 \text{ m}}{2\pi \cdot f \cdot (10) \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \approx \frac{1,8 \text{ M}}{f}$$

$$FD_b = \frac{\nabla_b}{2\pi f \cdot E_b} = \frac{5,8 \cdot 10^7}{2\pi \cdot f \cdot (1) \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{18}}{f}$$

$$FD_c = \frac{\nabla_c}{2\pi f \cdot E_c} = \frac{4}{2\pi \cdot f \cdot (80) \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \approx \frac{898 \text{ M}}{f}$$

$$FD_d = \frac{\nabla_d}{2\pi f \cdot E_d} = \frac{3,72 \cdot 10^7}{2\pi \cdot f \cdot (1) \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \approx \frac{670 \cdot 10^{15}}{f}$$



EJERCICIO 39: Una OEN de 150 [V/m] con $F = 100$ [MHz] se transmite en un medio con $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 4$ y $\sigma = 0,0223$. Hallar:

- a) η
- b) β en $[\text{rad}/\text{m}]$ y en $[\text{rads}/\text{m}]$
- c) α en $[\text{nepc}/\text{m}]$
- d) δ en $[\text{m}]$
- e) V_p en $[\text{m/S}]$
- f) λ en $[\text{m}]$
- g) H_i en $[\text{A/m}]$

PUNTO A:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j2\pi F\mu_r\mu_0}{\sigma + j2\pi F\epsilon_r\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{j2\pi(100\text{M}) \cdot 1 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7})}{0,0223 + j2\pi \cdot (100\text{M}) \cdot 4(8,854 \cdot 10^{-12})}} =$$

$$= \sqrt{\frac{j789,6}{0,023 + j0,022}} = \sqrt{17702,4 + j17943,8} = \sqrt{25,2\text{k} \cdot e^{j45^\circ}} = (158,7 \cdot e^{j22,5^\circ}) = \eta$$

PUNTO B:

$$\beta = \sqrt{h_2(h_1+1)} = \sqrt{8,78(\sqrt{2}+1)} \approx 4,6 [\text{rad}/\text{m}] = \beta$$

$$h_2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} = \frac{(2\pi \cdot 100\text{M})^2 \cdot 1 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 4(8,854 \cdot 10^{-12})}{2} = 8,78$$

$$h_1 = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{2\pi F \cdot \epsilon_r \epsilon_0}} = \sqrt{1 + \frac{0,0223}{2\pi \cdot 100\text{M} \cdot 4 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}} \approx \sqrt{2}$$

$$\beta = 4,6 \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right] \cdot \frac{360}{2\pi} \left[\frac{\circ}{\text{rad}} \right] = 263,56 \left[\circ/\text{m} \right] = \beta$$

PUNTO C: $\alpha = \sqrt{h_2(h_1 - 1)} = \sqrt{8,78(\sqrt{2} - 1)} \approx 1,91 \left[\text{radian/m} \right] = \alpha$

PUNTO D: $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1,91} \approx 0,52 \left[\text{m} \right] = \delta$

PUNTO E: $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot F}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ M}}{4,6} = 136,6 \text{ M} \left[\text{m/s} \right] = v_p$

PUNTO F: $v_p = \lambda \cdot F \rightarrow \therefore \lambda = \frac{v_p}{F} = \frac{136,6 \text{ M}}{100 \text{ M}} \approx 1,37 \left[\text{m} \right] = \lambda$

PUNTO G: $H_i = \frac{Ei}{Q} = \frac{150}{158,7 \cdot e^{j22,5^\circ}} = 0,95 \cdot e^{-j22,5^\circ} = H_i$

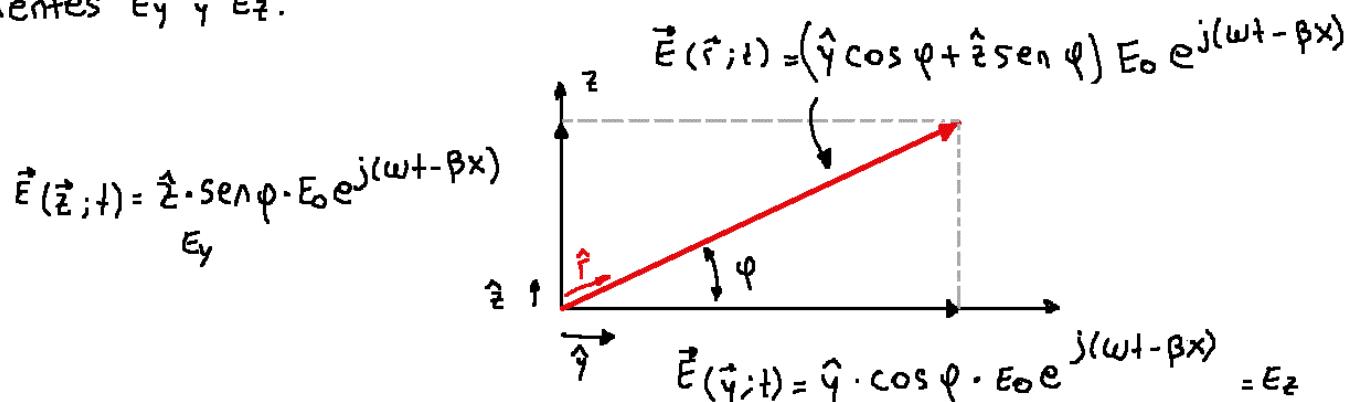
1-DEFINICIÓN	{ Definición Tipos de polarización
2-POLARIZACIÓN DE UNA ANTENA	{ Clasificación de la polarización lineal
3-POLARIZACIÓN DE UNA ONDA	{ Razón de polarización empleando coord. rectangulares

1-DEFINICIÓN

1.1-Definición de polarización de la onda

Se llame "polarización de la onda" al comportamiento temporal del campo E de la misma en un punto fijo.

Supongo que el vector E está confinado al plano $z-y$, y tiene componentes E_y y E_z .



1.2-Tipos de polarización

- Polarización lineal: E_y y E_z están en fase, entonces el ángulo $\varphi = \text{cte}$ y el campo E total se mueve en una sola dirección. El ángulo φ depende de los módulos $|E_y|$ y $|E_z|$; si son iguales $\Rightarrow \varphi = 45^\circ$.
- Polarización elíptica: E_y y E_z están desfasadas un ángulo θ .
- Polarización circular: es un caso particular del anterior. Se da cuando $|E_y| = |E_z|$ y $\theta = \pi/4 = 45^\circ$.

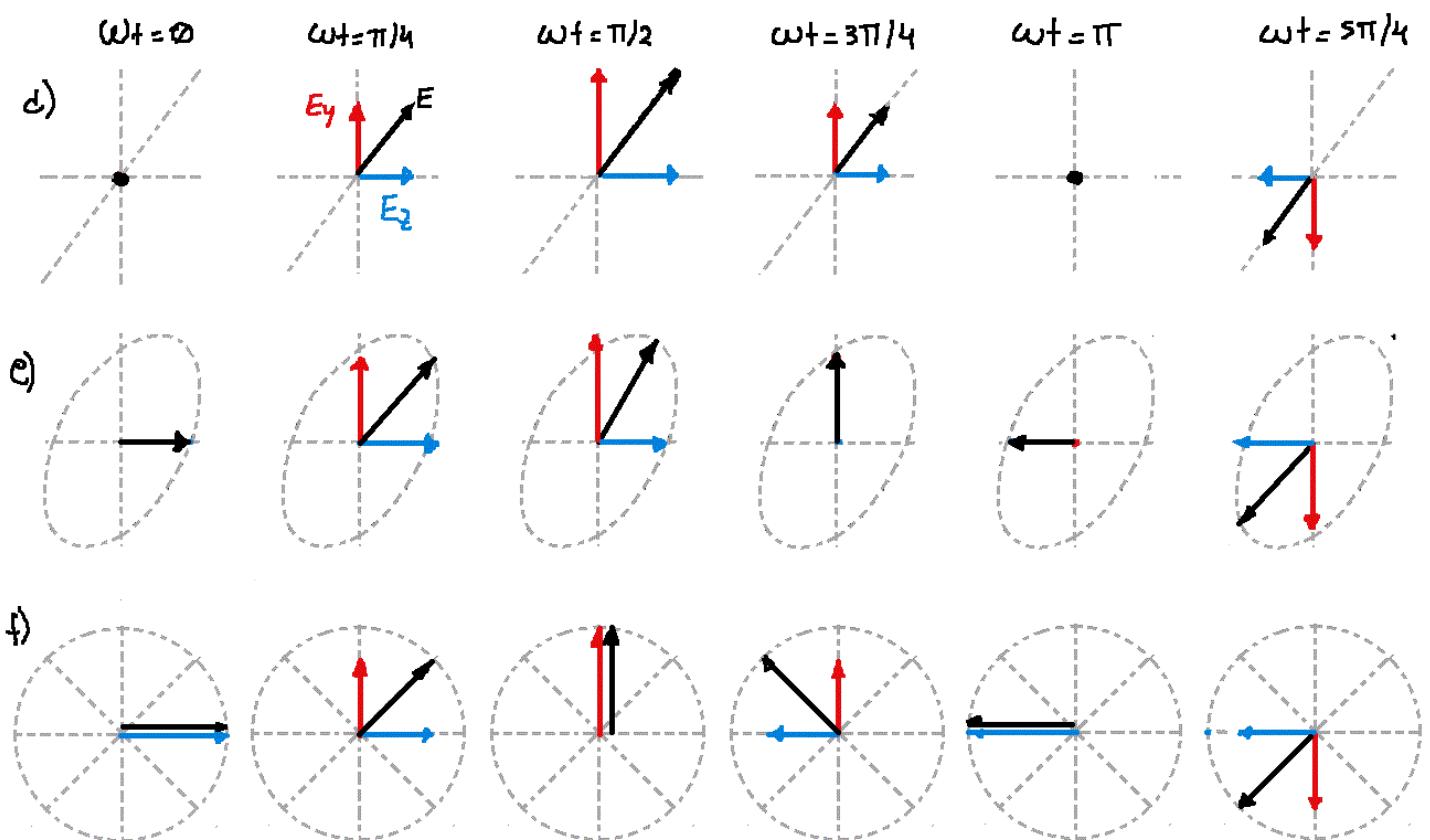
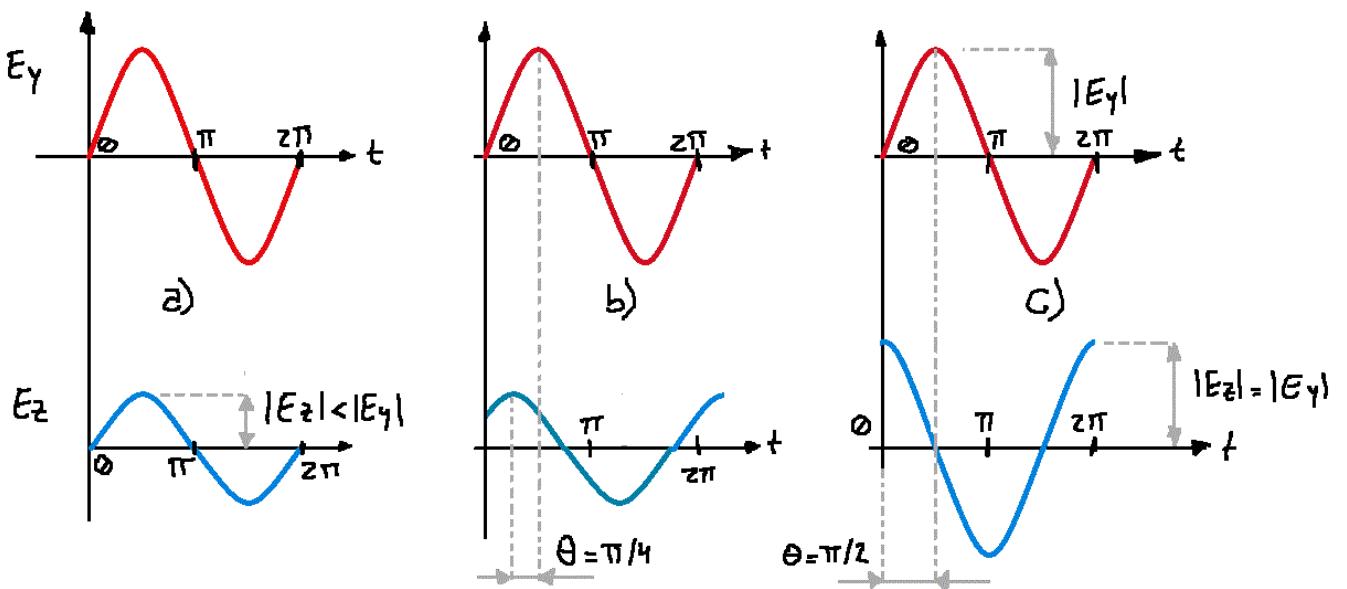
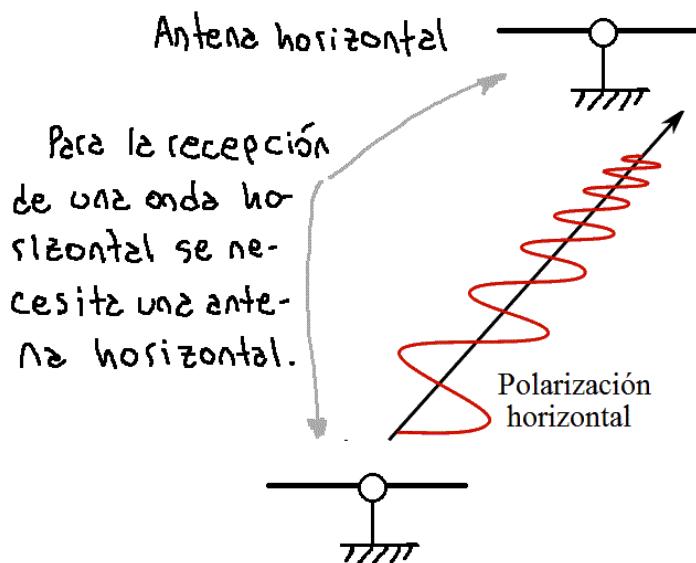


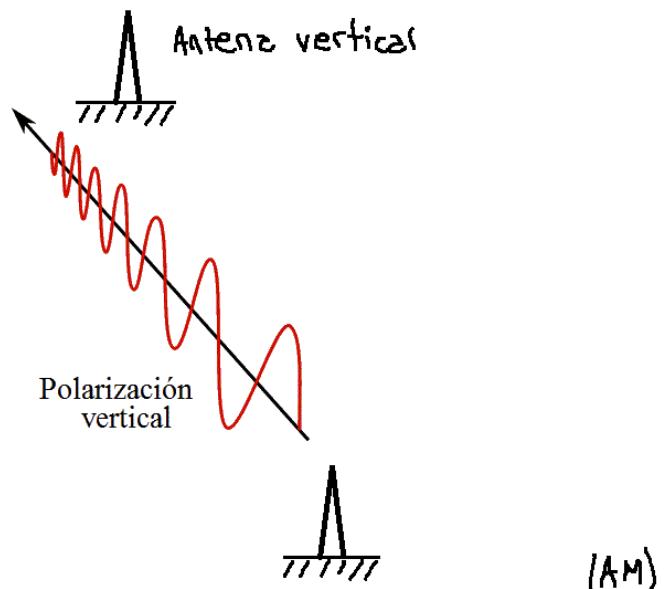
Figura 2: Componentes reales del campo E de la polarización a) lineal, b) elíptica y c) circular. Campo total en el espacio de la polarización d) lineal, e) elíptica y f) circular.

2 - POLARIZACIÓN DE UNA ANTENA

La "polarización de una antena" se refiere al plano de propagación de su campo E . Hay dos tipos: la polarización vertical y horizontal; en ambos casos, la dirección del campo E no varía.



Se usa para las emisiones FM, pues la polarización horizontal es más inmune al ruido y tiene más alcance.



Es usada para las emisiones de radio, pues irradiia en todas direcciones. Aunque el campo E es fácilmente absorbido por los obstáculos que encuentra en el camino.

2.1- Generalización del concepto de polarización

El concepto de polarización se puede generalizar con la notación fasorial.

$$\tilde{E}(z; t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \beta z)}$$

\vec{E}_0 es un vector complejo que no tiene componente en "z".

$$\begin{aligned} \tilde{E}(z; t) &= (\vec{E}_r + j\vec{E}_i) e^{j(\omega t - \beta z)} = (\vec{E}_r + j\vec{E}_i)[\cos(\omega t - \beta z) + j \sin(\omega t - \beta z)] \\ &= \vec{E}_r \cdot \cos(\omega t - \beta z) - \vec{E}_i \cdot \sin(\omega t - \beta z) + j(\dots) \end{aligned}$$

donde \vec{E}_r y \vec{E}_i son vectores reales (tienen componentes reales y no necesariamente tienen la misma dirección).

$$E(z; t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{E}(z; t) \} = \vec{E}_r \cdot \cos(\omega t - \beta z) - \vec{E}_i \cdot \sin(\omega t - \beta z)$$

donde se ve que $\tilde{E}(z; t)$ varía en módulo y argumento. Si $|\vec{E}_i| = |\vec{E}_r| = E_a$ y además \vec{E}_r está en "x" y \vec{E}_i en "y":

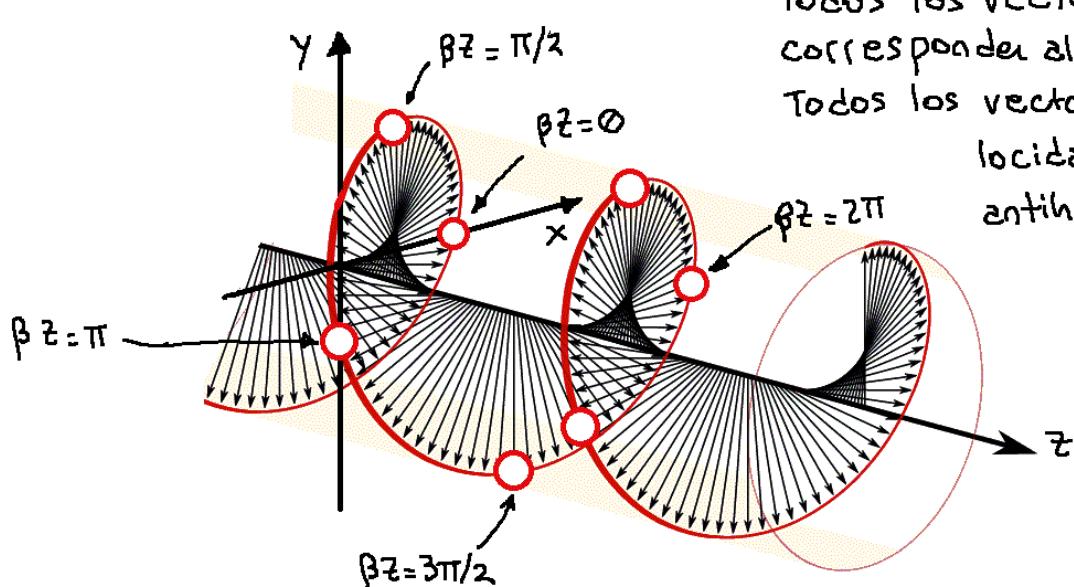
$$E(z; t) = E_a \cdot [\hat{i} \cdot \cos(\omega t - \beta z) - \hat{j} \cdot \sin(\omega t - \beta z)] \quad (\text{ec. 1})$$

Esto describe una circunferencia en el plano "x-y", que tiene diferentes desfases respecto avenida en "z". Se trata de la polarización circular.

$$E(\beta z = 0; t) = E_a (\hat{i} \cos \omega t - \hat{j} \sin \omega t)$$

$$E(\beta z = \pi/4; t) = \hat{i} \cdot E_a \cos(\omega t - \pi/4) - \hat{j} \cdot E_a \sin(\omega t - \pi/4)$$

$$E(\beta z = \pi; t) = \hat{i} \cdot E_a \cos \omega t - \hat{j} \cdot E_a \sin \omega t$$



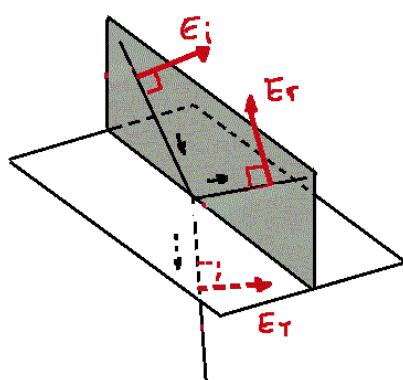
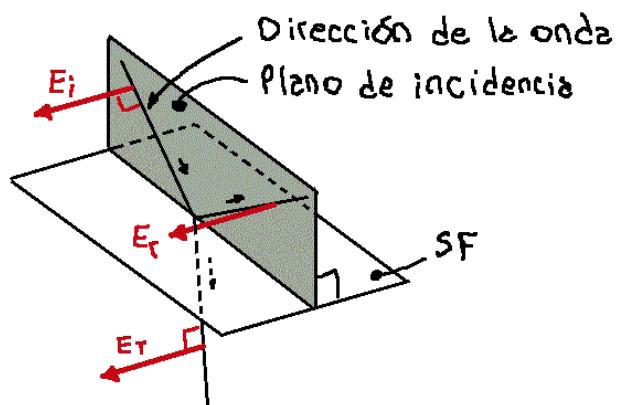
Todos los vectores de la figura corresponden al momento $\omega t = 0$.
Todos los vectores giran a una velocidad ωt en sentido antihorario.

2.2- Tipos de polarización en una antena

2.2- 1: Polarización lineal

Hay dos clases de polarización lineal:

- Perpendicular u horizontal: el campo E es perpendicular al plano de incidencia en todo momento.
- Paralela o vertical: el campo E es paralelo al plano de incidencia, aunque su dirección cambia al tocar la SF.



Polarización horizontal

E_i, E_r y E_t forman 90° con el plano de incidencia en todo momento

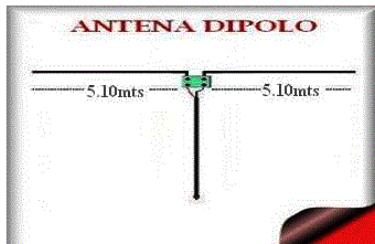
Polarización vertical

E_i, E_r y E_t forman 90° con la dirección de la onda y pertenecen al plano de incidencia.

Para transmitir una onda con polarización lineal o circular se usen las siguientes antenas:



Polarización lineal vertical



Polarización lineal horizontal



Polarización circular

Para lograr la inversión de fase en la ecuación 1 de la polarización circular basta con invertir la polaridad a cualquiera de las componentes en "x" o en "y".

3 - POLARIZACIÓN DE LA ONDA

Hay otras representaciones del estado de polarización: la razón de polarización, los parámetros de Stokes y la esfera de Poincaré. Aquí se ve la primera.

3.1- Razón de polarización usando coordenadas rectangulares

Se puede producir una onda con cualquier polarización combinando dos antenas dipolos cruzados. Si estas antenas se alinean cada una con los ejes "x" e "y", entonces las ondas radiadas en "z" serán

$$E_x = A_x \neq \delta x \quad E_y = A_y \neq \delta y$$

El estado de polarización puede especificarse por un número complejo P llamado "Razón de polarización", y se define como

$$P = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y \neq \delta y}{A_x \neq \delta x} = \frac{A_y}{A_x} \neq \delta y - \delta x = |P| \neq \delta$$

Los valores de P se pueden representar en un plano complejo y pueden corresponderse con cualquier polarización. Los puntos P cumplen con la ecuación

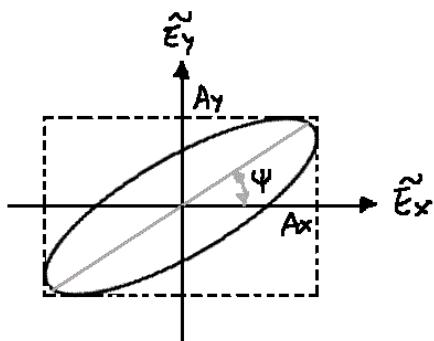
$$\underbrace{|P|^2 \tilde{E}_x^2}_{A \ x^2} - 2|P|\cos\delta \cdot \tilde{E}_x \tilde{E}_y + \underbrace{1 \cdot \tilde{E}_y^2}_{C \ y^2} = \underbrace{A_x^2 |P|^2 \sin^2\delta}_{D}$$

que es la ecuación de una cónica. El determinante de esta ecuación es

$$B^2 - 4AC = -4|\rho|^2 \cdot \sin \delta < 0$$

implicó que se trate de una elipse, la cual esté inscripta en un rectángulo cuyo cociente entre altura y ancho es la razón de polarización. El ángulo ψ de inclinación de la elipse es

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2|\rho| \cos \delta}{1 - |\rho|^2} = \frac{B}{A-C}$$



Problema 41: Representar los distintos tipos de polarización de la OEM y expresar las características de cada tipo.

Está en el teórico.

Problema 42: Una OEM se desplaza en z, E_x tiene un atraso con respecto a E_y de $\pi/4$, $\theta=30^\circ$ y $E_0=0,36$ [V/m]. Hallar

- a) El tipo de polarización
- b) Valores de las componentes y
- c) El \mathbf{H} total en el vacío.

PUNTO A:

Polarización elíptica, pues $\psi \neq 0$ y $\phi = \pi/2$

PUNTO B:

$$E_x = E_0 \cdot \cos \theta = 0,36 \cdot \cos 30^\circ = 0,311$$

$$E_y = E_0 \cdot \sin \theta = 0,36 \cdot \sin 30^\circ = 0,18$$

PUNTO C:

$$H_T = \frac{E_0}{\eta} = \frac{0,36}{377} = 955 \left[\frac{\mu A}{m} \right]$$

1-VECTOR DE POYNTING

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Teorema de Poynting.} \\ \text{Función del tiempo y del espacio.} \\ \text{Valores complejo, real e imaginario de } P_y. \end{array} \right.$

2- POTENCIAS

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Potencia radiada por una OEM plana y uniforme.} \\ \text{Potencia absorbida por un medio conductor.} \end{array} \right.$

1-VECTOR DE POYNTING

Las OEM tienen dos propósitos: enviar información y transmitir energía. El primer propósito se estudió en Comunicaciones; el segundo, aquí.

1.1- Teorema de Poynting

Arrancó con la lecMx(v), pues trabaja en un medio continuo.

$$\nabla \cdot H = J_c + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$J_c \left[\frac{A}{m^2} \right] = \nabla \cdot H - E \frac{\partial E}{\partial t}$$

- Despejo J_c .

$$E \cdot J_c \left[\frac{W}{m^3} \right] = E \cdot \nabla \cdot H - E E \frac{\partial E}{\partial t}$$

- Multiplico por el campo E .

$$E \cdot J_c = H \cdot \nabla \cdot E - \nabla(E \cdot H) - E E \frac{\partial E}{\partial t}$$

- Reemp. $E \cdot \nabla \cdot H = H \cdot \nabla \cdot E - \nabla(E \cdot H)$

$$E \cdot J_c = H \left(-\mu \frac{\partial H}{\partial t} \right) - E E \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla(E \cdot H)$$

- Reemplazo $\nabla \cdot E = -\mu \partial H / \partial t$ (lecMx(v)).

$$= -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{1}{2} E \frac{\partial E^2}{\partial t} - \nabla(E \cdot H)$$

- Reemplazo $H \cdot \partial H / \partial t = \frac{1}{2} \partial H^2 / \partial t$ y $E \cdot \partial H / \partial t = \frac{1}{2} \partial E^2 / \partial t$.

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} E^2 \right) - \nabla(E \cdot H)$$

- Séco factor común $-\partial / \partial t$.

$$\underbrace{\int (E \cdot J_c) dv}_{(1)} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{E^2}{2} \right) dv}_{(2)} - \underbrace{\int \nabla(E \cdot H) dv}_{(3)}$$

- Integro en volumen para obtener potencia.

(ec. 1)

(1) Miembro de la izquierda: $\int (E \cdot J_c) dV$,

J_c es la densidad de corriente de conducción [A/m^2] y E es el campo eléctrico [V/m]. $E \cdot J_c = [V/m] \cdot [A/m^2] = [V \cdot A / m^3] = [W/m^3]$. Cuando a este producto se lo integra en un volumen, queda $[W/m^3] \cdot [m^3] = [W]$. Esta es la potencia consumida por el volumen considerado, por esto el signo (+).

(2) Primer término del miembro de la derecha: $-\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{EE^2}{2} \right) dV$

Expresa una energía eléctrica y magnética dentro del volumen, que varía respecto al tiempo pero en sentido negativo (por esto el signo menos), lo que indica que se pierde en el tiempo. Se denomina potencia entretenida en el volumen. Es la velocidad con que disminuye la energía almacenada dentro del volumen conforme las variaciones en el tiempo de los campos E y H .

(3) Segundo término del segundo miembro: $-\int (E \cdot H) dV$

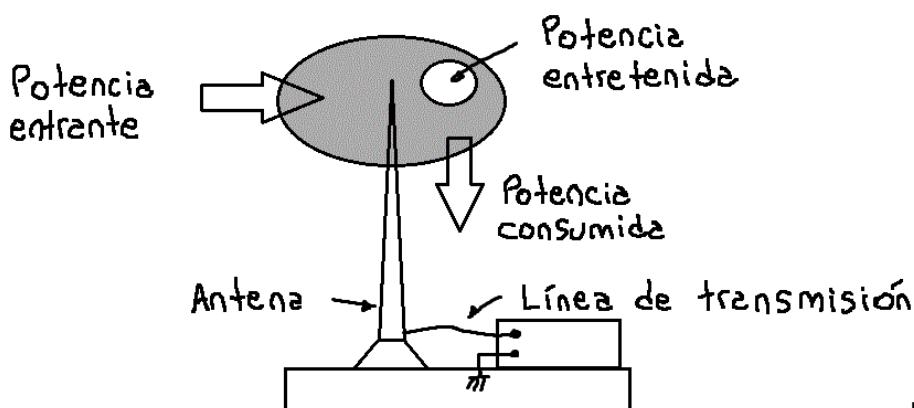
Es la potencia entregada al volumen, entrante al mismo (por esto el signo menos). Este término representa la velocidad de flujo de energía entrante a través de la superficie del volumen. El signo (-) indica que el producto escalar entre la normal a la superficie entrante (\vec{ds}) y el vector de potencia es (-1), lo que indica que están en sentidos contrarios.

$$\overrightarrow{\text{Pot}} \downarrow \vec{ds} \Rightarrow \overrightarrow{\text{Pot}} \cdot \vec{ds} < 0$$

Este término se puede transformar mediante el teorema de la divergencia.

$$\int \nabla \cdot (E \cdot H) dV = \oint_s (E \cdot H) ds \quad \text{y la (ec.1) queda}$$

$$\boxed{\int (E \cdot J_c) dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{EE^2}{2} \right) dV - \oint_s (E \cdot H) ds} \quad (\text{ec.2}) \text{ Teorema de Poynting}$$



1.2 - Funciones del tiempo y del espacio

El vector de Poynting es el producto entre vectorial entre E y H .

$$P_y(z; t) = E_x(z; t) \wedge H_y(z; t) = [E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \hat{i}] \wedge [H_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \hat{j}] \\ = [|E_x(z; t)| \cdot |H_y(z; t)| \cdot \sin \theta] \hat{k} = |E_x(z; t)| \cdot |H_y(z; t)| \cdot \hat{k} [W/m^2] \quad (\text{ec.3})$$

El vector de Poynting es función del tiempo y del espacio. Analizo primero lo que sucede respecto del tiempo, ya que éste siempre existe.

Analisis respecto del tiempo del vector de Poynting

Integro respecto el tiempo, durante un periodo, la parte real de la ec. 3.

$$P_{y+,\text{medio}} = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}\{|P_y(z; t)|\} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}\{|E_x(z; t)| \cdot |H_y(z; t)|\} dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}\{|E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}| \cdot |H_0 e^{j(\omega t - \beta z)}|\} = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T |E_m \cos(\omega t - \beta z)| \cdot |H_m \sin(\omega t - \beta z)| dt = \frac{E_m H_m}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\ = \frac{E_m H_m}{T} \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos[2(\omega t - \beta z)] \right\} dt = \\ = \frac{E_m H_m}{2T} \int_0^T dt + \frac{E_m H_m}{2T} \int_0^T \cos[2(\omega t - \beta z)] dt = \frac{E_m H_m}{2} + \varnothing$$

$P_{y+} = \frac{E_m H_m}{2} = P_{y+,\text{medio}}$

(ec.4) Vector de Poynting en función del tiempo

El vector de Poynting en un punto determinado, no depende de la frecuencia. Su valor es siempre el mismo, igual a la mitad del producto de los valores máximos de las intensidades de campo. Tampoco depende de la posición "z" que se encuentre.

Analisis respecto del espacio del vector de Poynting

Analizo la ec.3 en $t=0$

$$P_{y_z} = P_y(z; t=0) = \operatorname{Re}\{|E_x(z; t=0)| \cdot |H_y(z; t=0)|\} = \operatorname{Re}\{|E_0 e^{j(-\beta z)}| \cdot |H_0 e^{j(-\beta z)}|\} = \\ = \operatorname{Re}\{|E_0 H_0 e^{-j2\beta z}|\} = E_0 H_0 \cdot \cos(2\beta z)$$

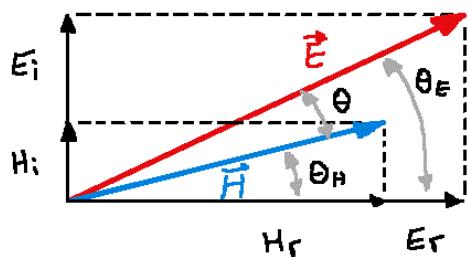
y después de una explicación y de unos pasos que Abad se ahorra, dice que la ecuación anterior es mejor analizarla en forma compleja. Y mágicamente llega a la siguiente expresión

$$\vec{P} [\text{W/m}^2] = \vec{E} \cdot \vec{H}$$

esta ecuación indica una densidad de potencia superficial, llamada vector de Poynting y representado por la letra \vec{P} .

1.3 - Valores complejo, real e imaginario de P_y

se trate de encontrar $P_y = P_{yR} + j P_{yI}$ en función de las partes real e imaginaria de los campos E y H . Suponer \vec{E} y \vec{H} de la siguiente figura:



Nota: no sé cómo mierda es este dibujo, pues se supone que $\theta=90^\circ$

No sé por qué cerebro, pero Abad hace el producto del campo E con el conjugado del campo H .

$$\vec{P}_c = \vec{E} \cdot \vec{H}^* = (E_r + j E_i) \cdot (H_r + j H_i)^* = (E_r + j E_i)(H_r - j H_i) = \underbrace{E_r H_r + E_i H_i}_{\text{Parte real del vector de Poynting}} + j \underbrace{(E_i H_r - E_r H_i)}_{\text{Parte imaginaria del vector de Poynting}}$$

Esto es siempre y cuando $|\vec{E}|$ y $|\vec{H}|$ sean valores eficaces. Si son valores pico entonces

$$\vec{P}_c = \vec{E}_{ef} \cdot \vec{H}_{ef}^* = \frac{\vec{E} \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\vec{H}^* \sqrt{2}}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{H}^*}{2}$$

2 - POTENCIAS

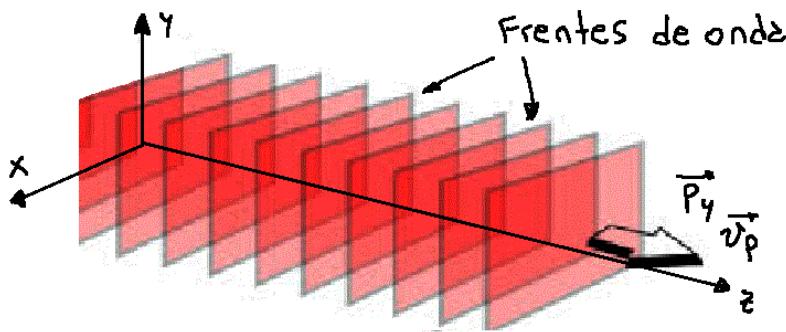
2.1 - Potencia transportada por una OEW plana y uniforme

Hago el producto entre la velocidad de propagación de la onda y la energía transportada por los campos E y H (que es el integrando del primer término del segundo miembro de la ec. 1).

$$v_p \cdot \omega_{E,H} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \left(\frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu H^2}{\sqrt{\mu\epsilon}} + \frac{\epsilon E^2}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu/\epsilon} \cdot H^2 + \frac{E^2}{\sqrt{\mu/\epsilon}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\eta H^2 + \frac{E^2}{\eta} \right) = \frac{1}{2} \left[(\eta H) H + \left(\frac{E}{R} \right) E \right] = \frac{1}{2} (E \cdot H + H \cdot E) = E \cdot H = P_y$$

y como el resultado obtenido es $E \cdot H$ (vector de Poynting), concluyo que el producto entre la velocidad de propagación y la densidad de energía. Se puede concluir también que la OEM lleva una densidad de potencia P_y en la dirección perpendicular al plano formado por los campos E y H , esto es en los frentes de onda.



2.2 - Potencia absorbida por un medio conductor

$$P_{y,r} = \operatorname{Re} \{ \vec{E} \cdot \vec{H}^* \} = \operatorname{Re} \{ \vec{\eta}_c \cdot \vec{H} \cdot \vec{H}^* \} = \operatorname{Re} \{ | \eta_c | \cdot e^{j45^\circ} \cdot \vec{H}^2 \} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{| \eta_c | \cdot H_c^2}{\sqrt{2}} \right\} =$$

- $\vec{E} = \vec{\eta} \cdot \vec{H}$

- $\vec{H} = H_c = J_{cs}$ es el valor eficaz del campo H dentro del conductor. A su vez es igual a la densidad de corriente superficial conductora. *1

- $\vec{\eta} = | \eta_c | \cdot e^{j45^\circ}$ la impedancia del medio conductor tiene partes real e imaginaria de igual valor, lo que implica un ángulo de 45° y su parte real es $\cos 45^\circ = 0,707 = 1/\sqrt{2}$.

$$P_{y,r} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{| Z_{sl} | \cdot J_{cs}^2}{\sqrt{2}} \right\}$$

siendo esto la densidad de potencia superficial consumida por el medio conductor.

Conclusión: J_{cs} en el medio conductor tiene las mismas propiedades de la OEM que la originó (modulación AM, FM, etc.)

*1 Ver Unidad 3: condiciones de frontera; componente tangencial del campo H entre un medio dielectrónico y un conductor perfecto.

Problema 43: Expresar simbólicamente la ecuación de conservación de la energía obtenida en el Teorema de Poynting. Extraer conclusiones.

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = + \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) dV + \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_C \cdot dV$$

① ② ③

1: Es la **potencia entrante** al volumen, el signo menos se debe a que es entrante al mismo. Este término representa la velocidad de flujo de energía entrante a través de la superficie del volumen. El signo menos indica que el vector potencia entrante está a 180° del vector superficie dS , el producto escalar entre estos vectores es -1.

2: Expresa una energía eléctrica y magnética dentro del volumen, lo cual indica que llegará hasta cero. Por lo tanto es energía electromagnética que se pierde conforme el tiempo transcurre. Se denomina **potencia entretenida** en el volumen. Es la velocidad con la que disminuye la energía almacenada dentro del volumen respecto las variaciones de E y H .

3: Es la potencia que se encuentra consumiendo el volumen específico. Es la potencia instantánea disipada en el volumen. El vector \mathbf{J} representa la densidad de corriente de conducción. Esta energía se llama **potencia**

Problema 44: Partiendo de la ecuación de onda incidente del campo E y del campo H , hallar los valores instantáneo, pico y medio del vector de Poynting.

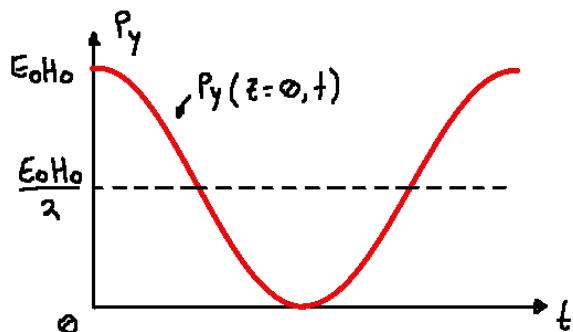
$$P_y = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = |E| \cdot |H| \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin 90^\circ = 1} = E_0 \cdot \cos(\omega t - \beta z) \cdot H_0 \cdot \cos(\omega t - \beta z) =$$

$$P_y = E_0 H_0 \cdot \cos^2(\omega t - \beta z) = \frac{E_0 H_0}{2} + \frac{E_0 H_0}{2} \cos(2\omega t - 2\beta z) \quad \text{valor instantáneo}$$

$$\bar{P}_y = \frac{E_0 H_0}{2} \quad \text{valor medio}$$

$$\hat{P}_y = E_0 H_0 \quad \text{valor pico}$$

$$P_{y, \text{ef}} = \frac{E_0 H_0}{2} + \underbrace{0,707}_{*1} \frac{E_0 H_0}{2} = 0,85 \cdot E_0 H_0 \quad \text{valor eficaz}$$



Problema 45: Hallar el valor complejo del vector de Poynting.

- a) Densidad de potencia activa o real.
- b) Densidad de potencia reactiva o imaginaria.

$$P_C = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^* = (E_R + jE_I)(H_R + jH_I)^* = (E_R + jE_I)(H_R - jH_I) =$$

$$= \underbrace{E_R H_R + E_I H_I}_{\text{Densidad de potencia activa o real}} + j \underbrace{(E_R H_I - E_I H_R)}_{\text{Densidad de potencia reactiva o imaginaria}}$$

*1: El valor eficaz de un coseno es $0,707 \times \text{Amplitud}$.

Problema 46: Una OEM plana y uniforme de amplitud del campo $E=20$ [V/m], se propaga por un medio dieléctrico que posee una $\mu_r=1$. La velocidad de propagación es $v_p=1,06 \cdot 10^8$ [m/s] con una $F=100$ [MHz].

- Hallar ϵ_r .
- Hallar η .
- Halla la densidad de potencia de la onda P_y (Poynting).

PUNTO A:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} \rightarrow \epsilon_r = \frac{1}{v_p^2 \cdot \mu_r \mu_0 \epsilon_0} = \frac{1}{(106)^2 \cdot 1 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (8,854 \cdot 10^{-12})} \approx 8 = \epsilon_r$$

PUNTO B: Al ser un dieléctrico $\tau=0$.

$$\eta = 377 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 377 \sqrt{\frac{1}{8}} = 133,28 [\Omega] = \eta$$

PUNTO C:

$$P_y = \frac{E_i^2}{\eta} = \frac{20^2}{133,28} = 3 [\text{nW/m}^2] = P_y$$

Problema 47: Un transmisor posee una antena omnidireccional y emite con una potencia de **20 [KW]**. Hallar la densidad de potencia de la onda en una antena receptora distante **50 [Km]** de la antena trasmisora. Considerar propagación en el vacío. Hallar el valor de las componentes de campo E y H.

$$P_y = \frac{\text{Pot}}{\text{Superficie}} = \frac{\text{Pot}}{4\pi d^2} = \frac{20 \text{kW}}{4\pi \cdot (50 \text{km})^2} = 636,6 [\text{nW/m}^2] = P_y$$

$$P_y = \frac{|E_x|^2}{\eta_0} = |H_y|^2 \eta_0 \quad \therefore |E_x| = \sqrt{P_y \cdot \eta_0} = \sqrt{636,6 \text{nW/m}^2 \cdot 377} \approx 15,5 [\text{mV/m}] = |E_x|$$

$$\therefore |H_y| = \sqrt{P_y / \eta_0} = \sqrt{636,6 \text{nW/m}^2 / 377} \approx 41,1 [\mu\text{A/m}] = |H_y|$$

Problema 48: Se posee un receptor que necesita en su antena un valor mínimo de carga eléctrica de **10 [mV/m]** (milivoltios por metro). Hallar la distancia máxima a la que se debe encontrar un transmisor que tiene una potencia de salida de **10 [KW]**. El medio es un dieléctrico con $\epsilon_r=2$ y $\mu_r=1$.

$$P_y = \frac{|E_x|^2}{\eta} = \frac{\text{Pot}}{4\pi d^2} \rightarrow \therefore d = \sqrt{\frac{\text{Pot} \cdot \eta}{|E_x|^2 4\pi}} = \sqrt{\frac{10 \text{kW} \cdot 266,6}{(10 \text{m})^2 4\pi}} \approx 46,06 [\text{km}] = d$$

$$\eta = 377 \sqrt{\mu_r / \epsilon_r} = 377 \sqrt{1/2} \approx 266,6 [\Omega]$$

Problema 49: En el problema anterior, aparece ahora en el transmisor una atenuación de **10 [dB]**.

- Hallar el valor de la densidad de potencia en el receptor para el trayecto calculado.
- Hallar la distancia a la que se deberá ubicar la antena receptora para tener en esta nueva condición **10 [mV/m]**.

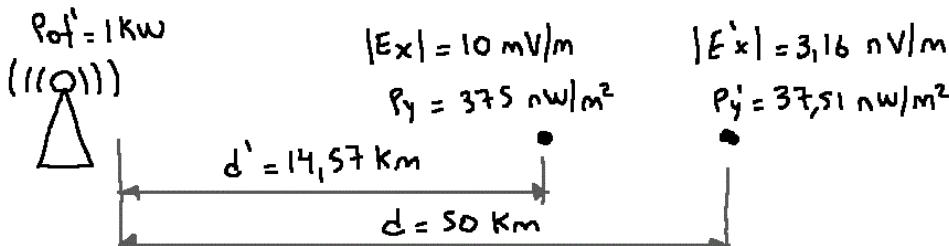
PUNTO A: $P_y' = \frac{\text{Pot}'}{4\pi d^2} = \frac{1 \text{kW}}{4\pi \cdot (46,06 \text{km})^2} = 37,51 [\text{nW/m}^2] = P_y'$

$$\text{Pot}' = \text{Pot} \cdot 10^{-10 \text{dB}/10} = 10 \text{kW} \cdot 10^{-1} = 1 \text{[kW]}$$

PUNTO B: $d' = \sqrt{\frac{P_{\text{ot}}^2 \cdot \eta}{|E_x|^2 \cdot 4\pi}} = \sqrt{\frac{1\text{K} \cdot 266,6}{(10\text{m})^2 \cdot 4\pi}} \approx 14,57 \text{ [km]} = d'$

$$P_y = |E_x|^2 / \eta = (10\text{m})^2 / 266,6 = 37,5 \text{ [nW/m}^2]$$

$$|E_x| = \sqrt{P_y \cdot \eta} = \sqrt{(37,5 \text{ nW}) \cdot 266,6} = 3,16 \text{ [mV/m]}$$



Problema 50: Un transmisor de 500 [W] pierde 1 [dB] en el cable coaxil hasta la antena. El camino de propagación es una zona boscosa de gran atenuación (10 [dB]/50 [Km]). Hallar el vector de Poynting a 100 [Km] de la antena.

$$P_y = \frac{P_0}{S_{\text{up}}} = \frac{3,97}{126 \text{ G}} = 31,5 \text{ [PW/m}^2] = P_y$$

$$\circ S_{\text{up}} = 4\pi \cdot d^2 = 4\pi \cdot (100\text{K})^2 = 126 \text{ G [m}^2]$$

$$\circ P_0 = P_{\text{ot}} \times 10^{\text{AT}/10} = 500 \cdot 10^{-21/10} = 3,97 \text{ [W]}$$

$$\circ \circ \text{ AT} = \text{Atenuación total} = \text{Aten. antena} + \text{Aten. bosque} = -1-20 = -21 \text{ dB}$$

$$\circ \circ \circ \text{ Aten. antena} = -1 \text{ [dB]}$$

$$\circ \circ \circ \text{ Aten. bosque} = -\text{distancia} \times \text{pérdida} = -100 \text{ [km]} \cdot \frac{10}{50} \left[\frac{\text{dB}}{\text{Km}} \right] = -20 \text{ dB}$$

Unidad 7: Reflexión normal (entre 2 dieléctricos)

1- COEFICIENTES

Coeficiente de reflexión del campo eléctrico Γ_E	" " refracción " " " T_E
" " reflexión " " " magnético Γ_H	" " refracción " " " T_H
Conclusiones	

2- REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN EN CUALQUIER MEDIO

3- IMPEDANCIA DE CAMPO

1-COEFICIENTES

Cuando una onda incide sobre una superficie de un dielectrónico perfecto parte de ella (la onda) se refleja y parte atraviesa la superficie. Hay que tener en cuenta las condiciones de frontera.

