Ing. Antonio GARCIA ABAD

Esta experiencia tiende a introducir una nueva modalidad de enseñanza a fin de lograr que el alumnado pueda continuar su aprendizaje progresivo de los temas en forma independiente.

Requiere una gran responsabilidad por parte del alumno, debido a que tiene que planificar sus tiempos y actividades, para dedicarse al estudio de lo aquí presentado.

No intenta reemplazar los libros ni las clases presenciales, solo es un aporte a la mejor comprensión de la materia y facilitar el aprendizaje de los contenidos.

Unidad Temática 2

Ecuaciones de Maxwell

1.- ¿Que desarrollaremos?

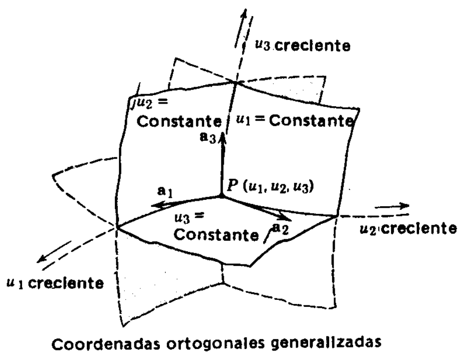
La unidad que nos permite familiarizarnos con las Ecuaciones de Maxwell. Para ello consideramos necesario repasar primero algunos conceptos de Sistemas de Coordenadas, Algebra Vectorial y Campos Eléctricos y Magnéticos Estáticos.

2.- ¿Que es lo importante?

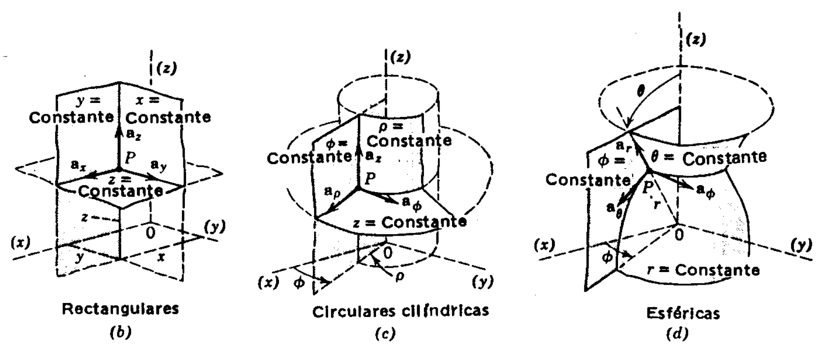
Acompañar esta clase virtual con el libro de “Campos Electromagnéticos y Medios de Enlace”, realizar los desarrollos de las ecuaciones y desarrollar los ejercicios solicitados como Práctico de la “Guía de Actividades”.

Cualquier sugerencia, consulta o aporte que pueda realizar, solicito hacerlo por grupo a la dirección de e-mail: **ondaem2004@yahoo.com.ar**

2.1 Sistemas de Coordenadas



Coordenadas ortogonales generalizadas
(a)



Rectangulares (b) — Circulares cilíndricas (c) — Esféricas (d)

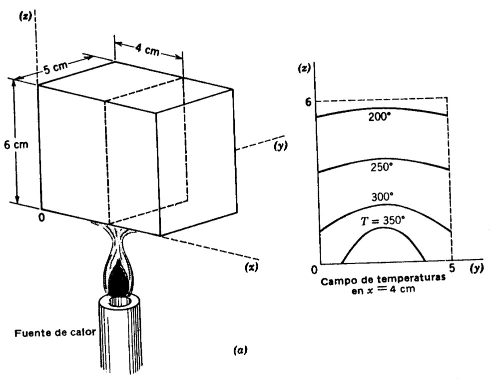
Ing. Antonio GARCIA ABAD

a) Coordenadas generalizadas: (u_1, u_2, u_3)
b) Coordenadas rectangulares: (x, y, z)
c) Coordenadas circulares cilíndricas: (ρ, ϕ, z)
d) Coordenadas esféricas: (r, θ, ϕ)

