

Índice general

1. Introducción a los sistemas de control.	4
1.1. Conceptos generales.	4
1.1.1. Sistema.	4
1.1.2. Control.	4
1.2. Transformada de Laplace. Convolución. Función de transferencia.	5
1.2.1. Transformada de Laplace.	5
1.2.2. Función de transferencia.	5
1.2.3. Convolución.	5
1.3. Diagramas en bloque.	5
1.4. Linealización de sistemas no lineales.	5
1.4.1. Sistemas de una variable	5
1.4.2. Ampliación a sistemas de dos variables.	6
2. Modelos matemáticos de sistemas.	7
2.1. Introducción.	7
2.1.1. Sistema serie.	7
2.1.2. Sistema paralelo.	7
2.1.3. Sistema a lazo abierto.	8
2.1.3.1. Análisis por perturbaciones (ruido+interferencia)	8
2.1.3.2. Análisis por cambios en los valores del sistema	8
2.1.4. Sistema a lazo cerrado.	8
2.1.4.1. Análisis por perturbaciones (ruido+interferencia)	8
2.1.4.2. Análisis por cambios en los valores del sistema	9
2.2. Álgebra de bloques y diagramas de flujo de señales.	9
2.3. Casos prácticos.	10
3. Análisis temporal.	11
3.1. Sistemas de primer orden	11
3.1.1. Respuesta a un impulso $V_i(s) = 1$	11
3.1.2. Respuesta a un escalón $V_i(s) = \frac{1}{s}$	12
3.1.3. Respuesta a una rampa $V_i(s) = \frac{1}{s^2}$	13
3.2. Sistemas de segundo orden.	13
3.2.1. Raíces reales y distintas: Respuesta sobreamortiguada.	14
3.2.2. Raíces reales e iguales: Respuesta críticamente amortiguada.	14
3.2.3. Raíces complejas conjugadas: Respuesta subamortiguada.	15
3.2.4. Pulsación natural.	15
3.2.5. Relación de amortiguamiento.	16
4. Simulación de sistemas dinámicos	17
5. Análisis en estado permanente.	18
5.1. Error de estado estacionario	18
5.1.1. Tipo 0.	19
5.1.2. Tipo 1.	19
5.1.3. Tipo 2.	20
5.1.4. Cuadro resumen del error de estado estacionario.	21

5.2.	Estabilidad.	21
5.2.1.	Estabilidad absoluta y relativa.	21
5.2.2.	Routh-Hourwithz.	21
5.2.2.1.	Descripción del método.	21
5.2.2.2.	Casos particulares.	22
6.	Lugar de raíces (Evans).	24
6.1.	Procedimiento para la obtención del lugar de raíces.	24
6.2.	Caso particular: Realimentación negativa.	26
6.3.	Análisis de sistemas de control mediante método de lugar de raíces.	26
6.3.1.	Efectos de añadir polos y ceros.	26
7.	Análisis de respuesta en frecuencia.	27
7.1.	Construcción de diagramas de Bode.	27
7.1.1.	Análisis de la respuesta de una ganancia K	27
7.1.2.	Análisis de la respuesta de un derivador o integrador.	27
7.1.3.	Análisis de la respuesta de sistemas de primer orden (polo/cero).	27
7.1.4.	Análisis de la respuesta de sistemas de segundo orden.	27
7.2.	Diagramas Polar.	28
7.3.	Sistemas de fase mínima y no mínima.	28
7.4.	Sistemas de primer y segundo orden.	28
7.4.1.	Primer orden.	28
7.4.2.	Segundo Orden.	28
7.5.	Respuesta a un corrimiento.	28
7.6.	Determinación de los coeficientes de error.	28
7.6.1.	Coefficiente de error de posición.	28
7.6.2.	Coefficiente de error de velocidad.	28
7.6.3.	Coefficiente de error de aceleración.	28
7.7.	Estabilidad en el dominio de la frecuencia.	28
7.7.1.	Criterio de estabilidad de Nyquist.	28
7.7.2.	Estabilidad relativa en diagramas de Bode y Polar.	28
7.7.2.1.	Margen de ganancia	28
7.7.2.2.	Margen de fase	28
8.	Diseño de sistemas de control.	29
8.1.	Especificaciones de diseño.	29
8.2.	Controladores.	29
8.2.1.	Controlador proporcional.	29
8.2.2.	Controlador proporcional-derivativo.	29
8.2.3.	Controlador proporcional-integral.	29
8.2.4.	Controlador proporcional-integral-derivativo.	30
8.3.	Compensadores.	30
8.3.1.	Compensador de adelanto.	30
8.3.2.	Compensador de atraso.	30
8.3.3.	Compensador de adelanto-atraso.	30
8.4.	Relaciones útiles para la compensación.	30
8.5.	Diseño de compensadores utilizando lugar de raíces.	31
8.5.1.	Compensador de adelanto.	31
8.5.2.	Compensador de atraso.	31
8.5.3.	Compensador de adelanto-atraso.	32
8.5.4.	Compensador paralela.	32
8.6.	Diseño de compensadores utilizando respuesta en frecuencia.	32
8.6.1.	Compensador de adelanto.	32
8.6.2.	Compensador de atraso.	33
8.6.3.	Compensador de adelanto-atraso.	34
8.7.	Construcción física de un compensador.	34

9. Técnicas de variables de estado.	35
9.1. Introducción	35
9.1.1. Teoría de control moderna frente a teoría de control convencional.	35
9.2. Conceptos	35
9.3. Representación de sistemas en el espacio de estado.	35
9.4. Obtención de función de transferencia.	35
10.Finales	36
10.1. Final 17/02/14	36
10.2. Final 07/04/14	36
10.3. Final 30/06/2014	38
10.4. Final 25/08/14 (Puede estar mal copiado)	38
10.5. Final 15/12/14	40
10.6. Final 02/02/2015 (Puede estar mal copiado)	41
10.7. Final 02/03/2015	43
10.8. Final 23/02/15	44

Capítulo 1

Introducción a los sistemas de control.

1.1. Conceptos generales.

1.1.1. Sistema.

- Definición: Un sistema es un conjunto de partes que trabajan en conjunto para lograr un objetivo.
- Planta: Es el caso de un sistema que esta compuesto por un conjunto de componentes físicos.
- Proceso: Es el caso de un sistema que esta compuesto por un conjunto de operaciones.
- Sistema a lazo abierto: En la entrada del sistema no hay información de lo que ocurre a la salida.
- Sistema a lazo cerrado: En la entrada del sistema hay información de lo que ocurre a la salida por medio de una realimentación.
- Sistemas de control en lazo cerrado en comparación con sistemas en lazo abierto.
- ...
- Sistema lineal e invariante en el tiempo. SLIT:

Un sistema es lineal cuando cumple con las propiedades de superposición, aditividad y homogeneidad, en un sistemas lineales la sumas de dos o mas respuestas es igual a la respuesta de la suma de las excitaciones.

$$X_1 \rightarrow Y_1$$

$$X_2 \rightarrow Y_2$$

$$X_1 + X_2 \rightarrow Y_1 + Y_2$$

Un sistema es invariante en el tiempo cuando los coeficientes de la ecuación que lo define son constantes para cualquier instante de tiempo.

1.1.2. Control.

- Definición: La teoría de control permite la manipulación de la salida de un sistema mediante el control o manejo de una variable de mismo.
- Variable controlada y señal de control: La *variable controlada* es aquella señal sobre la que se quiere actuar, para ello se mide (controla) la misma y se aplica algún cambio en la *señal de control*. Que es la variable que al aplicarle un cambio modifica la salida del sistema.
- Perturbaciones: Una perturbación es una señal que tiende a afectar el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema y es una entrada.

1.2. Transformada de Laplace. Convolución. Función de transferencia.

1.2.1. Transformada de Laplace.

...

1.2.2. Función de transferencia.

Es la relación entre la transformada de Laplace de la respuesta de un sistema y la transformada de la entrada considerando las condiciones iniciales igual a cero.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

1.2.3. Convolución.

La convolución en el dominio del tiempo se encuentra definida por:

$$y(t) = h(t) \star x(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1.1)$$

Por propiedad de la transformada de Laplace la Ec. 1.1 en el dominio s es:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

1.3. Diagramas en bloque.

...

1.4. Linealización de sistemas no lineales.

1.4.1. Sistemas de una variable

Para linealizar un sistema desarrollaremos según series de Taylor la respuesta de ese sistema y solo consideraremos el término de primer orden. Esto es válido solo cuando la operación normal del sistema es en un área que se puede considerar lineal.

Sea una función:

$$y = f(x)$$

y su desarrollo en serie de Taylor:

$$y = f(x_0) + \left[\frac{df}{dx} \right]_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2f}{dx^2} \right]_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

En el caso de pertenecer x_0 a un punto donde la operación se puede considerar lineal, los términos de derivada segunda en adelante serán pequeños y se los podrá despreciar. De esta manera la función y normalizada resulta

$$y = f(x_0) + \left[\frac{df}{dx} \right]_{x_0} (x - x_0)$$

$$y - y_0 = K(x - x_0)$$

1.4.2. Ampliación a sistemas de dos variables.

Sea una función:

$$y = f(x_1, x_2)$$

su desarrollo en serie de Taylor sera:

$$y = f(x_{1_0}, x_{2_0}) + \left[\frac{df}{dx_1} \right]_{x_{1-2_0}} (x_1 - x_{1_0}) + \left[\frac{df}{dx_2} \right]_{x_{1-2_0}} (x_2 - x_{2_0}) +$$

$$\frac{1}{2!} \left\{ \left[\frac{d^2 f}{dx_1^2} \right]_{x_{1-2_0}} (x_1 - x_{1_0})^2 + 2 * \left[\frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} \right]_{x_{1-2_0}} (x_1 - x_{1_0})(x_2 - x_{2_0}) + \left[\frac{d^2 f}{dx_2^2} \right]_{x_{1-2_0}} (x_2 - x_{2_0})^2 \right\} + \dots$$

Por analogía con el caso anterior, para la linealización de la función solo consideraremos la serie hasta el termino de derivada de primer orden.

$$y = f(x_{1_0}, x_{2_0}) + \left[\frac{df}{dx_1} \right]_{x_{1-2_0}} (x_1 - x_{1_0}) + \left[\frac{df}{dx_2} \right]_{x_{1-2_0}} (x_2 - x_{2_0})$$

$$y - y_{1-2_0} = K_1(x_1 - x_{1_0}) + K_2(x_2 - x_{2_0})$$

Capítulo 2

Modelos matemáticos de sistemas.

2.1. Introducción.

2.1.1. Sistema serie.

Se dice que un sistema tiene una configuración serie cuando se puede dividir el mismo en subsistemas que interactúan en serie entre ellos.



Figura 2.1: Sistema Serie.

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t) \star g_1(t) \\ y_2(t) = y_1(t) \star g_2(t) \end{cases}$$

$$y_2(t) = x(t) \star g_1(t) \star g_2(t)$$

$$Y_2(s) = X(s)G_1(s)G_2(s)$$

2.1.2. Sistema paralelo.

Se dice que un sistema tiene una configuración paralelo cuando se puede dividir el mismo en subsistemas que interactúan en paralelo entre ellos.