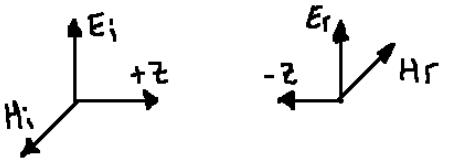
$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

$$D_{n1} = D_{n2}$$

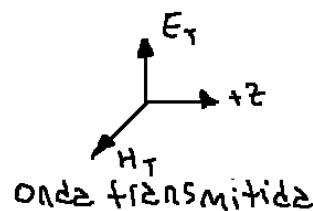
$$B_{n1} = B_{n2}$$

Medio 1 ($\epsilon_{r1}, \mu_{r1}, \sigma = 0$)



Onda incidente Onda reflejada

SF Medio



Onda transmitida

1.1 - Coeficiente de reflexión (Γ_E) y de refracción (T_E) del campo eléctrico Γ_E

$$H_T = H_i + H_r$$

$$T_E = E_T / E_i$$

$$\frac{E_T}{\eta_2} = \frac{E_i - E_r}{\eta_1} = \frac{E_i + E_r}{E_i}$$

$$\frac{E_i + E_r}{\eta_2} = \frac{E_i - E_r}{\eta_1} = 1 + \Gamma_E$$

$$E_i \eta_1 + E_r \eta_1 = E_i \eta_2 - E_r \eta_2 = 1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$E_r (\eta_1 + \eta_2) = E_i (\eta_2 - \eta_1)$$

$$= \frac{\eta_2 + \eta_1 + \eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\boxed{\Gamma_E = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$$

$$\boxed{T_E = \frac{z \eta_2}{\eta_2 + \eta_1}}$$

1.2 - Coeficiente de reflexión (Γ_H) y de refracción (T_H) del campo H

$$E_T = E_i + E_r \quad T_H = \frac{H_T}{H_i} = \frac{H_i + H_r}{H_i}$$

$$H_T \cdot \eta_2 = H_i \eta_1 - H_r \eta_1 \quad = 1 + \Gamma_H$$

$$(H_i + H_r) \eta_2 = H_i \eta_1 - H_r \eta_1 \quad = 1 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

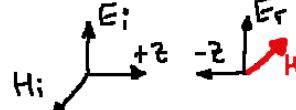
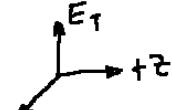
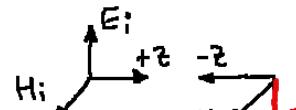
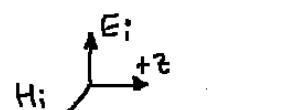
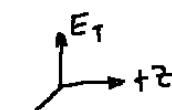
$$H_i \eta_2 + H_r \eta_2 = H_i \eta_1 - H_r \eta_1 \quad = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

$$H_r(\eta_2 + \eta_1) = H_i (\eta_1 - \eta_2)$$

$$\Gamma_H = \frac{H_r}{H_i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

$$T_H = \frac{2 \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

1.3 - Conclusiones

η_1, η_2	Γ_E	Γ_H	Observación	
$\eta_1 > \eta_2$	> 0	< 0	H_r se invierte	 
$\eta_1 < \eta_2$	< 0	> 0	E_r se invierte	 
$\eta_1 = \eta_2$	$= 0$	$= 0$	Pesa todo	 

2 - REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN EN CUALQUIER MEDIUM

En cualquier dielectrónico ($\sigma = 0 \Rightarrow \gamma = j\beta$) el campo E es:

$$E_x(z) = E_i e^{-\delta z} + E_r e^{+\delta z} = E_i e^{-j\beta z} + E_r e^{+j\beta z} = E_i e^{-j\beta z} \left(1 + \frac{E_r e^{+j\beta z}}{E_i e^{-j\beta z}} \right) =$$

$$= E_i e^{-j\beta z} \left(1 + \frac{E_r}{E_i} e^{j2\beta z} \right) = E_i e^{-j\beta z} [1 + \Gamma_\epsilon(z)]$$

donde $\Gamma_\epsilon(z) = \frac{E_r}{E_i} e^{j2\beta z}$ es el coeficiente de reflexión complejo del campo E.

y los campos E y H pueden expresarse como:

$$E_x(z) = E_i e^{-j\beta z} [1 + \Gamma_\epsilon(z)]$$

$$H_y(z) = (E_i/\eta) \cdot e^{-\beta z} \cdot [1 - \Gamma_\epsilon(z)] \Rightarrow \Gamma_H(z) = -\Gamma_\epsilon(z)$$

3 - IMPEDANCIA DE CAMPO

Es el cociente entre el campo complejo $E(z)$ y el campo complejo $H(z)$

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = \frac{E_i e^{-j\beta z} [1 + \Gamma_E(z)]}{\frac{E_i}{\eta_1} e^{-j\beta z} [1 - \Gamma_E(z)]} = \boxed{\eta_1 \frac{1 + \Gamma_E(z)}{1 - \Gamma_E(z)} = Z(z)}$$

Impedancia de campo en función de $\Gamma_E(z)$.

yendo más allá, tengo que:

$$\begin{aligned} Z(z) &= \eta_1 \frac{1 + \frac{E_r}{E_i} e^{+jz\beta z}}{1 - \frac{E_r}{E_i} e^{+jz\beta z}} = \eta_1 \cdot \frac{e^{j\beta z} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} e^{-j\beta z}}{e^{j\beta z} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} e^{-j\beta z}} = \eta_1 \frac{e^{jz} (\eta_2 + \eta_1) + e^{-jz} (\eta_2 - \eta_1)}{e^{jz} (\eta_2 + \eta_1) - e^{-jz} (\eta_2 - \eta_1)} \\ &= \eta_1 \frac{\eta_2 e^{jz} + \eta_1 e^{jz} + \eta_2 e^{-jz} - \eta_1 e^{-jz}}{\eta_2 e^{jz} + \eta_1 e^{jz} - \eta_2 e^{-jz} + \eta_1 e^{-jz}} = \eta_1 \frac{\eta_2 (e^{jz} + e^{-jz}) + \eta_1 (e^{jz} - e^{-jz})}{\eta_2 (e^{jz} - e^{-jz}) + \eta_1 (e^{jz} + e^{-jz})} \\ &= \eta_1 \cdot \frac{2 \eta_2 \cos(z) + j z \eta_1 \operatorname{sen}(z)}{j 2 \eta_2 \operatorname{sen}(z) + z \eta_1 \cos(z)} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j \eta_1 \operatorname{tg}(z)}{\eta_1 + j \eta_2 \operatorname{tg}(z)} \end{aligned}$$

$$Z(z) = \eta_1 \frac{\eta_2 + j \eta_1 \operatorname{tg}(\beta z)}{\eta_1 + j \eta_2 \operatorname{tg}(\beta z)}$$

Impedancia de campo en función de η_2 y η_1 .

Ejercicio 51: Expresar Γ_E , T_E , Γ_H y T_H en función de η_1 y η_2 .

$$H_T = H_i + H_r$$

$$\frac{E_T}{\eta_2} = \frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1}$$

$$E_T \eta_1 = (E_i - E_r) \eta_2$$

$$(E_i + E_r) \eta_1 = (E_i - E_r) \eta_2$$

$$E_i \eta_1 + E_r \eta_1 = E_i \eta_2 - E_r \eta_2$$

$$E_i (\eta_1 - \eta_2) = -E_r (\eta_2 - \eta_1)$$

$$\boxed{\frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \Gamma_E}$$

$$E_T = E_i + E_r$$

$$H_T \cdot \eta_2 = H_i \eta_1 - H_r \eta_1$$

$$(H_i + H_r) \eta_2 = H_i \eta_1 - H_r \eta_1$$

$$H_i \eta_2 + H_r \eta_2 = H_i \eta_1 - H_r \eta_1$$

$$H_r (\eta_2 + \eta_1) = H_i (\eta_1 - \eta_2)$$

$$\boxed{\frac{H_r}{H_i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \Gamma_H = -\Gamma_E}$$

$$T_E = \frac{E_T}{E_i} = \frac{E_i + E_r}{E_i} = 1 + \Gamma_E = 1 + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\eta_2 + \eta_1 + \eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \boxed{\frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = T_E}$$

$$T_H = \frac{H_T}{H_i} = \frac{H_i + H_r}{H_i} = 1 + \Gamma_H = 1 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \boxed{\frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = T_H}$$

Ejercicio 52: Extraer conclusiones de lo que sucede con Γ_E y Γ_H cuando η_1 es mayor, igual y menor que η_2 .

	$\eta_2 > \eta_1$	$\eta_2 < \eta_1$	$\eta_2 = \eta_1$
$\Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$	> 0	< 0	0
$\Gamma_H = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$	< 0	> 0	0
	E cambia de signo	H cambia de signo	Pasa todo
	$\curvearrowleft \rightarrow$	$\curvearrowleft \rightarrow$	$\curvearrowleft \dots \rightarrow$

Problema 53: Un radar electromagnético emite una OEM cuyo campo es de $E_i = 200$ [V/m] y una frecuencia de $F = 100$ [MHz]. La onda se propaga en el vacío e incide en forma perpendicular sobre la superficie de un dieléctrico sin pérdidas cuyos parámetros son $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 6,25$ y $\sigma = 0$. Hallar

- a) η_1 y η_2
- b) β_1 y β_2
- c) λ_1 y λ_2
- d) Γ_E y Γ_H
- e) T_E y T_H
- f) E_r y E_t
- g) H_i , H_r y H_t

h) verificación de los resultados mediante Poyting.

PUNTO A: ($\Gamma = \emptyset$)

$$\eta_1 = 377 \text{ [Ω]}$$

$$\eta_2 = 377 \sqrt{\mu_r / \epsilon_r} = 377 \sqrt{1 / 6,25} = [150,8 \text{ [Ω]}] = \eta_2$$

PUNTO B:

$$v_{p1} = \frac{\omega_1}{\beta_1} \rightarrow \therefore \beta_1 = \frac{\omega_1}{v_{p1}} = \frac{2\pi f}{C} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ M}}{300 \text{ M}} = \boxed{\frac{2\pi}{3} [\text{rad/s}] = \beta_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\omega_2}{v_{p2}} = \frac{2\pi f}{C} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ M}}{120 \text{ M}} = \boxed{\frac{5\pi}{3} [\text{rad/s}] = \beta_2}$$

$$v_{p2} = \frac{C}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{300 \text{ M}}{\sqrt{1 \cdot 6,25}} = [120 \cdot 10^6 \text{ [m/s]}]$$

PUNTO C:

$$v_{p1} = \lambda_1 \cdot f \rightarrow \therefore \lambda_1 = \frac{v_{p1}}{f} = \frac{C}{f} = \frac{300 \text{ M}}{100 \text{ M}} = \boxed{3 \text{ [m]} = \lambda_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_{p2}}{f} = \frac{120 \text{ M}}{100 \text{ M}} = \boxed{1,2 \text{ [m]} = \lambda_2}$$

PUNTO D:

$$\Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{150,8 - 377}{150,8 + 377} \approx \boxed{-0,43 = \Gamma_E} \quad \Gamma_H = -\Gamma_E = +0,43$$

PUNTO E:

$$T_E = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2 \cdot 150,8}{150,8 + 377} = \boxed{0,57 = T_E} \quad T_H = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2 \cdot 377}{150,8 + 377} = \boxed{1,43 = T_H}$$

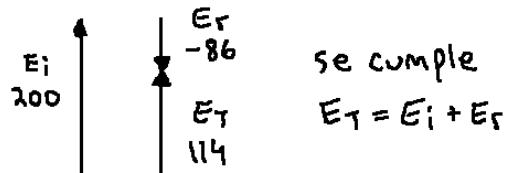
PUNTO F:

$$E_F = \Gamma_E \cdot E_i = -0,43 \cdot 200 = \boxed{-86 \text{ [V/m]} = E_F} \quad E_T = T_E \cdot E_i = 0,57 \cdot 200 = \boxed{114 \text{ [V/m]} = E_T}$$

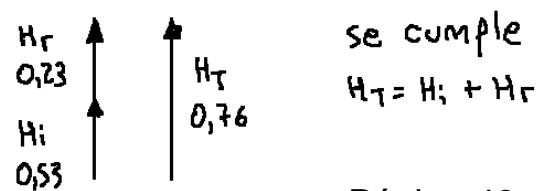
PUNTO G:

$$H_i = E_i / \eta_1 = 200 / 377 = \boxed{0,53 \text{ [A/m]} = H_i} \quad H_F = \Gamma_H \cdot H_i = 0,43 \cdot 0,53 = \boxed{0,23 \text{ [A/m]} = H_F}$$

$$H_T = T_H \cdot H_i = 1,43 \cdot 0,53 = \boxed{0,76 \text{ [A/m]} = H_T}$$



se cumple
 $E_T = E_i + E_F$



se cumple
 $H_T = H_i + H_F$

PUNTO K:

$$P_{Y_i} = P_{Yr} + P_{YT}$$

$$\frac{E_i^2}{\eta_1} = \frac{E_r^2}{\eta_1} + \frac{E_T^2}{\eta_2}$$

$$\frac{200^2}{377} = \frac{(-0,86)^2}{377} + \frac{(114)^2}{188,5}$$

$$106,1 \text{ [W/m}^2] = 19,61 + 86,2 = 105,79 \text{ [W/m}^2] \quad \text{se cumple (casi)}$$

Problema 54: Ídem al anterior pero con los siguientes valores $E_i = 100 \text{ [V/m]}$, $F = 100 \text{ M}$, $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$, $\epsilon_{r1} = 4$, $\epsilon_{r2} = 12,25$, $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = 0$.

PUNTO A:

$$\eta_1 = 377 \sqrt{\mu_{r1}/\epsilon_{r1}} = 377 \sqrt{1/4} = 188,5 \text{ [S]} = \eta_1$$

$$\eta_2 = 377 \sqrt{\mu_{r2}/\epsilon_{r2}} = 377 \sqrt{1/12,25} = 107,7 \text{ [S]} = \eta_2$$

PUNTO B:

$$\beta_1 = \frac{2\pi F}{v_{p1}} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ M}}{150 \text{ M}} = \frac{4\pi}{3} \text{ [rad/m]} = \beta_1 \approx 4,19 \text{ rad/m}$$

$$v_{p1} = c / \sqrt{\mu_{r1} \cdot \epsilon_{r1}} = 300 \text{ M} / \sqrt{1 \cdot 4} = 150 \cdot 10^6 \text{ [m/s]}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi F}{v_{p2}} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ M}}{85,71 \text{ M}} \approx 2,33\pi \text{ [rad/m]} = \beta_2 \approx 7,33 \text{ rad/m}$$

$$v_{p2} = c / \sqrt{\mu_{r2} \cdot \epsilon_{r2}} = 300 \text{ M} / \sqrt{1 \cdot 12,25} = 81,71 \cdot 10^6 \text{ [m/s]}$$

PUNTO C:

$$\lambda_1 = \frac{v_{p1}}{F} = \frac{150 \text{ M}}{100 \text{ M}} = 1,5 \text{ [m]} = \lambda_1$$

$$\lambda_2 = \frac{v_{p2}}{F} = \frac{85,71 \text{ M}}{100 \text{ M}} \approx 0,86 \text{ [m]} = \lambda_2$$

PUNTO D:

$$\Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{107,7 - 188,5}{107,7 + 188,5} = -0,27 = \Gamma_E \quad \Gamma_H = -\Gamma_E = -(-0,27) = 0,27 = \Gamma_H$$

PUNTO E:

$$T_E = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2 \cdot 107,7}{107,7 + 188,5} = 0,73 = T_E \quad T_H = \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2 \cdot 188,5}{107,7 + 188,5} = 1,27 = T_H$$

$$\text{PUNTO F: } E_S = \Gamma_E \cdot E_i = -0,27 \cdot 100 = -27 \text{ [V/m]} = E_S$$

$$E_T = T_E \cdot E_i = 0,73 \cdot 100 = 73 \text{ [V/m]} = E_T$$

PUNTO G: $H_i = E_i / \eta_i = 100 / 188,5 = 0,53 \text{ [A/m]} = H_i$

$$H_S = f_H \cdot H_i = 0,27 \cdot 0,53 = 0,14 \text{ [A/m]} = H_S \quad H_T = T_H \cdot H_i = 1,27 \cdot 0,53 = 0,67 \text{ [A/m]} = H_T$$

PUNTO H: $\rho_{y_i} = \rho_{y_S} + \rho_{y_T}$

$$\frac{E_i^2}{\eta_1} = \frac{E_S^2}{\eta_1} + \frac{E_T^2}{\eta_2}$$

$$\frac{100^2}{188,5} = \frac{27^2}{188,5} + \frac{73^2}{107,7}$$

$$53,05 \text{ [w/m²]} = 3,87 + 49,5 = 53,35 \text{ [w/m²]} \quad \text{se cumple (cesi)}$$

1 - CAMPO ELÉCTRICO TOTAL

2 - CAMPO MAGNÉTICO TOTAL

3 - CONCLUSIÓN

1 - CAMPO ELÉCTRICO TOTAL

Cuando una onda que viaja en un dielectrónico incide perpendicularmente sobre un conductor perfecto, éste (la onda) se refleja por completo ($E_r = E_i$); y el campo E total será:

$$E_{Tx}(z) = E_i e^{-\beta z} + E_r e^{+\beta z} = E_i e^{-\beta z} - E_i e^{+\beta z} = -E_i \cdot (e^{\beta z} - e^{-\beta z}) = -j 2E_i \cdot \sin(\beta z)$$

$$\begin{aligned} E_{Tx}(z; t) &= E_{Tx}(z) \cdot e^{j\omega t} = -j 2E_i \cdot \sin(\beta z) e^{j\omega t} = -j 2E_i \cdot \sin(\beta z) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= 2E_i \sin(\beta z) \cdot \sin(\omega t) + j \dots \end{aligned}$$

Si tomo ahora la parte real para poder trabajar tengo

$$E_{Tx}(z; t) = 2E_i \cdot \sin(\beta z) \cdot \sin(\omega t)$$

Esta es una onda estacionaria, que tiene las sig. características:

- Valor inicial: es cero en la superficie de frontera, pues se debe cumplir que $E_{t1} = E_{t2}$, y como es un seno en el espacio, cero es el único valor que hace cumplir la condición.
- Amplitud: es el doble de la amplitud de la onda incidente, pues como hay un desfase exacto de 180° en la SF, las ondas se suman y a distancias impares de cuarto de longitud de onda ($\lambda/4$) dan un módulo de $2E_i$.
- Variación temporal: Su amplitud varía sinusoidalmente respecto del tiempo con una frecuencia angular ω .

2-CAMPO MAGNÉTICO TOTAL

Como se debe cumplir $H_{T1} = H_{T2}$, y H_r debe cambiar de signo para que se produzca la inversión en el sentido de propagación, $H_i = H_r$; es decir, no debe haber inversión de fase. El campo H total es:

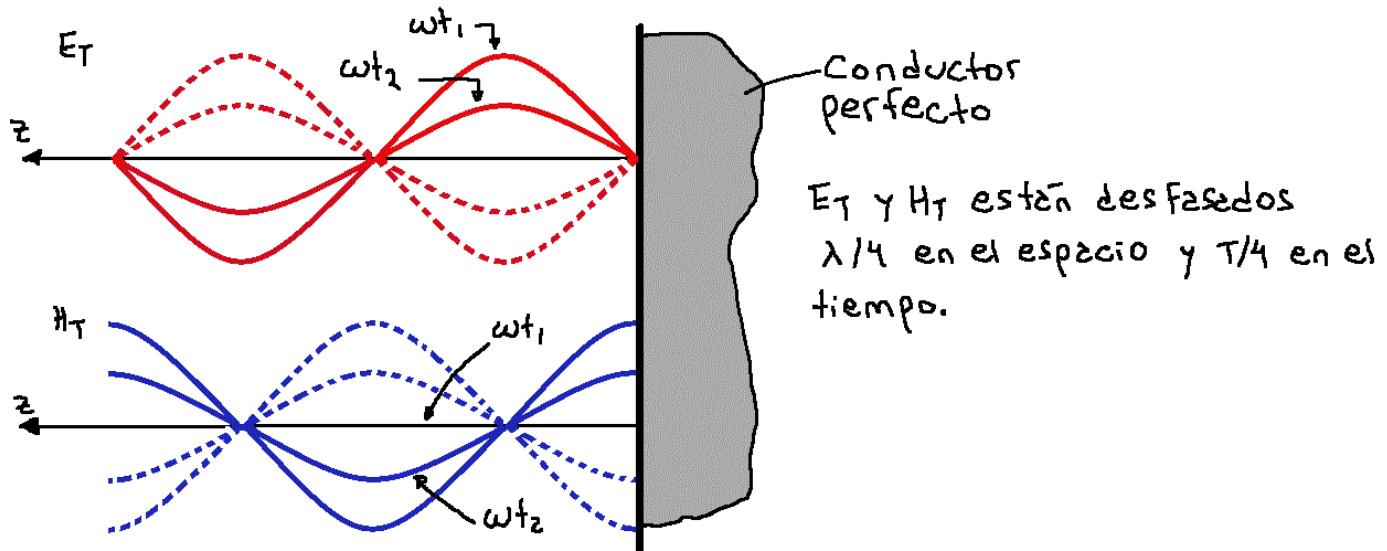
$$H_{Ty}(z) = H_i e^{-\beta z} + H_s e^{\beta z} = H_i e^{-\beta z} + H_i e^{\beta z} = H_i (e^{\beta z} + e^{-\beta z}) = 2H_i \cdot \cos(\beta z)$$

$$H_{Ty}(z; t) = 2H_i \cdot \cos(\beta z) \cdot e^{j\omega t} = 2H_i \cdot \cos(\beta z) (\cos \omega t + j \sin \omega t) =$$

$$H_{Ty}(z; t) = 2H_i \cdot \cos(\beta z) \cdot \cos(\omega t) + j(\dots)$$

tomando la parte real

$$H_{Ty}(z; t) = 2H_i \cdot \cos(\beta z) \cdot \cos(\omega t)$$



Problema 55: Expresar las ecuaciones de E_T y H_T en un dieléctrico, cuando la onda polarizada en x se propaga en z e incide perpendicularmente en un conductor perfecto.

- Hacer una tabla de valores para E_T y H_T con valores de βz entre 0 y 2π en pasos de $\pi/4$. Dar valores a ωt entre 0 y 2π en pasos de $\pi/4$.
- Graficar el campo E_T que corresponde a las tablas generadas en a).
- Graficar el campo H_T correspondiente a las tablas de a).

$$E_{Tx}(z; t) = 2E_i \cdot \sin(\beta z) \sin(\omega t) \quad H_{Ty}(z; t) = \frac{2E_i}{\pi} \cdot \cos(\beta z) \cos(\omega t)$$

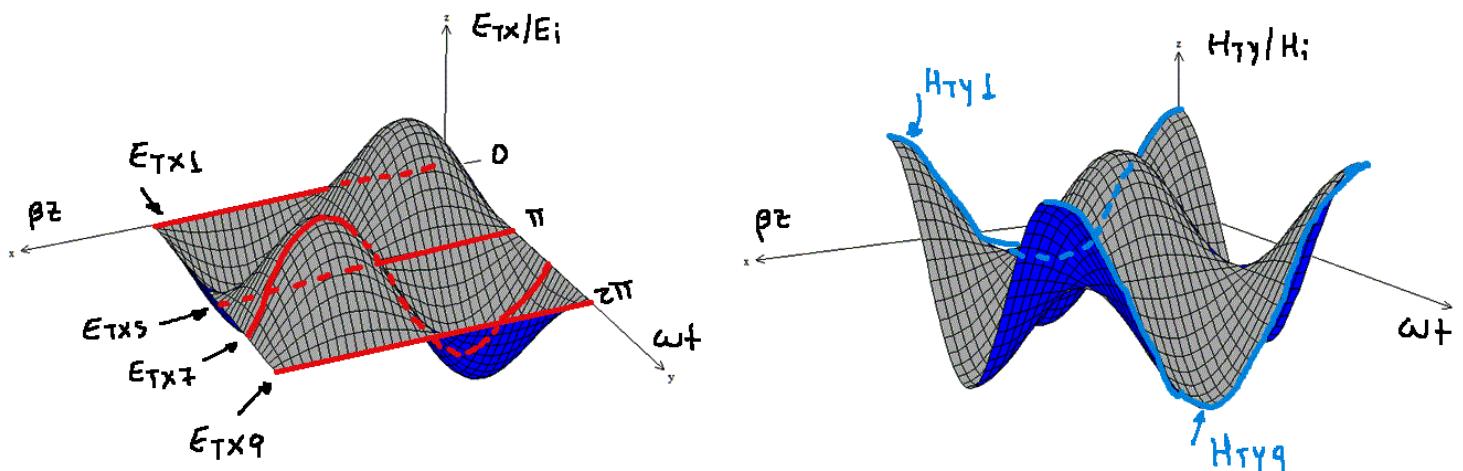
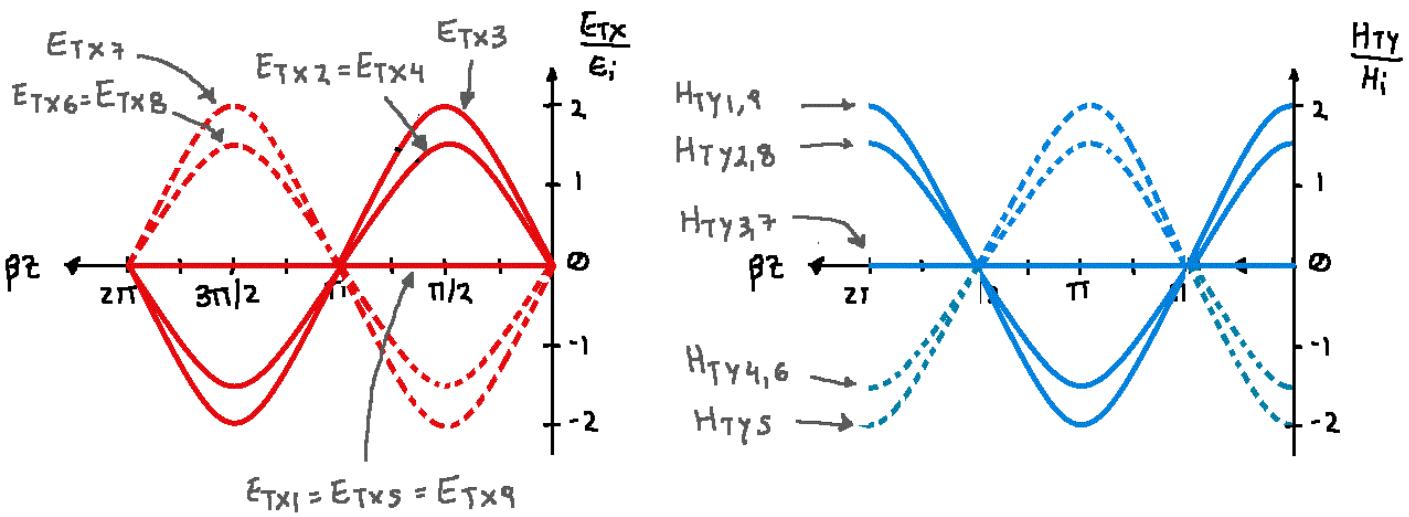
E_{Tx}

	βz	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{4}$
ωt		0	0	0	0	0	0	0	0	0
$E_{Tx1} \rightarrow$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$E_{Tx2} \rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0
E_{Tx3}	$\frac{2\pi}{4}$	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	2	$-\sqrt{2}$	0
E_{Tx4}	$\frac{3\pi}{4}$	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0
E_{Tx5}	$\frac{4\pi}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_{Tx6}	$\frac{5\pi}{4}$	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0
E_{Tx7}	$\frac{6\pi}{4}$	0	$-\sqrt{2}$	2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0
E_{Tx8}	$\frac{7\pi}{4}$	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0
E_{Tx9}	$\frac{8\pi}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

H_{Ty}

	βz	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{4}$	
ωt		0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
$H_{Ty1} \rightarrow$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	
H_{Ty2}	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	
H_{Ty3}	$\frac{2\pi}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
H_{Ty4}	$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	
H_{Ty5}	$\frac{4\pi}{4}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	2	
H_{Ty6}	$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	
H_{Ty7}	$\frac{6\pi}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
H_{Ty8}	$\frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	
H_{Ty9}	$\frac{8\pi}{4}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	

La tabla de H_{Ty} tiene los mismos valores de la tabla E_{Tx} , sólo que retrasados $\pi/2$ en el espacio y $\pi/2$ en el tiempo. El elemento rojo en E_{Tx} se coloca en la casilla en rojo de H_{Ty} .



Problema 56: Hallar $|\Gamma_E|$ y la fase de Γ_E para los siguientes valores de η_2 y η_1 . También ROE.

PUNTO A: $\eta_2 = 188,5 + j188,5$

$$\Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{188,5 + j188,5 - 377}{188,5 + j188,5 + 377} = \frac{-1 + j}{3 + j} = 0,447 \angle 116,5^\circ = \boxed{\Gamma_E}$$

$$ROE = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|} = \frac{1 + 0,447}{1 - 0,447} = \boxed{2,62 = ROE}$$

Los puntos B, C y D son la misma porquería.

Problema 57: Expresar en forma compleja η_2 , conociendo η_1 y Γ_E y resolver para a) $\eta_1 = 377[\Omega]$, $|\Gamma_E| = 0,5$ y $\theta_{\Gamma_E} = 45^\circ$,

$$\begin{aligned} \Gamma_E &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \rightarrow \eta_2 = \eta_1 \cdot \frac{1 + \Gamma_E}{1 - \Gamma_E} = 377 \cdot \frac{1 + 0,5 \angle 45^\circ}{1 - 0,5 \angle 45^\circ} = 377 \cdot \frac{1 + 0,35 + j0,35}{1 - 0,35 - j0,35} = \\ &= 377(1,38 + j1,28) = \boxed{(520,26 + j482,56)[\Omega] = \eta_2} \end{aligned}$$

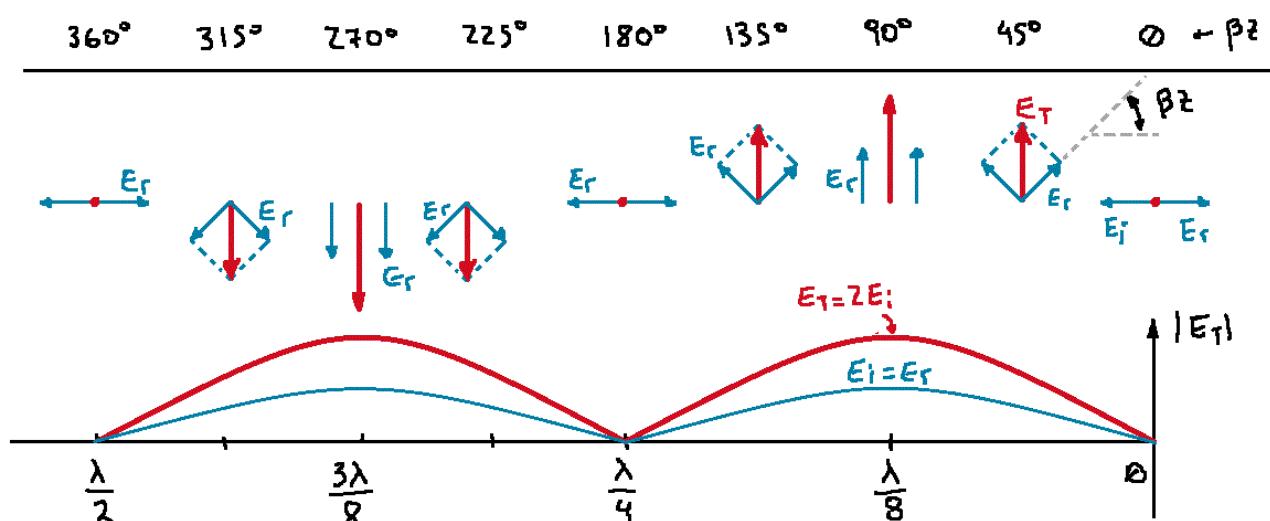
Unidad 9: Cálculo analítico y gráfico del campo total en reflexión normal (diagrama de Crank y ábaco de Smith)

- 1-DISTRIBUCIÓN DE TENSIÓN Y CORRIENTE EN MEDIOS DE CON REFLEXIONES
- 2-DIAGRAMA DE CRANK
- 3-ÁBACO DE SMITH (CONSTRUCCIÓN)
- 4-ÁBACO DE SMITH (DETALLES)
- Linea de transmisión con $Z_R \rightarrow \infty$
Teorema del coseno
- Relación de onda estacionaria (ROE)
Procedimiento para hallar la distribución de E
Distancias al máximo y al mínimo
- Familia de curvas de $\operatorname{Re}\{Z_N\} = \text{cte}$
Familia de curvas de $\operatorname{Im}\{Z_N\} = \text{cte}$
- Escala circular
Escala radial
Ubicación de Z_N e Y_N

1-DISTRIBUCIÓN DEL CAMPO "E" EN MEDIOS CON REFLEXIONES

Para conocer las "v" e "i" a lo largo de medios con reflexiones comienza con casos simples ($\alpha = 0$).

1.1 - LT con $Z_R \rightarrow \infty$



En la unidad anterior, se ve que una onda $\tilde{E}_i = E_i \cdot e^{-j\beta z}$ cuando choca con la SF de un conductor perfecto se refleja por entero generando una onda reflejada $\tilde{E}_r = E_i e^{j\beta z}$. El campo total en el espacio es una onda estacionaria tal que $E_{Tx} = E_i e^{-j\beta z} + E_r e^{+j\beta z}$, además $E_r = -E_i$. En cualquier

punto de "z" se puede descomponer E_T como la suma de dos vectores (de módulos E_i y E_r) que giran a una velocidad βz pero de sentido contrario. La distribución de E_T será la de la figura anterior.

1.7 - Teorema del coseno

Puede considerarse como la generalización del teorema de Pitágoras. La relación entre un lado (en este caso E_T) y sus lados restantes (E_i y E_r) se calcula con la siguiente figura.

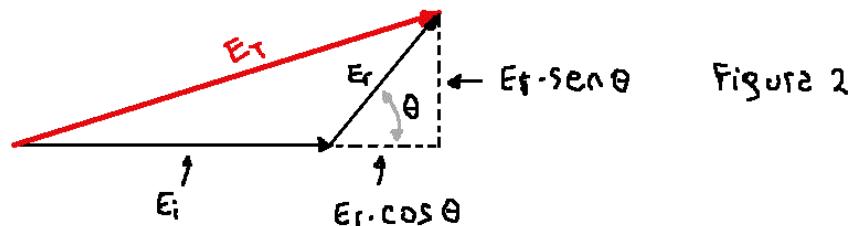


Figura 2

$$\begin{aligned} E_T^2 &= (E_i + E_r \cdot \cos \theta)^2 + (E_r \cdot \sin \theta)^2 = E_i^2 + 2E_i E_r \cos \theta + E_r^2 \cos^2 \theta + E_r^2 \sin^2 \theta \\ &= E_i^2 + 2E_i E_r \cos \theta + E_r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = E_i^2 + E_r^2 + 2E_i E_r \cos \theta \end{aligned}$$

$$E_T = \sqrt{E_i^2 + E_r^2 + 2E_i E_r \cos \theta} \quad \text{Teorema del coseno}$$

2 - DIAGRAMA DE CRANK

Crank propone dejar quieto E_i y girar E_r a dos veces βz . Se debe situar E_i en los puntos A y B; y a E_r en los puntos B y C, con su respectivo ángulo inicial. Las longitudes de los segmentos deben ser tales que se cumpla $E_i/E_r = AB/BC$. El campo E_T inicial será el segmento AC.

Luego, se hace girar E_r en sentido horario 45° (esto equivale a un desplazamiento de $\lambda/16$ en "z"), el E_T en este caso es la longitud que va desde A hasta el nuevo C, que está en la punta de E_r .

Esto sigue hasta completar la vuelta (360°).

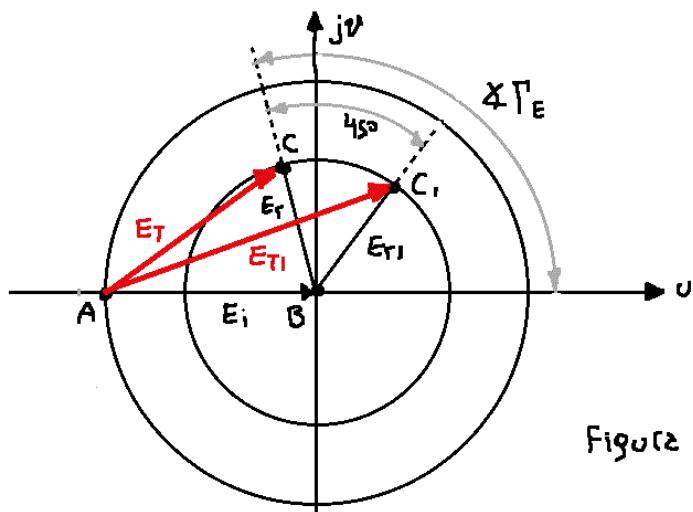


Figura 3

2.1- Relación de onda estacionaria

Es el cociente entre $E_{T,\max}$ y $E_{T,\min}$. El campo $E_{T,\max}$ es aquel que resulte de la suma vectorial de E_i y E_r cuando éstos tienen igual dirección y sentido. El campo $E_{T,\min}$ es el que resulte de la misma suma vectorial pero con igual dirección y distinto sentido. Analíticamente:

$$ROE = \frac{E_{T,\max}}{E_{T,\min}} = \frac{|E_i| + |\Gamma_E|}{|E_i| - |\Gamma_E|} = \frac{|E_i|}{|E_i|} \cdot \frac{1 + |\Gamma_E|/|E_i|}{1 - |\Gamma_E|/|E_i|} = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|}$$

¡Ojo que es el módulo de Γ_E ! El R.O.E. es un valor puramente real.

2.2- Procedimiento para encontrar la distribución del campo

Datos: n_1, n_2, E_i y F

- Encuentro $\Gamma_E = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = |\Gamma_E| \neq 0 \text{ re}$

$$E_s = \Gamma_E \cdot E_i$$

$$ROE = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|}$$

$$\beta = \frac{V_p}{\omega} = \frac{V_p}{2\pi F} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

- Encuentro E_T analíticamente por el teorema del coseno, o gráficamente por medio del diagrama de Crank como en la figura 3.
- Despues giro E_s en sentido horario un ángulo de 45° , que equivale a $\lambda/4$.
- Así sigo hasta completar la vuelta.
- Encuentro la longitud de onda del generador. $\lambda = V_p/F$
- Encuentro la distancia al máximo. Es la distancia en (λ y en [m]) que hay desde la condición inicial (SF) hasta donde se alcanza el $E_{T,\max}$. Uso la siguiente relación: $z_{\max} = \frac{E_{T,\max}}{2\beta}$. Para pasar a metros, reemplazo λ por el valor calculado en el paso anterior
- Encuentro la distancia al mínimo como en el procedimiento anterior.

3- ÁBACO DE SMITH (CONSTRUCCIÓN)

Para trazar el abaco de Smith, debemos tener en cuenta dos cosas:

- Trabajar con LT sin pérdidas y
- " " " impedancias normalizadas.

Expreso la impedancia normalizada y el coeficiente en forma compleja:

$$Z_N = \frac{Z_R}{Z_0} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|} = r + jx \quad (\text{ec. 1})$$

$$\Gamma_E = U + jV \quad (\text{ec. 2})$$

Reemplazo el Γ_E de ec. 1 y trabajo la ecuación obtener la forma compleja.

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1 + U + jV}{1 - U - jV} = \frac{1 + U + jV}{(1-U) - jV} \cdot \frac{(1-U) + jV}{(1-U) + jV} = \frac{(1+U)(1-U) + j^2 V^2 + (1+U)jV + (1-U)jV}{(1-U)^2 + V^2} \\ &= \frac{1 - U^2 - V^2 + j(U + UV + U - UV)}{(1-U)^2 + V^2} = \frac{1 - U^2 - V^2}{(1-U)^2 + V^2} + j \frac{2UV}{(1-U)^2 + V^2} = r + jx = Z_N \end{aligned} \quad (\text{ec. 3})$$

3.1 - Familia de curvas de $\operatorname{Re}\{Z_N\} = \text{cte}$

Parto de igualar las partes reales de la ec. 3 y trabajo hasta obtener la ecuación de una esfera.

$$r = \frac{1 - U^2 - V^2}{(1-U)^2 + V^2}$$

$$r(1-U)^2 + rV^2 = 1 - U^2 - V^2$$

$$r - 2rU + rU^2 + rV^2 = 1 - U^2 - V^2$$

$$U^2(r+1) + U(-2r) + V^2(r+1) = 1 - r$$

$$U^2 + U\left(\frac{-2r}{r+1}\right) + V^2 = \frac{1-r}{r+1}$$

$$U^2 + U\left(\frac{-2r}{r+1}\right) + \left(\frac{-r}{r+1}\right)^2 + V^2 = \frac{1}{r+1} + \left(\frac{-r}{r+1}\right)^2$$

$$\left(U - \frac{r}{r+1}\right)^2 + V^2 = \frac{(1-r)(1+r) + r^2}{(r+1)^2} = \frac{1 - r^2 + r^2}{(r+1)^2} = \frac{1}{(r+1)^2}$$

$$(U - a_1)^2 + V^2 = R_1^2$$

y este es la ecuación de una circunferencia con centro en $U = a_1$; $V = 0$ y radio R_1 . Como a_1 y R_1 dependen de "r", puedo decir que cada valor de "r" representa un círculo con un centro y un radio determinados. Los casos más interesantes son cuando $r = 0, 1, \infty$.

$$r = 0 \rightarrow U^2 + V^2 = 1 \quad (\text{representa el círculo máximo})$$

$$r = 1 \rightarrow (U - 0,5)^2 + V^2 = 1/4$$

$$r \rightarrow \infty \rightarrow (U - 1)^2 + V^2 = 0 \quad (\text{representa el punto de cortocircuito})$$

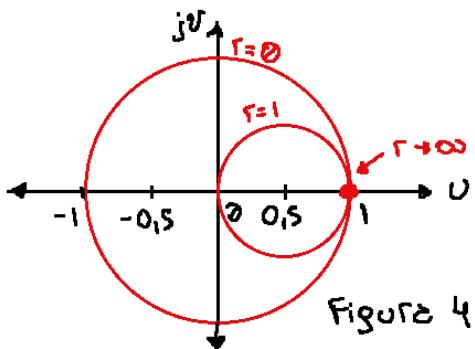


Figura 4

3.2-Familia de curvas de $\text{Im}\{\bar{z}_N\} = \text{cte}$

Igualo las partes imaginarias de la ec.3 y desarrollo hasta obtener la ecuación de una circunferencia.

$$x = \frac{zu}{(1-u)^2 + v^2}$$

$$x(1-u)^2 + xv^2 = zu$$

$$x - 2xu + xu^2 + xv^2 = zu$$

$$1 - 2u + u^2 + v^2 = zu/x$$

$$u^2 + u(-2) + v^2 + v\left(-\frac{z}{x}\right) = -1$$

$$u^2 + u(-2) + 1 + v^2 + v\left(-\frac{z}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = -1 + 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{z}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\boxed{(u-1)^2 + (v - b_z)^2 = R_z^2}$$

Los casos interesantes se presentan en $x = 0, \pm 0,5, \pm 1, \pm 2, \infty$

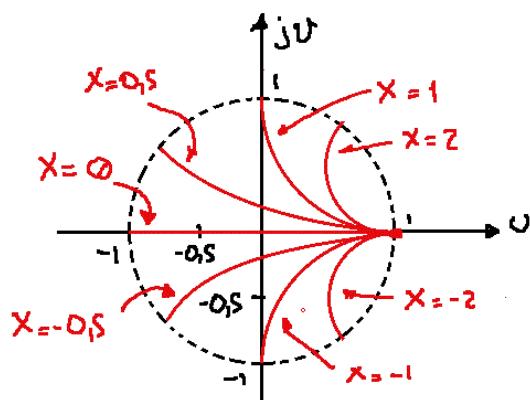
$$x=0 \rightarrow (u-1)^2 + (v-\infty)^2 = \infty^2$$

$$x=\pm 0,5 \rightarrow (u-1)^2 + (v \mp 2)^2 = 2^2$$

$$x=\pm 1 \rightarrow (u-1)^2 + (v \mp 1)^2 = 1^2$$

$$x=\pm 2 \rightarrow (u-1)^2 + (v \mp 0,5)^2 = 0,5^2$$

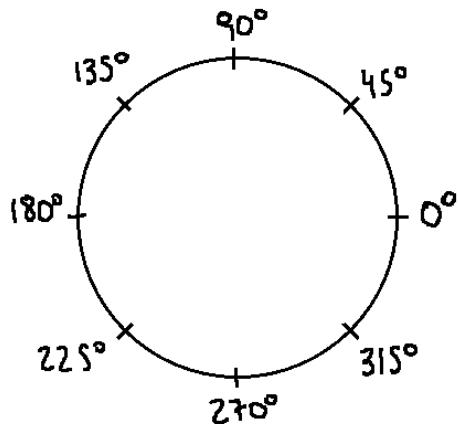
$$x=\infty \rightarrow (u-1)^2 + v^2 = 0^2$$



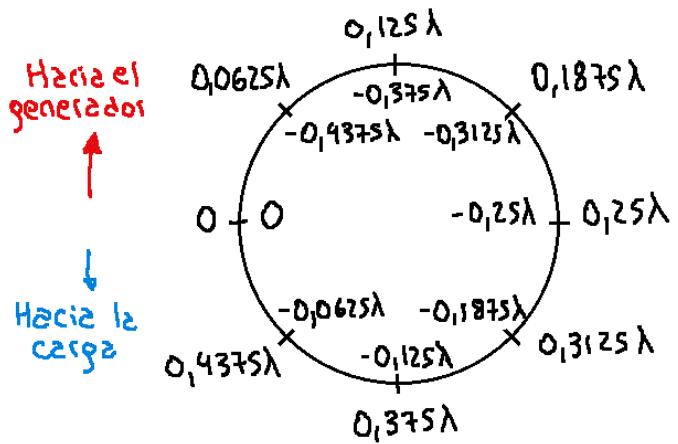
4- ÁBACO DE SMITH (DETALLES)

Si uno las figuras 4 y 5 obtengo el ábaco de Smith. Éste viene con 3 escalas circulares y 8 radiales.

