# UNIDAD 5

## ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

# ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

- La estadística inferencial es el proceso de uso de resultados derivados de las muestras para obtener conclusiones acerca de las características de una población.
- Un estimador $\hat{\theta}$ es un valor que puede calcularse a partir de datos muestrales y que proporciona información sobre el valor del parámetro $\theta$

# PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

- Insesgabilidad: se dice que un estimador es insesgado cuando la esperanza matemática de su distribución en el muestreo coincide con el valor del parámetro $E(\hat{\theta}) = \theta$
- Eficiencia: se dice que un estimador es eficiente u optimo cuando su varianza es mínima.
- Consistencia: el estimador se acerca al parámetro $\theta$ a medida que crece el tamaño de la muestra, si el tamaño muestral "n" tiende a infinito el estimador es insesgado y de varianza 0

# PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

- Suficiencia: un estimador es suficiente cuando incluye toda la información relevante de la muestra, de forma que ningún otro estimador puede considerar información adicional
- Invariabilidad: un estimador es invariable cuando si transformamos el parámetro a estimar mediante una función f($\theta$), dicha función puede ser estimada por la función del estimador f($\hat{\theta}$)
- Robustez: Un estimador es robusto si se vulnera alguno de los supuestos en los que se basa el proceso de estimación, la estimación no cambia significativamente y sigue ofreciendo resultados fiables

# ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

- Estimación puntual: Consiste en la estimación del valor del parámetro mediante un solo valor, obtenido de una forma determinada

| | |
|---|---|
| $\bar{X}$ -- $\mu$ | $s^2$-- $\sigma^2$ |
| $\tilde{X}$ -- $Me$ | $s$ -- $\sigma$ |
| $\hat{X}$ -- $Mo$ | $p$ -- $P$ |

- Estimación por intervalos

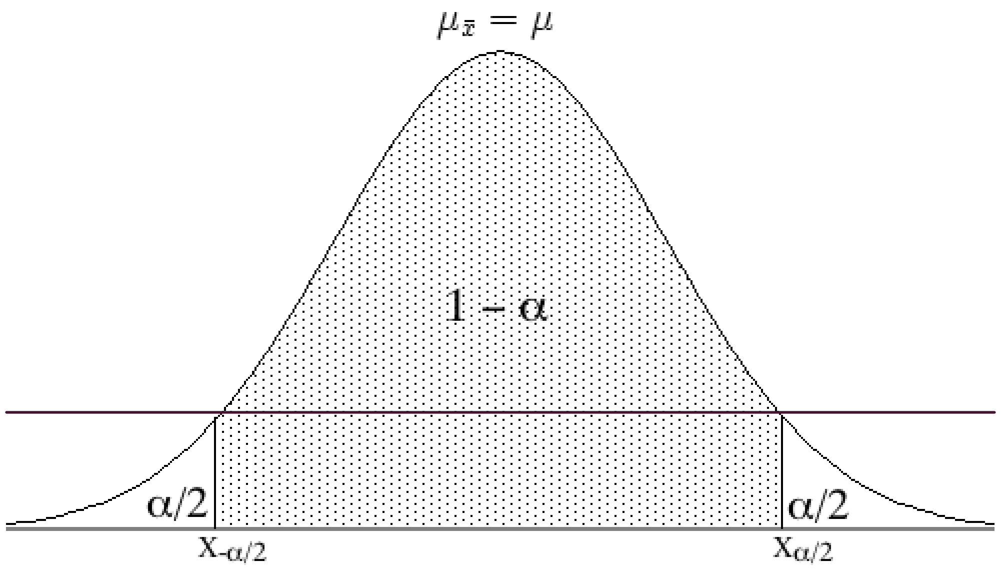
# ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