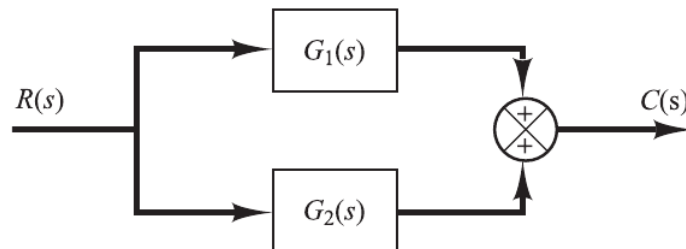


Figura 2.2: Sistema Paralelo.

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t) \star g_1(t) \\ y_2(t) = x(t) \star g_2(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x(t) \star [g_1(t) + g_2(t)]$$

$$Y(s) = X(s) [G_1(s) + G_2(s)]$$

2.1.3. Sistema a lazo abierto.

2.1.3.1. Análisis por perturbaciones (ruido+interferencia)

Sea un sistema como el de la Fig. 2.3.

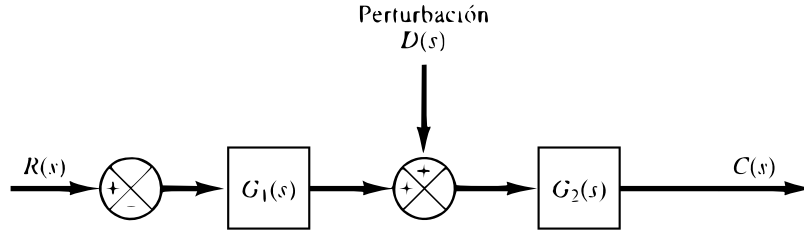


Figura 2.3: Sistema a lazo abierto con perturbación.

Por la propiedad de linealidad del sistema podemos analizar el efecto de $R(s)$ y de $D(s)$ por separado y después sumar las respuestas.

Siendo:

$C(s)$ la salida del sistema.

$R(s)$ la entrada del sistema.

$D(s)$ la perturbación.

G_2 la ganancia que afecta a la perturbación.

G_1G_2 la ganancia total del sistema.

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = G_1G_2$$

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = G_1$$

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s) = G_1G_2R(s) + G_1D(s)$$

2.1.3.2. Análisis por cambios en los valores del sistema

2.1.4. Sistema a lazo cerrado.

2.1.4.1. Análisis por perturbaciones (ruido+interferencia)

Sea un sistema como el de la Fig. 2.4.

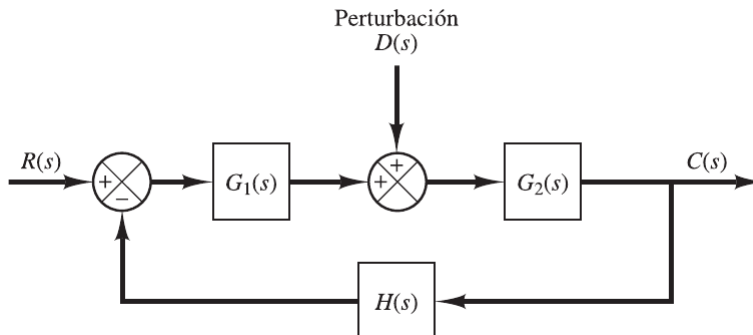


Figura 2.4: Sistema a lazo cerrado con perturbación.

Por la propiedad de linealidad del sistema podemos analizar el efecto de $R(s)$ y de $D(s)$ por separado y después sumar las respuestas.

Siendo:

$C(s)$ la salida del sistema.

$R(s)$ la entrada del sistema.

$D(s)$ la perturbación.

G_2 la ganancia que afecta a la perturbación.

G_1G_2 la ganancia total del sistema.

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2H}$$

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1G_2H}$$

Suponiendo que el producto $G_1G_2 \gg 1$

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{1}{H}$$

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{1}{G_1H}$$

Observamos que se redujo el efecto de la perturbación según G_1 .

2.1.4.2. Análisis por cambios en los valores del sistema

2.2. Álgebra de bloques y diagramas de flujo de señales.

Los diagramas de flujo son representaciones que permiten simplificar la comprensión de un sistema. En la Fig. 2.5 podemos ver la representación de un diagrama de flujo.

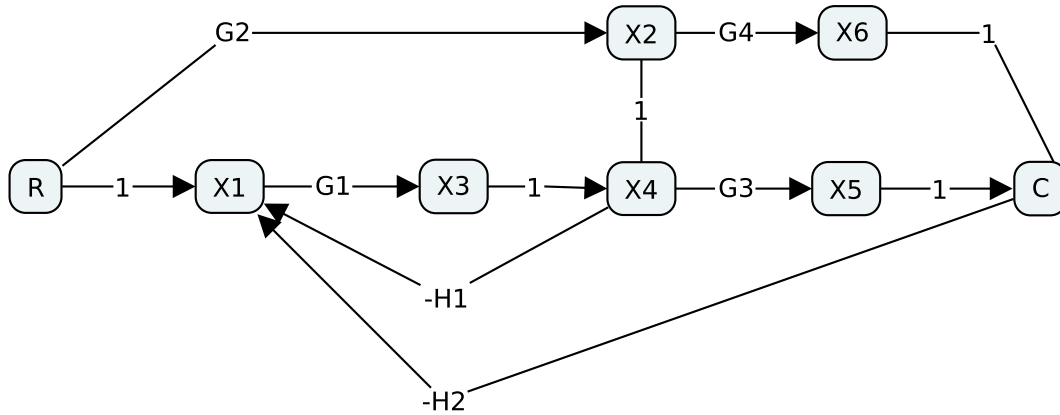


Figura 2.5: Diagrama de flujo.

- **Nodo:** son puntos que representan las distintas variables que existen en el sistema. Si del nodo solo salen ramas, es un nodo de entrada, si al nodo solo llegan ramas, es un nodo de salida y si del nodo salen y llegan ramas es un nodo intermedio.
- **Rama:** Unión que representa la relación que hay entre dos estados o nodos.
- **Ganancias de rama:** Son las ganancias que se pueden obtener de todos los caminos directos desde el nodo de entrada al nodo de salida.

Las ganancias de rama para la Fig. 2.5 son:

$$M_1 = G_2G_4$$

$$M_2 = G_2G_3$$

$$M_3 = G_1G_3$$

- Ganancias de lazo: Son las ganancias que se pueden obtener de cada camino cerrado del diagrama.

Las ganancias de lazo para la Fig. 2.5 son:

$$L_1 = -G_1 H_1$$

$$L_2 = -G_1 G_3 H_2$$

- Ganancia de sistema: Se la calcula en función de las ganancias de rama y las ganancias de lazo. Se calcula como:

$$\frac{C}{R} = \frac{\sum_{i=0}^N M_i \Delta_i}{\Delta}$$

Siendo el determinante total:

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - [L_1 + L_2] + \\ & \sum \text{Ganancia del producto de los lazos disjuntos de 2 en 2} - \\ & \sum \text{Ganancia del producto de los lazos disjuntos de 3 en 3} + \dots \end{aligned}$$

Donde los lazos disjuntos son aquellos que no comparten nodos. En el caso de la Fig. 2.5 los dos lazos comparten nodos. Por lo que:

$$\Delta = 1 - [L_1 + L_2] = 1 + G_1 H_1 + G_1 G_3 H_2$$

El determinante i -ésimo será igual al determinante total menos los términos que contienen al lazo L_i

$$\Delta_1 = 1 + G_1 H_1 + G_1 G_3 H_2$$

$$\Delta_2 = 1 + G_1 H_1$$

$$\Delta_3 = 1$$

Por lo que la ganancia para la Fig. 2.5 es:

$$\frac{C}{R} = \frac{[G_2 G_4 (1 + G_1 H_1 + G_1 G_3 H_2)] + [G_2 G_3 (1 + G_1 H_1)] + [G_1 G_3 (1)]}{1 + G_1 H_1 + G_1 G_3 H_2}$$

2.3. Casos prácticos.

Capítulo 3

Análisis temporal.

En este capítulo analizaremos la respuesta en el tiempo de sistemas de primer orden y segundo orden a señales de excitación conocidas (Impulso, escalón, rampa.).

3.1. Sistemas de primer orden

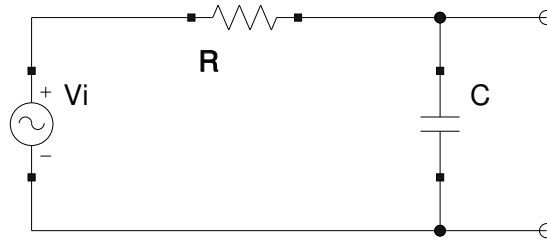


Figura 3.1: Sistema primer orden.

Sea un sistema como el de la Fig. 3.1, su función de transferencia sera:

$$\begin{aligned}v_i &= Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \\v_c &= \frac{1}{C} \int_0^t i dt\end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace y resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} V_i(s) = (R + \frac{1}{sC}) I(s) \\ V_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) \end{cases}$$
$$\frac{V_C}{V_i} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$
$$V_C(s) = V_i(s) \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

3.1.1. Respuesta a un impulso $V_i(s) = 1$

La salida del sistema sera:

$$V_C(s) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

En el dominio del tiempo:

$$v_c(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

En la Fig. 3.2 podemos apreciar la respuesta de este sistema al impulso.

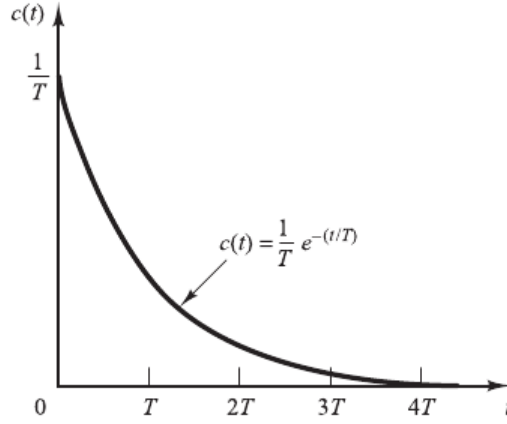


Figura 3.2: Respuesta temporal del sistema de primer orden al impulso.

3.1.2. Respuesta a un escalón $V_i(s) = \frac{1}{s}$

La salida del sistema sera:

$$V_C(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau}} \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \left(\frac{1}{s} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = -1$$

$$V_C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

En el dominio del tiempo:

$$v_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

En la Fig. 3.3 podemos apreciar la respuesta de este sistema al escalon.

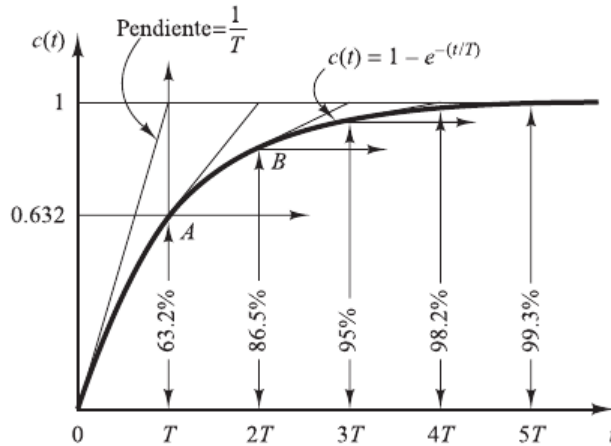


Figura 3.3: Respuesta temporal del sistema de primer orden al escalon.

