



MEDIOS DE ENLACE

PRIMERA PARTE: CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

TEORÍA DE CAMPOS

Nociones Básicas

Líneas de Flujo:

Las líneas de flujo son representaciones gráficas de los campos vectoriales. Las mismas son siempre tangentes al vector campo en todos los puntos. La densidad de las líneas de flujo representa la magnitud del campo vectorial considerado.

Criterio de unicidad: las líneas de flujo no pueden cortarse entre sí.

Pulíafito Parte I Pág.: I-2

Flujo:

El flujo total de un campo, ligado a una cierta superficie finita “S”, vale:

$$\phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

siendo \vec{F} el vector que representa al campo y $d\vec{S}$ es el vector diferencial de superficie (normal al plano tangente a ella en cada punto). Como **convención** se toma para el diferencial de superficie el sentido positivo para la cara donde sale la normal. Para una superficie cerrada se considera que la normal apunta hacia fuera, por lo que el flujo saliente será positivo y el entrante negativo.

Pulíafito Parte I Pág.: I-2

Divergencia:

Se define como divergencia de un vector \vec{F} a la siguiente relación:

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{d\phi}{d\tau}$$

El resultado de ésta operación vectorial da un valor escalar, que representa la variación que experimenta el flujo de campo al interaccionar con una superficie cerrada elemental.

Pulíafito Parte I Pág.: I-5

Teorema de Gauss:

Consideremos un cierto volumen finito τ , delimitado por una superficie cerrada S , con una cantidad neta de causas del campo Q en su interior. El teorema de Gauss dice que:

$$\phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{F} \cdot d\tau = Q$$

Es decir que es lo mismo integrar un vector en una cierta superficie cerrada que integrar la divergencia de ese vector en el volumen encerrado por dicha superficie. Ésta relación vincula la componente irrotacional del campo con la causa que la produce.

Pulíafito Parte I Pág.: I-7

Circulación:

Definimos como trabajo a la integral de línea de la fuerza desde un punto a a otro b del espacio:

$$l = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

siendo $d\vec{s}$ el diferencial de arco (camino).

Si la trayectoria considerada fuera una curva cerrada C , estaríamos evaluando la **circulación** del campo, que se define como:

$$l = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Pulíafito Parte I Pág.: I-12

Rotor:

Se define como rotor de un vector \vec{F} a la siguiente relación:



$$\overline{\text{rot}}(\overline{F}) = \overline{\nabla} \times \overline{F} = \overline{J}$$

El resultado de ésta operación vectorial da un valor vectorial, que representa la causa que origina la componente rotacional del campo. Llamamos a éste vector **vórtice** del campo.

Pulíafito Parte I Pág.: I-25

Teorema de Stokes:

Consideremos una curva cerrada C , contorno de una superficie abierta S , atravesada por una corriente eléctrica \overline{I} . El teorema de Stokes dice que:

$$\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{S} = \iint_S (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot d\overline{S} = \overline{I}$$

Es decir que la circulación de un vector de campo a lo largo de un contorno de una superficie abierta es igual al flujo del vórtice del campo a través de dicha superficie, o de cualquier otra que tenga el mismo contorno. Ésta relación vincula la componente rotacional del campo con la causa que la produce.

Pulíafito Parte I Pág.: I-26

Gradiente:

Se define como gradiente de una función escalar V a la siguiente relación:

$$\overline{\text{grad}}(V) = \overline{\nabla} V = -\overline{F}$$

El resultado de ésta operación vectorial da un vector, que representa con su dirección la máxima variación del campo y con su módulo el valor del módulo de la componente irrotacional del campo.

Pulíafito Parte I Pág.: I-21

Laplaciano:

Se define como laplaciano de una función escalar V a la siguiente relación:

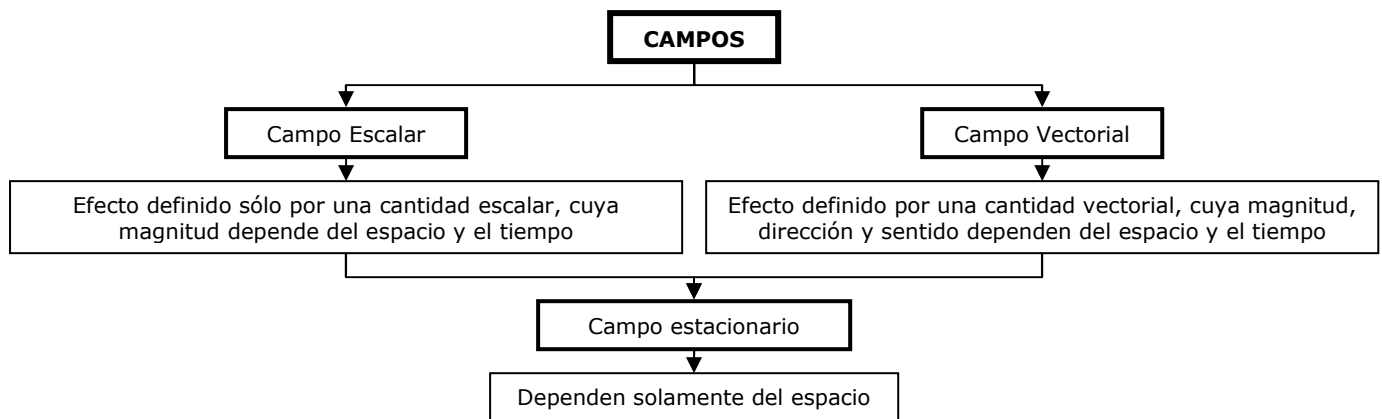
$$\text{lap}(V) = \overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla} V) = \nabla^2 V = -\rho$$

El resultado de ésta operación vectorial da un escalar, que representa la función densidad de fuentes irrotacionales en una región del espacio. Ésta relación vincula directamente la función potencial escalar con la causa que la produce.

Pulíafito Parte I Pág.: I-31

Clases de Campos Vectoriales

Clasificación general:



Potenciales:

Este tipo de campo vectorial se caracteriza por tener líneas de flujo con un principio y un fin. Existen discontinuidades del campo cuando encontramos una fuente o sumidero.

Pulíafito Parte I Pág.: I-8

Función Potencial Escalar:

Para que un campo vectorial sea conservativo, se puede definir una función potencial escalar $V(x, y, z)$ tal que su variación elemental sea igual (a menos de un signo convencional) a la variación de trabajo elemental que realiza el campo sobre una unidad de prueba:

$$dV = -dl$$



Matemáticamente podemos decir que el diferencial de trabajo debe ser un diferencial total exacto. El signo menos indica que si el desplazamiento de una unidad de prueba se hace desde un punto de mayor a otro de menor potencial, el trabajo será positivo, pues contribuye al movimiento de la misma, y viceversa. En el caso de trabajo negativo, el signo se debe a que es necesaria la intervención de un agente externo que realice éste trabajo, que es contrario al campo.

Puliafito Parte I Pág.: I-13

Como hemos definido, la función potencial es de magnitud escalar, por lo que es conveniente usarla debido a que tiene ciertas ventajas, a saber:

- Conocida la función, puedo conocer el campo por simples operaciones escalares.
- Las funciones potenciales pueden adicionarse escalarmente.

Puliafito Parte I Pág.: I-18

Se pueden definir **superficies equipotenciales** considerando los puntos en donde la función potencial tiene el mismo valor (constante). Dichas superficies son únicas, es decir, que no pueden interceptarse entre sí. Una propiedad geométrica de las superficies equipotenciales es que las líneas de flujo las interceptan siempre en forma normal. Esto se deduce de saber que el gradiente define la máxima variación del campo, que es la recta normal a una superficie equipotencial.

Puliafito Parte I Pág.: I-19

Condiciones de existencia:

Las condiciones **necesarias** para que exista una función potencial escalar son:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Puliafito Parte I Pág.: I-15

Propiedades:

- La circulación del campo es siempre nula, debido a que el trabajo no depende de la trayectoria, sino de los puntos inicial y final.
- Los campos potenciales o conservativos son **irrotacionales**, es decir:

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

Puliafito Parte I Pág.: I-14

Puliafito Parte I Pág.: I-25

Solenoidales:

Este tipo de campo se caracteriza por tener líneas de flujo continuas formando caminos cerrados. Las causas que lo originan son vectoriales y se denominan vórtices, torbellinos o rotores.

Puliafito Parte I Pág.: I-25

Función Potencial Vectorial:

Supongamos un campo rotacional \vec{F} tal que:

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{J}$$

Definir una función potencial escalar para éste tipo de campo sería ambiguo, porque no existen potenciales unívocos. Sería lógico suponer que como la fuente de estos campos es vectorial, existirá una **función potencial vectorial** \vec{A} que se relacione directamente con las causas del campo. Relacionaremos a ésta función con el campo a través de la operación rotor:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{F}$$

Por lo tanto, podemos vincular la función potencial vectorial con la densidad de corriente (causa del campo) mediante la siguiente relación:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{J}$$

Del análisis matemático surge que:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \vec{J}$$



Por otra parte, podemos establecer una condición adicional válida para campos estacionarios, conocida como “*condición de Coulomb*”:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Entonces, **para campos rotacionales estacionarios**, la relación que vincula la función potencial vectorial con la densidad de corriente es:

$$-\nabla^2 \vec{A} = \vec{J}$$

La dependencia se da en que el camino de integración de la función es donde evaluamos la densidad de corriente. Si dicho camino no encierra fuentes, la ecuación anterior se iguala a cero.

Pulíafito Parte I Pág.: I-32

Propiedades:

- La divergencia del vector de campo es siempre nula: $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, por ser las líneas de flujo cerradas, sin principio ni fin.
- El flujo total ligado a una superficie abierta S depende solamente de su contorno C .
- El flujo total que atraviesa una sección cualquiera de un tubo de flujo es constante, dado que no existen causas para la creación o pérdida de líneas de flujo.

Pulíafito Parte I Pág.: I-10

Sistemas de Coordenadas

Sistema General:

Parámetros del sistema:

$$\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3$$

Elemento diferencial de arco:

$$d\vec{s} = \mathbf{e}_1 \cdot du_1 \cdot \hat{u}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot du_2 \cdot \hat{u}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot du_3 \cdot \hat{u}_3$$

Gradiente:

$$\nabla V = \frac{1}{\mathbf{e}_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{\mathbf{e}_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{\mathbf{e}_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \hat{u}_3$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3} \left[\frac{\partial (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \cdot A_{u_1})}{\partial u_1} + \frac{\partial (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \cdot A_{u_2})}{\partial u_2} + \frac{\partial (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot A_{u_3})}{\partial u_3} \right]$$

Rotor:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\hat{u}_1}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3} & \frac{\hat{u}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3} & \frac{\hat{u}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ \mathbf{e}_1 \cdot A_{u_1} & \mathbf{e}_2 \cdot A_{u_2} & \mathbf{e}_3 \cdot A_{u_3} \end{vmatrix}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$$

Pulíafito Parte I Pág.: I-35

Sistema Cartesiano:

Parámetros del sistema:

$$\mathbf{e}_1 = 1 \quad \mathbf{e}_2 = 1 \quad \mathbf{e}_3 = 1$$

Elemento diferencial de arco:

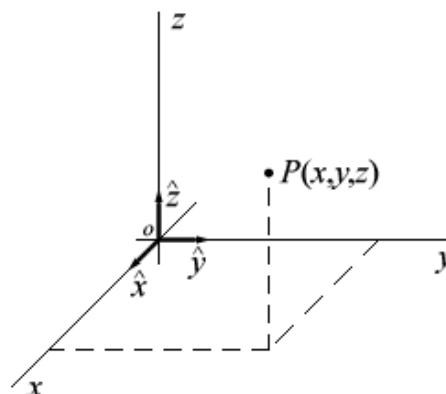
$$d\vec{s} = dx \cdot \hat{x} + dy \cdot \hat{y} + dz \cdot \hat{z}$$

Gradiente:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$




Rotor:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Puliafito Parte I Pág.: I-35

Sistema Cilíndrico:
Parámetros del sistema:

$$\mathbf{e}_1 = 1 \quad \mathbf{e}_2 = \rho \quad \mathbf{e}_3 = 1$$

Elemento diferencial de arco:

$$d\vec{s} = d\rho \cdot \hat{\rho} + \rho \cdot d\phi \cdot \hat{\phi} + dz \cdot \hat{z}$$

Gradiente:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Divergencia:

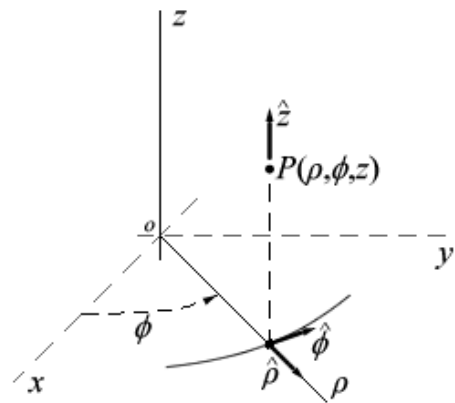
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho \cdot A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho \cdot A_z)}{\partial z} \right]$$

Rotor:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho \cdot A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$



Puliafito Parte I Pág.: I-35

Sistema Esférico:
Parámetros del sistema:

$$\mathbf{e}_1 = 1 \quad \mathbf{e}_2 = r \quad \mathbf{e}_3 = r \cdot \sin \theta$$

Elemento diferencial de arco:

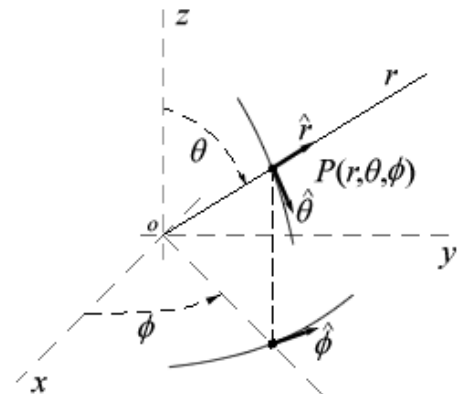
$$d\vec{s} = dr \cdot \hat{r} + r \cdot d\theta \cdot \hat{\theta} + r \cdot \sin \theta \cdot d\phi \cdot \hat{\phi}$$

Gradiente:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \left[\frac{\partial(r^2 \cdot \sin \theta \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \cdot \sin \theta \cdot A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(r \cdot A_\phi)}{\partial \phi} \right]$$




Rotor:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ r^2 \cdot \sin \theta & r \cdot \sin \theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r \cdot A_\theta & r \cdot \sin \theta \cdot A_\phi \end{vmatrix}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Puliafito Parte I Pág.: I-35

CAMPO ELECTROSTÁTICO

El **campo electrostático** es un caso particular de un campo más general: el campo electromagnético. Éste último contempla todos los casos, de régimen dinámico y estático.

Características

Causa o fuente:

El campo eléctrico es producido por cargas eléctricas y, en particular, el campo electrostático es producido por cargas eléctricas en reposo. Las características del campo dependen de la distribución espacial (discreta o continua) de la carga.

Tipo de campo:

Las líneas de fuerza o de flujo del campo electrostático siempre comienzan en cargas positivas y terminan en cargas negativas, por lo tanto, el campo es **vectorial irrotacional**. Como sabemos, todos los campos irrotacionales son campos **potenciales o conservativos**.

Leyes experimentales y definiciones

Ley de Coulomb:

En un medio homogéneo (sin condiciones de contorno), dos cargas eléctricas puntuales (sin volumen) q_1 y q_2 separadas entre sí una distancia r producen entre sí una fuerza de atracción o repulsión, según sea el signo de las cargas en juego, que obedece la siguiente ley experimental:

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r}$$

donde \hat{r} es el vector unitario (versor) que representa la dirección de la recta sobre la cual se ubican las cargas; ϵ es la **constante dieléctrica** del medio, que resulta de multiplicar la constante dieléctrica del vacío

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ por una constante dieléctrica relativa (ϵ_r), que depende del medio, de tal manera de obtener:

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

La constante $\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$ (para el caso del vacío) se puede resumir en un número fácil de recordar:

$$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{m}{F} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Las cargas en la fórmula de Coulomb llevan su signo correspondiente, con lo cual, si son **cargas opuestas**, la magnitud de la fuerza dará **negativa**, es decir que habrá **atracción**. Caso contrario, para **cargas iguales**, la magnitud será **positiva** y habrá **repulsión**.

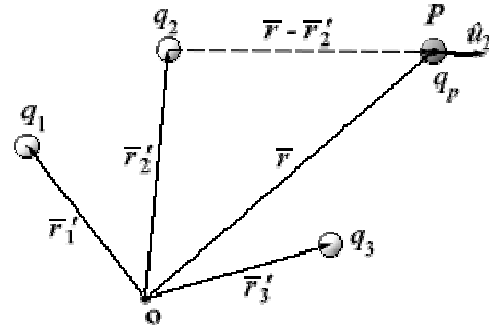
Puliafito Parte I Pág.: II-1

Caso de n cargas discretas:

Para el caso de n cargas discretas ubicadas en el espacio (medio homogéneo con constante dieléctrica ϵ), la fuerza resultante sobre una carga q_p , es:



$$\vec{F}_p = \frac{q_p}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i')}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3}$$



Cabe destacar que el exponente cúbico del denominador se debe a un módulo del vector diferencia extra, que proviene del versor en la dirección de dicho vector, que es:

$$\hat{u}_i = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i')}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|}$$

Pulíafito Parte I Pág.: II-3

Intensidad de campo eléctrico:

La intensidad de campo eléctrico en un cierto punto es una medida de la fuerza que ejercería el campo sobre una carga unitaria ubicada en dicho punto. Por definición entonces, la intensidad de campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_p(\vec{r})}{q_p} \quad [E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

Pulíafito Parte I Pág.: II-4

Caso de n cargas discretas:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i')}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3}$$

Pulíafito Parte I Pág.: II-4

Caso de distribución continua de carga eléctrica:

Para el caso de una distribución continua de carga el campo eléctrico en un punto del espacio es en todos los casos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i')}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3} dq$$

El diferencial de carga, el tipo de integral y el campo se definirán de acuerdo al tipo de distribución como sigue:

	<i>Distribución volumétrica</i>	<i>Distribución superficial</i>	<i>Distribución lineal</i>
Función de distribución	$\rho(\vec{r}')$	$\sigma(\vec{r}')$	$\lambda(\vec{r}')$
Diferencial espacial	$d\tau'$ (diferencial de volumen)	dS' (diferencial de superficie)	ds' (diferencial de camino)
Diferencial de carga	$dq = \rho(\vec{r}')d\tau'$	$dq = \sigma(\vec{r}')dS'$	$dq = \lambda(\vec{r}')ds'$
Expresión del campo eléctrico	$\vec{E} = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}_i')}{4\pi\epsilon \vec{r} - \vec{r}_i' ^3} d\tau'$	$\vec{E} = \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}_i')}{4\pi\epsilon \vec{r} - \vec{r}_i' ^3} dS'$	$\vec{E} = \int_s \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}_i')}{4\pi\epsilon \vec{r} - \vec{r}_i' ^3} ds'$

Pulíafito Parte I Pág.: II-5

Densidad de flujo electrostático:

La densidad espacial de líneas de flujo será una medida de la intensidad del campo en cada región del espacio.

Se define un vector **densidad de flujo electrostático** \vec{D} , cuya magnitud es proporcional al número de líneas de flujo que penetran por unidad de área normal a la dirección del flujo y cuya dirección coincide con la del vector intensidad de campo eléctrico en ese lugar, es decir, tangente a las líneas de flujo. La expresión matemática es la que sigue:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad [D] = \frac{C_{\text{flujo}}}{m^2}$$



Nótese que la densidad de flujo electrostático de un campo es la misma, independientemente del medio en que se encuentre dicho campo. Esto se debe al factor ϵ , que se cancela con el que está en el denominador de la expresión de campo eléctrico, y por lo tanto, hace que el vector no dependa del medio.

Pulíafito Parte I Pág.: II-7

Potencial escalar:

Al ser el campo electrostático de tipo conservativo, admite una función potencial escalar que define las características del campo en cada punto.

El potencial escalar producido en un cierto punto por una carga puntual q se describe mediante la siguiente expresión:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Vemos que el potencial disminuye a medida que me alejo de la carga puntual. Esto definirá superficies equipotenciales esféricas (debido a la dimensión puntual de la carga).

Pulíafito Parte I Pág.: II-13

Potencial de una distribución discreta de cargas:

Como ya vimos, la ventaja de la función potencial es la facilidad del trabajo con una magnitud escalar. Este principio permite definir el potencial de una distribución discreta de cargas como la *suma escalar* de los potenciales producidos por cada carga puntual:

$$V_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Pulíafito Parte I Pág.: II-14

Potencial de una distribución continua de carga:

La misma consideración del caso anterior se tiene en cuenta aquí, con la diferencia que ahora será una integral escalar:

$$V_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

Reemplazando las funciones de distribución, tipos de integral y regiones de integración por los casos vistos para la intensidad de campo eléctrico, encontramos el potencial producido por cualquier distribución continua de carga.

Pulíafito Parte I Pág.: II-16

Relaciones

Relación entre la causa y el campo: Ley de Gauss:

Según la ley de Gauss, la divergencia del vector densidad de flujo electrostático es igual a la densidad volumétrica de carga, o sea:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

La integral de ρ en un cierto volumen, es igual a la carga neta encerrada en ese volumen, por lo que aplicando el teorema de Gauss nos queda la relación de Gauss:

$$\phi = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}}$$

Es decir que el flujo eléctrico neto que atraviesa una superficie cerrada depende de la carga eléctrica que haya en el interior de la misma. Si no encierro carga con la superficie de evaluación, el flujo es nulo.

Interpretando la mencionada ley de Gauss, decimos que **la divergencia de un vector en un punto es una medida de la densidad de fuentes en ese punto**.

Pulíafito Parte I Pág.: I-7 y II-8

Relación entre el campo y el potencial: Gradiente de potencial:

Las líneas de fuerza del campo eléctrico siempre tienen la dirección normal a las superficies equipotenciales, por lo tanto, el camino de mayor variación de la magnitud del campo son esas líneas. Sabemos que la dirección de la máxima variación de una función está dada por el gradiente. Si, además de eso, sumamos el hecho de que la magnitud del campo está directamente relacionada con la diferencia de potencial entre dos puntos, podemos establecer la siguiente relación:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

es decir que la intensidad de campo eléctrico es igual al gradiente de potencial cambiado de signo (el signo menos se debe a que el campo va en la dirección de los potenciales decrecientes).

Pulíafito Parte I Pág.: I-21 y II-16



Relación entre la causa y el potencial: Ecuaciones de Poisson y Laplace:

Vinculando la ley de Gauss en forma diferencial con el gradiente de potencial, obtenemos una relación directa entre la carga eléctrica y el potencial escalar, que sigue la siguiente ecuación, llamada **ecuación de Poisson**:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Es decir que el laplaciano de la función potencial está directamente relacionado con la distribución espacial de cargas y con el medio.

Si en la sección considerada *no existieran cargas eléctricas* (como por ejemplo en un dieléctrico ideal), la ecuación pasa a ser la llamada **ecuación de Laplace**:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Pulíafito Parte I Pág.: I-31 y II-18

Condiciones de contorno:

Existirán datos adicionales necesarios para poder vincular el potencial directamente con la distribución de carga. Son las llamadas *constantes de integración* o **condiciones de contorno**. Para éste caso, se supone que conocemos la distribución espacial de cargas y la constante dieléctrica del medio. Por integraciones sucesivas, las que dependen de la simetría del problema, obtendremos la función potencial escalar mas algunas constantes de integración, cuyo valor sólo podemos obtener conociendo los potenciales de superficies equipotenciales que delimiten el espacio en el que desarrollamos el problema.

Estas superficies equipotenciales no admiten campo eléctrico en su interior (componente tangencial nula), debido a que al no haber diferencia de potencial entre sus puntos, no se requiere trabajo para mover cargas en su interior. En consecuencia, el campo eléctrico sólo será normal a dichas superficies. En los problemas prácticos, éstas son las superficies conductoras o la superficie externa de cuerpos conductores.

Pulíafito Parte I Pág.: II-19

Hojas cargadas:

Sea una superficie S' cargada con una distribución superficial $\sigma(\vec{r}')$, sumergida en el seno de un campo eléctrico externo, las componentes normales de campo eléctrico se verán afectadas de la siguiente manera:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

/*Estudiar la demostración*/ (Teorema de Gauss)

Asimismo, las componentes tangenciales del campo eléctrico tendrán continuidad sobre la superficie cargada:

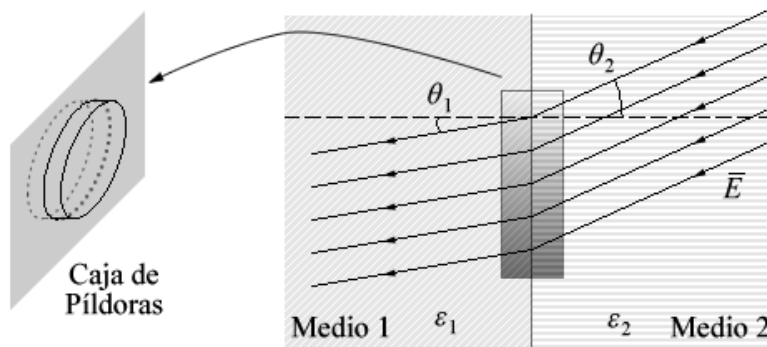
$$E_{1t} = E_{2t}$$

/*Estudiar la demostración*/ (Teorema de Stokes)

Pulíafito Parte I Pág.: II-24

Separación de dos dieléctricos:

Sean dos medios de distinta constante dieléctrica separados por una superficie que no tiene distribución de cargas. Existe un campo eléctrico externo que atraviesa dicha superficie. Consideremos una superficie gaussiana con forma de “caja de pildoras” o “pillbox”, como muestra la figura.



Se pueden demostrar las siguientes conclusiones:



- Las componentes de campo normales no son continuas a través de la superficie de separación, es decir:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

- Las componentes de campo tangenciales son continuas a través de la superficie de separación, es decir:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

- La relación entre los ángulos a ambos lados de la superficie de separación, tiene que ver con las constantes dieléctricas a través de la **Ley de Snell**:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

/*Estudiar las demostraciones*/

Puliafito Parte I Pág.: II-24

Polarización eléctrica

En general los dieléctricos se polarizan cuando, por efecto de la aplicación de un campo eléctrico externo, se produce un desplazamiento relativo de la carga eléctrica negativa, respecto de la positiva, en el seno de los mismos.

En general se distinguen cuatro tipos diferentes de polarización eléctrica:

- Polarización electrónica:** es un proceso de polarización a nivel atómico.
- Polarización iónica:** desplazamiento relativo entre los iones positivos y negativos de una molécula.
- Polarización orientacional:** se da en materiales con moléculas polarizadas permanentemente, pero desordenadas. Cuando se polariza el material, las moléculas se ordenan, orientándose en la misma dirección.
- Polarización por carga espacial:** se produce en dieléctricos no ideales (o sea que poseen algunos electrones libres en su seno) que tienen límites (barreras) para las cargas. Cuando se aplica un campo eléctrico, las cargas se apilan contra éstas barreras, produciendo la separación requerida para la polarización.

Como hemos visto, un campo eléctrico externo polariza un trozo de material dieléctrico. A su vez, el material polarizado generará un campo eléctrico que se superpondrá al existente, no sólo en el interior, sino también en el exterior del dieléctrico. Por eso es importante estudiar los efectos de éste fenómeno.

Puliafito Parte I Pág.: V-2

Vector polarización eléctrica:

Se puede definir una magnitud que tenga que ver con la cantidad de moléculas polarizadas por cada elemento de volumen (momento dipolar macroscópico), respecto a éste. Llamamos a ésta relación **vector polarización eléctrica**:

$$\bar{P}(\bar{r}') = \frac{d\bar{p}}{d\tau} \quad [P] = \frac{C}{m^2}$$

Siendo \bar{p} el momento dipolar elemental del diferencial de volumen. Si recordamos, el momento de un dipolo es:

$$p = q \cdot r$$

Puliafito Parte I Pág.: V-3

Potencial y campo eléctrico producido por un medio dieléctrico polarizado:

Despejando de la fórmula del momento de un dipolo, podemos obtener una expresión para la carga como sigue:

$$q = \frac{p}{r}$$

Si reemplazamos esto en la fórmula del potencial de un diferencial de carga, pero considerando no un momento dipolar individual sino el momento dipolar macroscópico, nos queda:

$$dV(\bar{r}) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2} = \frac{d\bar{p} \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\bar{P}(\bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}'|^3} d\tau'$$

y por lo tanto, el **potencial lejano de un dieléctrico polarizado** será:

$$V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau_0} \frac{\bar{P}(\bar{r}') \cdot (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} d\tau'$$



siendo τ_0 el volumen del dieléctrico.

Pulíafito Parte I Pág.: V-4

Densidades de carga latentes:

En la expresión anterior podemos reemplazar:

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

donde el operador primado indica que la variable a la que se aplica es \vec{r}' . Operando llegaremos a una expresión como la que sigue:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau_0} \frac{(-\nabla' \cdot \vec{P})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

Donde podemos definir nuevas magnitudes interesantes para el análisis:

- **Densidad superficial de cargas de polarización (densidad superficial latente):**

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Como consecuencia de la polarización, aparece sobre la superficie externa una distribución de cargas eléctricas, que a diferencia de lo ocurrido con un conductor, forma dipolos en el sentido de la polarización.

- **Densidad volumétrica de cargas de polarización (densidad volumétrica latente):**

$$\rho_p = -\nabla' \cdot \vec{P}$$

Es una consecuencia directa de la no uniformidad del vector polarización eléctrica en el seno del material. Podemos finalmente expresar el potencial de la siguiente manera:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\sigma_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau_0} \frac{\rho_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad \text{o} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau_0} \frac{dq'_p}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Por lo tanto, el **campo eléctrico externo** al dieléctrico polarizado será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S_0} \frac{\sigma_p (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' + \iiint_{\tau_0} \frac{\rho_p (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \right]$$

Se puede demostrar que *estas mismas expresiones también responden al campo eléctrico interno* del dieléctrico.

Pulíafito Parte I Pág.: V-7

Relación entre el vector polarización eléctrica y el campo eléctrico polarizante:

La polarización eléctrica es una consecuencia del campo eléctrico polarizante, por lo que resulta de interés establecer la relación de dependencia del efecto con su causa. Ésta relación responde a la fórmula:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \cdot \vec{E}$$

donde χ es la **susceptibilidad eléctrica** del medio o material, y es *adimensional*. Cuando un material es isotrópico, χ es constante, y decimos que éste es un dieléctrico lineal.

Pulíafito Parte I Pág.: V-11

Ley de Gauss generalizada:

Como vemos ahora, la ley de Gauss debe ser generalizada para poder tener en cuenta el efecto de la carga latente. Es por ello que podemos escribir:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{(\rho + \rho_p)}{\epsilon_0} = \frac{(\rho - \nabla \cdot \vec{P})}{\epsilon_0}$$

Si reagrupamos obtenemos la **expresión general de la ley de Gauss**:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

Por lo tanto, de manera generalizada, podemos establecer que la densidad de flujo electrostático es:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Con lo que la ley de Gauss seguirá siendo válida en su forma:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Pulíafito Parte I Pág.: V-12

Constante dieléctrica relativa o coeficiente dieléctrico:

Podemos ahora definir una fórmula para la constante dieléctrica relativa que caracteriza al medio:



$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

con lo que:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0 \left(\bar{E} + \frac{\bar{P}}{\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 (\bar{E} + \chi \bar{E}) = \epsilon_0 (1 + \chi) \bar{E}$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \bar{E}$$

Pulíafito Parte I Pág.: V-14

Energía almacenada

Energía de un grupo de cargas puntuales:

Para calcular la energía electrostática de éste conjunto, se computarán los valores parciales que se van a obtener mediante el procedimiento de ir trayendo una carga eléctrica por vez, desde el infinito, hasta ubicarla en su posición final. La energía total será:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{q_j \cdot q_k}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_{jk}} \quad \forall j \neq k$$

donde r_{jk} es la distancia entre dos cargas distintas. En ésta expresión no tenemos en cuenta la energía de autoformación de cada carga, debido a que teóricamente sería infinita. Por eso $j \neq k$.

Pulíafito Parte I Pág.: II-39

Energía de una distribución continua de cargas:

Aquí reemplazamos la carga puntual q por la carga elemental $\rho(\vec{r}) \cdot d\tau$. Aquí no es necesaria la consideración de que $j \neq k$, ya que no puntualizamos ninguna carga. La energía electrostática será entonces:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \int_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}) \cdot \rho(\vec{r}')}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau \cdot d\tau'$$

En ésta expresión, a diferencia del caso anterior, sí tenemos en cuenta la energía de autoformación del conjunto, que no es infinita.