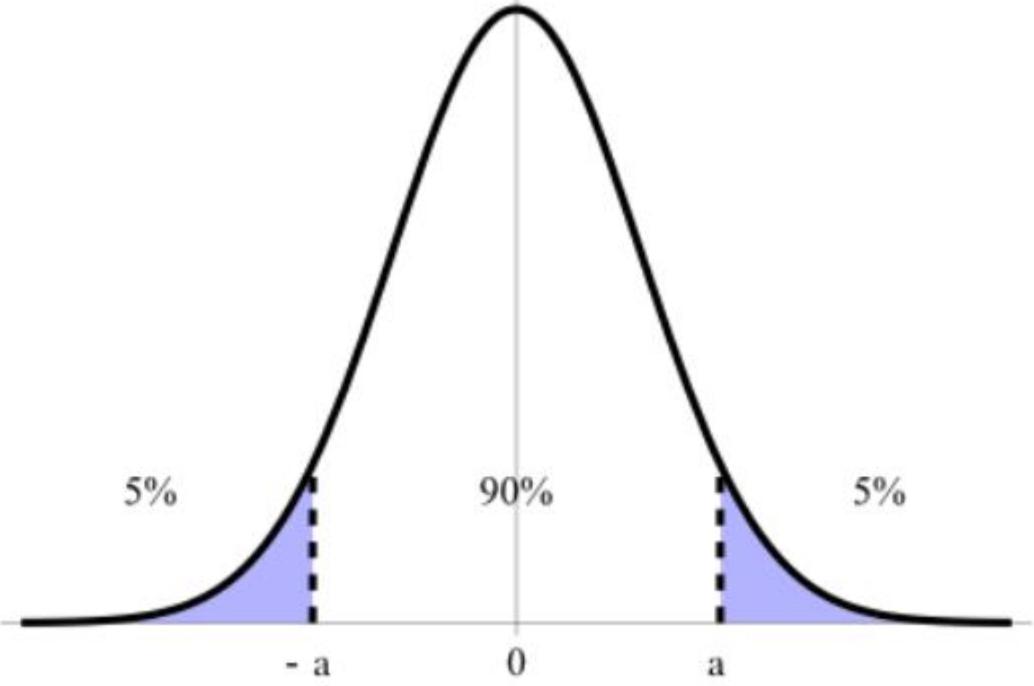
- Una estimación del intervalo de confianza es un rango de números, llamado intervalo, construido alrededor de la estimación puntual.
- La estimación por intervalos consiste en establecer el intervalo de valores donde es más probable se encuentra el parámetro

# ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

- El intervalo de confianza se construye de manera que la probabilidad del parámetro de la población se localiza en algún lugar dentro del intervalo conocido

$confianza = 1 - \alpha$



# ESTIMACIÓN DE LA MEDIA POBLACIONAL

- $\sigma$ Conocida — Caso 1
- $\sigma$ Desconocida
  - Muestra Grande ($\geq$30) — Caso 2
  - Muestra Pequeña ($\leq$30) — Caso 3

# ESTIMACIÓN DE LA MEDIA POBLACIONAL

- Caso 1: Estimación de la media poblacional (varianza conocida)

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \rightarrow \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

## Ejemplo:

$$\sigma = 2$$

$$n = 36$$

$$\bar{X} = 10$$

$$\alpha = 0,05$$

$$1 - \alpha = 0,95$$

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

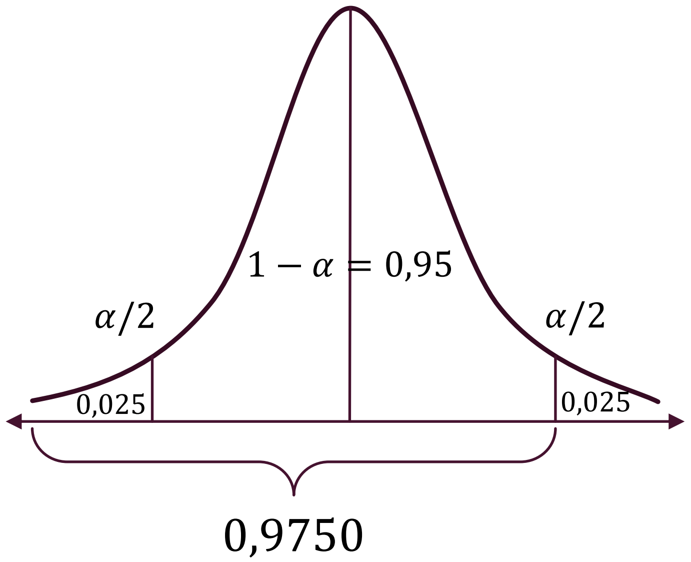
$$\mu \to \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$10 - 1,96\frac{2}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 10 + 1,96\frac{2}{\sqrt{36}}$$

$$\mu \to 10 \pm 1,96\frac{2}{\sqrt{36}}$$

$$9,346667 \leq \mu \leq 10,6533$$

$$\mu \to 10 \pm 0,6533$$




| | 0.05 | 0.06 |
|---|---|---|
| 1.7 | 0.9599 | 0.9608 |
| 1.8 | 0.9678 | 0.9686 |
| 1.9 | 0.9744 | 0.9750 |

