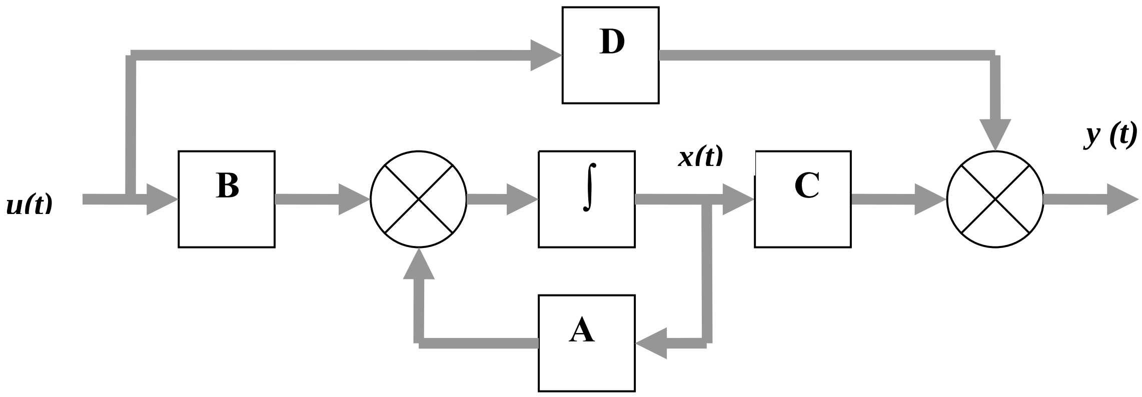
ASIGNACION DE POLOS MEDIANTE REALIMENTACION DEL VECTOR DE ESTADO

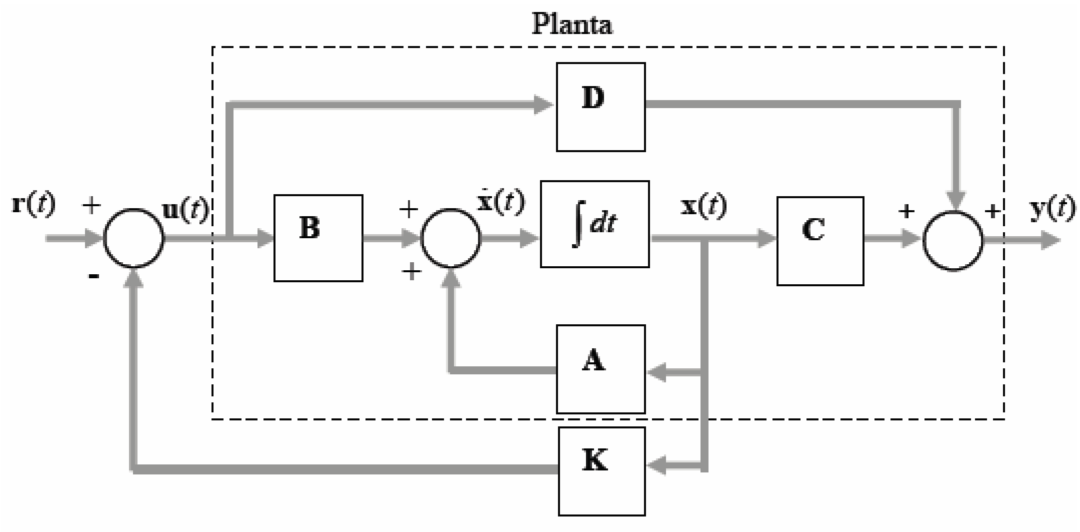
$$\frac{C}{R} = \frac{8}{S^3 + 6S^2 + 10S + 8} = \frac{8}{(S+1+J)(S+1-J)(S+4)}$$

Se tiene una planta, y la representación mediante Variables de estado esta dada por