Si la distribución de carga fuera superficial, existe la posibilidad de tener superficies externas de conductores cargadas, cuya energía agrega un término a la expresión anterior, teniendo en cuenta los reemplazos de las distribuciones volumétricas por superficiales. La energía total de una distribución superficial de carga será entonces:

$$W = \frac{1}{2} \int_{S'} \sigma(\vec{r}) \cdot V(\vec{r}) \cdot dS + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q_j \cdot V_j$$

donde S' es la superficie total no conductora, y el segundo término representa la energía de la superficie externa de un conductor cargado. Q_j es la carga total del conductor j , y V_j es el potencial existente en el mismo (superficie equipotencial). Recordar que la expresión del potencial es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

Pulíafito Parte I Pág.: II-42

Densidad volumétrica de energía de un campo electrostático:

Hasta ahora, encontrar la energía electrostática en una región del espacio requería conocer la distribución de carga eléctrica en la misma. Sin embargo podemos también calcularla conociendo la magnitud del campo eléctrico en cada punto, teniendo en cuenta una magnitud denominada densidad volumétrica de energía de un campo electrostático, que responde a la expresión:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2$$

Por lo tanto, la energía total en esa región τ será:

$$W = \int_{\tau} w \cdot d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot d\tau$$

Pulíafito Parte I Pág.: II-45



Cálculos de campo eléctrico

Generalmente, los datos conocidos para el cálculo de un campo eléctrico son las distribuciones de carga y los potenciales de los conductores que delimitan el espacio en el que nos interesa conocer el campo. Por otra parte, la simetría del problema determina el sistema de coordenadas a usar para que la resolución sea la más simple y práctica.

A través de los procedimientos vistos en el apartado anterior, se puede diferenciar distintos métodos para resolver el campo eléctrico, dependiendo de los datos, simetría y complejidad del problema. A continuación se detalla cada uno de éstos métodos.

Resolución directa:

La forma más fácil y directa de encontrar el valor del campo eléctrico conociendo las distribuciones de carga es encontrando la expresión del potencial escalar y luego aplicando la operación gradiente a dicha expresión. La facilidad del caso es que podemos aplicar sumas meramente escalares en el caso de superposición de efectos, y además la integración es más fácil debido al exponente del denominador de la expresión.

Recordemos que:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde el diferencial de carga puede ser reemplazado por la función de distribución multiplicada por el diferencial espacial.

Pulíafito Parte I Pág.: III-3

Aplicación de la ley de Gauss:

Cuando la distribución de cargas presenta simetría favorable, el campo eléctrico puede calcularse directamente aplicando la ley de Gauss. Para ello, la selección de la superficie gaussiana debe cumplir ciertas condiciones:

- Las líneas de flujo eléctrico deberán ser normales a la superficie gaussiana elegida, o en algunas secciones pueden ser tangenciales (en éstas, el flujo será nulo).
- La magnitud de \vec{D} deberá tener igual valor sobre todos los puntos de la superficie seleccionada.

Eligiendo esto, la aplicación de la ley de Gauss dará como resultado:

$$\phi = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint_S D \cdot dS \cdot \cos 0 = D \cdot \oiint_S dS = Q_{\text{enc}}$$

$$E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon \cdot \oiint_S dS}$$

donde $\oiint_S dS$ es el área de la superficie Gaussiana y Q_{enc} es la carga encerrada por dicha superficie.

Pulíafito Parte I Pág.: III-2

Resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace:

Para resolver el problema con éste método es necesario que se especifique:

- La distribución volumétrica de carga ρ .
- Las condiciones de contorno, es decir, los potenciales de las superficies conductoras actuantes en el problema.

Como sabemos, la ecuación de Poisson es:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

En la mayoría de los casos, resolveremos problemas donde el medio es, o puede considerarse, un dieléctrico ideal. Por lo tanto, para ellos aplicaremos la ecuación de Laplace, donde la condición a) no es necesaria:

$$\nabla^2 V = 0$$

Dependiendo de la simetría del problema, serán los términos del laplaciano que se anularán. Es decir, si la distribución del potencial no depende de una variable, las derivadas del mismo respecto a ésta se anularán, y la integración será más sencilla. A través de las condiciones de contorno, es decir, los potenciales conocidos, podremos calcular las constantes que surgen de la integración.

En algunos casos, la forma más simple de realizar integraciones cuando se depende de dos o más variables es formando una solución general a partir de la combinación lineal de soluciones particulares.

Pulíafito Parte I Pág.: III-4



Teoremas:

Teorema I:

Si V_1, V_2, \dots, V_n son todas soluciones de la ecuación de Laplace, entonces se verificará que:

$$V = C_1.V_1 + C_2.V_2 + C_3.V_3 + \dots + C_n.V_n$$

es también una solución de la ecuación de Laplace.

Éste teorema nos permite superponer dos o más soluciones particulares que configuren una solución general que satisfaga las condiciones de contorno impuestas a un problema particular.

Pulíafito Parte I Pág.: III-6

Teorema II (unicidad):

Dos soluciones a la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones de contorno difieren, a lo sumo, en una constante.

Pulíafito Parte I Pág.: III-7

Armónicos cilíndricos:

Ciertos problemas de simetría cilíndrica donde los potenciales no dependen de la variable z pueden ser resueltos empleando una *solución conocida*, denominada **armónicos cilíndricos**, que son soluciones particulares para la ecuación de Laplace. La ecuación de Laplace para las condiciones mencionadas es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Suponemos una *solución general* de la forma:

$$V(\rho, \phi) = \rho^n \cdot \Phi_n(\phi) \text{ y } V(\rho, \phi) = \rho^{-n} \cdot \Phi_{-n}(\phi)$$

Las dos formas son soluciones que satisfacen la ecuación. Reemplazando éstas en la ecuación, logramos soluciones para la función dependiente de ϕ de la forma:

$$\Phi_n(\phi) = A_n \cdot \cos(n\phi) + B_n \cdot \sin(n\phi)$$

Existe una propiedad para las ecuaciones diferenciales del tipo que se acaba de exponer, y es que si se encuentra una solución particular, también serán soluciones particulares todas las derivadas parciales sucesivas respecto de x e y (en este caso no respecto de z). Por lo tanto, teniendo en cuenta que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

podemos construir una tabla, con los distintos valores de n , y sus correspondientes soluciones particulares:

n	Derivaciones respecto de x	Derivaciones respecto de y	n	Derivaciones respecto de x	Derivaciones respecto de y
$-n$	$K \frac{\cos(n\phi)}{\rho^n}$	$K \frac{\sin(n\phi)}{\rho^n}$	0	$K \ln(\rho)$	-
\vdots	\vdots	\vdots	1	$K \cdot \rho \cdot \cos(\phi)$	$K \cdot \rho \cdot \sin(\phi)$
-2	$K \frac{\cos(2\phi)}{\rho^2}$	$K \frac{\sin(2\phi)}{\rho^2}$	2	$K \cdot \rho^2 \cdot \cos(2\phi)$	$K \cdot \rho^2 \cdot \sin(2\phi)$
-1	$K \frac{\cos(\phi)}{\rho}$	$K \frac{\sin(\phi)}{\rho}$	\vdots	\vdots	\vdots
0	$K \ln(\rho)$	-	n	$K \cdot \rho^n \cdot \cos(n\phi)$	$K \cdot \rho^n \cdot \sin(n\phi)$

Podemos elegir, dependiendo de los puntos límites del problema o de la dependencia notoria de los potenciales con las variables, el o los armónicos a utilizar en nuestro problema. Las constantes se determinan con los valores de las condiciones de contorno.

Pulíafito Parte I Pág.: III-15

Armónicos esféricos:

Se denominan **armónicos esféricos** a una colección de soluciones particulares del laplaciano del potencial, cuando la expresión en coordenadas esféricas no dependa de la coordenada ϕ . Para éste caso, la expresión de la ecuación de Laplace será:



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

Las soluciones se hallarán reemplazando $u = \cos \theta$ y tendrán la forma:

$$V(r, u) = r^n \cdot P_n(u) \text{ y } V(r, u) = \frac{P_n}{r^{n+1}}$$

Realizando consideraciones similares a las del caso anterior, encontraremos soluciones donde P_n son los polinomios de Legendre. Derivando una solución particular respecto de z obtenemos la tabla de armónicos esféricos:

n	Armónico esférico	n	Armónico esférico
$-n$	$K \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$	0	K
\vdots	\vdots	1	$K.r.\cos(\theta)$
-2	$K \frac{1}{r^3} (3.\cos^2(\theta) - 1)$	2	$K.r^2 (3.\cos^2(\theta) - 1)$
-1	$K \frac{1}{r^2} \cos(\theta)$	\vdots	\vdots
0	$K \frac{1}{r}$	n	$K.r^n P_n(\cos \theta)$

Pulíafito Parte I Pág.: III-23

Método de las imágenes:

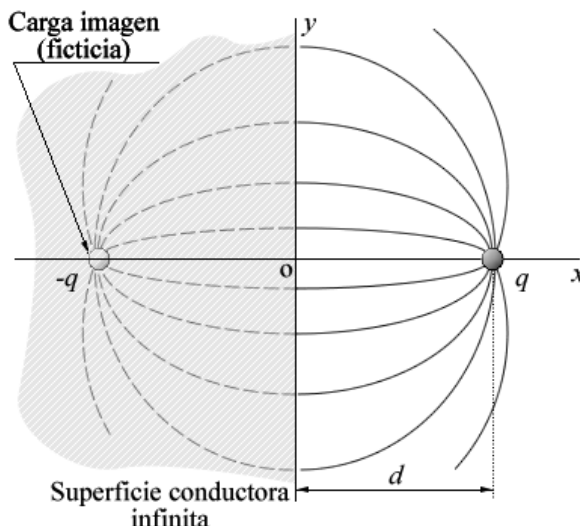
Este método es sólo aplicable en casos puntuales como:

1. Carga puntual frente a un plano conductor infinito
2. Carga puntual frente a una esfera conductora
3. Otros casos particulares

En éstos casos se reemplaza el plano o la esfera conductora por una carga puntual imaginaria de signo contrario a la carga puntual dada, ubicada correctamente, de tal manera que su efecto sea exactamente el mismo que el que producen el plano o la esfera conductora. La solución encontrada con ésta simplificación será válida sólo en el espacio dieléctrico existente entre el cuerpo considerado y la carga puntual.

Pulíafito Parte I Pág.: III-5

Caso de carga puntual frente a un plano conductor infinito:



Vemos que hemos reemplazado el plano conductor infinito por una carga puntual ficticia, de igual magnitud pero signo contrario a la original, ubicada en su interior a la misma distancia del mismo que la carga original sobre el eje perpendicular al plano. La expresión del campo eléctrico será la misma que para el caso de dos cargas puntuales, y será válida sólo en el exterior del conductor, es decir para valores de x positivos. Para realizar los cálculos se computan las distancias entre las cargas puntuales y un punto cualquiera P del espacio.

La expresión de la función potencial será:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4.\pi.\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

Y por lo tanto, las expresiones del campo eléctrico según las coordenadas x e y serán:

$$E_x(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x+d}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{x-d}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right)$$

$$E_y(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right)$$

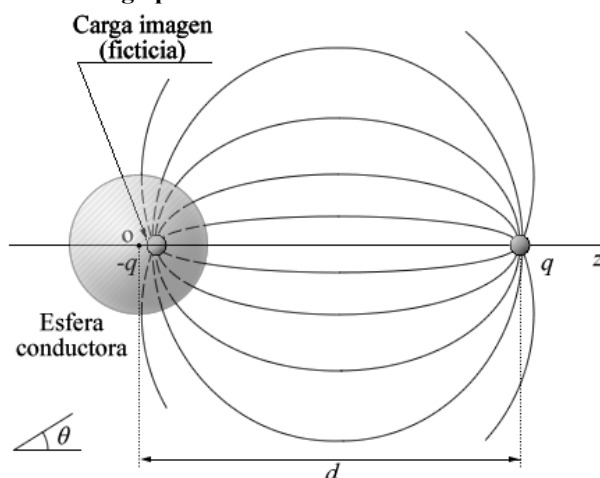
La densidad superficial de carga negativa inducida en la superficie conductora será:

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 \cdot E_x|_{x=0} = \frac{-q \cdot d}{2\pi \cdot (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

/*Estudiar las demostraciones*/

Pulíafito Parte I Pág.: III-29

Caso de carga puntual frente a una esfera conductora:



Vemos que hemos reemplazado la esfera conductora de radio a por una carga puntual ficticia, de igual magnitud pero signo contrario a la original, ubicada en su interior a una cierta distancia del centro de la esfera, sobre el eje que contiene a la carga original y al punto central de la misma.

La expresión del campo eléctrico será la aplicada para el caso de dos cargas puntuales, y será válida sólo en el exterior de la esfera, es decir para valores de r mayores que a .

Para realizar los cálculos se computan las distancias entre las cargas puntuales y un punto cualquiera P del espacio. La distancia entre la carga ficticia y el centro de la esfera se deduce a partir de las condiciones de contorno, es decir, con $V(a, \theta) = 0$.

La expresión de la función potencial será:

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot r \cdot \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 \cdot d^2}{a^2} + a^2 - 2 \cdot d \cdot r \cdot \cos \theta}} \right)$$

Y por lo tanto, las expresiones del campo eléctrico según las coordenadas r y θ serán:

$$E_r(r, \theta) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cdot \cos \theta - r}{(r^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot r \cdot \cos \theta)^{3/2}} + \frac{\frac{d^2 \cdot r}{a^2} - d \cdot \cos \theta}{\left(\frac{r^2 \cdot d^2}{a^2} + a^2 - 2 \cdot d \cdot r \cdot \cos \theta \right)^{3/2}} \right)$$

$$E_\theta(r, \theta) = -\frac{q \cdot d \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot r \cdot \cos \theta)^{3/2}} - \frac{1}{\left(\frac{r^2 \cdot d^2}{a^2} + a^2 - 2 \cdot d \cdot r \cdot \cos \theta \right)^{3/2}} \right)$$

La densidad superficial de carga negativa inducida en la superficie de la esfera conductora será:

$$\sigma(a, \theta) = \epsilon_0 \cdot E_r(a, \theta) = \frac{-q \cdot (d^2 - a^2)}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot (a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \theta)^{3/2}}$$

/*Estudiar las demostraciones*/

Pulíafito Parte I Pág.: III-34



CAMPO MAGNETOSTÁTICO

El **campo magnetostático** es también un caso particular del campo electromagnético, pero para régimen estacionario, es decir, que las variaciones en el campo o sus fuentes son a nivel meramente espacial, y no temporal.

Características

Causa o fuente:

El campo magnético es producido por cargas eléctricas en movimiento y, en particular, el campo magnetostático es producido por cargas cuyo movimiento es uniforme, es decir, su velocidad es constante. Como sabemos, cargas en movimiento en el seno de un medio se interpretan como corrientes eléctricas, por lo tanto, la causa del campo magnetostático es la corriente eléctrica constante. Las características del campo dependen de la distribución espacial (discreta o continua) de corrientes eléctricas.

Estudiaremos algunas relaciones importantes en lo que hace a la definición matemática y física de estas fuentes.

Pulíafito Parte I Pág.: IV-2

Densidad de corriente:

Supongamos una corriente eléctrica constituida por un solo tipo de portador de carga q , que existen en el medio conductor en promedio una cantidad de ellos por unidad de volumen definida como N y que todos se mueven a la misma velocidad \vec{v} . Consideremos una sección de control $d\vec{S}$ en el seno del medio.

Definimos una densidad superficial de corriente como:

$$\vec{J}_C = N \cdot q \cdot \vec{v}$$

Por lo tanto, la corriente ligada a una superficie finita S será:

$$I = \iint_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S}$$

Pulíafito Parte I Pág.: IV-5

Ecuación de la continuidad:

Podemos definir una ecuación que nos represente matemáticamente el principio de conservación de la carga eléctrica. La relación integral se expresa:

$$-\oiint_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Aplicando el teorema de la divergencia, llegamos a la expresión diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_C = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Estas ecuaciones nos dicen que el *reposo* o *movimiento uniforme* de cargas eléctricas no supone generación o pérdida de cargas, ya que, en estos dos casos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_C = 0$$

Pulíafito Parte I Pág.: IV-7

Tipo de campo:

Las líneas de fuerza o de flujo del campo magnetostático no tienen principio ni fin, es decir, son líneas cerradas y continuas. Por lo tanto, el campo es vectorial rotacional. Como sabemos, todo campo vectorial rotacional tiene una causa o fuente vectorial llamada vórtice. Decimos entonces que la corriente eléctrica es el vórtice del campo magnético.

Pulíafito Parte I Pág.: IV-15

Leyes experimentales y definiciones

Leyes de Ampère y Lorentz:

Ley de la fuerza de Ampère:

Ampère, en su primera ley, formula una expresión de la fuerza que experimenta un conductor por el que circula una corriente I cuando se encuentra en el seno de un campo magnético de inducción \vec{B} (o densidad de flujo magnético), cuyo valor punto a punto es conocido. Esta expresión es, para un elemento diferencial de corriente:

$$d\vec{F}_m = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$



Por lo tanto, para un hilo de corriente, se expresa la fuerza como una integral de línea. Si el tramo considerado como circuito de integración fuese cerrado, y la inducción constante en toda la región (campo magnético uniforme), éste se puede sacar fuera de la integral, y la fuerza se anula. Esto nos dice que *una espira sumergida en el seno de un campo magnético constante no experimenta ninguna fuerza magnética*.

Puliafito Parte I Pág.: IV-20

Segunda ley de Ampère:

La segunda ley de Ampère, también conocida como ley de Biot y Savart, para un elemento de corriente, establece la relación entre el campo magnético existente en un cierto punto del espacio y la corriente elemental que lo produce. La expresión de este diferencial es:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \mu \cdot I \cdot \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4 \cdot \pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

y es válida sólo para aplicarse con hilos de corriente exclusivamente. Para el caso de conductores gruesos, podemos reemplazar el diferencial de corriente usando la densidad superficial de corriente de la siguiente manera:

$$I \cdot d\vec{l}' = \vec{J}_C(\vec{r}') \cdot d\vec{\tau}'$$

Por lo tanto, la *expresión más general* de ésta ley es:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\vec{J}_C(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{\tau}'$$

Puliafito Parte I Pág.: IV-22

Ley de la fuerza de Lorentz:

Es una expresión microscópica de la ley de la fuerza, ya que en vez de referirse a un elemento de corriente, lo hace con una carga puntual que se mueve con una cierta velocidad, en el seno de un campo magnético. La expresión de ésta ley es:

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Como vemos, la fuerza resulta perpendicular a la dirección del movimiento de la carga, por lo que el trabajo realizado por la fuerza es nulo, o sea que el campo no cambia la energía cinética de la carga en movimiento, sino sólo su dirección.

A partir de ésta relación podemos definir la unidad en que se mide la inducción magnética:

$$[B] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}$$

Puliafito Parte I Pág.: IV-24

Densidad de flujo magnético:

La permeabilidad magnética de un medio se designa con μ , y es expresado de manera relativa con la permeabilidad magnética del vacío, mediante la siguiente expresión:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

Donde el valor de μ_0 es:

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Hy}}{\text{m}}$$

Existen tres tipos de medios, según su comportamiento magnético. Éstos son:

- **Materiales ferromagnéticos:** Exhiben una permeabilidad relativa de muy alto valor y no constante. Poseen ciclos de histéresis donde la permeabilidad relativa depende de la intensidad del campo magnético y de la “historia magnética”.
- **Materiales no ferromagnéticos:** Exhiben una permeabilidad relativa cercana a la unidad. Pueden clasificarse a su vez en:
 - **Materiales diamagnéticos:** Su permeabilidad relativa es menor que la unidad.
 - **Materiales paramagnéticos:** Su permeabilidad relativa es mayor que la unidad.

Como hemos utilizado el modelo de líneas de flujo en la formulación del campo magnético, cabe esperar que exista una **densidad de flujo magnético**, que sea una medida de la intensidad del campo en el entorno de un cierto punto del espacio. Si definimos una intensidad de campo magnético \vec{H} , siempre que el medio sea isotrópico, la densidad



de flujo será proporcional a ésta (igual dirección y sentido). Podemos entonces expresar, usando la constante de permeabilidad magnética, ésta relación:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Puliafito Parte I Pág.: IV-18

Intensidad de campo magnético:

Definimos la intensidad de campo magnético, como analogía con el campo eléctrico, mediante la relación anterior. Sin embargo, aunque pueda parecer intuitiva la analogía entre las constantes representativas del medio μ y ϵ , debemos establecer una relación correcta. Como se puede ver comparando la expresión del campo eléctrico de una distribución volumétrica de cargas, y la expresión general de la segunda ley de Ampère, vemos que la analogía debería establecerse de la siguiente manera:

$$\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}$$

Entonces, las relaciones análogas son:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \Leftrightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

La unidad de medida de la intensidad de campo magnético es entonces, en analogía con la densidad de flujo electrostático, la causa sobre la unidad de superficie, es decir:

$$[H] = \frac{\text{Amp.m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Amp}}{\text{m}}$$

Puliafito Parte I Pág.: IV-27

Potencial vectorial:

En la siguiente sección se verá que la causa (densidad de corriente) se vincula con el campo magnético mediante la ley circuital de Ampère que, en su forma diferencial, se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_C$$

Vamos a definir una función potencial vectorial \vec{A} , dado que la fuente es de ésta naturaleza, que cumpla con la siguiente relación:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

Como sabemos, el teorema de Helmholtz dice que para definir completamente a una función vectorial, basta con especificar su rotor y su divergencia. Es por esto que definiremos un valor para ésta última que se ajuste a nuestros problemas de interés. Éste valor es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Combinando la ley circuital de Ampère con nuestras definiciones, llegamos a una función potencial vectorial del campo magnético que se vinculará con la causa mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_C$$

Puliafito Parte I Pág.: IV-33

Relaciones

Relación entre la causa y el campo: Ley circuital de Ampère:

También conocida como ley del trabajo de Ampère, la ley circuital define la relación entre la corriente eléctrica constante (causa) y el campo magnético, vinculados mediante una integral de circulación que establece a la corriente como una fuerza magnetomotriz. La ecuación de ésta ley se expresa como:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

Entonces, podemos calcular el campo magnético, estableciendo un camino cerrado de integración, con una simetría determinada que facilite los cálculos, que encierre a las corrientes que lo generan.

Si tomamos el caso particular de un hilo de corriente recto e infinitamente largo, y un camino de integración circular de radio r , centrado en el hilo, la relación anterior se vuelve:

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

y donde el sentido del campo es siempre perpendicular a la espira de integración, siguiendo la regla de la mano derecha. Vemos en ésta relación que se cumple la definición de la unidad de intensidad de campo magnético.



Sabiendo que la corriente se puede expresar como:

$$I = \iint_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S}$$

podemos reemplazarla en la fórmula de la ley circuital de Ampère, para obtener la relación de malla correspondiente:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S}$$

Aplicando el teorema de Stokes, llegamos a la relación de punto, que es una ecuación diferencial del campo magnético:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_C$$

Cabe destacar como punto importante que estas leyes así expresadas son válidas sólo para el caso de campos magnetostáticos, es decir, invariantes en el tiempo. Más tarde veremos su generalización, en las ecuaciones de Maxwell.

Pulíafito Parte I Pág.: IV-25 y IV-32

Relación entre el campo y el potencial: Rotor del potencial vectorial:

Cuando definimos la función potencial vectorial, dijimos que ésta estaba vinculada con el campo magnético mediante la operación vectorial rotor, es decir que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu \cdot \vec{H}$$

Por lo tanto, si conocemos la función potencial, podemos mediante simples operaciones matemáticas obtener la expresión del campo magnético.

Pulíafito Parte I Pág.: IV-33

Relación entre la causa y el potencial: Ecuaciones de Poisson y Laplace sobre potencial vectorial:

Como vimos al definir la función potencial vectorial, la relación diferencial que la vincula con la causa es:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_C$$

Si resolvemos esta ecuación diferencial, quedará una expresión, en analogía con el potencial eléctrico, de la siguiente manera:

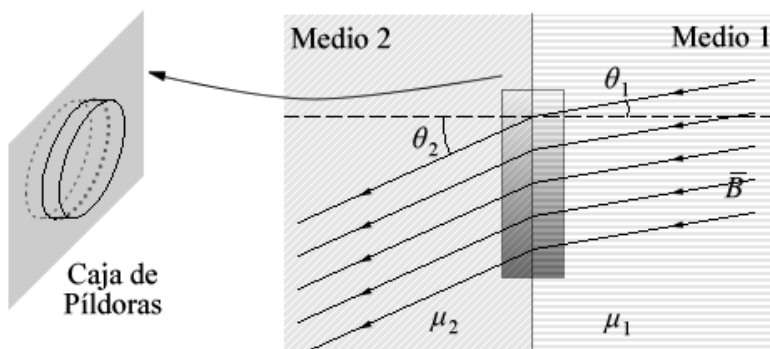
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}_C(\vec{r}') d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

De esta manera, especificada la fuente $\vec{J}_C(\vec{r}')$, se puede calcular directamente el potencial vectorial en un punto exterior de la misma. Una vez determinado el potencial, se puede aplicar la relación vista en el punto anterior.

Pulíafito Parte I Pág.: IV-33

Condiciones de contorno:

Sean dos medios de distinta permeabilidad magnética separados por una cierta superficie que no contiene corrientes eléctricas. Existe un campo magnético externo que atraviesa dicha superficie. Consideremos una superficie gaussiana con forma de “caja de píldoras” o “pillbox”, como muestra la figura.



Se pueden demostrar las siguientes conclusiones:

- Las componentes de campo normales no son continuas a través de la superficie de separación, es decir:



$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

- Las componentes de campo tangenciales son continuas a través de la superficie de separación, es decir:

$$H_{1t} = H_{2t}$$

- La relación entre los ángulos a ambos lados de la superficie de separación, tiene que ver con las permeabilidades de los medios a través de la siguiente relación:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

/*Estudiar las demostraciones*/

Pulíafito Parte I Pág.: V-45

Polarización magnética

Momento dipolar magnético:

Se define el momento dipolar magnético de un circuito C recorrido por una corriente I al vector:

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

donde \vec{S} es un vector referido a un sistema de coordenadas cartesianas, cuyas componentes son los vectores representativos de las áreas encerradas por las proyecciones del contorno C sobre los planos xOy , yOz y xOz . Se puede demostrar que:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{l}$$

Entonces, podemos expresar el diferencial de momento dipolar magnético como:

$$d\vec{m} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{J}(\vec{r}) d\tau$$

Hemos definido un dipolo magnético como un circuito cerrado, pero también puede ser tal una aguja imantada, ya que ambos producen campos lejanos de configuraciones similares. De hecho, los campos serán iguales si ambas fuentes tienen el mismo momento dipolar magnético. Es por eso que podemos establecer una equivalencia entre ellas.

Para la espira el momento vale $\vec{m} = I \vec{S}$ y para la aguja, vale $\vec{m} = Q_m \cdot 2a \vec{u}_r$, donde Q_m es la intensidad de polo magnético, y a es la distancia del mismo hasta el centro del dipolo.

Si los igualamos, podemos obtener una equivalencia entre ambas fuentes:

$$Q_m = \frac{I S}{2a}$$

Pulíafito Parte I Pág.: V-26

Cupla:

Se puede demostrar que la cupla magnética para un circuito cerrado con una corriente I , sumergido en un campo magnético uniforme \vec{B} , vale:

$$\vec{\tau} = I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Pulíafito Parte I Pág.: V-28

Magnetización:

Como sabemos, los electrones en la materia orbitan alrededor de los núcleos en circuitos cerrados, por lo tanto constituyen dipolos magnéticos. El mismo efecto se produce con los “spins” de cada partícula. Si una muestra de materia tiene una densidad volumétrica de átomos N , y cada átomo tiene un momento dipolar magnético \vec{m} , que engloba la interacción de todas sus partículas, entonces podemos definir un momento magnético por unidad de volumen, o **magnetización**, como:

$$\vec{M} = N \vec{m}$$

Los distintos comportamientos magnéticos de los materiales también se ven en éste caso, ya que si aplicamos un campo magnético externo al material, éste se adicionará con el producido por cada átomo, y los efectos serán, para los distintos tipos:



- **Materiales ferromagnéticos:** Su magnetización no es constante, y el resultado de la suma de los campos es muy intenso.
- **Materiales no ferromagnéticos:**
 - **Materiales diamagnéticos:** Sus átomos no manifiestan un momento dipolar magnético permanente, por lo que cuando se les aplica el campo, desarrollan un campo inducido que tiende a oponerse al aplicado, resultando en consecuencia un campo total inferior.
 - **Materiales paramagnéticos:** La adición da resultados relativamente débiles.

Podemos establecer una relación entre la magnetización de un material y el campo magnético externo aplicado, siempre que el material sea no ferromagnético, mediante la siguiente expresión:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$$

donde si el campo aplicado no es muy intenso, la constante χ_m (susceptibilidad magnética del medio) es constante.

Los materiales paramagnéticos poseen susceptibilidades positivas, mientras que los diamagnéticos negativas.

Podemos, mediante ésta constante, definir la permeabilidad magnética relativa del medio, como:

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

Pulíafito Parte I Pág.: V-25

Densidades de corriente de magnetización:

Podemos, en analogía con el caso eléctrico, definir densidades de corriente de magnetización. Todo material magnetizado se puede considerar como un conjunto de infinitas fuentes de campo magnético.

Definimos una **densidad superficial equivalente de corriente** como:

$$\vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \vec{n}$$

que debe interpretarse como la corriente por unidad de longitud que fluye por la capa superficial límite de la muestra. Definimos también una **densidad volumétrica equivalente de corriente** como:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla}' \times \vec{M}$$

que es el resultado de una distribución no uniforme de la magnetización en el seno de la muestra.

El potencial vectorial total de la muestra será:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau_0} \frac{\vec{J}_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_0} \frac{\vec{J}_{sm}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

Pulíafito Parte I Pág.: V-37

Energía almacenada

Energía almacenada por unidad de volumen:

De forma similar que para el campo electrostático, podemos establecer la cantidad de energía almacenada en el campo por unidad de volumen como:

$$W_m = \int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B}$$

Donde, si realizamos la integral, considerando un medio isotrópico (inducción e intensidad con la misma dirección y sentido), el valor será:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2$$

Pulíafito Parte I Pág.: IV-36

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Ley de Faraday:

La ley de Faraday enuncia que “si sumergimos una espira cerrada en el seno de un campo magnético exterior se inducirá una f.e.m. en la misma si se produce, de algún modo, alguna variación en el tiempo del flujo magnético concatenado con la espira”. Expresado matemáticamente:

$$e = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

Donde el flujo puede calcularse como:

$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Otra interpretación de ésta ley es que la f.e.m. total inducida en un circuito cerrado es igual a la velocidad de disminución del flujo magnético total concatenado por dicho circuito.

Cuando decimos “variar el flujo”, podemos hacerlo de tres maneras distintas:

- variando el campo magnético externo en el tiempo y dejando estacionario al circuito;
- modificando el tamaño, forma y/o posición de la espira en un campo estacionario, de modo que concatene cantidades variables de líneas de flujo en el tiempo;
- combinando las dos acciones anteriores.

Cabe aclarar que la f.e.m. producida por cualquiera de las tres alternativas anteriormente mencionadas, es de naturaleza netamente dinámica, dado las causas que la provocan, lo que abre la puerta al tratamiento de campos eléctricos y magnéticos ya no estacionarios, sino en régimen dinámico.

Pulíafito Parte I Pág.: VI-2

Ley de Neumann:

Es un caso particular para la alternativa a) de variación de flujo, es decir, con un circuito estacionario y un campo magnético variable. Combinando las dos ecuaciones anteriores se llega a:

$$e = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VI-4

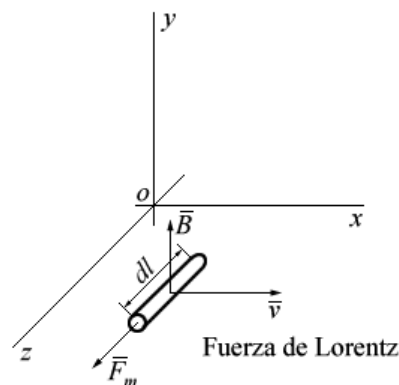
Ley de inducción motional:

Es un caso particular para la alternativa b) de variación de flujo, es decir, con un campo magnético estacionario y un circuito de tamaño, forma y/o posición variables. Como se ve en la figura, la fuerza se produce sobre las cargas en el conductor porque la orientación del elemento es perpendicular al campo y a la velocidad que trae, pero si no fuera así las cargas se moverían en la proyección en esa dirección del elemento. La figura aclara la situación. El campo eléctrico producido en el conductor tenderá a oponerse a la fuerza de Lorentz, y puede expresarse como:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_m}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Por lo tanto, la f.e.m. producida en un circuito cerrado será:

$$e = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$



Pulíafito Parte I Pág.: VI-6

Ley general de inducción electromagnética:

Es la generalización para la alternativa c) de variación de flujo, es decir con campo magnético y circuito variables. La expresión de la f.e.m. total será:

$$e_T = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VI-11

Expresión diferencial:

A partir de la siguiente expresión válida para el caso de un circuito estacionario en un campo variable:

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

podemos aplicarle el teorema de Stokes en el primer miembro y obtenemos la expresión diferencial o relación de punto de la ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ésta expresión nos da una conclusión muy importante: **siempre que exista un campo magnético variable en el tiempo, existirá un campo eléctrico asociado, también de origen dinámico, y de características rotacionales**. Esto último se visualiza al ver que el rotor de ese campo tiene un valor, que es la velocidad de disminución del campo magnético que le da origen.

Pulíafito Parte I Pág.: VI-4

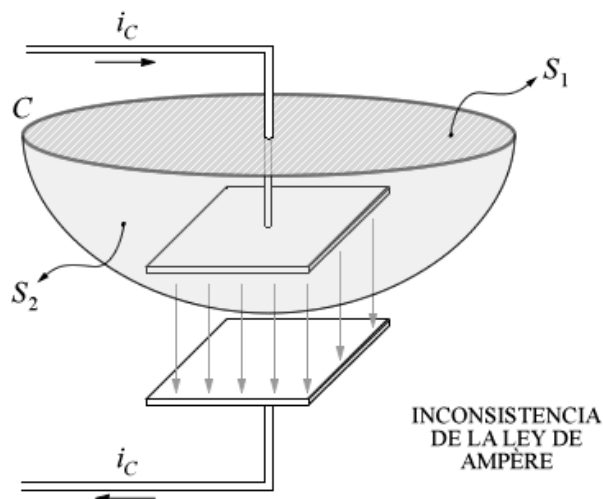
Ley de Lenz:

Es equivalente a la ley de Faraday, pero hablando de la corriente en vez de la f.e.m. Su enunciado es el siguiente: "la corriente inducida en un circuito cerrado es siempre la necesaria para producir un flujo magnético tal que se oponga a la variación del flujo magnético externo".