# ESTIMACIÓN DE LA MEDIA POBLACIONAL

- Caso 1: Estimación de la media poblacional (varianza conocida)

$$\mu \to \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$$

e= error de estimación

$$n = Z_{\alpha/2}^{2}\frac{\sigma^{2}}{e^{2}}$$

# ESTIMACIÓN DE LA MEDIA POBLACIONAL

- Casi 2: Varianza desconocida, muestra grande (≥30)

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \to \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$n = Z_{\alpha/2}^{2}\frac{s^{2}}{e^{2}}$$

- Ejemplo:

$s = 3$

$n = 36$

$\bar{X} = 10$

$\alpha = 0{,}05$

$1 - \alpha = 0{,}95$

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$10 - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 10 + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$9{,}02 \leq \mu \leq 10{,}98$$

$$\mu \to \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \to 10 \pm 1{,}96\frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$\mu \to 10 \pm 0{,}98$$

$e \leq 0{,}6$

$$n = Z_{\alpha/2}^2\frac{s^2}{e^2}$$

$$n = 1{,}96^2\frac{3^2}{0{,}6^2}$$

$$n = 96{,}04$$

# ESTIMACIÓN DE LA MEDIA POBLACIONAL

- Casi 3: Varianza desconocida, muestra pequeña (≤30)

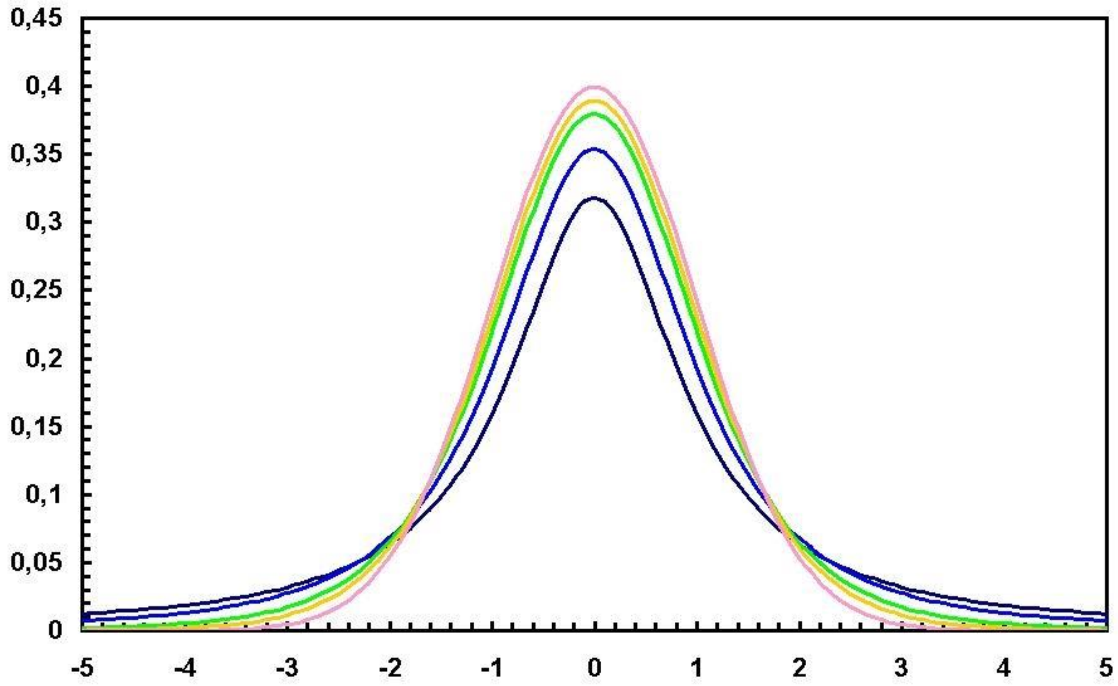
$$\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \rightarrow \bar{X} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$n = t_{\alpha/2}^{2}\frac{s^2}{e^2}$$

# DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT

Es una distribución de probabilidad que surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeño




- Continua
- Simétrica
- Cambia para cada grado de libertad
- A medida que aumentan los grados de libertad tiende a Z

