24-11-15. Soluciones 2do recuperatorio 5R1/5R2. (1)

(1) Determinar estabilidad por Nyquist: $G(s)H(s) = 0{,}2\,\dfrac{s+2}{s^2-1}$.

Análisis de BF: $\lim\limits_{s\to 0} 0{,}2\,\dfrac{s+2}{s^2-1} = 0{,}2\,\dfrac{2}{(-1)} = -0{,}4 + j0.$

Análisis de AF: $\lim\limits_{s\to\infty} 0{,}2\,\dfrac{s+2}{s^2-1} = \lim\limits_{s\to\infty} 0{,}2\,\dfrac{\cancel{s}^{\,1}}{s^{\cancel{2}\,1}} = \lim\limits_{s\to\infty} 0{,}2\,\dfrac{1}{s}$

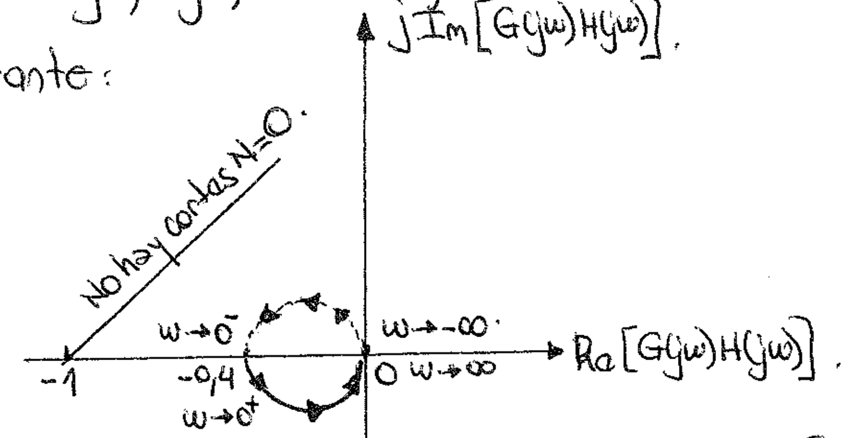
con $s = j\omega$ $\quad \lim\limits_{\omega\to\infty} 0{,}2\,\dfrac{1}{j\omega} \longrightarrow -j0.$

Cruce de ejes: $G(j\omega)H(j\omega) = 0{,}2\,\dfrac{2+j\omega}{-\omega^2-1}$ no es necesario racionalizar.

Parte real $\mathrm{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0{,}2\,\dfrac{2}{-\omega^2-1}$. No hay valor finito de ω que anule la parte Re.

Parte imaginaria $j\,\mathrm{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0{,}2\; j\,\dfrac{\omega}{\omega^2-1}$ No hay valor finito de ω que anule la parte $j\mathrm{Im}$.

Para valores positivos de ω tanto la parte real como la imaginaria de $G(j\omega)H(j\omega)$ son negativa, es decir existe en el tercer cuadrante:



$N = Z - P = 0.$

$Z = N + P = 0 + 1 = 1.$

INESTABLE.

$G(s)H(s) = 0{,}2\,\dfrac{s+2}{(s-1)(s+1)}$

$P = 1$

polo LA parte Re [+].

(2) . Compensar por avance de fase para $K_p = -2$ y $M\phi = 50^\circ$. Se propone como compensador en adelanto:

$$G_c(s) = K_p \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad \text{con } \alpha < 1.$$

en formato Bodo: $G_c(s) = K_p \frac{1}{\cancel{T}_1} \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \alpha \cancel{T}^{1}$

$$G_c(s) = \alpha K_p \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \quad \text{con } K = \alpha K_p.$$

Veamos la condición de régimen:

$$K_p = \lim_{s \to 0} 0{,}2 \frac{s+2}{s^2-1} K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = 0{,}2 \frac{2}{(-1)} K = -2.$$

$$K = \frac{(-\cancel{2}^{1})(-1)}{0{,}2 \cdot \cancel{2}_1} = \boxed{5 = K}$$

$$G_1(s) = K \cdot 0{,}2 \frac{s+2}{s^2-1} = 5 \cdot 0{,}2 \frac{s+2}{s^2-1} = \boxed{\frac{s+2}{s^2-1} = G_1(s)}$$