Pulíafito Parte I Pág.: VI-3

Ecuaciones de Maxwell

Inconsistencia de la ley de Ampère:



Maxwell, al intentar postular la existencia de ondas electromagnéticas, se encontró con una inconsistencia en la ley de Ampère, ya que éste sólo había tenido en cuenta corrientes estacionarias. Puede comprenderse esta inconsistencia analizando un tramo de circuito que contenga un capacitor, como en la figura. Realizando el cómputo de la ley de Ampère tomando el contorno C y la superficie S_1 , nos da el valor de la corriente de conducción i_C . Si en cambio tomamos como superficie a S_2 , vemos que tiene el mismo contorno pero el resultado sería nulo, porque no hay corriente de conducción que atraviese a dicha superficie. Aquí es donde está la contradicción: para un mismo contorno obtenemos dos valores distintos en el cómputo de la corriente.

Maxwell levantó esta inconsistencia ampliando la ley al régimen dinámico, en el cual un campo eléctrico variable en el dieléctrico que separa las placas del capacitor produce un campo magnético variable. Al haber campo magnético variable, debería haber una corriente variable que lo provoque. Postuló entonces la existencia de una **corriente de desplazamiento**, provocada por la variación del campo eléctrico de la siguiente manera:

$$\bar{J}_D = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Maxwell revalida la primera ley de Kirchhoff en el nodo encerrado por ambas superficies igualando la corriente de conducción con la de desplazamiento:

$$\oint_S \bar{J}_D \cdot d\bar{S} = - \oint_S \bar{J}_C \cdot d\bar{S}$$

Por lo tanto, la ley de Ampère generalizada quedará de la siguiente manera:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} = \bar{J}_C + \bar{J}_D$$

Pulíafito Parte I Pág.: VI-15

Expresión integral o de malla de las ecuaciones de Maxwell:

Maxwell, a partir de ver que campos eléctricos variables producían campos magnéticos, y que campos magnéticos variables producían campos eléctricos, propuso una teoría de campo electromagnético que prevé, en el régimen dinámico, la propagación de ondas. Los pilares fundamentales de dicha teoría son la ley circuital de Ampère, debidamente generalizada por Maxwell, y la ley de inducción de Faraday.

La primera ecuación fundamental se expresa de la siguiente manera:

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \iint_S \bar{J} \cdot d\bar{S}$$

Siendo que la densidad de corriente puesta en la fórmula, representa la superposición de una corriente de conducción y una de desplazamiento:

$$\bar{J} = \bar{J}_C + \bar{J}_D = \sigma \cdot \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

La segunda ecuación fundamental se escribe de la siguiente forma:

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \iint_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

A estas dos ecuaciones falta agregarles dos ecuaciones que terminan de completar la definición o especificación del campo electromagnético en una región del espacio. Éstas son las expresiones de la ley de Gauss para campos eléctricos y magnéticos:



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \rho$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Por lo tanto, las cuatro ecuaciones de Maxwell escritas en forma integral (relación de malla) se expresan así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\sigma \cdot \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \oiint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0 \end{array} \right.$$

Con ellas describimos todo fenómeno de origen electromagnético existente en la naturaleza.

Vemos la armonía existente en estas ecuaciones, sobre todo en las dos primeras, ya que se ve que un tipo de campo, con su variación, genera al otro, y a su vez éste, como varía, genera al primero. Esto nos da un indicio de la existencia de ondas electromagnéticas, que se propagan en el espacio indefinidamente.

Pulíafito Parte I Pág.: VII-1

Expresión diferencial o de punto de las ecuaciones de Maxwell:

Aplicando a las ecuaciones anteriores según sea el caso los teoremas de Gauss y Stokes, llegamos a expresiones más sencillas, útiles y fáciles de recordar de las ecuaciones de Maxwell. Éstas son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$

Aquí se ve claramente que el campo eléctrico puede tener dos naturalezas: una conservativa, que es la provocada por la distribución de cargas ρ , y otra solenoidal, que es la provocada por la variación del campo magnético.

Otro punto importante que se ve es que la corriente de desplazamiento aparece siempre, ya que es la condición necesaria para que se pueda propagar una onda electromagnética. En el caso de un conductor ideal, por ejemplo, su valor es nulo, y por ende en el interior del mismo no es posible la propagación de ellas.

Pulíafito Parte I Pág.: VII-1

Expresiones para el caso de un medio dieléctrico ideal:

Para el caso de que las ondas se propaguen en un medio dieléctrico ideal, donde $\rho = 0$ y $\sigma = 0$ las expresiones quedan como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$

Aquí es donde notamos la mayor simetría entre ellas.

Pulíafito Parte I Pág.: VII-4



PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Ecuaciones de onda:

A partir de las ecuaciones de Maxwell podemos, mediante pasos matemáticos, deducir ecuaciones de onda que describan de manera más visible la propagación de las mismas en el espacio.

Medio dieléctrico ideal:

A partir de la ecuación de la ley de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

aplico la operación rotor a ambos miembros, y queda:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Operando con el primer miembro, e intercambiando las operaciones del segundo, por ser \vec{H} una función que esperamos sea continua, obtenemos:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial(\nabla \times \vec{H})}{\partial t}$$

Por último, sabiendo que la divergencia del campo eléctrico (dinámico) en un medio dieléctrico ideal es nula, y reemplazando mediante la ley de Ampère para medios dieléctricos ideales en el segundo miembro obtenemos la ecuación de onda para el campo eléctrico. Análogamente, podemos obtener una ecuación similar para el campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{H} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Las dos ecuaciones anteriores son diferenciales a las derivadas parciales y homogéneas, por lo que nos dan la descripción del fenómeno sin considerar las causas que lo producen.

Introduciendo el operador “dalambertiano” que es:

$$\boxed{\square} = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Obtenemos las ecuaciones de onda en forma abreviada y en forma explícita:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\square} \vec{E} = 0 \\ \boxed{\square} \vec{H} = 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

Aquí vemos que la velocidad de propagación de la onda vale:

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}}$$

Puliafito Parte I Pág.: VII-6

Medio conductor:

Como sabemos, en el interior de dichos medios la carga eléctrica neta es siempre nula, dado que cualquier exceso se depositaría en la superficie exterior. Además, la corriente de conducción no altera este equilibrio. Tenemos entonces, para el caso de medios conductores, que las ecuaciones de Maxwell se expresan de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$



Operando de la misma manera que para el caso anterior, se obtienen las siguientes ecuaciones de onda:

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{E} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \\ \nabla^2 \bar{H} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Como vemos, aparece un término nuevo en cada una de las ecuaciones, que como veremos más adelante, tienen en cuenta la interacción de la onda con el medio conductor provocando el calentamiento del mismo por efecto Joule. Cabe esperar entonces que la onda que se propaga en este medio sufra una atenuación.

Puliafito Parte I Pág.: VII-8

Propagación:

Definiciones:

Superficies equifase o frentes de onda: Se definen como tales al considerar todos los puntos del espacio en los cuales los campos tienen la misma fase en sus ciclos de variación.

Dirección o eje de propagación: Se define dicha dirección o eje en un punto del medio al tomar la dirección normal a una superficie equifase que pasa por dicho punto.

Rayos: Son líneas que indican la dirección de propagación en los distintos puntos de un frente de onda.

Puliafito Parte I Pág.: VIII-1 y 2

Tipos de ondas:

Ondas planas:

Se caracterizan por poseer frentes de onda de tipo plano extendiéndose indefinidamente en el espacio. El frente será paralelo al plano en que se ubican las fuentes y la propagación será en una única dirección.

Ondas cilíndricas:

Se caracterizan por poseer frentes de onda de forma cilíndrica con superficie infinita. Se producen por una distribución lineal, uniforme e infinita de fuentes. Se propagan radialmente en dos dimensiones.

Ondas esféricas:

Su frente de onda se desarrolla según superficies esféricas concéntricas en tres dimensiones del espacio. Se producen teóricamente por una fuente puntual.

Puliafito Parte I Pág.: VIII-2

Modos de propagación:

Antes de hablar de los distintos modos de propagación, debemos definir el concepto de **planos transversos**, que son planos tangentes a las superficies equifases en distintos puntos de las mismas, y por lo tanto son siempre perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. En general, los vectores representativos de los campos eléctricos y magnéticos pueden o no estar contenidos enteramente en un plano transverso.

Podemos, en general, definir una terna cartesiana, y escribir la expresión de los vectores de campo en ella:

$$\begin{cases} \bar{E} = E_x \cdot \hat{x} + E_y \cdot \hat{y} + E_z \cdot \hat{z} \\ \bar{H} = H_x \cdot \hat{x} + H_y \cdot \hat{y} + H_z \cdot \hat{z} \end{cases}$$

Cada componente de campo a su vez es función de las cuatro variables espacio-temporales.

Si en particular orientamos nuestra terna cartesiana de tal manera que **el eje x coincida con la dirección de propagación**, el plano yoz coincidirá con el plano transverso. Podemos a partir de esto definir ciertos **modos de propagación** según se orienten las componentes del campo eléctrico y magnético en el sistema.

Puliafito Parte I Pág.: VIII-2

Transversal Electromagnético (T.E.M.):

Se define un modo transversal electromagnético (T.E.M.) en aquellos casos en que los vectores representativos de los campos eléctricos y magnéticos de la onda se encuentran totalmente contenidos en un plano transverso.

Éste es el **modo natural** o **fundamental** de propagación de las ondas electromagnéticas en un medio ilimitado y lejos de la fuente de radiación. Para éste caso tendremos $E_x = H_x = 0$

Puliafito Parte I Pág.: VIII-4

Transversal Eléctrico (T.E.):

Se define un modo transversal eléctrico (T.E.) en aquellos casos en que sólo el vector representativo del campo eléctrico se encuentra completamente contenido en un plano transversal. El campo magnético, en consecuencia, posee componentes sobre el plano transversal y el eje de propagación. En éste caso tendremos $E_x = 0$ pero $H_x \neq 0$

Puliafito Parte I Pág.: VIII-4

Transversal Magnético (T.M.):

Se define un modo transversal magnético (T.M.) en aquellos casos en que sólo el vector representativo del campo magnético se encuentra completamente contenido en un plano transversal. El campo eléctrico, en consecuencia, posee componentes sobre el plano transversal y el eje de propagación. En éste caso tendremos $H_x = 0$ pero $E_x \neq 0$

Puliafito Parte I Pág.: VIII-4

Ondas planas:

Vamos a referirnos a ondas planas y orientadas de tal manera que su dirección de propagación coincida con el eje x . Se puede deducir que para el caso de éste tipo de ondas **siempre el modo de propagación es T.E.M.**, y por lo tanto:

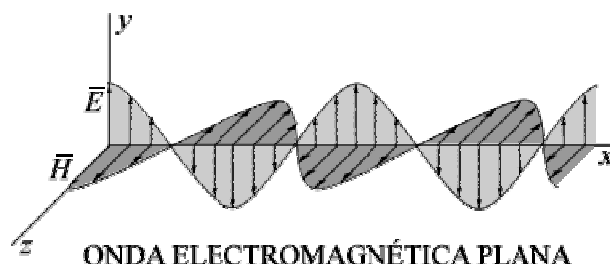
$$E_x = H_x = 0$$

/*Estudiar demostración*/

Si orientamos el vector del campo eléctrico de tal manera que coincida con el eje y , se puede demostrar que el vector de campo magnético se orientará según el eje z . Por lo tanto:

$$E_z = H_y = 0$$

/*Estudiar demostración*/



ONDA ELECTROMAGNÉTICA PLANA

Y los vectores representativos del campo nos quedarán:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_y \cdot \hat{y} \\ \vec{H} = H_z \cdot \hat{z} \end{cases}$$

Como vemos, los vectores de campo eléctrico y magnético en el caso de ondas planas se encuentran en cuadratura espacial. Esto se ilustra en la figura.

Puliafito Parte I Pág.: VIII-5

Ondas planas en medios dieléctricos ideales

Solución general:

Considerando la orientación elegida para los vectores de campo eléctrico y magnético en el caso de ondas planas, las ecuaciones de onda en un medio dieléctrico ideal, homogéneo y libre de cargas quedan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Éste tipo de ecuaciones, denominadas "Ecuaciones de D'Alembert" tienen soluciones generales que se escriben así:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = E_1 \cdot f_1(x - v \cdot t) + E_2 \cdot f_2(x + v \cdot t) \\ H_z(x, t) = H_1 \cdot f_1(x - v \cdot t) + H_2 \cdot f_2(x + v \cdot t) \end{cases}$$

En donde E_1 , E_2 , H_1 y H_2 son las constantes de integración que deberán evaluarse en cada caso particular por las condiciones de contorno.

La constante v que aparece en las ecuaciones es, según la resolución de las ecuaciones, la velocidad de propagación de las ondas según el eje x . Su valor es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$



Los primeros términos de las soluciones generales representan lo que denominaremos “**ondas incidentes**”, ya que progresan en el sentido positivo de la coordenada x , mientras que los segundos términos se denominan “**ondas reflejadas**” ya que progresan en el sentido negativo de la misma. Esto puede demostrarse matemáticamente.

/*Estudiar demostración*/

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-9

Dominio de la frecuencia:

Si elegimos la terna como se especificó para ondas planas, de las dos primeras ecuaciones de Maxwell, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales escalares:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases}$$

Ya que la mayoría de las aplicaciones utilizan ondas con variaciones armónicas en el tiempo (además cualquier forma de onda puede representarse por una serie de Fourier), podemos encontrar las soluciones a las ecuaciones anteriores con variaciones armónicas en el tiempo. Podemos entonces llevar los cálculos al dominio auxiliar de las frecuencias. Utilizamos el **método de resolución por producto de funciones de variables separadas**, y proponemos una solución de la forma:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = \text{Re}[E_y(x) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}] \\ H_z(x, t) = \text{Re}[H_z(x) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}] \end{cases}$$

donde $E_y(x)$ y $H_z(x)$ son los fasores del campo eléctrico y magnético respectivamente (notar que se no se escriben en letra cursiva). Utilizando ésta solución, las ecuaciones diferenciales a las derivadas parciales anteriores se convierten en las siguientes ecuaciones diferenciales a las derivadas totales:

$$\begin{cases} \frac{dE_y}{dx} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot H_z \\ -\frac{dH_z}{dx} = j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot E_y \end{cases}$$

Derivando respecto a x las ecuaciones anteriores y reemplazando con las mismas, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_y}{dx^2} + \omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu \cdot E_y = 0 \\ \frac{d^2 H_z}{dx^2} + \omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu \cdot H_z = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} E_y(x) = E_1 \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot x} + E_2 \cdot e^{+j \cdot \beta \cdot x} \\ H_z(x) = H_1 \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot x} + H_2 \cdot e^{+j \cdot \beta \cdot x} \end{cases}$$

donde llamamos a β **factor o constante de fase**, y es:

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\epsilon \cdot \mu} = \frac{\omega}{v}$$

Por lo tanto, obtenemos finalmente una solución espacio-temporal para ondas planas armónicas en el tiempo de la siguiente manera:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = \text{Re}[E_1 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \beta \cdot x)} + E_2 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \beta \cdot x)}] \\ H_z(x, t) = \text{Re}[H_1 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \beta \cdot x)} + H_2 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \beta \cdot x)}] \end{cases}$$

El segundo término de cada expresión, correspondiente a las ondas reflejadas, estará presente sólo si existen condiciones de contorno que justifiquen la presencia de tal fenómeno, como cambios de medio o superficies reflectoras.

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-11



Impedancia intrínseca:

Sabemos de las ecuaciones de Maxwell que los campos eléctricos y magnéticos son interdependientes, es decir que debe existir una relación entre E_y y H_z , o más particularmente entre las constantes E_1 y H_1 , y entre E_2 y H_2 . Se puede demostrar que la constante que las vincula tiene que ver con el medio y es la **impedancia intrínseca** del mismo, que es:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [Z_0] = \Omega$$

/*Estudiar demostración*/

Por lo tanto, la relación existente entre estas constantes es:

$$\begin{cases} E_1 = Z_0 \cdot H_1 \\ E_2 = -Z_0 \cdot H_2 \end{cases}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-15

Velocidad de fase:

La velocidad de fase es la velocidad de un plano de fase constante de la onda a medida que progresa en el medio en la dirección positiva del eje x . Un plano de fase constante se caracteriza por:

$$\phi = \omega t - \beta x = \text{cte}$$

Si derivamos respecto al tiempo y despejamos la derivada de x , obtenemos la velocidad como:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

Análogamente, para las ondas reflejadas se llega a deducir que su velocidad es igual pero de signo contrario.

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-17

Factor de velocidad:

Como hemos visto, la velocidad de propagación de una onda en un medio dado depende de las características propias del medio, esto es, su constante dieléctrica y su permeabilidad magnética. Si relacionamos el valor de la velocidad de fase de la onda en un medio dado con la velocidad de la luz en el vacío, tendremos una **velocidad de fase relativa**, o **factor de velocidad**, que se expresará como:

$$FV = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}$$

Definimos también un índice de refracción que es la inversa del factor de velocidad:

$$\eta = \frac{1}{FV} = \sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-21

Longitud de onda:

Para medir la longitud de onda incidente es necesario mantener constante el tiempo y recorrer una distancia $x = \lambda$ de tal manera que encontremos el primer punto consecutivo de igual fase. Matemáticamente:

$$e^{j \cdot (\omega t - \beta \cdot x)} = e^{j \cdot (\omega t - \beta \cdot (x + \lambda))}$$

Como el fenómeno es periódico, esto se cumple para:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-18

Constante de propagación:

La constante de propagación es una característica que depende del medio y de la frecuencia de trabajo. Su expresión característica es siempre:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

donde α es una constante que determina la atenuación que sufrirá la onda en dicho medio, y β es la constante de fase, de la que ya hemos hablado. Como en los medios dieléctricos ideales no existe posibilidad de tener una corriente de conducción, la onda progresará sin perder energía, y por lo tanto sin atenuación. Es por ello que, para estos medios, la constante de atenuación es nula:



$$\alpha = 0$$

Entonces, nuestra constante de propagación toma el valor:

$$\gamma = j\beta$$

Puliafito Parte I Pág.: VIII-14

Ondas planas en medios dieléctricos de reducidas pérdidas

Solución general:

Para el caso de propagación de ondas planas en éste tipo de medios, debemos considerar que existe una corriente de conducción aún cuando sea de valor reducido respecto a la corriente de desplazamiento. Por ende, las ecuaciones de Maxwell que vamos a usar se expresan en su forma más general. Operando matemáticamente como en el caso anterior, llegamos a las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \left(\sigma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) \end{cases}$$

El análisis va a ser realizado nuevamente en el dominio de la frecuencia.

Puliafito Parte I Pág.: VIII-26

Dominio de la frecuencia:

Suponemos para el sistema de ecuaciones diferenciales anterior una solución del tipo:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = \text{Re}[E_y(x) \cdot e^{j\omega t}] \\ H_z(x, t) = \text{Re}[H_z(x) \cdot e^{j\omega t}] \end{cases}$$

Utilizando ésta solución, las ecuaciones diferenciales a las derivadas parciales anteriores se convierten en las siguientes ecuaciones diferenciales a las derivadas totales:

$$\begin{cases} \frac{dE_y}{dx} = -j\omega\mu H_z \\ \frac{dH_z}{dx} = -(\sigma + j\omega\epsilon)E_y \end{cases}$$

Derivando respecto a x las ecuaciones anteriores y reemplazando con las mismas, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_y}{dx^2} - (\sigma + j\omega\epsilon) \cdot j\omega\mu E_y = 0 \\ \frac{d^2 H_z}{dx^2} - (\sigma + j\omega\epsilon) \cdot j\omega\mu H_z = 0 \end{cases}$$

Si definimos:

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon) \cdot j\omega\mu$$

Podemos escribir las ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_y}{dx^2} - \gamma^2 E_y = 0 \\ \frac{d^2 H_z}{dx^2} - \gamma^2 H_z = 0 \end{cases}$$

Cuyas soluciones serán:

$$\begin{cases} E_y(x) = E_1 \cdot e^{-\gamma x} + E_2 \cdot e^{+\gamma x} \\ H_z(x) = H_1 \cdot e^{-\gamma x} + H_2 \cdot e^{+\gamma x} \end{cases}$$

Si el medio dieléctrico es de buena calidad, se cumplirá la siguiente condición:



$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} < \frac{1}{100} \quad (\text{condición de dieléctrico})$$

Con lo cual la constante γ , que llamaremos **factor de propagación**, tendrá una expresión aproximada como:

$$\gamma \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

/*Estudiar la demostración*/

Donde vemos que el **factor de atenuación** será:

$$\alpha \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

y el **factor de fase**:

$$\beta \cong \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

Podemos entonces expresar los fasores de campo como:

$$\begin{cases} E_y(x) = E_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + E_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} \\ H_z(x) = H_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + H_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} \end{cases}$$

Finalmente, con estas consideraciones, las expresiones espacio-temporales de las soluciones serán:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = \text{Re} [E_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + E_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}] \\ H_z(x, t) = \text{Re} [H_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + H_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}] \end{cases}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-26

Impedancia intrínseca:

Se puede demostrar que la impedancia intrínseca del medio, que relaciona las constantes en las expresiones anteriores, tiene la siguiente expresión:

$$Z_{0\sigma} = \frac{j \omega \mu}{\gamma}$$

/*Estudiar demostración*/

Utilizando la condición de dieléctrico, podemos llegar a una expresión como la siguiente:

$$Z_{0\sigma} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \left(1 + j \frac{\sigma}{2 \omega \epsilon} \right)$$

/*Estudiar demostración*/

Como vemos, para un medio dieléctrico de reducidas pérdidas, la impedancia es compleja, con un ángulo de fase que llamaremos “**ángulo de pérdidas**” definido por la relación:

$$\delta = \arctan \left(\frac{\sigma}{2 \omega \epsilon} \right)$$

Debido a éste ángulo, si bien las componentes de campo eléctrico y magnético siguen manteniendo la cuadratura espacial, **existirá un desfase temporal entre ambos campos**. Si tomamos, por ejemplo, como referencia el campo eléctrico, las expresiones de los fasores para una onda incidente pura serán:

$$\begin{cases} E_y(x) = E_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \\ H_z(x) = \frac{E_0}{|Z_{0\sigma}|} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{-j\delta} \end{cases}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-31

Velocidad de fase:

Debido a la aproximación que hacemos con la condición de dieléctrico, la velocidad de fase es igual que en el caso del dieléctrico ideal, es decir:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-32

Factor de velocidad:

Debido a la aproximación que hacemos con la condición de dieléctrico, las expresiones del factor de velocidad y del índice de refracción son idénticas a las encontradas para dieléctricos ideales.

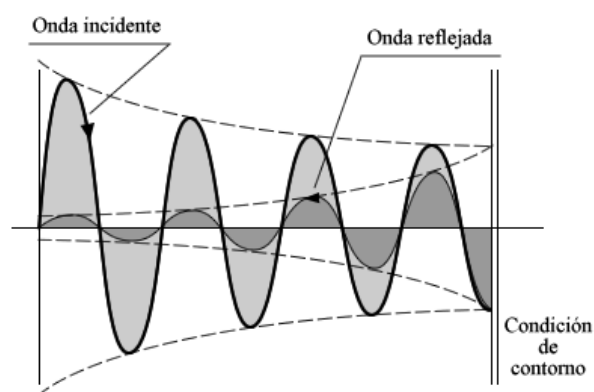
Pulíafito Parte I Pág.: VIII-32

Longitud de onda:

Debido a la aproximación que hacemos con la condición de dieléctrico, la expresión de la longitud de onda es idéntica a la encontrada para dieléctricos ideales.

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-32

Constante de propagación:



Como vimos anteriormente, para el caso de éstos medios dieléctricos imperfectos, existe una atenuación de la onda al progresar por la dirección de propagación. Esto se debe a que el factor de propagación tiene en cuenta una constante de atenuación, que como vimos vale:

$$\alpha \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Por lo tanto, la onda cambiará su amplitud de un extremo al otro del recorrido, como muestra la figura.

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-29

Ondas planas en medios conductores

Solución general:

Un medio se dice conductor cuando la corriente de conducción predomina sobre la corriente de desplazamiento. Para que esto ocurra, debe cumplirse la siguiente relación:

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} > 100 \quad (\text{condición de conductor})$$

Como vemos, la caracterización de conductor o dieléctrico **depende de la frecuencia** de la onda. Esto quiere decir que un medio puede ser conductor para una frecuencia baja, pero para un valor mayor de la misma puede comportarse como un dieléctrico.

Igual que en el caso anterior, trabajaremos en el dominio de la frecuencia.

Pulíafito Parte I Pág.: IX-1 y 5

Dominio de la frecuencia:

Nuevamente usaremos las ecuaciones de Maxwell en su forma más general, y haremos el mismo análisis que anteriormente hasta llegar a la siguiente expresión de la constante de propagación:

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon) \cdot j\omega\mu$$

Utilizando la condición de medio conductor, podemos llegar a que:

$$\gamma \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

/*Estudiar la demostración*/

Con lo que vemos que la constante de atenuación y de fase tienen el **mismo valor numérico**:

$$\alpha \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Dejaremos para el siguiente punto la expresión de las soluciones fasoriales y en el dominio del tiempo, ya que pueden facilitarse introduciendo el concepto de profundidad de penetración.

Pulíafito Parte I Pág.: IX-5

Profundidad de penetración:

Vamos a definir la constante δ como profundidad de penetración en un medio conductor. Su expresión será:

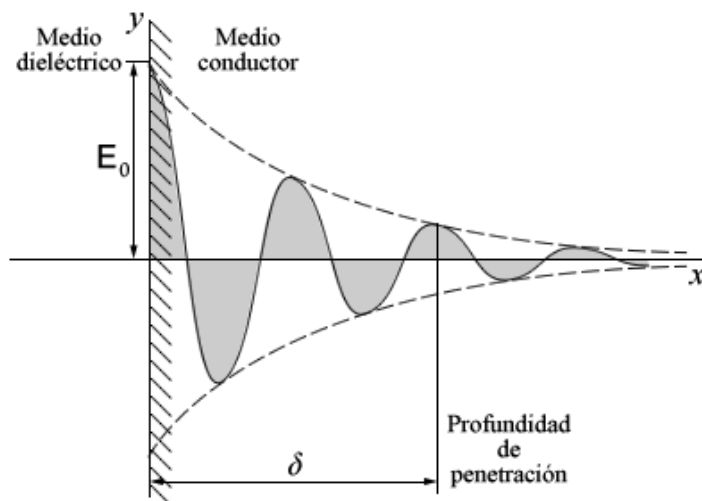
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

y por lo tanto:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$$

Esta cantidad tiene dimensiones de longitud. Una onda electromagnética sólo puede penetrar desde un medio dieléctrico externo al conductor una cantidad definida prácticamente por el valor de δ .

Podemos ahora expresar los fasores de campo eléctrico y magnético para éstos medios. Tendremos en cuenta sólo ondas incidentes, ya que la profundidad de penetración es tan pequeña que, en un conductor de dimensiones mayores, no se apreciarán ondas reflejadas.



Las expresiones fasoriales serán:

$$\begin{cases} E_y(x) = E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{-jx/\delta} \\ H_z(x) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{-jx/\delta} \end{cases}$$

Demostramos aquí el sentido físico de la profundidad de penetración, ya que, para $x = \delta$, el fasor de campo habrá reducido su amplitud aproximadamente al 30% del valor inicial. Esto se aclara en la figura.

Las expresiones en el dominio del tiempo serán:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = \text{Re} \left[E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{j(\omega t - x/\delta)} \right] \\ H_z(x, t) = \text{Re} \left[H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{j(\omega t - x/\delta)} \right] \end{cases}$$

Pulíafito Parte I Pág.: IX-4

Efecto pelicular:

Como vemos, la profundidad de penetración se reduce mientras se aumenta la frecuencia. A éste fenómeno se lo suele llamar efecto pelicular, ya que los efectos de las ondas electromagnéticas se aferran a los conductores en éste espesor. Es por eso que se ahuecan los conductores para determinadas aplicaciones.

Pulíafito Parte I Pág.: IX-10

Impedancia intrínseca:

Se puede demostrar que la impedancia intrínseca del medio, que relaciona las constantes en las expresiones anteriores, tiene la siguiente expresión:

$$Z_{0c} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\gamma}$$

/*Estudiar demostración*/

Reemplazando el valor del factor de propagación, podemos obtener la expresión de la impedancia intrínseca del medio conductor:

$$Z_{0c} \cong \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} + j \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}}$$

/*Estudiar demostración*/

cuya magnitud será:

$$|Z_{0c}| \cong \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{\delta \sigma}$$

y cuya fase será $\phi = 45^\circ$.

Vemos por lo tanto que, como era de esperarse, los medios conductores tienen comportamiento inductivo.

Pulíafito Parte I Pág.: IX-6



Tiempo de relajación:

A partir de la ecuación de continuidad y la ley de Ohm se puede llegar a una ecuación diferencial como la siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0$$

cuya solución es:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

Podemos definir el concepto de **tiempo de relajación**, que sería la constante de tiempo de ésta función, a la magnitud:

$$T_r = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

con lo cual la solución es:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\frac{t}{T_r}}$$

Ésta expresión describe la rapidez con que un medio tiende a reestablecer el equilibrio electrostático, una vez que se ha introducido en él un desbalance de carga ρ_0 .

Pulíafito Parte I Pág.: IX-10

Velocidad de fase:

Para el caso particular de los medios conductores, la velocidad de fase es:

$$v_c = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}$$

Comparando ésta magnitud con la correspondiente a medios dieléctricos, vemos que es muy baja. Por otra parte, observamos que la velocidad de fase es **dependiente de la frecuencia** en medios conductores.

Pulíafito Parte I Pág.: IX-8

Longitud de onda:

Para los medios conductores, la expresión que resulta para la longitud de onda es:

$$\lambda_c = 2\pi \delta$$

/*Estudiar demostración*/

y si la comparamos con la misma para un medio dieléctrico, vemos que es de muy bajo valor.

Pulíafito Parte I Pág.: IX-9

Constante de propagación:

Como se observa en las expresiones de la constante de propagación, la atenuación y la fase dependen de la frecuencia, a diferencia del caso de los dieléctricos en que sólo la fase tenía ésta dependencia.

Pulíafito Parte I Pág.: IX-3

Velocidad de fase y de grupo:

Como vemos en el análisis anterior, las constantes características en los medios conductores dependen de la frecuencia de la onda, por lo tanto, existe una discriminación de frecuencias a medida que una señal compleja progresa en un medio conductor. Es por eso que éste comportamiento hace que a los medios conductores se los denomine “medios dispersivos”. En definitiva, un medio conductor actúa como un filtro pasabajos, dado que la impedancia crece con la frecuencia. También vemos que, como la constante de fase varía con la misma, existirá una distorsión de fase en la onda.

En particular nos interesa la dependencia de la velocidad de fase de la onda con la frecuencia.

Si suponemos un par de ondas cuyas frecuencias sean ω_1 y ω_2 , de tal forma que exista una frecuencia equidistante de ellas:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

y una distancia entre frecuencias:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$



La onda resultante de superponer éste grupo de ondas aparece modulada en amplitud con una señal de frecuencia $\Delta\omega$ y constante de fase $\Delta\beta$. Deberíamos considerar la velocidad de fase de la onda original de frecuencia ω_0 y del par de ondas, a la cual llamaremos **velocidad de grupo**. Ella será:

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

Si hacemos que las frecuencias extremas estén a una distancia infinitesimal, la velocidad de grupo será:

$$u = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Para el caso de los medios dieléctricos, la dependencia entre la constante de fase y la frecuencia es lineal, por lo tanto la relación anterior nos dará el mismo valor que la velocidad de fase de la onda. En cambio, para medios conductores, la dependencia no es lineal.

Podemos entonces clasificar a los medios según ésta dependencia:

1. **Medios no dispersivos:** $u = v$
2. **Medios dispersivos:** $u \neq v$
 - a. **Medios dispersivos normales:** $u < v$
 - b. **Medios dispersivos anormales:** $u > v$

Finalmente, podemos encontrar una expresión alternativa para el cálculo de la velocidad de grupo:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

/*Estudiar demostración*/

Haciendo los reemplazos correspondientes para medios conductores, encontramos que:

$$u_c = 2.v_c$$

/*Estudiar demostración*/

Por lo tanto, **los medios conductores son dispersivos anormales**.