3.1.3. Respuesta a una rampa $V_i(s) = \frac{1}{s^2}$

La salida del sistema sera:

$$V_C(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left(\frac{1}{s^2} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \left(\frac{1}{s^2} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \right] = -\tau$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau}} \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \left(\frac{1}{s^2} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = \tau$$

$$V_C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}$$

En el dominio del tiempo:

$$v_c(t) = t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}$$

En la Fig. 3.4 podemos apreciar la respuesta de este sistema a una rampa.

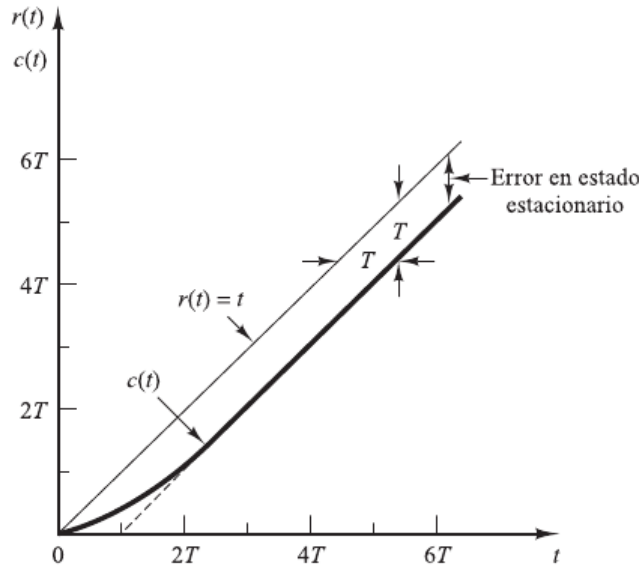


Figura 3.4: Respuesta temporal del sistema de primer orden a una rampa.

3.2. Sistemas de segundo orden.

La función de transferencia de un sistema de segundo orden tiene la forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + bs + c} \quad (3.1)$$

La relación que exista entre b y c dará lugar a que los polos de la función de transferencia se encuentren ubicados en diferentes posiciones del lugar de raíces lo que originara diferentes respuestas a las excitaciones.

Para conocer los polos de la función de transferencia debemos aplicar la siguiente formula:

$$S_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

De esta función derivan tres distintas posibilidades

$$\begin{aligned}
b^2 &> 4c \rightarrow \text{Raíces Reales Diferentes} \\
b^2 &= 4c \rightarrow \text{Raíces Reales Iguales} \\
b^2 &< 4c \rightarrow \text{Raíces Complejas Conjugadas}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

A continuación analizaremos la respuesta al escalón para cada uno de estos casos. Se utiliza como excitación un escalón debido a que es la seña que mejor nos permite analizar el comportamiento de cada caso.

3.2.1. Raíces reales y distintas: Respuesta sobreamortiguada.

Para este caso la Ec. 3.1 resulta:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)}$$

Si la excitación es un escalón, $R(s) = \frac{1}{s}$.

$$\begin{aligned}
C(s) &= \frac{1}{s} \frac{k}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + \sigma_1)} + \frac{A_3}{(s + \sigma_2)} \\
c(t) &= A_1 + A_2 e^{-\sigma_1 t} + A_3 e^{-\sigma_2 t}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

La respuesta de la Ec. 3.3 la podemos ver en la Fig. 3.5.

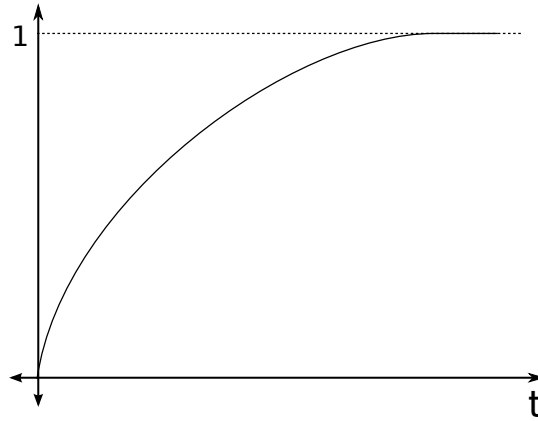


Figura 3.5: Respuesta temporal de sistema de segundo orden sobreamortiguado.

3.2.2. Raíces reales e iguales: Respuesta críticamente amortiguada.

Para este caso la Ec. 3.1 resulta:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s + \sigma)^2}$$

Si la excitación es un escalón, $R(s) = \frac{1}{s}$.

$$\begin{aligned}
C(s) &= \frac{1}{s} \frac{k}{(s + \sigma)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + \sigma)^2} + \frac{A_3}{(s + \sigma)} \\
c(t) &= A_1 + A_2 t e^{-\sigma t} + A_3 e^{-\sigma t}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

La respuesta de la Ec. 3.4 la podemos ver en la Fig. 3.6.

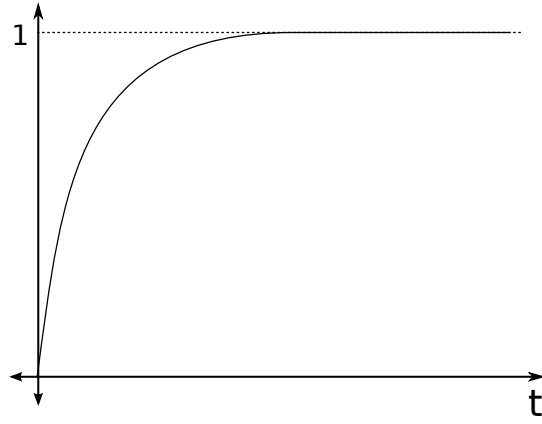


Figura 3.6: Respuesta temporal de sistema de segundo orden sobreamortiguado.

3.2.3. Raíces complejas conjugadas: Respuesta subamortiguada.

Para este caso la Ec. 3.1 resulta:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

Si la excitación es un escalón, $R(s) = \frac{1}{s}$.

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{k}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + \sigma + j\omega)} + \frac{A_3}{(s + \sigma - j\omega)}$$

$$c(t) = A_1 + A_2 e^{-(\sigma + j\omega)t} + A_3 e^{-(\sigma - j\omega)t} \quad (3.5)$$

La respuesta de la Ec. 3.5 la podemos ver en la Fig. 3.7.

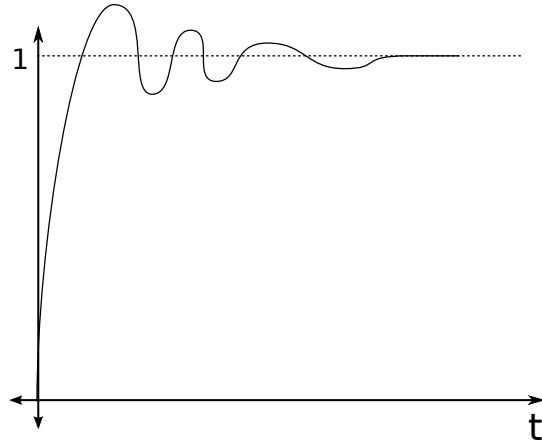
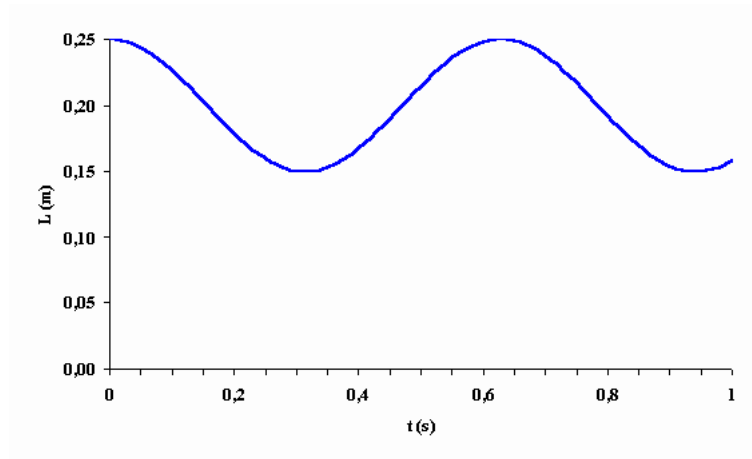


Figura 3.7: Respuesta temporal de sistema de segundo orden sobreamortiguado.

3.2.4. Pulsación natural.

En el caso en que $\sigma = 0$ para un sistema subamortiguado obtendremos una respuesta oscilatoria como la que se ve en la Fig. 3.8

Figura 3.8: Respuesta oscilatoria para cuando $\sigma = 0$

La frecuencia de oscilación corresponderá a \sqrt{c} y se denomina pulsación natural ω_n .

3.2.5. Relación de amortiguamiento.

Del las relaciones de las Ec. 3.2 se puede operar para llegar a la relación de amortiguamiento ξ

$$b^2 = 4c \rightarrow b = 2\sqrt{c}$$

Donde llamaremos b_0 a $2\sqrt{c}$ y definiremos ξ como:

$$\xi = \frac{b}{b_0}$$

- Si $b = b_0$ entonces $\xi = 1$ y es el caso críticamente amortiguado.
- Si $b < b_0$ entonces $\xi < 1$ y es el caso subamortiguado.
- Si $b > b_0$ entonces $\xi > 1$ y es el caso sobreamortiguado.

NOTA:

La ecuación de segundo orden puede ser descripta en función de la relación de amortiguamiento y de la pulsación natural.

Sea la función descripta anteriormente (Ec. 3.1)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + bs + c}$$

Podemos reemplazar b y c por relaciones de ξ y ω_n

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Capítulo 4

Simulación de sistemas dinámicos

Capítulo 5

Análisis en estado permanente.

El estado permanente o estado estacionario es aquel que logra un sistema luego de que se extinguen todas las respuestas transitorias que pueda tener.

5.1. Error de estado estacionario

Supongamos un sistema lineal e invariante en el tiempo cuya función de transferencia es la siguiente:

$$G(s) = \frac{k \prod_{i=1}^N (s + z_i)}{s^n \prod_{j=1}^M (s + p_j)}$$

Nosotros analizaremos tres tipos de sistemas según el valor de n . Recordemos que $\frac{1}{s}$ se comporta como un integrador en el tiempo.

- Tipo 0 si $n = 0$.
- Tipo 1 si $n = 1$.
- Tipo 2 si $n = 2$.

Sea un sistema como el de la Fig. 5.1.

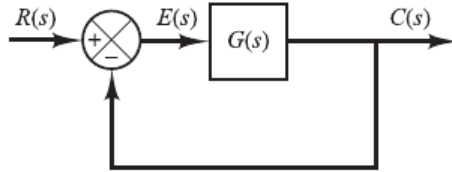


Figura 5.1: Sistema de control de realimentación unitaria.

Podemos definir:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Con $E(s) = R(s) - C(s)$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

El error de estado estacionario se encuentra definido como:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)}$$

Ya habiendo definido el error de estado estacionario analizaremos su utilidad en los tres tipos de sistema de control que dijimos que analizaríamos.