4.1 - Escalas circulares



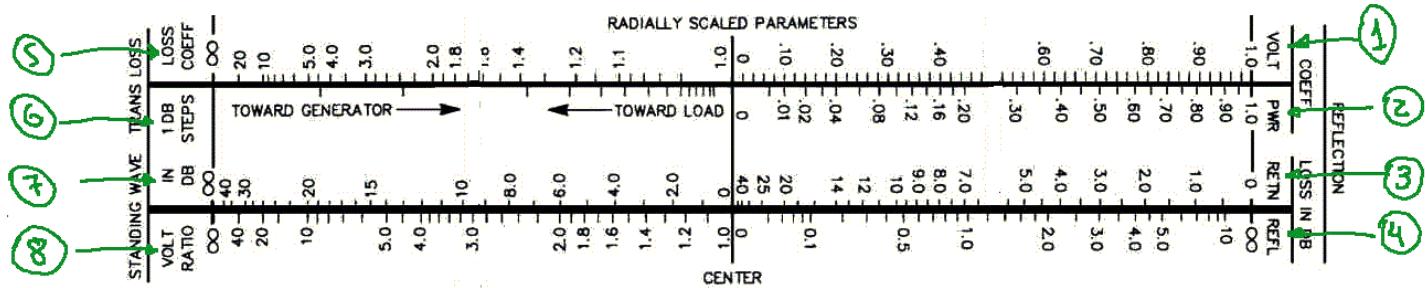
Escala de $\frac{Z}{Z_0}$



Escala de longitud de onda

Ambas se relacionan según la expresión: $\frac{Z}{Z_0} = e^{j\beta z}$. Por ejemplo, si voy desde 0° hasta 45° , en la escala de longitud de onda recorri $0.25\lambda - 0.1875\lambda = 0.0625\lambda$.

4.2 - Escalas radiales



1 - Reflection coeff. VOLTS (coeficiente de reflexión de tensión): ve desde 0 a 1, la escala es lineal.

2 - Reflection coeff. PWR (módulo del coeficiente de reflexión de potencia):

$$\Gamma_p = \frac{P_i}{P_r} = \frac{(V_i^2/R) \cdot e^{2j\alpha z}}{(V_r^2/R) \cdot e^{-2j\alpha z}} = \left(\frac{V_i}{V_r}\right)^2 e^{4j\alpha z} \rightarrow \text{el módulo es } |\Gamma_p| = \left(\frac{V_i}{V_r}\right)^2 = |\Gamma_E|^2$$

la escala también es lineal.

3 - Reflection loss RETN (pérdidas en decibeles al retorno): es la atenuación que debería sufrir P_i para llegar a P_r . Ve desde 0 hasta 40 dB
Atenuación = $20 \log |\Gamma_E|$

4- Reflection loss in dB - REFL (pérdidas en dB por reflexión): es el cociente entre P_i y P_c , expresado en dB. Siendo Γ_R la potencia absorbida por Z_R .

E_i	E_f	E_t	Γ_E	PWR	RETN	REFL	Note
IS	IS	Ø	1	1	1	Ø	No se transmitió potencia a Z_R .
IS	10,6	4,4	0,7	0,5	3	3	Se transmitió la mitad de la pot. a Z_R
IS	Ø	15	Ø	Ø	10	Ø	Se transmitió toda la potencia

5- Trans. loss LOSS COEFF (Coeficiente de pérdida de transmisión): es el cociente entre las pérdidas por atenuación considerando y no la E_f .

$$\text{LOSS COEFF} = \frac{1 + |\Gamma|^2 e^{-2\alpha z}}{1 - |\Gamma|^2 e^{-2\alpha z}} \quad \text{la escala va desde 0 a 1.}$$

la escala se refiere para cuando $\alpha=0$ (líneas ideales). Vendría a ser como una especie de ROE de las potencias.

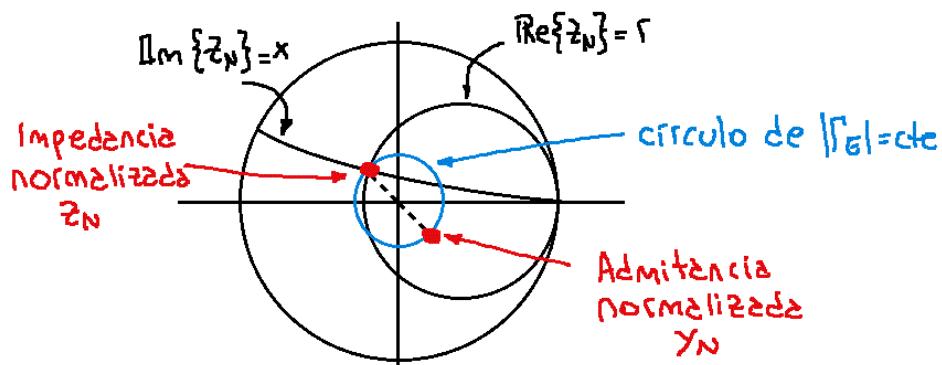
6- Trans. loss 1 DB STEPS (Tramos de 1 dB): muestra la reducción de Γ_E en una LT con pérdidas. Cada tramo representa una variación de 1 dB en la correspondencia de 2 secciones de una misma LT.

7- Standing wave IN dB: es el ROE pero en dB (0 a dB).

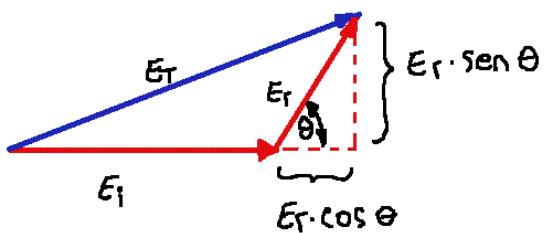
8- Standing wave VOL RATIO (Relación de onda estacionaria): ROE (1 a ∞).

4.3 - Ubicación de impedancias en el ábaco

Para ubicar una $Z_N = r + jx$ (resistencia + inductancia) busco la intersección del círculo $\text{Re}\{Z_N\} = r$ y el círculo $\text{Im}\{Z_N\} = x$. Giro 180° con $|\Gamma_E| = \text{cte}$ y obtengo la admittance normalizada.



EJERCICIO 58: Desarrollar el teorema del coseno.



$$\begin{aligned}
 E_T^2 &= (E_i + E_r \cdot \cos \theta)^2 + (E_r \cdot \sin \theta)^2 \\
 &= E_i^2 + 2E_i E_r \cdot \cos \theta + E_r^2 \cos^2 \theta + E_r^2 \sin^2 \theta \\
 &= E_i^2 + 2E_i E_r \cdot \cos \theta + E_r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 E_T^2 &= E_i^2 + 2E_i E_r \cdot \cos \theta + E_r^2 \\
 E_T &= \sqrt{E_i^2 + E_r^2 + 2E_i E_r \cos \theta}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 59: Expressar ROE en función de a) \$E_{\max}\$ y \$E_{\min}\$ y b) \$\Gamma_E\$.

$$\text{ROE} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{E_i + E_r}{E_i - E_r} = \frac{1 + \frac{E_r}{E_i}}{1 - \frac{E_r}{E_i}} = \frac{1 + \Gamma_E}{1 - \Gamma_E}$$

EJERCICIO 60: Explicar brevemente el fundamento del diagrama de Crank.

Distribución de tensión o corriente: a lo largo de un medio con reflexión de una línea de trasmisión: «Crank propone un cálculo gráfico donde en lugar de girar un vector \$\beta z\$ hacia la derecha y el otro hacia la izquierda, el vector incidente \$E_i\$ es arbitrariamente mantenido estacionario y el otro vector (el reflejado \$E_r\$) gira a dos veces el ángulo \$\beta z\$ en sentido horario para mantener las verdaderas posiciones de fase relativas entre \$E_i\$ y \$E_r\$.

EJERCICIO 61: Traer los modelos de onda estacionaria del campo E (o distribución del mismo) por medio del Diagrama de Crank. Hallar ROE y las distancias al máximo y al mínimo. \$\eta_1 = 377 \Omega\$, \$\eta_2 = 188,5 + j188,5 \Omega\$, \$E_i = 100 \text{ V/m}\$ y \$F = 300 \text{ MHz}\$.

$$\Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{188,5 + j188,5 - 377}{188,5 + j188,5 + 377} \approx 0,447 \angle 116^\circ$$

$$|E_r| = |\Gamma_E| \cdot |E_i| = 0,447 \cdot 100 = 44,7 \text{ V/m}$$

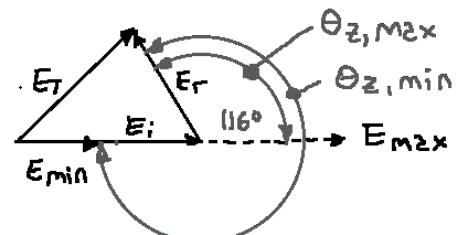
$$v_p = \lambda \cdot F \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{F} = \frac{c}{F} = \frac{300 \text{ M}}{300 \text{ M}} = 1 \text{ m}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi F}{c} = \frac{2\pi \cdot 300 \text{ M}}{300 \text{ M}} = 2\pi \text{ rad/m} = 360^\circ/\text{m}$$

$$\theta_{z,\max} = \beta z = 116^\circ \rightarrow z_{\max} = \theta_{z,\max} \cdot \frac{\lambda/2}{360^\circ} = 116 \cdot \frac{0,161}{360^\circ} = 0,161 \lambda = 0,161 \cdot 1 = 0,161 \text{ m}$$

$$\theta_{z,\min} = \theta_{z,\max} + 180^\circ = 116 + 180 = 296^\circ = 0,411 \lambda = 0,411 \text{ m}$$

$$\text{ROE} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{|E_i| + |E_r|}{|E_i| - |E_r|} = \frac{100 + 44,7}{100 - 44,7} = 2,61$$



Ejercicio N°

DIAGRAMA DE CRANK

$$R_1 = 377 \text{ } [\Omega] \quad R_2 = 188,5 + j188,5 \text{ } [\Omega]$$

$$E_i = 100 \text{ } [V/m] \quad \beta_e = 0,447 \times 116^\circ$$

$$E_f = 44,7 \times 116^\circ \text{ } [V/m]$$

$$F = 300 \text{ M} \text{ [Hz]}, \lambda = 1 \text{ [m]}$$

$$\beta = 2\pi \text{ [rad/m]} = 360 \text{ [°/m]}$$

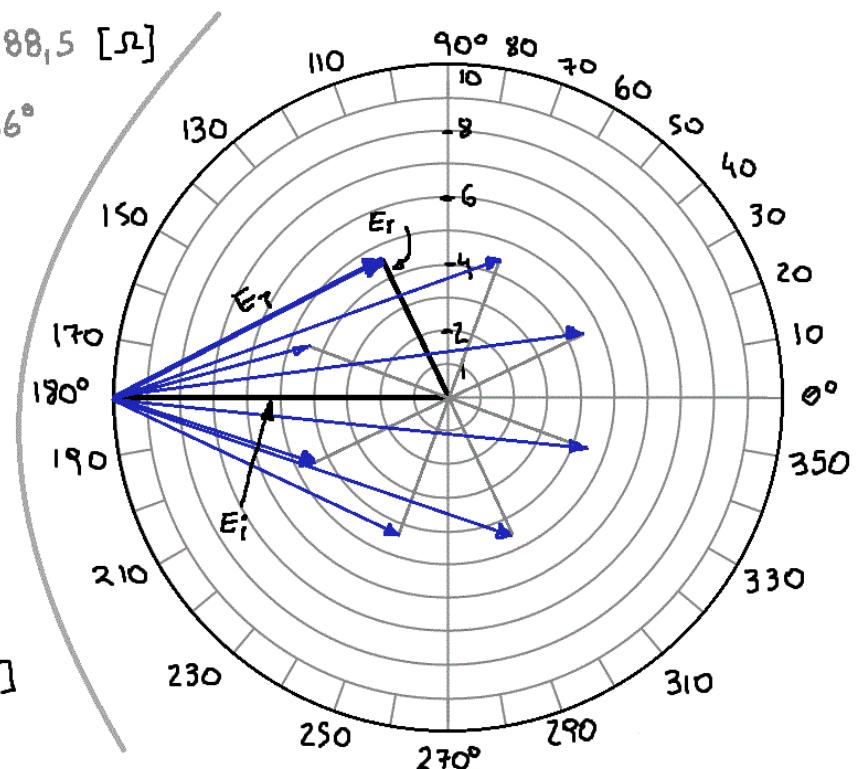
Distancia al máximo

$$\theta_{ZM} = 0,161 \text{ [\lambda]}, Z_M = 0,161 \text{ [m]}$$

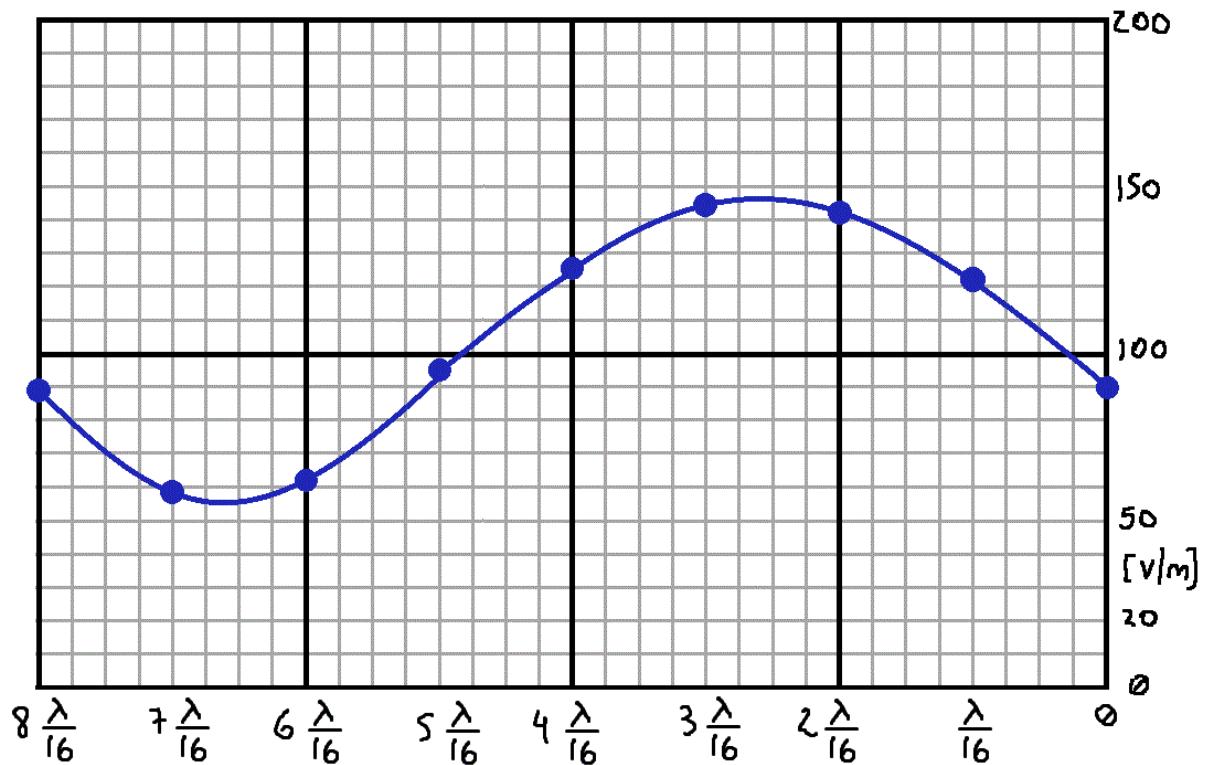
Distancia al mínimo

$$\theta_{Zm} = 0,411 \text{ [\lambda]}, Z_m = 0,411 \text{ [m]}$$

$$R.O.E. = 2,61$$



Z	$8\lambda/16$	$7\lambda/16$	$6\lambda/16$	$5\lambda/16$	$4\lambda/16$	$3\lambda/16$	$2\lambda/16$	$\lambda/16$	\emptyset
$\theta_r - \theta_z$	-244	-199	-154	-109	-64	-19	26	71	116°
E_T	89	59	62	95	126	143	141	122	89



EJERCICIO 62: Partiendo de la ecuación de P_E en función de η_1 y η_2 , hallar las ecuaciones de circunferencia de las partes real e imaginaria de Z_N .

$$P_E = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = \frac{\frac{Z_R}{Z_0} - 1}{\frac{Z_R}{Z_0} + 1} = \frac{Z_N - 1}{Z_N + 1} \rightarrow \therefore Z_N = \frac{1 + P_E}{1 - P_E} = \frac{1 + U + jV}{1 - U - jV} = \frac{(1+U) + j(V)}{(1-U) - j(V)}$$

$$Z_N = \frac{(1+U) + j(V)}{(1-U) - j(V)} \cdot \frac{(1-U) + j(V)}{(1-U) + j(V)} = \frac{[(1-U)^2 - V^2] + j[(1-U)V + (1+U)V]}{(1-U)^2 + V^2} = r + jx$$

$$\operatorname{Re}\{Z_N\} = r = \frac{1 - U^2 - V^2}{(1-U)^2 + V^2} \quad \operatorname{Im}\{Z_N\} = x = \frac{1 - U^2 - V^2}{(1-U)^2 + V^2}$$

Para la parte real tengo:

$$r[(1-U)^2 + V^2] = 1 - U^2 - V^2$$

$$r(1 - 2U + U^2 + V^2) = 1 - U^2 - V^2$$

$$r - 2rU + rU^2 + rV^2 = 1 - U^2 - V^2$$

$$U^2(r+1) - U(2r) + V^2(r+1) = 1 - r$$

$$U^2 - U\left(\frac{2r}{r+1}\right) + V^2 = \frac{1-r}{1+r}$$

$$U^2 + U\left(\frac{-2r}{r+1}\right) + \left(\frac{-r}{r+1}\right)^2 - \left(\frac{-r}{r+1}\right)^2 + V^2 = \frac{1-r}{1+r}$$

$$\left(U - \frac{r}{r+1}\right)^2 + V^2 = \frac{1-r}{1+r} + \frac{r^2}{(r+1)^2} = \frac{1-r^2+r^2}{(r+1)^2} = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2$$

$$\left(U - \frac{r}{r+1}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2$$

$$\boxed{(U - 2r)^2 + V^2 = R_1^2}$$

Para la parte imaginaria tengo:

$$x[(1-U)^2 + V^2] = (1-U)V + (1+U)V$$

$$x(1 - 2U + U^2 + V^2) = V - UV + V + UV$$

$$x - 2xU + xU^2 + xV^2 = 2V$$

$$1 - 2U + U^2 + V^2 = \frac{2V}{x}$$

$$U^2 - 2U + V^2 - V \frac{2}{x} = -1$$

$$U^2 - 2U + 1 - 1 + V^2 - V \frac{2}{X} + \left(\frac{1}{X}\right)^2 - \left(\frac{1}{X}\right)^2 = -1$$

$$(U-1)^2 + (V - \frac{1}{X})^2 = \frac{1}{X^2}$$

$$(U-a_2)^2 + (V - b_2)^2 = R_2^2$$

Problema 63: Partiendo de la expresión de la parte real de la impedancia intrínseca normalizada:

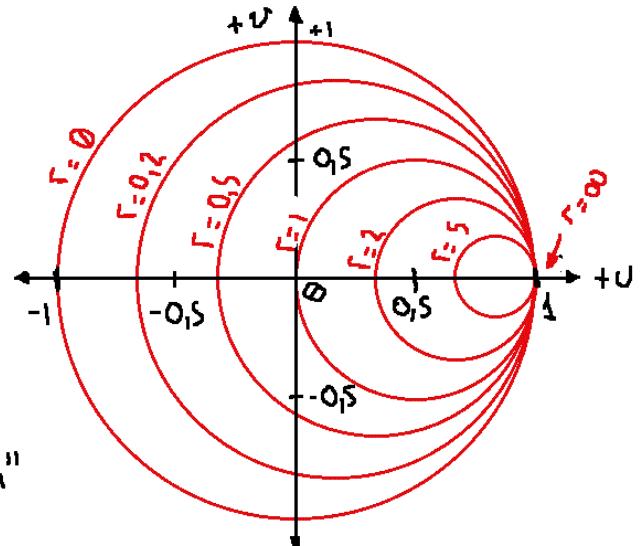
- Dar valores a $r=0$ - 0,2 - 0,5 - 1 - 2 - 5 - ∞ .
- Confeccionar una tabla y utilizar la familia de curvas sobre el diagrama del $\Gamma_E = \text{cte}$ ($u+jv$).
- Extraer conclusiones. ¿Cómo están relacionadas las curvas con la longitud de onda y otra cosa?

$$\left(U - \underbrace{\frac{r}{r+1}}_{a_1}\right)^2 + V^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{r+1}\right)^2}_{R_1}$$

Si, por ejemplo, $R_1 = 8 \text{ [cm]}$ cuando $r = \infty$ (círculo de radio máximo), tengo

$$R_1 = \frac{1}{r+1} = \frac{1}{\infty+1} = 1$$

Pero que $R_1 = 8 \text{ [cm]}$ debo multiplicarlo por 8 [cm]. También tengo que multiplicar a "a₁" por este mismo valor



r	a ₁	a ₁ [cm]	R ₁	R ₁ [cm]
0	0	0	1	8
0,2	0,17	1,36	0,83	6,67
0,5	0,33	2,64	0,67	5,33
1	0,5	4	0,5	4
2	0,67	5,33	0,33	2,64
5	0,83	6,67	0,17	1,36
∞	1	8	0	0

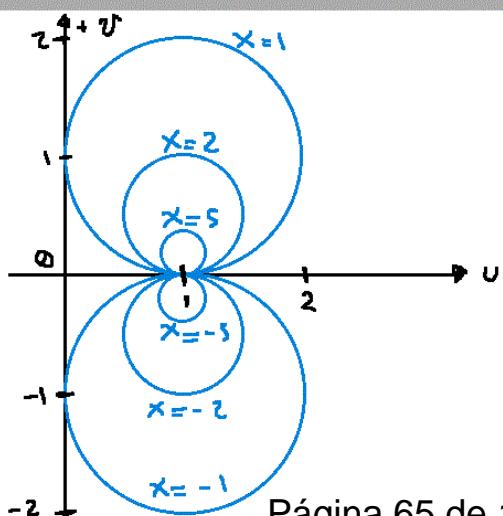
A medida que el módulo de la parte real de γ_N , es decir Γ , aumenta, el radio del círculo disminuye y su centro tiende a $u=1$ (esto se da cuando $r \rightarrow \infty$).

Problema 64: Partiendo de la expresión de la parte imaginaria de la impedancia intrínseca normalizada:

- Dar valores a $x=0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 5 ; -5 ; \infty ; -\infty$.
- Confeccionar una tabla y utilizar la familia de curvas sobre el diagrama del $\Gamma_E = \text{cte}$ ($u+jv$).
- Extraer conclusiones.

$$(U-1)^2 + (V - \frac{1}{X})^2 = \left(\frac{1}{X}\right)^2$$

x	B	R
0	∞	∞
+1	1	1
-1	-1	-1
+2	0,5	0,5
-2	-0,5	0,5
+5	0,2	0,2
-5	-0,2	0,2
$+\infty$	0	0
$-\infty$	0	0



Problema 65: Encontrar módulo y argumento de Γ_E , por medio del ábaco de Smith, conociendo η_2 y η_1 .

a) $\begin{cases} \eta_1 = 377 [\Omega] \\ \eta_2 = (188,5 + j188,5) [\Omega] \end{cases}$

b) $\begin{cases} \eta_1 = 377 [\Omega] \\ \eta_2 = (565,5 + j754) [\Omega] \end{cases}$

PUNTO A:

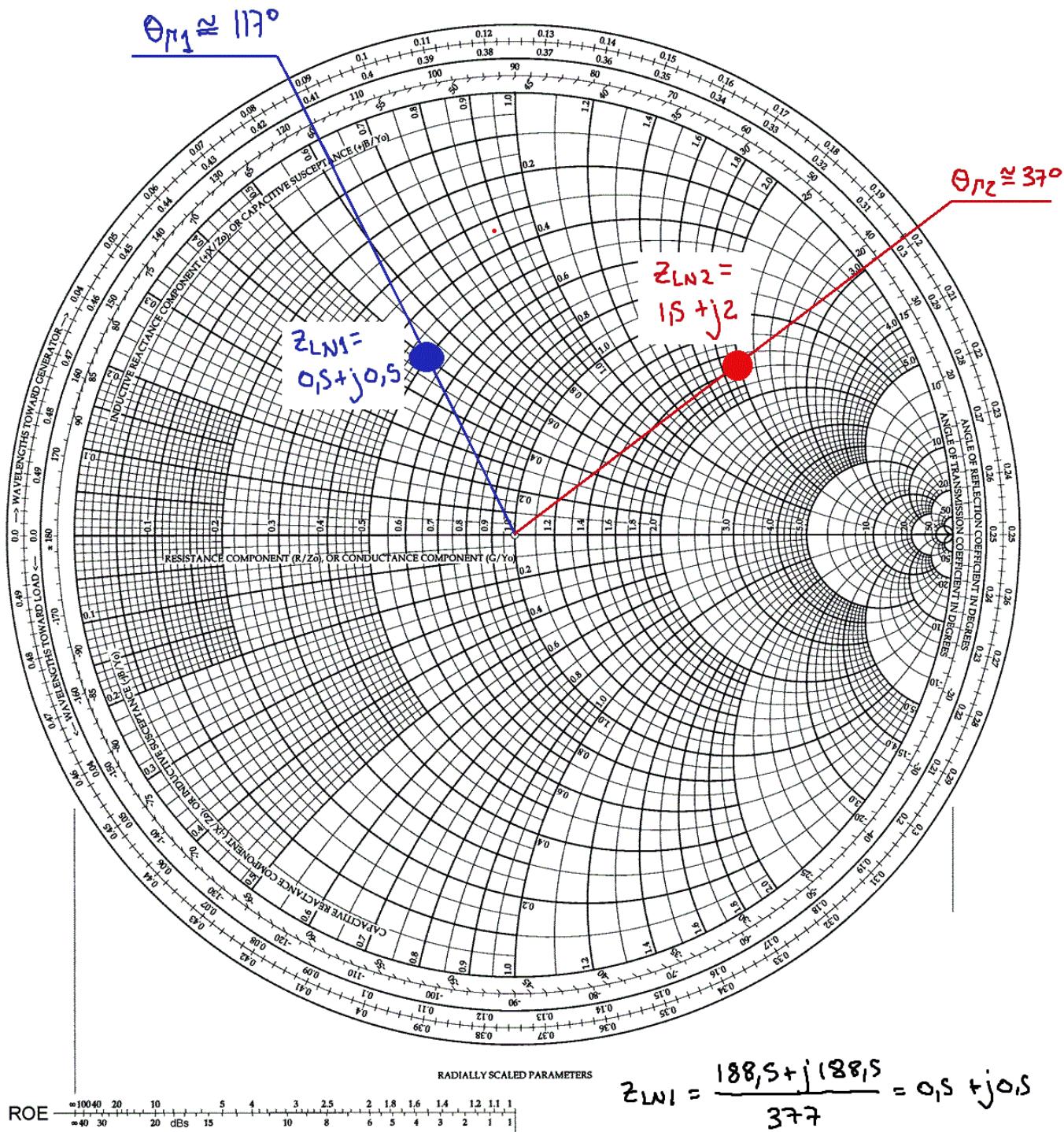
Análiticamente: $\Gamma_{E1} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \approx 0,44 \times 116^\circ$

Por abaco: $\Gamma_{E1} \approx 0,46 \times 117^\circ$

PUNTO B:

$\Gamma_{E2} \approx 0,64 \times 37^\circ$

$\Gamma_{E2} \approx 0,64 \times 37^\circ$



$$Z_{LN1} = \frac{188,5 + j188,5}{377} = 0,5 + j0,5$$

$|\Gamma_E| \approx 0,44$

$|\Gamma_E| \approx 0,64$

$$Z_{LN2} = \frac{565,5 + j754}{377} = 1,5 + j2$$

Problema 66: Expresar en forma compleja el valor de η_2 , sabiendo η_1 y Γ_E , por medio del ábaco de Smith.

a) $\begin{cases} \eta_1 = 377 \text{ [}\Omega\text{]} \\ \Gamma_E = 0,5 \cdot e^{j45^\circ} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \eta_1 = 377 \text{ [}\Omega\text{]} \\ \Gamma_E = 0,3 \cdot e^{j150^\circ} \end{cases}$

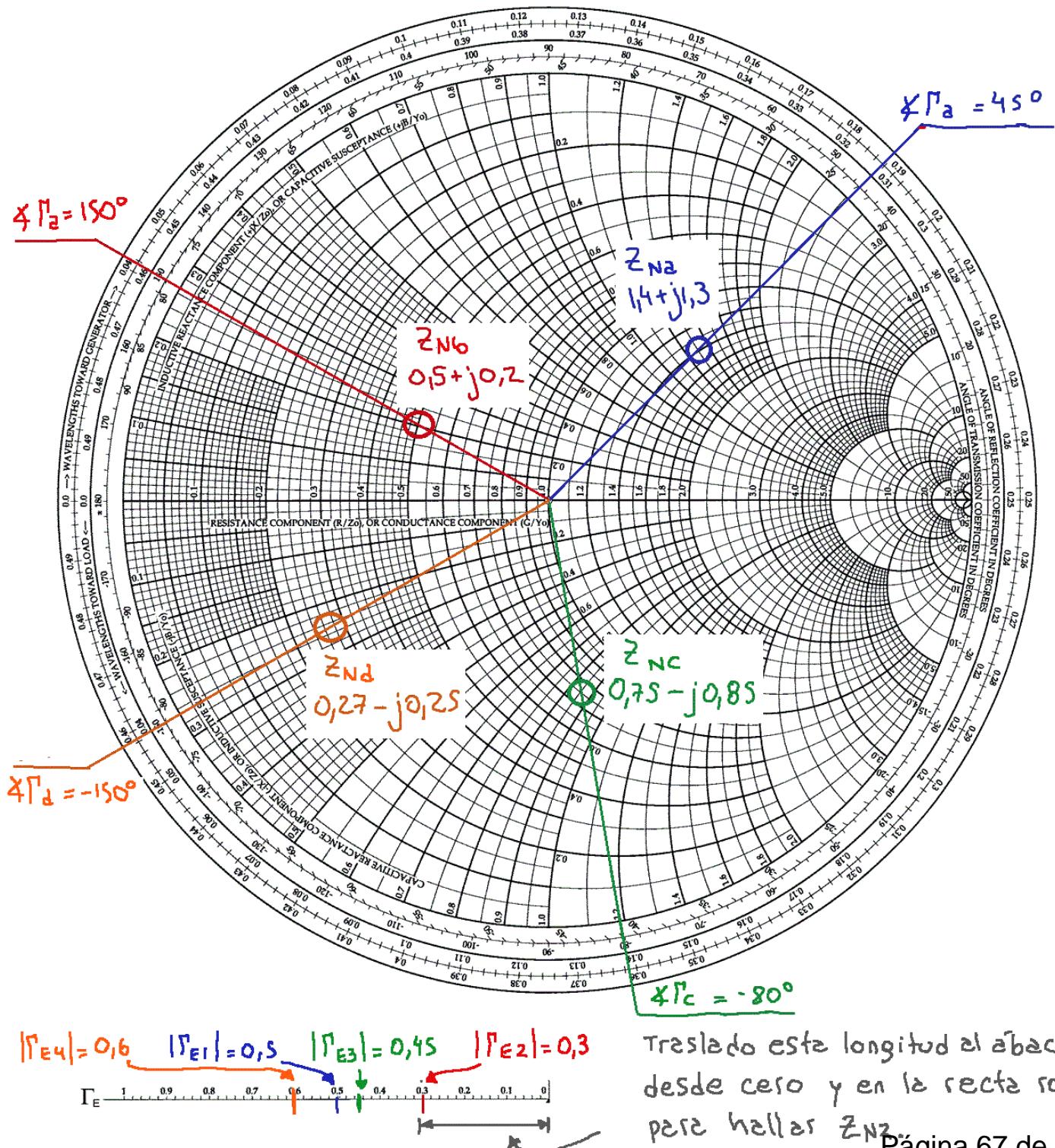
c) $\begin{cases} \eta_1 = 377 \text{ [}\Omega\text{]} \\ \Gamma_E = 0,45 \cdot e^{-j80^\circ} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \eta_1 = 377 \text{ [}\Omega\text{]} \\ \Gamma_E = 0,6 \cdot e^{-j150^\circ} \end{cases}$

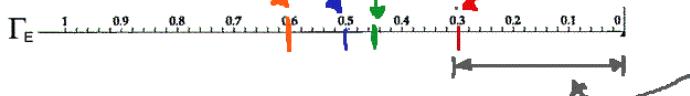
Análiticamente: $\eta_2 = 377 \frac{1 + 0,5 e^{j45^\circ}}{1 - 0,5 e^{j45^\circ}} \approx 522 + j484 \quad \eta_{2b} \approx 213 + j70 \quad \eta_{2c} \approx 289 - j318 \quad \eta_{2d} \approx 101,8 - j94,95$

Por abaco: $\eta_2 = Z_{N2a} \cdot \eta_1 = (1,4 + j1,3) 377 = 527,8 + j490,1 \quad \eta_{2b} \approx 188,5 + j75,4$

$\eta_{2c} \approx 282,75 - j320,45 \quad \eta_{2d} \approx 101,8 - j94,95$



$|\Gamma_{E4}| = 0,6 \quad |\Gamma_{E1}| = 0,5 \quad |\Gamma_{E3}| = 0,45 \quad |\Gamma_{E2}| = 0,3$



Trasladar este longitud el abaco, desde cero y en la recta roja, para hallar Z_{N2} .

Problema 67: Hallar ROE por medio del ábaco de Smith, sabiendo que $\eta_1=377$ [Ω], para:

- a) $\eta_2 = (188,5 + j188,5)$ [Ω]
- b) $\eta_2 = (565,5 + j754)$ [Ω]
- c) $\eta_2 = (377 - j377)$ [Ω]
- d) $\eta_2 = (150,8 - j94,25)$ [Ω]

PUNTO A:

Análiticamente: $ROE = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|} = \frac{1 + 0,44}{1 - 0,44} = 2,57 = ROE$

$$\circ \quad \Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{188,5 + j188,5 - 377}{188,5 + j188,5 + 377} \approx 0,44 \angle 116^\circ$$

Por abaco: $ROE \approx 2,57$

PUNTO B:

Análiticamente: $ROE = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|} = \frac{1 + 0,64}{1 - 0,64} = 4,56 = ROE$

$$\circ \quad \Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{565,5 + j754 - 377}{565,5 + j754 + 377} \approx 0,64 \angle 37^\circ$$

Por abaco: $ROE \approx$

PUNTO C:

Análiticamente: $ROE = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|} = \frac{1 + 0,44}{1 - 0,44} = 2,57 = ROE$

$$\circ \quad \Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{377 + j377 - 377}{377 + j377 + 377} \approx 0,44 \angle 63^\circ$$

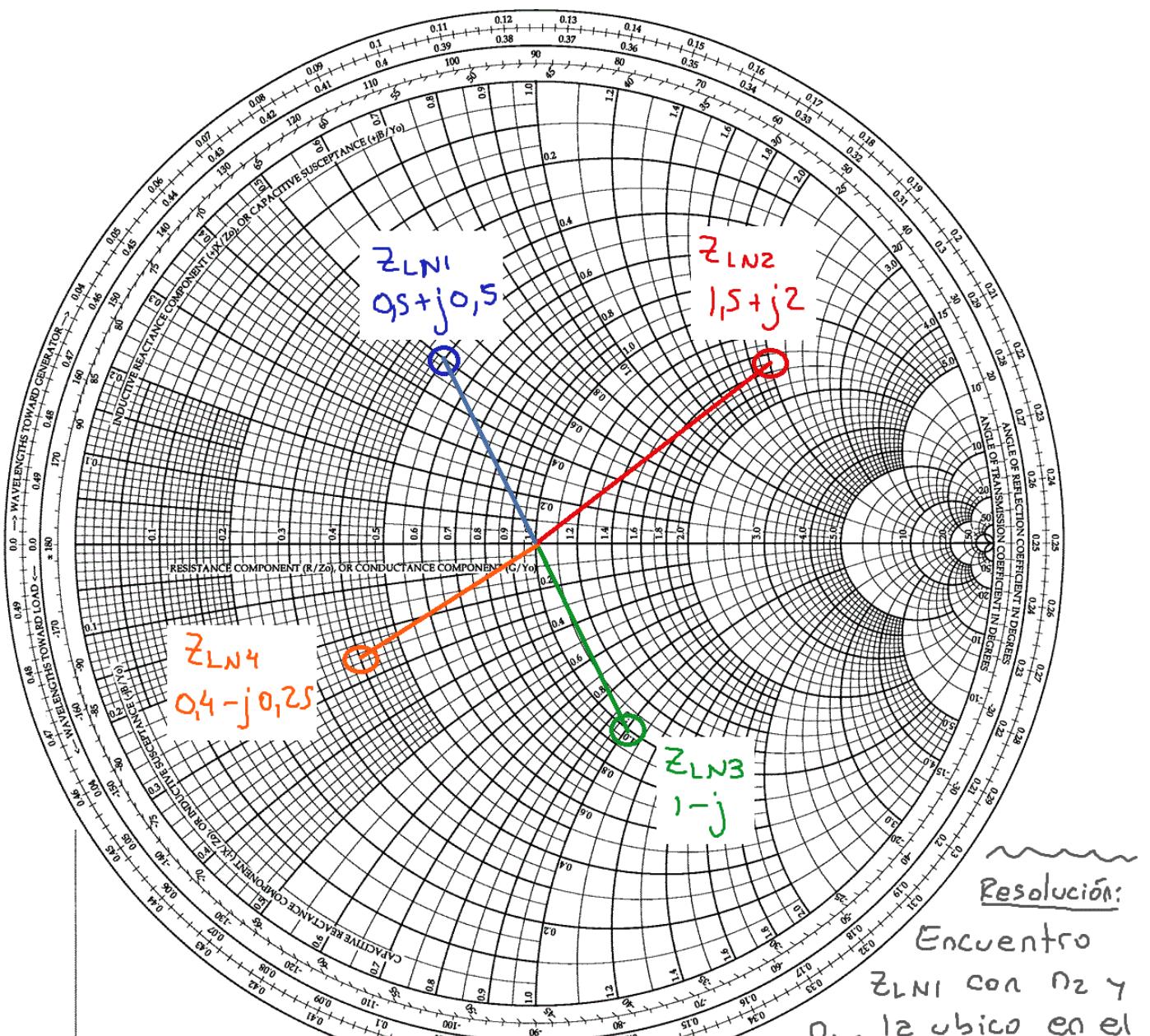
Por abaco: $ROE \approx$

PUNTO D:

Análiticamente: $ROE = \frac{1 + |\Gamma_E|}{1 - |\Gamma_E|} = \frac{1 + 0,45}{1 - 0,45} = 2,63 = ROE$

$$\circ \quad \Gamma_E = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{150,8 + j94,25 - 377}{150,8 + j94,25 + 377} \approx 0,45 \angle 147^\circ$$

Por abaco: $ROE \approx$



Resolución:

Encuentro

Z_{LN1} con n_2 y n_1 , Γ_E ubicado en el abac, obtengo $|\Gamma_E|$ en la escala y subo p/ hacer ROE_1 .

$$ROE_2 = 4,5 \quad ROE_4 = 2,62$$

$$ROE = \frac{100}{40} = 2.5 \quad dBS = 10$$

$$|\Gamma_{E2}| = 0,64$$

$$|\Gamma_{E1}| = |\Gamma_{E3}| = 0,44$$

$$|\Gamma_{E4}| = 0,45$$

$$Z_{LN1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{188,5 + j188,5}{377} = 0,5 + j0,5$$

$$\rightarrow |\Gamma_{E1}| = 0,44 \rightarrow ROE_1 = 2,6$$

$$Z_{LN2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{565,5 + j754}{377} = 1,5 + j2$$

$$\rightarrow |\Gamma_{E2}| = 0,64 \rightarrow ROE_2 = 4,5$$

$$Z_{LN3} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{377 - j377}{377} = 1 - j$$

$$\rightarrow |\Gamma_{E3}| = 0,44 \rightarrow ROE_3 = 2,6$$

$$Z_{LN4} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{150,8 - j84,25}{377} = 0,4 - j0,25 \rightarrow |\Gamma_{E4}| = 0,45 \rightarrow ROE_4 = 2,62$$

1- CONCEPTOS PREVIOS

{ Cosenos directores
 { Longitud de onda y velocidad de fase

2- INCIDENCIA OBLICUA

{ Reflexión por un conductor perfecto
 { Reflexión en un aislante perfecto

1- CONCEPTOS PREVIOS

1.1- Cosenos directores

Dada la ecuación

$$E_x(z) = E_0 e^{-j\beta z}$$

es una onda de dirección en "z" y cuyos planos equipotenciales están dados por:
 $z = \text{cte}$

Si la dirección fuera arbitraria, digamos "r", tengo que reemplazar a "z" por una ecuación que cuando la iguala a una constante me den las superficies equipotenciales. Dicha ecuación es la de un plano

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = \text{cte}$$

siendo "r" un vector que une el origen con cualquier punto del plano, y " \hat{n} " es el versor normal al mismo. La ecuación se puede poner como:

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = x \cdot \cos A + y \cdot \cos B + z \cdot \cos C$$

Siendo x, y y z las componentes del vector "r"; y $\cos A$, $\cos B$ y $\cos C$, los del versor " \hat{n} ". A, B y C son los ángulos de " \hat{n} " respecto a los ejes x, y y z respectivamente; y sus cosenos son los llamados "cosenos directores".

La ecuación de una onda en una dirección " \hat{n} " se puede escribir como:

$$E_n(r) = E_0 e^{j\beta(\hat{n} \cdot r)} = (E_y + jE_z) \cdot e^{j\beta(x \cos A + y \cos B + z \cos C)}$$

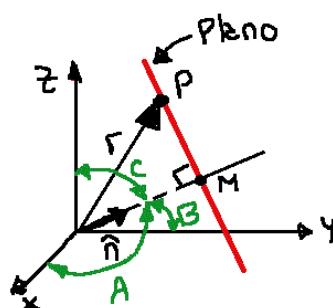
La variación en el tiempo será:

$$\tilde{E}_n(r; t) = \operatorname{Re} \{ E_n(r) \cdot e^{j\omega t} \} =$$

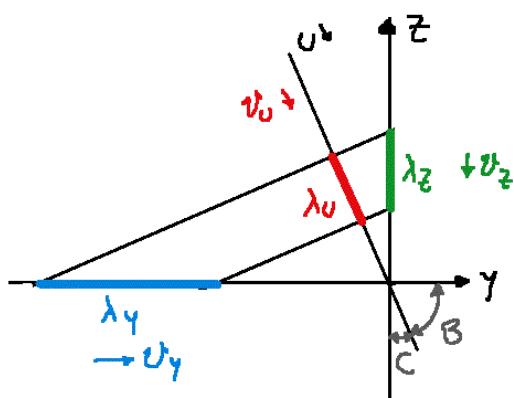
$$= \operatorname{Re} \{ (E_y + jE_z) \cdot e^{-j(\beta \hat{n} \cdot r - \omega t)} \} =$$

$$= \operatorname{Re} \{ (E_y + jE_z) \cdot [\cos(\beta \hat{n} \cdot r - \omega t) - j \sin(\beta \hat{n} \cdot r - \omega t)] \}$$

$$= E_y \cdot \cos(\beta \hat{n} \cdot r - \omega t) + E_z \cdot \sin(\beta \hat{n} \cdot r - \omega t)$$



1.2- Longitud de onda y velocidad de fase



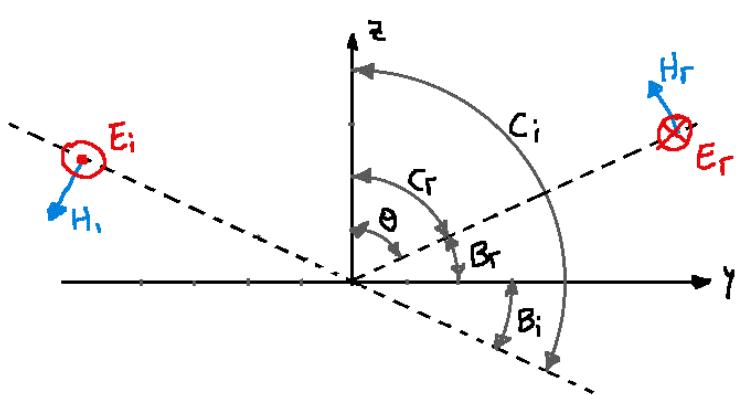
$$\lambda_0 = \lambda_x \cdot \cos A = \lambda_y \cdot \cos B = \lambda_z \cdot \cos C$$

$$v_0 = v_x \cdot \cos A = v_y \cdot \cos B = v_z \cdot \cos C$$

2- INCIDENCIA OBLICUA

Hay 2 casos: polarización perpendicular y polarización paralela.