Pulíafito Parte I Pág.: IX-13

Cuadro de resumen de ondas planas:

Comportamiento del medio	Dieléctrico Ideal	Dieléctrico	Conductor
Condición	$\sigma = 0$	$\frac{\sigma}{\omega.\epsilon} < \frac{1}{100}$	$\frac{\sigma}{\omega.\epsilon} > 100$
Constante de atenuación	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\alpha = \sqrt{\frac{\omega.\mu.\sigma}{2}}$ ◇
Constante de fase	$\beta = \omega.\sqrt{\epsilon.\mu}$	$\beta = \omega.\sqrt{\epsilon.\mu}$	$\beta = \sqrt{\frac{\omega.\mu.\sigma}{2}}$ ◇
Constante de propagación	$\gamma = j.\beta$	$\gamma = \alpha + j.\beta$	$\gamma = \alpha + j.\beta$
Impedancia intrínseca del medio	$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$Z_{0\sigma} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \left(1 + j \frac{\sigma}{2.\omega.\epsilon}\right)$	$Z_{0c} = \sqrt{\frac{\omega.\mu}{2.\sigma}} + j \sqrt{\frac{\omega.\mu}{2.\sigma}}$
Velocidad de fase	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon.\mu}}$	$v_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\epsilon.\mu}}$	$v_c = \sqrt{\frac{2.\omega}{\mu.\sigma}}$ ◇
Velocidad de grupo	$u = v$	$u = v_\sigma$	$u_c = 2.v_c$



= característica especial: depende de la frecuencia y de manera alineal

Polarización de ondas planas

Polarización de ondas:

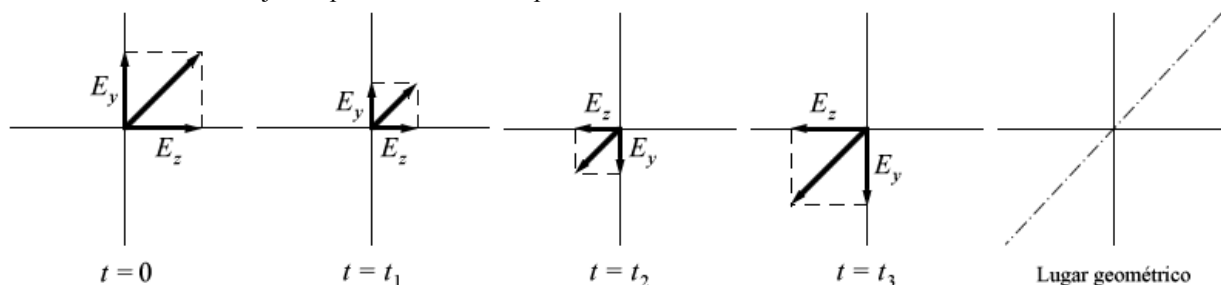
Se define como dirección de polarización de una onda electromagnética a la dirección según la cual se encuentra dirigido el campo eléctrico en un punto fijo del espacio.

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-33

Tipos de polarización:

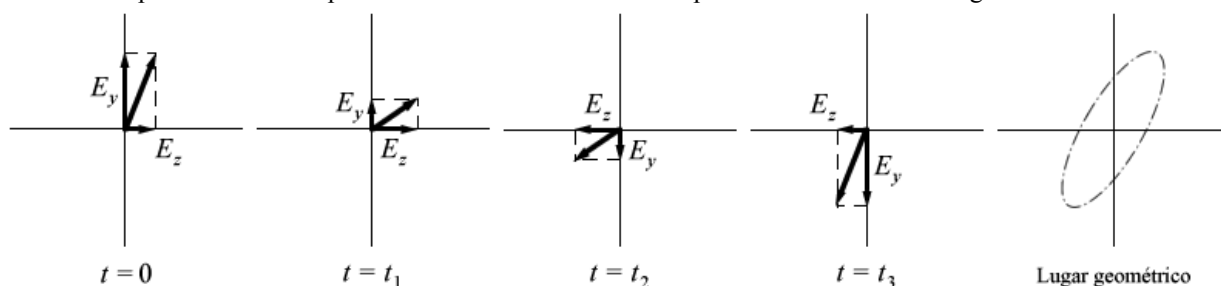
Polarización lineal:

Una onda está polarizada linealmente cuando las direcciones de los vectores representativos del campo eléctrico y magnético no cambian en el tiempo en un cierto punto del espacio. Esto puede ocurrir para cualquier dirección del vector representativo del campo eléctrico en el plano transversal, siempre y cuando no exista defasaje temporal entre las componentes del mismo.



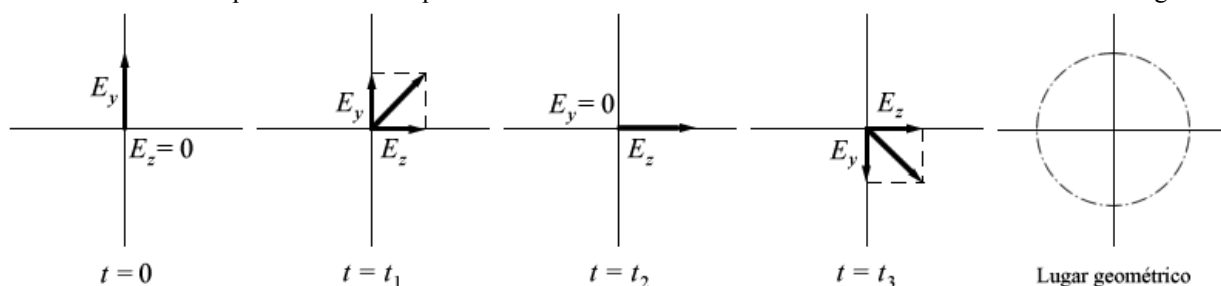
Polarización elíptica:

Se da en el caso de existir un defasaje temporal entre las componentes del campo eléctrico en el plano transversal. Para cada instante dado, la dirección de polarización cambiará y el lugar geométrico del vector campo eléctrico en el plano transversal describirá una elipse. Esto se aclara en la figura.



Polarización circular:

Es un caso particular de la polarización elíptica para cuando los componentes del campo eléctrico son iguales y el defasaje temporal entre ellos es de 90° . En ese caso el lugar geométrico del vector campo eléctrico en el plano transversal describirá una circunferencia. Esto se aclara en la figura.



Pulíafito Parte I Pág.: VIII-33

Relación axil:

Se define como relación axil a la relación existente entre las magnitudes de las componentes del vector representativo del campo eléctrico en el plano transversal E_y y E_z :

$$R_{Ax} = \frac{E_y}{E_z}$$

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-35

Sentido de giro:

Teniendo en cuenta el sentido positivo de avance de la onda en la dirección de propagación, se puede definir un sentido de giro **levógiro** (hacia la izquierda) o **dextrógiro** (hacia la derecha) para el caso general de polarización elíptica, dependiendo del defasaje temporal existente entre las componentes del campo.

Pulíafito Parte I Pág.: VIII-36



Energía y potencia

Energía y potencia en ondas electromagnéticas:

Como habíamos encontrado al tratar campos estacionarios, las densidades volumétricas de energía para campos electrostáticos y magnetostáticos son, respectivamente:

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 \text{ y } w_m = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2$$

Entonces, la densidad de energía de un campo electromagnético en el entorno de un punto dado será función del tiempo, debido al régimen dinámico, y puede computarse considerando los valores instantáneos de ambos tipos de campo:

$$w_{em} = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\epsilon \cdot E^2 + \mu \cdot H^2)$$

Si consideramos un volumen finito $\Delta\tau$, la energía total de campo electromagnético almacenada en el mismo es:

$$W_{em} = \iiint_{\Delta\tau} w_{em} \cdot d\tau$$

Si la energía varía en el tiempo podrá definirse una potencia instantánea:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{\Delta\tau} w_{em} \cdot d\tau$$

Pulíafito Parte I Pág.: XI-1

Vector de Poynting:

La energía irradiada por una fuente y la captada por un receptor son muy distintas, debido a que la primera se propaga en el medio ocupando volúmenes rápidamente crecientes. Vamos a definir un flujo de potencia por unidad de área para una superficie cerrada correspondiente al punto P:

$$p(t) = \oiint_S \vec{\pi} \cdot d\vec{S}$$

Donde suponemos un vector $\vec{\pi}$ adecuadamente definido que tendrá la dirección del flujo de energía de la onda electromagnética. Podemos igualar ésta potencia a la definida anteriormente para encontrar el vector:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Delta\tau} w_{em} \cdot d\tau = - \oiint_S \vec{\pi} \cdot d\vec{S}$$

El signo menos se debe a la convención energética de potencia entrante. Trabajando con ésta expresión, encontramos que el vector $\vec{\pi}$, al que llamaremos **vector de Poynting**, representa la potencia de campo electromagnético por unidad de área.

Pulíafito Parte I Pág.: XI-2

Vector de Poynting en medios dieléctricos ideales:

Se puede demostrar que la expresión del vector de Poynting es:

$$\vec{\pi} = \vec{E} \times \vec{H}$$

/*Estudiar demostración*/

Por consiguiente, éste vector tiene una dirección perpendicular al plano que forman los vectores de campo eléctrico y magnético de la onda plana considerada, y un sentido que sigue la propagación de la onda. Su divergencia tiene el valor:

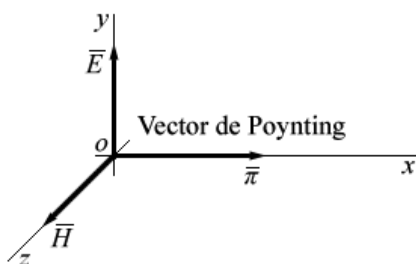
$$\nabla \cdot \vec{\pi} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \cdot E^2 + \mu \cdot H^2)$$

Si la onda considerada varía armónicamente en el tiempo, podemos recurrir al análisis fasorial y encontrar los fasores eficaces de campo, y el fasor densidad media de potencia:

$$\begin{cases} E_{yef} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-j \cdot \beta \cdot x} \\ H_{zef} = \frac{E_0}{\sqrt{2} \cdot Z_0} e^{-j \cdot \beta \cdot x} \end{cases} \quad \pi_{xmed} = E_{yef} \cdot H_{zef}^*$$

Por lo que el vector densidad media de potencia es:

$$\vec{\pi}_{med} = \frac{E_0^2}{2 \cdot Z_0} \hat{x}$$





La densidad superficial instantánea de potencia será:

$$\pi_x(x, t) = \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - \beta x)$$

Como vemos, ésta densidad oscila con el doble de frecuencia que los campos.

La potencia media, en correspondencia con una dada superficie será:

$$P = \iint_S \bar{\pi}_{\text{med}} \cdot d\bar{S}$$

En las aplicaciones más frecuentes se desea evaluar la potencia recibida por una antena. Como generalmente la superficie S (superficie eficaz de la antena) es pequeña comparada con el frente de onda (grande porque la onda se expande en todo el espacio), puede aproximarse la integración y de esa manera obtenemos:

$$P = \bar{\pi}_{\text{med}} \cdot S = \frac{S E_0^2}{2 Z_0}$$

Pulíafito Parte I Pág.: XI-4

Vector de Poynting en medios dieléctricos imperfectos:

Definimos nuevamente al vector de Poynting como en la sección anterior:

$$\bar{\pi} = \bar{E} \times \bar{H}$$

Pero ahora su divergencia vale:

$$-\nabla \cdot \bar{\pi} = \bar{E} \cdot \bar{J}_c + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

es decir aparece un término que indica la disipación de potencia por efecto Joule, mientras que el otro término indica la energía almacenada en el campo electromagnético existente.

Como ahora la impedancia del medio es compleja ($Z_0 = |Z_0| e^{j\phi}$), tendremos densidad de potencia activa y reactiva. Se puede demostrar que éstas valen:

$$\pi_{\text{med act}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z_0|} \cos(\phi) \quad \text{y} \quad \pi_{\text{med react}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z_0|} \sin(\phi)$$

/*Estudiar la demostración*/

Con lo que podemos calcular las potencias activa y reactiva para una cierta superficie:

$$P = \iint_S \bar{\pi}_{\text{med act}} \cdot d\bar{S} \quad \text{y} \quad Q = \iint_S \bar{\pi}_{\text{med react}} \cdot d\bar{S}$$

Pulíafito Parte I Pág.: XI-9

GUÍAS DE ONDAS

El fenómeno de guiado de ondas

Condiciones de contorno para el campo electromagnético:

Caso de dos medios dieléctricos ideales	Caso de dos medios reales cualesquiera	Caso de un medio dieléctrico y un conductor perfecto
En la superficie de separación no existen fuentes de campo electromagnético	Existirá una distribución superficial de carga eléctrica σ que aparece en la superficie de separación.	El medio 2 tiene conductividad infinita. j_{cs} es la densidad lineal de corriente de conducción superficial en la separación de los medios.
$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1t} = H_{2t} \\ D_{1n} = D_{2n} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$	$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1t} = H_{2t} \\ D_{1n} - D_{2n} = \sigma \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$	$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} = 0 \\ H_{2t} = 0 \\ H_{1t} = j_{cs} \\ D_{1n} = \sigma \\ D_{2n} = 0 \\ B_{1n} = B_{2n} = 0 \end{cases}$

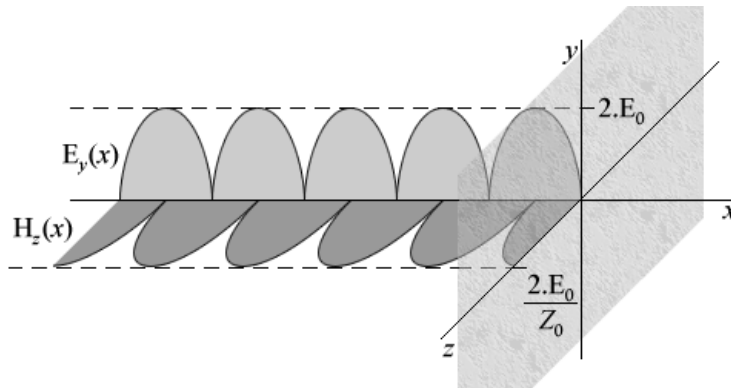
/*Estudiar demostraciones*/

Pulíafito Parte II Pág.: XIII-2



Óptica electromagnética:

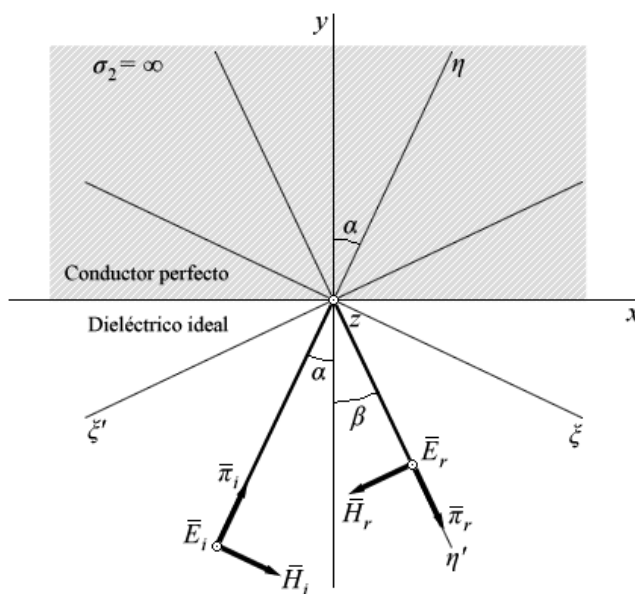
Incidencia normal sobre conductor perfecto:



Se puede demostrar que si una onda que viaja sobre un medio dieléctrico ideal incide normalmente sobre la superficie que limita un medio conductor perfecto, se producirá una reflexión total normal a la superficie de separación. Esto se comprueba mediante observar la aparición de una onda estacionaria pura, debida a la onda reflejada, con el doble de la amplitud y la mitad de la longitud de onda inicial.

/*Estudiar demostración*/
Pulafito Parte II Pág.: XIII-7

Incidencia oblicua sobre conductor perfecto:



Se puede demostrar que si una onda que viaja sobre un medio dieléctrico ideal incide con un cierto ángulo α respecto a la normal sobre la superficie que limita un medio conductor perfecto, se producirá una reflexión total de la onda con un ángulo β respecto a la normal, de tal manera que se cumplirá que:

$$\alpha = \beta$$

La velocidad de propagación según el eje x , paralelo al plano de separación, se puede calcular como:

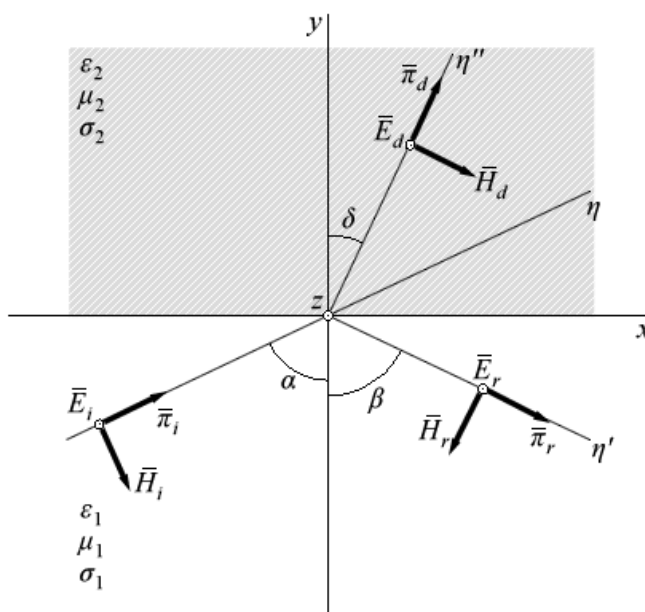
$$v_x = \frac{v_1}{\sin(\alpha)}$$

Ésta resulta ser mayor que la velocidad verdadera de la onda, pero es así porque estamos considerando un movimiento componente.

/*Estudiar demostraciones*/

Pulafito Parte II Pág.: XIII-9

Reflexión y refracción sobre dos medios cualesquiera:



Se van a considerar dos medios cualesquiera, con sus respectivas constantes σ , ϵ y μ . La onda reflejada forma un ángulo β respecto a la normal al plano, y la onda refractada forma un ángulo δ respecto a la misma.

Las relaciones existentes entre estos ángulos y el de incidencia α son las siguientes:

$$\alpha = \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

Quedando definidas las condiciones de contorno que se aplicarán a cada caso, dependiendo cuál de los dos vectores de campo el paralelo a la superficie de separación de los medios.

/*Estudiar demostración*/

Pulafito Parte II Pág.: XIII-15

Ondas superficiales:

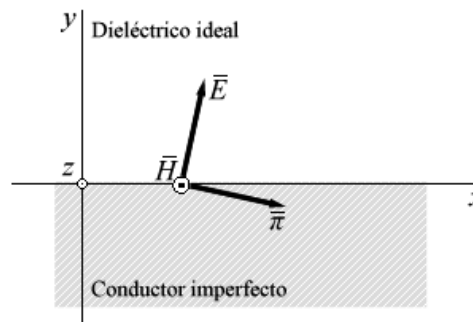
Toda onda que se propague por un medio dieléctrico en forma paralela a un medio conductor tiende a “aferrarse” a dicho medio, debido a que el vector de Poynting tiende a inclinarse hacia el interior del mismo.

Aún cuando el campo, teóricamente, se extiende hasta el infinito en un medio dieléctrico ideal, la cantidad de energía del campo es relativamente mayor en el espacio que va entre la superficie de separación y algunas longitudes de onda hacia el dieléctrico, lo cual se traduce en un proceso de guiado de ondas.

En particular, para guiar ondas con un solo conductor, necesitamos del “soporte” de alguna proporción de campo en su interior, es por ello que el conductor debe ser imperfecto, para poder admitir componentes de campo dentro de él, si bien esto supone una cierta pérdida de energía por efecto Joule. Éste “soporte” es lo que denominaremos **onda superficial**.

Como puede verse en la figura, es necesario que las líneas de flujo del campo eléctrico estén ligeramente curvadas hacia el conductor, para que el vector de Poynting esté dirigido hacia el interior del mismo. Si estuviéramos utilizando un conductor perfecto, no existirían componentes de campo en su interior y por lo tanto, no habría posibilidad de aferramiento.

Para el caso de un dieléctrico ideal y un conductor no ideal, el modo de propagación T.E.M. degenera en un **modo T.M.**, debido a la componente tangencial de campo eléctrico. La velocidad de propagación de la onda será menor que la original, por lo que decimos que será una onda lenta.



Pulíafito Parte II Pág.: XIII-29

Impedancia superficial:

Cuando el espesor del conductor es mucho mayor que la profundidad de penetración de la onda, podemos definir una impedancia superficial constante:

$$Z_s = \frac{E_{0d}}{j_{cs}} = \frac{\gamma_2}{\sigma_2}$$

es decir, la componente refractada del campo eléctrico en el conductor sobre la densidad lineal de corriente en la superficie. Éste concepto es análogo al de “impedancia de entrada”. Su valor resultará **igual a la impedancia intrínseca del medio conductor**.

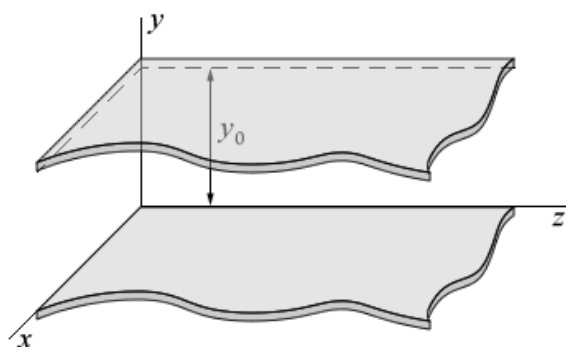
/*Estudiar demostración*/

Si el espesor del conductor es menor que la profundidad de penetración, el valor no coincidirá con el dado, debido a la aparición de una onda reflejada en su interior.

La **potencia disipada** por efecto Joule será la equivalente a una densidad lineal de corriente con el valor eficaz dado circulando por una resistencia igual al valor real de la impedancia superficial.

Pulíafito Parte II Pág.: XIII-33

Guía de onda de planos paralelos infinitos



El guiado de ondas con un solo conductor tiene dificultades técnicas. Además, resulta más conveniente confinar la energía a un espacio reducido y aislado. Es por ello que las guías de ondas prácticas son de un solo conductor pero huecas. En ésta parte se va a estudiar una guía de onda ideal, formada por dos planos paralelos conductores de dimensiones infinitas, para luego generalizar al caso de las guías de ondas prácticas. La figura muestra la configuración utilizada en éste análisis.

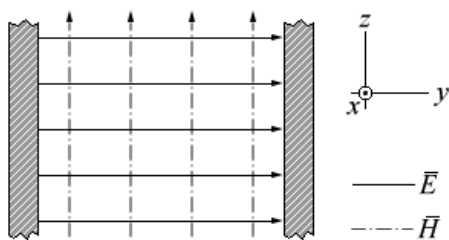
Pulíafito Parte II Pág.: XIII-42

Modos de propagación:

Para estudiar los modos de propagación se supondrá que los planos son conductores perfectos.

T.E.M.:

La única posibilidad de acomodar en el seno de ésta guía un modo T.E.M. es considerar que el campo eléctrico está orientado según el eje y y el campo magnético según el eje z , ya que para cumplir las condiciones de contorno, el campo eléctrico debe ser normal a las superficies conductoras y el campo



magnético será tangencial a ellas, y su valor en ese lugar será igual a la densidad lineal de corriente de conducción en dichas superficies. Los fasores E_y y H_z serán funciones únicamente de la coordenada x , y por lo tanto la solución corresponderá a una **onda plana uniforme**, progresiva, propagándose según la dirección positiva del eje x . Otra conclusión importante es que no existirá restricción en cuanto a las frecuencias con las que se opere el sistema, ya que la limitación espacial propuesta no puede afectar al modo T.E.M., cualquiera sea la frecuencia.

Puliafito Parte II Pág.: XIII-43

Modos de orden superior:

Como en los modos de orden superior existen componentes de campo en la dirección de propagación, esperamos que cada fasor componente del campo eléctrico y magnético sea, en general, función de las tres coordenadas. Por esto, no es posible considerar según el eje x una variación exponencial con una constante de propagación $\gamma = j\beta$ (medios ideales) como admitimos en el caso anterior. Proponemos entonces una constante de propagación más general:

$$\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + j\bar{\beta}$$

En ella vemos un término de atenuación, a pesar de haber considerado medios ideales. Esto se debe a que para modos de orden superior existen limitaciones de operación para las distintas frecuencias, y por lo tanto, matemáticamente es válido el concepto supuesto.

Trabajado con funciones armónicas en el tiempo a partir de las ecuaciones de Maxwell, podemos llegar a las siguientes expresiones de definición generales de las componentes de campo:

$$\begin{cases} E_y = -\frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ H_z = -\frac{j\omega\epsilon}{k^2} \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ E_z = \frac{j\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ H_y = -\frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{cases}$$

/*Estudiar demostración*/

Donde definimos el valor:

$$k^2 = \bar{\gamma}^2 + \omega^2 \epsilon \mu$$

Puliafito Parte II Pág.: XIII-48

T.E.:

Utilizando las ecuaciones anteriores y la premisa que $E_x = 0$, obtenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} E_z = E_0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ H_x = -\frac{n\pi}{j\omega\mu y_0} E_0 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ H_y = -\frac{\bar{\gamma}}{j\omega\mu} E_0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \end{cases}$$

siendo n un número entero, y donde la constante general de propagación será:

$$\bar{\gamma} = j \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{n\pi}{y_0}\right)^2}$$

Aquí encontramos la **condición de operación de la guía**. Si ésta constante toma un valor imaginario puro, habrá propagación sobre el eje x . Si, en cambio, toma un valor real, no habrá propagación y por lo tanto no se podrá operar la guía. El parámetro que determina esto es la frecuencia. Tendremos un valor imaginario puro si:

$$\omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu > \left(\frac{n \cdot \pi}{y_0} \right)^2$$

y por lo tanto, la **frecuencia de corte** a partir de la cual se puede operar la guía será:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \frac{n \cdot \pi}{y_0} = \frac{n \cdot \pi \cdot v}{y_0}$$

Si la frecuencia es menor que la de corte, la constante de propagación será un valor real, lo que no permite progresar a la onda, pero ésta constante de atenuación no provoca pérdida de energía, sino que produce una reflexión de las ondas de frecuencias menores que la de corte.

La longitud de onda de corte es:

$$\lambda_c = \frac{2 \cdot y_0}{n}$$

Como vemos, existirán distintos modos de propagación según sea el valor de n considerado. El más bajo para el modo T.E. en ésta guía es para $n = 1$. Como vemos, cada valor de n trae aparejado un valor de frecuencia de corte por sobre el cual la guía es operable.

La **longitud de onda a lo largo del eje x** es:

$$\bar{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{\bar{\beta}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

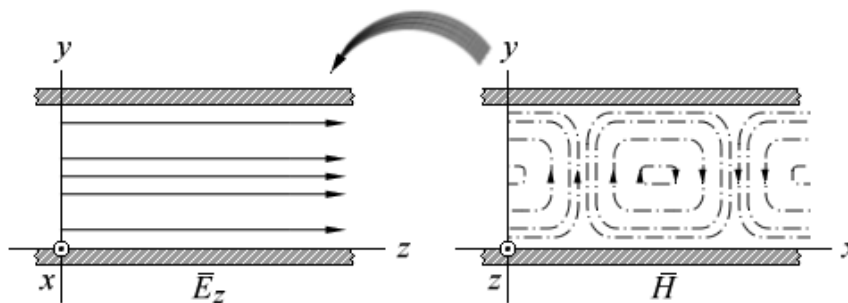
La **velocidad de fase según el eje x** será:

$$\bar{v} = \frac{\omega}{\bar{\beta}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

Vemos que a medida que la frecuencia crece, la longitud de onda se hace despreciable frente a la de corte y se produce que $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda$ y $\bar{v} \rightarrow v$ como si el medio fuese ilimitado. Esto se justifica diciendo que mientras mayor es la frecuencia, menor es la longitud de onda respecto de las dimensiones de la guía.

Las expresiones de campo quedan en consecuencia:

$$\begin{cases} E_z = E_0 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \\ H_x = -\frac{n \cdot \pi}{j \cdot \omega \cdot \mu \cdot y_0} E_0 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \\ H_y = -\frac{\bar{\beta}}{\omega \cdot \mu} E_0 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \end{cases}$$



/*Estudiar todo el desarrollo*/

Puliafito Parte II Pág.: XIII-54

T.M.:

Operando de forma análoga al caso anterior, llegamos a las siguientes expresiones:



$$\begin{cases} H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ E_x = -\frac{n\pi}{j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot y_0} H_0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ E_y = \frac{\bar{\gamma}}{j \cdot \omega \cdot \epsilon} H_0 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \end{cases}$$

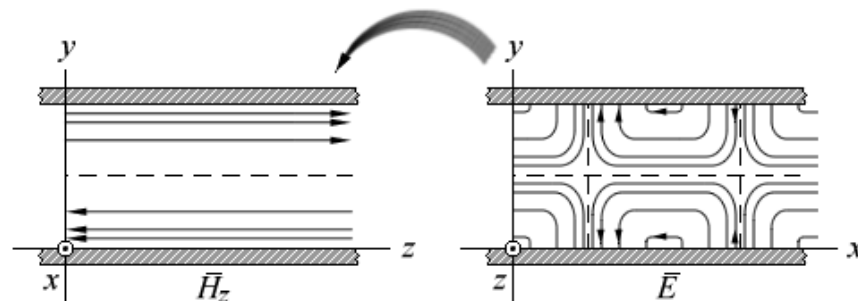
siendo n nuevamente un número entero. Las expresiones de constante de propagación, frecuencia de corte y longitud de onda y velocidad a lo largo del eje x serán las mismas que para el caso anterior, es decir:

$$\bar{\gamma} = j \sqrt{\omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu - \left(\frac{n\pi}{y_0}\right)^2} \quad \omega_c = \frac{n\pi \cdot v}{y_0}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad \bar{v} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

Las expresiones de campo quedan en consecuencia:

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \\ E_x = -\frac{n\pi}{j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot y_0} H_0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \\ E_y = \frac{\bar{\beta}}{\omega \cdot \epsilon} H_0 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \end{cases}$$



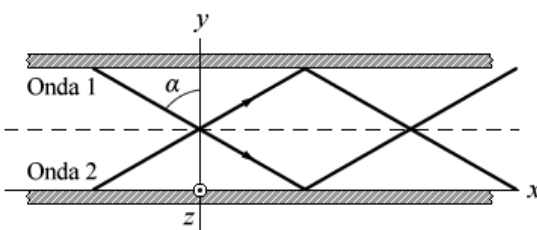
/*Estudiar todo el desarrollo*/

Vemos de inmediato que existe una importante diferencia con el modo T.E.: aquí aparece la posibilidad de tener un modo fundamental con $n = 0$. En éste caso se produce que

$E_x = H_x = 0$, con lo que vemos que es un modo T.E.M. En consecuencia, podemos decir que el modo T.E.M. es una degeneración del modo T.M. al considerar el orden más bajo de operación.

Puliafito Parte II Pág.: XIII-58

Modos de orden superior descriptos mediante ondas planas componentes:



Para los modos de orden superior, la longitud de onda y la velocidad de fase a lo largo del eje x resultan ser mayores que los que se medirían con la misma frecuencia en un espacio ilimitado. Las expresiones dadas para éstos son similares a las encontradas para el caso de reflexión de ondas sobre una superficie conductora. Es por ello que se puede imaginar que dos ondas planas y uniformes componentes sean lanzadas tal como lo muestra la figura, con ángulos de incidencia α medidos respecto de la normal de ambas paredes de la guía, producen modos de orden superior cuando sean de la misma frecuencia e igual amplitud, debiendo determinarse la fase relativa entre ambas.



Además será necesario imponer la condición de que la onda estacionaria tenga una longitud de onda, según el eje y , tal que:

$$\bar{y} = y_0 = \frac{\lambda}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{\lambda_c}{2}$$

Podemos ver que si $\alpha = 0$, que corresponde a tener $\lambda = \lambda_c$, la onda no puede progresar por la guía, por más que se cumplan las condiciones de contorno.

Puliafito Parte II Pág.: XIII-61

Velocidad de propagación de la energía:

De la descripción anterior de los modos compuestos, mediante la suposición de dos ondas planas componentes, podemos decir que la energía de campo progresa con una velocidad inferior a la de las ondas, debido a la trayectoria inclinada:

$$v_{\text{energía}} = v \cdot \sin(\alpha)$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda plana en el medio dieléctrico.

Puliafito Parte II Pág.: XIII-64

Impedancias de ondas en guías:

Como la propagación en guías es un fenómeno que depende de las tres coordenadas espaciales, podemos definir impedancias de onda o impedancias transversas mediante las relaciones entre las componentes de campo eléctrico y magnético.

Eje de propagación	eje x	eje y	eje z
Plano transverso	yoz	zox	xoy
Impedancias	$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z}$	$Z_{zx} = \frac{E_z}{H_x}$	$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y}$
	$Z_{zy} = -\frac{E_z}{H_y}$	$Z_{xz} = -\frac{E_x}{H_z}$	$Z_{yx} = -\frac{E_y}{H_x}$

Puliafito Parte II Pág.: XIII-66

Atenuación en guías de ondas:

Considerando que los materiales con los que se fabrican las guías de onda no son perfectos, es que es lógico suponer que se produce un fenómeno de atenuación a medida que la onda progresa en ellos, caracterizado por una constante α (no confundir con el ángulo de incidencia de las ondas planas), que es distinta a la definida como $\bar{\alpha}$ en los modos de orden superior. Ésta última representa la posibilidad o no de operar la guía a una frecuencia dada y con un modo seleccionado, y no implica pérdida de energía. En cambio, la que caracteriza los fenómenos de atenuación si supone dicha pérdida y es válida para la banda pasante de frecuencias en la que opera la guía. Ésta constante de atenuación debe computar las pérdidas en el conductor y en el dieléctrico, es por eso que la definimos como:

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d$$

Donde la atenuación en el conductor será:

$$\alpha_c = -\frac{dP(x)/dx}{2 \cdot P(x)}$$

es decir, la potencia perdida por unidad de longitud sobre dos veces la potencia emitida.