5.1.1. Tipo 0.

A este tipo de sistema le aplicaremos una entrada escalón para poder analizar el error de estado estacionario.

$$\begin{aligned}
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \\
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s}}{1 + \frac{k \prod_{i=1}^N (s+z_i)}{s^0 \prod_{j=1}^M (s+p_i)}} \\
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k \prod_{i=1}^N (s+z_i)}{\prod_{j=1}^M (s+p_i)}} \\
 e_{ss} &= \frac{1}{1 + k_p}
 \end{aligned}$$

Donde k_p es el coeficiente de error estático de posición, este error se encuentra representado en la Fig. 5.2.

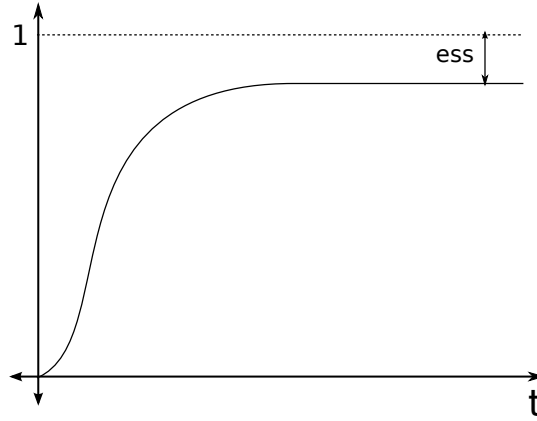


Figura 5.2: Coeficiente de error estático de posición.

5.1.2. Tipo 1.

Este tipo de sistema puede seguir sin error un escalón, por lo que le aplicaremos una entrada rampa para poder analizar el error de estado estacionario.

$$\begin{aligned}
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \\
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{k \prod_{i=1}^N (s+z_i)}{s^1 \prod_{j=1}^M (s+p_i)}} \\
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s} \left[s + \frac{k \prod_{i=1}^N (s+z_i)}{\prod_{j=1}^M (s+p_i)} \right]} \\
 e_{ss} &= \frac{1}{k_v}
 \end{aligned}$$

Donde k_v es el coeficiente de error estático de velocidad, este error se encuentra representado en la Fig. 5.3.

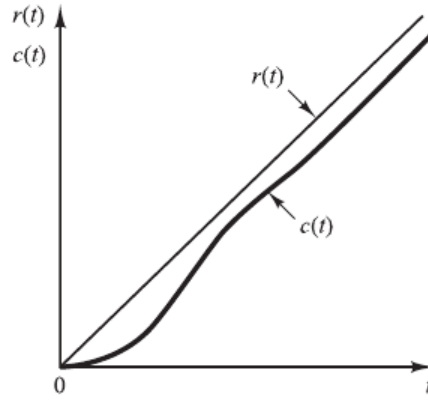


Figura 5.3: Coeficiente de error estático de velocidad.

5.1.3. Tipo 2.

Este tipo de sistema puede seguir sin error un escalón o una rampa, por lo que le aplicaremos una entrada parábola para poder analizar el error de estado estacionario.

$$\begin{aligned}
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \\
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{1}{s^3}}{1 + \frac{k \prod_{i=1}^N (s+z_i)}{s^2 \prod_{j=1}^M (s+p_j)}} \\
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{1}{s^2} \left[s^2 + \frac{k \prod_{i=1}^N (s+z_i)}{\prod_{j=1}^M (s+p_j)} \right]} \\
 e_{ss} &= \frac{1}{k_a}
 \end{aligned}$$

Donde k_a es el coeficiente de error estático de aceleración, este error se encuentra representado en la Fig. 5.4.

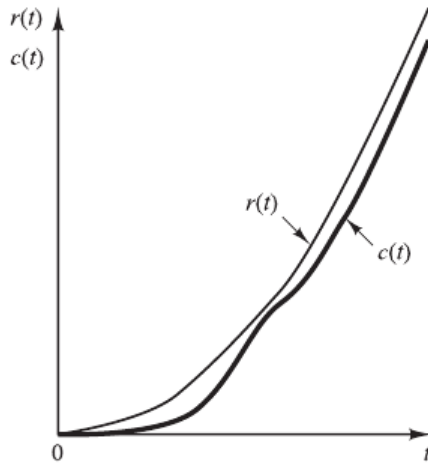


Figura 5.4: Coeficiente de error estático de velocidad.

5.1.4. Cuadro resumen del error de estado estacionario.

	Entrada escalón $r(t) = 1$	Entrada rampa $r(t) = t$	Entrada aceleración $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Sistema tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

Figura 5.5: Resumen de los e_{ss}

5.2. Estabilidad.

5.2.1. Estabilidad absoluta y relativa.

- Estabilidad absoluta: es cuando todas las raíces del denominador (polos) de la función de transferencia están en el semiplano izquierdo
- Estabilidad relativa: el sistema se considera estable para un $\xi < 0.6$, ya que de esta manera existen un margen de fase y ganancia razonables.

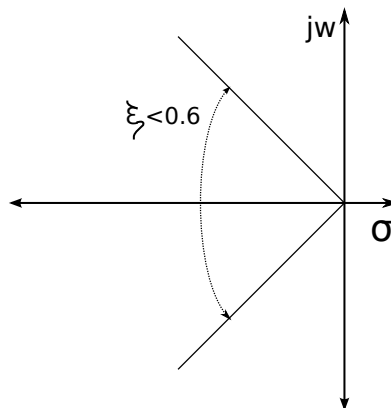


Figura 5.6: Estabilidad relativa.

5.2.2. Routh-Hurwitz.

Es un método matricial que se utiliza para encontrar cuántas raíces a parte real positiva tiene un polinomio. Usado adecuadamente podemos determinar si un sistema es estable o no.

Se puede conocer la estabilidad del sistema si analizamos el denominador del mismo con Routh-Hurwitz, debido a que de esta manera sabríamos si este tiene o no polos con parte real positiva.

5.2.2.1. Descripción del método.

- Se arma una tabla con los coeficientes del polinomio como se muestra en el Cuadro 5.7.

$$P(S) = a_4 S^4 + a_3 S^3 + a_2 S^2 + a_1 S^1 + a_0$$

S^4	a_4	a_2	a_0
S^3	a_3	a_1	
S^2	b_0	b_1	
S^1			
S^0			

Figura 5.7: Routh-Hourwithz

- Los coeficientes b se calculan de la siguiente manera:

$$b_0 = \frac{a_3 * a_2 - a_4 * a_1}{a_3}$$

$$b_1 = \frac{a_3 * a_0 - a_4 * 0}{a_3}$$

- Luego se consideran los signos de los coeficientes de la primera columna de la tabla, cada cambio de signo indica que existe una raíz a parte real positiva.

$$P(S) = 4S^2 - 5S + 1$$

S^2	4	1
S^1	-5	
S^0	1	

Figura 5.8: Cambios de signos

El Cuadro 5.8 indica que existen dos raíces con parte real positiva en el polinomio $P(s)$.

5.2.2.2. Casos particulares.

- Caso particular 1:

Uno de los términos de la primer columna da 0. En ese caso lo que se hace es considerar que en lugar de 0 el resultado es un numero infinitesimal, y al hacerlo tender a 0^+ o 0^- podemos resolver el método.

$$s^3 + 2s^2 + 20s + 40 = 0$$

s^3	1	20
s^2	2	40
s^1	ϵ	
s^0	40	

- Caso particular 2:

Se anula toda una fila.

$$s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 15s^2 + 5s + 25 = 0$$

s^5	1	3	5
s^4	5	15	25
s^3	0	0	
s^2			
s^1			
s^0			

En este caso se utiliza la fila superior a la que se anula y se deriva la misma, de ahí se saca lo coeficientes para la fila que se anulo.

$$\frac{d}{ds} [5s^4 + 15s^2 + 25] = 20s^3 + 30s$$

s^5	1	3	5
s^4	5	15	25
s^3	20	30	
s^2	$\frac{15}{2}$	25	
s^1	-275		
s^0	25		

Al tener dos cambios de signo implica que existen dos raíces con parte real positiva en el polinomio.

Capítulo 6

Lugar de raíces (Evans).

El lugar de raíces nos permite conocer por medio de la función de lazo abierto como se comportara la función a lazo cerrado variando un parámetro de la primera.

Sea un sistema realimentado como el que se muestra en la Fig. 6.1, su función de transferencia sera:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

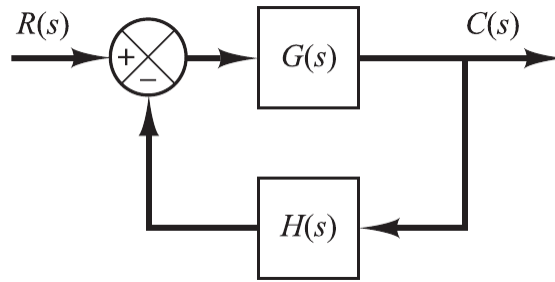


Figura 6.1: Sistema realimentado.

El lugar de raíces de la misma se obtiene analizando el denominador.¹

$$GH = -1$$

Al analizar el modulo y el ángulo por separado, obtenemos dos condiciones que nos permiten diagramar el lugar de raíces.²

- Condición de ángulo: $\angle GH = \pm 180 * (2k + 1)$
- Condición de modulo: $|GH| = 1$

6.1. Procedimiento para la obtención del lugar de raíces.

1. Situar los polos y ceros de GH en el plano s .

Las ramas del lugar de las raíces empiezan en los polos en lazo abierto y terminan en los ceros (ceros finitos o ceros en infinito).

2. Determinar los lugares de las raíces sobre el eje real.

Debido a que los polos o ceros complejos conjugados contribuyen con 360° a cualquier punto que se considere del eje real, solo tendremos en cuenta los polos o ceros sobre el eje real.

¹Para mayor simplicidad llamaremos al producto $G(s)H(s)$ como GH

²Notar que el análisis realizado es para realimentación negativa. En caso de ser realimentación positiva cambia la condición de ángulo.

En general siempre que a la derecha del punto analizado haya un número impar de polos y ceros será lugar de raíz, esto es así ya que de esa manera se cumple con la condición de ángulo.

3. Determinar las asíntotas de los lugares de las raíces.

■ Ángulo de asíntotas:

Se obtiene a partir de la siguiente fórmula:

$$\text{Ángulos de asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m} \quad k = (0, 1, 2, \dots)$$

Donde:

- n es el número de polos finitos de GH
- m es el número de ceros finitos de GH

Esta ecuación es necesaria aplicarla $n-m$ veces³ variando k , si seguimos aumentando k solo conseguiremos repetir los valores de los ángulos de las asíntotas.

■ Punto de intersección con el eje real:

Se obtiene a partir de la siguiente fórmula:

$$\sigma_c = \frac{\sum \text{Re}[P] - \sum \text{Re}[Z]}{n-m}$$

4. Encontrar los puntos de ruptura y de ingreso.

- En el espacio entre dos polos en el eje real existe al menos un punto de ruptura.
- En el espacio entre dos ceros en el eje real existe al menos un punto de ingreso.
- En el espacio entre un polo y un cero en el eje real pueden o no existir puntos de ruptura o ingreso.