$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y = Cx(t) + Du(t)$$

Se propone realizar una asignación de polos mediante realimentación del vector de estado de la forma *u(t) = - K x(t),* modificándose el diagrama de bloques a la forma siguiente:



donde

x(t) = vector de estado de dimensión n
u(t) = vector de control de dimensión r
y(t) = vector de salida de dimensión m
A = matriz de coeficientes de estado [n,n]
B = matriz de coeficientes de excitación [n , r]
C = matriz de coeficientes de salida [m , r]
D = matriz de coeficientes relacion directa entrada-salida [m, r]

Vector de realimentación de estado

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = (s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n) = 0$$

Siendo los p_i los polos deseados

Ejemplo 1 :

Un sistema de control tiene una planta dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + 0u(t)$$

Obtener la matriz de ganancia necesaria $\mathbf{K}$ para ubicar los polos en lazo cerrado en $s_1 = -2 + j2\sqrt{3}$, $s_2 = -2 - j2\sqrt{3}$ y $s_3 = -10$.

En primer lugar se ha de comprobar si el sistema es completamente controlable, para ello el rango de la matriz de controlabilidad $\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{pmatrix}$ ha de ser 3. En efecto,

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -60 \\ 10 & -60 & 250 \end{pmatrix}$$

y su rango es 3.

$$\left| \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \right| = \left(s + 2 - j2\sqrt{3}\right)\left(s + 2 + j2\sqrt{3}\right)(s + 10)$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6+10k_1 & 11+10k_2 & s+6+10k_3 \end{vmatrix} = s^3+14s^2+56s+160$$

luego,

$$s^3+(6+10k_3)s^2+(11+10k_2)s+6+10k_1 = s^3+14s^2+56s+160$$

Igualando coeficientes,

$$6+10k_3=14, \quad 11+10k_2=56, \quad 6+10k_1=160$$

con lo cual,

$$k_3=0,8 \quad k_2=4,5 \quad k_1=15,4$$

Por tanto, la matriz de ganancia de realimentación de estado vale

$$\mathbf{K} = (15,4 \quad 4,5 \quad 0,8)$$

K = [154 45 8] T^{-1}

15.4000   4.5000   0.8000

J.E.Ackerman presento en 1972 la formula para el calculo de la matriz de ganancia K.

Esa formula conocida como formula de Ackerman, esta dada por

$$\mathbf{K} = (0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1)\left(\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \ldots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\Theta(\mathbf{A})$$

donde la matriz θ(A) se determina de la siguiente manera:

Si los polos de lazo cerrado deseados se sitúan en $s=p_1$, $s= p_2$, $s= p_3$, … $s= p_n$, , la ecuación característica deseada será:

$$(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n) = s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\ldots\alpha_{n-1}s+\alpha_n = 0$$

Calculados los coeficientes α_i, se tiene que $\Theta(\mathbf{A})$ está dado por

$$\Theta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n+\alpha_1\mathbf{A}^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}\mathbf{A}+\alpha_n\mathbf{I}$$

Este algoritmo se basa en el teorema de Cayley Hamilton que establece que toda matriz es solucion de su propia ecuación caracteristica.

Ejemplo 2 resuelto utilizando la formula de Ackerman – (Mismos valores del ejemplo 1)

Se encontró que

$\alpha_1 = 14,\ \alpha_2 = 56$ y $\alpha_3 = 160.$

por lo tanto

$$\Theta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 14\mathbf{A}^2 + 56\mathbf{A} + 160\mathbf{I}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}^3 + 14\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}^2 + 56\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} + 160\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 154 & 45 & 8 \\ -40 & 66 & -3 \\ 18 & -15 & 84 \end{pmatrix}$$

se obtuvo que la matriz de controlabilidad era

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -60 \\ 10 & -60 & 250 \end{pmatrix}$$

Aplicación en Matlab

ACKER Pole placement gain selection using Ackermann's formula.