La atenuación debida al dieléctrico tendrá una expresión como la siguiente:

$$\alpha_d = \omega \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} \sqrt{\frac{\mu \cdot \epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} - 1}$$

Puliafito Parte II Pág.: XIII-67 y XIV-24

Guías de onda huecas de un solo conductor:

Analizaremos las guías de onda huecas de un solo conductor, donde a diferencia del guiado mediante un solo conductor en el espacio dieléctrico ilimitado, necesitaremos que el material conductor (y también el dieléctrico) sea lo más perfecto posible, para evitar la penetración de la onda en él, vale decir, para obtener “reflexiones casi totales” y así perder la menor cantidad de energía posible durante la propagación de la onda. Es importante recordar

que para el caso de dieléctrico ilimitado, necesitábamos la imperfección del conductor para poder aferrar la onda a él y así guiarla en el espacio.

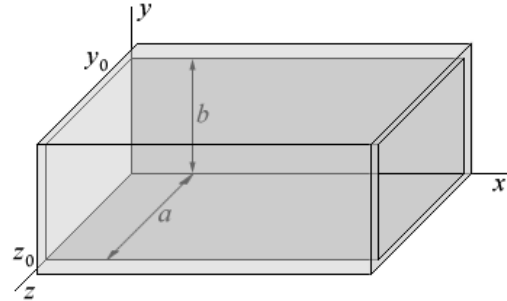
Las guías de onda huecas pueden ser **uniformes**, que son aquellas cuyas características físicas y geométricas se mantienen a lo largo del eje del sistema; o **no uniformes**, en el caso contrario.

Pulíafito Parte II Pág.: XIV-1

Guía de onda rectangular

Ecuaciones generales:

Utilizaremos un conductor hueco de sección rectangular con ancho $z_0 = a$ y alto $y_0 = b$, como muestra la figura, con un dieléctrico en su interior de constantes ϵ y μ . Referiremos a un sistema de coordenadas cartesianas. Por razones de operación se hace $b < a$, y habrá que obtener una relación b/a conveniente para no propagar modos indeseados, como se verá más adelante.



Se parten de las ecuaciones de Maxwell y de onda, en el dominio de las frecuencias y se pretende encontrar ecuaciones de cada componente de campo en función de las componentes sobre el eje de propagación, vale decir E_x y H_x . En éste caso, a diferencia de las ecuaciones en línea de transmisión de planos paralelos infinitos, no podrá eliminarse las variaciones respecto del eje z , debido a las condiciones de contorno impuestas por las paredes verticales de la guía. Partiremos entonces de las ecuaciones de Maxwell y de las ecuaciones de onda para éste caso:

$$\begin{cases} E_y = -\frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{j\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ H_z = -\frac{j\omega\epsilon}{k^2} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ E_z = \frac{j\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ H_y = -\frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{j\omega\epsilon}{k^2} \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\gamma}^2 E_x + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu E_x = 0 \\ \bar{\gamma}^2 H_x + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu H_x = 0 \end{cases}$$

$$k^2 = \bar{\gamma}^2 + \omega^2 \epsilon \mu$$

/*Estudiar las deducciones*/

Pulíafito Parte II Pág.: XIV-2

Modo T.E.:

Operando con las ecuaciones anteriores para un modo T.E. ($E_x = 0$) se llega a que la solución para la componente sobre el eje de propagación es:

$$H_x = H_0 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x}$$

Y reemplazando ésta en las demás componentes encontramos el resto de las ecuaciones que describen la onda en el interior de la guía:

$$\begin{cases} E_y = H_0 \frac{j\omega\mu}{k^2} \frac{m\pi}{z_0} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ H_z = H_0 \frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{m\pi}{z_0} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ E_z = H_0 \frac{j\omega\mu}{k^2} \frac{n\pi}{y_0} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ H_y = H_0 \frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{n\pi}{y_0} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \end{cases}$$

y siendo:

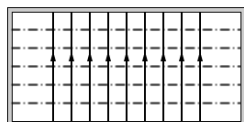
$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{z_0} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_0} \right)^2$$

Obtenemos una expresión más general para la constante $\bar{\gamma}$:

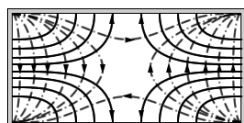
$$\bar{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{z_0} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_0} \right)^2 - \omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu}$$

Pulíafito Parte II Pág.: XIV-5

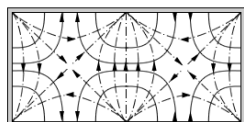
Condiciones de contorno:



T.E._{1,0}



T.E._{1,1}



T.E._{2,1}

Las condiciones de contorno impuestas por el sistema se manifiestan en las

constantes $\frac{m\pi}{z_0}$ y $\frac{n\pi}{y_0}$, ya que éstas indican según los valores m y n la

cantidad de semilongitudes de onda que pueden “acomodarse” en la línea de transmisión, para esa frecuencia de operación, determinando distintos modos de propagación. Vemos de las ecuaciones que el modo más bajo posible de operación es el correspondiente a $m = 1$ y $n = 0$, el cual se denomina modo dominante.

Los distintos modos T.E. se indican en general de la forma T.E._{m,n}. Siempre va primero el subíndice correspondiente al ancho de la guía y segundo el del alto. En la figura vemos las configuraciones de campo para algunos ejemplos de modos de propagación T.E. en guías de ondas rectangulares.

Caso particular: Modo T.E._{1,0}:

Para éste caso las ecuaciones y parámetros se reducen a:

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ H_x = H_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \\ E_y = H_0 \cdot \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{k^2} \cdot \frac{\pi}{z_0} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \\ H_z = H_0 \cdot \frac{j \cdot \bar{\beta}}{k^2} \cdot \frac{\pi}{z_0} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-j \cdot \bar{\beta} \cdot x} \\ E_z = H_y = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{\omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu - \left(\frac{\pi}{z_0}\right)^2}$$

$$f_c = \frac{v}{2 \cdot z_0} = \frac{1}{2 \cdot a \cdot \sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

$$\lambda_c = 2 \cdot z_0 = 2 \cdot a$$

Pulíafito Parte II Pág.: XIV-11

Frecuencia de corte:

Al igual que en el caso de la guía de onda de planos paralelos infinitos, el umbral de operación de la guía se halla cumpliendo la relación:

$$\omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu = k^2$$

por lo tanto, la frecuencia de corte será:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{z_0} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_0} \right)^2}$$

Pulíafito Parte II Pág.: XIV-10

Velocidad y longitud de onda:

La velocidad de fase y la longitud de onda tienen expresiones análogas al caso de planos paralelos infinitos, es decir:

$$\bar{v} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

Pulíafito Parte II Pág.: XIV-10

Impedancia característica:

Definimos la impedancia transversal o característica de la guía, en la banda pasante a la expresión:

$$Z_{yz} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

Siendo $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ la impedancia característica del medio dieléctrico y λ_c la longitud de onda correspondiente al orden respectivo.

Pulíafito Parte II Pág.: XIV-12

Modo T.M.:

Operando de igual manera que para el caso anterior, pero con $H_x = 0$, obtenemos la siguiente solución para la componente sobre el eje de propagación en los modos T.M.:

$$E_x = E_0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x}$$

Y reemplazando ésta en las demás componentes encontramos el resto de las ecuaciones que describen la onda en el interior de la guía:

$$\begin{cases} E_y = -E_0 \frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{n\pi}{y_0} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ H_z = -E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k^2} \frac{n\pi}{y_0} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ E_z = -E_0 \frac{\bar{\gamma}}{k^2} \frac{m\pi}{z_0} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \\ H_y = E_0 \frac{j\omega\epsilon}{k^2} \frac{m\pi}{z_0} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{y_0} y\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} \end{cases}$$

siendo nuevamente $k^2 = \left(\frac{m\pi}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_0}\right)^2$ y:

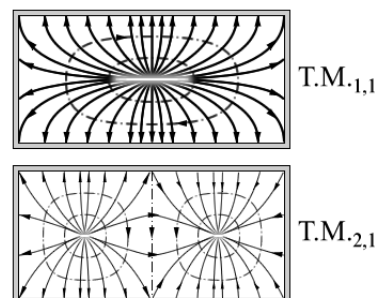
$$\bar{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_0}\right)^2 - \omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu}$$

Por lo tanto **se mantienen las relaciones fundamentales que definen la frecuencia de corte, longitud de onda y velocidad de fase** y sólo difiere la expresión de la impedancia intrínseca, que ahora será:

$$Z_{yz} = Z_0 \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$$

Analizando las ecuaciones, vemos que el modo de más baja frecuencia posible es para $m = n = 1$, es decir T.M._{1,1}.

La figura muestra algunas configuraciones de campo para los modos T.M.



Pulíafito Parte II Pág.: XIV-14

Incompatibilidad con el modo T.E.M.:

Las expresiones de campo obtenidas para describir configuraciones T.E. y T.M. permiten anticipar que no es posible lograr la existencia de un modo fundamental T.E.M. para algún juego particular de valores m y n , lo cual se puede demostrar físicamente también. Mediante esa demostración vemos que para sostener un campo en el interior de una guía rectangular, es imprescindible que exista un conductor interno o una componente de campo en el sentido del eje de propagación.

Pulíafito Parte II Pág.: XIV-16

Propagación de modos indeseados:

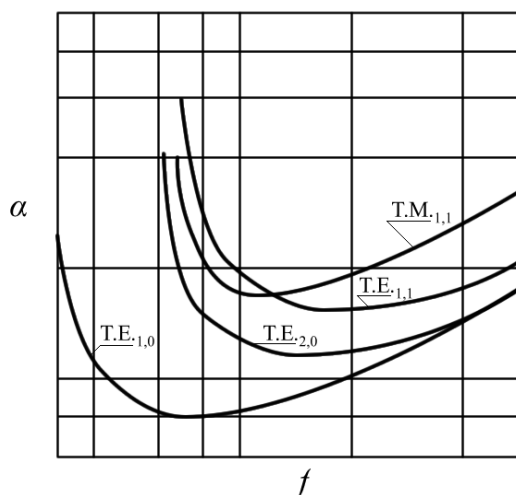
Cuando la frecuencia en la que operamos la guía es suficientemente elevada respecto de la frecuencia de corte de un cierto modo, la guía podrá propagar simultáneamente todos aquellos modos de orden superior que sean compatibles con la geometría del sistema. En éste caso uno de los modos tiene el campo más intenso comparado con los otros, por lo cual se dice que éste es el campo predominante en la guía, pero aún así se está desperdiciando energía en los otros modos que generalmente son indeseados. Por eso hay que tener especial consideración con las condiciones de excitación y simetría de la guía.

Sin embargo, el modo seleccionado será el único que se establezca si las condiciones de simetría se mantienen a lo largo de toda la guía. Por ello es imprescindible dimensionar relativamente la guía en sus dimensiones a y b , respecto de la longitud de onda a propagar.

Puliafito Parte II Pág.: XIV-18

Atenuación:

Si la guía de onda contiene dieléctrico aire, la atenuación se reduce a $\alpha \cong \alpha_c$, es decir, que es más significativa la pérdida en el conductor. Como vemos en las curvas de atenuación para los distintos modos en la guía de onda rectangular, en todos los casos se alcanza un valor mínimo de atenuación para una cierta frecuencia, y luego ésta aumenta indefinidamente a medida que se incrementa la frecuencia.



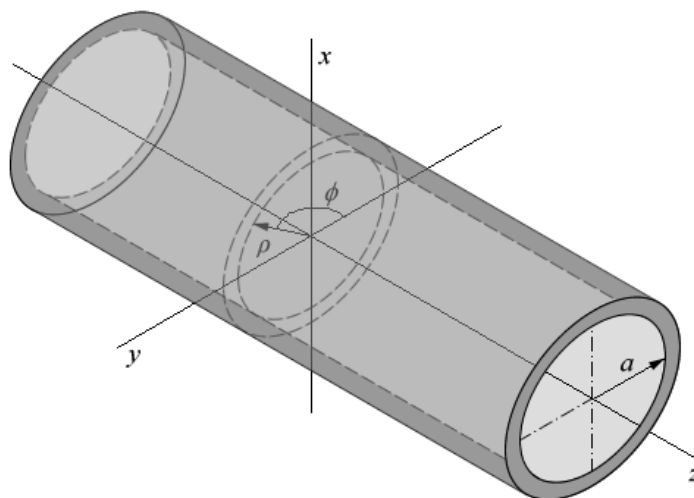
Puliafito Parte II Pág.: XIV-20

Guía de onda cilíndrica de sección circular

Consideraciones generales:

Utilizaremos un conductor hueco de sección circular con radio interno $\rho_0 = a$, como muestra la figura, con un dieléctrico en su interior de constantes ϵ y μ . Referiremos a un sistema de coordenadas cilíndricas, donde ahora la dirección de propagación será el eje z .

Puliafito Parte II Pág.: XIV-29



Modo T.M.:

Las soluciones para el modo T.M. son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = E_0 \cdot J_m \left(\frac{2\pi \cdot \rho}{\lambda_c} \right) \cos(m \cdot \phi) \\ E_\phi = E_0 \frac{\gamma \cdot m}{\rho} \left(\frac{a}{x^{(n)}} \right)^2 \cdot J_m \left(\frac{2\pi \cdot \rho}{\lambda_c} \right) \cdot \sin(m \cdot \phi) \\ E_\rho = -E_0 \cdot \gamma \left(\frac{a}{x^{(n)}} \right)^2 \cdot J'_m \left(\frac{2\pi \cdot \rho}{\lambda_c} \right) \cdot \cos(m \cdot \phi) \\ H_\phi = \frac{\omega \cdot \epsilon}{\beta} E_\rho \\ H_\rho = -\frac{\omega \cdot \epsilon}{\beta} E_\phi \end{array} \right.$$



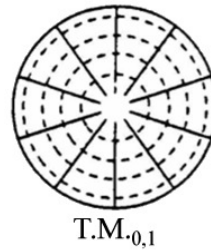
siendo J_m una función de Bessel de primera clase de orden m y

J'_m su derivada, y $x^{(n)}$ las raíces de esas funciones.

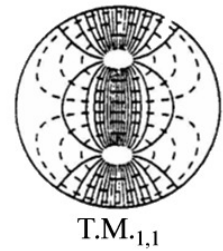
La frecuencia de corte será:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{x^{(n)}}{a}$$

Puliafito Parte II Pág.: XIV-33



T.M._{0,1}



T.M._{1,1}

Modo T.E.:

Las soluciones para el modo T.E. son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z = H_0 \cdot J_m \left(\frac{y^{(n)} \cdot \rho}{a} \right) \cos(m\phi) \\ H_\phi = H_0 \frac{\bar{\gamma} \cdot m}{\rho} \left(\frac{a}{y^{(n)}} \right)^2 J_m \left(\frac{y^{(n)} \cdot \rho}{a} \right) \sin(m\phi) \\ H_\rho = -H_0 \cdot \bar{\gamma} \left(\frac{a}{y^{(n)}} \right)^2 J'_m \left(\frac{y^{(n)} \cdot \rho}{a} \right) \cos(m\phi) \\ E_\phi = -\frac{j\omega\mu}{\bar{\gamma}} H_\rho \\ E_\rho = \frac{j\omega\mu}{\bar{\gamma}} H_\phi \end{array} \right.$$

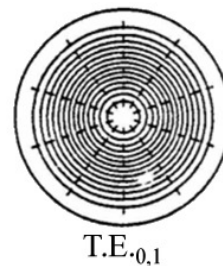
siendo J_m una función de Bessel de primera clase de orden m y

J'_m su derivada, e $y^{(n)}$ las raíces de esas funciones.

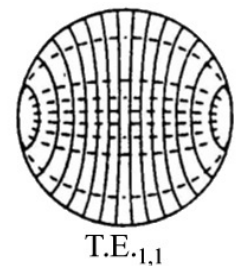
La frecuencia de corte será:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{y^{(n)}}{a}$$

El modo dominante en las guías de onda cilíndricas es el modo T.E._{1,1}, el cual posee la más baja frecuencia de operación posible.



T.E._{0,1}

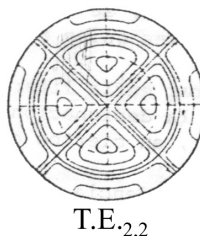


T.E._{1,1}

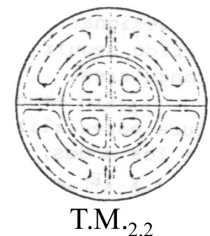
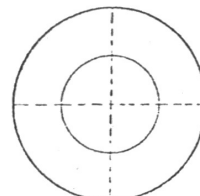
Puliafito Parte II Pág.: XIV-38

Interpretación de los subíndices:

El primer subíndice (m) indica la posibilidad de introducir planos axiales ideales, constituidos por conductores perfectos de espesor despreciable, en el interior de la guía, sin alterar la configuración del campo. El segundo subíndice (n) indica la posibilidad de introducir cilindros concéntricos, en las mismas condiciones. Podemos entonces imaginar las configuraciones del campo, ya que las líneas de flujo eléctrico deberán ser normales a tales conductores, mientras que las de flujo magnético deberán ser siempre tangenciales a los mismos. En definitiva se pueden introducir m planos axiales y $n - 1$ cilindros imaginarios en la guía para configurar el campo.



T.E._{2,2}



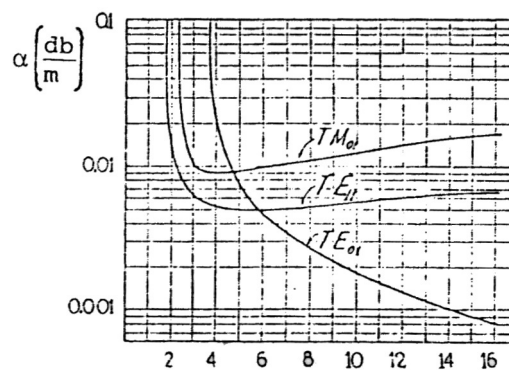
T.M._{2,2}

Puliafito Parte II Pág.: XIV-42

Atenuación:

Las curvas de atenuación en éstas guías son similares al caso de guías rectangulares, excepto por las curvas de los modos $T.E_{0,n}$, las cuales presentan una disminución indefinida de la atenuación con la frecuencia. Esto se debe a que existe sólo campo magnético según el eje z , el cual decrece de intensidad a medida que la frecuencia crece, por lo tanto las pérdidas por circulación de corriente en las paredes de la guía también se reducen.

Pulafito Parte II Pág.: XIV-45



Comparación entre guías rectangulares y cilíndricas:

Guía de onda rectangular:

- Facilidad para fijar la polarización del campo.
- Facilidad para eliminar modos indeseados.

Guía de onda cilíndrica:

- Sensible a las irregularidades en las paredes de la guía, debido a las configuraciones rotativas del campo.
- Constructivamente más pesadas.
- Mayor rendimiento, debido a que tienen menor atenuación para la misma energía transportada.
- Modos especiales de atenuación inversamente proporcional a la frecuencia.
- Se pueden construir juntas rotativas debido a la configuración del campo en algunos modos.

Pulafito Parte II Pág.: XIV-43

SEGUNDA PARTE: LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

TEORÍA DE LÍNEAS

Líneas uniformes

Introducción:

La línea de transmisión puede considerarse como un dispositivo que posibilita la transmisión de energía electromagnética desde una fuente hasta una impedancia de carga. Desde éste punto de vista, la línea es una guía de onda, pero ésta sólo puede propagar mediante el modo fundamental T.E.M.

En ésta sección trataremos todo lo referente a líneas de transmisión uniformes, vale decir, que tienen las mismas características físicas y geométricas en cualquier sección que se considere de ellas.

La diferencia fundamental entre la teoría de líneas y la teoría de circuitos es que en la primera trabajamos con longitudes de las líneas comparables con la longitud de onda de trabajo, por lo que no podemos considerar propagaciones instantáneas como se hacía en la segunda. Además consideramos que los conductores son guías, ya que la energía electromagnética se propaga por el dieléctrico que los separa.

Pulafito Parte II Pág.: I-1

Constantes distribuidas:

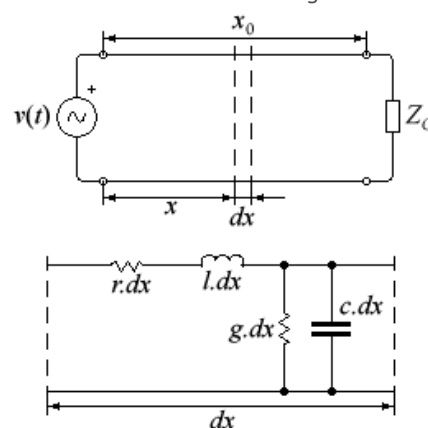
Las líneas de transmisión pueden ser consideradas como una sucesión de cuadripolos elementales, caracterizados por constantes concentradas que, si la longitud de cada cuadripolo es un diferencial, serán funciones de ciertas **constantes distribuidas**, que caracterizarán a la línea y que consideraremos **constantes**, valga la redundancia, con la frecuencia y en toda la longitud de la línea. Las constantes concentradas de cada cuadripolo elemental son:

$$\begin{cases} dR = r \cdot dx \\ dL = l \cdot dx \\ dC = c \cdot dx \\ dG = g \cdot dx \end{cases}$$

donde las constantes distribuidas son r , l , c y g , que dependen de las características físicas y geométricas de los conductores y el dieléctrico que componen la línea, siendo:

- r : resistencia de ambos conductores por unidad de longitud.
- l : inductancia de ambos conductores por unidad de longitud.
- c : capacidad entre conductores por unidad de longitud.
- g : conductancia del medio dieléctrico circundante a los conductores, por unidad de longitud.

Pulafito Parte II Pág.: I-4





Ecuaciones diferenciales de la línea uniforme:

Como las longitudes de los cuadripolos son diferenciales, podemos decir que la caída de tensión en ellos es la derivada de la tensión con signo negativo, y que la pérdida de corriente es la derivada de la misma, también con su signo cambiado. Podemos entonces, expresar mediante las leyes de Kirchoff, las siguientes ecuaciones diferenciales generales, en el espacio y el tiempo, de la línea uniforme:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = r.i + l \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = g.v + c \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

Si consideramos una línea ideal (sin pérdidas), resulta ser $r = g = 0$, con lo que las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = l \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = c \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

Pulíafito Parte II Pág.: I -7

Soluciones:

Como primera noción de las soluciones, trabajaremos con líneas ideales. Trabajando con las ecuaciones diferenciales para éste caso, podemos llegar a las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = l.c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = l.c \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$

que son ecuaciones de D'Alambert, y cuyas soluciones tienen la siguiente forma:

$$\begin{cases} v(x,t) = V_1.f_1(x-v.t) + V_2.f_2(x+v.t) \\ i(x,t) = I_1.f_1(x-v.t) + I_2.f_2(x+v.t) \end{cases}$$

siendo V_1 , V_2 , I_1 e I_2 las constantes de integración, determinadas en cada caso con las condiciones de contorno.

/*Estudiar las demostraciones*/

Pulíafito Parte II Pág.: I-9

Ondas incidente y reflejada:

Las soluciones encontradas en el punto anterior representan, en el primer término del segundo miembro, una onda que progresa en el sentido positivo de las x , es por eso que las llamaremos “**ondas incidentes**”; el segundo término corresponde a las llamadas “**ondas reflejadas**”, ya que progresan en el sentido contrario. La existencia de las ondas reflejadas estará condicionada a la presencia de ciertas condiciones de contorno, que así lo permitan.

Pulíafito Parte II Pág.: I-10

Soluciones para excitación con funciones armónicas del tiempo:

Para el caso de una línea de transmisión no ideal, en donde las ecuaciones diferenciales son las más generales, supondremos una excitación de tensión que es una función armónica del tiempo, de la siguiente forma:

$$v(t) = \text{Re}(V.e^{j.\omega.t})$$

Utilizando el método de resolución por variables separables, encontraremos que la solución de las ecuaciones con esa excitación, en el dominio de las frecuencias, responde a la forma:

$$V(x) = V_1.e^{-\gamma.x} + V_2.e^{\gamma.x}$$

donde definiremos la constante γ como constante de propagación, con una expresión:

$$\gamma = \sqrt{(r + j.\omega.l).(g + j.\omega.c)}$$



La expresión de la corriente que soluciona las ecuaciones es:

$$I(x) = \sqrt{\frac{g + j.\omega.c}{r + j.\omega.l}} (V_1.e^{-\gamma.x} - V_2.e^{\gamma.x})$$

donde vemos que a una onda incidente de tensión le corresponde una onda incidente de corriente con el mismo signo, y a una onda reflejada de tensión le corresponde una onda reflejada de corriente con el signo cambiado.

/*Estudiar las demostraciones*/

Pulíafito Parte II Pág.: III-1

Constantes características:

Estudiaremos ciertas constantes características de las líneas que dependen de sus características físicas y geométricas, y de la frecuencia de operación.

Pulíafito Parte II Pág.: III-4

Constante de propagación:

La denominación de constante de propagación para el factor γ se debe a que éste modifica la amplitud y la fase de las ondas, tanto incidente como reflejada, ya que en general es un número complejo. Su expresión, como ya vimos es:

$$\gamma = \sqrt{(r + j.\omega.l).(g + j.\omega.c)}$$

A la parte real la denominaremos **constante de atenuación** y la designaremos con la letra α , y a la parte imaginaria la llamaremos **constante de fase**, y la escribiremos con la letra β , de tal manera que:

$$\gamma = \alpha + j.\beta$$

Con esto, podemos escribir:

$$V(x) = V_1.e^{-\alpha.x}.e^{-j.\beta.x} + V_2.e^{\alpha.x}.e^{j.\beta.x}$$

Pulíafito Parte II Pág.: III-5

Constante de atenuación:

En la expresión anterior vemos que la constante de atenuación hace que la amplitud de la onda incidente disminuya a medida que progresa en el sentido positivo de las x , y que la amplitud de la onda reflejada disminuya a medida que progresa en el sentido negativo.

Pulíafito Parte II Pág.: III-6

Constante de fase:

La constante de fase realiza una modificación de la fase de las ondas, tanto incidente como reflejada, a medida que progresan en la línea. Ésta constante es la que posibilita que se propaguen las ondas a través de la línea, ya que es el valor imaginario de una constante de propagación compleja. Si ésta no existiera, la onda no se propagaría. Si la línea es ideal, la constante de fase vale:

$$\beta = \omega\sqrt{l.c} = \frac{\omega}{v}$$

/*Estudiar demostración*/

Pulíafito Parte II Pág.: III-6

Velocidad de propagación:

Se puede demostrar que la velocidad de propagación para líneas ideales vale:

$$v = \frac{1}{\sqrt{l.c}}$$

/*Estudiar demostración*/

Podemos obtener otra expresión en el caso de excitación armónica, donde consideramos que la fase de la onda es una constante para esa velocidad, de donde obtenemos que:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

/*Estudiar demostración*/

Para el caso de líneas ideales resulta constante debido a que β es una función lineal de la frecuencia.

Pulíafito Parte II Pág.: I-12 y III-9



Impedancia característica:

Para líneas reales, la expresión para la impedancia característica de la línea es en general compleja. Como se vio anteriormente, la relación entre la tensión y la corriente en líneas reales es:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{r + j.\omega l}{g + j.\omega c}}$$

Puede demostrarse que, para el caso de una línea ideal, su valor es puramente real e igual a:

$$Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

/*Estudiar demostración*/

El valor de la impedancia es constante en toda la línea solamente si ésta es uniforme de largo infinito o está cargada con esa misma impedancia.

Pulíafito Parte II Pág.: I-15 y III-4

La línea cargada:

Cuando tenemos una línea de largo finito y la cargamos con una cierta impedancia Z_C , vemos que hay ciertas relaciones y características que dependen de ese largo, o de la distancia a la carga, y de la impedancia mencionada.

Pulíafito Parte II Pág.: III-11

Coeficiente de reflexión:

Coeficiente de reflexión en los terminales de la carga:

Al cargar la línea con una impedancia distinta a su impedancia característica, aparecerán condiciones de contorno que permitirán la existencia de una onda reflejada, lo que hará que ciertas características, como la impedancia de entrada, entre otros, dependa del valor de esa impedancia. Podemos definir entonces un coeficiente que mida el grado de desadaptación existente, que llamaremos **coeficiente de reflexión**, el cual debe resultar una función de la impedancia característica y de la impedancia de carga. En particular es interesante su valor considerado en los terminales de la carga. La expresión es la siguiente:

$$\Gamma_C = |\Gamma_C| e^{j.\phi_C} = \frac{V_2}{V_1} e^{2.\gamma.x_0}$$

/*Estudiar la deducción*/

Y puede demostrarse que su valor se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\Gamma_C = \frac{Z_C - Z_0}{Z_C + Z_0}$$

/*Estudiar la deducción*/

Pulíafito Parte II Pág.: III-11

Coeficiente de reflexión generalizado:

También podemos hallar el valor del coeficiente de reflexión en cualquier par de terminales de la línea. Éste resultará ser una función del calculado para los terminales de la carga, y de la distancia del punto considerado con la carga. Su expresión será:

$$\Gamma = \frac{Z(x) - Z_0}{Z(x) + Z_0} = \Gamma_C . e^{-2.\gamma.d}$$

Si la línea es ideal, el módulo del coeficiente de reflexión es el mismo en toda la línea, incluso en la carga, pero no así su fase.

Pulíafito Parte II Pág.: III-14

Relación de onda estacionaria:

La superposición de la onda incidente y la reflejada provoca un fenómeno que se denomina **onda estacionaria**, ya que es una onda resultante que se manifiesta en la línea, con una configuración que no varía en el tiempo. La expresión de la composición de ambas ondas, incidente y reflejada, es, en función de la distancia del punto considerado a la carga, para líneas ideales:

$$V(d) = V_1 . e^{-j.\beta.x} (1 + |\Gamma_C| e^{j.(\phi_C - 2.\beta.d)})$$

/*Estudiar demostración*/

La cantidad entre paréntesis puede interpretarse en el plano complejo como la suma de dos fasores: uno fijo de valor unitario, real, y otro complejo cuyo módulo es el del coeficiente de reflexión en la carga y cuya fase depende de la distancia a la misma.

Definimos entonces a la onda estacionaria mediante el módulo de la expresión anterior:

$$|V(d)| = |V_1| \cdot |1 + \Gamma_C \cdot e^{j(\phi_C - 2\beta \cdot d)}|$$

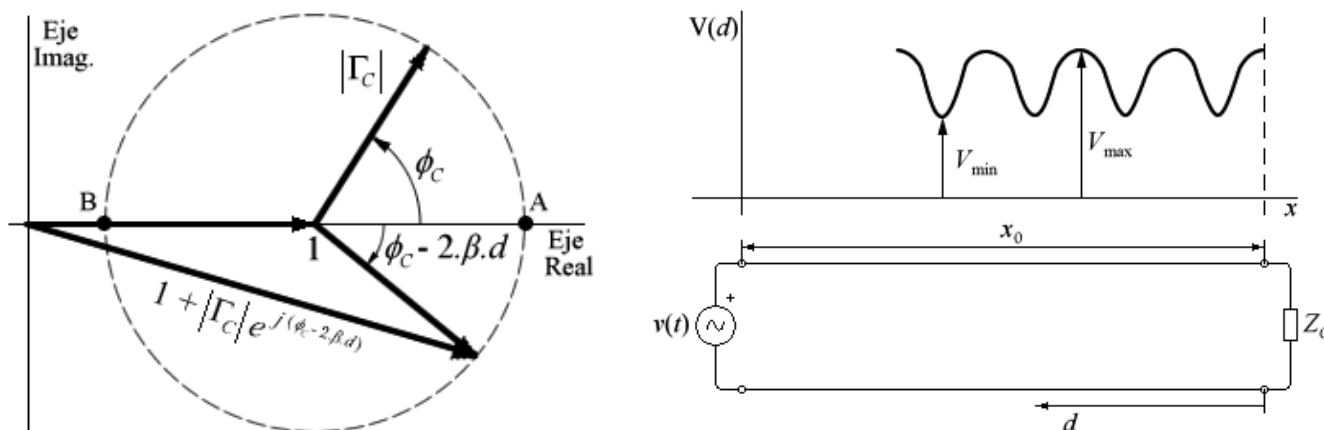
Existirá un valor máximo de tensión para $\phi_C - 2\beta \cdot d = -2n\pi$, cuya magnitud será:

$$V_{\max} = |V_1| \cdot (1 + |\Gamma_C|) \quad d = d_{\max}$$

y un valor mínimo para $\phi_C - 2\beta \cdot d = -(2n+1)\pi$, cuya magnitud será:

$$V_{\min} = |V_1| \cdot (1 - |\Gamma_C|) \quad d = d_{\min}$$

Se obtiene una configuración como la que se muestra en la figura:



La posición de los máximos y los mínimos no se alteran con el tiempo, es por eso que la llamamos onda estacionaria.

Se define como **relación de ondas estacionarias (R.O.E.)** al coeficiente:

$$\rho = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_C|}{1 - |\Gamma_C|} = \frac{|V_1| + |V_2|}{|V_1| - |V_2|}$$

Se observa que mientras $|\Gamma_C|$ varía entre 0 y 1, el valor de ρ varía entre 1 e ∞ . Se verá más adelante que éste concepto sólo sirve para líneas ideales.