Para obtener el valor de los puntos de ruptura y de ingreso derivamos k respecto a s e igualamos a 0.

$$\text{Si } k = \frac{\prod (s+P_j)}{\prod (s+Z_i)} = \frac{B}{A}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{B'A - A'B}{A^2} = 0$$

Las raíces de la ecuación anterior corresponderán o no a puntos de ruptura o ingreso:

- Si la raíz está sobre el eje real y en una parte que es lugar de raíces corresponde punto de ruptura o ingreso.
- Si la raíz está sobre el eje real y en una parte que no es lugar de raíces, no corresponde punto de ruptura o ingreso.
- Si las raíces son complejas conjugadas habrá que verificar el valor de k cuando $s = \text{raíz}$, si k es positiva implica que la realimentación es negativa y corresponde punto de ruptura o ingreso, sino no.

5. Determinar el ángulo de salida (ángulo de llegada) de un lugar de las raíces a partir de un polo complejo (un cero complejo).

Por condición de ángulo si la suma de los ángulos formados por la trayectoria de los ceros o polos al punto de interés es 180° quiere decir que este punto corresponde al lugar de raíces.

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots = 180^\circ$$

Si se selecciona un punto de prueba y se mueve en la cercanía precisa del polo complejo (o del cero complejo), se considera que no cambia la suma de las contribuciones angulares de todos los otros polos y ceros. Por tanto, el ángulo de llegada (o ángulo de salida) del lugar de las raíces de un polo complejo (o de un cero complejo) se encuentra restando a 180° la suma de todos los ángulos de vectores, desde todos los otros polos y ceros hasta el polo complejo (o cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos apropiados.

³ $n-m$ corresponde a la cantidad de ramas que tendrá el lugar de raíces.

Despejando de la ecuación anterior:

$$\varphi_{interes} = 180^\circ - [\varphi_1 + \varphi_2 + ..]$$

Ángulo de salida desde un polo complejo = 180°

−(suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde otros polos)

+(suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde otros ceros)

Ángulo de entrada a un cero complejo = 180°

−(suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde otros ceros)

+(suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde otros polos)

6. Encontrar los puntos donde los lugares de las raíces cruzan el eje imaginario.

Los puntos donde los lugares de las raíces cruzan el eje $j\omega$ se encuentran con facilidad por medio de:

- a) El criterio de estabilidad de Routh.
- b) Suponiendo que $s = j\omega$ en la ecuación característica, igualando a cero la parte real y la parte imaginaria y despejando ω y k . En este caso, los valores encontrados de ω representan las frecuencias en las cuales los lugares de las raíces cruzan el eje imaginario. El valor de k que corresponde a cada frecuencia de cruce proporciona la ganancia en el punto de cruce.

7. Dibujar los lugares de las raíces.

8. Determinar los polos en lazo cerrado.

6.2. Caso particular: Realimentación negativa.

Al ser la realimentación negativa $H(s) < 0$ luego

$$1 - G(s)H(s) = 0$$

Por lo que las condiciones de modulo y ángulo para el lugar de raíces cambian a:

- $|GH| = 1$
- $\angle GH = k * 360^\circ$

Luego con estas nuevas condiciones el ángulo de las asíntotas y el corte de las mismas sera:

- $\angle s = \frac{k*360^\circ}{n-m}$
- $\sigma = \frac{\sum Re[P] - \sum Re[Z]}{n-m}$

La nueva condición donde habrá lugar de raíces sobre el eje real sera:

- Cuando a la cantidad de singularidades a la izquierda sea impar.

6.3. Análisis de sistemas de control mediante método de lugar de raíces.

6.3.1. Efectos de añadir polos y ceros.

Capítulo 7

Análisis de respuesta en frecuencia.

Se analizará el sistema luego de haberse extinguido su respuesta transitoria y utilizando excitaciones sinusoidales. Consideremos un SLIT.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Donde:

$$R(s) = |R| \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$C(s) = \frac{A_1}{s + s_1} + \frac{A_2}{s + s_2} + \dots + \frac{A_n}{s + s_n} + \frac{B_1}{s + j\omega} + \frac{\bar{B}_1}{s - j\omega}$$

$$c(t) = A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t} + \dots + A_n e^{-s_n t} + B_1 e^{-j\omega t} + \bar{B}_1 e^{j\omega t}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ los transitorios se extinguirán y $c(t)$ sera

$$c(t) = B_1 e^{-j\omega t} + \bar{B}_1 e^{j\omega t} = B \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Observamos que la respuesta permanente del sistema a una excitación senoidal se puede analizar mediante el cambio de amplitud y el desfase de la señal.

7.1. Construcción de diagramas de Bode.

7.1.1. Análisis de la respuesta de una ganancia K.

7.1.2. Análisis de la respuesta de un derivador o integrador.

7.1.3. Análisis de la respuesta de sistemas de primer orden (polo/cero).

7.1.4. Análisis de la respuesta de sistemas de segundo orden.

Frecuencia de resonancia ω_r , y el valor del pico de resonancia M_r .

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

7.2. Diagramas Polar.**7.3. Sistemas de fase mínima y no mínima.****7.4. Sistemas de primer y segundo orden.****7.4.1. Primer orden.****7.4.2. Segundo Orden.****7.5. Respuesta a un corrimiento.**

La fase sigue cayendo. Retardos de tiempo por acción de censado y control en diferente fase

7.6. Determinación de los coeficientes de error.

Salen de la constante del bode

7.6.1. Coeficiente de error de posición.**7.6.2. Coeficiente de error de velocidad.****7.6.3. Coeficiente de error de aceleración.****7.7. Estabilidad en el dominio de la frecuencia.****7.7.1. Criterio de estabilidad de Nyquist.****7.7.2. Estabilidad relativa en diagramas de Bode y Polar.****7.7.2.1. Margen de ganancia****7.7.2.2. Margen de fase**

Capítulo 8

Diseño de sistemas de control.

8.1. Especificaciones de diseño.

Se desea lograr:

- Estabilidad (Lograr un buen margen de ganancia y fase para una buena estabilidad relativa)
- Precisión (Mejorar el error de estado estacionario)
- Rapidez (Lograr un ancho de banda grande para una respuesta transitoria rápida)
- Robustez (Independencia de las variaciones en los componentes del circuito)

8.2. Controladores.

8.2.1. Controlador proporcional.

Solo variando la ganancia del sistema se puede lograr en algunas ocasiones que los polos del sistema cumplan con el criterio de estabilidad relativa.

Al variar la ganancia desplazamos los polos por el lugar de raíces y se puede calcular la ganancia necesaria para que el par de polos complejos conjugados cumpla con estabilidad relativa.

El problema de un controlador proporcional es que al disminuir la ganancia solo corrige la estabilidad del sistema y no mejora ni la precisión ni la rapidez del sistema, lo contrario sucede al aumentar la ganancia.

8.2.2. Controlador proporcional-derivativo.

La suma de un derivador al sistema mejorará la estabilidad del sistema ya que opera sobre la velocidad del error y no sobre el error mismo, es decir, cuando existe una perturbación en el sistema el controlador derivativo la detecta cuando esta inicia y no cuando esta sucede, lo que permite corregirla antes de que esta perturbación vuelva inestable el sistema.

No se utiliza solo porque amplifica las altas frecuencias que es donde se encuentra el ruido.

8.2.3. Controlador proporcional-integral.

La suma de un integrador al sistema mejorará la respuesta del mismo frente a un escalón (mejor precisión) pero puede conducir a la inestabilidad del sistema.

8.2.4. Controlador proporcional-integral-derivativo.

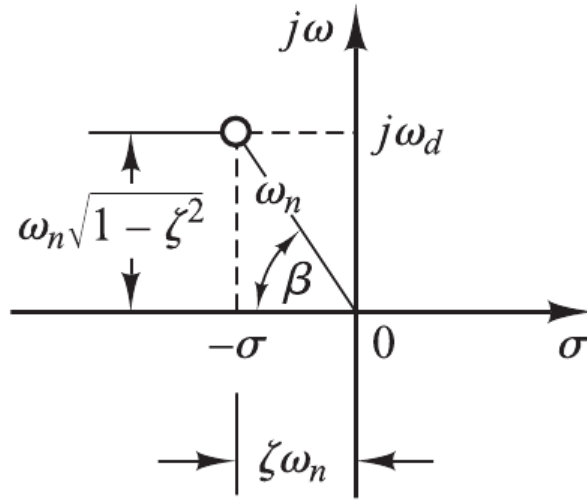
8.3. Compensadores.

8.3.1. Compensador de adelanto.

8.3.2. Compensador de atraso.

8.3.3. Compensador de adelanto-atraso.

8.4. Relaciones útiles para la compensación.

Figura 8.1: Definición del ángulo β

- Tiempo de crecimiento:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

- Tiempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- Tiempo de establecimiento al 2%:

$$t_{s-2\%} = 4\tau = \frac{4}{\sigma}$$

- Tiempo de establecimiento al 5%:

$$t_{s-5\%} = 3\tau = \frac{3}{\sigma}$$

- Sobrepico porcentual:

$$M_p = e^{-\sigma t_p} * 100$$

8.5. Diseño de compensadores utilizando lugar de raíces.

8.5.1. Compensador de adelanto.

1. A partir de las especificaciones de comportamiento, determine la localización deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.
2. Por medio de una gráfica del lugar de las raíces del sistema original, compruebe si el ajuste de la ganancia puede o no por sí solo proporcionar los polos en lazo cerrado adecuados. Si no, calcule el ángulo ϕ necesario. Para calcular el ángulo ϕ es necesario valuar con el polo deseado la función de transferencia de lazo abierto y calcular la fase de esta ecuación. Esa fase nos indicará por cuánto nos excedemos de la condición de ángulo.

$$\angle FTLA|_{POLO-DESEADO} = -180^\circ - \phi$$

3. Suponga que el compensador de adelanto $G_c(s)$ es

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{sT + 1}{s\alpha T + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

donde α y T se determinan a partir de la deficiencia de ángulo. K_c se determina a partir del requisito de la ganancia en lazo abierto.

4. Si no se especifican las constantes de error estático, determine la localización del polo y del cero del compensador de adelanto, para que el compensador de adelanto contribuya al ángulo ϕ necesario. Si no se imponen otros requisitos sobre el sistema, intente aumentar el valor de α lo más que pueda. Un valor más grande de α , generalmente, proporciona un valor más grande de K_v , reduciendo el e_{ss} .

Para la ubicar el polo y cero del compensador utilizaremos dos métodos:

- Método de la bisectriz.
- Cancelación de polo.

5. Determine el valor de la K_c del compensador de adelanto a partir de la condición de magnitud.

8.5.2. Compensador de atraso.

1. Dibuje la gráfica del lugar de las raíces para el sistema no compensado, cuya función de transferencia en lazo abierto sea $G(s)$. En función de las especificaciones de la respuesta transitoria, sitúe los polos dominantes en lazo cerrado en el lugar de las raíces.
2. Suponga que la función de transferencia del compensador de retardo es

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{sT + 1}{s\beta T + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

Así, la función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado se convierte en $G_c(s)G(s)$.