$$G_1(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)} = \frac{2\,(0{,}5s+1)}{(-1)\,(-s+1)(s+1)} \quad \text{(formato Bode).}$$

$$G_1(j\omega) = \frac{2}{(-1)} \frac{(1+j0{,}5\omega)}{(1-j\omega)(1+j\omega)}$$

$$|G_1(j\omega)| = \frac{2\sqrt{1+0{,}25\omega^2}}{1 \sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{2}{1} \frac{\sqrt{1+0{,}25\omega^2}}{(1+\omega^2)}.$$

$$|G_1(j\omega)|_{dB} = 6{,}02 + 10 \log(1+0{,}25\omega^2) - 20 \log(1+\omega^2).$$

$$\underline{|G_1(j\omega)} = \underline{|2} + \underline{|1+j0{,}5\omega} - \underline{|-1} - \underline{|1-j\omega} - \underline{|1+j\omega}$$

$$\underline{|G_1(j\omega)} = 0° + tg^{-1}0{,}5\omega - 180° - tg^{-1}(-\omega) - tg^{-1}\omega$$

$$\underline{|G_1(j\omega)} = tg^{-1}0{,}5\omega - 180° \cancel{+ tg^{-1}\omega - tg^{-1}\omega}$$

Rango de fcia: 0,1 ; 1 ; 10 ; 100

Del gráfico de $G_1(j\omega)$ tenemos un $M\phi = 36°$. para llegar a 50° necesitamos 14°; agregamos 6° más con lo cual $\boxed{\phi_{máx} = 20°}$

$$\operatorname{sen}\phi_{máx} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \operatorname{sen} 20° = 0{,}34.$$

$$1-\alpha = 0{,}34 + 0{,}34\alpha \quad ; \quad 0{,}66 = 1{,}34\alpha \quad ; \quad \boxed{\alpha = 0{,}49}$$

La ganancia del polo y cero del compensador es:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 3{,}1\ dB.$$

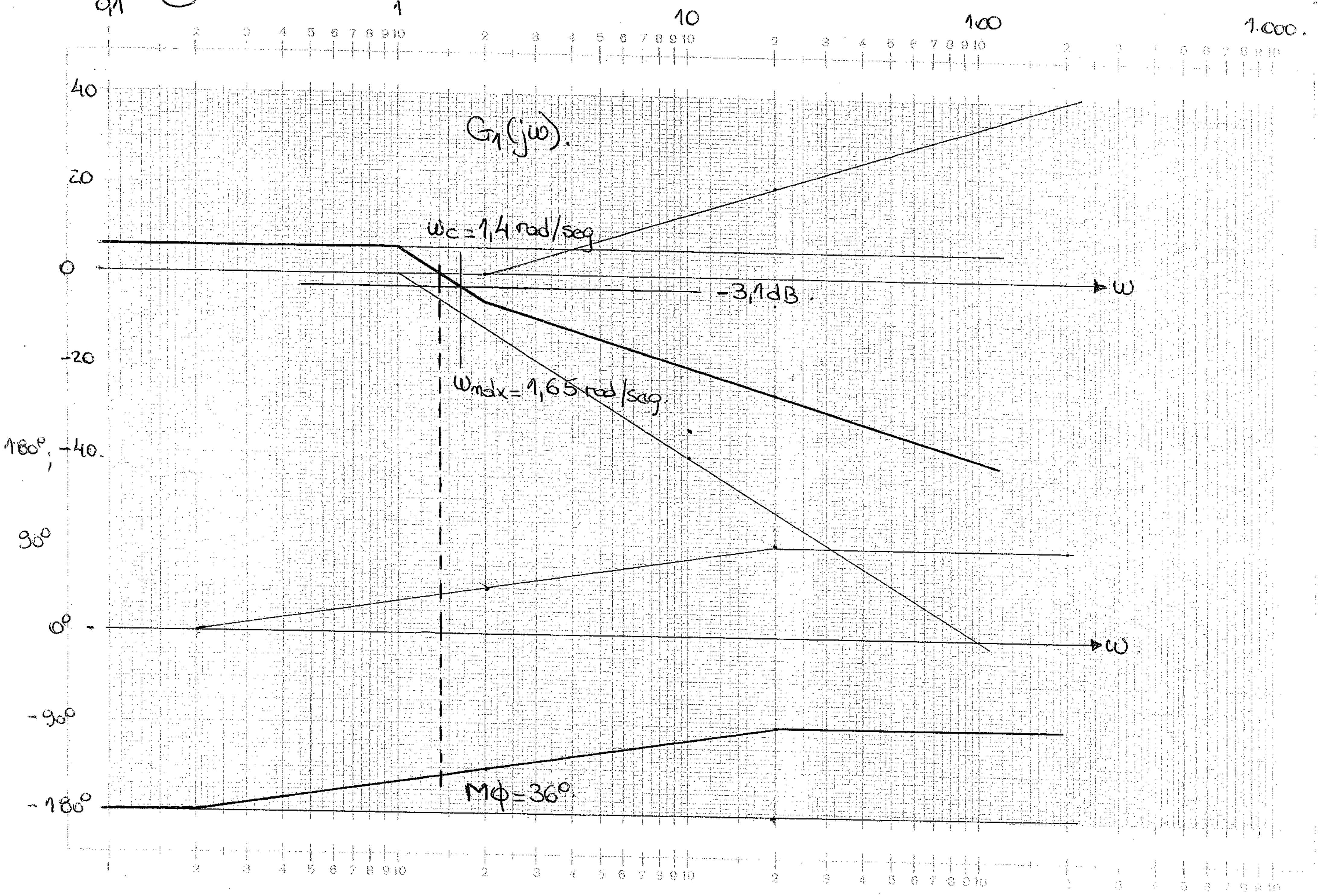
Veamos en el gráfico de $G_1(s)$ la fcia. a la cual la atenuación es $-3{,}1dB$. Esta fcia. según gráfico es $\omega_{máx} = 1{,}65$