2.1- Reflexión en un conductor perfecto



$$A_i = 90^\circ \quad A_r = 90^\circ$$

$$B_i = 90^\circ - \theta \quad B_r = 90^\circ - \theta$$

$$C_i = 180^\circ - \theta \quad C_r = \theta$$

$$E_r = E_{\text{incidente}} + E_{\text{reflejada}} =$$

$$\begin{aligned} \circ E_{\text{incidente}} &= E_i \cdot e^{-j\beta(x \cdot \cos A_i + y \cdot \cos B_i + z \cdot \cos C_i)} = \\ &= E_i \cdot e^{-j\beta} \left[x \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_{=0} + y \cdot \underbrace{\cos(90^\circ - \theta)}_{=\sin \theta} + z \cdot \underbrace{\cos(180^\circ - \theta)}_{=\pm \cos \theta} \right] \\ &= E_i \cdot e^{-j\beta} (y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ E_{\text{reflejada}} &= E_r \cdot e^{-j\beta(x \cdot \cos A_r + y \cdot \cos B_r + z \cdot \cos C_r)} \\ &= E_r \cdot e^{-j\beta} \left[x \cdot \cos 90^\circ + y \cdot \cos(90^\circ - \theta) + z \cdot \cos \theta \right] \\ &= E_r \cdot e^{-j\beta} (y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta) \end{aligned}$$

$$E_T = E_i \cdot e^{-j\beta(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta)} + E_r \cdot e^{-j\beta(y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)}$$

$$\circ E_T(z=0) = E_i \cdot e^{-j\beta \cdot y \cdot \sin \theta} + E_r \cdot e^{-j\beta \cdot y \cdot \sin \theta} = 0 \quad (\text{por condic. de frontera}).$$

la única forma de cumplir esto es que $E_i = E_r$

$$E_T = E_i \cdot e^{-j\beta(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta)} - E_i \cdot e^{-j\beta(y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)}$$

$$E_T = E_i \left[e^{-j\beta(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta)} - e^{-j\beta(y \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)} \right]$$

$$= E_i \cdot e^{-j\beta \cdot y \cdot \sin \theta} (e^{j\beta \cdot z \cdot \cos \theta} - e^{-j\beta \cdot z \cdot \cos \theta})$$

$$= E_i \cdot e^{-j\beta \cdot y \cdot \sin \theta} \cdot 2j \cdot \sin(\beta_z \cdot z \cdot \cos \theta)$$

$$= 2 \cdot e^{j90^\circ} E_i \cdot e^{-j\beta_y \cdot y} \cdot \sin(\beta_z \cdot z) \quad \xrightarrow{\begin{cases} \beta_z \cdot \sin \theta = \beta_z \cdot \cos(90^\circ - \theta) = \beta_z \cdot \cos \theta \\ \beta_z \cdot \cos \theta = \beta_z \cdot \cos C_T = \beta_z \end{cases}}$$

$$= 2 \cdot E_i \cdot e^{-j(\beta_y \cdot y - 90^\circ)} \cdot \sin(\beta_z \cdot z)$$

Reemplazo

$$\beta_z \cdot \sin \theta = \beta_z \cdot \cos(90^\circ - \theta) = \beta_z \cdot \cos \theta = \beta_z$$

$$\beta_z \cdot \cos \theta = \beta_z \cdot \cos C_T = \beta_z$$

$$j = e^{j90^\circ}$$

Para obtener la expresión total en el tiempo multiplico por $e^{j\omega t}$

$$\tilde{E}_T(y, z, t) = 2 \cdot E_i \cdot e^{-j(\beta_y \cdot y - 90^\circ - \omega t)} \cdot \sin(\beta_z \cdot z)$$

Saco la parte real y tengo:

$$E_T(y, z, t) = \operatorname{Re}\{E_T(y, z, t)\} = 2E_i \cdot \cos[(\omega t - \beta_y \cdot y) + 90^\circ] \cdot \sin(\beta_z \cdot z)$$

$$E_T(y, z, t) = 2E_i \cdot \sin(\omega t - \beta_y \cdot y) \cdot \sin(\beta_z \cdot z)$$

Se lo puede representar como un $\sin(z)$ que:

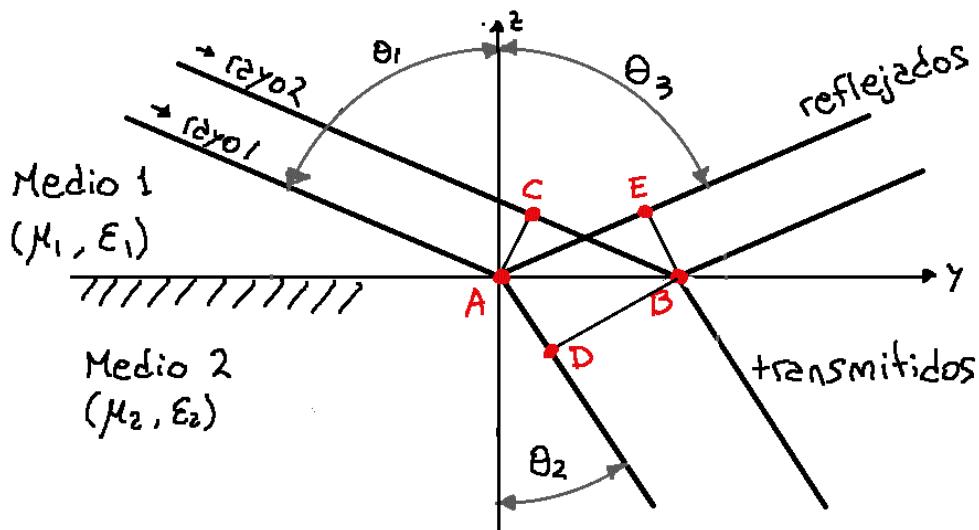
- para un tiempo dado, varía respecto $\sin(y)$ en el eje "y".
- para un punto $y=\text{cte}$, varía respecto $\sin(t)$.

Para el caso en que se trate la polarización paralela, se trabaja de manera similar con el campo H en lugar del E. Obtengo:

$$H_T(y, z, t) = 2H_i \cdot (\cos \omega t - \beta_y \cdot y) \cdot \cos(\beta_z \cdot z)$$

3.2 - Reflexión en un divisor perfecto

En este caso, parte de la onda se refleja y la otra se refracta. Considero dos rayos que inciden en una SF que separa 2 medios (cada uno con su μ y ϵ).



Mientras el rayo 2 se desplaza una distancia \overline{CB} , el rayo 1 se desplaza una distancia \overline{AE} . Se debe cumplir entonces que:

$$\frac{CB}{AD} = \frac{v_1}{v_2}$$

Pero $CB = AB \cdot \operatorname{sen} \theta_1$ y $AD = AB \cdot \operatorname{sen} \theta_2$. También, si considero las v en los medios 1 y 2, tengo $v_1 = 1/\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$ y $v_2 = 1/\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$. Entonces:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}}{\frac{1}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}}$$

Si $\mu_1 = \mu_2 = \mu_v$, algo que no sé por qué mierda lo hace Abad, tengo

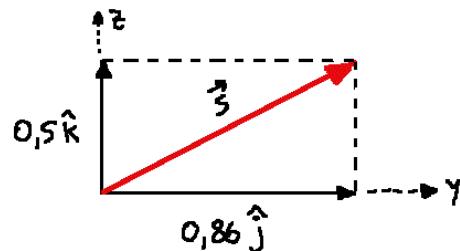
$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

Ejercicio 68: Una onda que se propaga por el vacío, posee una dirección \vec{S} de propagación y su versor normal \hat{n} a las superficies equipotenciales, forma los siguientes ángulos con los ejes: $A=90^\circ$ con respecto a x , $B=30^\circ$ con respecto a y , y $C=60^\circ$ con respecto a z . Se pide:

- Expresar el versor normal \hat{n} en función de los cosenos directores y graficar la dirección \vec{S} a escala;
- Expresar E_T cuya amplitud máxima es 100 [V/m] y $F=100$ [MHz] en función de x , y , z y t ;
- Calcular el campo para:
 - $x=y=z=t=0$.
 - $x=z=t=0$, $y=3,465$ [m].
 - $x=y=t=0$, $z=6$ [m].
- Trazar los planos equipotenciales de los puntos mencionados en c) sobre el gráfico pedido en a).
- Conclusiones a partir de la interpretación del gráfico.

PUNTO A:

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \cos A \hat{i} + \cos B \hat{j} + \cos C \hat{k} \\ &= \cos 90^\circ \hat{i} + \cos 30^\circ \hat{j} + \cos 60^\circ \hat{k} \\ &= 0,86 \hat{j} + 0,5 \hat{k}\end{aligned}$$



PUNTO B:

$$E_{Tx}(z, y, t) = E_i \cdot \cos(\omega t - \beta z \cdot \hat{S}) = E_i \cdot \cos[\omega t - \beta(0,86y \cdot \hat{j} + 0,5z \cdot \hat{k})]$$

$$\circ \omega = 2\pi \cdot F = 2\pi \cdot 100 \text{ M} = (200 \text{ M}) \pi \text{ [rad/s]}$$

$$\circ \beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi \cdot F}{C} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ M}}{300 \text{ M}} = \frac{2\pi}{3} \text{ [rad/m]}$$

$$E_{Tx}(z, y, t) = 100 \cdot \cos[(200 \text{ M})\pi \cdot t - (\underbrace{1,8y \cdot \hat{j}}_{\omega_y} + \underbrace{1,05z \cdot \hat{k}}_{\omega_z})]$$

PUNTO C:

$$E_{Tx}(y=2, z=t=0) = 100 \cdot \cos[(200 \text{ M})\pi \cdot 0 - (1,8 \cdot 0 \cdot \hat{j} + 1,05 \cdot 0 \cdot \hat{k})] = 100$$

$$E_{Tx}(y=3,465; z=t=0) = 100 \cdot \cos[(200 \text{ M})\pi \cdot 0 - (1,8 \cdot 3,465 \cdot \hat{j} + 0,5 \cdot 0 \cdot \hat{k})] = \hat{j} 100$$

$$E_{Tx}(z=6; y=t=0) = 100 \cdot \cos[(200 \text{ M})\pi \cdot 0 - (1,8 \cdot 0 \cdot \hat{j} + 0,5 \cdot 6 \cdot \hat{k})] = \hat{k} 100$$

PUNTO D:

- Es la recta de "abscisas" de la dirección \vec{S} en donde está montada la gráfica de interés (campo E_{Tx}).
- Es el campo E_{Tx} , con módulo igual a 100 [V/m] y cuya longitud de onda es $\lambda_S = \lambda_z \cdot \cos C = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3$ [m].
- Es la gráfica del módulo del campo E_{Tx} en el eje "y". Es sólo el módulo, porque la dirección es perpendicular a la dirección "S". Esta función tiene una longitud de onda igual a

$$\lambda_y = \frac{1}{f_y} = \frac{2\pi}{\omega_y} = \frac{2\pi}{1,8} \approx 3,5 \text{ [m]}$$

- ④ Es el valor que toma E_{Tx} en el eje "y" cuando $y = 3,5 \text{ [m]}$. Este valor es 100 [V/m] .

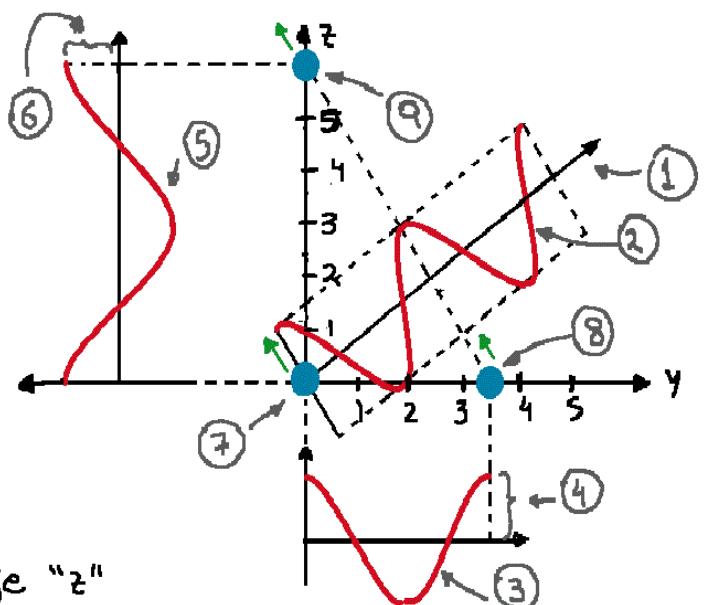
- ⑤ Gráfica del módulo de E_{Tx} en el eje "z". Esta función tiene longitud de onda

$$\lambda_z = \frac{1}{f_z} = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{1,05} \approx 6 \text{ [m]}$$

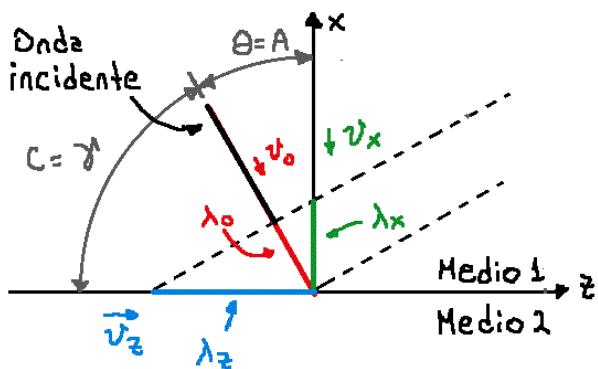
- ⑥ Es el valor que toma E_{Tx} en el eje "z" cuando $z = 6 \text{ [m]}$. Este valor es 100 [V/m] .

- ⑦ Es el punto $z=y=t=0$, en este punto $E_{Tx}=100 \text{ [V/m]}$ y tiene la dirección y sentido del "vectorcito" verde que sale del círculo azul.

- ⑧ y ⑨ Similar caso al anterior para el caso de los puntos $y=3,5; z=t=0$ y $z=6; y=t=0$.



Ejercicio 69: Realizar un gráfico para analizar las longitudes de onda en reflexión oblicua, analizar la velocidad de fase en distintas direcciones y compararlas con la velocidad de la onda en una dirección normal a los planos equifásicos.



$$\lambda_0 = \lambda_x \cdot \cos A = \lambda_y \cdot \cos B = \lambda_z \cdot \cos C$$

$$v_0 = v_x \cdot \cos A = v_y \cdot \cos B = v_z \cdot \cos C$$

Ejercicio 70: Expresar la ecuación de la parte real de \mathbf{E}_T de una onda con reflexión oblicua sobre un conductor perfecto con polarización perpendicular.

- a) Graficar el campo \mathbf{E}_T para $\omega t = 0$.

a1) $\beta_y y$ entre 0 y π en pasos de $\pi/4$ (en el eje vertical).

a2) $\beta_z z$ entre 0 y 2π en pasos de $\pi/2$ (en el eje horizontal).

- b) Ídem para $\omega t = \pi/2, \omega t = 3\pi/4$ y $\omega t = \pi$.

- c) Extraer conclusiones del comportamiento de la onda en los distintos ejes.

$$E_T = -2 \cdot E_i \cdot \sin(\beta_z z) \sin(\omega t - \beta_y y)$$

PUNTO A: $\omega t = \emptyset$

$$E_1 = E_{Tx} (\beta_z z = \emptyset) = 0$$

$$E_2 = E_{Tx} (\beta_z = \pi/2) = 2 \cdot E_i \cdot \sin(\pi/2) \cdot \sin(\beta_y \gamma) = 2E_i \cdot \sin(\beta_y \gamma)$$

$$E_3 = E_{Tx} (\beta_z = \pi) = 2E_i \cdot \sin \pi \cdot \sin(\beta_y \gamma) = 0$$

$$E_4 = E_{Tx} (\beta_z = 3\pi/2) = 2E_i \cdot \sin(3\pi/2) \cdot \sin(\beta_y \gamma) = -2E_i \cdot \sin(\beta_y \gamma)$$

$$E_5 = E_{Tx} (\beta_z = 2\pi) = 2E_i \cdot \sin(2\pi) \cdot \sin(\beta_y \gamma) = 0$$

PUNTO B: $\omega t = \pi/2 \rightarrow E_{Tx} = -2E_i \cdot \sin(\beta_z z) \cdot \sin(\pi/2 - \beta_y \gamma) = 2E_i \cdot \sin(\beta_z z) \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi/2)$

$$E_6 = E_{Tx} (\beta_z z = \emptyset) = 0$$

$$E_7 = E_{Tx} (\beta_z = \pi/2) = 2E_i \cdot \sin(\pi/2) \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi/2) = 2E_i \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi/2)$$

$$E_8 = E_{Tx} (\beta_z = \pi) = 2E_i \cdot \sin \pi \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi/2) = 0$$

$$E_9 = E_{Tx} (\beta_z = 3\pi/2) = 2E_i \cdot \sin(3\pi/2) \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi/2) = -2E_i \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi/2)$$

$$E_{10} = E_{Tx} (\beta_z = 2\pi) = 2E_i \cdot \sin(2\pi) \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi/2) = 0$$

$$\omega t = \pi \rightarrow E_{Tx} = -2E_i \cdot \sin(\beta_z z) \cdot \sin(\pi - \beta_y \gamma) = 2E_i \cdot \sin(\beta_z z) \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi)$$

$$E_{11} = E_{Tx} (\beta_z z = \emptyset) = 0$$

$$E_{12} = E_{Tx} (\beta_z = \pi/2) = -2E_i \cdot \sin(\pi/2) \cdot \sin(\pi - \beta_y \gamma) = 2E_i \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi)$$

$$E_{13} = E_{Tx} (\beta_z = \pi) = 0$$

$$E_{14} = E_{Tx} (\beta_z = 3\pi/2) = -2E_i \cdot \sin(3\pi/2) \cdot \sin(\pi - \beta_y \gamma) = -2E_i \cdot \sin(\beta_y \gamma - \pi)$$

$$E_{15} = E_{Tx} (\beta_z = 2\pi) = 0$$

$$\omega t = 3\pi/4 \rightarrow E_{Tx} = -2E_i \cdot \sin(\beta_z z) \cdot \sin(3\pi/4 - \beta_y \gamma) = 2E_i \cdot \sin(\beta_z z) \sin(\beta_y \gamma - 3\pi/4)$$

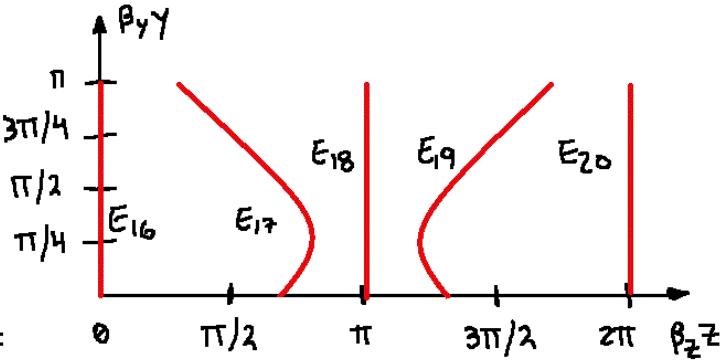
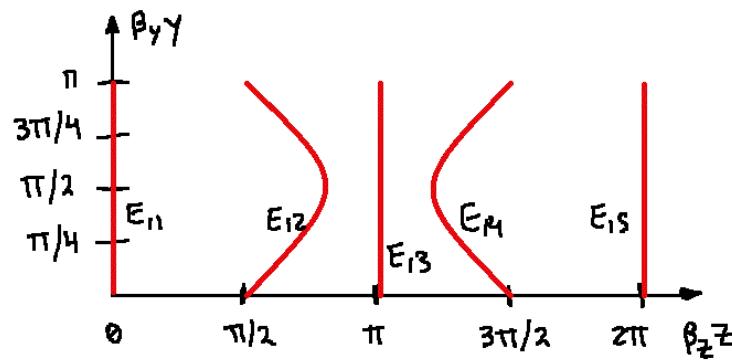
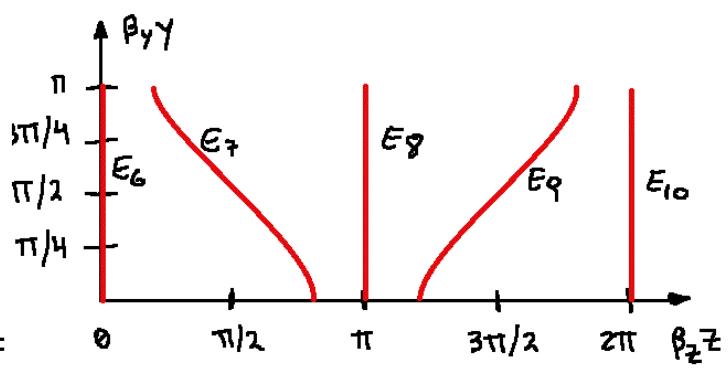
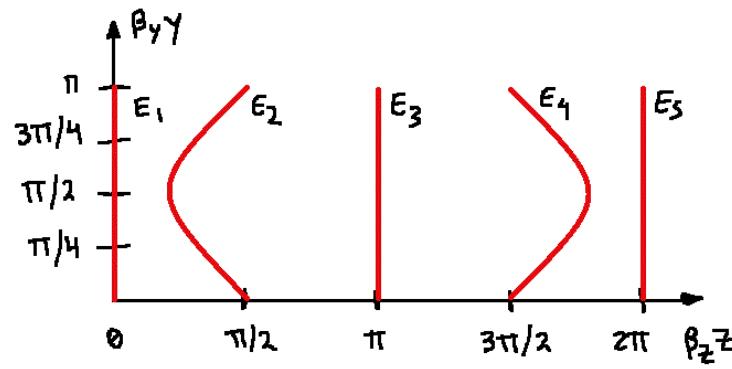
$$E_{16} = E_{Tx} (\beta_z z = \emptyset) = 0$$

$$E_{17} = E_{Tx} (\beta_z = \pi/2) = 2E_i \cdot \sin(\pi/2) \cdot \sin(\beta_y \gamma - 3\pi/4) = 2E_i \cdot \sin(\beta_y \gamma - 3\pi/4)$$

$$E_{18} = E_{Tx} (\beta_z = \pi) = 0$$

$$E_{19} = E_{Tx} (\beta_z = 3\pi/2) = 2E_i \cdot \sin(3\pi/2) \cdot \sin(\beta_y \gamma - 3\pi/4) = -2E_i \cdot \sin(\beta_y \gamma - 3\pi/4)$$

$$E_{20} = E_{Tx} (\beta_z = 2\pi) = 0$$



1- INTRODUCCIÓN

{ Definición de una GO
 Modos de propagación

2- GUÍAS RECTANGULARES

{ Cálculo de E_y, H_z dentro de una GO (6 ec)
 Cálculo de E_x, E_y, H_x y H_y en función de E_z y H_z (4 ec)
 Ecucciones de E_z y H_z (ec. diferencial)

3- TIPOS DE GO

{ Ondas TM
 Ondas TE

4- PROPIEDADES Y APLICACIONES

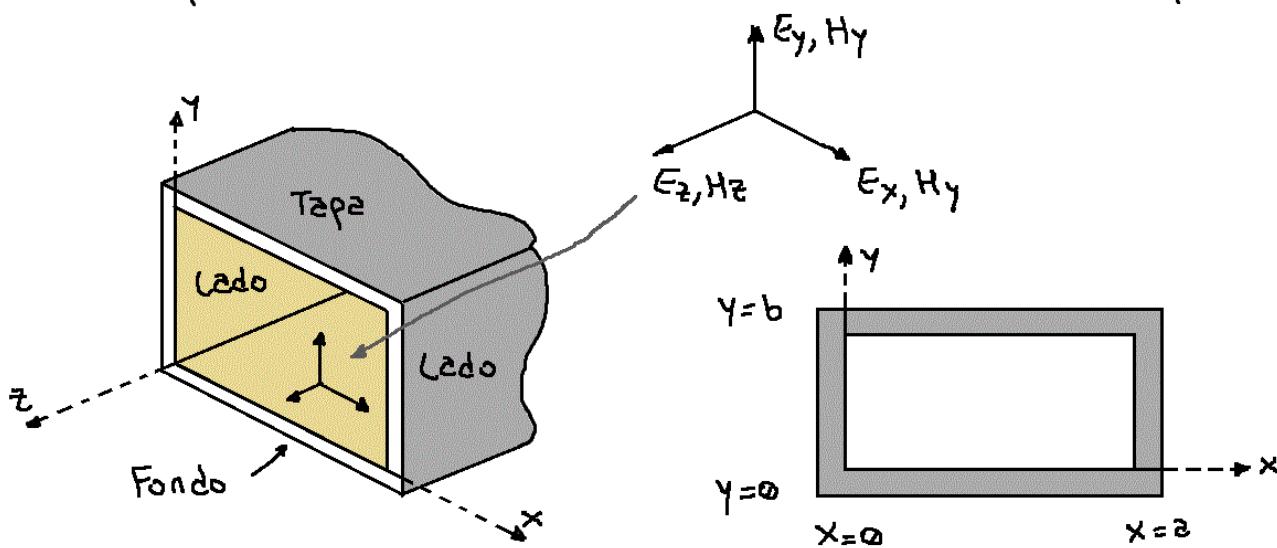
{ Frecuencias en una GO
 Otros tipos de GO
 Aplicación de la tabla de GO de HP
 Métodos de excitación
 Uso de una GO
 Mecanismo de radiación

1- INTRODUCCIÓN

1.1- Definición de una GO (guía de onda)

Una guía de onda (GO) es todo conductor hueco usado para transmitir OMs. Cada arreglo de E y H dentro de la guía se llama "modo de propagación". Estos modos deben

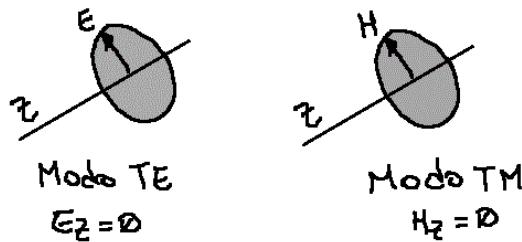
- Ser solución de las ecuaciones
- Cumplir las condiciones de frontera en los límites de la guía.



1.2 - Modos de propagación

Hay dos

- TE (transversal || eléctrico): E perpendicular al eje de propagación.
- TM (" " magnético): H " " " " "



2 - GUÍAS RECTANGULARES

2.1 - Cálculo de E y H dentro de la GO (6 ecuaciones)

Parto de la ecuación (vf)

$$\nabla \times H = j\omega \epsilon E$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = j\omega \epsilon (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k})$$

✓ (ec. 1)

$$\hat{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = (j\omega \epsilon E_x) \hat{i} + (j\omega \epsilon E_y) \hat{j} + (j\omega \epsilon E_z) \hat{k}$$

Hago lo mismo con la ecuación (vf)

$$\nabla \times E = -j\omega \mu H$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = j\omega \mu (H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k})$$

✓ (ec. 2)

$$\hat{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = (j\omega \mu H_x) \hat{i} + (j\omega \mu H_y) \hat{j} + (j\omega \mu H_z) \hat{k}$$

Ahora igualo componente por componente de (ec. 1) y (ec. 2) y las multiplicar por $e^{-\beta z}$

$$\text{en } \hat{\imath} \quad \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) e^{-\gamma z} = j\omega \epsilon E_x e^{-\delta z} \quad (\text{ec. 3}') \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega \epsilon E_x \quad (\text{ec. 3})$$

$$\text{en } \hat{j} \quad - \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) e^{-\gamma z} = j\omega \epsilon E_y e^{-\delta z} \quad (\text{ec. 4}') \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma H_x = -j\omega \epsilon E_y \quad (\text{ec. 4})$$

$$\text{en } \hat{k} \quad \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) e^{-\gamma z} = j\omega \epsilon E_z e^{-\delta z} \quad (\text{ec. 5}') \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \epsilon E_z \quad (\text{ec. 5})$$

$$\text{en } \hat{i} \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) e^{-\gamma z} = -j\omega \epsilon H_x e^{-\delta z} \quad (\text{ec. 6}') \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega \mu H_x \quad (\text{ec. 6})$$

$$\text{en } \hat{j} \quad - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) e^{-\gamma z} = -j\omega \epsilon H_y e^{-\delta z} \quad (\text{ec. 7}') \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x = j\omega \mu H_y \quad (\text{ec. 7})$$

$$\text{en } \hat{k} \quad \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) e^{-\gamma z} = -j\omega \epsilon H_z e^{-\delta z} \quad (\text{ec. 8}') \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z \quad (\text{ec. 8})$$

Conversión de (ec. 3') a (ec. 3)

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) e^{-\gamma z} = j\omega \epsilon E_x e^{-\delta z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (H_z e^{-\delta z}) - \frac{\partial}{\partial z} (H_y e^{-\delta z}) =$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} e^{-\delta z} + H_z \frac{\partial}{\partial y} (e^{-\delta z}) - \frac{\partial H_y}{\partial z} e^{-\delta z} - H_y (-\delta) e^{-\delta z} =$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} e^{-\delta z} + H_z \underbrace{\phi}_{*1} - \underbrace{\phi \cdot e^{-\delta z}}_{*2} + \gamma H_y e^{-\delta z} = j\omega \epsilon E_x e^{-\delta z}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} + \gamma H_y = j\omega \epsilon E_x \quad (\text{ec. 3})$$

Conversión de (ec. 4') a (ec. 4)

$$- \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) e^{-\gamma z} = j\omega \epsilon E_y e^{-\delta z}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} (H_z e^{-\delta z}) + \frac{\partial}{\partial z} (H_x e^{-\delta z}) =$$

$$- \frac{\partial H_z}{\partial x} e^{-\delta z} - H_z \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\delta z}) + \frac{\partial H_x}{\partial z} e^{-\delta z} + H_x \frac{\partial}{\partial z} (e^{-\delta z}) =$$

*1: $e^{-\delta z}$ no es función de y , por lo tanto $\partial/\partial y$ lo ve como una constante.

*2: $H_y \neq f(z) \Rightarrow \partial H_y / \partial z = \phi$ (Unidad 4).

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} e^{-\gamma z} - H_z \cdot \emptyset + \emptyset \cdot e^{-\gamma z} + H_x \cdot (-\gamma) e^{-\gamma z} = \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} e^{-\gamma z} - \gamma H_y e^{-\gamma z} = j\omega \epsilon E_y e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma H_y = -j\omega \epsilon E_y \quad (\text{ec. 4})$$

Conversión de (ec. 3') a (ec. 3)

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) e^{-\gamma z} = j\omega \epsilon E_z e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (H_y e^{-\gamma z}) - \frac{\partial}{\partial y} (H_x e^{-\gamma z}) =$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} e^{-\gamma z} + H_y \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\gamma z}) - \frac{\partial H_x}{\partial y} e^{-\gamma z} - H_x \frac{\partial}{\partial y} (e^{-\gamma z}) =$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} \cdot e^{-\gamma z} + H_y \cdot \emptyset - \frac{\partial H_x}{\partial y} \cdot e^{-\gamma z} - H_x \cdot \emptyset = j\omega \epsilon E_z e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \epsilon E_z \quad (\text{ec. 5})$$

El resto de las conversiones son iguales, sólo tengo que intercambiar los campos E y H y cambiar ϵ por $(-\mu)$, el $(-)$ es porque los miembros derechos de las 1y 2 ecMx(vf) son de distinto signo.

2.2 - Cálculo de E_x, E_y, H_x y H_y en función de E_z y H_z

Coloco las ecuaciones 3, 4, 6 y 7 como sigue

$$(\text{ec. 3}) \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma \underbrace{H_y}_{x} = j\omega \epsilon \underbrace{E_x}_{y} \quad \rightarrow a + bx = cy \quad (\text{ec. 9})$$

$$(\text{ec. 4}) \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma \underbrace{H_x}_{v} = -j\omega \epsilon \underbrace{E_y}_{w} \quad \rightarrow d + eu = fw \quad (\text{ec. 10})$$

$$(\text{ec. 6}) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma \underbrace{E_y}_{v} = -j\omega \mu \underbrace{H_x}_{w} \quad \rightarrow g + hv = iw \quad (\text{ec. 11})$$

$$(\text{ec. 7}) \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \underbrace{E_x}_{y} = j\omega \mu \underbrace{H_y}_{x} \quad \rightarrow j + ky = lx \quad (\text{ec. 12})$$

Las ecuaciones 9 y 12 forman un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas (x e y), lo mismo sucede con las ecuaciones 10 y 11 (con u y v como incógnitas). Usé cualquier método para encontrar las incógnitas.

de (ec. 9) despejo "y" y la reemplazo en (ec. 12), luego despejo "x".

Cálculo de $x = H_y$: de (ec. 9) despejo "y" y la reemplazo en (ec. 12), luego despejo "x".

$$\text{ec.9} \quad a + bx = cy \rightarrow \therefore y = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}x$$

$$\text{ec.12} \quad j + ky = lx$$

$$j + k\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x\right) = lx$$

$$j + \frac{ka}{c} + \frac{kb}{c}x = lx$$

$$j + \frac{ka}{c} = x\left(1 - \frac{kb}{c}\right)$$

$$x = \frac{j + \frac{ka}{c}}{1 - \frac{kb}{c}} = \frac{\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}}{j\omega\mu - \frac{\gamma\beta}{j\omega\epsilon}} =$$

$$H_y = \frac{j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}}{-\underbrace{(w^2\mu\epsilon + \beta^2)}_{h^2}} = \frac{-j\omega\epsilon}{h^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (\text{ec.13})$$

Cálculo de $y = Ex$: despejo "x" de (ec. 12) y la reemplazo en la (ec. 9).

$$j + ky = lx \rightarrow \therefore x = \underbrace{\frac{j}{l} + \frac{k}{l}y}_{(\text{ec.12})}$$

$$a + bx = cy \quad (\text{ec.9})$$

$$a + b\left(\frac{j}{l} + \frac{k}{l}y\right) = cy$$

$$a + \frac{bj}{l} + \frac{bk}{l}y = cy$$

$$a + \frac{bj}{l} = y(c - \frac{bk}{l})$$

$$y = \frac{a + \frac{bj}{l}}{c - \frac{bk}{l}} = \frac{\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\gamma}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}}{j\omega\epsilon - \frac{\gamma\beta}{j\omega\mu}}$$

$$\gamma = \frac{a + bj}{c - bk} = \frac{\frac{\partial H_z}{\partial y} + j \frac{\partial E_z}{\partial x}}{j\omega \epsilon - \frac{\gamma \cdot \gamma}{j\omega \mu}}$$

$$E_x = \frac{j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x}}{-\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2} = -\frac{j\omega \mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma^2}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (\text{ec. 14})$$

cálculo de $U = H_x$: despejo "v" de (ec.10) y lo reemplazo en (ec. 11).

$$d + eU = fV \rightarrow U = \frac{d}{f} + \frac{e}{f} V$$

$$g + hU = iU$$

$$g + h\left(\frac{d}{f} + \frac{e}{f} V\right) = iU$$

$$g + \frac{hd}{f} + \frac{eh}{f} V = iU$$

$$g + \frac{hd}{f} = U(1 - \frac{eh}{f})$$

$$U = \frac{g + \frac{hd}{f}}{1 - \frac{eh}{f}} = \frac{gf + hd}{if - eh} = \frac{\frac{\partial E_z}{\partial y}(-j\omega \epsilon) + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x}}{-\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2}$$

$$H_x = + \frac{j\omega \epsilon}{h^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (\text{ec. 15})$$

cálculo de $U = E_y$: despejo "v" de (ec.11) y lo reemplazo en (ec.10).

$$g + hU = iU \rightarrow U = \frac{g}{i} + \frac{h}{i} V$$

$$d + e\left(\frac{g}{i} + \frac{h}{i} V\right) = fV$$

$$d + \frac{eg}{i} + \frac{he}{i} V = fV$$

$$d + \frac{eg}{i} = V(f - \frac{he}{i})$$

$$V = \frac{d + eg/i}{f - he/i} = \frac{di + eg}{fi - he} = \frac{\frac{\partial H_z}{\partial x} j\omega \mu + \gamma \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}}{-j\omega \epsilon (-j\omega \mu) - \gamma \gamma} = \frac{j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y}}{-\omega^2 \mu \epsilon - \gamma^2}$$

$$E_y = \frac{-j\omega \mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (\text{ec. 16})$$

Resumiendo, tengo:

$$-\hbar^2 E_x = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (\text{ec.14})$$

$$-\hbar^2 H_x = \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (\text{ec.15})$$

$$-\hbar^2 E_y = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (\text{ec.16})$$

$$-\hbar^2 H_y = \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (\text{ec.17})$$

donde $\hbar^2 = \omega^2\mu\epsilon + \gamma^2$ (ec.17)

2.3 - Ecuaciones de E_z y H_z (ecuación diferencial)

Parto de la 1ra ecuación de Helmholtz en forma fasorial (ec.10) de la unidad 4.

$$\nabla^2 \vec{E} = -\omega^2\mu\epsilon \vec{E}$$

$$\nabla^2(E e^{-\gamma z}) = -\omega^2\mu\epsilon(E e^{-\gamma z})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(E_z e^{-\gamma z}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(E_z e^{-\gamma z}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(E_z e^{-\gamma z}) = -\omega^2\mu\epsilon(E_z e^{-\gamma z})$$

$$e^{-\gamma z} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(E_z) + e^{-\gamma z} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(E_z) + \underbrace{E_z}_{*1} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-\gamma z}) =$$

$$e^{-\gamma z} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + e^{-\gamma z} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + E_z(-\gamma)(-\gamma) e^{-\gamma z} = -\omega^2\mu\epsilon(E_z e^{-\gamma z})$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_z = -\omega^2\mu\epsilon E_z \quad (\text{ec.18})$$

con H hago lo mismo y obtengo

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \gamma^2 H_z = -\omega^2\mu\epsilon H_z \quad (\text{ec.19})$$

3- ONDAS "TM" Y "TE" EN GO RECTANGULARES

Las ec. 18 y 19 son un sistema de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de todas las componentes de los campos E y H . Pero dentro de una GO, la onda se propaga mediante el modo TM o el TE, es decir, que o H_z o E_z es nulo. Esto permite particularizar el sistema de ecuaciones diferenciales anteriores para cada caso.

*1: E_z no depende de z , por eso sale de la derivada.

3.1 - Ondas TM

Acá $H_z = 0 \Rightarrow$ busco una solución para E_z . Hago

$$E_z(x; y; z) = E_{zo}(x; y) \cdot e^{jz} = \underbrace{X(x)}_{\text{depende sólo de "x".}} \underbrace{Y(y)}_{\text{depende sólo de "y".}} \cdot e^{jz}$$

entonces $E_z = X \cdot Y$, reemplazo en la (ec. 18)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + j^2 E_z = -\omega^2 \mu \epsilon E_z$$

$$\frac{\partial^2 (XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (XY)}{\partial y^2} + j^2 (XY) = -\omega^2 \mu \epsilon (XY)$$

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \underbrace{(j^2 + \omega^2 \mu \epsilon)}_{*1} (XY) = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + h^2 = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + h^2 = -\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

Esta ecuación iguala una función sólo de "x" con una sólo de "y", la única forma que se cumpla la ecuación es igualando las funciones a una constante, por ejemplo a " A^2 ".

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + h^2 = -A^2$$

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = A^2$$

Cuyas soluciones son, respectivamente

$$X = C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx$$

$$Y = C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay$$

$$\text{donde } h^2 = B^2 + A^2 \quad (\text{ec. 20})$$

para hallar E_z hago $E_z = X \cdot Y$

$$E_z = XY = (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)(C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay)$$

Resta saber el valor de las constantes. $E_z = 0$ en los límites de la GO, es decir $E_z = 0$ cuando $x = 0, y = 0, x = a$ o $y = b$; donde "a" es el ancho de la guía y "b" su alto. Por esto, E_z no puede tener elementos coseñoidales, lo cual

implicó que $C_1 = C_3 = 0$; entonces E_z quedó

$$E_z = XY = (\underbrace{(\Phi \cos Bx + C_2 \sin Bx)}_{=C} \underbrace{(\Phi \cos Ay + C_4 \sin Ay)}_{=C} = C_2 C_4 \cdot \sin(Bx) \sin(Ay)$$

Hay que encontrar los valores de las frecuencias B y A que anulen E_z en $x=a$ e $y=b$. No importa que E_z alcance el cero a medio ciclo o en ciclo completo. Para esto se tienen que cumplir

$$Bx|_{x=a} = m\pi \rightarrow \therefore B = \frac{m\pi}{a} \quad \text{donde } m = 1, 2, 3, \dots$$

$$Ay|_{y=b} = n\pi \rightarrow \therefore A = \frac{n\pi}{b} \quad \text{donde } n = 1, 2, 3, \dots$$

entonces E_z valdrá

$$E_z = C \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

reemplazo este valor en (ec. 13, 14, 15 y 16), y recordando que $H_z = 0$, tengo.

$$Ex = -\frac{\jmath}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(C \sin Ax \cdot \sin By)}_{Ez} - \jmath \omega \mu \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{(\Phi)}_{Hz} = -\frac{\jmath \beta C}{h^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

$$Ey = -\frac{\jmath}{h^2} \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{(C \sin Ax \cdot \sin By)}_{Ez} + \frac{\jmath \omega \mu}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(\Phi)}_{Hz} = +\frac{\jmath \beta C}{h^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$Hx = -\frac{\jmath}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(\Phi)}_{Hz} + \frac{\jmath \omega \epsilon}{h^2} \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{(C \sin Ax \cdot \sin By)}_{Ez} = +\frac{\jmath \omega \epsilon C}{h^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$Hy = -\frac{\jmath}{h^2} \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{(\Phi)}_{Hz} - \frac{\jmath \omega \epsilon}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(C \sin Ax \cdot \sin By)}_{Ez} = -\frac{\jmath \omega \epsilon C}{h^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

Donde $m = 1, 2, 3, \dots$ y $n = 1, 2, 3, \dots$; m y n no pueden ser cero porque no habrá OEM dentro de la GO.

3.1-1: Parámetros de la onda y de grupo

$$h^2 = A^2 + B^2$$

$$\text{*1} \quad \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = A^2 + B^2$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad \text{*2}$$

*1: Reemplazo por la ecuación 17.

*2: Las paredes de la GO son conductores perfectos, por lo tanto no existen pérdidas dentro de la GO, lo que implica que $\alpha = 0$.

- Radicando menor a cero: si $\theta \leq \omega \leq \omega_c$, siendo ω_c el valor de ω que hace θ el radicando, entonces $\beta = \text{Real} = d = \theta \Rightarrow$ no hay propagación en la GO a estas frecuencias (bajas).

- Radicando igual a cero: el valor ω_c se llama frecuencia de corte

$$\gamma = j\beta = \sqrt{A^2 + B^2 - (\omega_c)^2 \mu \epsilon} = 0$$

$$A^2 + B^2 - \omega_c^2 \mu \epsilon = 0$$

$$-A^2 - B^2 + \omega_c^2 \mu \epsilon = 0$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{A^2 + B^2} \quad (\text{ec. 21})$$

frecuencia de corte

$$\lambda_c = \frac{v_{pc}}{f_c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}}{\frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(ec. 22) longitud de onda de corte

- Radicando mayor a cero:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - A^2 - B^2}} \quad (\text{ec. 23})$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - A^2 - B^2}} \quad (\text{ec. 24})$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - A^2 - B^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c}$$

3.2- Ondas TE

Hago el mismo procedimiento y llego a

$$H_z = C \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

reemplazo este H_z en las ecuaciones 13, 14, 15 y 16 (en TE, $E_z = 0$) y tengo

*1: La velocidad de propagación de corte (v_{pc}) es $1/\sqrt{\mu \epsilon}$ y es la velocidad de la luz (pues dentro de la GO hay $c = \mu_0 \epsilon_0$).

$$E_x = \frac{j\omega\mu C}{h^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu C}{h^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_x = \frac{j\beta C}{h^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$H_y = \frac{j\beta C}{h^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Las ecuaciones de $\bar{\rho}$, f_c , λ_c , \bar{v} y $\bar{\lambda}$ son las mismas q' las del caso anterior. Excepto q' aquí "m" o "n" pueden ser cero (pero no ambos). Este modo se llama "modo dominante" y se suele usar $m=1$ y $n=0$ (TE_{10}) y con esto me queda:

$$H_z^0 = H_z|_{m=1, n=0} = C \cdot \cos(\pi x/a)$$

$$\bar{\rho} = \sqrt{\omega^2 \mu E - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$H_x^0 = H_x|_{m=1, n=0} = \frac{j\beta z C}{\pi} \sin(\pi x/a)$$

$$f_c = \frac{C}{za}$$

$$H_y^0 = H_y|_{m=1, n=0} = \frac{-j\omega\mu a C}{\pi} \sin(\pi x/a)$$

$$\lambda_c = 2a$$

$$E_x^0 = E_y^0 = 0$$

$$h = \pi/a$$

Hay q' tener en cuenta q' $\lambda > \lambda_0$ y $v_p > 0$ (a un conductor hueco).

4 - PROPIEDADES Y APLICACIONES

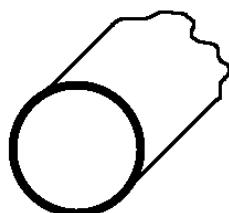
4.1 - Frecuencias en una GO

En la práctica el BW utilizable, sus límites son:

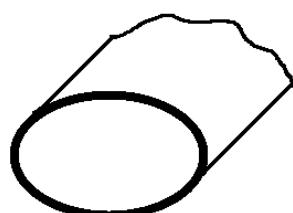
$$f_{min} = \frac{C_0}{2a} \quad f_{max} = \frac{C_0}{a} \quad \text{siendo } a = \text{ancho de la GO.}$$

$BW = f(b)$ siendo "b" la altura de la GO.