# GRADOS DE LIBERTAD

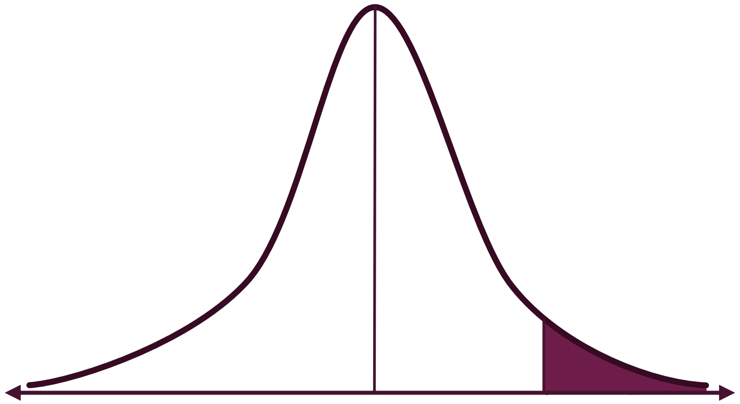
Los grados de libertad están dados por el número de valores que pueden ser asignados de forma arbitraria, antes de que el resto de las variables tomen un valor forzado para lograr un resultado estipulado previamente

$$\_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_ = a$$

$$5 + (-3) + 1 + 4 + \_\_\_ = 10$$

# TABLA DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT

- Acumula desde $+\infty$ hasta t



| Grados de libertad | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.656 |
| 2 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |

- Ejemplo:

$s = 3$

$n = 16$

$\bar{X} = 10$

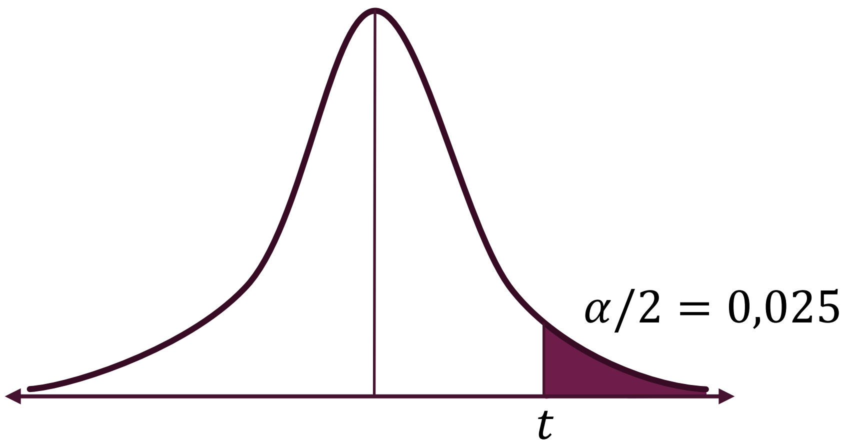
$\alpha = 0{,}05$

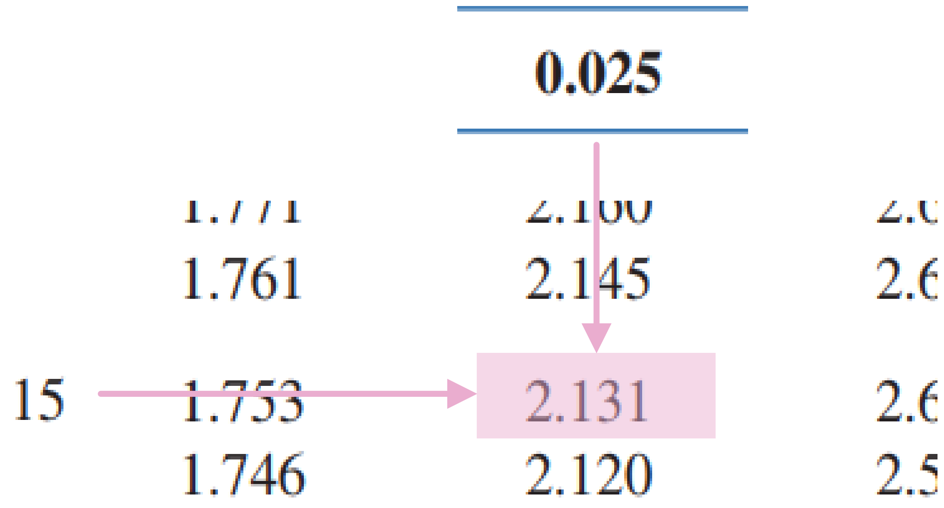
$1 - \alpha = 0{,}95$

$$\mu \rightarrow \bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \rightarrow 10 \pm 2{,}131 \frac{3}{\sqrt{16}}$$