3. Calcule la constante de error estático especificada en el problema.
4. Determine el incremento necesario en la constante de error estático para satisfacer las especificaciones.
5. Determine el polo y el cero del compensador de retardo que producen el incremento necesario en la constante de error estático sin modificar apreciablemente los lugares de las raíces originales. (Observe que la razón entre el valor de la ganancia requerido en las especificaciones y la ganancia que se encuentra en el sistema no compensado es la razón entre la distancia del cero al origen y la del polo al origen.)
6. Dibuje una nueva gráfica del lugar de las raíces para el sistema no compensado. Localice los polos dominantes en lazo cerrado deseados sobre el lugar de las raíces. (Si la contribución de ángulo de la red de retardo es muy pequeña, es decir, de pocos grados, los lugares de las raíces originales y los nuevos serán casi idénticos. Sin embargo, habrá una ligera discrepancia entre ellos. A continuación localice, sobre el nuevo lugar de las raíces, los polos dominantes en lazo cerrado deseados a partir de las especificaciones de la respuesta transitoria.)
7. Ajuste la ganancia K_c del compensador a partir de la condición de magnitud, para que los polos dominantes en lazo cerrado se encuentren en la localización deseada (K_c será aproximadamente 1).

8.5.3. Compensador de adelanto-atraso.**8.5.4. Compensador paralela.****8.6. Diseño de compensadores utilizando respuesta en frecuencia.****8.6.1. Compensador de adelanto.**

1. Suponga el siguiente compensador de adelanto:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{sT + 1}{s\alpha T + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

Defina

$$K_c \alpha = K$$

Entonces,

$$G_c(s) = K \frac{sT + 1}{s\alpha T + 1}$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K \frac{sT + 1}{s\alpha T + 1} G(s) = \frac{sT + 1}{s\alpha T + 1} G_1(s)$$

Donde

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia K que satisfaga el requisito sobre la constante estática de error dada.

2. Usando la ganancia K así determinada, dibuje el diagrama de Bode de $G_1(j\omega)$, el sistema con la ganancia ajustada pero sin compensar. Calcule el margen de fase.
3. Determine el ángulo de adelanto de fase que es necesario que se añada al sistema. Incremente un adelanto de fase adicional de 5° a 12° al ángulo de adelanto de fase requerido, ya que la adición del compensador de adelanto desplaza la frecuencia de cruce de ganancia hacia la derecha y disminuye así el margen de fase.
4. Determine el factor de atenuación α con la Ecuación:

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

Determine la frecuencia donde la magnitud del sistema no compensado $G_1(j\omega)$ es igual a $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$. Seleccione esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta frecuencia corresponde $\omega_n = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ y el cambio de fase máximo ϕ_m ocurre en esta frecuencia.

5. Determine las frecuencias esquinas del compensador de adelanto del modo siguiente:
 - Compensador de adelanto de cero: $\omega = \frac{1}{T}$
 - Compensador de adelanto del polo: $\omega = \frac{1}{\alpha T}$
6. Usando el valor de K determinado en el paso 1 y el de α determinado en el paso 4, calcule la constante K_c a partir de

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

7. Verifique el margen de ganancia para asegurarse de que es satisfactorio. Si no es así, repita el proceso de diseño modificando la localización de polos-ceros del compensador hasta que se obtenga un resultado satisfactorio.

8.6.2. Compensador de atraso.

1. Suponga el siguiente compensador de retardo:

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{sT + 1}{s\beta T + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

Defina

$$K_c \beta = K$$

Entonces,

$$G_c(s) = K \frac{sT + 1}{s\beta T + 1}$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K \frac{sT + 1}{s\beta T + 1} G(s) = \frac{sT + 1}{s\beta T + 1} G_1(s)$$

donde

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia K que satisfaga los requisitos sobre la constante de error estático de velocidad.

2. Si el sistema no compensado pero ajustado en ganancia $G_1(j\omega) = KG(j\omega)$ no satisface las especificaciones en los márgenes de fase y de ganancia, entonces encuentre la frecuencia en la cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto sea igual a -180° más el margen de fase requerido. Este es el margen de fase especificado más 5° a 12° . (La adición de entre 5° a 12° compensa el desfase que introduce el compensador de retardo.) Seleccione esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia.
3. Para evitar los efectos adversos del desfase producido por el compensador de retardo, el polo y el cero del compensador de retardo deben localizarse sustancialmente por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Por tanto, seleccione la frecuencia esquina $\omega = \frac{1}{T}$ (que corresponde al cero del compensador de retardo) entre una octava y una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. (Si las constantes de tiempo del compensador de retardo no se hacen demasiado grandes, la frecuencia esquina $\omega = \frac{1}{T}$ se puede escoger una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia.) Observe que se selecciona el polo y el cero del compensador suficientemente pequeños. Así el retardo de fase ocurre en la región de bajas frecuencias de manera que no afecta al margen de fase.
4. Determine la atenuación necesaria para llevar la curva de magnitud a $0dB$ en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Si se considera que esta atenuación es de $-20\log\beta$, determine el valor de β . A continuación se obtiene la otra frecuencia esquina (que corresponde al polo del compensador de retardo) a partir de $\omega = \frac{1}{\beta T}$.
5. Usando el valor de K determinado en el paso 1 y el de β obtenido en el paso 4, calcule la constante K_c a partir de

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$

8.6.3. Compensador de adelanto-atraso.

8.7. Construcción física de un compensador.

En la Fig. 8.2 se puede ver un compensador construido con resistencias capacidades y amplificadores operacionales.

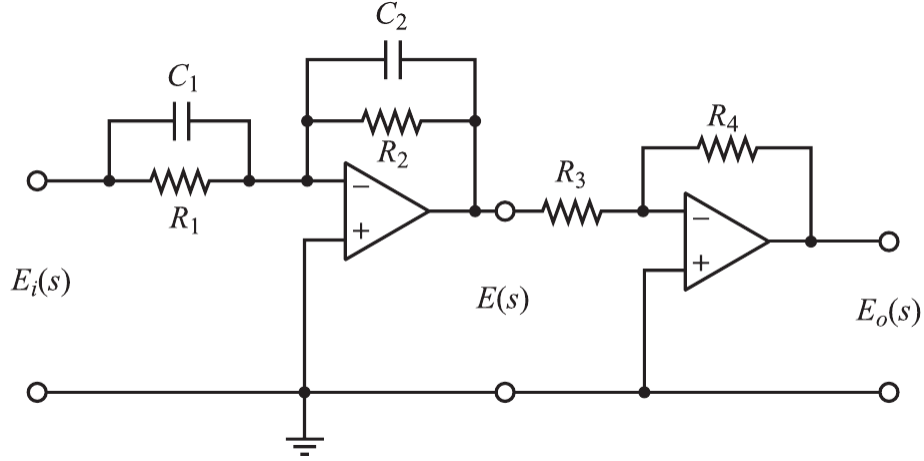


Figura 8.2: Construcción física de un compensador.

La ecuación que define a este compensador es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 C_1 s + \frac{1}{R_1 C_1}}{R_3 C_2 s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$

Obsérvese que ajustando adecuadamente las R y los C el mismo circuito puede ser un compensador de adelanto o de atraso.

La construcción de un compensador de adelanto-atraso se la muestra en la Fig. 8.3.

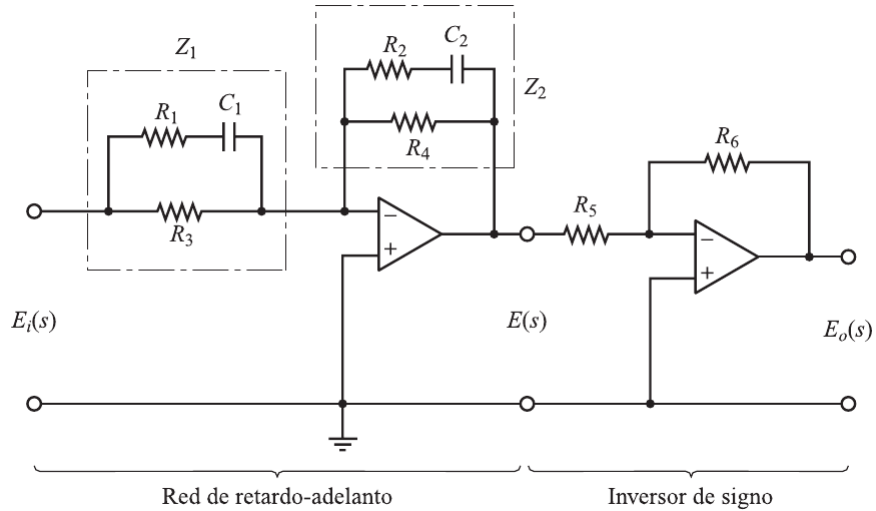


Figura 8.3: Construcción física de un compensador de adelanto-atraso.

La ecuación que define a este compensador es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 R_6}{R_3 R_5} \left[\frac{(R_1 + R_3) C_1 s + 1}{R_1 C_1 s + 1} \right] \left[\frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_2 + R_4) C_2 s + 1} \right]$$

Capítulo 9

Técnicas de variables de estado.

9.1. Introducción

9.1.1. Teoría de control moderna frente a teoría de control convencional.

La tendencia de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que su formulación es aplicable a sistemas de múltiples-entradas, múltiples-salidas, que pueden ser lineales o no lineales, invariantes en el tiempo o variables en el tiempo, mientras que la teoría convencional sólo es aplicable a sistemas de una entrada-una salida invariantes en el tiempo. Además, la teoría de control moderna es esencialmente una aproximación en el dominio temporal, mientras que la teoría de control convencional es una aproximación en el dominio de la frecuencia compleja. Antes de continuar, se debe definir estado, variables de estado, vector de estado y espacio de estados.

9.2. Conceptos

- Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas variables de estado), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$.
- Variables de estado. Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si al menos se necesitan n variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico.
- Vector de estado. Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector x .
- Espacio de estados. El espacio n - dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2 , ..., eje x_n , donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados.

9.3. Representación de sistemas en el espacio de estado.

9.4. Obtención de función de transferencia.

Capítulo 10

Finales

10.1. Final 17/02/14

Tema 1

compensar en frecuencia con los BODE, como los que andan dando vueltas la misma planta.

Tema 2

Variable de Estado, donde tenias que decir con que realimentación de los K , lo hacías, hacerle el diagrama de flujo etc, como los que hay dando vueltas.

Tema 3

Compensar en Lugar de Raíces, primero tenias que determinar cuales eran las dos funciones de transferencia que habían en la rama directa, para eso te daba dos gráficas en el dominio del tiempo, que correspondían a la respuesta escalón de cada planta, y recién después hacer la compensación con el punto de diseño que te daba para el ξ y t_s

10.2. Final 07/04/14

Tema 1

Para el siguiente sistema con realimentación unitaria

$$G_P(S) = \frac{0,12(S + 0,5)(S + 0,8)}{(S + 1,2)(S^2 + 0,2S + 0,1)}$$

El lugar de raíces se ve en la siguiente Fig.