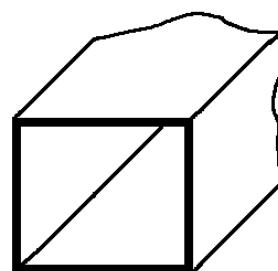
4.2 - Otros tipos de GO



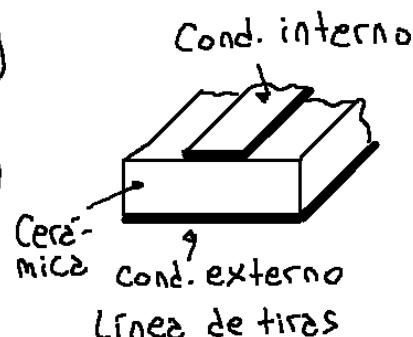
Circular



Elliptical

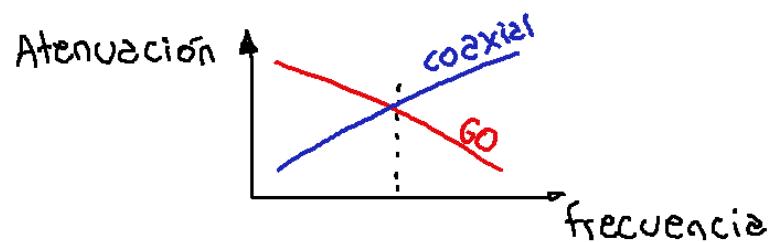


Rectangular



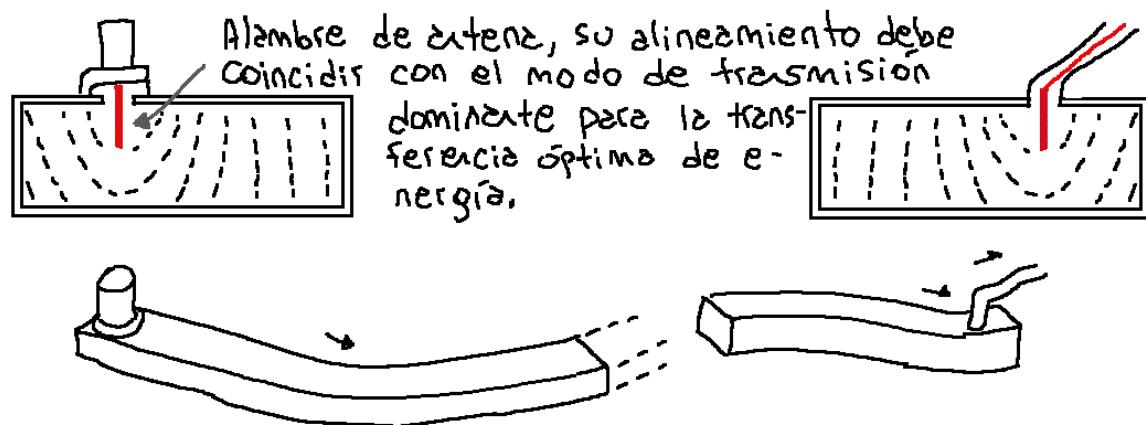
Línea de tiras
Página 88 de 149

Existen varios tipos (circulares, tiras de ondas, etc.) Para elegir una GO debemos tener en cuenta la atenuación.

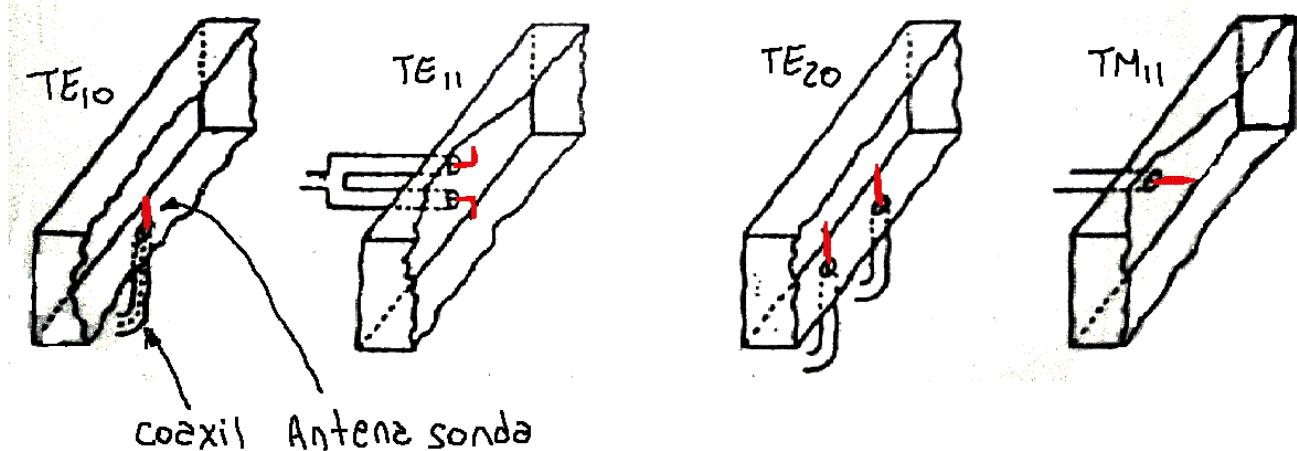


4.3- Usos de las GO

La figura muestra cómo se conecta una fuente de energía a una GO para que la señal después sea recogida por una antena receptora.



4.4- Métodos de excitar una GO



Ejercicio 71: Hacer los siguientes puntos:

- Expresar las ecuaciones para las distintas componentes de E_T y H_T para el modo TE.
- Ídem para el TM.
- Expresar la ecuación para hallar la frecuencia de corte de una guía rectangular.

PUNTO A: $TE \rightarrow E_z = 0$

$$E_x = -\frac{j\omega\mu C}{h^2} A \cdot \cos(Bx) \cdot \sin(Ay)$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu C}{h^2} B \cdot \sin(Bx) \cdot \cos(Ay)$$

$$H_x = \frac{j\beta C}{h^2} B \cdot \sin(Bx) \cdot \cos(Ay)$$

$$H_y = \frac{j\beta C}{h^2} A \cdot \cos(Bx) \cdot \sin(Ay)$$

$$H_z = C \cdot \cos(Bx) \cdot \cos(Ay)$$

PUNTO B: $TM \rightarrow H_z = 0$

$$E_x = -\frac{j\beta C}{h^2} B \cdot \cos(Bx) \cdot \sin(Ay)$$

$$E_y = -\frac{j\beta C}{h^2} A \cdot \sin(Bx) \cdot \cos(Ay)$$

$$H_x = \frac{j\omega\mu C}{h^2} A \cdot \sin(Bx) \cdot \cos(Ay)$$

$$H_y = -\frac{j\omega\mu C}{h^2} B \cdot \cos(Bx) \cdot \sin(Ay)$$

$$E_z = C \cdot \sin(Bx) \cdot \sin(Ay)$$

PUNTO C: $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

Ejercicio 72: Dada dos GO rectangulares con los mismos perímetros interiores como sigue, comparar sus frecuencias de corte para el modo TM_{11} y luego para el modo TM_{12} .

- $a=0,9$ pulgadas y $b=0,4$ pulgadas.
- $a=b=0,65$ pulgadas.

PUNTO A:

$$f_{c,11} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = 149 M \sqrt{\left(\frac{1}{22,86 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{1}{10,16 \text{ m}}\right)^2} = [16,05 \text{ GHz}] = f_{c,11}$$

$$\circ \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(4\pi \cdot 10^{-7})(8,854 \cdot 10^{-12})}} \cong 149 M$$

$$\circ a = 0,9 \text{ pulg. } \frac{25,4 \text{ mm}}{1 \text{ pulg.}} = 22,86 \cdot 10^{-3} [\text{m}]$$

$$\circ b = 0,4 \text{ pulg. } 25,4 \text{ mm} = 10,16 \cdot 10^{-3} [\text{m}]$$

$$f_{c,12} = 149 M \sqrt{\left(\frac{1}{22,86 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{2}{10,16 \text{ m}}\right)^2} = [30,04 \text{ GHz}] = f_{c,12}$$

PUNTO B:

$$f_{C,11} = 149 \text{ M} \sqrt{\left(\frac{1}{16,51 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{1}{16,51 \text{ m}}\right)^2} = 12,76 \text{ [GHz]} = f_{C,11}$$

$$\epsilon_r = 0,65 \text{ pulg. } 25,4 \text{ mm} = 16,51 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$$

$$f_{C,12} = 149 \text{ M} \sqrt{\left(\frac{1}{16,51 \text{ m}}\right)^2 + \left(\frac{2}{16,51 \text{ m}}\right)^2} = 20,18 \text{ [GHz]} = f_{C,12}$$

Ejercicio 73: Encontrar las dimensiones de la GO más pequeña, cuadrada, llena de aire, que apena propague en el modo TM₁₁ a las frecuencias

- a) 10 [GHz].
- b) 10 [MHz].
- c) 10 [KHz].

$$f_C = \frac{1}{2 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{c \cdot c}{2 \cdot a} \rightarrow \therefore a = \frac{c \sqrt{2}}{2 f_C} \approx \frac{212,13 \text{ M}}{f_C}$$

PUNTO A: $a = \frac{212,13 \text{ M}}{10 \text{ G}} = 21,21 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$

PUNTO B: $a = \frac{212,13 \text{ M}}{10 \text{ M}} = 21,21 \text{ [m]}$

PUNTO C: $a = \frac{212,13 \text{ M}}{10 \text{ K}} = 21,21 \cdot 10^3 \text{ [m]}$

Ejercicio 74: Encontrar una GO rectangular y llena de aire cuyas dimensiones sean: $a=0,9$ pulgadas y $b=0,4$ pulgadas. Que propague en el modo TM₁₁ a 20 [GHz]. Hallar:

- a) La constante de fase β .
- b) La longitud de onda en las distintas direcciones (λ , λ_z y λ_g).
- c) La velocidad de fase v_z y la de grupo v_g .
- d) Comparar las respuestas anteriores con las que se obtienen para una onda plana en el espacio vacío sin límites.

PUNTO A:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(2\pi \cdot 20 \text{ G})^2 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot (8,854 \cdot 10^{-12}) - \left(\frac{1 \cdot \pi}{0,9 \cdot 25,4 \text{ m}}\right)^2 - \left(\frac{1 \cdot \pi}{0,4 \cdot 25,4 \text{ m}}\right)^2} =$$

$$\boxed{\beta = 247 \text{ [rads/m]}}$$

Unidad 12: Líneas de transmisión

1- INTRODUCCIÓN

Teoría de los circuitos y teoría de las LT.
Parámetros distribuidos de la línea.
Análisis de la línea como cuadripolo.
Z₀ aplicada a la línea.

2- CARACTERÍSTICAS DE LAS LT

Coeficiente de reflexión (Γ) en las LT.
Transitorio en las LT.

3- ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA

Ecucciones básicas del telegrafista.
Ecucción de onda en conductores.
Coeficiente de reflexión.

4- IMPEDANCIA EN CUALQUIER PUNTO DE LA LÍNEA

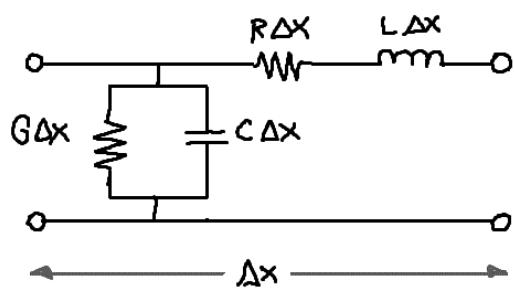
1- INTRODUCCIÓN

1.1- Teoría de los circuitos y teoría de las LT

Longitud física de los conductores \rightarrow $< \lambda/4$ → Teoría de los circuitos
 $\cong \lambda/4$ → Teoría de las LT

1.2- Parámetros distribuidos de la línea

La LT bajo análisis es un conjunto de 2 conductores con los sig. elementos:



L: inductancia distribuida uniformemente a lo largo de la línea [H/m].

C: capacidad existente entre los conduct. [F/m].

R: resistencia de la línea, representa la imperfección del conductor [Ω/m].

G: conductividad entre los conduct., representa la imperfección en la aislación [S/m].

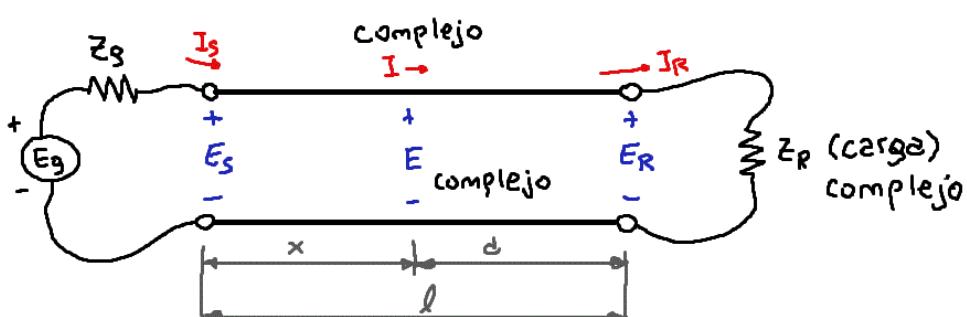


Fig.2: Esquemático de una LT.

1.3 - Análisis de una LT como cuadripolo

Determino Z_R tal que $Z_S = Z_0$, este valor hace que la LT sea lo más eficiente posible.

$$Z_S = Z_0 = C = a + b/(a+c) = a + \frac{b(a+c)}{b+a+c} = \frac{a(a+b+c) + b(a+c)}{a+b+c} = \frac{a^2 + ab + ac + ba + bc}{a+b+c}$$

$$C(a+b+c) = a^2 + 2ab + ac + bc$$

~~$$ab + bc + c^2 = a^2 + 2ab + ac + bc$$~~

$$c^2 = a^2 + 2ab$$

$$c = \sqrt{a^2 + 2ab}$$

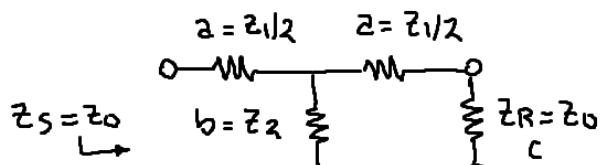


Fig.3.

$$Z_R = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + 2\frac{Z_1}{2} \cdot Z_2} = \boxed{\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} = Z_0} \quad (\text{ec.1}) \quad \text{Impedancia intrínseca}$$

1.4 - Z_0 aplicada a la LT

$$\text{En la ec.1 reemplazo } Z_1 = Z \Delta x \text{ y } Z_2 = \frac{1}{Y \Delta x}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(Z \Delta x)^2}{4} + \frac{Z \Delta x}{Y \Delta x}} = \sqrt{\frac{Z}{Y} + \frac{Z^2}{4} \Delta x^2}$$

Z_0 para altas frecuencias

$$Z_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{Z}{Y} + \frac{Z^2}{4} \Delta x^2} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \stackrel{*1}{=} \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \boxed{\sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0|_{\omega \rightarrow \infty}} \quad (\text{ec.2})$$

2 - CARACTERÍSTICAS DE LAS LT

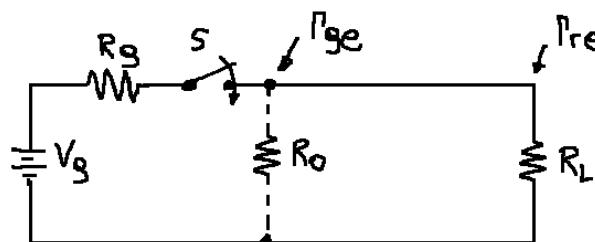


Fig.4

*1: Tomo el $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ porque considero una porción muy pequeña de la LT.

*2: Reemplazo $Z = R + j\omega L$ e $Y = G + j\omega C$

*3: Para altas frecuencias $|j\omega L| \gg R$ y $|j\omega C| \gg G$.

2.1- Coeficiente de reflexión (Γ) en una LT

En la Fig. 4 si $R_L \neq R_0 \Rightarrow e_i$ genera una e_r ; lo mismo pasa pasa con las i . R_L = tensión total / corriente total.

$$R_L = \frac{e_T}{i_T} = \frac{e_i + e_r}{i_i + i_r} = \frac{e_i + e_r}{\frac{e_i}{R_0} - \frac{e_r}{R_0}} = R_0 \frac{e_i + e_r}{e_i - e_r} = R_0 \frac{1 + \frac{e_r}{e_i}}{1 - \frac{e_r}{e_i}} = R_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_e}{1 - \Gamma_e}$$

$$\rightarrow \therefore \Gamma_e = \Gamma_{re} = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} \quad (\text{ec. 3}) \text{ Coef. de reflexión de tensión en la carga}$$

Opero ahora con las corrientes y tengo

$$R_L = \frac{e_i + e_r}{i_i + i_r} = \frac{i_i R_0 - i_r R_0}{i_i + i_r} = R_0 \frac{i_i - i_r}{i_i + i_r} = R_0 \frac{1 - \frac{i_r}{i_i}}{1 + \frac{i_r}{i_i}} = R_0 \frac{1 - \Gamma_i}{1 + \Gamma_i}$$

$$\rightarrow \therefore \Gamma_i = \Gamma_{ri} = \frac{R_0 - R_L}{R_0 + R_L} = -\Gamma_{re} \quad (\text{ec. 4}) \text{ Coef. de reflexión de corriente en la carga}$$

Cuando e_r regresa a V_g "choca" con R_g y se produce una nueva reflexión; operando del mismo modo que antes encuentro

$$\Gamma_{ge} = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0} \quad (\text{ec. 5}) \text{ Coef. de reflexión de tensión en el generador}$$

$$\Gamma_{gi} = \frac{R_0 - R_g}{R_0 + R_g} = -\Gamma_{ge} \quad (\text{ec. 6}) \text{ Coef. de reflexión de corriente en el generador}$$

2.2 - Transitorio en una LT

Es lo que sucede desde que se cierra el interruptor S en la Fig. 4 hasta que la tensión y la corriente se estabilizan en el tiempo. Esté mejor explicado en los prácticos.

3 - ECUACIONES DEL TELEGRAFISTA

3.1 - Ecuaciones básicas del telegrafista

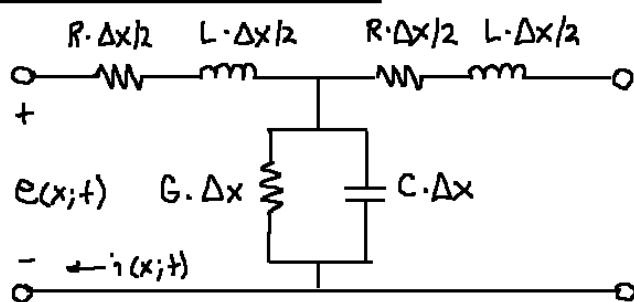


Figura 5

La figura 4 representa una posición de largo Ax de una LT, en donde figuran sus constantes distribuidas (R , L , C y G). La tensión "e" y la corriente "i" de este cuadripolo depende de "x" y de "t". El comportamiento del cuadripolo se describe por medio de:

$$\frac{\partial e(x;t)}{\partial x} = -R \cdot i(x;t) - L \frac{\partial i(x;t)}{\partial t} \quad (\text{ec.7})$$

$$\frac{\partial i(x;t)}{\partial x} = -G \cdot e(x;t) - C \frac{\partial e(x;t)}{\partial t} \quad (\text{ec.8})$$

La forma de estas ecuaciones y los signos menos son consecuencia de un desarrollo matemático (que no es complicado) y no debidos a una causa física. Hago los siguientes reemplazos en (ec.7) y (ec.8)

$$e(x;t) = \operatorname{Re} \{ V_m(x) \cdot e^{j\omega t} \} \quad i(x;t) = \operatorname{Re} \{ I_m(x) e^{j\omega t} \}$$

En la ecuación 7 tengo:

$$\frac{\partial e(x;t)}{\partial t} = -R \cdot i(x;t) - L \frac{\partial i(x;t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [V_m(x) e^{j\omega t}] = -R \cdot I_m(x) e^{j\omega t} - L \frac{\partial}{\partial t} [I_m(x) e^{j\omega t}]$$

$$\frac{\partial V_m(x)}{\partial x} e^{j\omega t} = -R \cdot I_m(x) e^{j\omega t} - j\omega L I_m(x) e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial V_m(x)}{\partial x} = -R \cdot I_m(x) - j\omega L I_m(x)$$

$$\sqrt{2} \frac{\partial V_{ef}(x)}{\partial x} = -R \cdot \sqrt{2} I_{ef}(x) - j\omega L \sqrt{2} I_{ef}(x)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -R I(x) - j\omega L I(x)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -(R + j\omega L) I(x)$$

$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -Z \cdot I(x)$

(ec.9)

La nueva ec.8 tendrá la misma forma, así que hago un cambio de variable en la ec.7: $i=e$, $G=R$ y $C=L$; entonces ec.8 me queda

$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -Y \cdot V(x)$

(ec.10)

donde V e I son valores eficaces. Las ec.9 y 10 establecen las relaciones de las tensiones y las corrientes en cada punto de la línea. La solución para cada caso particular será la solución para este sistema de ecuaciones con las condiciones de límite impuestas por el problema específico.

3.2 - Ecuación de onda en conductores

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -Z \cdot I(x) \rightarrow \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -Z \cdot \frac{\partial I(x)}{\partial x} = -Z \cdot [-Y \cdot V(x)] \rightarrow \left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - (ZY) \cdot V(x) = 0 \right\}$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -Y \cdot V(x) \rightarrow \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = -Y \cdot \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -Y \cdot [-Z \cdot I(x)] \rightarrow \left. \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - (ZY) \cdot I(x) = 0 \right\}$$

↑
derivo $\partial/\partial x$

La solución propuesta para $V(x)$ es:

$$V(x) = A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + A_2 e^{+\sqrt{ZY}x} \quad (\text{ec.11})$$

Para hallar $I(x)$, reemplazo esta $V(x)$ en (ec.9)

$$\text{de (ec.9)} \rightarrow \therefore I(x) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial x} (A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + A_2 e^{+\sqrt{ZY}x}) =$$

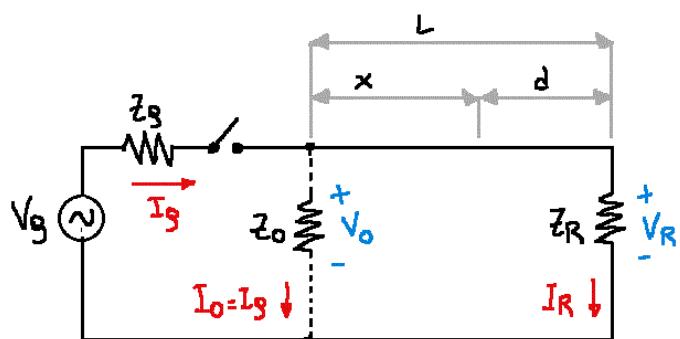
$$= -\frac{1}{Z} \left(-\sqrt{ZY} A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + \sqrt{ZY} A_2 e^{+\sqrt{ZY}x} \right) =$$

$$= \frac{A_1}{\sqrt{ZY}} e^{-\sqrt{ZY}x} - \frac{A_2}{\sqrt{ZY}} e^{+\sqrt{ZY}x}$$

$$I(x) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_0} e^{+\gamma x} \quad (\text{ec.12})$$

" A_1 " y " A_2 " son constantes que se miden en [V], " Z_0 " es la impedancia característica de la línea, " x " es la distancia desde el extremo del generador y " γ " es la constante de propagación de la línea.

3.2-1: Ecuación de onda completa en conductores (cálculo de A_1 y A_2)



en $x=0$

$$V_0 = I_0 \cdot Z_0 = I_g \cdot Z_0 \quad I_0 = I_g$$

iNo sé por qué cargo es Z_0 y no Z_R !

en $x=L$ o $d=\infty$

$$V_R = I_R \cdot Z_R$$

Valúo las ec. 11 y 12 en $x=0$:

$$V(x=0) = A_1 e^{-\gamma 0} + A_2 e^{+\gamma 0}$$

$$I(x=0) = \frac{A_1}{Z_0} e^{-\gamma 0} - \frac{A_2}{Z_0} e^{-\gamma 0}$$

$$V_0 = A_1 + A_2$$

$$I_0 = \frac{A_1}{Z_0} - \frac{A_2}{Z_0}$$

$$I_g \cdot Z_0 = A_1 + A_2$$

$$I_g \cdot Z_0 = A_1 - A_2$$

La suma y resta de estas ecuaciones me da:

$$(+) \quad \lg z_g + \lg z_0 = A_1 + A_2 + A_1 - A_2 \quad (-) \quad \lg z_g - \lg z_0 = A_1 + A_2 - A_1 + A_2$$

$$\lg(z_g + z_0) = 2A_1 \quad \lg(z_g - z_0) = 2A_2$$

$$\frac{1}{2}(\lg(z_g + z_0)) = A_1 \quad \frac{1}{2}(\lg(z_g - z_0)) = A_2$$

Reemplazo estos A_1 y A_2 en la ec. 11 y tengo:

$$V_x(x) = \frac{1}{2} \lg(z_g + z_0) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} \lg(z_g - z_0) e^{\gamma x} = V_{xi} + V_{xr} \quad (\text{ec. 13})$$

Ahora valúo las ec. 11 y 12 en $x=L$

$$V_x(x=L) = I_R z_R = A_1 e^{-\gamma L} + A_2 e^{\gamma L} \quad I_x(x=L) = I_R = \frac{A_1}{z_0} e^{-\gamma L} - \frac{A_2}{z_0} e^{\gamma L}$$

La suma y resta de estas ecuaciones da

$$(+) \quad I_R(z_R + z_0) = 2A_1 e^{-\gamma L} - 0A_2 e^{\gamma L} \quad (-) \quad I_R(z_R - z_0) = 2A_2 e^{\gamma L}$$

$$\frac{1}{2}I_R(z_R + z_0) e^{\gamma L} = A_1 \quad \frac{1}{2}I_R(z_R - z_0) e^{-\gamma L} = A_2$$

Reemplazo estos A_1 y A_2 en la ec. 11 y tengo:

$$V_x(x) = \frac{1}{2}I_R(z_R + z_0) e^{\gamma L} e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}I_R(z_R - z_0) e^{-\gamma L} e^{\gamma x}$$

$$= \frac{1}{2}I_R(z_R + z_0) e^{\gamma(L-x)} + \frac{1}{2}I_R(z_R - z_0) e^{-\gamma(L-x)}$$

$$V_x(d) = \frac{1}{2}I_R(z_R + z_0) e^{\gamma d} + \frac{1}{2}I_R(z_R - z_0) e^{-\gamma d}$$

(ec. 14) Tensión para cualquier punto de la línea, medida desde la carga.

Para hallar $I(x)$ e $I(d)$ divido las ecuaciones por z_0 y cambio de signo el segundo término.

3.3 - Coeficiente de reflexión

Para hallar Γ de tensión en el generador Γ_{ge} hago V_{xr}/V_{xi} de la (ec. 13)

$$\Gamma_{ge} = \frac{V_{xr}}{V_{xi}} = \frac{\frac{1}{2}(\lg(z_g - z_0)) e^{\gamma x}}{\frac{1}{2}(\lg(z_g + z_0)) e^{-\gamma x}} = \frac{z_g - z_0}{z_g + z_0} e^{2\gamma x} = \Gamma_{ge}$$

Hago lo mismo para la carga

$$\Gamma_{re} = \frac{V_{dr}}{V_{di}} = \frac{\frac{1}{2}(\lg(z_R - z_0)) e^{-\gamma d}}{\frac{1}{2}(\lg(z_R + z_0)) e^{\gamma d}} = \frac{z_R - z_0}{z_R + z_0} e^{-2\gamma d} = \Gamma_{re}$$

4- IMPEDANCIA EN CUALQUIER PUNTO DE LA LÍNEA

Para hallar z en cualquier punto "d" tengo $V(d)/I(d)$:

$$\begin{aligned}
 z(d) &= \frac{V(d)}{I(d)} = \frac{\frac{l_R}{2}(z_R + z_0)e^{+\beta d} + \frac{l_R}{2}(z_R - z_0)e^{-\beta d}}{\frac{l_R}{2z_0}(z_R + z_0)e^{+\beta d} - \frac{l_R}{2z_0}(z_R - z_0)e^{-\beta d}} = \\
 &= z_0 \frac{z_R e^{\beta d} + z_0 e^{\beta d} + z_R e^{-\beta d} - z_0 e^{-\beta d}}{z_R e^{\beta d} + z_0 e^{\beta d} - z_R e^{-\beta d} + z_0 e^{-\beta d}} = z_0 \frac{z_R(e^{\beta d} + e^{-\beta d}) + z_0(e^{\beta d} - e^{-\beta d})}{z_R(e^{\beta d} - e^{-\beta d}) + z_0(e^{\beta d} + e^{-\beta d})} \\
 &= z_0 \frac{2z_R \cdot \cos(\beta d) + jz z_0 \operatorname{sen}(\beta d)}{jz z_R \cdot \operatorname{sen}(\beta d) + z z_0 \cos(\beta d)} = \boxed{z_0 \frac{z_R + j z_0 \cdot \operatorname{tg}(\beta d)}{z_0 + j z_R \cdot \operatorname{tg}(\beta d)} = z(d)}
 \end{aligned}$$

4.1 - Impedancia para distintos casos

Hay 3 casos de interés:

1er caso: Líneas sin pérdidas ($\alpha = 0 \Rightarrow \gamma = \omega + j\beta = j\beta$);

2do caso: " " " con carga en corto ($d = 0$ y $z_R = 0$) y

3er caso: " " " " " a circuito abierto ($d = \infty$ y $z_R \rightarrow \infty$).

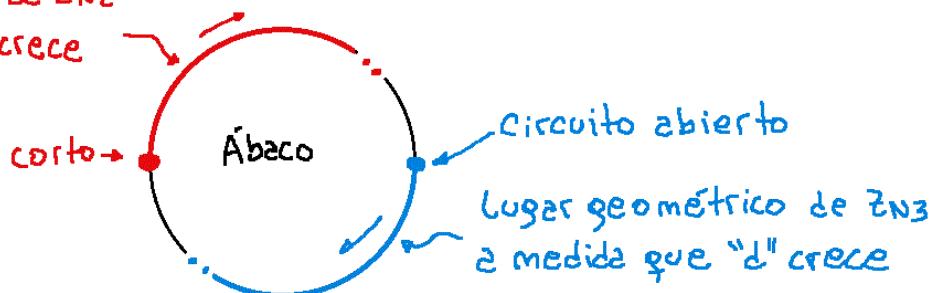
$$z_{N1} = \frac{z_i}{z_0} \text{ (1er caso)} = \frac{z_R + j z_0 \cdot \operatorname{tg}(\beta d)}{z_0 + j z_R \cdot \operatorname{tg}(\beta d)}$$

$$z_{N2} = \frac{z_i}{z_0} \text{ (2do caso)} = \frac{0 + j z_0 \cdot \operatorname{tg}(\beta d)}{z_0 + j 0 \cdot \operatorname{tg}(\beta d)} = j \operatorname{tg}(\beta d)$$

$$z_{N3} = \frac{z_i}{z_0} \text{ (3er caso)} = \frac{\infty + j z_0 \cdot \operatorname{tg}(\beta d)}{z_0 + j \infty \cdot \operatorname{tg}(\beta d)} = \frac{1}{j \operatorname{tg}(\beta d)} = \frac{1}{z_{N2}} = y_{N2}$$

Lugar geométrico de z_{N2}

a medida que "d" crece



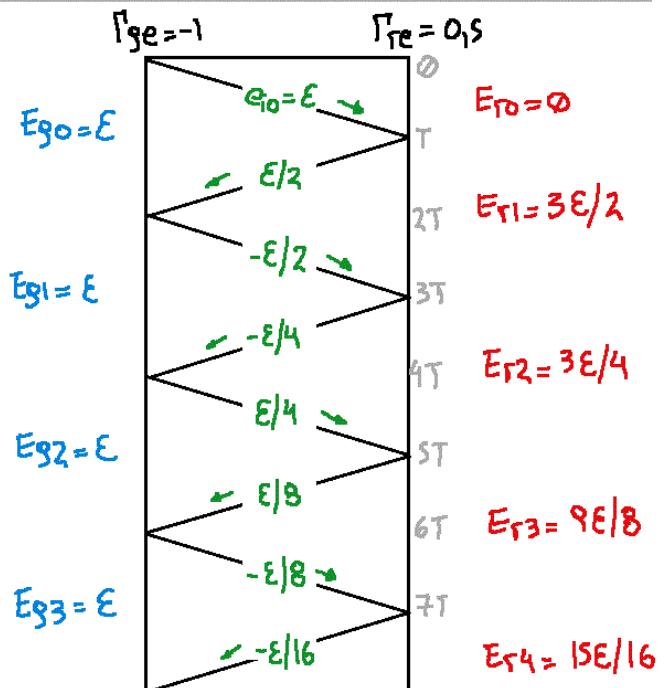
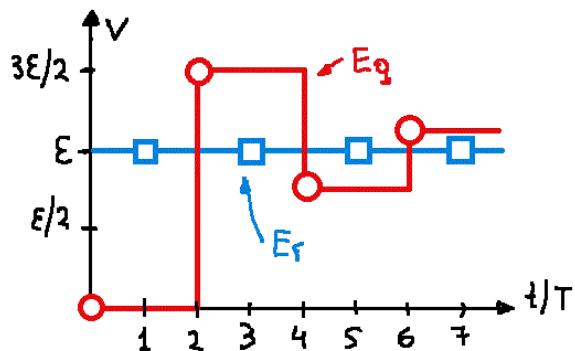
Lugar geométrico de z_{N3}
a medida que "d" crece

Ejercicio 77: Calcular el Γ_{ge} y Γ_{re} de una LT cuya $R_L=3.R_o$ y $R_g=0$. La tensión del generador tarda un tiempo T en llegar a la carga. Trazar en un sistema de ejes coordinados la variación de tensión en la carga debida a las sucesivas reflexiones en un tiempo $t=7T$. Extraer conclusiones.

$$\Gamma_{re} = \frac{R_L - R_o}{R_L + R_o} = \frac{3R_o - R_o}{3R_o + R_o} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\Gamma_{ge} = \frac{R_g - R_o}{R_g + R_o} = \frac{0 - R_o}{0 + R_o} = -1$$

$$E_{g0} = \frac{E \cdot R_o}{R_g + R_o} = \frac{E \cdot R_o}{0 + R_o} = E = e_{i0}$$

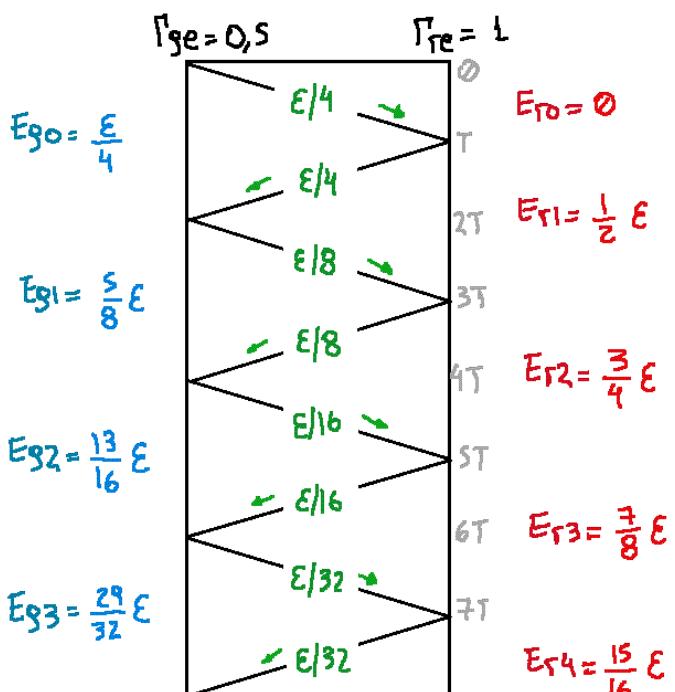
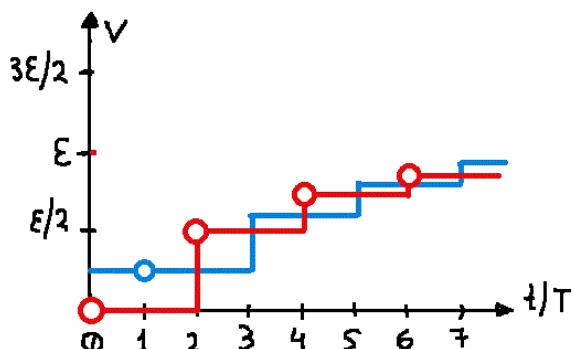


Ejercicio 78: Idem al anterior para $R_L=\infty$, $R_g=3R_o$.

$$\Gamma_{re} = \frac{R_L - R_o}{R_L + R_o} = \frac{\infty - R_o}{\infty + R_o} = 1$$

$$\Gamma_{ge} = \frac{R_g - R_o}{R_g + R_o} = \frac{3R_o - R_o}{3R_o + R_o} = 0,5$$

$$E_{g0} = \frac{E \cdot R_o}{R_g + R_o} = \frac{E \cdot R_o}{3R_o + R_o} = E/4 = e_{i0}$$

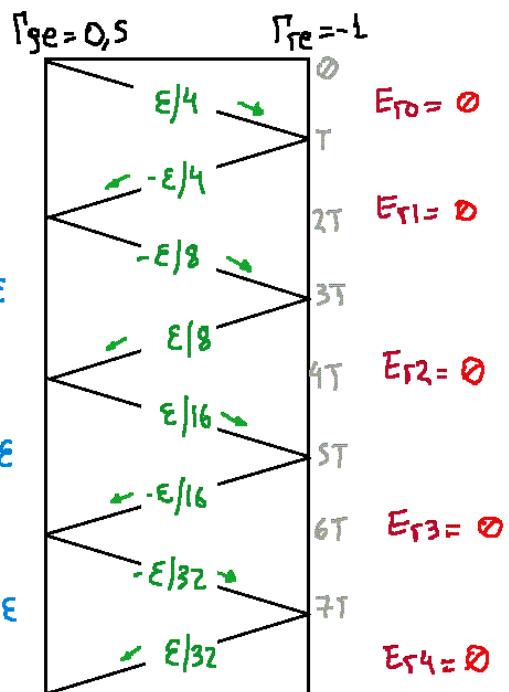
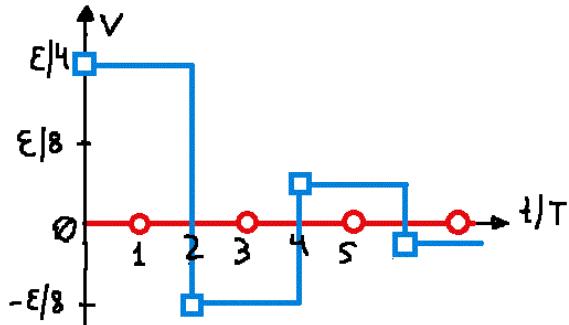


Ejercicio 79: Ídem al anterior para $R_L = \emptyset$, $R_g = 3R_o$.

$$I_{ie} = \frac{R_L - R_o}{R_L + R_o} = \frac{\emptyset - R_o}{\emptyset + R_o} = -1$$

$$I_{ge} = \frac{R_g - R_o}{R_g + R_o} = \frac{3R_o - R_o}{3R_o + R_o} = 0,5$$

$$E_{go} = \frac{E \cdot R_o}{R_g + R_o} = \frac{E \cdot R_o}{3R_o + R_o} = E/4 = e_{io}$$



Ejercicio 80: Expresar la ecuación de la impedancia de entrada de una sección de LT sin pérdida en función de Z_R , Z_o , βd y d .

$$Z_i(d=0) = Z_o \frac{Z_R + jZ_o \tan(\beta d)}{Z_o + jZ_R \tan(\beta d)}$$

Ejercicio 81: Dada una LT con $Z_o = 50 \Omega$ y $Z_R = 150 \Omega$, hallar las admitancias normalizadas cada $0,0625\lambda$, partiendo desde R_L hasta $\lambda/2$ de ella. Aplicar la fórmula analítica y comprobar los resultados en el ábaco.

$$Y_{Ni} = \frac{1}{Z_{Ni}} = \frac{Z_o}{Z_i} = \frac{Z_o + jZ_R \tan(\beta d)}{Z_R + jZ_o \tan(\beta d)} = \frac{50 + j150 \cdot \tan(360 \cdot d)}{150 + j50 \cdot \tan(360 \cdot d)}$$

El dominio de "d" es: $\{0,0625 - 0,125 - 0,1875 - 0,25 - 0,3125 - 0,375 - 0,4375 - 0,5\}$

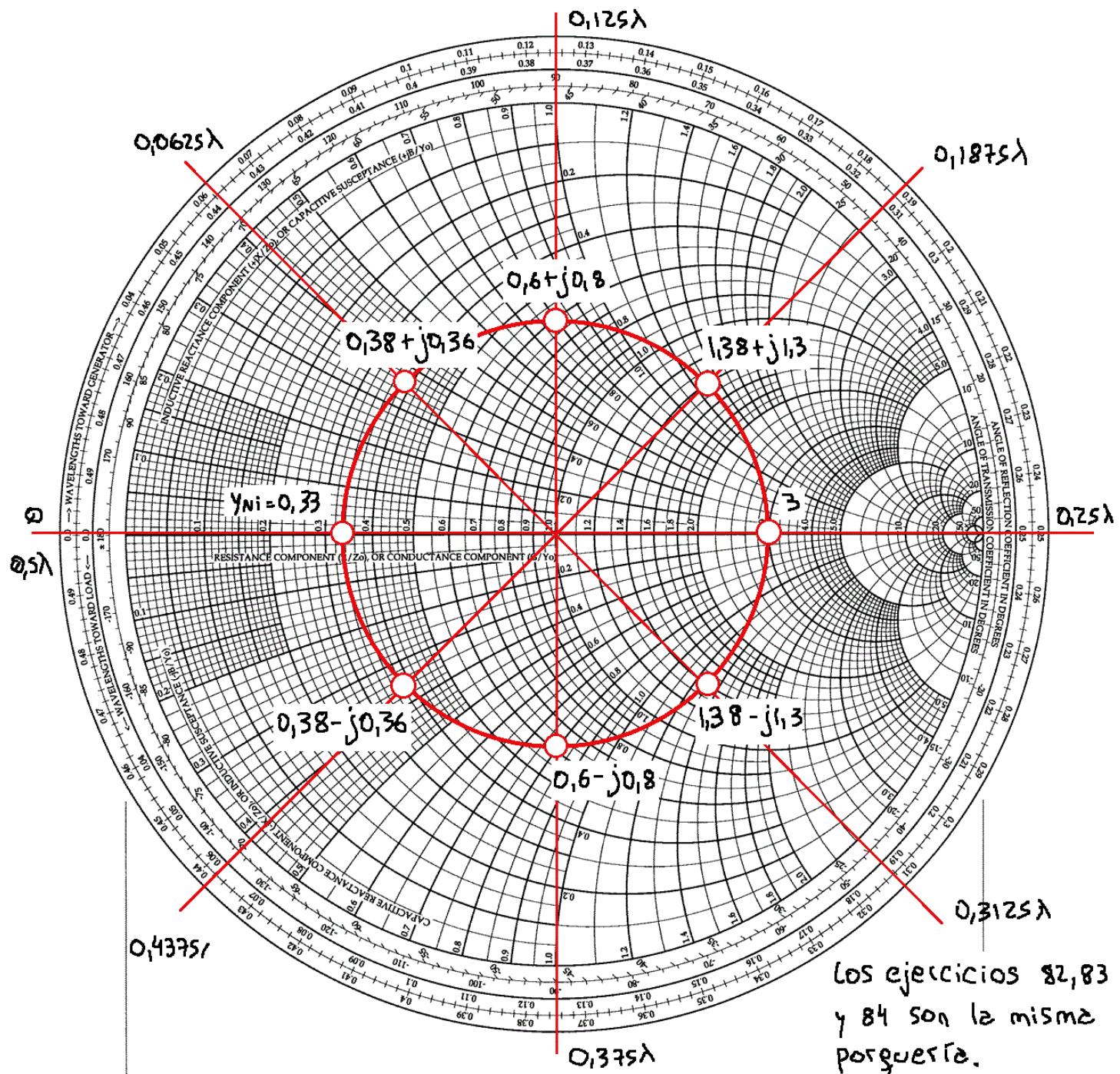
Si uso una calculadora programable tengo:

d	0	$0,0625\lambda$	$0,125\lambda$	$0,1875\lambda$	$0,25\lambda$	$0,3125\lambda$	$0,375\lambda$	$0,4375\lambda$	$0,5\lambda$
Y_{Ni}	0,33	$0,38 + j0,36$	$0,6 + j0,8$	$1,38 + j1,3$	3	$1,38 - j1,3$	$0,6 - j0,8$	$0,38 - j0,36$	0,33

En $d=0,25$ tengo una indeterminación, tengo que usar la fórmula.

$$Y_{Ni}(d=0,25) = \frac{50 + j150 \tan(360 \cdot 0,25)}{150 + j50 \tan(360 \cdot 0,25)} = \frac{50 + j150 \cdot \tan 90^\circ}{150 + j50 \cdot \tan 90^\circ} = \frac{50 + j150 \cdot \infty}{150 + j50 \cdot \infty} \approx \frac{j150 \cdot \infty}{j50 \cdot \infty} = 3$$

Para corroborar con el ábaco, ubico en el mismo $y_{ni} = 0,33$ y giro $0,0625\lambda$ (o lo que es lo mismo, 45°) con $|I_{el}| = \text{cte}$ en sentido horario (pues la distancia se aleja de R_L y va hacia el generador). Y en los puntos de cruce entre el círculo de $|I_{el}| = \text{cte}$ y las líneas de λ se encuentran las diferentes y_{ni} .



Ejercicio 85: Se mide una Z_R entre las frecuencias de 30 M y 100 [MHz], dando valores de la tabla.