$$\mu \rightarrow 10 \pm 1{,}5983$$



| | | 0.025 | |
|---|---|---|---|
| | 1.761 | 2.145 | 2.6 |
| 15 | 1.753 | 2.131 | 2.6 |
| | 1.746 | 2.120 | 2.5 |

| Grados de libertad | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.656 |
| 2 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 95 | 0.845 | 1.291 | 1.661 | 1.985 | 2.366 | 2.629 |
| 96 | 0.845 | 1.290 | 1.661 | 1.985 | 2.366 | 2.628 |
| 97 | 0.845 | 1.290 | 1.661 | 1.985 | 2.365 | 2.627 |
| 98 | 0.845 | 1.290 | 1.661 | 1.984 | 2.365 | 2.627 |
| 99 | 0.845 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 |
| 100 | 0.845 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 |
| $\infty$ | 0.842 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

# ESTIMACIÓN DE LA PROPORCIÓN POBLACIONAL

$$p - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p.q}{n}} \leq P \leq p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p.q}{n}}$$

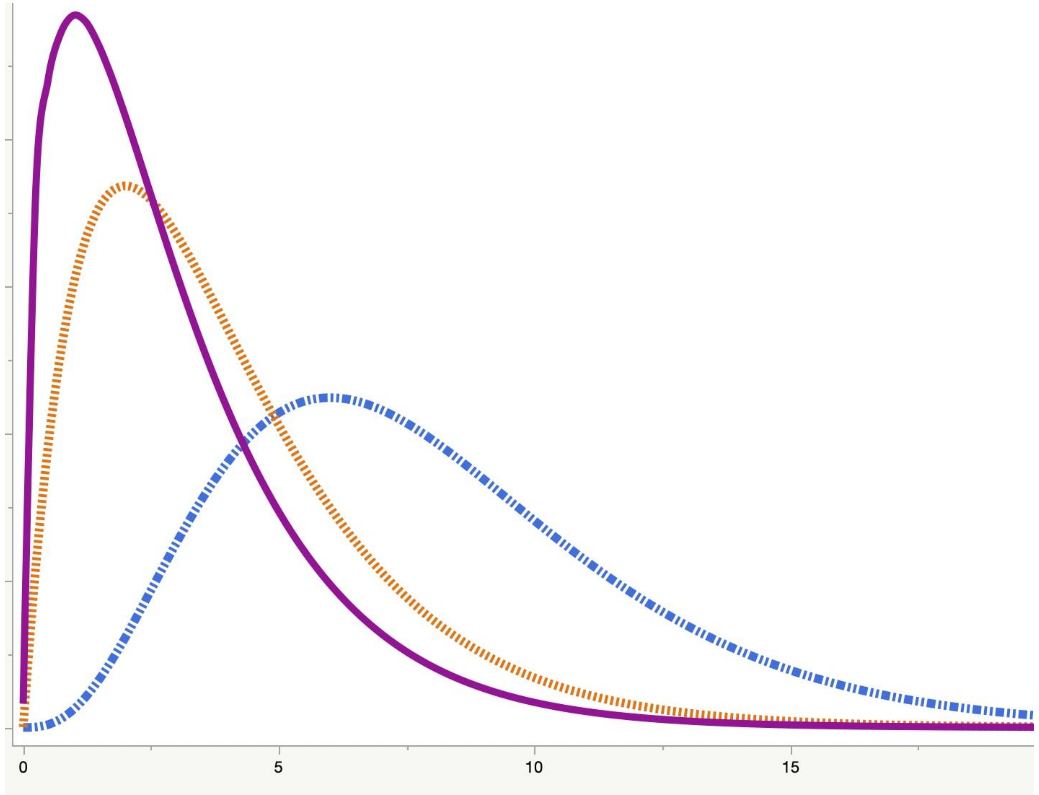
$$P \rightarrow p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p.q}{n}}$$

$$n = Z_{\alpha/2}^{2}\frac{p.q}{e^{2}}$$

# ESTIMACIÓN DE LA VARIANZA POBLACIONAL

$$\frac{(n-1).s^2}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < \sigma^2 < \frac{(n-1).s^2}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