Pulíafito Parte II Pág.: IV-1

Onda estacionaria pura:

Para el caso de impedancias de carga como cortocircuito, circuito abierto o reactancia pura, la onda incidente se refleja totalmente, y la onda estacionaria formada es llamada onda estacionaria pura. En tales casos $|\Gamma_C| = 1$ y entonces $V_{\max} = 2|V_1|$ y $V_{\min} = 0$. Para cualquiera de las dos situaciones de carga límites, la distancia entre dos mínimos (o dos máximos) es igual a media longitud de onda en la línea. O sea que cada tramo de esa longitud repite las condiciones de la onda estacionaria.

Pulíafito Parte II Pág.: IV-4

Onda estacionaria en líneas reales:

En líneas reales, la ecuación de la onda estacionaria es:

$$|V(d)| = |V_1| \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot |1 + \Gamma_C \cdot e^{-2\alpha \cdot d} \cdot e^{j(\phi_C - 2\beta \cdot d)}|$$

/*Estudiar la deducción*/

Podemos introducir dos factores nuevos:

$$p = \ln \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_C|}} = -\frac{1}{2} \ln |\Gamma_C| \quad q = -\frac{\phi_C}{2}$$

que nos permiten poner la expresión anterior como:

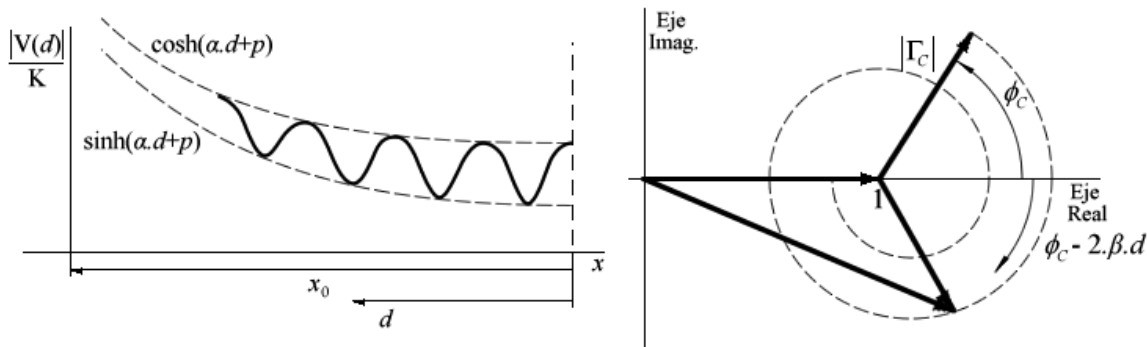
$$|V(d)| = |V_1| \cdot e^{-\alpha \cdot x} \sqrt{\sinh^2(\alpha \cdot d + p) + \cos^2(\beta \cdot d + q)}$$

/*Estudiar demostración*/

Además, con las consideraciones hechas, la relación de ondas estacionarias (*siempre para una línea ideal*) queda:

$$\rho = \coth(p)$$

/*Estudiar demostración*/



Pulíafito Parte II Pág.: IV-6

Impedancia:

Impedancia en cualquier par de terminales:

Cuando la línea está cargada, la impedancia en cada punto varía, y es función de la impedancia de carga, la impedancia característica, la frecuencia y las características de la línea (función de propagación). La expresión matemática que la describe es demasiado complicada, pero en la práctica se utiliza el diagrama de Smith, que se verá más adelante.

Habrán máximos y mínimos de impedancia en la línea según el punto en que nos encontremos. Los máximos corresponden a los puntos donde es máxima la tensión de la onda estacionaria (mínima corriente), y su valor es:

$$Z_{\max} = \rho \cdot Z_0 \quad d = d_{\max}$$

/*Estudiar la demostración*/

Los mínimos corresponden a los puntos donde es mínima la tensión de la onda estacionaria (máxima corriente), y su valor es:

$$Z_{\min} = \frac{Z_0}{\rho} \quad d = d_{\min}$$

/*Estudiar la demostración*/

Pulíafito Parte II Pág.: V-1

Impedancia de entrada:

Se puede demostrar que la impedancia de entrada de una línea tiene una expresión como la siguiente:

$$\frac{Z_e}{Z_0} = \frac{Z_C + Z_0 \cdot \tanh(\gamma \cdot x_0)}{Z_0 + Z_C \cdot \tanh(\gamma \cdot x_0)}$$

/*Estudiar la demostración*/

Que para líneas ideales se convierte en:

$$\frac{Z_e}{Z_0} = \frac{Z_C + j \cdot Z_0 \cdot \tan(\beta \cdot x_0)}{Z_0 + j \cdot Z_C \cdot \tan(\beta \cdot x_0)}$$

/*Estudiar la demostración*/

Pulíafito Parte II Pág.: V-5

Aplicaciones:

Transformador de cuarto de longitud de onda:

Para una línea ideal cuya longitud sea un cuarto de la longitud de onda, se cumple que:



$$Z_e\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_0^2}{Z_C}$$

/*Estudiar la demostración*/

Y como la impedancia característica es real en líneas ideales, tenemos la ecuación de un transformador ideal con una relación de transformación $n = Z_0$.

Es interesante destacar que si la línea está cortocircuitada ($Z_C = 0$), resultará que en la entrada se “ve” un circuito abierto ($Z_C = \infty$), y si está a circuito abierto, en la entrada se “ve” un cortocircuito.

Pulíafito Parte II Pág.: V-10

STUB:

Son secciones de línea de un cuarto de longitud de onda que se utilizan como soportes aislantes o para adaptar impedancias.

Pulíafito Parte II Pág.: V-12

Filtros para armónicas:

Utilizando la línea de un cuarto de longitud de onda y calculando las longitudes de los tramos para las frecuencias que deseamos cancelar, podemos fabricar filtros de armónicas.

Pulíafito Parte II Pág.: V-13

Línea de media longitud de onda:

Para una línea ideal cuya longitud sea la mitad de la longitud de onda, se cumple que:

$$Z_e\left(\frac{\lambda}{2}\right) = Z_C$$

/*Estudiar la demostración*/

donde vemos que la línea repite las condiciones de carga para cada tramo igual a una semilongitud de onda.

Pulíafito Parte II Pág.: V-11

Estudio de las constantes:

Como ya vimos la expresión general de la constante de propagación es:

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)} = \alpha + j\beta$$

Si desarrollamos el sistema de ecuaciones que se forma y lo resolvemos, llegamos a la siguiente expresión para la constante de atenuación:

$$\alpha = \sqrt{\frac{r.g}{2}} \sqrt{\sqrt{\left(1 + \frac{l^2.\omega^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{c^2.\omega^2}{g^2}\right)} + \left(1 - \frac{l.c.\omega^2}{r.g}\right)}$$

/*Estudiar la demostración*/

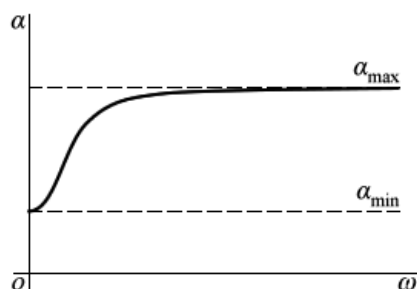
y para la constante de fase:

$$\beta = \frac{\omega\sqrt{l.c}}{2} \sqrt{\sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{l^2.\omega^2}\right)\left(1 + \frac{g^2}{c^2.\omega^2}\right)} + \left(1 - \frac{r.g}{l.c.\omega^2}\right)}$$

/*Estudiar la demostración*/

Pulíafito Parte II Pág.: VI-1

Constante de atenuación:



De la expresión obtenida vemos que para $\omega = 0$ existirá un valor mínimo:

$$\alpha_{\min} = \sqrt{r.g} \quad \omega = 0$$

y para $\omega \rightarrow \infty$ un valor máximo:

$$\alpha_{\max} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{c}{l}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{l}{c}} \quad \omega \rightarrow \infty$$

Si graficamos la función obtenemos la forma que se ve en la figura.

Vemos que a partir de ciertos valores de frecuencia, la línea de transmisión presenta prácticamente un valor constante de α con la frecuencia e igual al valor máximo. Para lograr esto de manera aproximada debería lograrse que:

$$\begin{cases} \frac{\omega l}{r} \gg 1 \\ \frac{\omega c}{g} \gg 1 \end{cases}$$

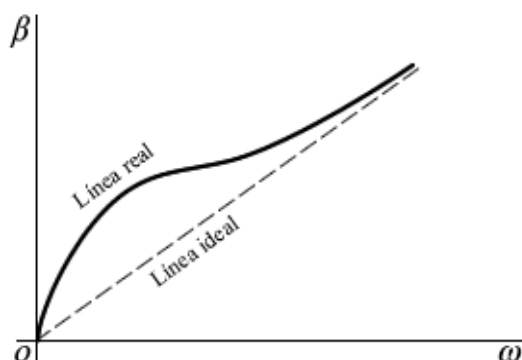
En una línea práctica, estas condiciones se logran si:

$$\frac{\omega l}{r} > 4 \text{ o } 5$$

Si se cumplen las condiciones mencionadas, estamos en las llamadas “**soluciones de alta frecuencia**”, las que se verifican bien con líneas abiertas operando por arriba de unos pocos kilohertz, y para cables coaxiales arriba de los 100 kilohertz.

Pulíafito Parte II Pág.: VI-2

Constante de fase:



De la expresión obtenida vemos que

$$\beta_{\min} = 0 \quad \omega = 0$$

y

$$\beta \rightarrow \omega \sqrt{l \cdot c} \quad \omega \rightarrow \infty$$

Si graficamos la función obtenemos la forma que se ve en la figura. Como vemos, no hay una dependencia lineal con la frecuencia. Por suerte también existen soluciones de alta frecuencia, para las cuales $\beta \rightarrow \omega \sqrt{l \cdot c}$.

Pulíafito Parte II Pág.: VI-4

Impedancia característica:

Como ya vimos:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{r + j \cdot \omega l}{g + j \cdot \omega c}}$$

La solución de alta frecuencia en éste caso vale:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad \omega \rightarrow \infty$$

Para frecuencia cero, la impedancia vale:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{r}{g}} \quad \omega = 0$$

Como en general se puede aceptar que $\frac{g}{c} \ll \frac{r}{l}$, entonces la fórmula aproximada será:

$$Z_0 \cong \sqrt{\frac{l}{c}} \left(1 - j \frac{r}{2 \cdot \omega l} \right)$$

Pulíafito Parte II Pág.: VI-5

Velocidad de fase y de grupo:

Como la constante de fase en líneas reales siempre es mayor a la correspondiente a la línea ideal, podemos concluir que la velocidad de fase es menor a la correspondiente a la misma situación, es decir:

$$v < v_0 = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}}$$

La velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}$$

y puede en la práctica calcularse como:



$$v_g \cong \frac{1}{\sqrt{l.c}} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{r^2}{\omega^2 l^2} \right)$$

/*Estudiar demostración*/

Pulíafito Parte II Pág.: VI-7

Línea sin distorsión:

Para las soluciones que no son de alta frecuencia existe una solución para evitar la distorsión tanto de amplitud como de fase. Si en las expresiones generales de las constantes se consiguiera que:

$$\sqrt{\left(1 + \frac{l^2 \cdot \omega^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{c^2 \cdot \omega^2}{g^2}\right)} = \left(1 - \frac{l.c \cdot \omega^2}{r.g}\right)$$

El valor de la constante de atenuación se reduciría a:

$$\alpha = \sqrt{r.g}$$

y la constante de fase sería:

$$\beta = \omega \sqrt{l.c}$$

La velocidad de fase sería igual que en una línea ideal, la de grupo igual a la de fase y ocurriría lo mismo con la impedancia característica. Esto, físicamente, se obtiene haciendo:

$$\frac{l}{r} = \frac{c}{g}$$

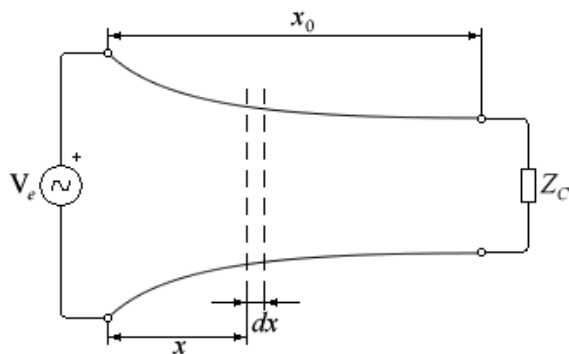
/*Estudiar demostraciones*/

Como en general en la práctica el parámetro que debería aumentarse para conseguir éstas condiciones es l , se recurre al procedimiento denominado “**pupinización**”, que consiste en añadir bobinas (forma concentrada) o modificar ciertas características físicas y geométricas (forma distribuida), para lograr la condición buscada.

Pulíafito Parte II Pág.: VI-12

Líneas no uniformes

Líneas exponenciales:



Para que una línea sea exponencial se requiere que sus parámetros distribuidos varíen exponencialmente con la distancia, es decir:

$$\begin{cases} z(x) = r(x) + j.\omega.l(x) = z(0).e^{k.x} \\ y(x) = g(x) + j.\omega.c(x) = y(0).e^{-k.x} \end{cases}$$

en donde k es el **factor de ahusamiento**, $z(x)$ e $y(x)$ son la impedancia y la admitancia por unidad de longitud, y $z(0)$ e $y(0)$ son sus valores en los terminales de entrada.

Con estas consideraciones, la constante de propagación γ para cualquier tramo de la línea no varía con la distancia, dado que:

$$\gamma = \sqrt{z(x).y(x)} = \sqrt{z(0).y(0)} = \text{cte}$$

Las ecuaciones diferenciales que se plantean son:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = r(x).i + l(x) \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = g(x).v + c(x) \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

Resolviendo con los métodos adecuados, llegamos a que la expresión del fasor de tensión es:

$$V(x) = e^{k.x/2} (V_1.e^{-\Gamma.x} + V_2.e^{+\Gamma.x})$$

/*Estudiar demostración*/

habiendo llamado:



$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \gamma^2}$$

que es llamado **factor de transferencia**, un caso más general de constante de propagación, ya que tiene en cuenta el ahusamiento de la línea. Si suponemos que la línea es ideal, entonces éste factor toma la forma:

$$\Gamma = j\sqrt{\beta_0^2 - \frac{k^2}{4}} = j\beta$$

Para que haya propagación, es necesario que Γ sea imaginario puro, por lo que debe ser:

$$\beta_0 > \frac{k}{2}$$

Caso contrario, Γ será real (significando reflexión de la energía) y no se propagará la onda. El límite se dará para la igualdad, y por lo tanto habrá una frecuencia de corte:

$$\omega_c = \frac{k \cdot v_0}{2}$$

Con esto vemos que la línea exponencial se comporta como un filtro pasa altos, cuya frecuencia de corte es directamente proporcional al factor de ahusamiento.

Impedancia de línea:

La variación de los parámetros no permite definir una impedancia característica. Utilizaremos entonces el concepto de impedancia de línea:

$$Z_0(x) = \sqrt{\frac{z(x)}{y(x)}} = \sqrt{\frac{z(0)}{y(0)}} \cdot e^{k \cdot x}$$

La impedancia de línea a nivel de entrada será:

$$Z_0(0) = \sqrt{\frac{z(0)}{y(0)}}$$

Con estas expresiones, los fasores de tensión y corriente se pueden expresar como:

$$\begin{cases} V(x) = \sqrt{\frac{Z_0(x)}{Z_0(0)}} (V_1 \cdot e^{-\Gamma \cdot x} + V_2 \cdot e^{+\Gamma \cdot x}) \\ I(x) = \frac{1}{Z_0(0)} \sqrt{\frac{Z_0(0)}{Z_0(x)}} \left(\frac{\Gamma - k/2}{\gamma} V_1 \cdot e^{-\Gamma \cdot x} - \frac{\Gamma + k/2}{\gamma} V_2 \cdot e^{+\Gamma \cdot x} \right) \end{cases}$$

/*Estudiar la demostración*/

Pulíafito Parte II Pág.: XI-1

Líneas exponenciales sin reflexiones:

Para utilizar la línea exponencial con la mayor eficiencia, será necesario que no existan reflexiones en la carga. Si consideramos la impedancia en la carga, con una onda reflejada nula, obtenemos:

$$Z_C = Z(x_0) = \frac{V(x_0)}{I(x_0)} = Z_0(x_0) \frac{\gamma}{\Gamma - k/2}$$

Que se puede expresar de la siguiente manera:

$$Z_C = Z_0(0) \cdot e^{k \cdot x_0} \frac{\gamma}{\Gamma - k/2}$$

/*Estudiar demostración*/

expresión general para adaptar impedancias en líneas exponenciales.

Si la línea tiene ahusamiento pequeño, la expresión aproximada para la impedancia óptima en la carga será:

$$Z_C^* \cong Z_0(0) \cdot e^{k \cdot x_0}$$

/*Estudiar demostración*/

lo que nos dice que la impedancia de carga debería igualarse a la impedancia de línea en la salida, si la línea tiene ahusamiento pequeño, lo que se asemeja al concepto de adaptación en líneas uniformes.

Además, para ésta condición, la impedancia de entrada en la línea será:



$$Z_e^* \cong Z_0(0)$$

Las líneas exponenciales consideradas ideales y de pequeño ahusamiento tienen la gran ventaja de comportarse como buenos **adaptadores de impedancia** en un **amplio rango de frecuencia**, a diferencia de las líneas uniformes adaptadas con STUBS, que son muy selectivas. Las líneas exponenciales de ahusamientos mayores ya no presentan ese amplio ancho de banda, pero aún son menos selectivas que las líneas uniformes adaptadas.

Impedancia de carga óptima:

La impedancia de carga óptima, para evitar reflexiones, en líneas exponenciales se expresa:

$$Z_C^* = Z_0(x_0) \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} - j \frac{\omega_c}{\omega} \right)$$

/*Estudiar demostración*/

con lo que vemos que resulta capacitiva.

Para la entrada, la impedancia óptima es:

$$Z_e^* = Z_0(0) \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} + j \frac{\omega_c}{\omega} \right)$$

/*Estudiar demostración*/

que como vemos resulta inductiva.

Puliafito Parte II Pág.: XI-8

DIAGRAMA DE SMITH

Impedancia normalizada:

A los efectos de poder usar un mismo diagrama para cualquier impedancia característica de la línea es que introducimos el concepto de impedancia de carga normalizada o reducida, que es:

$$z_C = \frac{Z_C}{Z_0} = \frac{R_C}{Z_0} + j \frac{X_C}{Z_0} = r_C + j.x_C$$

Con éste nuevo concepto podemos definir una nueva expresión para el coeficiente de reflexión en la carga:

$$\Gamma_C = \frac{z_C - 1}{z_C + 1}$$

Puliafito Parte II Pág.: VIII-2

Deducción del diagrama:

El diagrama circular de impedancias de Smith define un plano complejo con ejes ortogonales. Éste plano es el del coeficiente complejo de reflexión Γ_C . Usaremos la forma binomial para el mismo, es decir:

$$\Gamma_C = \gamma_r + j.\gamma_i = \frac{z_C - 1}{z_C + 1}$$

Y despejando de la expresión anterior obtenemos familias de curvas para los valores constantes de la resistencia y la reactancia en la carga.

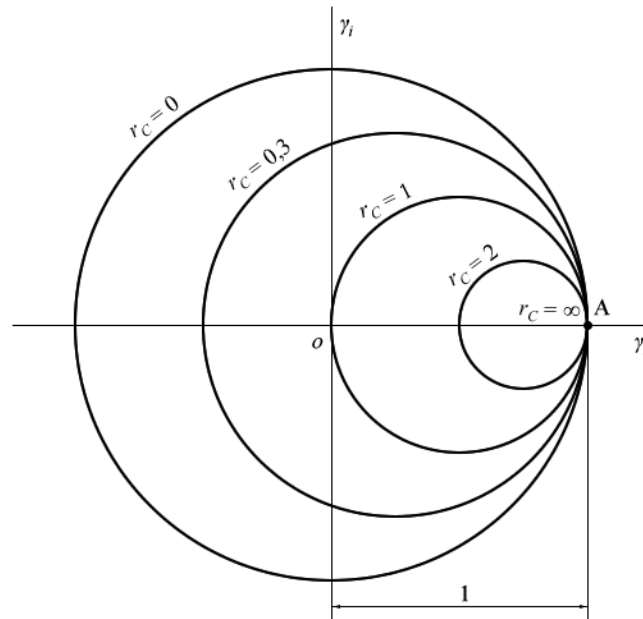
Familia de curvas de $r_C = \text{cte}$:

La expresión que se obtiene al despejar es:

$$\left(\gamma_r - \frac{r_C}{1+r_C} \right)^2 + \gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r_C} \right)^2$$

que corresponde a una familia de círculos en el plano complejo, con parámetro r_C constante, cuyos centros se ubican en el eje real con coordenadas y radios:

$$\text{centro} = \left(\frac{r_C}{1+r_C}, 0 \right) \quad \text{radio} = \frac{1}{1+r_C}$$



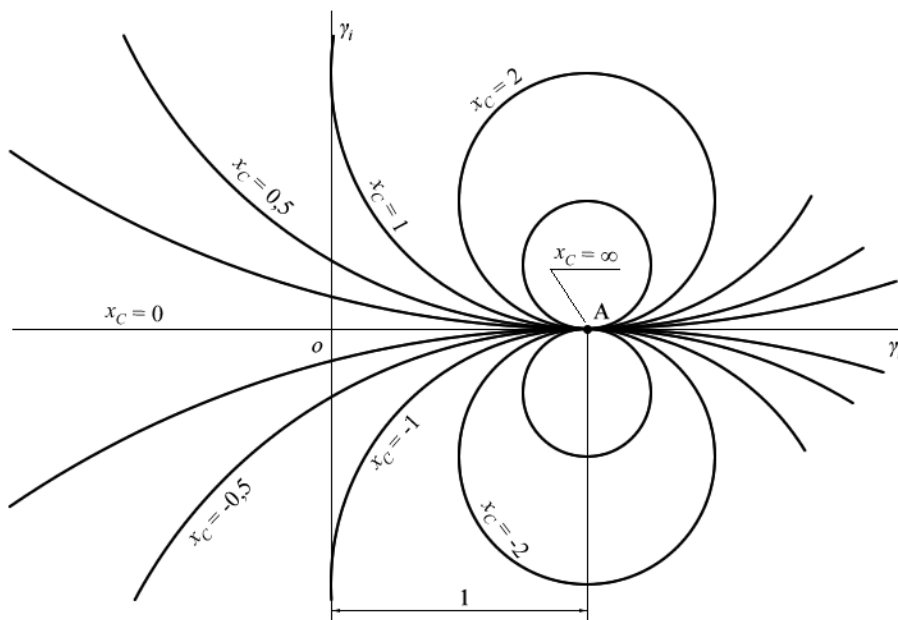
Familia de curvas de $x_C = \text{cte}$:

La expresión que se obtiene al despejar es:

$$(\gamma_r - 1)^2 + \left(\gamma_i - \frac{1}{x_C} \right)^2 = \left(\frac{1}{x_C} \right)^2$$

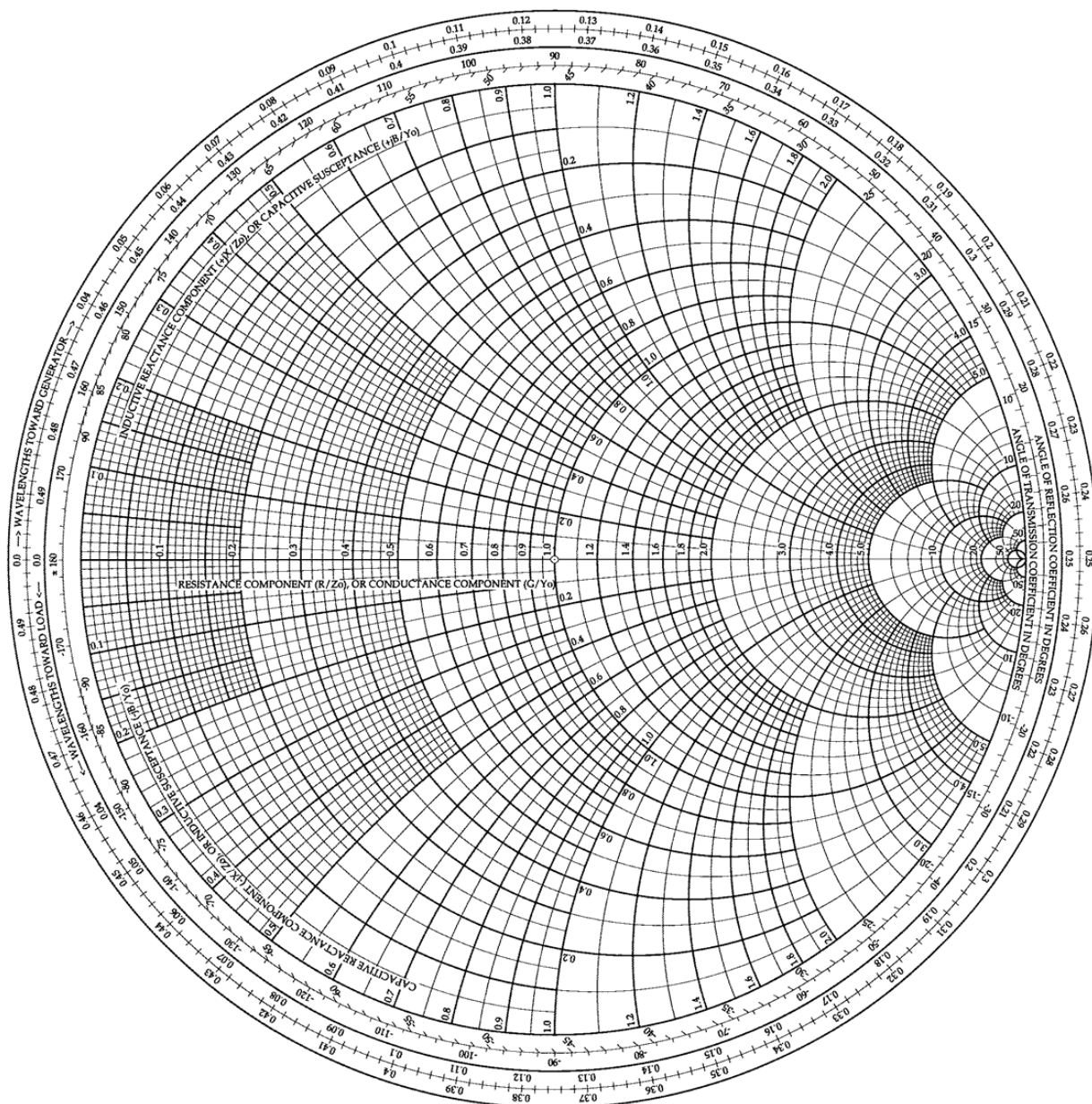
que corresponde a una familia de círculos en el plano complejo, con parámetro x_C constante, con centros que se ubican en una recta paralela al eje imaginario, con coordenadas y radios:

centro = $\left(1, \frac{1}{x_C} \right)$	radio = $\frac{1}{x_C}$
--	-------------------------



En el diagrama de Smith, entonces, se graficarán éstas dos familias de curvas, con un límite exterior en el círculo que corresponde a $r_C = 0$.

Si bien el diagrama no los tiene dibujados, se supone que podrían graficarse, además, círculos con centro en el origen, con radios iguales a $|\Gamma_C|$ (variando entre 0 y 1) y correspondientes también a distintos valores de ρ (variando entre 1 e ∞). Es decir, los círculos de $|\Gamma_C|$ constante se corresponden también con una ρ constante. Un diagrama de Smith comercial se muestra en la figura.



Pulafito Parte II Pág.: VIII-3

Propiedades y características:

En una escala exterior al diagrama suelen especificarse graduaciones para obtener directamente la fase del número complejo Γ_C , variando entre 0 y 180° o entre 0 y -180°. Además, como en el diagrama fasorial de la onda estacionaria visto anteriormente, un giro de 360° corresponde a un recorrido de media longitud de onda en la línea, es que se gradúa también con éste parámetro la escala exterior, con sentidos “hacia el generador” (sentido horario) y “hacia la carga” (sentido antihorario).

Para determinar valores de tensión, deberán referirse los vectores desde el punto de $r = x = 0$ (izquierda del diagrama) hasta el punto considerado con el valor de la impedancia o admitancia reducida, y la escala de dicho valor siempre se refiere tomando como unidad del plano complejo (distancia entre el centro y el borde) el valor de $|V_1|$. Para los valores de corriente, en cambio, se refieren al punto $r = x = \infty$ (derecha del diagrama) hasta el punto considerado, y la escala de dicho valor se refiere al valor de $|I_1|$.

Pulafito Parte II Pág.: VIII-8

Utilización con admitancias:

El mismo diagrama de impedancias de Smith puede emplearse como diagrama de admitancias, con la precaución de reemplazar Γ por $-\Gamma$, r por g y x por b , es decir, cuidando que la fase de Γ está girada 180°. Por lo visto,

una vez obtenida la impedancia reducida z_C , la admitancia normalizada y_C resulta ser el punto diametralmente opuesto sobre el círculo de radio $|\Gamma_C|$.

Pulíafito Parte II Pág.: VIII-11

Lectura directa de R.O.E.:

El valor de ρ puede leerse directamente en el diagrama de Smith, observando el círculo de $r = \text{ctte}$ que es tangente al círculo de $|\Gamma_C|$ constante del problema considerado. El valor de r es directamente, en éstas condiciones, el valor de ρ para el caso que se trata.

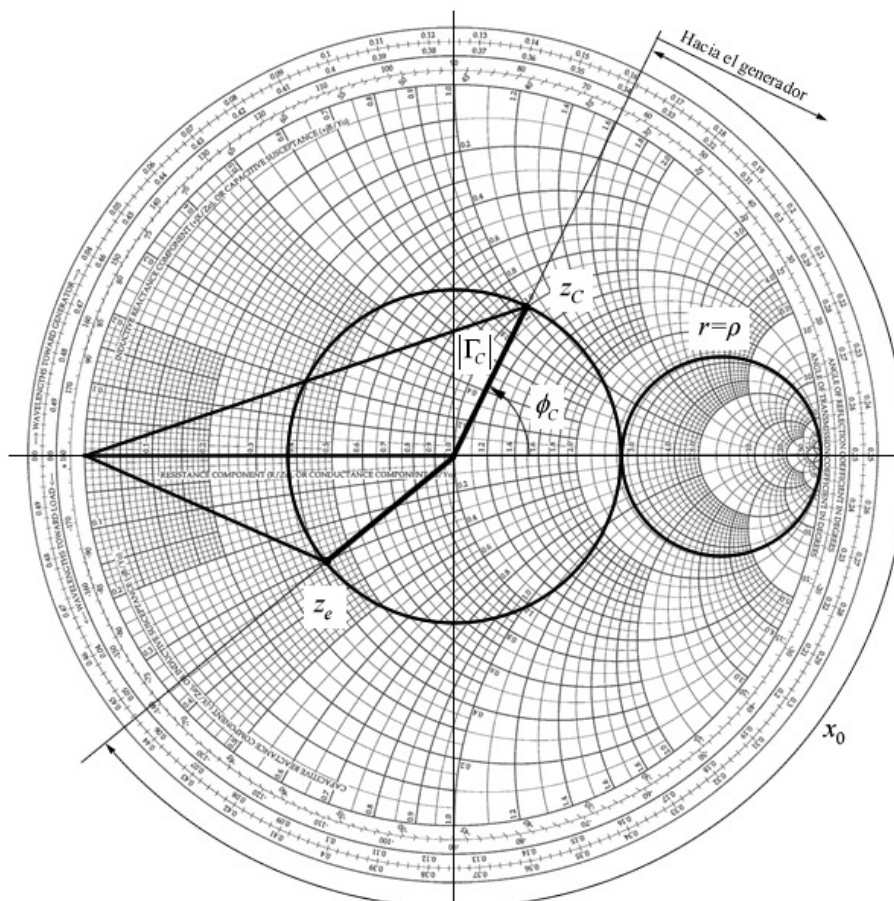
Pulíafito Parte II Pág.: VIII-17

Aplicaciones del diagrama de Smith

Impedancia de entrada:

Mediante el uso del diagrama de Smith, podemos averiguar la impedancia de entrada de una línea de transmisión para un determinado valor de impedancia de carga y trabajando a una frecuencia dada. De hecho que podemos encontrar el valor de la impedancia en cualquier punto de la línea. Los pasos a seguir son:

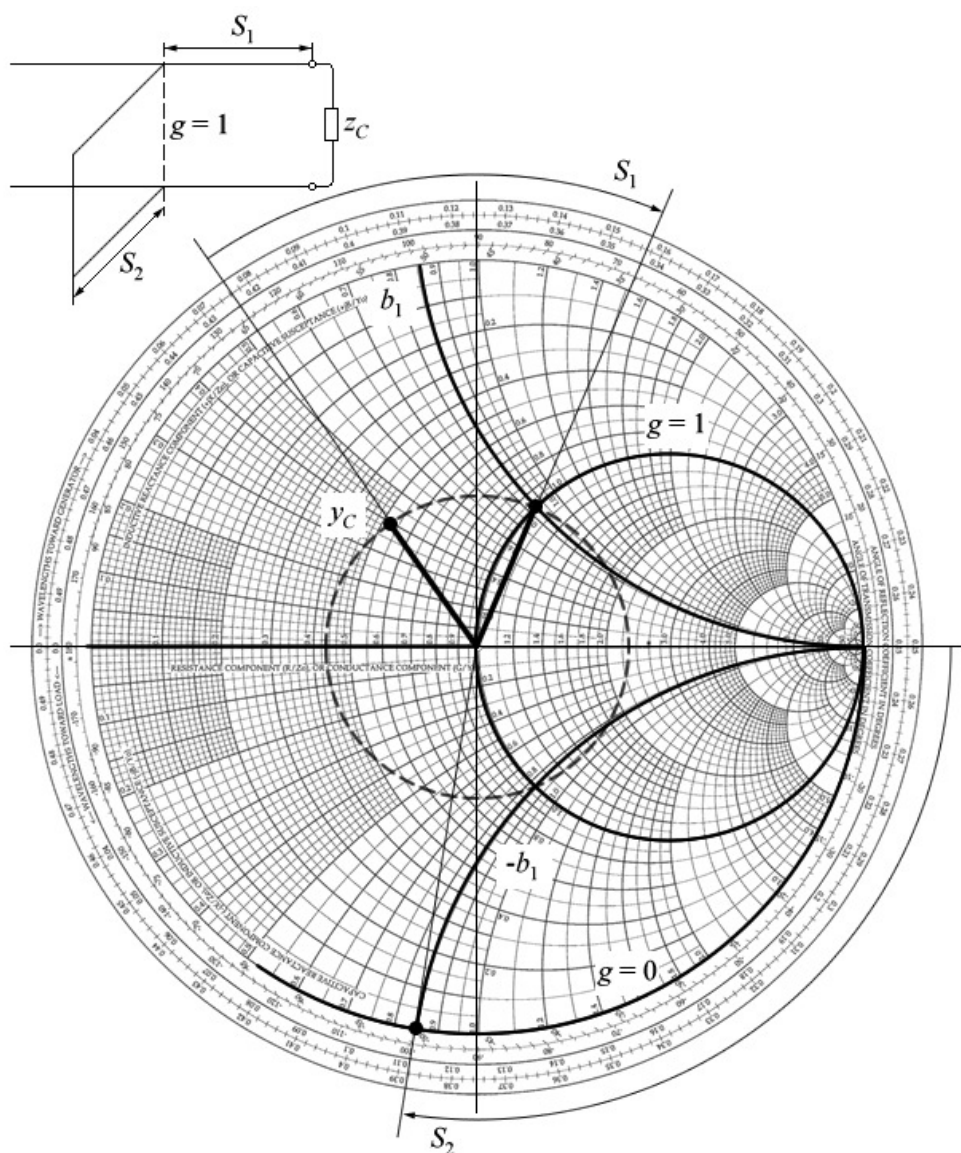
1. Calcular la impedancia de carga normalizada
2. Ubicar dicho valor en el diagrama de Smith
3. Determinar la circunferencia de $|\Gamma_C|$ constante para el problema dado, y dibujarla.
4. Efectuar un giro horario, es decir hacia el generador, sobre esa circunferencia, equivalente al valor de x_0 en proporciones de λ , es decir, si $\lambda/2 \Leftrightarrow 360^\circ$, entonces $x\lambda \Leftrightarrow n$ grados. Si el tramo de línea es mayor a $\lambda/2$ se debe tomar el último tramo menor a éste valor, es decir, restando $\lambda/2$ hasta que el valor hallado sea menor que éste.
5. El punto determinado es la impedancia normalizada de entrada (o en general en el par de terminales considerado), por lo tanto se debe observar cuáles son las coordenadas de r y x para el punto.
6. Encontrar la impedancia efectiva de entrada multiplicando cada valor hallado por la impedancia característica de la línea.