Normalizar para $Z_0=50 \Omega$. Se pide:

- Graficar en el ábaco Z_N para las distintas frecuencias y unir los puntos.
- Ídem para las admitancias de carga en el mismo ábaco.

$$1 \quad 30 \text{ [MHz]} \quad Z_1=(12+j5) \Omega$$

$$2 \quad 40 \text{ [MHz]} \quad Z_2=(9+j13) \Omega$$

$$3 \quad 50 \text{ [MHz]} \quad Z_3=(7,5+j22) \Omega$$

$$4 \quad 60 \text{ [MHz]} \quad Z_4=(10+j33) \Omega$$

$$5 \quad 70 \text{ [MHz]} \quad Z_5=(15+j40) \Omega$$

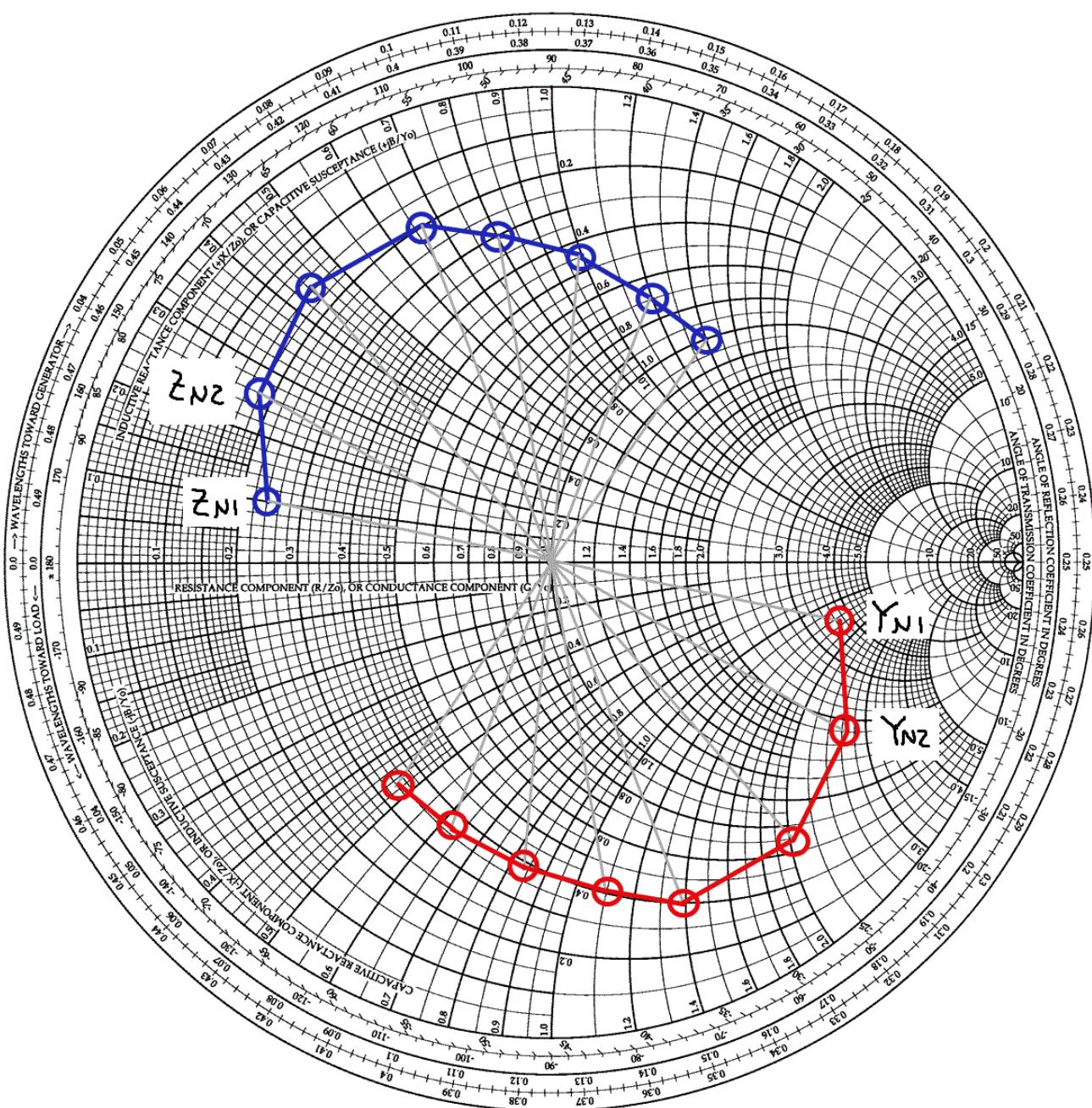
$$6 \quad 80 \text{ [MHz]} \quad Z_6=(22,5+j50) \Omega$$

$$7 \quad 90 \text{ [MHz]} \quad Z_7=(35+j60) \Omega$$

$$8 \quad 100 \text{ [MHz]} \quad Z_8=(50+j70) \Omega$$

$$Z_N = Z / Z_0$$

F [MHz]	Nro	Z_N	F [MHz]	Nro	Z_N
30	1	$0,24 + j0,1$	70	5	$0,3 + j0,8$
40	2	$0,18 + j0,16$	80	6	$0,45 + j0,1$
50	3	$0,15 + j0,44$	90	7	$0,7 + j1,2$
60	4	$0,2 + j0,66$	100	8	$1 + j1,4$



Ejercicio 86: Se posee una LT con $Z_0=300 \Omega$ con un generador en los bornes de entrada de $V=30 \text{ V}$ y una frecuencia de 100 MHz . Si $Z_R=210-j60 \Omega$, se pide:

- Coeficiente de reflexión en la carga Γ_{re}
- ROE
- Distancias a las tensiones máximas y mínimas.
- Distribución de tensión en $\lambda/2$ de la línea, partiendo desde la carga.

PUNTO A: $\Gamma_E = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = \frac{210 - j60 - 300}{210 - j60 + 300} = 0,21 \angle -139,6^\circ = \Gamma_{re} \rightarrow \Theta_{\Gamma E} = 220,4^\circ$

PUNTO B: $ROE = \frac{1 + |\Gamma_{re}|}{1 - |\Gamma_{re}|} = \frac{1 + 0,21}{1 - 0,21} = 1,53 = ROE_R$

PUNTO C: Como $\arg \Gamma_E > 180^\circ \Rightarrow$ el mínimo está primero.

$$\Theta_{Z,\min} = \Theta_{\Gamma E} - 180^\circ = 220,4^\circ - 180^\circ = 40,4^\circ \cdot \frac{\lambda/2}{360^\circ} = 0,056\lambda$$

$$z_{m,\min} = \theta_{z,\min} \Big|_{\lambda=\lambda_G} = 0,056 \cdot 3 = 0,168 \text{ [m]} = z_{m,\min}$$

$$\circ \lambda_G = \frac{v_p * 1}{F} = \frac{300 \text{ M}}{100 \text{ M}} = 3 \text{ [m]}$$

$$\theta_{z,max} = \theta_{z,min} + 180^\circ = 40,4 + 180 = 220^\circ \cdot \frac{\lambda/2}{360^\circ} = 0,306 \lambda$$

$$z_{m,max} = \theta_{z,max} \Big|_{\lambda=\lambda_G} = 0,306 \cdot 3 = 0,918 \text{ [m]} = z_{m,max}$$

PUNTO D: Datos para el diagrama de Crank

$$\eta_1 = Z_0 = 300 \text{ [\Omega]}$$

$$\eta_2 = 210 - j60$$

$$E_1 = 30 \text{ [V/m]}$$

$$\Gamma_E = 0,21 \neq 220,4^\circ$$

$$E_r = E_1 \cdot \Gamma_E = 30 \cdot 0,21 \neq 220,4^\circ = 6,3 \neq 220,4^\circ \text{ [V/m]} \rightarrow \text{Longitud} = 6,3 \text{ V} \cdot \frac{10}{30 \text{ V}} = 2,1$$

$$F = 100 \text{ [MHz]}$$

$$\lambda = 3 \text{ [m]}$$

$$\beta = \frac{2\pi F}{v_p} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ M}}{300 \text{ M}} = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right] \cdot \frac{360}{2\pi} \left[\frac{\circ}{\text{rad}} \right] = 120 \left[\frac{\circ}{\text{m}} \right]$$

$$\theta_{z,max} = 0,306 \lambda \quad z_{m,max} = 0,918 \text{ [m]} \rightarrow \text{long.} = 0,306 \lambda \cdot \frac{1 \text{ cuad.}}{\lambda/64} \cong 19,5 \text{ cuad.}$$

$$\theta_{z,min} = 0,056 \lambda \quad z_{m,min} = 0,168 \text{ [m]} \rightarrow \text{long.} = 0,056 \lambda \cdot \frac{1 \text{ cuadrito}}{\lambda/64} \cong 3,5 \text{ cuad.}$$

$$\text{R.O.E.} = 1,53$$

El ejercicio 87 es la misma porque si.

*1 Aunque Abad no lo dice, si en este y en el próximo ejercicio se usa $v_p = c$ dan los resultados del libro. Pero en una LT la $v_p < c$ por eso es que la η en una LT es $\eta_{LT} < 377 \text{ [\Omega]}$ siempre (300 [\Omega] en este caso).

Ejercicio N° 86

DIAGRAMA DE CRANK

$$\eta_1 = 300 \quad [\Omega], \eta_2 = 210 - j60 \quad [\Omega]$$

$$E_i = 30 \quad [V/m], P_E = 0,21 \times 220,4^\circ$$

$$E_f = 6,3 \times 220,4^\circ \quad [V/m]$$

$$F = 100 \quad [Hz], \lambda = 3 \quad [m]$$

$$\beta = 2\pi/3 \quad [rad/m] = 120 \quad [^\circ/m]$$

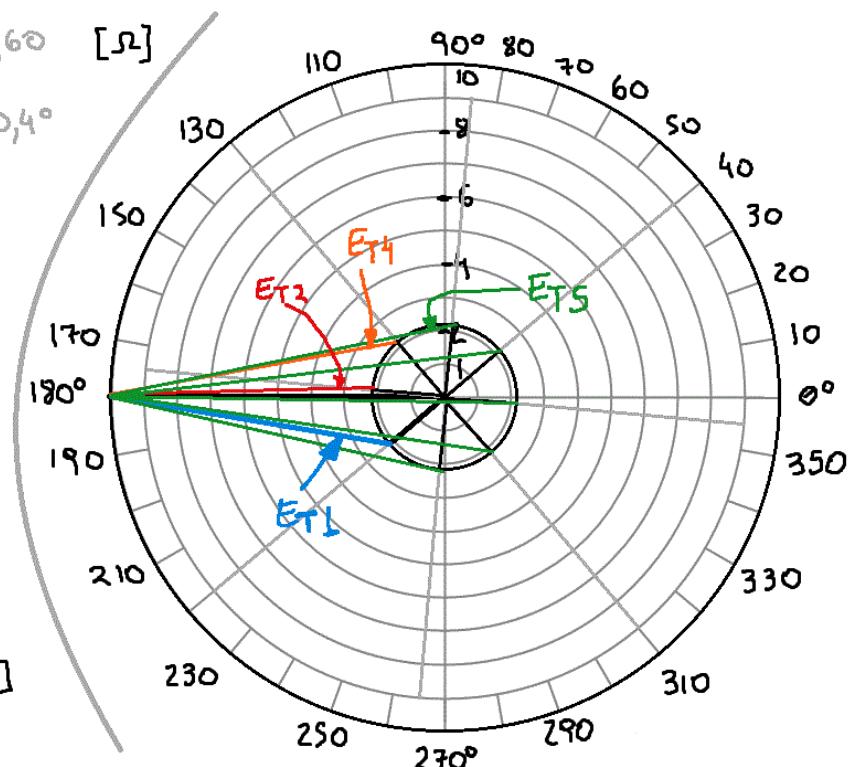
Distancia al máximo

$$\theta_{ZM} = 0,306 \quad [\lambda], Z_M = 0,918 \quad [m]$$

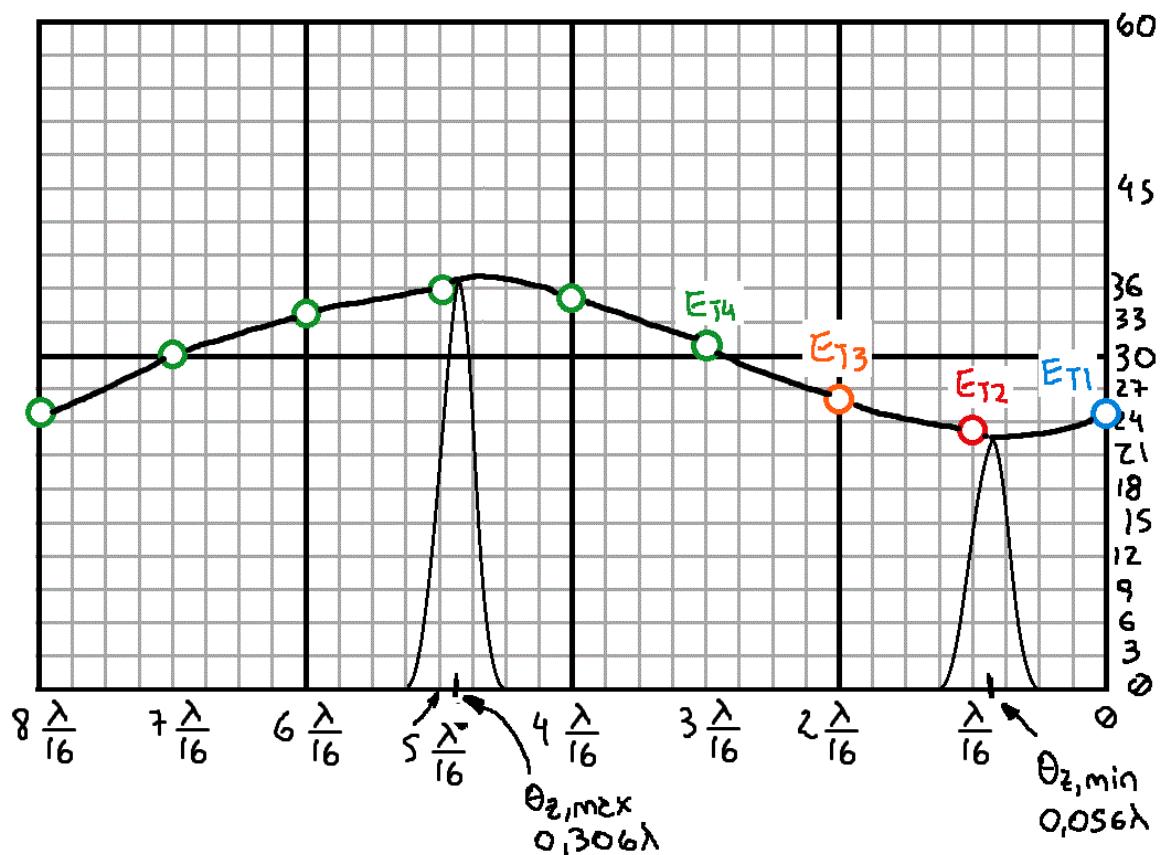
Distancia al mínimo

$$\theta_{Zm} = 0,056 \quad [\lambda], Z_m = 0,168 \quad [m]$$

$$R.O.E. = 1,53$$



Z	$8\lambda/16$	$7\lambda/16$	$6\lambda/16$	$5\lambda/16$	$4\lambda/16$	$3\lambda/16$	$2\lambda/16$	$\lambda/16$	\emptyset
$\theta_r - \theta_z$									
E_T									



Unidad 13: Adaptación de líneas de transmisión

1 - ADAPTACIÓN CON 1 STUB

{ Concepto
Impedancia y admittance de carga normalizada
Coeficiente de reflexión y ROG
Distancia de la carga a los puntos de adaptación
Relación entre la long. del stub y la admittance en...
Pasos para la adaptación con 1 stub

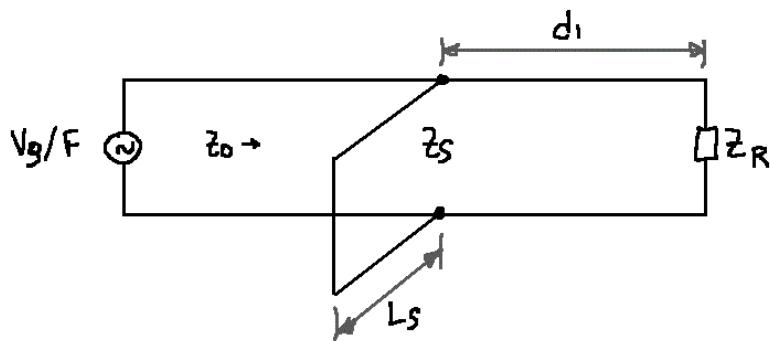
2 - ADAPTACIÓN CON 2 STUBS

{ Concepto
Pasos para la adaptación con 2 stubs
Separación estándar entre los stubs

1 - ADAPTACIÓN CON 1 STUB

1.1 - Concepto

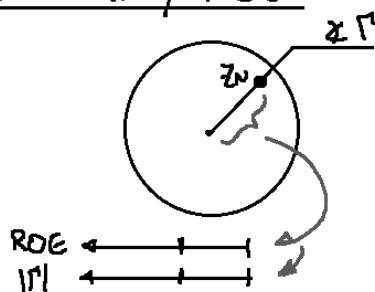
Cuando una línea terminada en una $Z_R \neq Z_0$, en ella (línea) aparecerán reflexiones. Esto provoca pérdidas e impide la máxima transferencia de potencia. Puedo adaptar la línea colocando ramas de la misma LT a cierta distancia de Z_R y de valores definidos, estos elementos sintonizadores se llaman stubs. Su valor Z_S es puramente imaginario y depende de su longitud.



1.2 - Impedancia y admittance de carga normalizada

Lo primero que debo hacer es normalizar la carga ($Z_N = Z_R/Z_0$) y ubicarla en el abaco. Luego, con $|f|=cte$, giro 180° y encuentro Y_N .

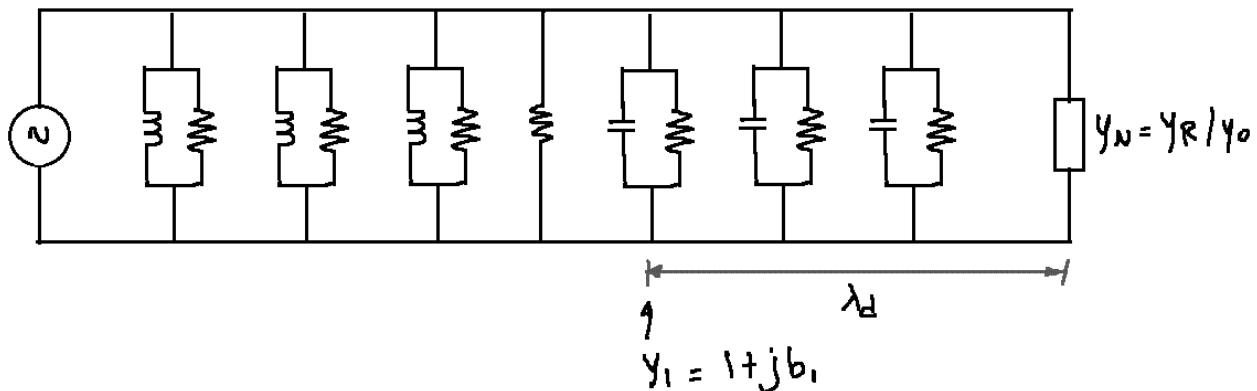
1.3 - Coeficiente de reflexión y ROG



1.3 - Distancia de la carga a los puntos de adaptación

Desde y_N giro en sentido horario con $|P|=cte$ hasta cortar el círculo $\Re = 1$ en el eje real, elijo el cruce más cercano; este punto representa una $\Re\{z\} = \Re\{z_R\}$. En este punto coloco el stub. Calculo la distancia (en λ) entre este punto (que llamo y_1) y la carga.

$$\lambda_d = \lambda_{y_1} - \lambda_{y_N} = \lambda_2 - \lambda_1$$

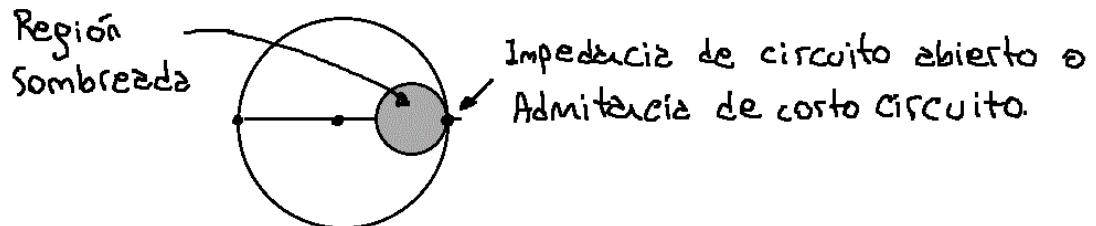


1.4 - Relación entre la long. del stub y su admmitancia de entrada.

Para regular b_1 debo conectar un stub en paralelo de valor $y_s = 1 - jb_1$. El "1" viene con el stub y el $-jb_1$ lo obtengo variando la longitud del stub (l_s). La nueva admmitancia en d, será $y_2 = y_s + y_1 = 1 + j\theta$.

A la longitud (λ) del stub la saco como la diferencia entre el λ de y_1 y el λ de cortocircuito.

$$\lambda_s = \lambda_{y_2} - \lambda_{cc} = \lambda_3 - 0,25\lambda$$



1.5 - Pasos (están mejor explicados en la parte práctica).

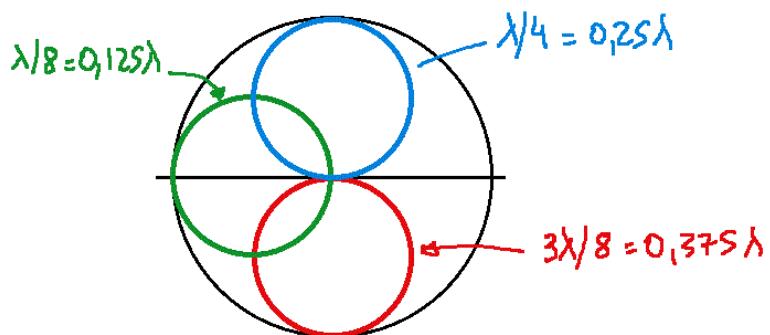
Z-ADAPTACIÓN CON 2 STUBS

La adaptación con 1 stub adapta toda la carga, pero λ_s ($o l_s$) debe ser regulable (cosa imposible en la práctica). Una solución es usar 2 stubs (que tienen entre ellos una separación estándar); se lleva y_1 , y_2 , e y_2 a y_3 mediante un círculo auxiliar.

Si y_1 cae en la región sombreada, no puede adaptarse con 1 stub, debo usar dos.

2.1 - Pasos (se explica mejor en la parte práctica)

2.2 - Separación estándar entre los stubs



Verifica la colocación
del círculo auxiliar.

Ejercicio 88: Adaptar con un stub.

Datos: $Z_o = 300 \Omega$
 $Z_R = (210-j60) \Omega$
 $V_g = 30 V / 100 \text{ MHz}$
 $v_p = c$.

Primer ábaco:

- ① Ubico en el ábaco la impedancia normalizada $Z_N = Z_R / Z_o = 0,7 - j0,2$
- ② Ubico en el ábaco la admitancia normalizada, que la obtengo girando 180° con $|Y| = \text{cte}$. $y_N = 1,32 + j0,38$.
- ③ Encuentro la longitud de onda normalizada de y_N , que la obtengo trazando una recta desde el centro hasta el círculo máximo y que pase por y_N . $\lambda_1 = 0,192\lambda$.
- ④ Desde y_N giro en sentido horario con $|Y| = \text{cte}$ hasta cortar el círculo de $\Re e = 1$ para hallar y_1 . $y_1 = 1 - j0,43$.
- ⑤ Encuentro la longitud de onda normalizada de y_1 . $\lambda_2 = 0,358\lambda$
- ⑥ Encuentro la distancia (en λ) desde la admittance de carga normalizada al punto donde voy a poner el stub. $\lambda_d = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,358\lambda - 0,192\lambda = 0,163\lambda$.
- ⑦ Anulo $\Im \{y_1\}$ colocando una susceptancia $y_s = 0 - j\Im \{y_1\} = 0 - j(-0,43) = j0,43$
- ⑧ Encuentro la longitud de onda normalizada de y_s . $\lambda_3 = 0,143\lambda$.
- ⑨ Encuentro el largo (en λ) del stub, es la distancia entre la admittance y_s y el punto de cortocircuito. $\lambda_5 = 0,143\lambda - 0,25\lambda = -0,186\lambda$

Como $\lambda_5 < 0$, hay que ubicar a y_1 en el siguiente cruce del círculo $\Re e = 1$. Vuelvo entonces al punto ④ y sigo en el 2do ábaco.

Segundo ábaco

- ④ Desde y_N giro en sentido horario con $|Y| = \text{cte}$ hasta cortar el círculo de $\Re e = 1$ no en el 1er punto sino ahora en el 2do. $y_1' = 1 + j0,43$
- ⑤ Encuentro la longitud de onda normalizada de y_1' , pero ahora tengo que sumarle $0,5\lambda$. $\lambda_2' = 0,141\lambda + 0,5\lambda = 0,641\lambda$
- ⑥ Encuentro la distancia (en λ) desde la admittance de carga normalizada al punto donde voy a poner el stub. $\lambda_d' = \lambda_2' - \lambda_1 = 0,641\lambda - 0,192\lambda = 0,449\lambda$.

- 7) Anulo $\text{Im}\{\gamma_1\}$ colocando una susceptancia $y_s = \emptyset - j\text{Im}\{\gamma_1\} = \emptyset - j(+0,43) = -j0,43$
- 8) Encuentro la longitud de onda normalizada de γ_s . $\lambda'_3 = 0,435\lambda$
- 9) Encuentro el largo (en λ) del stub, es la distancia entre la admittance y_s y el punto de cortocircuito. $\lambda'_s = 0,435\lambda - 0,25\lambda = 0,185\lambda$
- 10) Encuentro la longitud de onda (en [m]) del generador. $\lambda_G = V_p/F = 300 \text{ M}/100 \text{ M} = 3 \text{ [m]}$.
- 11) Encuentro la distancia (en [m]) de la carga al punto donde coloco el stub, para eso reemplazo λ_G en λ'_3 . $L_d = \lambda'_d|_{\lambda=\lambda_G} = 0,449\lambda_G = 0,449 \cdot 3 = 1,35 \text{ [m]}$.
- 12) Encuentro el largo (en [m]) del stub, para eso reemplazo λ_G en λ'_s . $L_s = \lambda'_s|_{\lambda=\lambda_G} = 0,185 \cdot 3 = 0,55 \text{ [m]}$

Para evitar este fiasco (darme cuenta recién en el paso 9) de que $\lambda_s < 0$) lo que hago es cortar el círculo de $\text{Re}\{z_N\} = 1$ en el hemisferio norte del ábaco. Es decir, la parte imaginaria de y_1 (paso 4) debe ser positiva. Sólo debo recordar que tengo que sumar $0,5\lambda$ a λ_2 en el punto 5.

Primer ábaco

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \textcircled{6} \quad \lambda_d = \lambda_2 - \lambda_1 & & \textcircled{9} \quad \lambda_s = \lambda_{3-c} & & \\
& & = 0,163\lambda & & = -0,186\lambda & & \\
& \textcircled{3} \quad \lambda_1 = & & \textcircled{5} \quad \lambda_2 = & & \textcircled{8} \quad \lambda_3 = & \\
& 0,192\lambda & & 0,358\lambda & & 0,435\lambda & \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\textcircled{1} \quad z_N = & \xrightarrow{y_N} & \textcircled{2} \quad y_N = & & \textcircled{4} \quad y_1 = & \xrightarrow{0-j\text{Im}\gamma_1} & \textcircled{7} \quad y_s = \\
0,7 - j0,2 & & 1,32 + j0,38 & & 1 - 0,43 & & 0 + j0,43
\end{array}$$

$$\textcircled{11} \quad \lambda_G = 3 \text{ [m]} \xrightarrow{\lambda = \lambda_G} \textcircled{12'} \quad L_d = 1,35 \text{ [m]} \xrightarrow{\lambda = \lambda_G} \textcircled{13'} \quad L_s = 0,55 \text{ [m]}$$

$$\textcircled{6} \quad \lambda'_s = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,449\lambda$$

Segundo ábaco

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \textcircled{3} \quad \lambda_1 = & & \textcircled{5} \quad \lambda'_2 = & & \textcircled{8} \quad \lambda'_3 = \\
& & 0,192\lambda & & 0,41\lambda + 0,5\lambda = 0,641\lambda & & 0,435\lambda \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\textcircled{1} \quad z_N = & \xrightarrow{y_N} & \textcircled{2} \quad y_N = & & \textcircled{4} \quad y_1 = & \xrightarrow{0-j\text{Im}\gamma_1} & \textcircled{7} \quad y'_s = \\
0,7 - j0,2 & & 1,32 + j0,38 & & 1 + 0,43 & & 0 - j0,43
\end{array}$$

$$\lambda_S = \lambda_C - \lambda_3 = 0,25\lambda - 0,064\lambda$$

$$\lambda_S = -0,186\lambda$$

9 ↗

$$\lambda_3 = 0,064\lambda$$

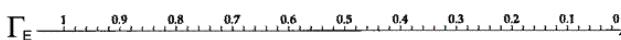
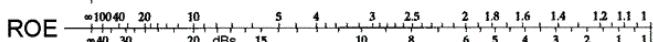
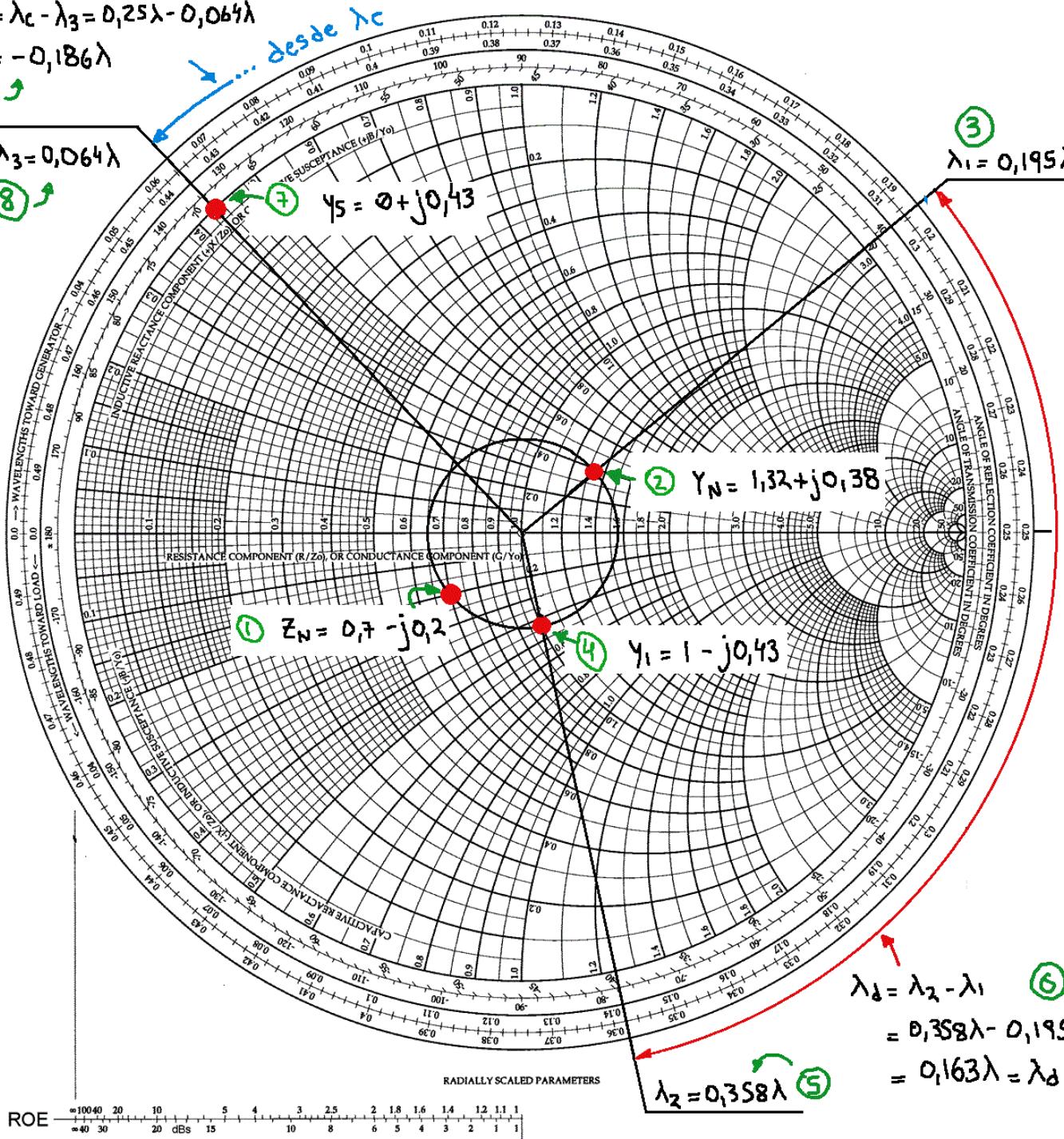
8 ↗

... desde λ_C

$$Y_S = 0 + j0,43$$

3 ↗

$$\lambda_1 = 0,195\lambda$$



$$\lambda_2 = 0,141\lambda + 0,5\lambda \\ = 0,641\lambda \quad (5)$$

$$\lambda_1 = 0,192\lambda \quad (3)$$

$$Y_1 = 1 + j0,43 \quad (4)$$

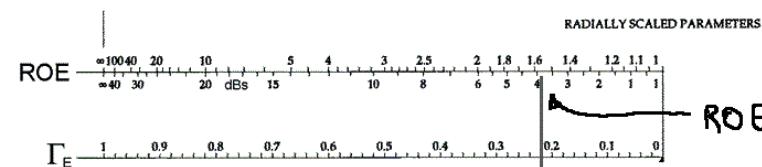
$$Y_N = 1,32 + j0,38 \quad (2)$$

$$Z_N = 0,7 - j0,2 \quad (1)$$

(5)

$$\varphi_2 = -139^\circ$$

$$\lambda' = 0,435\lambda \quad (8)$$



$$ROE_R = 1,56 \quad (16)$$

$$|Γ_{rel}| = 0,22 \quad (14)$$

Los puntos 14', 15' y 16' se los saca con Z_N . Son valores pedidos por el ejercicio, aunque en el libro de Abad sólo se limitó a poner los valores de la tabla de los pasos a seguir para la adaptación con 1 stub.

Ejercicio 89: Ídem al anterior.

Datos: $Z_o = 300 \text{ } [\Omega]$

$Z_R = 75 \text{ } [\Omega]$

$V_g = 50 \text{ [V]}/100 \text{ [MHz]}$

$v_p = c$.

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \quad \lambda_G = 3 \text{ [m]} \xrightarrow{\lambda = \lambda_G} \textcircled{12} \quad L_d = 1,278 \text{ [m]} \\
 \textcircled{6} \quad \lambda_d' = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,426 \lambda \\
 \textcircled{3} \quad \lambda_1 = 0,25 \lambda \\
 \textcircled{5} \quad \lambda_2' = 0,176 \lambda + 0,5 \lambda = 0,676 \lambda \\
 \textcircled{8} \quad \lambda_3' = 0,334 \lambda \\
 \textcircled{2} \quad y_N = \frac{y_N}{4} \xrightarrow{} \textcircled{4} \quad y_1' = \frac{0 - j \operatorname{Im} y_1}{1 + j 1,5} \\
 \textcircled{7} \quad y_S' = -j 1,5
 \end{array}$$

$\operatorname{Im} y_1'$ es negativa,
así que tengo que to-
mar el 2do corte
del $\operatorname{Re} = 1$

$$\lambda_2 = 0,676\lambda \quad (5)$$

$$\lambda_1 = 0,25\lambda \quad (3)$$

$$\lambda_3 = 0,344\lambda \quad (8)$$

$$Y_1 = 1 + j1,5 \quad (4)$$

$$Z_N = 0,25 \quad (1)$$

$$Y_N = 4 \quad (2)$$

$$Y_2 = 0 - j1,5 \quad (7)$$

RADILLY SCALED PARAMETERS

Ejercicio 90: Línea adaptada con un stub.

Datos: $Z_o = 50 \text{ } [\Omega]$

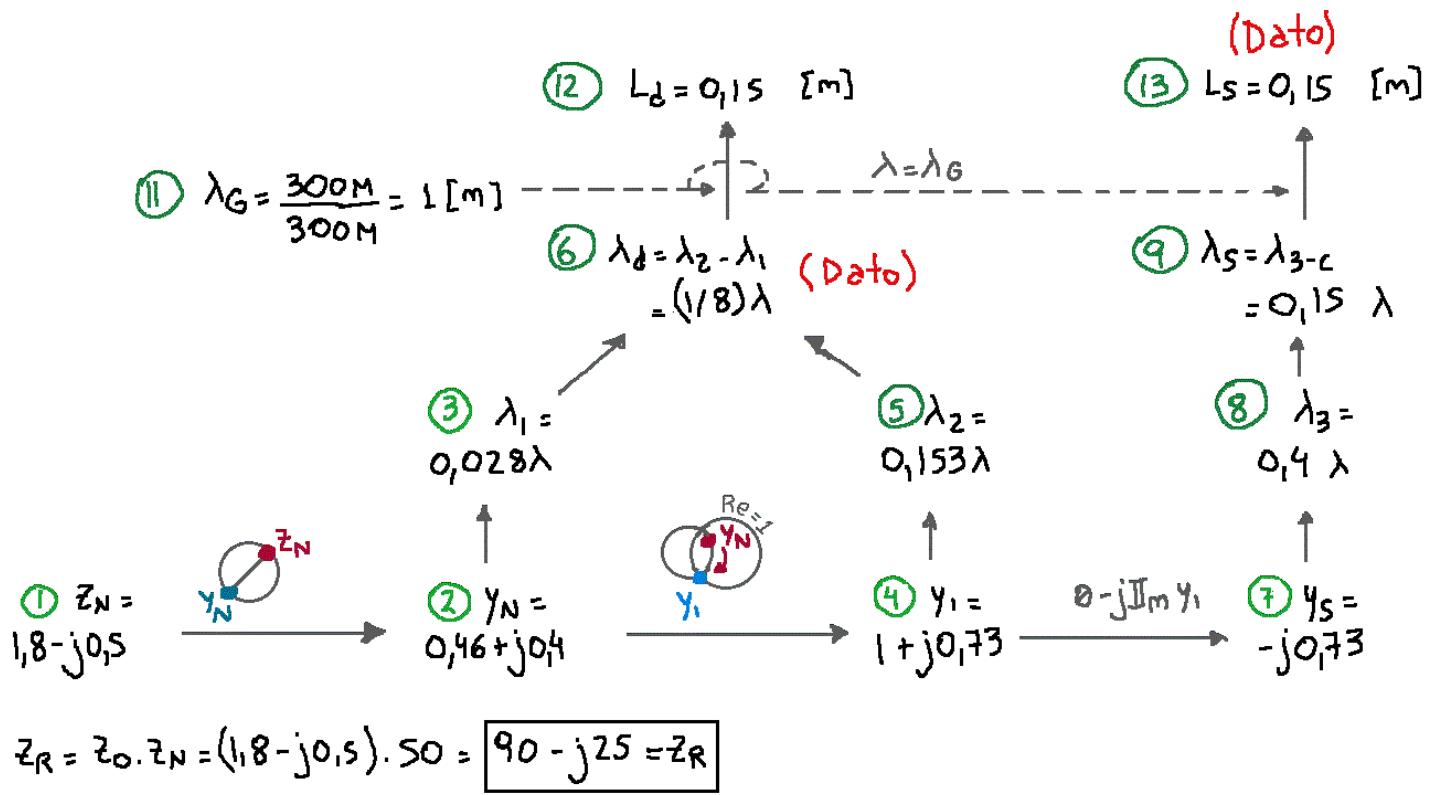
Hallar Z_R

$V_g = 100 \text{ [V]}/300 \text{ [MHz]}$

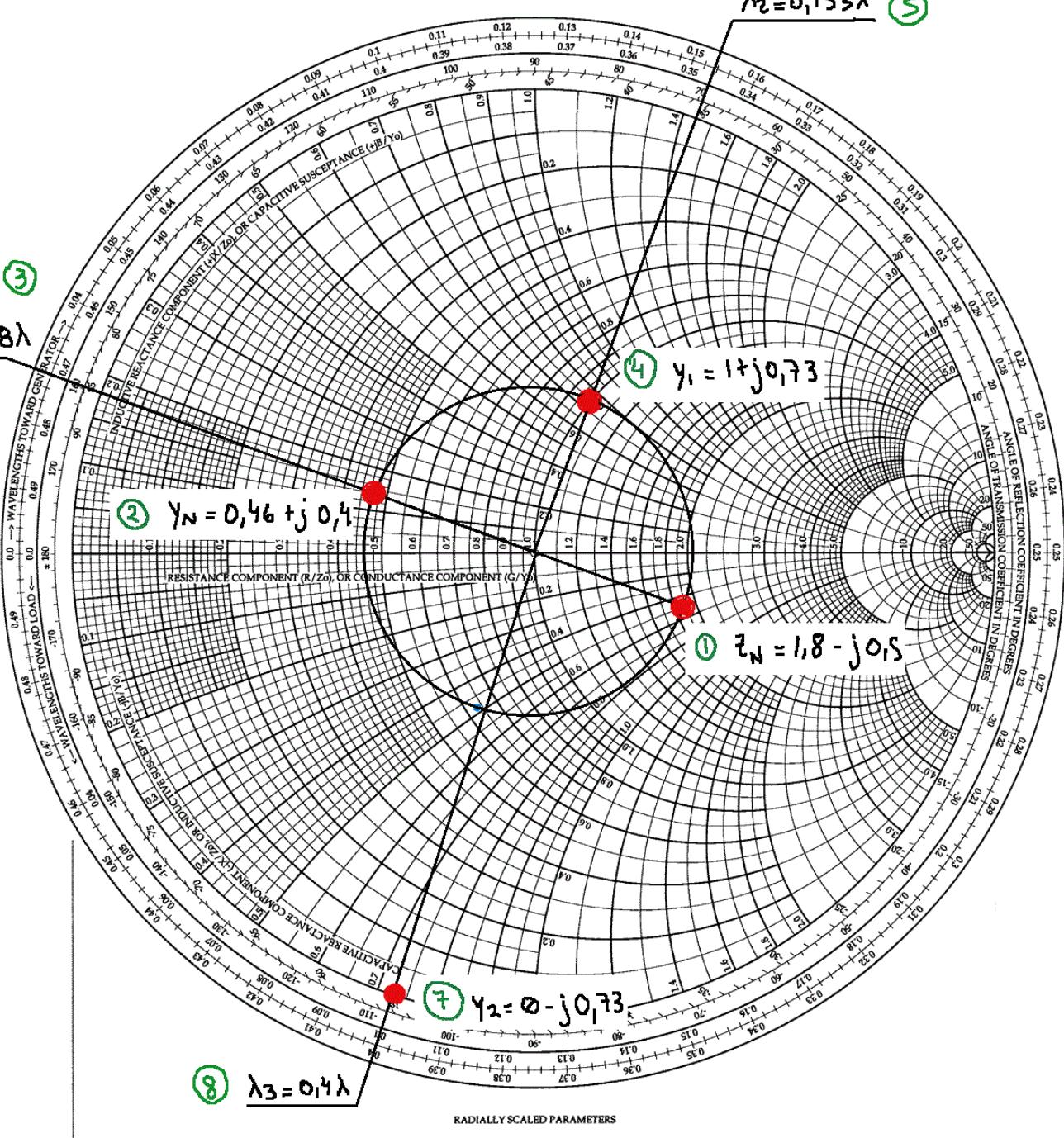
$L_{S1} = 15 \text{ [cm]}$

$d_1 = \lambda/8$

$v_p = c$.



$$Z_R = Z_o \cdot Z_N = (1,8 - j0,5) \cdot 50 = 90 - j25 = Z_R$$



Ejercicio 91: Adaptar con 2 stubs.

Datos: $d_{ES} = (3/8)\lambda$, $Z_0 = 50 \Omega$, $Z_R = (50-j50) \Omega$, $ROE_{ES} = 6$, $V_g = 100 \text{ V}$ / 300 MHz y $v_p = c$.

- Hallar: a) Distancia entre Z_R y el punto de conexión del 1er stub c) ROE_R .
 b) Coeficiente de reflexión en la carga. d) L_{S1} y L_{S2} , en λ y en m.
 e) jB_{S1} y jB_{S2} .

- ② Ubico en el ábaco el punto $z_N = \frac{Z_R}{Z_0} = \frac{50-j50}{50} = 1-j$
- ③ Encuentro y_N en el ábaco. $y_N = 0,5+j0,5$
- ④ Encontrar la long. de onda normalizada de y_N . $\lambda_1 = 0,088\lambda$
- ⑤ Desde y_N giro con $|P_E| = \text{cte}$ en sentido horario hasta encontrar un punto arbitrario que se encuentre dentro del círculo auxiliar. Pero como en este caso el ROE entre los stubs se da como dato, este punto ya no es cualquiera si no que está condicionado por y_2 . Por eso salto al paso ⑧.
- ⑧ Trazo un círculo cuyo centro coincide con el centro del ábaco y con radio igual al ROE entre los stubs (=6), es el círculo celeste. Encuentro y_2 como la intersección del círculo celeste y el círculo auxiliar, este punto debe hallarse en el lado derecho de este último. $y_2 = 1-j2$.
- ⑨ Desde y_2 giro, con parte real constante, hasta cortar con el círculo conformando por z_N e y_N , y que esté dentro del círculo auxiliar. $\sim y_1 = 1-j$.
- ⑩ Séco la long. de onda de y_1 . $\sim \lambda_2 = 0,338\lambda$.
- ⑪ Encuentro la distancia (en λ) desde y_N hasta donde coloco el 1er stub $\lambda_d = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,338\lambda - 0,088\lambda = 0,25\lambda$
- ⑫ Encuentro la admittance del 1er stub: $y_{S1} = y_2 - y_1 = 1-j2 - (1-j) = 0-j$
- ⑬ Encuentro la long. de onda de y_{S1} . $\lambda_3 = 0,375\lambda$
- ⑭ Encuentro la longitud (en λ) del 1er stub. $\lambda_{S1} = \lambda_3 - \lambda_d = 0,375\lambda - 0,25\lambda = 0,125\lambda$
- ⑮ Desde y_2 giro con $|P_E| = \text{cte}$, en sentido horario, una distancia igual a la separación entre los stubs. Primero encuentro la long. de onda de y_2 : $\lambda_{y2} = 0,312\lambda$, luego le sumo $3\lambda/8$ (separación entre stubs), $\lambda_{y3} = \lambda_{y2} + \lambda_{SS} = 0,312\lambda + 3\lambda/8 = 0,687\lambda$, si $\lambda_{y3} > 0,5\lambda$ entonces le resto $0,5\lambda$: $\lambda_{y3} = 0,687\lambda - 0,5\lambda = 0,187\lambda$. De esta long. de onda, trazo una recta al centro del ábaco y en la intersección con el círculo celeste se encuentra $y_3 = 1+j2$
- ⑯ Para anular la parte imaginaria de y_3 conecto una susceptancia de igual valor y de signo cambiado. $y_{S2} = 0-j2$.