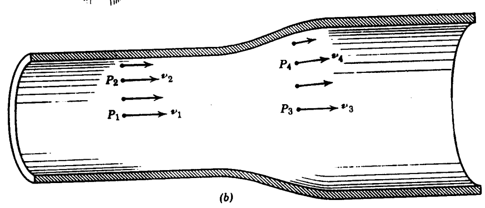
Tabla de Equivalencias (Solo para pasar de coordenadas generalizadas a los otros sistemas)

Coord. Gener. (u_1, u_2, u_2)	h_1	du_1	h_2	du_2	h_3	du_3
Coord. Rect . (x, y, z)	1	dx	1	dy	1	dz
Coord. Cilín. (ρ, ϕ, z)	1	$d\rho$	ρ	$d\phi$	1	dz
Coord. Esfer. (r, θ, ϕ)	1	dr	r	$d\theta$	r.sen θ	$d\phi$

2.2 Análisis Vectorial



Campo Escalar



Campo Vectorial

Operador Diferencial Nabla $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{a}_X + \frac{\partial}{\partial y}\hat{a}_Y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_Z$$

Producto escalar	$\cdot$
Producto Vectorial	x

Gradiente: **∇. Escalar** - Indica la dirección de máximo crecimiento de la función escalar.

Divergencia: **∇. Vector** - Indica la variación de flujo en el sentido de avance del vector.

Rotor: ∇ x **Vector** - Indica la variación de flujo en el sentido perpendicular al de avance del vector.

Laplaciano: $\nabla.\nabla = \nabla^2$ - No tiene significado físico – Se lo utiliza como operador matemático.

Teorema de Stokes: relaciona la integral de un vector en un camino cerrado con la integral del rotor del vector en la superficie comprendida en el camino cerrado.

Teorema de la Divergencia o de Green: relaciona la integral en una superficie cerrada de un vector con la integral de la divergencia del vector en el volumen comprendido dentro de la superficie cerrada.

2.3 / 2.4 Tabla de Ecuaciones Fundamentales de Electrostática y Campo Magnético Estacionario

Ley de Trabajo Eléctrico $\oint E.dl = 0$	Ley de Ampere $\oint H.dl = I$
Ley de Gauss p/Campo Eléctrico $\oint D.ds = Q$	Ley de Gauss p/Campo Magnético $\oint B.ds = 0$

Ecuación de Continuidad

$$\nabla x H = J$$

Ing. Antonio GARCIA ABAD

2.5 Sistema Internacional de Unidades

Magnitud	Unidad
Longitud	Metro (m)
Masa	Kilogramo (Kg)
Tiempo	Segundo (s)
Corriente	Amperio (A)
Temperatura	Grado Kelvin (ºK)
Intensidad Luminosa	Candela (cd)

2.6 Ecuaciones de Maxwell

Objetivo:

a) Comprender las modificaciones introducidas por Maxwell en las expresiones fundamentales de campos estáticos para hallar las ecuaciones de campos variables en el tiempo, reconociendo así la existencia de campos electromagnéticos.

Primero recordaremos las ecuaciones de campos estáticos expresadas en forma vectorial

1) $\nabla x E = 0$
2) $\nabla x H = J$
3) $\nabla . D = \rho$
4) $\nabla . B = 0$

Estas ecuaciones solo pueden ser usadas en medios continuos. Para usarlas en cualquier medio debemos expresarlas en forma integral:

1) $\oint_C E.dl = 0$

2) $\oint_C H.dl = I$

3) $\oint_S D.ds = Q$

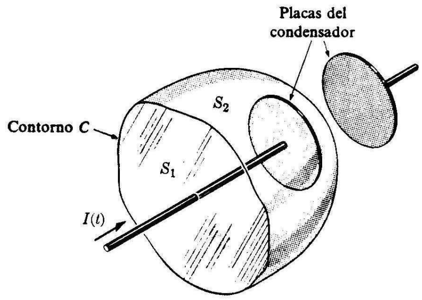
4) $\oint_S B.ds = 0$

Ing. Antonio GARCIA ABAD

2.6.1 Generalización de la ley de Ampere

Maxwell agrega un capacitor al circuito utilizado por Ampere.