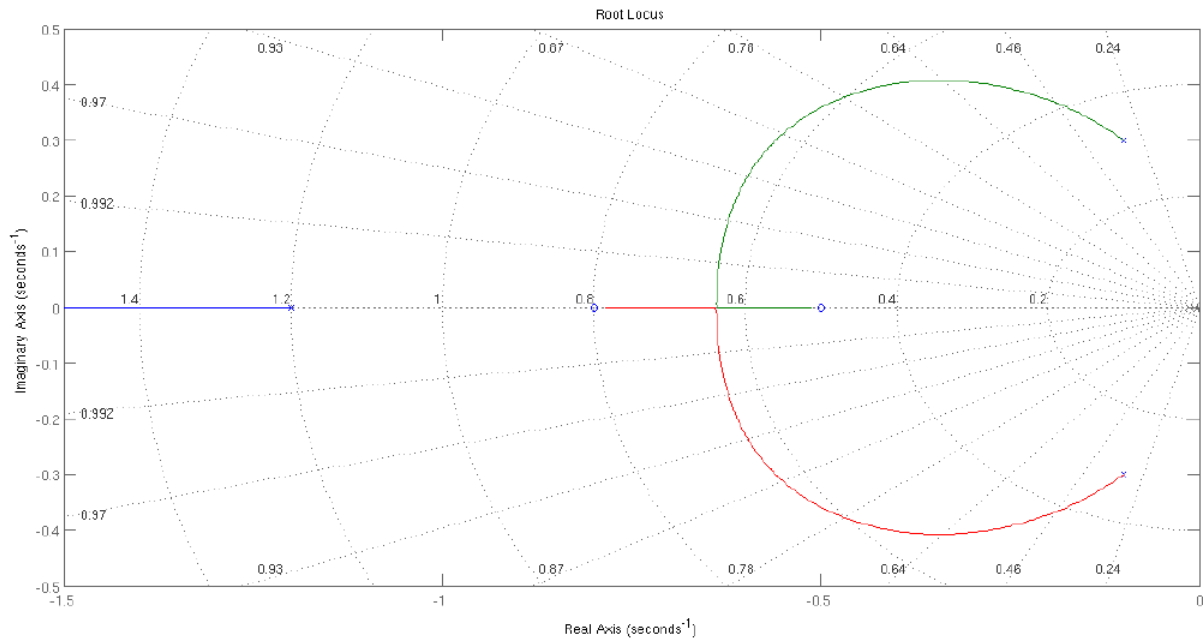


Figura 10.1: Lugar de raíces.

Se pide:

- Encontrar un compensador de forma que el $T_{s-2\%}$ y que $\omega_n = 0,566 \frac{rad}{seg}$
- Encontrar error en estado estacionario del sistema compensado para una entrada escalón
- Proponer una solución para que el Error de Estado Estacionario para una entrada escalón sea nulo

Tema 2

Para el siguiente sistema en Variables de Estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Se pide:

- Diagrama de flujo del sistema
- Autovalores
- Diagonalizar el sistema
- Diagrama de flujo del sistema diagonalizado
- Respuesta temporal del sistema al escalón unitario
- Observabilidad y Controlabilidad para el sistema original (no el diagonal)
- Calcular K para polos dominantes en $-2 + j2$ y $-2 - j2$ para el sistema original
- Diagrama de flujo del sistema compensado con K
- Respuesta del sistema compensado al escalón unitario
- Si el sistema posee error en estado estacionario para una entrada escalón unitaria proponga una solución para eliminar ese error

10.3. Final 30/06/2014

Tema 1

Este era el mas jodido y el que quería que hagas bien, daba varios gráficos:

- Respuesta transitoria de la FTLC excitada con un escalón
- Lugar de Raíces de FTLA
- Bode con 3 ganancias distintas de FTLA
- Nyquist con 3 ganancias distintas de FTLA

Había que obtener FTLA, FTLC, indicar K_v en Nyquist, Bode, y varias cosas mas pero no me acuerdo. El tema para arrancar estaba en saber cual era la ganancia del sistema, lo cual había que sacarla usando Bode y Nyquist, y marcar cual de las 3 curvas en cada gráfico era la correcta.

Tema 2

$$F(s) = \frac{Y}{U} = \frac{10}{(s^3 + 9s^2 + 20s)}$$

- Representar en Fcc
- Diagrama de flujo
- Autovalores
- Matriz Transición de estado
- Matriz K de realimentación, y daba 3 polos
- Diagrama de flujos incluyendo K

Tema 3

Obtener las FT del sistema amortiguador de un auto.

10.4. Final 25/08/14 (Puede estar mal copiado)

Tema 1

Realizar sintonía de un PID utilizando las aproximaciones $Z - N$. En la figura se muestra la respuesta temporal en lazo abierto de la planta para una entrada escalón e impulso unitario. El valor de régimen para la respuesta escalón es 1. Se dan los Cuadros 10.1 y 10.2 con los valores de K_p , T_1 , T_d para las diferentes configuraciones, considerando el tiempo de retardo L , la constante de tiempo T , el periodo critico P_{cr} y la ganancia K_{cr} , según los criterios establecidos por el método utilizado.

Obtener expresión del PID utilizando el método $Z - N$ correspondiente.

Tipo	K_p	T_1	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Cuadro 10.1:

Tipo	K_p	T_1	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Cuadro 10.2:

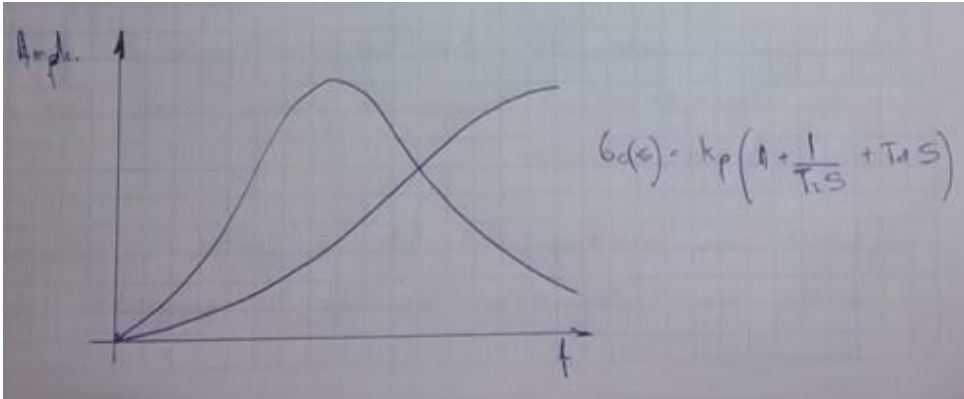


Figura 10.2:

Tema 2

Un sistema de control de lazo cerrado presenta un FT:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{64}{(s + 2)(s + 4)(s + 8)}$$

Compensar de manera de lograr una respuesta con una relación de coeficientes de amortiguación $\xi = 0.707$ y un $\omega_n = 5 \frac{rad}{seg}$ y que no posea e_{ss} para una entrada escalón.

(Daba un gráfica del lugar de raíces en donde las singularidades marcadas eran las de la ecuación anterior.)

Tema 3

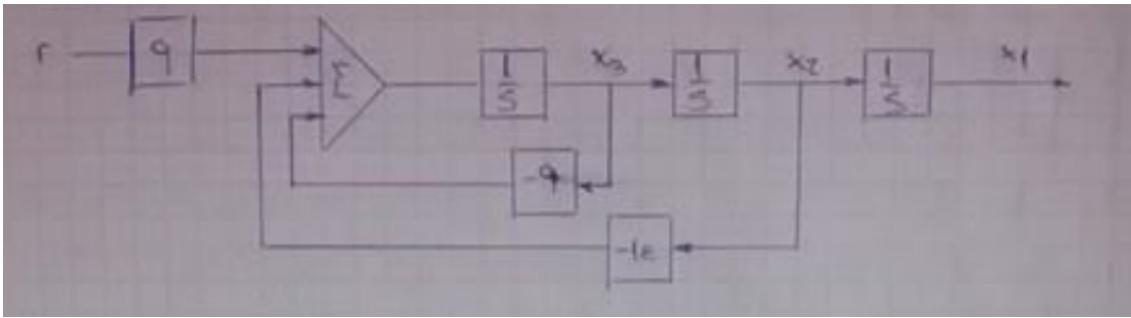


Figura 10.3:

- Representar en variables de estado.
- Autovalores, controlabilidad y observabilidad.
- Matriz de transición de estados
- Matriz de realimentación K para $s_1 = -20$, $s_2 = -2 - 2j$ y $s_3 = -2 + 2j$
- Diagrama de bloques para el punto ## y logrando un sistema con $e_{ss} = 0\%$ para una entrada escalón unitaria.

10.5. Final 15/12/14

Tema 1

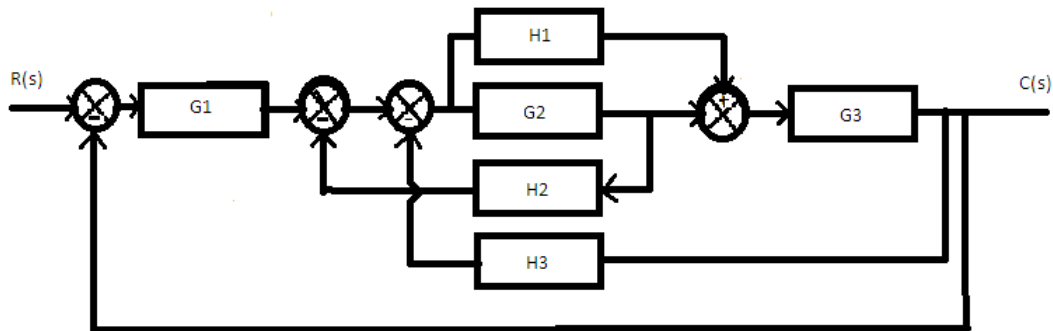


Figura 10.4:

- Realizar el diagrama de flujo.
- Obtener la función de transferencia.

Tema 2

Sistema de realimentación unitaria con un compensador en serie.