14) Encuentro la long. de onda normalizada de γ_{S2} : $\lambda_4 = 0,324\lambda$

15) Encuentro la longitud (en λ) del 2do stub. $\lambda_{S2} = \lambda_4 - \lambda_c = 0,324\lambda - 0,25\lambda = 0,074\lambda$

16) Encuentro la long. de onda del generador. $\lambda_G = v_p/f = 300M/300M = 1 [m]$

17) " " distancia en [m] de γ_N al 1er stub $d = \lambda_d \Big|_{\lambda=\lambda_G} = 0,25 \cdot 1 = 0,25 [m]$

18) " el largo en [m] del 1er stub $L_{S1} = \lambda_{S1} \Big|_{\lambda=\lambda_G} = 0,125 \cdot 1 = 0,125 [m]$

19) " " " " " 2do " $L_{S2} = \lambda_{S2} \Big|_{\lambda=\lambda_G} = 0,074 \cdot 1 = 0,074 [m]$

18) d

0,25 [m]

19) L_{S2}

0,074 [m]

↑

17) λ_d

$$= \lambda_2 - \lambda_1$$

$$= 0,25 \lambda$$

$$2) Z_N \\ 1-j$$

$$\begin{array}{l} 4) \lambda_1 \\ 0,088\lambda \\ \uparrow \\ 3) \gamma_N \\ 0,5+j0,5 \end{array}$$

circuito
en
paralelo

$$6) \lambda_2 \\ 0,338\lambda$$

$$5) \gamma_1 \\ 1-j$$

$$8) \gamma_2 \\ 1-j2$$

$$7) \gamma_3 \\ 1+j2$$

$$15) \lambda_{S2}$$

$$= \lambda_4 - \lambda_c$$

$$= 0,074\lambda$$

$$14) \lambda_4$$

$$0,324\lambda$$

$$13) \gamma_{S2}$$

$$-j2$$

↓
1 stub

$$9) \gamma_{S1} =$$

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \\ -j$$

$$10) \lambda_3 =$$

$$0,375\lambda$$

$$11) \lambda_{S1} =$$

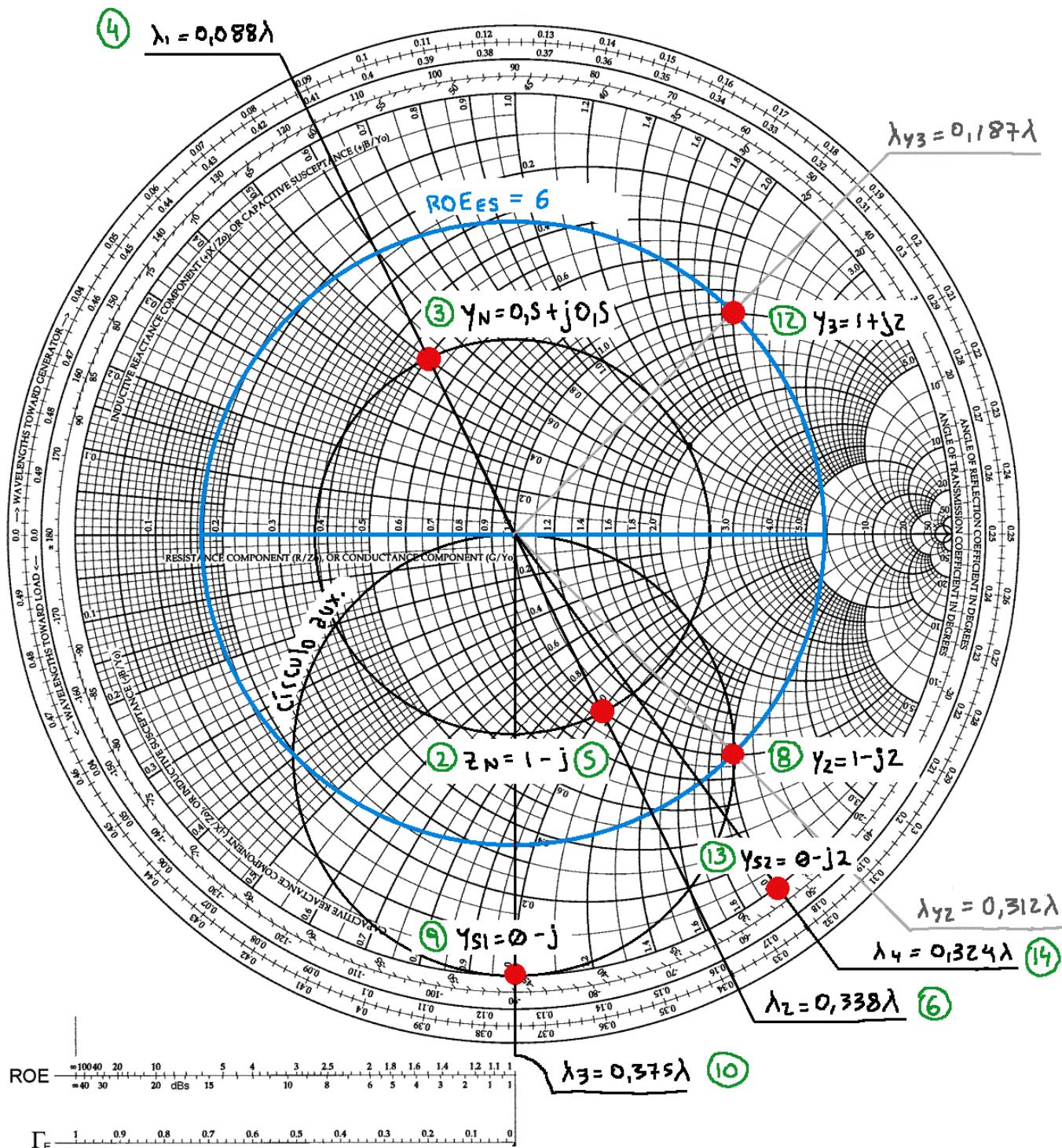
$$\lambda_3 - \lambda_c = \\ 0,125\lambda$$

$$17) \lambda_G = \frac{v_p}{f} =$$

$$\frac{300M}{300M} = 1 [m]$$

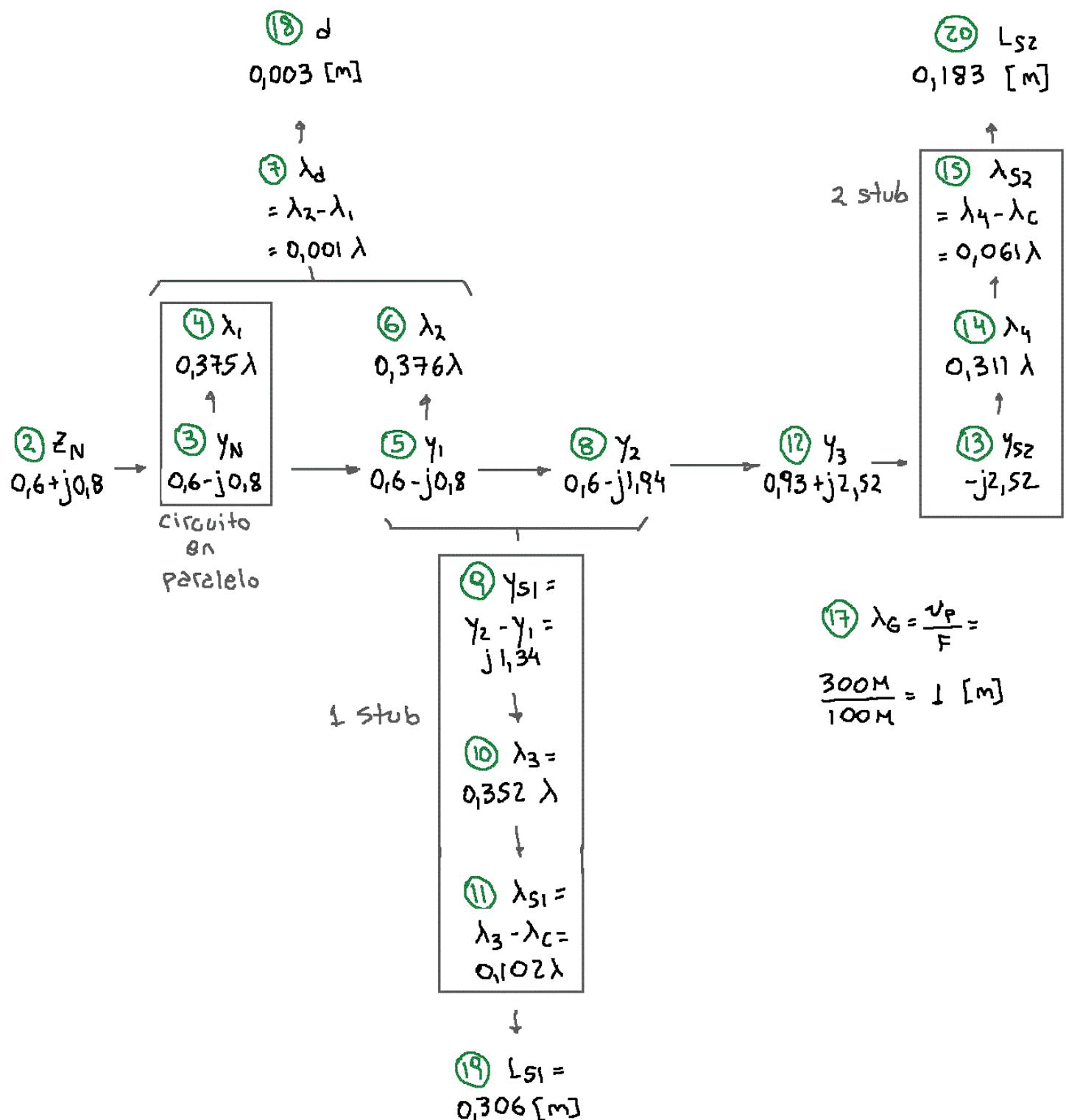
$$18) L_{S1} =$$

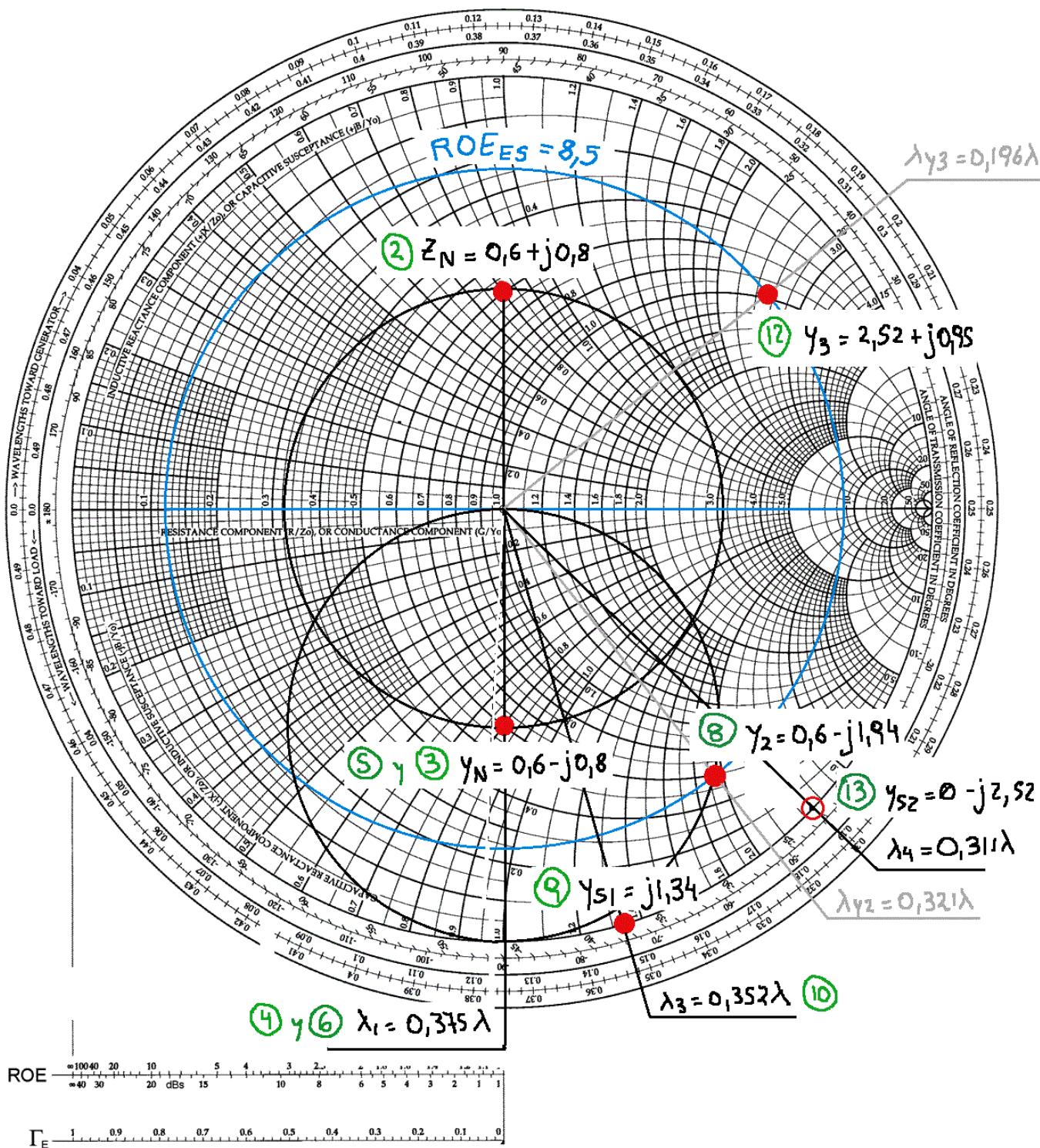
$$0,125 [m]$$



Ejercicio 92: Ídem al anterior.

Datos: $d_{ES} = (3/8)\lambda$ $Z_o = 75 \text{ } [\Omega]$ $Z_R = (45 + j60) \text{ } [\Omega]$ $\text{ROE}_{ES} = 8,5$ $V_g = 150 \text{ [V]}/100 \text{ [MHz]}$ $v_p = c$





⑥ En realidad, $\lambda_1 = \lambda_2$ porque $\gamma_N = \gamma_1$, pero con esto la λ_d da cero.
 En el libro, Abad $\gamma_N = \gamma_1 = 0,6 - j0,8$, pero toma $\lambda_1 = 0,375896\lambda$ y $\lambda_2 = 0,37867$.
 No sé de donde saca esto, obtiene tantos decimales, lo que hago es
 $\lambda_1 = 0,375\lambda$ y $\lambda_2 = 0,376\lambda$ para que $\lambda_d \neq 0$.

⑭ $\lambda y_3 = \lambda y_2 + \lambda s_2 = 0,321\lambda + (3/8)\lambda = 0,696\lambda \rightarrow 0,196\lambda$

Ejercicio 93: LT adaptada con dos stubs.

Datos: $d_{ES} = (3/8)\lambda$

$Z_0 = 75 \Omega$

$d_1 = 20,28 \text{ cm}$

$\text{ROE}_{ES} = 4$

$V_g = 100 \text{ V}/500 \text{ MHz}$

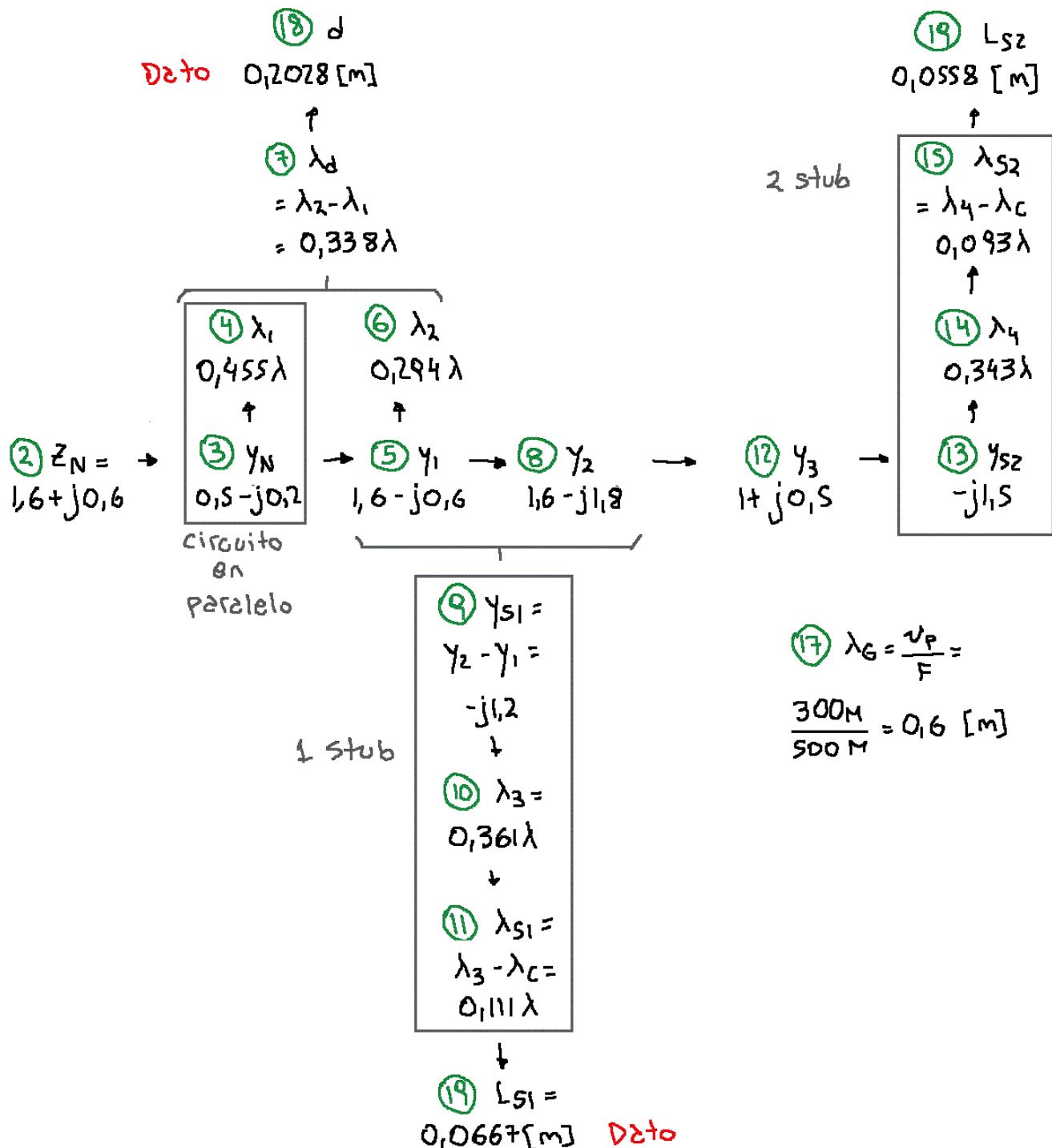
$v_p = c \quad L_{S1} = 6,66 \text{ cm}$

Hallar: a) Z_R

b) Γ_R

c) ROE_R

d) L_{S2}

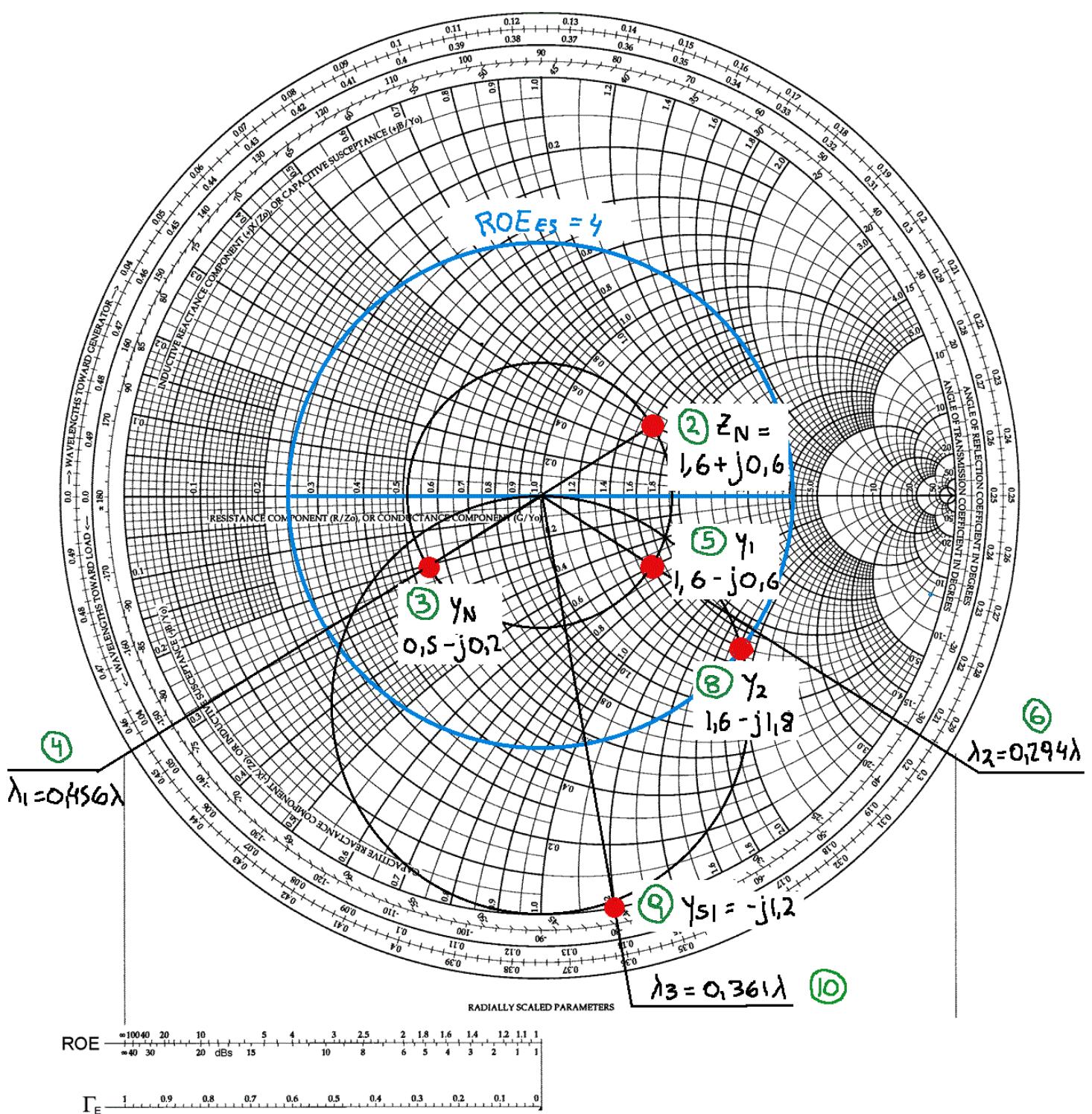


Paso 1 - Trazo el círculo auxiliar.

Paso 2 - Cálculo $\lambda_G = v_p/F = 300 \text{ M}/500 \text{ M} = 0,6 \text{ m}$.

Paso 3 - Voy del punto ⑨ al ⑪. $\lambda_{S1} = L_{S1}/\lambda_G = 0,0666/0,6 = 0,111\lambda$

Paso 4 - Voy del punto ⑪ al ⑩. $\lambda_3 = \lambda_{S1} + \lambda_C = 0,111 + 0,25 = 0,361\lambda$



PASO 5 - Voy del punto $\textcircled{10}$ al $\textcircled{9}$, a y_5 lo encuentro como la intersección entre el círculo máximo y la recta q' va desde el centro hasta λ_3 (pues y_5 no tiene parte real).

Paso 6 - y_2 lo encuentro como en el punto ⑧ de los ejercicios anteriores

Paso 7 - Voy del punto ⑧ al ⑤. $y_1 = y_2 - y_{52} = 1,6 - j1,8 - (-j1,2) = 1,6 + j0,6$

Paso 8 - Voy del punto ⑤ al ⑥. saco el λ de y_1 . $\lambda_2 = 0,294\lambda$

Paso 9 - Voy del punto ⑧ al ⑦. $\lambda_d = d/\lambda_G = 0,2028/0,6 = 0,338\lambda$

Paso 10 - Voy del punto ⑦ al ④. $\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_d = 0,294 - 0,338 = -0,044\lambda$. Como $\lambda_1 < 0$ le sumo $0,5\lambda$. $\lambda_1 = -0,044 + 0,5 = 0,456\lambda$.

Paso 11 - Voy del punto ④ al ③. Seco y_N como la intersección entre la recta que va desde el centro hasta λ_1 y el círculo de $|y| = \text{cte}$ que contiene y_1 . $y_N = 0,5 - j0,2$

Paso 12 - Voy del punto ③ al ②. $z_N = 1,6 + j0,6$

Paso 13 - Con z_N seco z_R . $z_R = z_N \cdot z_0 = (1,6 + j0,6)75 = 120 + j45$

Paso 14 - Desde el punto ⑧ al ⑫ en adelante se resuelve como en los ejercicios anteriores.

$$\textcircled{12} \quad y_3 = 1 + j0,5 \quad \textcircled{13} \quad y_{S2} = -j0,5 \quad \textcircled{14} \quad \lambda_4 = 0,343\lambda \quad \textcircled{19} \quad L_{S2} = 0,0558[\text{m}]$$

Estos puntos no están marcados en el dibujo.

I-DEFINICIONES

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Método heurístico.} \\ \text{Método de las ec. Mx.} \\ \text{Funciones potencial eléctrico y magnético ...} \end{array} \right.$

2-ELEMENTO DE C.A.

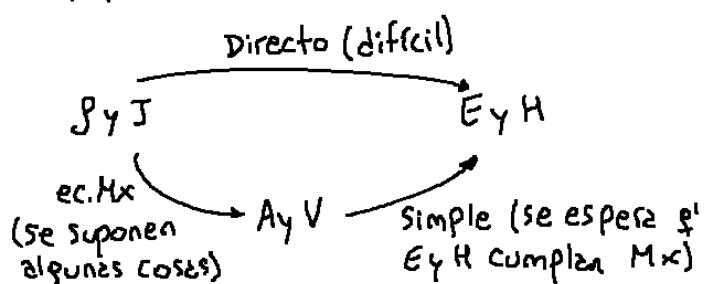
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Relación entre un elemento de corriente y ...} \end{array} \right.$

3-POTENCIA RADIADA POR
UN ELEMENTO DE CORRIENTE

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aplicación a las antenas cortas} \\ \text{Distribución supuesta de la corriente.} \end{array} \right.$

I-DEFINICIONES

Se estudia aquí la relación de E y H con sus fuentes. Hallar E y H a partir de ρ y J no es fácil; se define un paso intermedio: hallar los vectores potencial magnético A y potencial eléctrico V .

I.1- Método simple o heurístico

Asiendo de las ecuaciones de V y A obtenidas en la unidad 2 para campos estéticos, luego introduzco la variable tiempo y por último también el retraso propio de una propagación finita.

$$V(r; t - t_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(r; t - R/v)}{R} dv \quad A(r; t - t_0) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J(r; t - R/v)}{R} dv$$

Luego obtengo los campos E y H como:

$$E = -\nabla V \quad \mu H = \nabla \times A$$

Pero es incorrecto, pues E y H deben cumplir con Mx , así como ρ y J con la condición de continuidad.

1.2 - Método de las ec. Mx

Arranco con las ec. Mx y la ec. de continuidad.

$$\text{ec. Mx} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot H = \sigma E + \epsilon \partial E / \partial t \\ \nabla \times E = -\mu \partial H / \partial t \\ \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{ec. continuidad} \rightarrow \nabla \cdot J = -\partial \rho / \partial t$$

Aquí calculo 3 cosas:

- Potencial escalar V : puesto que ya tengo $A \rightarrow \mu H = \nabla \times A$ (ec. 1)
- Sist. de ec. diferenciales: relacionen A y V con ρ y J
- " " " " con condición de Lorentz: como el sistema anterior tiene a A y V en ambas ecuaciones, necesito una condición para hallar la solución.

Definición del vector potencial escalar V : arranco de la zec Mx

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{Reemplazo } H \text{ con la ec. 1.}$$

$$= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\nabla \times A}{\mu} \right)$$

Cambio el orden
de $\nabla \times$ y $\frac{\partial}{\partial t}$

$$\nabla \times E = -\nabla \times \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times E + \nabla \times \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \times (-\nabla V) = 0$$

Como el rotor de lo que está dentro del paréntesis es cero, puedo decir que es la divergencia de un vector, a este vector lo llamo "potencial eléctrico" V (lleva signo $-$ a propósito).

$$\nabla \vec{V} = -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{ec. 2})$$

Ecuaciones diferenciales

$$\mu H = \nabla \times A \quad (\text{ec. 1})$$

$$\nabla \cdot V = -E - \partial A / \partial t \quad (\text{ec. 2})$$

$$\text{lec. Mx} \rightarrow \nabla \times H = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times A}{\mu} \right) = J + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \cdot V - \frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \nabla \cdot A - \nabla^2 A = \mu J - \mu \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\nabla \nabla \cdot A - \nabla^2 A = \mu J - \mu \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (\text{ec. 3})$$

$$(ec.2) \quad \nabla \cdot \vec{V} = -E - \frac{\partial A}{\partial t} \quad \therefore E = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \rightarrow 3 \text{ ec MX}$$

$$\nabla \cdot (-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}) =$$

$$-\nabla^2 V - \nabla \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 V + \nabla \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (ec.4)$$

Las ecuaciones (ec.3) y (ec.4) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

Ec. diferenciales con la condición de Lorentz

Como A y V aparecen en ambas ecuaciones (3 y 4) no me da un resultado único, pues todo campo vectorial queda únicamente definido si se especifica su rotor y su divergencia. Al rotarizarlo tengo ($ec.1 \rightarrow \mu H = \nabla \times A$), falta definir una condición para la divergencia; esta condición se llama "condición calibradora de Lorentz".

$$\nabla \cdot A = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (ec.5) \quad \text{Lorentz}$$

Ahora reemplazo este ec. en (ec.3) y (ec.4)

$$\nabla \cdot A = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (ec.5)$$

$$(ec.3) \quad \nabla \nabla \cdot A - \nabla^2 A = \mu J - \mu \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\nabla \left(-\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \nabla^2 A = \mu J - \mu \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 A = \mu J - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 A - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J} \quad (ec.6)$$

$$(ec.4) \quad \nabla^2 V + \nabla \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot A) =$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) =$$

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}} \quad (ec.7)$$

Para el caso particular de campos estacionarios $\partial A / \partial t = \partial V / \partial t = 0$.

1.3- Funciones potencial magnético y potencial eléctrico para campos sinusoidales

se trae de hacer lo mismo que antes, sólo que en las ecuaciones

(ec.1) Definición de \vec{A}

(ec. 2) Definición de \vec{V}

(ec.5) Condición de Lorentz.

(ec. 6) y (ec.7) Ec. diferenciales generales.

Hago los siguientes reemplazos: $\vec{A} = A e^{j\omega t}$ y $\vec{V} = V e^{j\omega t}$

$$(ec.1) \quad \mu H = \nabla \cdot A \quad \text{no cambia.}$$

$$(ec.2) \quad \nabla \cdot \vec{V} = -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}(A e^{j\omega t}) = -\vec{E} - j\omega(A e^{j\omega t}) = -\vec{E} - j\omega \vec{A} \quad (ec.8)$$

Lorentz

$$(ec.5) \quad \nabla \cdot \vec{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(V e^{j\omega t}) = -\mu \epsilon(j\omega)(V e^{j\omega t}) = -j\omega \mu \epsilon \cdot \vec{V} \quad (ec.9)$$

$$(ec.6) \quad \nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu J$$

$$(ec.7) \quad \nabla^2 \vec{V} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}(A e^{j\omega t}) =$$

$$\nabla^2 \vec{V} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}(V e^{j\omega t}) =$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon(j\omega)^2(A e^{j\omega t}) =$$

$$\nabla^2 \vec{V} - \mu \epsilon(j\omega)^2(V e^{j\omega t}) =$$

$$(ec.10) \quad \nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{A} = -\mu J$$

$$(ec.11) \quad \nabla^2 \vec{V} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{V} = -\rho / \epsilon$$

Para obtener el campo E , que es el que falta, de la condición de Lorentz (ec.9) despejo \vec{V} y lo reemplazo en la (ec.8).

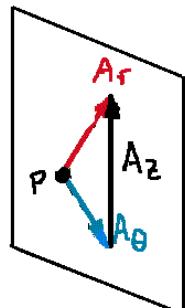
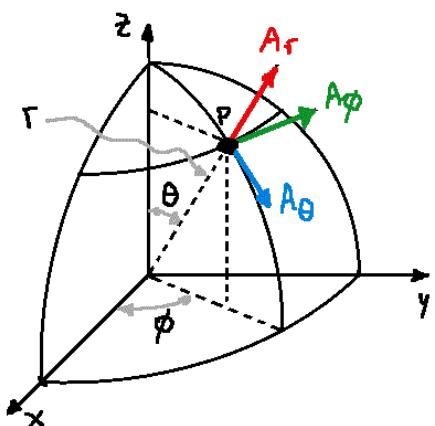
$$(ec.9) \quad \nabla \cdot \vec{A} = -j\omega \mu \epsilon \vec{V} \quad \text{Lorentz} \quad \therefore \vec{V}$$

$$(ec.8) \quad \nabla \cdot \vec{V} = -\vec{E} - j\omega \vec{A} \rightarrow \therefore \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{V} - j\omega \vec{A} = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \cdot \vec{A}}{j\omega \mu \epsilon} \right) - j\omega \vec{A} = \\ \text{Definición de } \vec{V} \quad \vec{E} = \frac{\nabla \nabla \cdot \vec{A}}{j\omega \mu \epsilon} - j\omega \vec{A} \quad (ec.12)$$

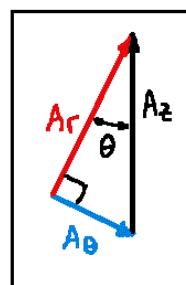
Para hallar las soluciones recurso al caso estático y lo generalizo, teniendo en cuenta el retraso y el desfasaje de una onda plana uniforme que viaja en la dirección \vec{R} , que es $e^{-j\beta R}$.

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int g(\vec{r}) \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int J(\vec{r}) \frac{e^{-j\beta R}}{R} dV$$

2 - ELEMENTO DE C.A. (dipolo eléctrico oscilante)



=



$$A_\phi = 0$$

$$A_r = A_z \cdot \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \cdot \sin \theta$$

El problema consiste en hallar las componentes esféricas de los campos E y H de un elemento diferencial de c.a. a una distancia arbitraria (punto P). El elemento diferencial se sitúa en el centro de un sistema de coordenadas esféricas; este cálculo se puede hacer siempre y cuando el elemento diferencial $l \cdot dl \cdot \cos(\omega t)$ sea tan corto ($dl \rightarrow 0$) que la corriente I sea constante a lo largo de él.

Comienzo con el campo \vec{A}_z en el punto P debido al elemento:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{l \cdot dl \cdot \cos(\omega t')}{r} \quad \text{donde } t' = t - r/v$$

Con A_z obtengo las componentes A_r y A_θ ($A_\phi = 0$) para poder sacar $\nabla \wedge A$, el cual tendrá sólamente componente en ϕ (o sea $(\nabla \wedge A)_r = (\nabla \wedge A)_\theta = 0$). Divido $(\nabla \wedge A)_\phi$ por μ y tengo H_ϕ . Por la lecMx se que $\nabla \wedge H = \epsilon_0 E/l$, así que para hallar el campo E tengo que sacar $\nabla \wedge H$, dividir por ϵ_0 e integrar respecto el tiempo. El rotor de H , al tener componente sólo en ϕ , da como resultado dos componentes: $(\nabla \wedge H)_r$ y $(\nabla \wedge H)_\theta$; así que tendré dos componentes del campo E : E_r y E_θ . Resumiendo, tengo 3 componentes:

$$E_\theta = \frac{I \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{\omega \cdot \sin(\omega t')}{v^2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\cos(\omega t')}{v} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{\sin(\omega t')}{\omega} \cdot \frac{1}{r^3} \right] \quad (\text{ec. 13})$$

$$E_r = \frac{2 I \cdot dl \cdot \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[+ \frac{\cos(\omega t')}{v} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{\sin(\omega t')}{\omega} \cdot \frac{1}{r^3} \right] \quad (\text{ec. 14})$$

$$H_\phi = \frac{I \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi} \left[-\frac{\omega \cdot \sin(\omega t')}{v} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\cos(\omega t')}{1} \cdot \frac{1}{r^2} \right] \quad (\text{ec. 15})$$

{ Término de radiación { Término de inducción { Término electrostático

donde $t' = t - r/v$ retraso en el tiempo debido a la velocidad finita de propagación.

Los términos r^{-1} , r^{-2} y r^{-3} son:

- r^{-1} : término de radiación: predomina lejos de $l \cdot dl$, donde "r" es muy grande. Resulta del tiempo finito de propagación y no se considera en campos estáticos. Contribuye a un flujo de energía que se aleja de la fuente.
- r^{-2} : término de inducción: predomina cerca de $l \cdot dl$, donde "r" es chica. Contribuye a un flujo de energía que queda almacenado en el campo durante $T/4$ y devuelto al circuito al siguiente $T/4$. Si hago $r \rightarrow 0$, entonces H_ϕ es:

$$H_\phi|_{r \rightarrow 0} = \frac{I_c \cdot dL \cdot \sin \theta \cdot \cos \omega t'}{4\pi r^2}$$

que es la Ley de Biot-Savart si se hubiera extendido a un elemento de corriente alterna $I_c \cdot \cos \omega t'$.

- τ^{-3} : término electrostático: se llama así por su semejanza con las componentes de campo de un dipolo.

Para hallar la distancia " r " a la cual los campos de radiación e inducción serán iguales, igualo los módulos de sus coeficientes (del campo H_ϕ):

$$\frac{\omega}{v_s} = \frac{1}{r^2} \rightarrow \therefore r = \frac{v}{\omega} = \frac{\lambda \cdot F}{2\pi \cdot F} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{6,28} \cong \frac{\lambda}{6} = r$$

2.1- Relación entre un elemento de corriente y un dipolo

En la subsección anterior, el hipotético elemento de corriente requiere que \exists una acumulación de cargas dada por:

$$\frac{dq}{dt} = I_c \cdot \cos \omega t \rightarrow \therefore q = \frac{I_c}{\omega} \cdot \sin \omega t$$

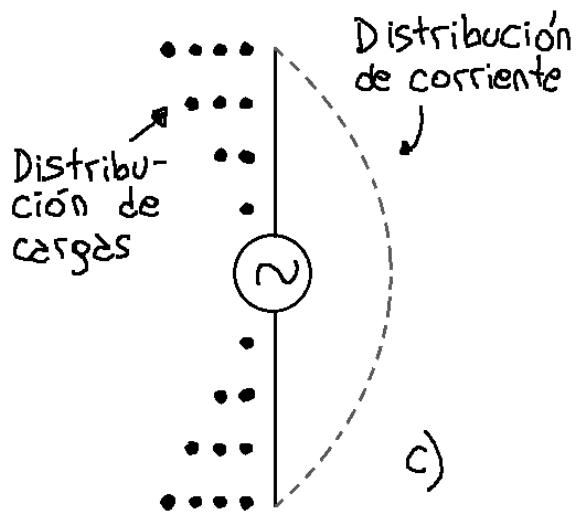
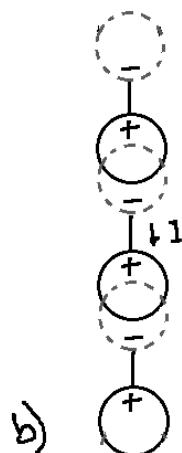
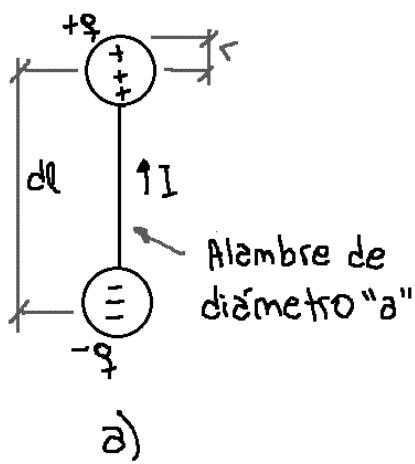
o sea que aumente en un extremo y disminuya en otro. Analizo 3 casos: dipolo hertziano, cadena de dipolos hertzianos y antena lineal.

- Dipolo hertziano: son 2 esferas unidas por un cable por donde circula la corriente. Si $a \ll r \ll dl \ll \lambda \Rightarrow$ distribución de carga y de corriente es como en la figura a). El campo E producido es:

$$E_r = 2 \cdot \cos \theta \left(\frac{I_c \cdot dl}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \omega t'}{\omega r^3} \right) \quad E_\theta = \sin \theta \left(\frac{I_c \cdot dl}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \omega t'}{\omega r^3} \right)$$

- Cadena de dipolos hertzianos: mismo caso anterior, pero los dipolos forman una cadena, por ejemplo cuando el elemento de corriente forma parte de un circuito. La carga $+q$ en un extremo queda anulada por la carga $-q$ del dipolo adyacente, los términos eléctricos (τ^{-3}) se desvaneecen y quedan los de radiación (τ^{-1}).

- Antena lineal: si la distribución de corriente no es uniforme (antena lineal) la distribución de carga será como en la figura c). Es como el caso anterior con las cargas en los extremos un poco distintas, esto hace que las cargas no se anulen por completo y se acumula en la superficie del alambre.



3- POTENCIA RADIADA POR UN ELEMENTO DE CORRIENTE

Cálculo lo siguiente:

- Vector de Poynting;
- Relación entre E y H y
- la potencia total radiada.

Vector de Poynting: cálculo sus componentes en θ y en r . Uso las fórmulas:

$$P_\theta = -E_r H_\phi \quad P_r = E_\theta H_\phi$$

La primera es cero. La segunda es:

$$P_r = \frac{ic \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{-\omega \cdot \sin \omega t'}{r^2} + \frac{\cos \omega t'}{r^2} \right) \cdot \frac{ic \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \epsilon} \left(\frac{-\omega \sin \omega t'}{r^2} + \frac{\cos \omega t'}{r^2} + \frac{\sin \omega t'}{r^3 \omega} \right)$$

$$P_r = \frac{1}{32 \cdot C \cdot \epsilon} \left(\frac{\omega \cdot ic \cdot dl \cdot \sin \theta}{\pi r c} \right)^2 = \boxed{\frac{\eta}{2} \left(\frac{\omega \cdot ic \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi r c} \right)^2 \left[\frac{W}{m^2} \right] = P_r} \quad (\text{ec. 16})$$

en donde $r=c$ y $\eta=1/(C\epsilon)$. Es decir, $P_\theta=0$, representa flujo detenido en el campo; en cambio $P_r \neq 0$ debido a los términos de radiación ($1/r$).

Relación entre E y H : aquí demuestro por qué $\eta=1/(C\epsilon)$. Hago el cociente entre E y H , que es igual a η ; tomo E_θ y H_ϕ de las ec. 13 y 15 con una "r" tan grande como para que los otros términos no influyan.

$$\eta = \frac{E_\theta}{H_\theta} = \frac{\frac{\omega k dI \sin \theta}{4\pi \epsilon v^2 r}}{\frac{\omega I_c dI \sin \theta}{4\pi \epsilon r}} = \frac{1}{vE} = \frac{1}{CE}$$

$$• E_\theta = \frac{\omega k dI \sin \theta}{4\pi \epsilon v^2 r}$$

$$• H_\theta = \frac{\omega I_c dI \sin \theta}{4\pi \epsilon r}$$

Potencia total radiada: hago la integral de la ec. 16 en una superficie esférica centrada en el elemento de corriente (donde $dS = 2\pi r^2 \cdot \sin \theta d\theta$)

$$\text{Potencia} = \int_S P_r(\theta; v) dS = \int_S \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\omega \cdot I_c \cdot dI \cdot \sin \theta}{4\pi \epsilon c} \right)^2 \cdot (2\pi r^2 \sin \theta) d\theta =$$

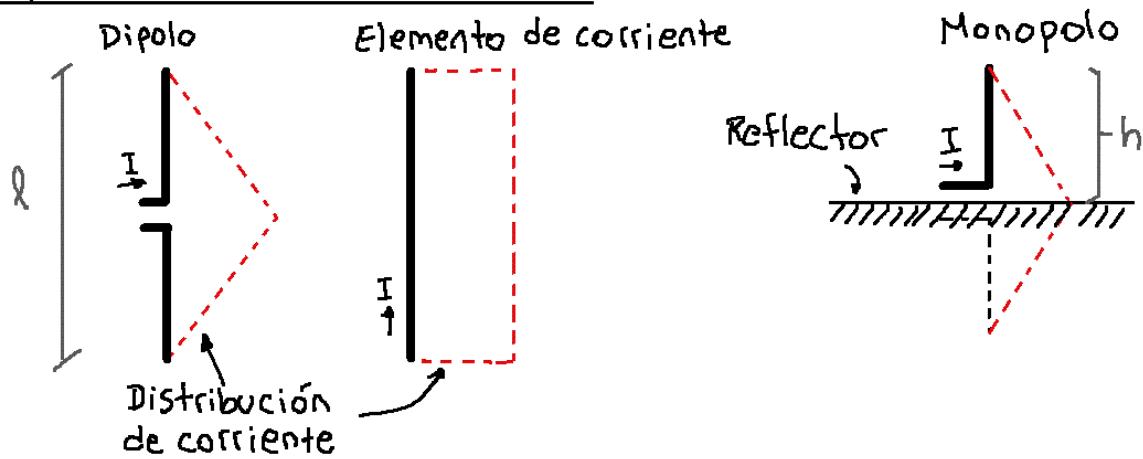
$$= \frac{\eta \omega^2 dI^2}{12\pi c^2} (I_{ef} \sqrt{2})^2 = \frac{\eta \omega^2 dI^2}{6\pi c^2} I_{ef}^2 = \boxed{\left[80\pi^2 \left(\frac{dI}{\lambda} \right)^2 \right] I_{ef}^2 \text{ [W]} = \text{Potencia}}$$

*1

El término entre corchetes se llama "Resistencia de radiación" y se mide en [Ω].

$$R_{rad} = 80\pi^2 (dI/\lambda)^2 \quad (\text{ec. 17})$$

3.1 - Aplicación a las antenas cortas



La corriente disminuye a la mitad en el dipolo respecto del elemento de corriente, y como la potencia cae a la cuarta parte cuando la corriente cae a la mitad, la resistencia de radiación será la cuarta parte de la R_{rad} de un elemento de corriente de igual longitud (ec. 17).

*1 No sé cómo carajo llega de un peso al otro.

$$R_{\text{rad}} = 20 \pi^2 (\ell/\lambda)^2 \approx 200 (\ell/\lambda)^2$$

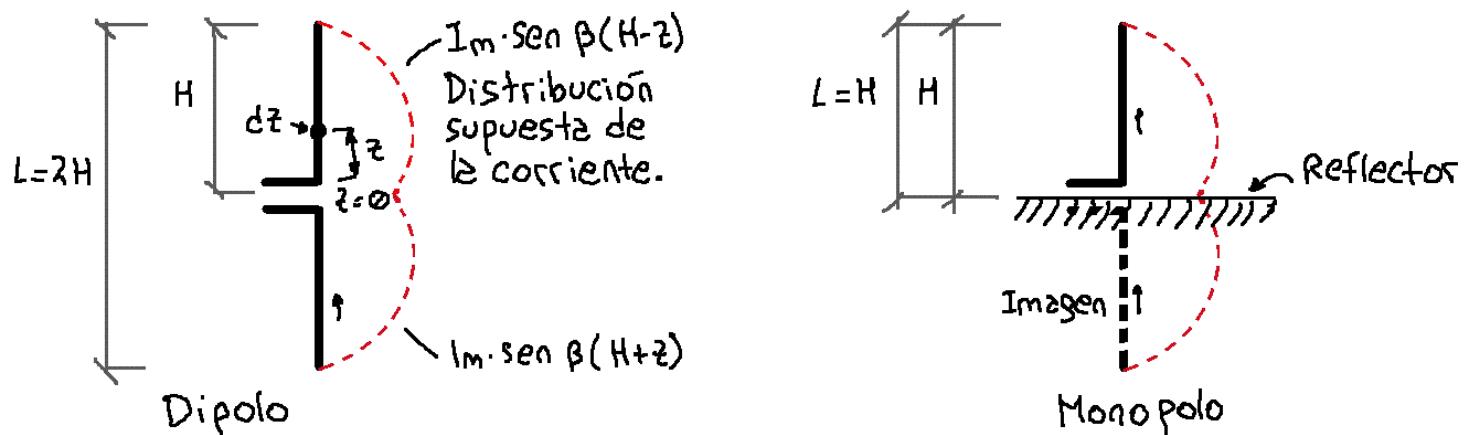
En el caso del monopolo de altura $h=\ell/2$, la potencia radiada será la mitad de la del dipolo, por lo que su R_{rad} también será la mitad.

$$R_{\text{rad}} = 10 \pi^2 (\ell/\lambda)^2 = 10 \pi^2 (2h/\lambda)^2 = 40 \pi^2 (h/\lambda)^2 \approx 400 (h/\lambda)^2$$

3.2 - Distribución supuesta de la corriente

Para hallar el campo E en antenas más largas debo conocer la distribución exacta de la corriente, lo cual es difícil, por eso la supongo aproximada (sinoidal).