Si se aplica la ley de Ampere (ecuación número 2 anterior) al contorno *C* y a la superficie S_1, vemos que:



$$\oint_C H.dl = \int_{S1} J.nds_1 = I \qquad (2-EM)$$

Si, por otra parte, se aplica la ley de Ampere al contorno *C* y a la superficie S_2, entonces *J* es cero en todos los puntos de S_2 debido a que la superficie S_2 no es atravesada por la corriente.

$$\oint_C H.dl = \int_{S2} J.nds_2 = 0 \qquad (3-EM)$$

y Las ecuaciones (2) y (3) se contradicen y, por lo tanto, ambas no pueden ser correctas, este desarrollo se conoce como **incompatibilidad de la Ley de Ampere**..

Maxwell introduce un término para levantar esta incompatibilidad.

$$\frac{\partial D}{\partial t} \qquad o \qquad \varepsilon.\frac{\partial E}{\partial t}$$

En forma integral la **Ley de Ampere generalizada** o **Primera ecuación de Maxwell** se expresa:

$$\oint H.dl = \int\left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right)ds = \int\left(\sigma.E + \varepsilon.\frac{\partial E}{\partial t}\right)ds \qquad (16-EM)$$

Ing. Antonio GARCIA ABAD

2.7 Inducción Electromagnética

A partir de sus experimentos iniciales en esta teoría, se han creado los generadores modernos, los transformadores, etc. Este capítulo trata primordialmente la formulación matemática de la ley de la inducción electromagnética, y su aprovechamiento en casos sencillos.

La ecuación que caracterizó a la electrostática fue la ley de trabajo eléctrico:

$$\nabla x E = 0 \qquad (17 - EM)$$

Por lo cual dijimos que el campo eléctrico estático es irrotacional.

Cuando hablamos de campos variables en el tiempo, los resultados de un gran número de experimentos realizados, pueden resumirse asociando una fuerza electromotriz (fem) con un cambio en el flujo magnético que pasa por un circuito. Se encuentra que este resultado, conocido como **ley de Faraday de la inducción electromagnética**, es independiente de la forma en que se cambia el flujo.

Por lo tanto podemos decir:

$$fem = \oint_C E.dl \qquad (19 - EM)$$

Y nos queda

$$\oint_C E.dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t}..ds$$

Expresada de otra forma, obtenemos la **Segunda Ecuación de Maxwell** en función de E y H:

$$\oint_C E.dl = -\mu.\int_S \frac{\partial H}{\partial t}..ds$$

Estas dos modificaciones son las que realiza Maxwell al enunciar sus ecuaciones, pues las ecuaciones 3 y 4 se cumplen tanto para campos estáticos como para campos variables en el tiempo.

Ing. Antonio GARCIA ABAD

Haciendo un tabla resumen de la forma integral y la forma vectorial diferencial obtenemos:

Primera Ecuación de Maxwell

$$\oint H.dl == \int \left(\sigma.E + \varepsilon.\frac{\partial E}{\partial t} \right) ds \qquad \nabla x H = \sigma.E + \varepsilon.\frac{\partial E}{\partial t}$$

Segunda Ecuación de Maxwell

$$\oint_C E.dl = -\mu.\int_S \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right).ds \qquad \nabla x E = -\mu.\frac{\partial H}{\partial t}$$

Tercera Ecuación de Maxwell

$$\oint_C D.ds = Q \qquad \nabla.D = \rho$$

Cuarta Ecuación de Maxwell

$$\oint_C B.ds = 0 \qquad \nabla.B = 0$$

“En la resolución de cualquier problema electromagnético, las relaciones fundamentales que deben cumplir son las cuatro ecuaciones de Maxwell”.

Las dos primeras ecuaciones las utilizaremos para encontrar la ecuación de Onda Electromagnética en el capítulo siguiente.

Se recomienda realizar como práctica la obtención de las condiciones de contorno.