$$\omega_{máx} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot T} = 1{,}65 \frac{rad}{seg} \quad ; \quad \frac{1}{T} = 1{,}65 \cdot \sqrt{0{,}49} = 1{,}16.$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{1{,}16}{0{,}49} = 2{,}37 \quad ; \quad K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{5}{0{,}49} = 10{,}2.$$

$$\boxed{G_c(s) = 10{,}2\ \frac{s+1{,}16}{s+2{,}37}}$$

(4)


0,1
1
10
100
1.000.
40
20
0
-20
180°, -40.
90°
0°
-90°
-180°
$G_1(j\omega)$.
$\omega_c = 1,4$ rad/seg
-3,1dB.
$\omega_{max} = 1,65$ rad/seg.
$M\phi = 36°$.
ω
ω

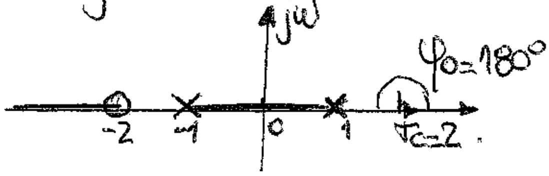
3 Compensar para $K_p = -20$ y $\sigma = 2{,}5\ seg^{-1}$.

Veemos el LR del sistema: $G(s)H(s) = 0{,}2K \dfrac{s+2}{s^2-1}$.

El sistema es factoreado:

$$G(s)H(s) = 0{,}2K \frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$$

El L.R. sobre el eje real:



Las asíntotas son:

$$p - z = 2 - 1 = 1. \qquad K = 0.$$

$$\varphi_0 = \frac{180°}{p-z}(2K+1) = \frac{180°}{2-1}(2.0+1) = \boxed{180° = \varphi_0}$$

$$\sigma_c = \frac{\sum Re[p] - \sum Re[z]}{p-z} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-(-2)}{2-1} = \boxed{2 = \sigma_c}$$

Punto de bifurcación:

$$0{,}2K \frac{s+2}{s^2-1} + 1 = 0.$$

$$0{,}2K \frac{s+2}{s^2-1} = -1.$$

$$K = -5 \frac{s^2-1}{s+2} \; ; \; \frac{\partial K}{\partial s} = -5 \frac{2s(s+2) - (s^2-1)}{(s+2)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = -5 \frac{2s^2+4s-s^2+1}{(s+2)^2} = -5 \frac{s^2+4s+1}{(s+2)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 5 \frac{s^2+4s+1}{(s+2)^2} = 0 \; ; \; s^2+4s+1 = 0.$$

$s_1 = -0{,}27 = pb_1$

$s_2 = -3{,}73 = pb_2$.