Pulíafito Parte II Pág.: IX-1

STUB Simple:

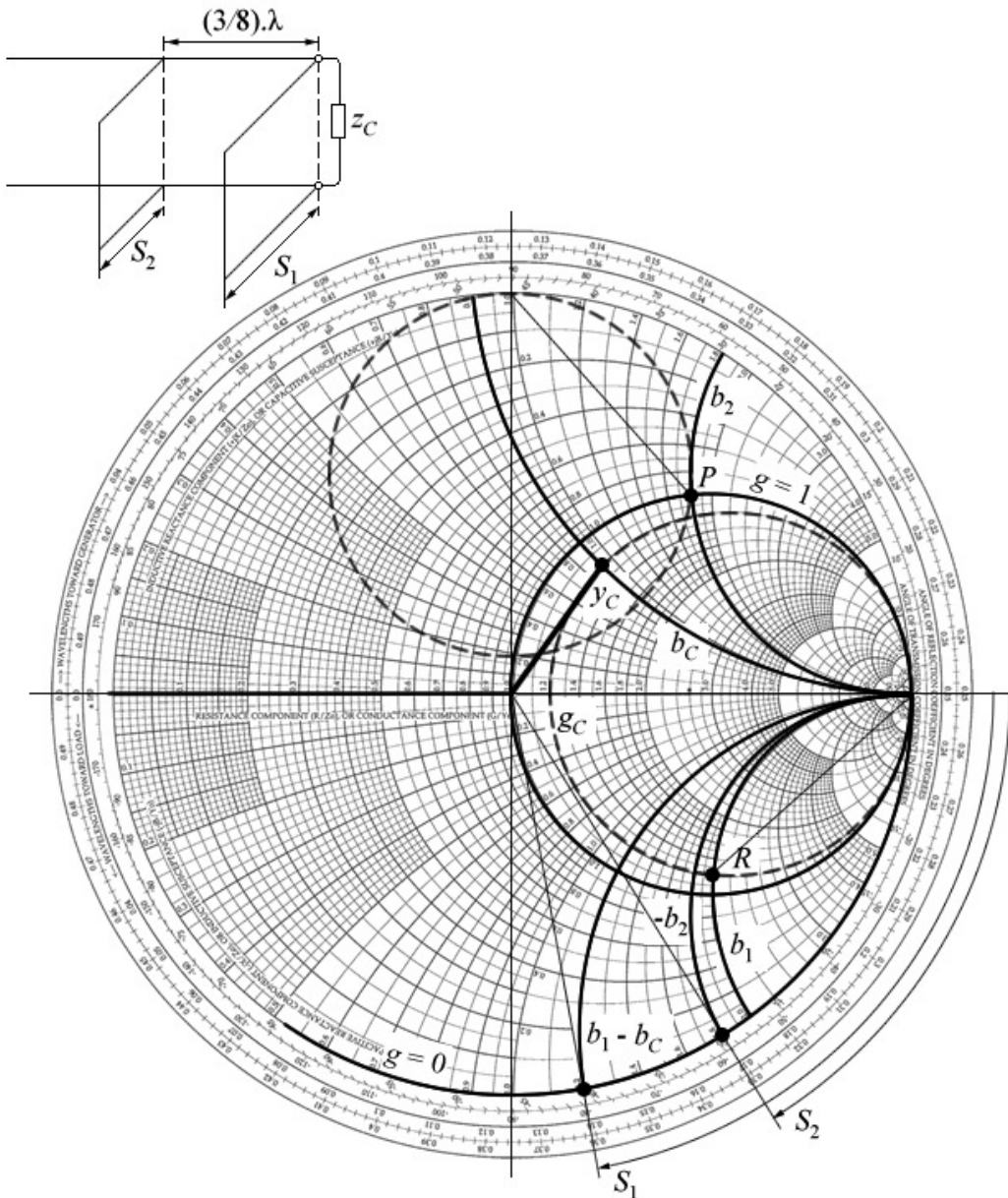
En algunas condiciones existe desadaptación de impedancias entre la línea y la carga, por lo que para aprovechar al máximo la energía y así evitar la aparición de una onda estacionaria, es necesario intercalar entre ellas un adaptador. Generalmente se utilizan tramos de línea cortocircuitados, de ubicación y largo adecuado, para éste fin. Para **líneas abiertas** es posible diseñar un dispositivo transformador por “tramo simple”, denominado **STUB Simple**. Se utiliza un tramo adicional de línea, cortocircuitado en su extremo, de largo S_2 , ubicado a una distancia S_1 de la carga sobre la línea de transmisión. Como para una línea ideal Z_0 es puramente resistiva, se entenderá que el transformador deberá adaptar la impedancia de carga de forma de modificar su parte resistiva, hasta llevarla a igualarse con Z_0 , y modificar la parte imaginaria hasta anularla completamente. Los ajustes necesarios se efectuarán variando las longitudes de S_1 y S_2 .



Utilizaremos el diagrama de admitancias de Smith para encontrar las longitudes correctas. Los pasos a seguir son:

1. Calcular la admitancia de carga reducida $y_C = 1/z_C$ y ubicarla en el diagrama de Smith. Dibujar la circunferencia de $|\Gamma_C|$ constante.
2. Girar “hacia el generador” una longitud S_1 en fracciones de λ hasta encontrar el punto de intersección entre la circunferencia de $|\Gamma_C|$ constante y la de $g = 1$, es decir, estamos buscando un punto donde cumplamos la premisa de igualar la parte resistiva de la impedancia con Z_0 . La admitancia en esa sección de la línea será $y_1 = 1 + j.b_1$
3. Buscar un punto en el diagrama que tenga conductancia nula pero susceptancia igual a $-b_1$. Ésta es la admitancia que hay que sumar en esa sección de la línea para anular la parte imaginaria y conseguir la adaptación. Para ello entonces colocamos el tramo de línea y la longitud del mismo será la distancia S_2 que debemos medir en fracciones de λ en el diagrama desde el punto de $g = b = \infty$ (cortocircuito) y el punto hallado de admitancia $0 - j.b_1$.

De ésta manera se consigue que en la sección donde hemos colocado el tramo, la admitancia valga $y = 1$, con lo que logramos la adaptación.

STUB Doble:

El STUB Simple no es adecuado para líneas que no sean abiertas, como los cables coaxiales, porque la distancia entre la carga y el tramo debe ajustarse a voluntad, cosa que no se puede realizar en ellos. Por eso se ha desarrollado un adaptador que utiliza dos tramos de línea cortocircuitados, separados por una distancia fija, que por lo general es de $(3/8)\lambda$.

Los dos ajustes requeridos ahora son las distancias entre los cortocircuitos y la línea principal, es decir S_1 y S_2 . La separación entre los tramos realiza un giro de la impedancia de tal manera que pueda lograrse la adaptación de la parte real. Éste giro determina una parte imaginaria, la que será eliminada por el tramo S_2 . Al traer nuevamente a la carga la impedancia, ésta sufrirá una modificación en su valor imaginario, y el primer tramo eliminará el "exceso" para lograr el valor original.

Nuevamente utilizaremos el diagrama de Smith de admitancias. Los pasos a seguir serán:

1. Calcular la admitancia de carga reducida $y_C = 1/z_C$ y ubicarla en el diagrama de Smith. Remarcar la circunferencia de g_C constante, ya que sumaremos un tramo con admitancia imaginaria desconocida en esa sección, por lo tanto todos los puntos con esa parte real son soluciones posibles.
2. Llevar todos los puntos de esa circunferencia $(3/8)\lambda$ hacia el generador, es decir, ubicarla en la parte superior del diagrama.
3. Determinar el punto de intersección P entre esa circunferencia y la de $g = 1$. Habrá más de un punto de intersección, en cuyo caso se elige el que implica un tramo más corto para S_2 , es decir el de mayor parte imaginaria. Si no hubiera intersección, se deberá correr el dispositivo completo hacia el generador para encontrar una impedancia con parte real más chica.
4. El punto de intersección encontrado tendrá parte real unitaria y parte imaginaria igual a b_2 . Deberá anularse ésta parte imaginaria con el tramo S_2 , tomando la distancia entre el punto de $g = b = \infty$ (cortocircuito) y el punto $y = 0 - j.b_2$. La línea en ésta sección ya está adaptada.
5. Traemos la circunferencia con el punto de intersección encontrado en su posición, que ahora será el punto R . Determinamos la parte imaginaria de esa admitancia, que será b_1 . Ahora, en ésta sección de la línea la



admitancia debería ser $y_1 = g_C + j.b_1$, sin embargo tenemos la susceptancia de la carga sumada a la que nos provee el paso anterior. Es por eso que debemos agregar el tramo de longitud S_1 , de tal manera que la parte imaginaria que nos provea sea $b_1 - b_C$, que sumada a la existente resulte:

$$y_1 = g_C + j.b_C + j.b_1 - j.b_C = g_C + j.b_1$$

que es el valor buscado. De ésta manera queda adaptada la línea con la carga.

Pulíafito Parte II Pág.: IX-17

RELACIONES DE POTENCIA

Potencia en el dominio de la frecuencia:

Como sabemos, la potencia es una cantidad no lineal por ser el producto de dos cantidades que sí lo son. Es por eso que no podemos en principio usar el dominio de frecuencias para describirla. A pesar de eso, podemos forzar su uso mediante la siguiente expresión, que define la **potencia aparente**:

$$P_V = V.I^* = P + j.Q$$

Donde I^* es el fasor complejo conjugado del fasor I . Denominamos a la componente real P “**potencia activa**”, y a la componente imaginaria Q “**potencia reactiva**”. De todas maneras el dominio de frecuencias es forzado, por lo que las interpretaciones fasoriales no son iguales que con el uso correcto de ésta herramienta.

Pulíafito Parte II Pág.: X-1

Relaciones de potencia en líneas ideales:

Las condiciones de potencia buscadas en las aplicaciones prácticas son las de entregar toda la potencia del generador en la carga, para lo cual debe haber adaptación de impedancias. Sin embargo en algunos casos, la adaptación no se consigue, por lo que existirá una onda reflejada y, por lo tanto, una parte de la potencia que no llega a la carga. Puede demostrarse que la potencia activa (promedio) puesta en juego en cualquier par de terminales de la línea es:

$$P(x) = \text{Re}[V(x).I(x)^*] = P_1(x) - P_2(x)$$

/*Estudiar demostración*/

lo que indica que ésta potencia es la potencia de la onda incidente menos la de la onda reflejada. Éste resultado debe demostrarse y no puede suponerse, dado el carácter no lineal de la potencia.

Una forma de calcular ésta potencia teniendo en cuenta la aparición de una onda estacionaria es:

$$P(x) = \frac{V_{\max} \cdot V_{\min}}{Z_0}$$

/*Estudiar demostración*/

Pulíafito Parte II Pág.: X-4

Potencia máxima a transmitir:

Las relaciones anteriores indican que, en líneas cargadas de tal manera de reflejar toda la energía incidente (cortocircuito, circuito abierto o reactancia pura), la potencia promedio es nula. Si la línea estuviera adaptada, la potencia reflejada es nula, y por lo tanto la potencia promedio es igual a la incidente. Ésta es la situación que se busca en la práctica. Además, la existencia de onda estacionaria implica sobretensiones y corrientes, que provocan algunos efectos indeseados, entre los cuales está la reducción de la capacidad de transmitir potencia de una línea. En efecto, existe un límite del valor de sobretensión, que puede admitir una línea, si no se desea llegar a la ruptura del dieléctrico.

Si la **línea opera adaptada** ($\rho = 1$), la máxima potencia a transmitir está sólo limitada por la tensión de ruptura

V_{\lim} , de la siguiente forma:

$$P_{\max} = \frac{|V_{\lim}|^2}{Z_0}$$

En cambio, si existe **onda estacionaria**, ésta será:

$$P_{\max} = \frac{|V_{\lim}|^2}{\rho \cdot Z_0}$$

lo que reduce la potencia máxima posible de transmitir.

Pulíafito Parte II Pág.: X-8



Pérdidas de potencia y atenuación en líneas reales:

Las líneas prácticas podrían catalogarse en dos grandes tipos: de **pérdidas reducidas** y de **pérdidas grandes**.

Para líneas de reducidas pérdidas, es posible considerar a Z_0 y v como si fueran ideales, y de ésta manera, las pérdidas pueden atribuirse exclusivamente a los parámetros de la línea, como es el caso de las soluciones de alta frecuencia, vistas anteriormente.

Veremos dos casos para las líneas consideradas de reducidas pérdidas: el de adaptación y el de desadaptación.

Pulíafito Parte II Pág.: X-10

Caso de adaptación:

En éste caso $Z_C = Z_0$, y Z_0 es resistiva pura. Solamente existirán ondas incidentes de tensión y corriente, por lo tanto puede demostrarse que:

$$P(x) = P_1 \cdot e^{-2\alpha \cdot x}$$

/*Estudiar demostración*/

de donde resulta:

$$\alpha = -\frac{dP(x)/dx}{2 \cdot P(x)}$$

/*Estudiar demostración*/

Esto nos permite definir la constante de atenuación como la *pérdida de potencia por unidad de longitud dividida por el doble de la potencia transmitida en un dado par de terminales*.

Mediante éstas expresiones podemos definir lo que llamaremos **atenuación total de la línea**, que es.

$$\text{Atenuacion (dB)} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_C}\right) = 20 \cdot \log\left|\frac{V_1}{V_C}\right|$$

/*Estudiar demostración*/

Tener en cuenta que ésta relación es **sólo válida en el caso de adaptación**.

Pulíafito Parte II Pág.: X-11

Caso de desadaptación:

En éste caso será $Z_C \neq Z_0$ y $Z_e \neq Z_0$.

La atenuación total será:

$$\text{Atenuacion (dB)} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_C}\right) = 20 \cdot \log\left|\frac{V_1}{V_C} \frac{Z_C}{Z_e}\right| + 10 \cdot \log\left(\frac{R_e}{R_C}\right)$$

/*Estudiar demostración*/

Podemos calcular la potencia transmitida en cualquier par de terminales de la línea de transmisión de pérdidas reducidas, con la siguiente expresión:

$$P(x) = \frac{|V_1|^2}{Z_0} e^{-2\alpha \cdot x} (1 - |\Gamma|^2)$$

/*Estudiar demostración*/

donde Γ es el coeficiente generalizado de reflexión, para cualquier par de terminales.

Un caso particular de la expresión anterior es en los terminales de la carga, donde establecemos la potencia absorbida por la carga, como:

$$P(x_0) = P_C = \frac{|V_1|^2}{Z_0} e^{-2\alpha \cdot x_0} (1 - |\Gamma_C|^2)$$

Pulíafito Parte II Pág.: X-13

Otras relaciones de potencia en líneas reales:

Pérdidas por retorno:

Se entiende por pérdidas de retorno a “la atenuación o pérdida total, expresada en decibeles, que debería experimentar la onda incidente de potencia para quedar reducida a la onda de potencia reflejada en el mismo par de terminales”. Si la línea es de reducidas pérdidas, ésta cantidad es:

$$\text{Pérdidas de retorno (dB)} = 10 \cdot \log|\Gamma|^2$$

Pérdidas por reflexión:

Definiremos como pérdidas por reflexión al *cociente entre la potencia de la onda incidente en los terminales de la carga, $P_1(x_0)$, y la potencia absorbida por la carga P_C , expresado en decibels:*

$$\text{Pérdidas por reflexión (dB)} = 10 \cdot \log \left(\frac{P_1(x_0)}{P_C} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{1}{1 - |\Gamma_C|^2} \right)$$

Coeficiente de pérdida por transmisión:

Se define el coeficiente de pérdida por transmisión como *la relación entre las pérdidas por atenuación de una línea, considerando la existencia de la onda reflejada, y las pérdidas por atenuación de la misma línea, sin considerar la existencia de la onda reflejada, habiéndose suministrado la misma potencia a la carga en ambos casos. Se puede expresar como:*

$$\text{Coef. de pérdidas por transm.} = \frac{1 + |\Gamma_C|^2 e^{-2\alpha x_0}}{1 - |\Gamma_C|^2}$$

Cuando la atenuación total de la línea supera los 20dB, éste coeficiente tiende al valor $\frac{1}{1 - |\Gamma_C|^2}$ y se toma independiente de la atenuación misma.

TERCERA PARTE: FIBRAS ÓPTICAS**Nociones básicas:**

Las fibras ópticas surgen de la necesidad del incremento de la capacidad de los vínculos utilizados para el transporte de información, debido a que se precisó usar frecuencias cada vez más altas, para soportar los crecientes anchos de banda requeridos. Rápidamente se llegó a los límites tecnológicos y físicos para esto. Por ello se recurrió a la utilización del espectro óptico para solucionar éstos problemas. Se fabricaron guías de onda dieléctricas, hechas con fibras, que podían transportar la luz mediante las reflexiones internas producidas.

Las propiedades que hacen de la fibra óptica un medio útil para la transmisión de información son las siguientes:

- Gran ancho de banda.
- La atenuación es independiente de la velocidad de transmisión y pasa por determinados mínimos llamados ventanas.
- Inmunidad al ruido y a las interferencias por ser un medio dieléctrico.
- La información que viaja por la fibra no se puede detectar.
- Dimensiones físicas y peso más reducidos.
- Amplio rango de funcionamiento respecto a la temperatura.
- Sus costos dependen en principio solamente de la evolución de los procesos tecnológicos de fabricación debido a que la materia prima es muy abundante en la naturaleza.

El análisis estará comprendido en la teoría de Maxwell, dentro de lo que se llaman guías de onda dieléctricas.

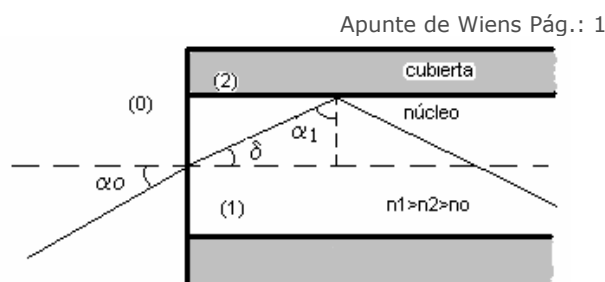
La fibra óptica está compuesta por una región cilíndrica por la cual se efectúa la propagación, denominada núcleo, y por una zona externa al núcleo, coaxial con él y con un índice de refracción mayor al del material del núcleo, llamada envoltura o manto.

La capacidad de transporte de información que tiene una fibra óptica depende de tres características fundamentales:

- El diseño geométrico de la fibra.
- Las propiedades de los materiales.
- El ancho espectral de la fuente de luz utilizada.

Reflexión total:

En una guía de onda, el núcleo es un dieléctrico de índice de refracción n_1 , la cubierta es otro dieléctrico de índice n_2 y el medio que rodea al sistema posee un índice n_0 .





Para que haya reflexión total de la onda en el interior de la guía, el ángulo α_1 debe ser mayor que el ángulo límite α_1^* , cuya expresión es:

$$\alpha_1^* = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (n_1 > n_2)$$

Apunte de Wiens Pág.: 4 y Puliafito Parte II Pág.: XV-54

Apertura numérica:

Suponemos también que el medio que rodea al sistema posee un índice menor que el del núcleo, es decir que $n_0 < n_1$, por lo que mediante la ley de Snell obtenemos un valor de α_0 máximo, para que el rayo sea lanzado en el interior de la guía, cuyo valor es:

$$\alpha_{0\max} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0} \right)$$

Definimos como **apertura numérica** a:

$$AN = n_0 \cdot \sin \alpha_{0\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Puede observarse que la apertura numérica, o ángulo límite de aceptación depende exclusivamente de los materiales del núcleo y del manto. Cuanto más parecidos sean éstos, menor es la apertura numérica y se requerirá una fuente de luz que proporcione un haz más estrecho.

Apunte de Wiens Pág.: 4 y Puliafito Parte II Pág.: XV-56

Frecuencia de corte y modos de propagación:

Resolviendo las ecuaciones de onda se encuentra que son posibles varias soluciones o modos que son funciones entre otras cosas del diámetro de la fibra. De hecho que dentro de los límites impuestos por la apertura numérica los rayos pueden propagarse según distintos ángulos. Aquellos que se propagan con ángulos pequeños respecto del eje de la fibra se denominan modos de orden bajo, mientras que los que se propagan con ángulos mayores se denominan ángulos de orden elevado. Estos modos no existen en forma continua. Para una longitud de onda dada, existe una serie de ángulos discretos para los cuales es posible la propagación.

Cuando se realiza la resolución de las ecuaciones de onda aparece un parámetro V llamado frecuencia de corte normalizada, relacionado con la cantidad de veces que el radio “a” de la fibra contiene a la longitud de onda λ . Este factor depende de la longitud de onda, del diámetro del núcleo y del material de la fibra. Este parámetro se utiliza para determinar la cantidad de modos que se pueden propagar a lo largo de la fibra, demostrándose que para valores menores de $V = 2,405$ sólo es posible la existencia de un solo modo denominado fundamental.

Apunte de Wiens Pág.: y Puliafito Parte II Pág.: XV-58

Cálculo del número de modos:

El número N de modos que puede propagar una fibra óptica se calcula como:

$$N \cong 0,5 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot a \cdot AN}{\lambda_2} \right)^2$$

donde a es el radio del núcleo. Con esto vemos que para reducir N se hace necesario incrementar la longitud de onda (reducir la frecuencia) o reducir el radio a del núcleo.

Puliafito Parte II Pág.: XV-60

Clasificación:

Según los modos de propagación:

Según los modos de propagación, las fibras ópticas se clasifican en:

- **Fibras monomodo:** Sólo propagan el modo fundamental.
Características y aplicaciones:
 - Son fibras que cumplen la condición de $V < 2,405$
 - No presentan dispersión modal y por lo tanto tienen anchos de banda grandes.
 - Se aplican a enlaces de larga distancia y gran flujo de información.
- **Fibras multimodo:** Propagan distintos modos, según el radio del núcleo y la longitud de la onda.

Apunte de Wiens Pág.: 5 y Puliafito Parte II Pág.: XV-61

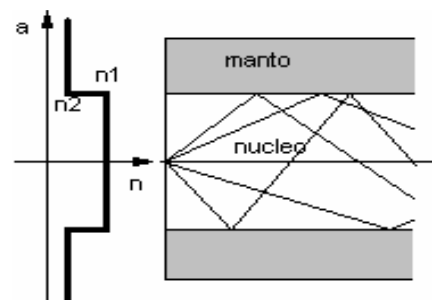
Según el tipo de perfil:

Según el tipo de perfil, las fibras ópticas se clasifican en:

▪ **Fibras de índice abrupto:**

Características y aplicaciones:

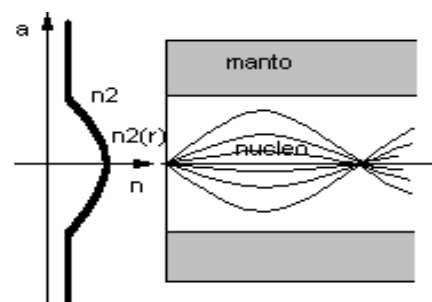
- Su índice de refracción es constante en toda la sección del núcleo.
- Debido al diámetro del núcleo admite la propagación de varios modos, los cuales llegan a distintos tiempos al extremo de la fibra provocando dispersión modal.
- No se usan en telecomunicaciones, sino más bien en aplicaciones locales y con bajos requerimientos de ancho de banda.
- Su única ventaja es que debido a que propaga mayor cantidad de modos, admite que se pueda transmitir mayor cantidad de energía.



▪ **Fibras de índice gradual:**

Características y aplicaciones:

- El índice de refracción es variable a lo largo del radio del núcleo.
- El índice del revestimiento permanece constante.
- Aquellos modos que permanecen más tiempo lejos del eje del núcleo, se propagan a mayor velocidad, con lo cual se compensa la dispersión modal.
- Debido a la variación continua del índice de refracción, los modos no se propagan en forma recta sino que siguen curvas aproximadamente senoidales con lo que se acortan los recorridos de las trayectorias mas largas, lo cual también contribuye a compensar la dispersión modal.
- Puede deducirse que la apertura numérica de estas fibras es variable con r y es siempre menor que una equivalente de índice abrupto.
- Estas fibras tienen mucha menor capacidad de transporte de energía.



Apunte de Wiens Pág.: 7 y Puliafito Parte II Pág.: XV-61

Atenuación:

La atenuación en fibras ópticas es en general una función muy compleja, pero se pueden analizar de manera separada los factores que la componen, para entender el fenómeno. Existen factores internos y externos que se explicarán a continuación.

Factores internos:

Esta atenuación es inevitable y se debe fundamentalmente a:

- **Absorción debida a rayos ultravioletas o infrarrojos:** En las bandas de estos rayos, la atenuación se produce a consecuencia de la resonancia de la materia cuando se la excita en esas frecuencias.
- **Dispersión de Rayleigh:** Se debe a partículas extrañas de radios menores que la longitud de onda, que dispersan una onda plana en todas las direcciones.

Apunte de Wiens Pág.: 9 y Puliafito Parte II Pág.: XV-54

Factores externos:

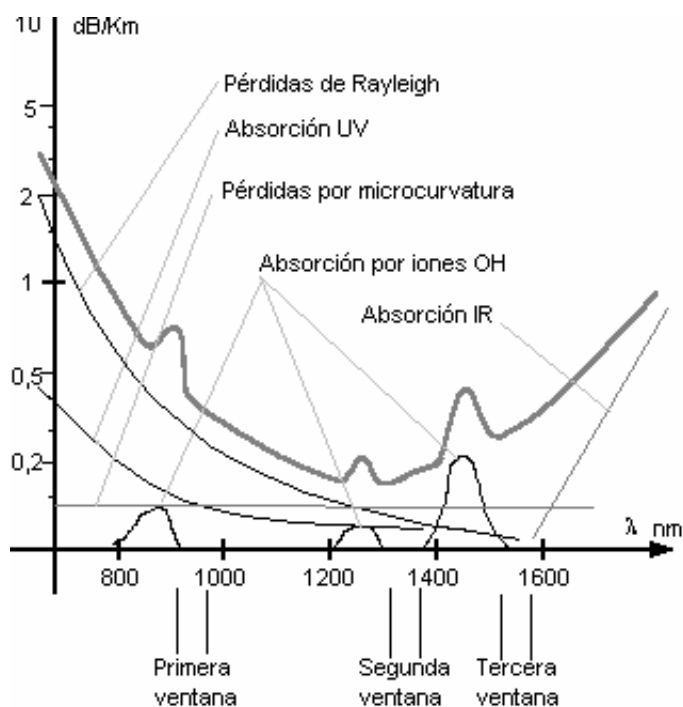
Esta atenuación se debe fundamentalmente a:

- **Absorción por iones OH⁻:** Una vez que la fibra es fabricada o instalada, penetra hidrógeno en su interior, que origina un incremento en las pérdidas.
- **Curvaturas, micro curvaturas y defectos geométricos:** En éstos defectos se produce una transferencia de energía hacia el manto, provocando atenuación.

Apunte de Wiens Pág.: 9 y Puliafito Parte II Pág.: XV-54

Atenuación total:

La siguiente curva grafica la atenuación en una fibra óptica:



Este gráfico permite el siguiente análisis:

- No es conveniente usar la fibra por debajo de los 800 nm ni por encima de los 1600 nm por la elevada atenuación.
- Aparecen tres zonas de baja atenuación denominadas ventanas que son las que se utilizan. Los primeros sistemas fueron desarrollados en la ventana de 850 nm, siendo preferida en la actualidad la segunda ventana en 1300 nm, aunque la tendencia es pasar a usar la tercera debido a que la vida útil del Láser aumenta con la longitud de onda.

Apunte de Wiens Pág.: 10
y Puliafito Parte II Pág.: XV-53

Dispersión:

La limitación de ancho de banda del sistema queda determinada por un fenómeno que se conoce como dispersión, que es una variación en el tiempo que tardan en llegar las ondas de distintas frecuencias a destino.

La capacidad de la fibra puede aumentarse disminuyendo el ancho de banda del emisor o aumentando la longitud de onda que emite.

Los efectos mencionados se deben esencialmente a tres causas:

- Dispersión modal
- Dispersión del material
- Dispersión por efecto guía de ondas

Todas ellas están relacionadas con la velocidad de propagación de la onda a través del núcleo de la fibra.

Dado que la dispersión de material y la dispersión por efecto de guía de ondas son ambas de carácter intramodal, es posible la suma en forma lineal, llamándose a ésta dispersión cromática. Es interesante aclarar que la dispersión por efecto de guía de ondas es de signo contrario a la dispersión de material, por lo que en realidad ambas se restan.

La dispersión cromática a su vez es de naturaleza distinta a la dispersión modal (o intermodal), sus efectos deberán sumarse cuadráticamente a fin de obtener la dispersión total.

Apunte de Wiens Pág.: 10

Dispersión modal:

El fenómeno se debe a que los rayos de mayor orden recorren una mayor distancia y esto se refleja en una dispersión en los tiempos de arribo al extremo remoto de la fibra. Esta dispersión sólo puede reducirse con un menor valor de la apertura numérica lo cual permitiría sólo la propagación de los modos de orden menor. Este fenómeno es inherente solamente a las **fibras multimodo**.

Para disminuir la dispersión modal se puede disminuir el diámetro del núcleo a fin de que la frecuencia normalizada se acerque al valor umbral, disminuyendo así, la cantidad de modos transmitidos.

Apunte de Wiens Pág.: 11

Dispersión del material:

La velocidad varía en relación inversa con el índice de refracción, y a su vez, si el índice de refracción varía con la longitud de onda resultará entonces que el flujo luminoso cuya longitud de onda corresponda al menor índice de refracción se propagará más rápido. Esto significa que diferentes porciones del espectro correspondientes a un modo, que se envían al mismo tiempo por un extremo de la fibra no arriban al mismo tiempo y sufren dispersión en el tiempo debido a diferencias en el tiempo de propagación. Esta es la dispersión producida por el material y se reduce utilizando fuentes de luz que tengan un espectro angosto o bien consiguiendo que el material utilizado para el núcleo de la fibra presente un índice de refracción constante dentro del espectro de la fuente de luz.

Apunte de Wiens Pág.: 12



Dispersión de guía de ondas:

Este es un efecto que se da fundamentalmente en las fibras monomodo. Se debe a que las distintas componentes espectrales le corresponde un índice de refracción distinto por lo que el ángulo asociado a su trayectoria es distinto y por lo tanto los caminos recorridos también lo son.