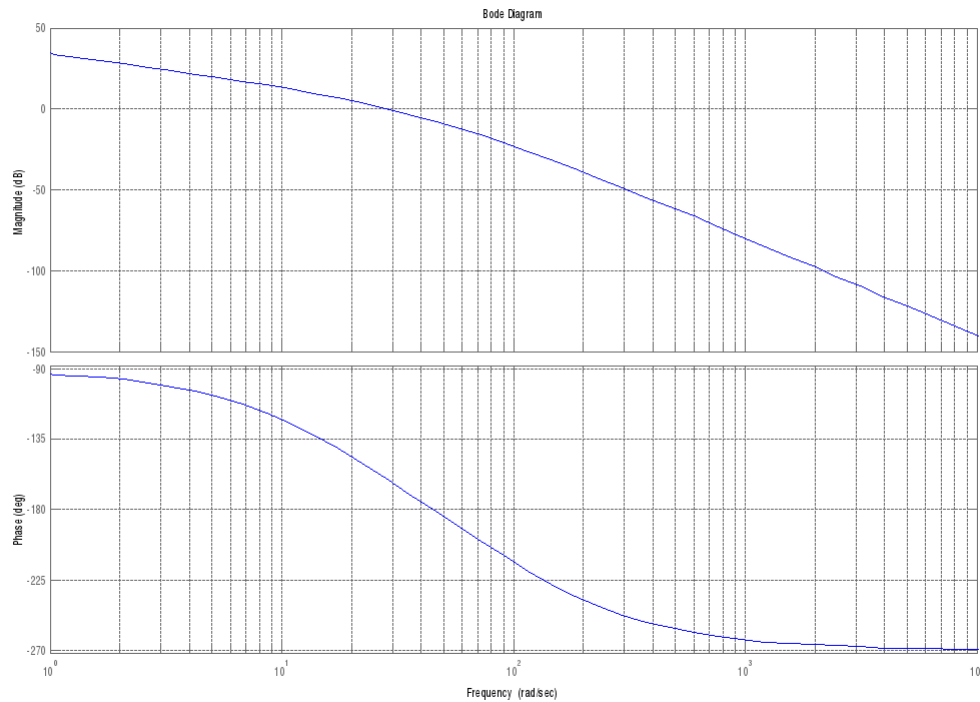


Figura 10.5:

$$G(s) = \frac{100000}{s(s+20)(s+100)}$$

- Obtener margen de Fase, Margen de Ganancia. Estabilidad del sistema en función del Margen de Fase y Margen de ganancia.
- A partir del diagrama marcar en el mismo el error de estado estacionario correspondiente.
- Encontrar el e_{ss} para una entrada de tipo $y(t) = 1(t) + t$
- Diseñar un compensador para un $MF = 45^\circ$ y un $e_{ss} = 0.01$

Tema 3

Un sistema de control de entrada única y de salida única está representado mediante las siguientes ecuaciones en VE:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Determinar la controlabilidad y observabilidad de estado.
- Como especificaciones de diseño se presenta una matriz K que permita mediante realimentación del vector de estado (si el sistema cumple las condiciones) ubicar los polos de lazo cerrado en $S_1 = -4 - 4j$ y $S_2 = -4 + 4j$ sin que el sistema tenga error en estado estacionario para una entrada escalón. (Elegir el valor del tercer polo).
- Realizar el diagrama en bloques del sistema original con las realimentaciones propuestas para cumplir las especificaciones de diseño.

Observaciones:

- El Ing. Picco no vino, al examen lo tomó Salguero. El diagrama de Bode que estaba en el examen estaba mal, por lo que tuvimos que hacer de nuevo el Bode.
- El tema 1 tenía una pequeña trampa, revisar que hay que agregar una ganancia unitaria para que el diagrama de flujo refleje correctamente el diagrama en bloques. Entre G2 y el punto de suma de la derecha se debe agregar una ganancia unitaria de lo contrario se formaría un nuevo lazo cerrado que es incorrecto.

10.6. Final 02/02/2015 (Puede estar mal copiado)

Tema 1

Se dispone un sistema de control de lazo cerrado con realimentación negativa unitaria como el indicado en la Fig. . $R(s)$ es la señal de entrada.

Se pide:

- Realizar el diagrama de flujo de la señal.
- Determinar las funciones de transferencia de lazo cerrado $\frac{C(s)}{R(s)}$ y $\frac{E(s)}{R(s)}$
- Determinar el error en estado estacionario $c(\infty)$ para una entrada $r(t) = 1$ [Escalón unitario]

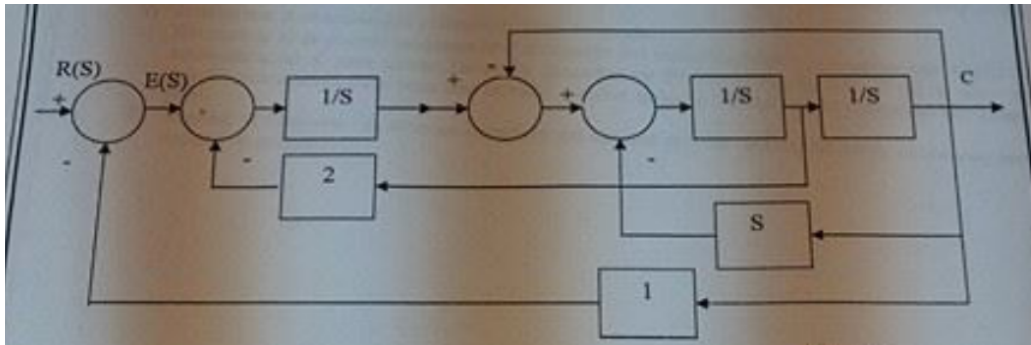


Figura 10.6:

Tema 2

Un sistema de control de lazo cerrado, como el indicado en la Fig. , utiliza un compensador proporcional derivativo (PD).

Se pide:

- Determinar los valores de las constantes K_p y K_D ? del controlador, necesarias para lograr que el sistema presente polos complejos conjugados dominantes con un sobrepaso máximo de 10 % ante una entrada escalón unitario y un tiempo de establecimiento $t_{s-2\%} = 4\text{seg}$
- Determinar el error para una entrada rampa unitaria.
- Indicar que otro tipo de controlador podría lograr esas especificaciones.

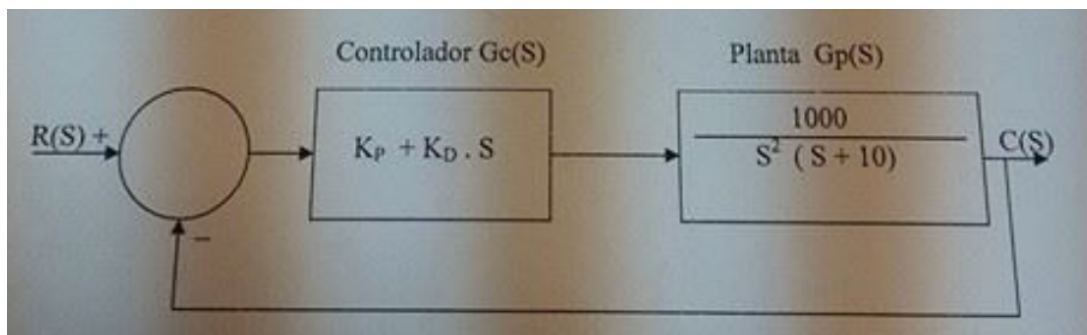


Figura 10.7:

Tema 3

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

- Obtener la representación en variables de estado....
- Controlabilidad y observabilidad.
- Determinar si es posible mediante realimentación del vector de estado.... realimentación K para ubicar los polos deseados en $s_1 = -27$, $s_2 = -3.3j$, s_3 estado estacionario nulo para una entrada escalón unitario (proponer la... polo)
- Realizar el diagrama de bloques completo del sistema con las realimentaciones... cumplir lo solicitado.

10.7. Final 02/03/2015

Tema 1

Sistema con realimentación unitaria y compensación por ajuste de ganancia.

$$G(s) = 2 \frac{(s + 10)}{s(s + 4)(s + 8)}$$

- Hacer el lugar de raíces de la función $G(s)$ (te daba una hoja con un sistemas de coordenadas ya armado para que le dibujes encima)
- Calcular una ganancia K para que el sistema presente polos complejos conjugados dominantes y cumpla con $T_s=2\%$.
- Te daba otra hoja con varias respuestas al escalón de sistemas y te pedía que dijeras cual podría ser la respuesta al sistema dado y que expliques por que.

Tema 2

Sistema masa resorte amortiguador.

Es un ejercicio del Ogata 5ta edición página 87. A-3-2 es el ejercicio. El lo supo explicar en clase, es el equivalente al amortiguador de una rueda de un auto.

Tema 3

Te daba un Bode.

- Margen de fase, margen de ganancia, tipo del sistema y coeficiente de error.
- Graficar el Bode de lazo cerrado de la función si tiene realimentación unitaria.

Tema 4

Te daba un diagrama en bloques de un sistema

- Representación en variable de estado.
- Autovalores.
- Controlabilidad y observabilidad.
- Diagonalizar el sistema.
- Obtener la matriz de transferencia.

10.8. Final 23/02/15

Tema 1

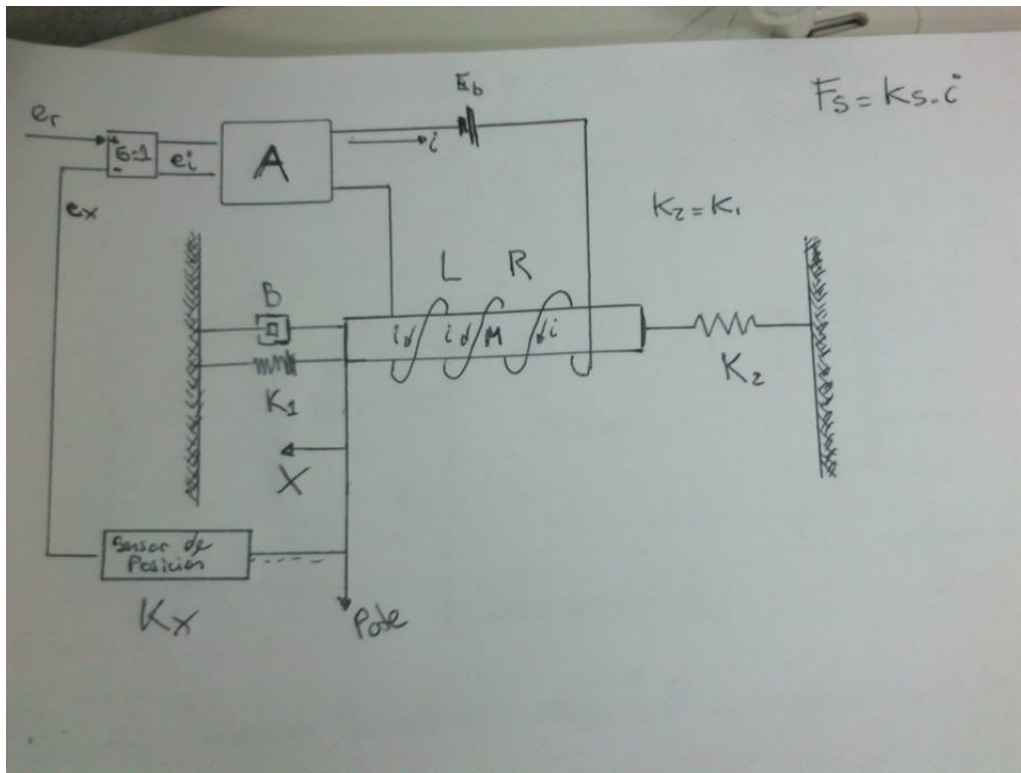


Figura 10.8: Sistema Físico

Plantear:

- Ecuaciones del sistema
- Diagrama de bloques
- Función de transferencia $\frac{X}{e_r}$
- Representar en variables de estado.

Tema 2

Linealizar la función

$$y = 0.3x - 0.003x^3$$

Calcular el error absoluto y valor relativo.

Tema 3

Relación entre Bode y K_p , K_v y K_a .

Graficar todo lo que supieran, supuestamente quería la formula de Bode de tipo 0, tipo 1, y tipo 2 para el Bode.

Tema 4

Un caso de variable de estados TIPO 1 encontrar K y realizar el diagrama de bloques correspondiente.