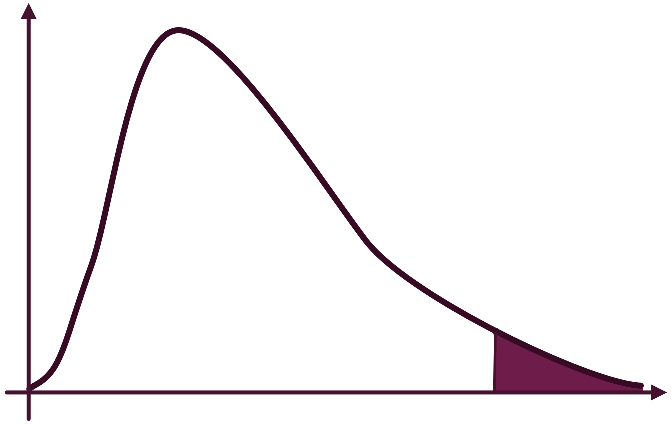
# DISTRIBUCIÓN $\chi^2$ (CHI CUADRADO)




- Continua
- Asimétrica
- Cambia para cada grado de libertad

# TABLA DISTRIBUCIÓN $\chi^2$

- Acumula desde $+\infty$ hasta $\chi^2$



| Grados de libertad | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.90 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.016 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | 0.010 | 0.020 | 0.051 | 0.103 | 0.211 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 |
| 3 | 0.072 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.064 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 1.610 | 9.236 | 11.070 | 12.832 | 15.086 | 16.750 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 2.204 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 |
| 7 | 0.989 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 |
| 8 | 1.344 | 1.647 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 |

## Ejemplo:

$s = 3$

$n = 10$

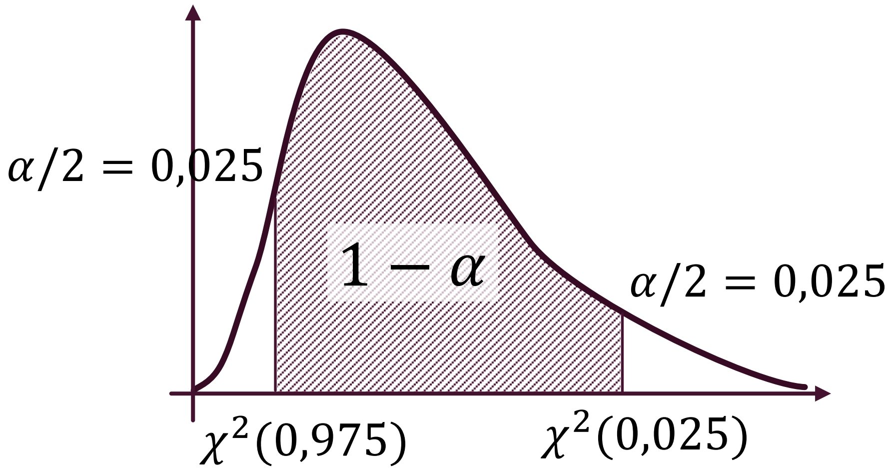
$\alpha = 0{,}05$

$\alpha/2 = 0{,}025$

$$\frac{(n-1).s^2}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < \sigma^2 < \frac{(n-1).s^2}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{(10-1).3^2}{19{,}023} < \sigma^2 < \frac{(10-1).3^2}{2{,}7}$$

$$4{,}258 < \sigma^2 < 30$$




| | 0.975 | 0.025 |
|---|---|---|
| | 2.180 | 17.535 |
| 9 | 2.700 | 19.023 |
| | 3.247 | 20.483 |

# ESTIMACIÓN DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR POBLACIONAL

$$\sqrt{\frac{(n-1).s^2}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1).s^2}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

## ESTIMACIÓN DE LA MEDIA POBLACIONAL

Caso 1

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \to \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad n = Z_{\alpha/2}^2\frac{\sigma^2}{e^2}$$

Caso 2

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \to \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad n = Z_{\alpha/2}^2\frac{s^2}{e^2}$$

Caso 3

$$\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \to \bar{X} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad n = t_{\alpha/2}^2\frac{s^2}{e^2}$$

## ESTIMACIÓN DE LA VARIANZA POBLACIONAL

$$\frac{(n-1).s^2}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < \sigma^2 < \frac{(n-1).s^2}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$