Criterio de Routh: $0{,}2\,K\,\dfrac{s+2}{s^2-1}+1=0.$

$$0{,}2\,K(s+2)+s^2-1=0\,;\quad 0{,}2Ks+0{,}4K+s^2-1=0.$$

$$s^2+0{,}2Ks+(0{,}4K-1)=0.$$

s^2	1	$0{,}4K-1$
s	$0{,}2K$	
s^0	$0{,}4K-1$	

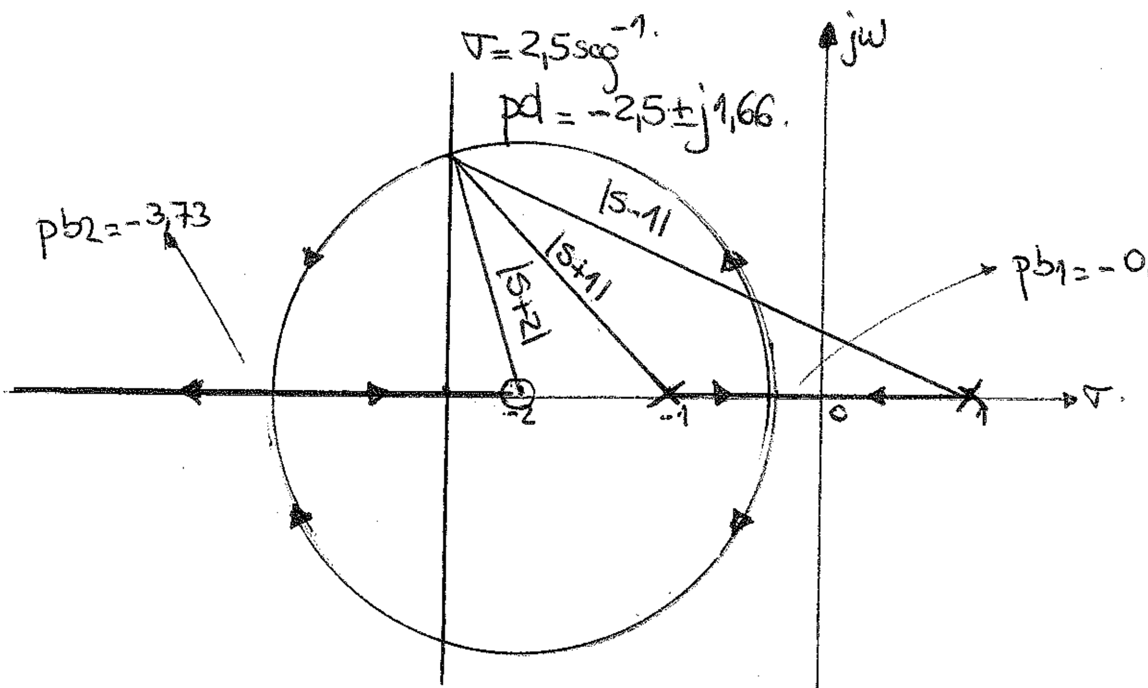
$0{,}4K_c-1=0.$

$0{,}4K_c=1.$

$\boxed{K_c=2{,}5}$

$K>K_c$ estable.

$K<K_c$ inestable.



Condición de diseño $\sigma=2{,}5\,seg^{-1}$.

$$K=5\,\frac{|s+1||s-1|}{|s+2|}=5\cdot\frac{2{,}24\cdot 3{,}87}{1{,}73}=\boxed{25=K}$$

$$G(s)H(s)=0{,}2\,K\,\frac{s+2}{(s-1)(s+1)}=5\,\frac{s+2}{s^2-1}.$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}5\,\frac{s+2}{s^2-1}=5\cdot\frac{2}{(-1)}=-10.$$

Se pide $K_p = -20$ por lo tanto hay que compensar en atraso: $K_p = -10 \frac{z_c}{p_c} = -20 \therefore \boxed{\frac{z_c}{p_c} = 2}$

$0{,}25 < z_c < 1{,}25$. elegimos $\boxed{z_c = 0{,}4}$

$$p_c = \frac{0{,}4}{2} = \boxed{0{,}2 = p_c}$$

$$\boxed{G_c(s) = 25 \frac{s+0{,}4}{s+0{,}2}}$$