Cuando el campo generado por un elemento de corriente $\ell \cdot dz$ se refleja en la superficie reflectora "parece" generarse por un elemento imagen que esté debajo. Además $R_{\text{rad,mono}} = R_{\text{rad,dipolo}}/2$. Estas 2 cosas significan que ambos elementos tienen la misma característica de radiación.



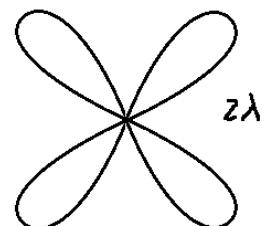
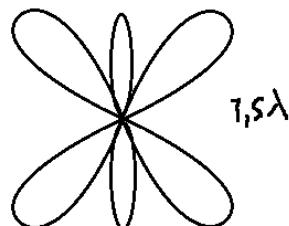
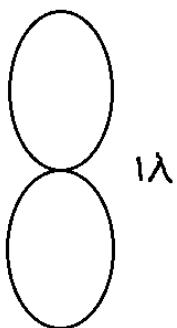
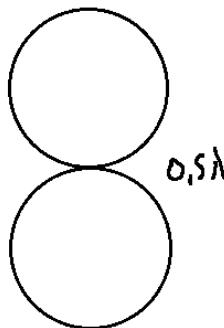
Ejercicio 94: Dada la expresión de una antena dipolo alimentada en su centro y de cualquier longitud $L=2H$

$$E = 60 \frac{I_0}{\Gamma} \frac{\cos(\beta H) - \cos(\beta H \cdot \cos \theta)}{\sin \theta}$$

Hallar los diagramas de directividad para dipolos de

- a) Media longitud de onda.
- b) Una longitud de onda.
- c) 1,5 longitud de onda.
- d) dos longitudes de onda.

Ni puta idea de dónde las sacó a las gráficas, tendré que aprenderme las de memoria.



Ejercicio 95: Expresar las componentes de campo eléctrico y magnético E_θ , E_r y H_ϕ generadas por un elemento de corriente.

- a) Analizar los términos de cada componente.
- b) Demostrar a qué distancia son iguales los términos de radiación e inducción.
- c) Expresar la potencia radiada por un elemento de corriente (Poynting)

PUNTO A:

$$E_\theta = \frac{I \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi \epsilon} \left[-\frac{\omega \cdot \sin(\omega t')}{v^2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\cos(\omega t')}{v} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{\sin(\omega t')}{\omega} \cdot \frac{1}{r^3} \right]$$

$$E_r = \frac{2 I \cdot dl \cdot \cos \theta}{4\pi \epsilon} \left[+ \frac{\cos(\omega t')}{v} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{\sin(\omega t')}{\omega} \cdot \frac{1}{r^3} \right]$$

$$H_\phi = \frac{I \cdot dl \cdot \sin \theta}{4\pi} \left[- \underbrace{\frac{\omega \cdot \sin(\omega t')}{v} \cdot \frac{1}{r}}_{\text{Término de radiación}} + \underbrace{\frac{\cos(\omega t')}{v} \cdot \frac{1}{r^2}}_{\text{Término de inducción}} \underbrace{- \frac{\sin(\omega t')}{\omega} \cdot \frac{1}{r^3}}_{\text{Término electrostático}} \right]$$

donde $t' = t - r/v$ retraso en el tiempo debido a la velocidad finita de propagación.

PUNTO B: Para hallar la distancia r a la cual los campos de radiación e inducción serán iguales, igualar los módulos de sus coeficientes (del campo H_ϕ):

$$\frac{\omega}{vr} = \frac{1}{r^2} \rightarrow \therefore r = \frac{vr}{\omega} = \frac{\lambda \cdot F}{2\pi \cdot F} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{6,28} \cong \boxed{\frac{\lambda}{6} = r}$$

PUNTO C: El Poynting tiene 2 componentes: $P_\theta = -E_r \cdot H_\phi$ y $P_r = E_\theta \cdot H_\phi$. La primera es cero, la segunda es:

$$P_r = \frac{I_c \cdot dL \cdot \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{-\omega \cdot \sin(\omega t)}{r^2} + \frac{\cos(\omega t)}{r^2} \right] \cdot \frac{I_c \cdot dL \cdot \sin \theta}{4\pi \epsilon} \left[\frac{-\omega \cdot \sin(\omega t)}{r^2} + \frac{\cos(\omega t)}{r^2} + \frac{\sin(\omega t)}{r^3} \right]$$

$$= \frac{1}{32 \cdot \epsilon \cdot c} \left(\frac{\omega \cdot I_c \cdot dL \cdot \sin \theta}{\pi r c} \right)^2 = \boxed{\frac{r}{2} \left(\frac{\omega \cdot I_c \cdot dL \cdot \sin \theta}{4\pi \epsilon c} \right)^2 \left[\frac{W}{m^2} \right]} = P_r$$

En donde se tiene en cuenta que $v=c$ y que $\eta=1/\epsilon\epsilon_0$. Resumiendo, la componente de θ del vector de Poynting es nula, pues representa flujo entretenido dentro del campo. Por el contrario, la componente r de Poynting tiene un determinado valor aportado únicamente por los términos de radiación (o inversos a r). A grandes distancias, éstos son los únicos términos que aportan valor a la potencia radiada, aunque también lo hacen en las cercanías.

1- DEFINICIONES	<p>Introducción. Parámetros de una antena. Efecto direccional de una antena.</p>
2- TIPOS DE ANTENAS	<p>Dipolo de onda corta. Antena Yagi. Antena Ringo.</p>
3- OTROS	<p>Asociación de antenas en paralelo. Polarización de una antena. Planos de tierra.</p>

1 - DEFINICIONES

1.1 - Introducción

Una antena es un dispositivo (conductor metálico) diseñado para emitir y/o recibir OEM (de/des) hacia el espacio libre. Tiene 2 funciones:

- convierte voltaje en energía electromagnética (antena transmisor) o viceversa (antena receptor)
- Adapta la impedancia interna del generador a la del espacio.

1.2 - Parámetros de una antena

Los parámetros principales son:

- Impedancias (característica Z_0 , y de entrada Z_e);
- Longitudes (efectiva h_e y l_e , y eléctrica H);
- Coeficientes (de onda o cte de fase β , y de atenuación);
- Resistencias (de radiación R_s , inductancia L_s , capacitancia C_s , y reactancia X_s);
- Factor de calidad Q , y ancho de banda BW y
- Directividad D , y área efectiva A .

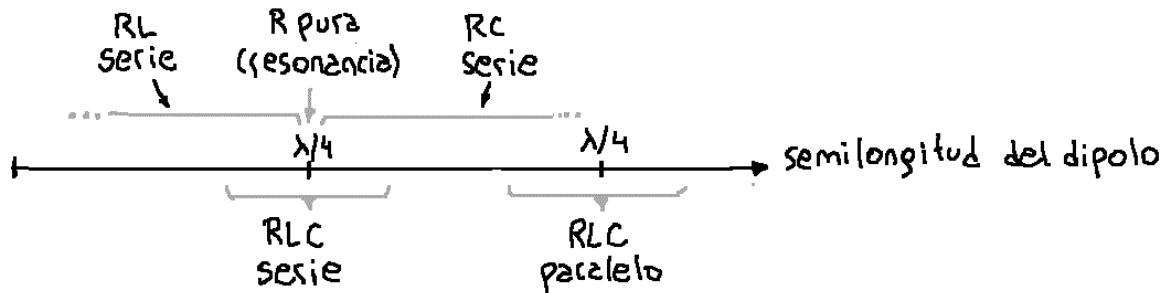
1.2-1: Impedancia característica Z_0 e impedancia de entrada Z_e

La impedancia característica de una antena depende de la relación longitud/diámetro del conductor, de la frecuencia de trabajo. La Z_0 varía a lo largo de la antena, así que se puede hablar de Z_0 punto a punto o Z_0 medio (es el q' se usa x lo gral.) En particular, la Z_0 de un dipolo delgado es:

$$Z_{0p} = 170 \cdot \ln(zr/a)$$

donde "r" es la distancia [m] desde el punto de alimentación al punto considerado, y "a" es el diámetro [m] del conductor.

La impedancia de entrada z_e es la que presenta la antena en su punto de alimentación; se debe conocer bien para su correcta adaptación con la Z del generador. z_e tiene parte real e imaginaria y puede representarse por un circuito RLC con distintos valores y disposición dependiendo cómo sea la relación entre la semilongitud del dipolo y la longitud de onda de trabajo.



Las partes real e imaginaria de z_e de un dipolo son:

$$R_e = z_0 \left[\frac{\operatorname{senh}(2\alpha H)}{\cosh(2\alpha H) - \cos(2\beta H)} \right] \quad X_e = z_0 \left[\frac{-\operatorname{sen}(2\beta H)}{\cosh(2\alpha H) - \cos(2\beta H)} \right]$$

αH es la atenuación en [neper/m]. Si $X_e > 0 \Rightarrow$ reactancia inductiva, caso contrario es capacitiva. El módulo de z_e es

$$|z_e| = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = z_0 \frac{\sqrt{\operatorname{senh}^2(2\alpha H) + \operatorname{sen}^2(2\beta H)}}{\cosh^2(2\alpha H) - \cos(2\beta H)}$$

1.2-2: Longitud efectiva H_e y L_e y longitud eléctrica H

La longitud efectiva es la longitud física a la cual se acorta una antena para lograr una distribución uniforme de la corriente con la misma energía que irradia la antena sin acortar.

$$\text{Monopolo} \rightarrow H_e = \frac{\operatorname{tg}(\beta H_0/2)}{\beta}$$

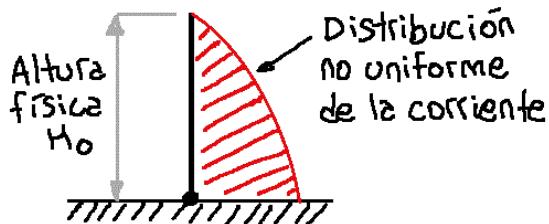
$$\text{Dipolo} \rightarrow L_e = 2H_e$$

donde: H_0 = altura física del dipolo o monopolo en [m].

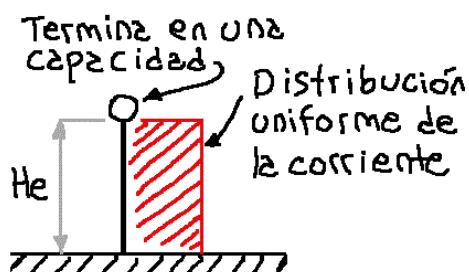
β = constante de fase.



Antena Hertz (dipolo corto terminada en dos capacidades).



Monopolo de altura H .



Mismo monopolo de altura efectiva H_e .

la longitud eléctrica H es la longitud en donde la corriente se hace nula completamente, algo que sucede 5% (dato empírico) de la longitud física más allá. Esto es debido al efecto terminal, el cual se debe a un aumento de la inductancia y disminución de la capacitancia (de la antena) cerca de los extremos.

	<u>monopolio</u>	<u>dipolo</u>
Longitud física =	βH_0 [rad]	$z\beta H_0$ [rad]
Longitud eléctrica =	βH [rad]	$z\beta H$ [rad]

1.2-3: Coeficiente de onda o cte de fase β y coeficiente de atenuación α

La constante de fase β es la cantidad de radianes que le corresponde a un metro de longitud de onda.

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ [rad]}$$

Siendo λ la longitud de onda en [m].

El coeficiente de atenuación determina las pérdidas de energía por metro a lo largo de la antena. Este coeficiente y la atenuación total en un dipolo o monopolio son:

$$\alpha \text{ [neper/m]} = \frac{R_{rv}}{H_0 Z_0} \quad \text{Atenuación total} = \alpha H \text{ [neper]} = \frac{R_{rv}}{H_0}$$

donde R_{rv} es la resistencia a la radiación; y H_0 , la longitud física.

1.2-4: Resistencia de radiación R_{rv} , inductancia L_a , capacidad C_a y reactancia X_a

La resistencia de radiación da una idea de la capacidad de la antena de irradiar al espacio toda la energía que recibe. Su valor en [Ω] es el valor de una resistencia física que disipa la misma energía por la que circula la misma corriente. Este valor puede estar referido a dos puntos: a) al punto por el que circula I_{max} , en este caso es función directa de la potencia radiada; o b) al punto de alimentación, en este caso es la parte imaginaria de z_e .

La R_{rv} depende del cociente H/λ , donde debo recurrir a una tabla para hallar su valor.

La inductancia L_a es la resultante de todas las inductancias distribuidas a lo largo de la antena, su valor es intrínseco al conductor y es:

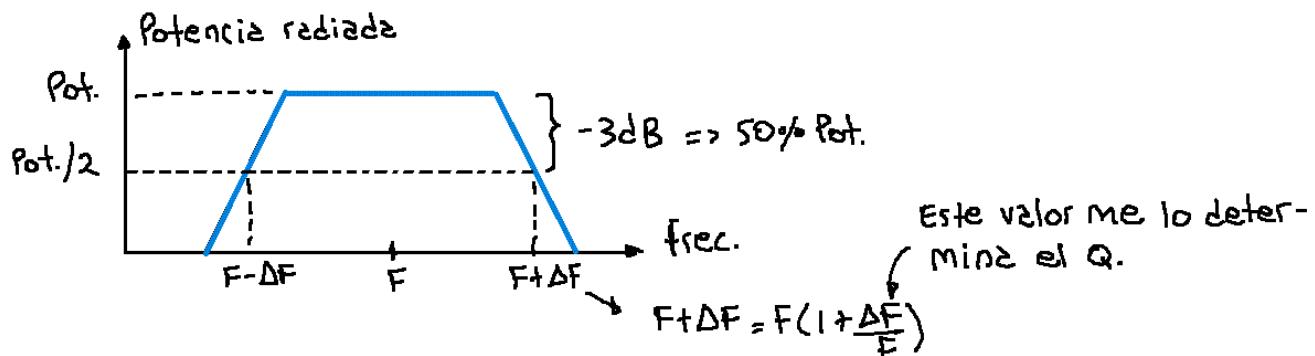
$$L_a = \frac{Z_0}{8F}$$

Lo mismo puedo decir de la capacidad C_a , su valor es:

$$C_2 [F] = \frac{2}{\pi^2 F \cdot Z_0}$$

Por último, la reactancia X_2 es la suma vectorial de ωL_2 y C_2 ; recordar que estos valores están ambos en el eje imaginario pero con signos distintos.

1.2-5: factor de calidad Q y ancho de banda BW



El factor de calidad Q me determina la variación de frecuencia, respecto de la de trabajo ($\Delta F/f$), para que la potencia radiada esté dentro de los límites aceptables (50% de disminución). Q viene dado por:

$$Q = \frac{\pi \cdot Z_0}{4 \cdot R_{PV}}$$

Para hallar el ancho de banda BW hago

$$BW = 2 \Delta F = 2 \cdot \frac{\text{Frec. de resonancia}}{Q}$$

1.2-6: Directividad D y área efectiva A

Los estudios que se le hacen a una antena suponen que su centro coincide con un sistema de coordenadas circulares, y se basan en conocer los campos E y H en un punto situado a una distancia "r" del centro. Como la antena no irradia energía uniformemente, los campos E y H varían si el punto P se mueve por la superficie de una esfera fija. La capacidad de concentrar la energía de los campos E y H en ciertos sectores de la esfera se conoce como ganancia directiva G_d ; al mantener r=fijo, $G_d = f(\theta; \phi)$. La directividad D de una antena es el valor de G_d en la dirección de máxima radiación ($G_{d,max}$).

Tanto D como G_d son f=(potencia media radiada). Si son funciones de la potencia de entrada, entonces D es la ganancia de potencia G_p (en la dirección de radiación máxima). $G_{d,max}$ de un dipolo se calcula como:

$$G_{d,max} = \frac{120}{R_{PV}} [1 - \cos(\alpha H)]^2 \quad \text{donde la potencia radiada es } S[W] \text{ y la intensidad de campo es medida a una distancia unidad.}$$

La relación entre $G_{d,max}$ y G_p es:

$$G_{p,max} = G_{d,max} \cdot \text{Rendimiento de la antena (falto por uno).}$$

La ganancia de una antena se da en [dB] respecto a la ganancia de otra antena considerada como patrón:

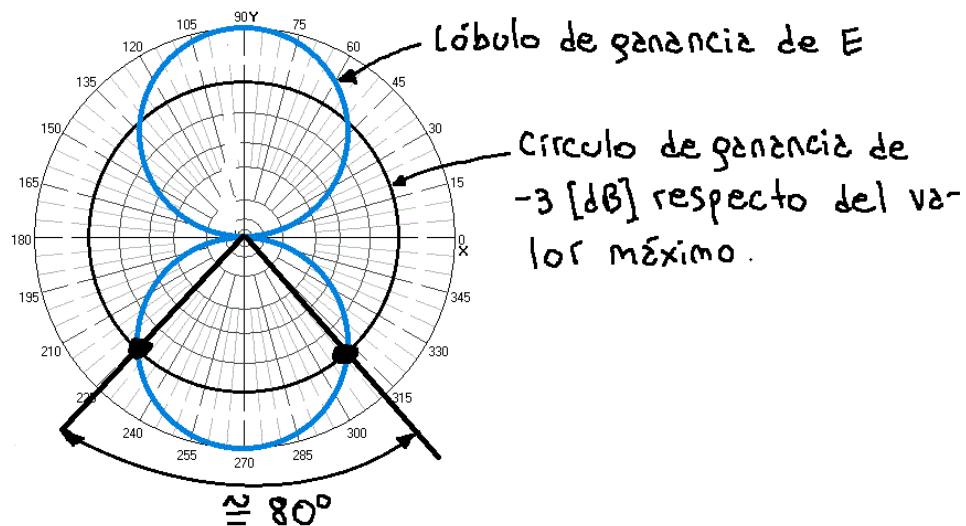
$$G = 10 \cdot \log \frac{G_{d,max} \text{ de la antena de prueba}}{G_{d,max} \text{ de la antena patrón}}$$

La antena patrón suele ser un dipolo de $\lambda/2$ o $\lambda/4$ (depende de la antena de prueba).

Sucede lo mismo que con R_{rv} , el valor de $G_{d,max}$ lo saco de una tabla (o gráfico) en función de H/λ .

Para construir el gráfico de directividad del campo E uso la fórmula:

$$E = \frac{60}{R_{rv}} \left[\frac{\cos(\beta H) - \cos(\beta H \cdot \cos \theta)}{\sin \theta} \right]$$



El área efectiva A de una antena receptora es el cociente entre la potencia disponible en sus terminales y la potencia por unidad de área de una onda polarizada adecuadamente. Se la determina como:

$$A[m^2] = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_{d,max}$$

1.3 - Efecto direccional de una antena

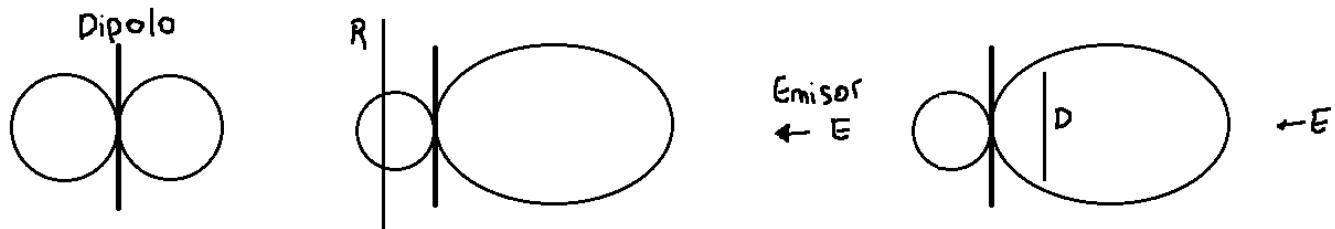
En un dipolo el lóbulo de recepción tiene la forma del símbolo de infinito "∞". Si se coloca a la izquierda del dipolo un elemento R (llamado "reflector") el lóbulo de la derecha crece y el de la izquierda decrece.

funcionamiento: las ondas de la emisora E inducen en el dipolo y R corrientes; y un elemento conductor, al ser atravesado por una corriente, se transforma en emisor. Es decir que el dipolo recibe desde la derecha a las ondas

provenientes de E; y desde la izquierda, las ondas provenientes de R, que son las ondas de E que el dipolo no alcanzó a captar (que son ondas de menor frecuencia que las captadas por el dipolo). El reflector capta las ondas de E y del dipolo, produciendo así un desfase entre las corrientes inducidas.

Como consecuencia, las ondas provenientes desde la derecha se suman (en el dipolo); y las provenientes de la izquierda, se restan casi por completo. El elemento R es más largo que el dipolo, sintonizando frecuencias algo menores que éste, para que la tensión y corriente estén desfasadas.

Otra forma de obtener este mismo efecto direccional es agregando un elemento D, llamado "director", a la derecha del dipolo. El elemento D es algo más corto que el dipolo.



Este efecto direccional se expresa mediante la relación antero-posterior. Es el cociente (expresado en veces o dB) entre la tensión en los terminales del dipolo cuando éste apunte exactamente hacia el emisor y la tensión cuando se lo gire 180° respecto de la posición anterior.

En un dipolo la relación es 1:1; si se le agrega un reflector, es 3:1; y si se le agrega además un director, es 6:1.

2 - TIPOS DE ANTENA

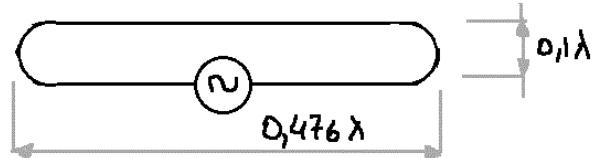
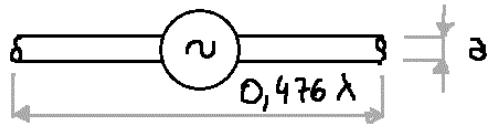
2.1 - Dipolo de onda corta

La antena dipolo es la clase más simple y más usada. Se compone de dos conductores eléctricos (p.e. alambres o varillas de metal) de longitud idéntica; ambos conductores están en el mismo eje y están alimentados (si es una antena receptora, reciben las ondas captadas) en el centro, entre las dos mitades de la antena. Maneja las frecuencias que están en la porción del espectro llamado "onda corta", cuya longitud de onda va desde 10 a 180 [m], o desde 1,7 a 30 [MHz].

La alimentación de la antena se realiza mediante la formación de una onda estacionaria (en este caso se llaman antenas lineales) o por medio de bocinas o guías de onda (antenas de ondas superficiales).

Hay dos tipos de dipolos: el simple y el compuesto. El dipolo simple consta de un elemento conductor de longitud $0,476\lambda$ y radio " a " alimentado en su centro. El valor de " a " depende de la Z_0 en el punto de excitación.

El dipolo compuesto consta de dos elementos conductores en paralelo. Esto duplica la potencia de recepción y permite usar la línea bifilar de $300\text{ }\Omega$ para la alimentación.



Si se supone que R_{11} y R_{22} son las resistencias de cada varilla y R_{12} y R_{21} son las resistencias mutuas, entonces si las mismas tienen el mismo diámetro y están muy próximas entre sí, se cumple que $R_{11}=R_{12}=R_{21}=R_{22}$.

La potencia total en las dos varillas será la suma de la potencia en cada una.

$$W_T = W_1 + W_2 = (R_{11} + R_{12}) I_1^2 + (R_{22} + R_{21}) I_2^2 = (4 \cdot R) I^2$$

- Todas las R son iguales. Este valor es el del elemento dipolo y es $73,5\text{ }\Omega$
- $I_1=I_2$ por tratarse del mismo conductor

De esta fórmula puedo decir que el dipolo tiene una resistencia equivalente de 4 veces la resistencia de cada varilla: $R_{eq}=4 \cdot 73,5 = 294\text{ }\Omega$.

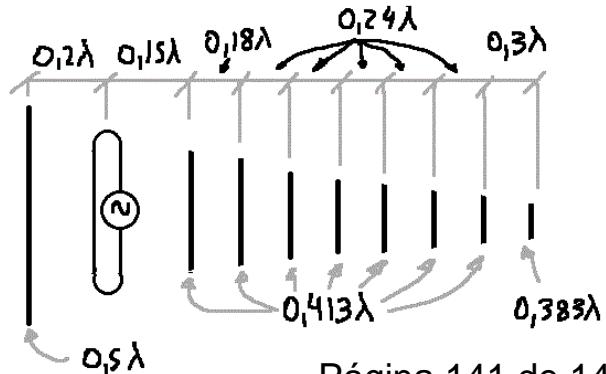
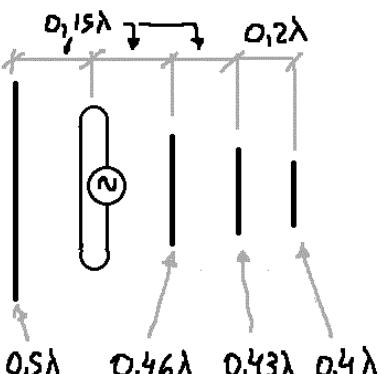
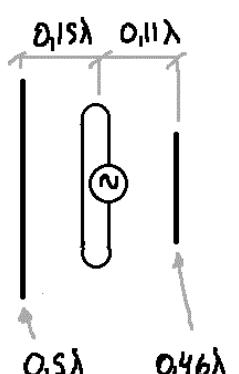
2.2 - Antena Yagi

La antena Yagi es un derivado de la antena dipolo de onda corta, pues consta de uno o varios dipolos de onda corta para la transmisión o recepción (llamados elementos activos) y varios directores y/o reflectores (elementos pasivos).

La ganancia total está dada por:

$$G[\text{dB}] = 10 \cdot \log n \quad \text{donde "n" es el número de elementos.}$$

En la figura se muestran las antenas Yagi de 3, 5 y 10 elementos. La separación y longitud de los elementos pasivos son empíricos, con estos se logra un rendimiento óptimo, ya que de otra forma los campos de los elementos interseccirían anulándose entre sí y así bajarían la ganancia.



3.1 - Asociación de antenas en paralelo

Si se colocan dos antenas en paralelo se duplica la ganancia. Por lo general, se suelen colocar a $\lambda/2$ entre sí con la alimentación a $\lambda/4$ entre ellos; el número de elementos debe ser el mismo para ambas antenas.

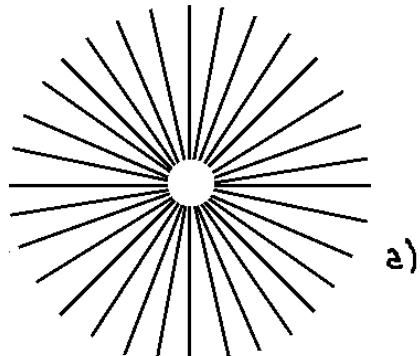
3.2 - Polarización de una antena

Esta sub-sección es la misma que la del mismo nombre en la unidad 5: Polarización.

3.3 - Planos de tierra

En una antena real, la resistencia del suelo se suma a la impedancia de entrada de la antena, disminuyendo el rendimiento de la misma. Por tal motivo, se debe crear una tierra superficial; la cual idealmente es un anillo de cobre de radio infinito. Como esto no es posible, se usan los planos a tierra.

El plano de tierra, o contra-antena, consiste en un número de LT abiertas con $H = \lambda/4$ y $Z \approx 0$; que al ser resonantes con F y estar en paralelo con Z_{tierra} hacen disminuir esta última a casi cero. Cada semilongitud (o radial) debe tener una $H_0 \approx 0,95 \cdot H$ para que con su inductancia en los extremos compense la capacitancia adicional de la tierra debido a la proximidad con la misma.



a)

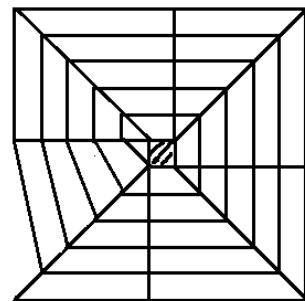


Figura 8

b)

El BW de la antena está limitado por los radiales, los cuales deben ser los más numerosos y gruesos posibles para minimizar esta limitación. El mínimo de radiales que se pueden conectar es 1 (figura 8a). Cuando no se dispone de espacio se puede usar el plano de la figura 8b, el cual sólo está condicionado a la altura del monopolo. La figura 9 muestra los planos para una antena en L invertida y en T.

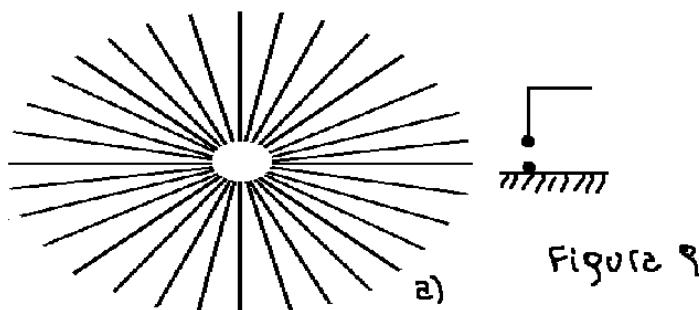
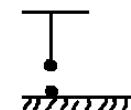
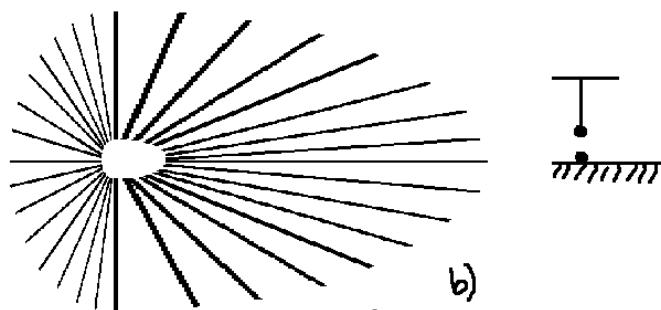


Figura 9



b)

1- DEFINICIONES

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Introducción.} \\ \text{Índice de refracción.} \\ \text{Apertura numérica (AN).} \end{array} \right.$

2- ATENUACIÓN EN UNA FO

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pérdidas por absorción del material.} \\ \text{Pérdidas por dispersión del material.} \end{array} \right.$

3- OTROS

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fuentes de luz.} \\ \text{Sistemas de transmisión.} \\ \text{Análisis de oportunidad de una FO.} \end{array} \right.$

1- DEFINICIONES

1.1- Introducción

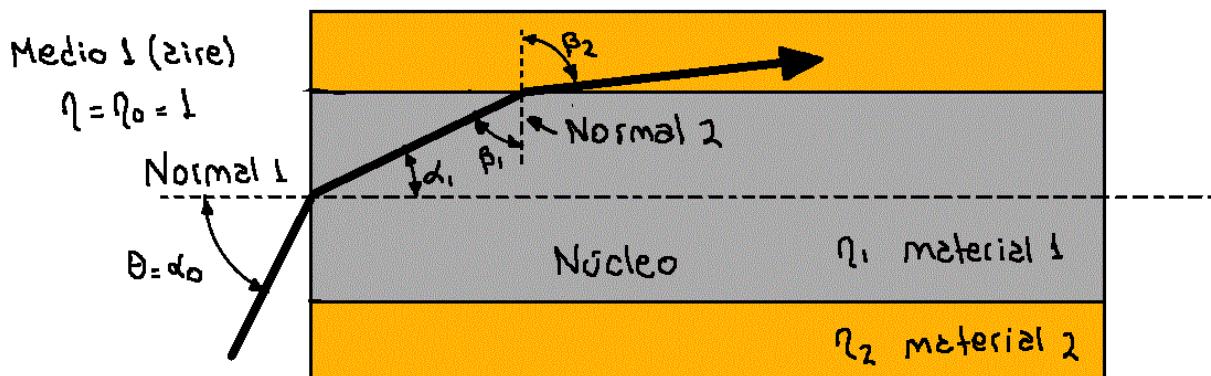
Una fibra óptica (FO) es un conductor (de vidrio o de plástico, flexible o rígido) que puede transmitir un haz de luz que se introduce por uno de sus extremos para salir por el otro. El haz se mantiene dentro de la FO por medio de sucesivas reflexiones internas.

1.2- Índice de refracción

El índice de refracción de un medio es el cociente entre las velocidades de propagación de la luz en el vacío y en el medio en cuestión. Para que se dé la reflexión interna en una FO se debe cumplir:

- El haz incidente debe provenir de un medio más denso (ópticamente)
- El ángulo de ese haz con la superficie de separación debe ser menor que cierto ángulo crítico, el cual depende de los η de los materiales de la FO.

1.3- Apertura numérica



Supongo una FO como la de la figura en donde entra un rayo incidente con un ángulo θ . Cuando el rayo incidente pasa del aire al medio 1, su ángulo respecto a la normal 1 disminuye, pues $n_1 > n_0$; y se cumple la ley de Snell.

$$n_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha_0 = n_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1 \quad (\text{ec.1})$$

La ley también se cumplió cuando el haz pase del medio 1 al medio 2, sólo que ésta vez el rayo se alejará de la normal 2 pues $n_2 < n_1$.

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \beta_1 = n_2 \cdot \operatorname{sen} \beta_2 \quad (\text{ec.2})$$

Despejo $\operatorname{sen} \alpha_1$ de ec.1 y $\operatorname{sen} \beta_1$ de ec.2, las elevo al cuadrado y las sumo. Como α_1 y β_1 son ángulos complementarios, este suma me da igual a uno.

$$\text{de ec.1: } \therefore \operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{n_0}{n_1} \operatorname{sen} \alpha_0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha_1 = \left(\frac{n_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha_0}{n_1} \right)^2$$

$$\text{de ec.2: } \therefore \operatorname{sen} \beta_1 = \frac{n_2}{n_1} \operatorname{sen} \beta_2 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta_1 = \left(\frac{n_2 \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{n_1} \right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \operatorname{sen}^2 \beta_1 = \frac{n_2^2 \operatorname{sen}^2 \beta_2 + n_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{n_1^2} = 1$$

De esta ecuación despejo $\operatorname{sen} \alpha_0$

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2 \operatorname{sen}^2 \beta_2}{n_0^2}}$$

Aquí, $n_0 = 1$ pues se trata del aire. Analizamos el caso para el que $\beta_2 = 90^\circ$, pues si $\beta_2 > \theta$ tengo reflexión interna; si $\beta_2 < \theta$ no la tengo.

$$\boxed{AN = \operatorname{sen} \theta_2 = \operatorname{sen} \alpha_0 \Big|_{\begin{array}{l} n_0=1 \\ \beta_2=90^\circ \end{array}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

El seno del ángulo θ_2 se llama "apertura numérica" AN, siendo θ_2 el máximo ángulo de entrada que permite una reflexión interna.

1.3-1: Modos de propagación

Teniendo AN se puede definir a la "frecuencia normalizada" V como

$$V = \frac{2\pi \cdot d}{\lambda} AN$$

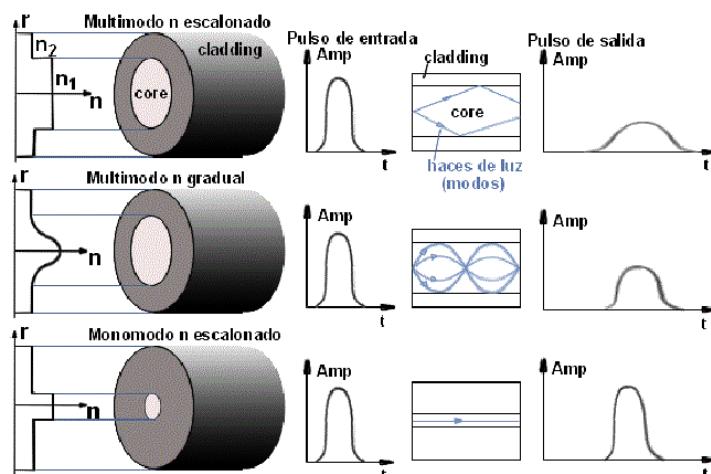
donde "d" es el diámetro del núcleo y " λ " es la longitud de onda del rayo incidente. Se define ahora a los modos de propagación como las trayectorias que puede seguir el rayo incidente dentro del núcleo de una FO. Esto de lugar a dos tipos de fibras: fibras mono-modo y fibras multi-modo. Al número de modos de propagación se lo define como:

$$N = \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} (n_1^2 - n_2^2)$$

- Fibres multi-modo: los haces de luz van por varios caminos y no llegan a la vez. Los caminos pueden ser más de 1000. Son usadas en aplicaciones de corta distancia (menores a los 2 Km). Debido al gran tamaño del núcleo son fáciles de conectar y tiene una mayor tolerancia a los componentes de menor precisión. Según el η del núcleo se tiene:

- índice escalonado: el índice es constante en todo el ancho del núcleo; tiene una alta dispersión nodal. Los diferentes retardos de los haces limitan las tasas de información.
- índice gradual: el índice no es constante, va disminuyendo conforme se aleja del eje de la FO; tiene menos dispersión nodal y el núcleo está hecho de varios materiales. Esto proporciona iguales retardos disminuyendo la dispersión.

- Fibres mono-modo: se propaga un solo haz de luz. Se logra reduciendo el diámetro del núcleo hasta aprox. 10 micrones. El haz es paralelo al eje de la FO. Se las usa en distancias de hasta 400 Km y cuando se requieren grandes tasas de información. Teóricamente sólo un haz debería pasar y no debería haber dispersión en la superficie, pero el reducido núcleo no adapta bien el haz incidente que entra al cable, lo cual provoca una pequeña dispersión en el núcleo. Además, la fuente de luz no es monocromática, así que existe dispersión debido a las distintas ν_p de las ondas que componen el espectro cromático.



Aumentando AN mejora la emisión, pero aumentan los N que inciden desfavorablemente en la propagación. El aumento de AN también disminuye el BW.

2- ATENUACIÓN EN UNA FO

Hay dos tipos de pérdidas: las lineales y las no lineales. Estas últimas dependen del nivel de señal e imponen un límite en la potencia a usar; y cuyos efectos buscan minimizarse con el diseño. Respecto de las pérdidas lineales se tienen:

- Por absorción del material.
- " dispersión " "
- Acoplamiento del modo al campo de radiación: son ocasionadas por la manipulación mecánica de la FO cuando se las acopla.
- Radiación debida a las curvas: su origen está en el diseño de la FO.
- Modos de fuga: son modos que por su obviedad no se logran transmitir y se pierden lentamente durante la propagación.

2.1- Pérdidas por absorción del material

En el vidrio, la absorción de energía se produce por:

- Interacción entre fotones y moléculas que vibran (en infrarrojo).
- Límite de absorción fundamental debido a los e⁻ que vibran con frecuencias cercanas al ultravioleta.
- Concentración y estado de oxidación de impurezas.
- Presencia de hidroxilo (OH).
- Faltas estructurales del material.

2.2- Pérdidas por dispersión del material

Pueden ser provocadas por 2 causas:

- La falta de homogeneidad del material: provoca $\Delta\eta \Rightarrow$ dispersión del λ transmitido. La atenuación es proporcional a $1/\lambda$ y tiene un valor límite; en cambio el ángulo de dispersión es más bien difuso.
- La conversión de luz en calor: producida por iones de transmisión y moléculas de H₂O en el núcleo de la FO. Esta atenuación se logró reducir a 1 dB/Km en la actualidad.

El vidrio dieléctrico es bastante resistente pero no tanto como para soportar el manejo si es un cable individual; por esto se lo agrupa en forma de cables.

3.1- Fuentes de luz

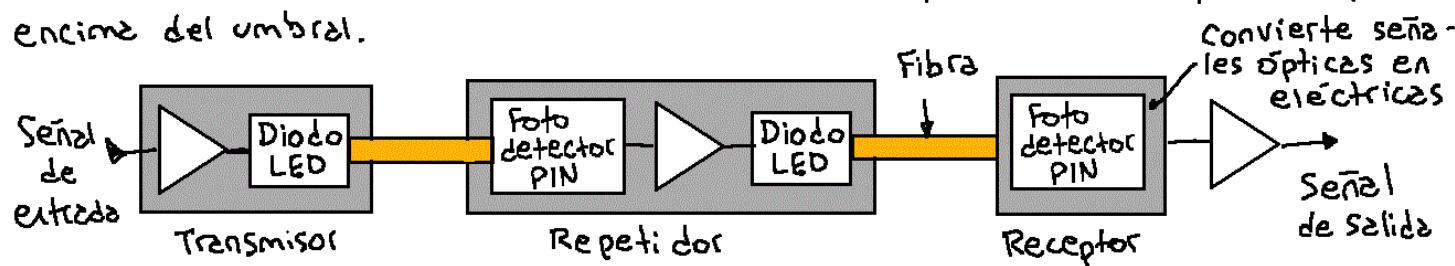
BÁSICAMENTE SON DOS: el LED de GaAs y el láser semiconductor.

El LED de arsenurio de galio es una unión PN polarizada directamente que proporciona una fuente de luz coherente (onda que se puede predecir). La diferencia de energía entre las bandas de energía y de conducción determina la energía y λ (≈ 850 nm) de los fotones. Es económico, funciona a baja temperatura. Maneja potencias hasta 1mW.

El láser es una fuente semi-coherente con alta radiación. Maneja potencias desde 3 a los 5 W. Su corriente umbral de excitación es de 0,1 A con una salida de 0,12 o 0,13 A. Maneja más potencia que el LED pero tiene menos vida útil y su excitación es más compleja.

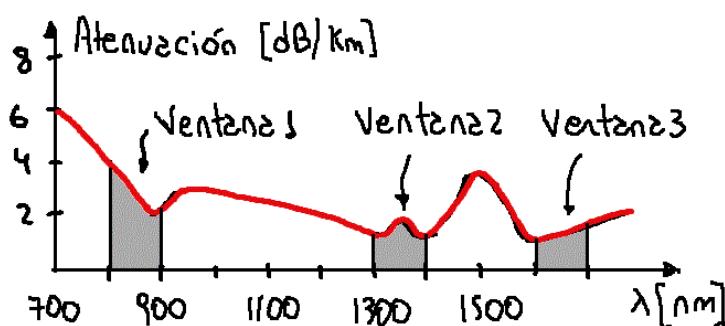
3.2 - Sistemas de transmisión

El sistema básico es el de la figura. El repetidor está para reforzar la señal. La modulación por impulso codificado es la más usada; se hace conducir directamente al láser una corriente modulada que conviene que esté por encima del umbral.



3.3- Análisis de oportunidad de un sistema por FO

El objetivo de este análisis es para saber si conviene o no usar FO. El siguiente gráfico muestra la atenuación en función de λ , se pueden ver 3 ventanas útiles y los puntos de absorción debido al hidroxilo (OH).



Ventajas y costos de una FO:

- Menores pérdidas de potencia;
- Inmunidad al ruido;
- Dimensiones reducidas;
- Seguridad;
- Aislamiento eléctrico;
- Gran BW;
- Bajo costo y mayor calidad.

Ejercicio N°

DIAGRAMA DE CRANK

$$R_1 = [52], \Omega_2 =$$

$$E_i = [V/m], P_E =$$

$$E_f = [V/m]$$

$$F = [Hz], \lambda = [m]$$

$$\beta = [rad/m] = [^{\circ}/m]$$

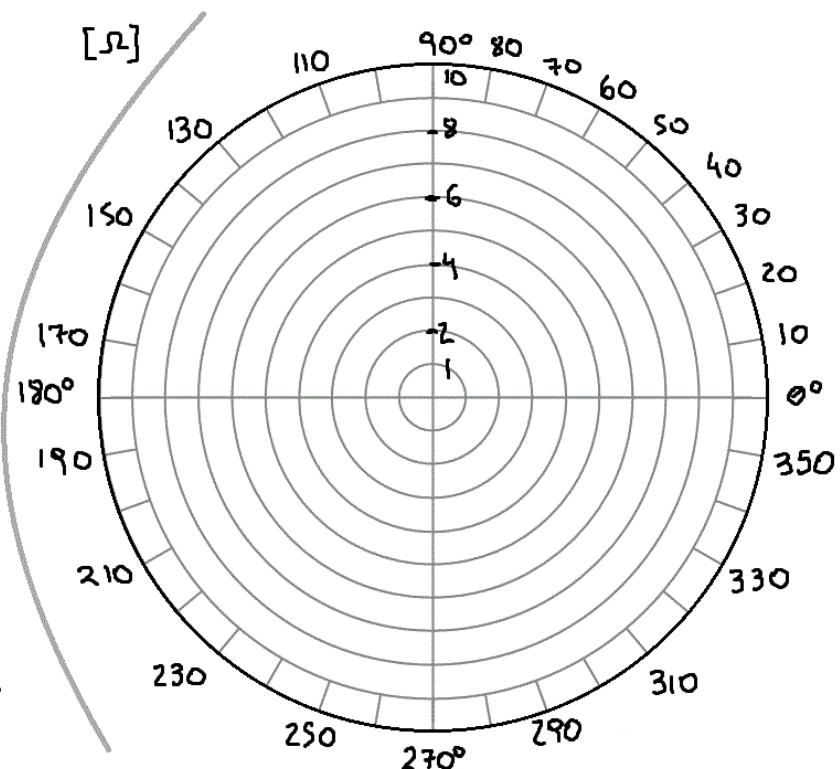
Distancia al máximo

$$\theta_{ZM} = [\lambda], Z_M = [m]$$

Distancia al mínimo

$$\theta_{Zm} = [\lambda], Z_m = [m]$$

R.O.E. =



Z	$8\lambda/16$	$7\lambda/16$	$6\lambda/16$	$5\lambda/16$	$4\lambda/16$	$3\lambda/16$	$2\lambda/16$	$\lambda/16$	\emptyset
$\theta_r - \theta_z$									
E_T									