Apunte de Wiens Pág.: 12

Pérdidas en los acoplamientos:

Los tres mecanismos principales que producen atenuación en las interfaces de acoplamiento entre fibra y los puertos del equipo u otro dispositivo, son:

- Aquellas relacionadas con los valores de apertura numérica.
- Aquellas vinculadas con el área de los puertos ópticos.
- Pérdidas de tipo Fresnel (reflexión)

Además de estos efectos deben considerarse los desalineamientos y/o separación entre los puertos.

Las pérdidas de Fresnel se producen siempre que el haz de luz pasa de un medio a otro que tiene un índice de refracción diferente pues parte del flujo se refleja.

Apunte de Wiens Pág.: 13

CUARTA PARTE: RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

NOCIONES BÁSICAS DE RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Introducción:

Cuando analizamos los problemas de radiación electromagnética, nos interesa vincular el campo con las fuentes que lo originan. Es por eso que las ecuaciones diferenciales que se plantearán son del tipo “no homogéneas”, ya que interviene en ellas una perturbación producida por las fuentes del campo electromagnético ρ y \vec{J}_C .

Apunte UBA Pág.: 1 y Puliafito Parte III Pág.: I-1

Potenciales electromagnéticos retardados:

Al definir éstos potenciales debemos tener en cuenta que la propagación de la energía no se produce de manera instantánea (velocidad infinita) sino a una velocidad finita, que a altas frecuencias tiene relevancia. Es por eso que definiremos potenciales electromagnéticos retardados, ya que son debidos a la acción de fuentes que están a una cierta distancia:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

del punto P de observación, y como su acción tiene una velocidad de propagación v , el tiempo t' , en que se origina la perturbación es:

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

donde t es el tiempo en que la perturbación llega al punto de observación y R/v es el tiempo de retardo.

Debemos entonces introducir dentro de la definición de los potenciales estacionarios la variable tiempo de una manera adecuada para lograr los resultados correctos. Veremos cómo se realiza esto para medios ideales y reales.

Apunte UBA Pág.: 1 y Puliafito Parte III Pág.: I-6

Medios dieléctricos ideales:

Debemos agregar a las ecuaciones de Maxwell para medios dieléctricos ideales los términos que corresponden a las fuentes del campo electromagnético ρ y \vec{J}_C , confinadas en los conductores del sistema radiante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_C + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$



No debemos confundirnos las fuentes con la corriente de conducción y la densidad de carga en medios imperfectos.

Vamos a admitir que existe un potencial vectorial electromagnético \bar{A} , tal que:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A}$$

y un potencial escalar, electromagnético ϕ .

Para cumplir con el teorema de Helmholtz, debemos especificar la divergencia de dicho potencial, que no podemos suponer nula como en el caso estático. Lorentz propone que tenga un valor:

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{gauge de Lorentz para medios ideales})$$

lo que contribuirá para obtener ecuaciones de onda en forma d'Alambertiana.

Reemplazando el campo magnético expresado anteriormente en la ley de Faraday, obtenemos la correcta definición del campo eléctrico radiado:

$$\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

Esta ecuación nos describe un campo compuesto, es decir, con una componente irrotacional debida a ϕ y otra rotacional debida a \bar{A} .

Si aplicamos el gauge de Lorentz al desarrollo de ecuaciones de onda partiendo de las ecuaciones de Maxwell recién mencionadas, obtendremos:

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}_C \\ \nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} \bar{A}(\bar{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\bar{J}_C(\bar{r}', t')}{R} d\tau' \\ \phi(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{\tau} \frac{\rho(\bar{r}', t')}{R} d\tau' \end{cases}$$

Estas soluciones son similares a las esperadas extrapolando el régimen estacionario, sin embargo debemos tener en cuenta que la diferencia estriba en el cálculo del campo eléctrico mediante la fórmula vista, que implica un campo compuesto.

Apunte UBA Pág.: 1 y Puliafito Parte III Pág.: I-13

Fuentes con variación armónica en el tiempo:

Las fuentes de radiación obedecerán variaciones armónicas en el tiempo de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \bar{J}_C(\bar{r}, t) = \text{Re}[\bar{J}_C(\bar{r}) e^{j\omega t}] \\ \rho(\bar{r}, t) = \text{Re}[\rho(\bar{r}) e^{j\omega t}] \end{cases}$$

donde $\bar{J}_C(\bar{r})$ y $\rho(\bar{r})$ son los fasores representativos respectivos. Con estas consideraciones, los fasores solución de las ecuaciones de onda respectivas serán:

$$\begin{cases} \bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\bar{J}_C(\bar{r}') e^{-j\beta R}}{R} d\tau' \\ \Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{\tau} \frac{\rho(\bar{r}') e^{-j\beta R}}{R} d\tau' \end{cases}$$

donde se ha considerado que el medio es ideal, por eso se tiene en cuenta la constante de fase β para ondas planas en dicho medio.

Hay una interdependencia entre los potenciales \bar{A} y ϕ , por lo cuál podríamos utilizar sólo uno, el \bar{A} , para efectuar todos los cálculos. En efecto, el fasor campo eléctrico será:



$$\bar{E} = \frac{\bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{A})}{j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \mu} - j \cdot \omega \cdot \bar{A}$$

/*Estudiar demostración*/

y el fasor campo magnético seguirá siendo:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

Pulíafito Parte III Pág.: I-21

Medios dieléctricos reales:

Para medios reales tendremos en cuenta en las ecuaciones de Maxwell, además de las fuentes del campo electromagnético, la corriente de conducción $\sigma \cdot \bar{E}$ en el medio real, con lo que las ecuaciones serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla} \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J}_C + \sigma \cdot \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{H} = 0 \end{array} \right.$$

Trabajando con variaciones armónicas, la condición de Lorentz tomará la siguiente forma:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = -\gamma^2 \frac{\Phi}{j \cdot \omega} \quad (\text{gauge de Lorentz para medios reales})$$

donde:

$$\gamma^2 = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\sigma + j \cdot \omega \cdot \epsilon)$$

corresponde a la expresión de una constante de propagación compleja para el medio real.

Con esto, las ecuaciones de onda serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}^2 \bar{A} - \gamma^2 \cdot \bar{A} = -\mu \cdot \bar{J}_C \\ \bar{\nabla}^2 \Phi - \gamma^2 \cdot \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{array} \right.$$

y cuyas soluciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \iiint \bar{J}_C(\bar{r}') \frac{e^{-\gamma \cdot R}}{R} d\tau' \\ \Phi(\bar{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \iiint \rho(\bar{r}') \frac{e^{-\gamma \cdot R}}{R} d\tau' \end{array} \right.$$

Pulíafito Parte III Pág.: I-23

Método general de resolución:

Para resolver un problema de radiación es necesario conocer las distribuciones de las fuentes de radiación, lo que no siempre es una cosa fácil. Suponiendo que se conocen, la metodología general para la resolución es:

1. Una vez conocidas \bar{J}_C y ρ , se puede calcular el potencial vectorial \bar{A} .
2. Conocido \bar{A} , se obtiene el campo magnético \bar{H} .
3. Se calcula el potencial escalar ϕ en función de ρ .
4. Conocidos ambos potenciales, se calcula el campo eléctrico \bar{E} .

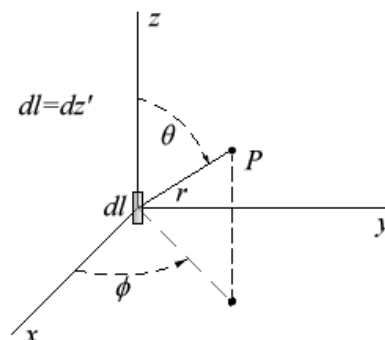
Generalmente, la única especificación de fuentes que se necesita es la de \bar{J}_C , ya que ρ se puede determinar mediante la ecuación de la continuidad.

Si estamos en el dominio de las frecuencias, se puede omitir el tercer paso, ya que el campo eléctrico se puede calcular mediante el conocimiento de \bar{A} .

Pulíafito Parte III Pág.: I-27

Radiación de un dipolo elemental:

Vamos a definir un dipolo elemental, o elemento de corriente oscilante, a un hilo conductor ideal, de sección nula, cuyo largo es infinitesimal y por el cual circula una corriente eléctrica alterna. Utilizaremos un sistema de coordenadas esféricas para describir sus propiedades. Haremos todos los cálculos considerando un medio dieléctrico ideal circundante a dicho elemento, y en el dominio de las frecuencias.



Apunte UBA Pág.: 8 y Puliafito Parte III Pág.: II-2

Potencial:

Como hemos considerado un hilo infinitamente delgado, se puede reemplazar $\bar{\mathbf{J}}_C \cdot d\boldsymbol{\tau}'$ por $\bar{\mathbf{I}} \cdot dz'$ en la fórmula de cálculo del potencial vectorial $\bar{\mathbf{A}}$. Por otra parte la integración no es necesaria por considerar un largo infinitesimal. El potencial electromagnético debido al dipolo elemental es entonces:

$$\mathbf{A}_z(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mu \cdot \mathbf{I} \cdot dz'}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} = K \frac{e^{-j\beta r}}{r}$$

Apunte UBA Pág.: 8 y Puliafito Parte III Pág.: II-4

Campos:

Como el potencial vectorial es $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_z \cdot \hat{\mathbf{z}}$, utilizando la expresión correspondiente calculamos el campo magnético, que resultará ser:

$$\bar{\mathbf{H}} = H_\phi \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

donde :

$$H_\phi = j \frac{\beta^2 \cdot \mathbf{I} \cdot dz' \cdot \sin(\theta)}{4\pi} \left(\frac{1}{\beta r} - j \frac{1}{\beta^2 r^2} \right) e^{-j\beta r}$$

/*Estudiar demostración*/

Como vemos, el campo magnético solo tiene componentes según la coordenada ϕ .

Utilizando la expresión correspondiente también calculamos el campo eléctrico, que será:

$$\bar{\mathbf{E}} = E_r \cdot \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

donde, para el vacío $\beta/\omega\epsilon = 120\pi$, entonces:

$$E_r = 60 \cdot \beta^2 \cdot \mathbf{I} \cdot dz' \cdot \cos(\theta) \left(\frac{1}{\beta^2 r^2} - j \frac{1}{\beta^3 r^3} \right) e^{-j\beta r}$$

/*Estudiar demostración*/

$$E_\theta = j \cdot 30 \cdot \beta^2 \cdot \mathbf{I} \cdot dz' \cdot \sin(\theta) \left(\frac{1}{\beta r} - j \frac{1}{\beta^2 r^2} - \frac{1}{\beta^3 r^3} \right) e^{-j\beta r}$$

/*Estudiar demostración*/

Apunte UBA Pág.: 9 y Puliafito Parte III Pág.: II-5 y II-7

Zonas de radiación:

Vemos en las fórmulas que describen los campos que existen dependencias del tipo $1/r$, $1/r^2$ y $1/r^3$. Éstas dependencias permitirán distinguir dos zonas principales:

- **Zona lejana o de radiación:** Aquí llamaremos al campo “lejano” o “radiado”, y es cuando el punto de observación se aleja lo suficiente de la fuente como para que solamente persistan, relativamente, los componentes del campo que dependen de $1/r$ frente a las otras.
- **Zona cercana:** Aquí predominan relativamente los componentes que dependen de $1/r^2$ y $1/r^3$, y es la zona en que el punto de observación se encuentra cerca de la fuente de radiación. Ésta zona tiene dos tipos de campo:



- **Campo inducido:** Es el que depende de $1/r^2$.
- **Campo electrostático:** Es el que depende de $1/r^3$. Se denomina así porque sólo el campo eléctrico tiene éste tipo de componentes, por lo que podemos suponer que se deben a cargas eléctricas, debido a que su influencia se nota en las cercanías del elemento radiante.

El límite que separa prácticamente ambas zonas se determina cuando:

$$\frac{1}{\beta \cdot r} = \frac{1}{\beta^2 \cdot r^2}$$

que se da para la distancia de:

$$r = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \cong \frac{\lambda}{6} \quad (\text{límite de las zonas de radiación})$$

Al considerar los campos radiados, es decir, en la zona lejana, podemos considerar nulas las componentes que dependen de $1/r^2$ y $1/r^3$, y expresar los campos como:

$$\begin{cases} H_{\phi} = j \frac{\beta \cdot I \cdot dz'}{4 \cdot \pi \cdot r} \sin(\theta) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r} \\ E_r = 0 \\ E_{\theta} = j \cdot \frac{30 \cdot \beta \cdot I \cdot dz'}{r} \sin(\theta) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r} \end{cases}$$

Como vemos, el campo electromagnético radiado o lejano está constituido sólo por los campos E_{θ} y H_{ϕ} , los cuales se encuentran en cuadratura espacial y temporalmente en fase, es decir, **la onda radiada lejana es una onda T.E.M.** Resulta claro entonces, que la onda se genera en un modo de orden superior T.M. y va degenerando a medida que se aleja de la fuente en un modo T.E.M.

Apunte UBA Pág.: 9 y Puliafito Parte III Pág.: II-9

Potencia radiada:

Debido a que el campo eléctrico total radiado tiene componentes sobre las coordenadas θ y r , resultará que el vector de Poynting tiene también dos componentes:

$$\vec{\pi} = \pi_r \cdot \hat{r} - \pi_{\theta} \cdot \hat{\theta} = E_{\theta} \cdot H_{\phi} \cdot \hat{r} - E_r \cdot H_{\phi} \cdot \hat{\theta}$$

Por otro lado, en el dominio de las frecuencias se definen los valores activo y reactivo de dicho vector, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \pi_{\text{med act}} = \text{Re}(E_{ef} \cdot H_{ef}^*) \\ \pi_{\text{react}} = \text{Im}(E_{ef} \cdot H_{ef}^*) \end{cases}$$

Con éstas definiciones llegamos a los siguientes componentes activos y reactivos para cada coordenada:

- Según la coordenada r :

$$\begin{cases} \pi_{r \text{ med act}} = K \cdot \sin^2(\theta) \\ \pi_{r \text{ react}} = -\frac{1}{\beta^3 \cdot r^3} K \cdot \sin^2(\theta) \end{cases}$$

- Según la coordenada θ :

$$\begin{cases} \pi_{\theta \text{ med act}} = 0 \\ \pi_{\theta \text{ react}} = -\left(\frac{1}{\beta^3 \cdot r^3} + \frac{1}{\beta \cdot r}\right) K \cdot \sin^2(\theta) \end{cases}$$

Siendo en ambos casos:

$$K = Z_0 \left(\frac{\beta \cdot I_{ef} \cdot dz'}{4 \cdot \pi \cdot r} \right)^2$$



Elegiremos convenientemente como superficie de integración para calcular la potencia una esfera centrada en el dipolo elemental. Resultará con ella que las potencias activa y reactiva radiadas en la dirección radial serán:

$$P_r = \frac{Z_0 (\beta I_{ef} dz')^2}{6\pi} \quad Q_r = -\frac{Z_0 (I_{ef} dz')^2}{6\pi \beta r^3}$$

/*Estudiar demostración*/

Como vemos, la potencia reactiva depende de $1/r^3$, por lo que desaparecerá su efecto en la zona lejana. Es decir, la potencia radiada en la zona lejana es puramente activa, pero en la zona cercana al elemento radiante es preponderante el flujo reactivo de potencia. En la zona cercana, la propagación se efectúa según un modo de orden superior y con una impedancia intrínseca de naturaleza compleja, con fuerte componente reactivo, que origina ondas estacionarias y, en definitiva, energía entretenida en el medio que rodea la fuente dentro de los límites de la mencionada zona. La potencia efectivamente entregada por el dipolo al medio es la potencia radial activa que hemos mencionado.

Pulafito Parte III Pág.: II-13

Resistencia de radiación:

Vemos en la expresión anterior que la potencia radiada depende de la corriente eficaz al cuadrado, por lo que, por analogía con los conceptos conocidos, podemos establecer una **resistencia de radiación**, que sea:

$$R_{rad} = \frac{Z_0 (\beta dz')^2}{6\pi}$$

El efecto de ésta resistencia es el de **radiar** la potencia que cae en ella, análogamente con lo que sucede en una resistencia común, que disipa calor por efecto Joule.

Pulafito Parte III Pág.: II-19

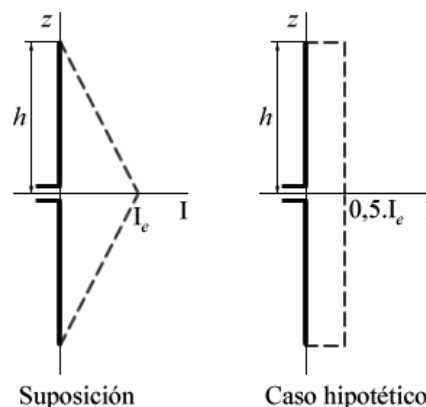
Dipolo corto ideal:

Se considera ahora un dipolo de longitud pequeña, comparada con la longitud de onda de trabajo.

Distribución de corrientes:

Veremos en los diagramas, que hemos supuesto nodos de corriente en los extremos del dipolo, y un valor máximo en el origen del sistema. Supondremos también que los efectos en la radiación serán los mismos que si la corriente fuera uniforme y de la mitad del valor máximo de la corriente.

Pulafito Parte III Pág.: II-24



Resistencia de radiación:

La resistencia de radiación del dipolo corto será, mediante la suposición de distribución de corriente:

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$

/*Estudiar la demostración*/

Pulafito Parte III Pág.: II-26

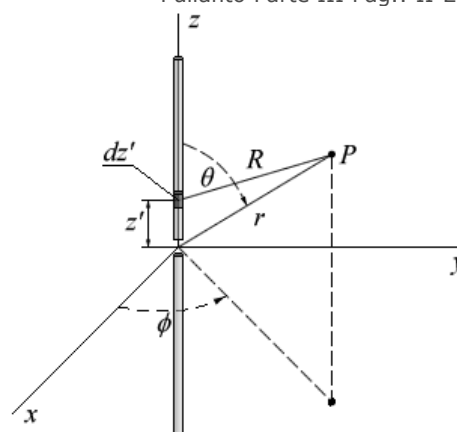
Dipolo rectilíneo ideal:

Vamos a tratar de encontrar las expresiones del campo electromagnético en la zona de radiación, o lejana, correspondientes a un dipolo simétrico, infinitamente delgado y rectilíneo de largo cualquiera.

Apunte UBA Pág.: 16 y Pulafito Parte III Pág.: II-30

Distribución de corrientes:

En el caso de un dipolo infinitamente delgado la corriente se dispone según una distribución senoidal, en forma similar a una onda estacionaria pura que se origina en una línea de transmisión ideal, abierta en los terminales de la carga, cuando se la excita armónicamente en el tiempo.

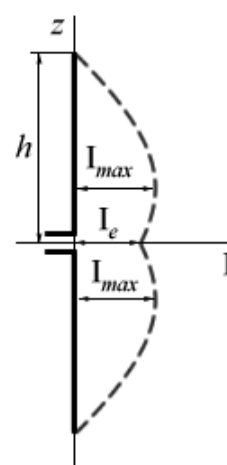
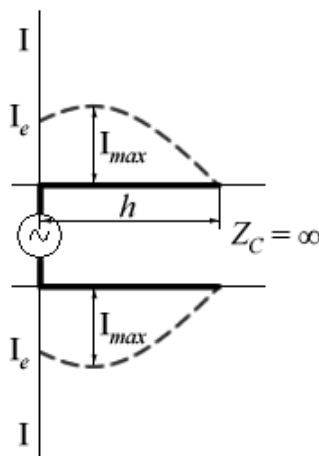




La distribución senoidal de corriente en la línea ideal se mantiene si se alinean sus conductores hasta obtener un dipolo simétrico ideal, como se ve en la figura.

De acuerdo con la longitud h de cada monopolo, el máximo valor de corriente I_{\max} quedará ubicado en cierto valor de la coordenada z' . Las distribuciones senoidales de corriente serán:

$$\begin{cases} I(z') = I_{\max} \cdot \sin[\beta(h - z')] \\ I(z') = I_{\max} \cdot \sin[\beta(h + z')] \end{cases}$$



Puliafito Parte III Pág.: II-30

Línea de transmisión
Antena

Potencial:

Para el campo lejano, a los efectos del cálculo de módulos, podemos considerar que $R \cong r$. Sin embargo, a los efectos de calcular las fases de las ondas producidas, debemos aproximar diciendo que:

$$R \cong r - z' \cdot \cos(\theta)$$

Por lo tanto, integrando los dipolos elementales existentes en todo el largo, es decir, de 0 a h y de 0 a $-h$, teniendo en cuenta las distribuciones senoidales encontradas en el punto anterior, se llega a:

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I_{\max}}{2 \cdot \pi \cdot \beta \cdot r} \left[\frac{\cos(\beta \cdot h \cdot \cos \theta) - \cos(\beta \cdot h)}{\sin^2(\theta)} \right] \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r}$$

que es el potencial electromagnético lejano de un dipolo rectilíneo ideal.

Puliafito Parte III Pág.: II-33

Campos:

Debido a la simetría del sistema y a que estamos considerando campo lejano, es que sólo tenemos componente de campo magnético H_ϕ , que será:

$$H_\phi = j \frac{I_{\max}}{2 \cdot \pi \cdot r} \left[\frac{\cos(\beta \cdot h \cdot \cos \theta) - \cos(\beta \cdot h)}{\sin(\theta)} \right] \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r}$$

y el campo eléctrico será:

$$E_\theta = 120 \cdot \pi \cdot H_\phi = j \frac{60 \cdot I_{\max}}{r} \left[\frac{\cos(\beta \cdot h \cdot \cos \theta) - \cos(\beta \cdot h)}{\sin(\theta)} \right] \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r}$$

Como vemos ambas expresiones dependen de el largo h de cada monopolo y del ángulo θ . Esto determinará ciertas propiedades direccionales de las antenas, al estudiar la función entre corchetes.

Apunte UBA Pág.: 16 y Puliafito Parte III Pág.: II-36 y II-37

Potencia radiada:

La componente activa del vector de Poynting será:

$$\pi_{r \text{ med act}} = \frac{Z_0 \cdot I_{\max}^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot r^2} \left[\frac{\cos(\beta \cdot h \cdot \cos \theta) - \cos(\beta \cdot h)}{\sin(\theta)} \right]^2$$

Con lo que la potencia total radiada dependerá de h al integrar la función anterior en una esfera:

$$P_r = \frac{Z_0 \cdot I_{\max}^2}{2 \cdot \pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\cos(\beta \cdot h \cdot \cos \theta) - \cos(\beta \cdot h)}{\sin(\theta)} \right]^2 d\theta$$

Puliafito Parte III Pág.: II-38



Resistencia de radiación:

Al observar la distribución de corriente en el dipolo, podemos inferir que la resistencia de radiación variará de un punto al otro del mismo, es por eso que vamos a definir dos valores a utilizar. Uno con la corriente de base I_e y otro con la corriente de malla I_{\max} . Éstos valores estarán interrelacionados entre sí:

$$R_{\text{rad base}} = \frac{I_{\max}^2}{I_e^2} R_{\text{rad malla}}$$

Para cada caso particular se puede averiguar cada valor, dividiendo la potencia radiada por la corriente correspondiente. En general la resistencia de radiación es una función del largo h de cada monopolo.

Apunte UBA Pág.: 18 y Puliafito Parte III Pág.: II-39

Dipolo de media longitud de onda:

Para el caso particular en que $h = \lambda/4$, es decir que el largo total del dipolo es de media longitud de onda, las configuraciones de campo radiado serán:

$$\begin{cases} H_\phi = j \frac{I_{\max}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\cos\theta\pi/2)}{\sin(\theta)} \right] e^{-j\beta r} \\ E_\theta = 120\pi H_\phi = j \frac{60 I_{\max}}{r} \left[\frac{\cos(\cos\theta\pi/2)}{\sin(\theta)} \right] e^{-j\beta r} \end{cases}$$

La potencia radiada de cada monopolo será:

$$P_{r \text{ monopolo}} = \frac{36,5 I_{\max}^2}{\sqrt{2}}$$

y la resistencia de radiación del dipolo es:

$$R_{\text{rad dipolo}} = 73\Omega$$

Puliafito Parte III Pág.: II-43

Antenas de ondas viajeras:

Cuando una antena rectilínea ideal se encuentra cargada con una impedancia terminal, tal que reduzca notablemente la posibilidad de ondas reflejadas en la misma, se dice que es una antena “aperiódica” o “no resonante”, y se las denomina **antenas de ondas viajeras**. En ellas entonces circula una corriente progresiva, en forma de onda incidente.

Apunte UBA Pág.: 20 y Puliafito Parte III Pág.: II-53

Radiación de una espira:

La radiación en una espira dependerá de las coordenadas r y θ , pero no de ϕ .

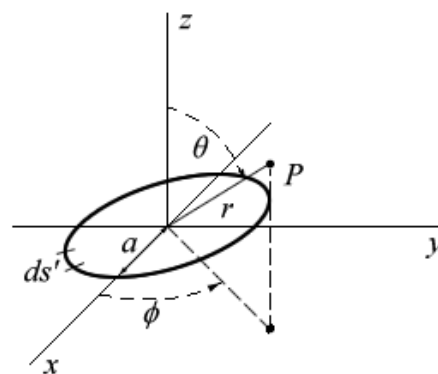
La potencia radiada por éstas antenas vale:

$$P_r = \frac{Z_0 (\beta a)^4 I_0^2}{4}$$

y la resistencia de radiación es:

$$R_{\text{rad}} = 20\pi^2 (\beta a)^4$$

Apunte UBA Pág.: 13 y Puliafito Parte III Pág.: II-57



ANTENAS

Teorema de Rayleigh-Helmholtz:

“Sean dos antenas acopladas por el medio, sin otra condición de contorno existente. Si se aplica un generador ideal de tensión en los terminales de una de las antenas (transmisora) se mediría en los terminales de la otra antena (receptora), mediante un amperímetro ideal, una corriente dada. Ésta corriente sería idéntica a la que se mediría en los terminales de la primera antena si se intercambiaran las posiciones del generador y el amperímetro.”

Puliafito Parte III Pág.: III-8



Propiedades fundamentales:

Las propiedades fundamentales de las antenas son:

1. Una antena dada, al operar como transmisora o como receptora, tiene iguales diagramas de radiación.
2. Una antena dada, al operar como transmisora o como receptora, tiene iguales impedancias de entrada.
3. Una antena dada, al operar como transmisora o como receptora, tiene iguales longitudes efectivas.

Pulíafito Parte III Pág.: III-10

Impedancias mutuas e impedancias de antenas:

Sean dos antenas separadas ubicadas en un medio dado, y libres de condiciones de contorno adicionales, podemos considerar al sistema como un cuadripolo equivalente del tipo lineal, pasivo y bilateral. Podemos mediante la teoría de cuadripolos establecer un sistema de ecuaciones tal como:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{cases}$$

Donde diremos que las impedancias Z_{11} y Z_{22} son las **autoimpedancias** de las antenas, y la impedancia

$Z_{12} = Z_{21}$ es la impedancia reflejada sobre una antena, por la otra, a través del medio que las acopla, llamada

impedancia mutua. La **impedancia de entrada** de cada antena será la suma entre la autoimpedancia de esa antena y la impedancia mutua, y será igual al valor de la tensión aplicada, sobre la corriente de entrada en los terminales de la misma.

Pulíafito Parte III Pág.: III-2

Propiedades direccionales:

Eficiencia de una antena real:

La eficiencia de una antena es la relación existente entre la potencia efectivamente radiada por la misma (P_r) y la potencia suministrada en sus terminales de entrada (P_s):

$$\eta = \frac{P_r}{P_s}$$

Si consideramos que la potencia entregada a la antena es la suma de la potencia radiada más una potencia perdida, entonces la definición queda:

$$\eta = \frac{P_r}{P_r + P_p} = \frac{1}{1 + P_p/P_r}$$

Y si además consideramos que la potencia perdida es debida a una resistencia óhmica de la antena y la potencia radiada se relaciona con la resistencia de radiación, podemos escribir que:

$$\eta = \frac{1}{1 + R_p/R_{rad}}$$

Pulíafito Parte III Pág.: VI-3

Intensidad de radiación:

La intensidad de radiación es la potencia radiada por unidad de ángulo sólido, según las distintas direcciones. Ésta siempre se refiere al campo lejano. Podemos especificarla como:

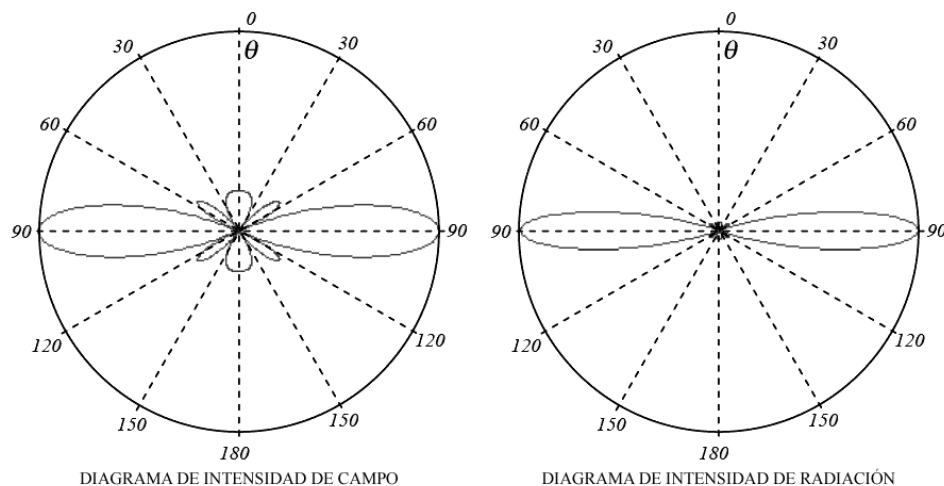
$$U(\theta, \phi) = \pi_r \cdot r^2 \quad [U] = \frac{\text{Watt}}{\text{estereoradian}}$$

Pulíafito Parte III Pág.: VI-6

Diagramas de radiación:

Existen diagramas de radiación para describir:

- El **campo radiado** por una antena, para el cual hay diagramas de:
 - Módulo o intensidad de campo
 - Fase
- La **intensidad de radiación**, que sólo requiere gráficos de amplitud, debido a que es escalar.



Puliafito Parte III Pág.: VI-9

Directividad:

Se define como directividad de una antena a la relación existente entre la intensidad de radiación, en una dada dirección, y la intensidad media de radiación, de esa misma antena, si se comportara como una antena isotrópica. Matemáticamente esto es:

$$D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_0}$$

donde el valor de la intensidad media de radiación es:

$$U_0 = \frac{P_r}{4\pi}$$

La directividad puede medirse también en decibels:

$$D(\text{dB}) = 10 \cdot \log[D(\theta, \phi)]$$

Normalmente, cuando se habla de directividad se entiende que se está refiriendo a la **directividad máxima** de una antena, es decir, a su valor para $U(\theta, \phi) = U_{\max}$.

Puliafito Parte III Pág.: VI-21

Ganancia:

Definimos ganancia de una antena como la relación existente entre la máxima intensidad de radiación de una antena real y la máxima intensidad de radiación de una antena de referencia ideal, sin pérdidas, estando ambas alimentadas con la misma potencia de entrada. Esto es:

$$G_{\max} = \frac{U'_{\max}}{U_0}$$

La ganancia pone en evidencia las propiedades direccionales de una antena real, con un cierto rendimiento η . La intensidad máxima de radiación U'_{\max} para la antena real es $U'_{\max} = \eta U_{\max}$, por lo que la ganancia puede expresarse como:

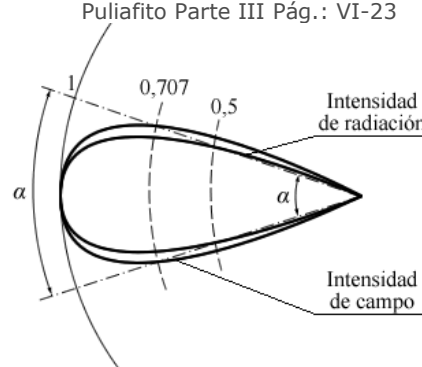
$$G_{\max} = \eta \cdot D_{\max}$$

La ganancia es siempre inferior a la directividad.

Puliafito Parte III Pág.: VI-23

Ancho de haz:

Otra propiedad direccional de importancia es conocer la dirección de máxima radiación de la antena y la concentración de la energía en esa dirección. Definimos entonces como ancho de haz al ángulo formado por las dos direcciones existentes a ambos lados de la dirección de máxima radiación, para las cuales el campo se ha reducido a un 70,7% de su valor máximo, o la intensidad de radiación se ha reducido al 50% de su máximo.



Puliafito Parte III Pág.: VI-30



Apertura eficaz:

Desde el punto de vista de una antena receptora, interesa caracterizarla por una cierta superficie plana, equivalente, enfrentada a una onda plana incidente, en forma normal a la dirección de propagación, cuya función sea la de extraer potencia electromagnética de dicha onda.

Vamos a definir como apertura de una antena (o apertura de captación) el área de la superficie equivalente que resulta de considerar el cociente entre la potencia y la densidad de potencia:

$$A = \frac{P}{\pi_{\text{med act}}} = A_e + A_p + A_{\text{rad}}$$

Donde vemos que ésta apertura es la suma de una **apertura eficaz** A_e , una apertura equivalente a las pérdidas A_p y la apertura de reirradiación A_{rad} .

Consideramos una apertura eficaz máxima como:

$$A_{e \text{ max}} = \frac{V_{ef}^2}{4 \cdot \pi_{\text{med act}} \cdot R_{\text{rad}}}$$

Pulíafito Parte III Pág.: VI-33