K = acker (A,B,P) calculates the feedback gain matrix K such that the single input system

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

with a feedback law of u = -Kx has closed loop poles at the values specified in vector P, i.e., P = eig(A-B*K). En el caso del ejemplo,

```
P=[-2-2*sqrt(3)* j   -2+2*sqrt(3)*j   -10];   (Polos deseados)
```

Note: This algorithm uses Ackermann's formula. This method is NOT numerically reliable and starts to break down rapidly for problems of order greater than 10, or for weakly controllable systems. A warning message is printed if the nonzero closed-loop poles are greater than 10% from the desired locations specified in P.

```
A=[ 0 1 0 ;  0 0 1;  -6 -11 -6 ];
B=[ 0;  0;  10 ];
```

C=[1   0   0];
D=[0];
P=[-2-2*sqrt(3)* j   -2+2*sqrt(3)*j   -10];
K= acker(A , B, P);
K

K =   [K1   K2   K3]   =   [15.4000   4.5000   0.8000] Que son los mismos valores encontrados usando la fórmula de Ackerman.

Otro forma de calcular la matriz K, es la siguiente:

Se define una matriz de transformación T, para pasar a la forma Canónica Controlable

$$T = M\ W$$

en donde M es la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

$$W = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

en donde las a_i son los coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Se elige un vector de transformación x=TX para pasar a la forma canónica de variables de fase o forma canónica controlable. De tal forma que la matriz, queda

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix}$$

Frobenius

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con los polos seleccionados (asignación de polos que cumplen con las especificaciones), υ_1 υ_2 υ_3 ... υ_n , la ecuación característica se escribe

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

definamos

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathrm{KT} = [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1]$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{ATX} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\left|s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{BK}\right| = \left|\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathrm{A} + \mathbf{BK})\mathbf{T}\right| = \left|s\mathbf{I} - \mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}\right| = 0$$

Remitiéndonos a lo establecido

$$\left|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}\right|$$

$$= \left| \mathrm{SI} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} [\delta_n \ \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1 \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ & & & \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix}$$

$$= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0$$

Igualando los coeficientes de igual potencia en s, se obtiene

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1$$
$$a_2 + \delta_2 = \alpha_2$$

$$a_n + \delta_n = \alpha_n$$

Despejando las δ_i en las ecuaciones anteriores y sustituyéndolas en la ecuación obtenemos

$$K = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{T}^{-1} = [\delta_n \; \delta_{n-1} \; \cdots \; \delta_1]\mathbf{T}^{-1}$$
$$= [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} \quad a_{n-1} \mid \cdots \; \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$

En nuestro caso, y dado que el sistema no esta en la forma canónica controlable; y tenemos que

Ec. Caracteristica original = $S^3 + a_1 S^2 + a_2 S + a_3 = S^3 + 6 S^2 + 11 S + 6$

Ec. Caracteristica deseada $S^3 + \alpha_1 S^2 + \alpha_2 S + \alpha_3 = S^3 + 14 S^2 + 56 S + 160$

Por lo tanto lo matriz K= [$\alpha_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1$] T^{-1} = [160-6 56-11 14-6] T^{-1}

K = [154 45 8] T^{-1}
15.4000 4.5000 0.8000
En nuestro caso T^{-1} es

Otro comando que se puede usar en matlab de la misma manera que Acker, es Place

PLACE Pole placement technique

K = PLACE(A,B,P) computes a state-feedback matrix K such that
the eigenvalues of A-B*K are those specified in vector P.
No eigenvalue should have a multiplicity greater than the
number of inputs.

[K,PREC,MESSAGE] = PLACE(A,B,P) returns PREC, an estimate of how closely the eigenvalues of A-B*K match the specified locations P (PREC measures the number of accurate decimal digits in the actual closed-loop poles). If some nonzero closed-loop pole is more than 10% off from the desired location, MESSAGE contains a warning message.

ASIGNACION DE POLOS PARA LOGRAR ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO NULO ANTE UNA ENTRADA ESCALON UNITARIO, CUANDO LA PLANTA POSEE UN INTEGRADOR.

En este caso, la matriz de realimentación que aparece en el diagrama esta dada por

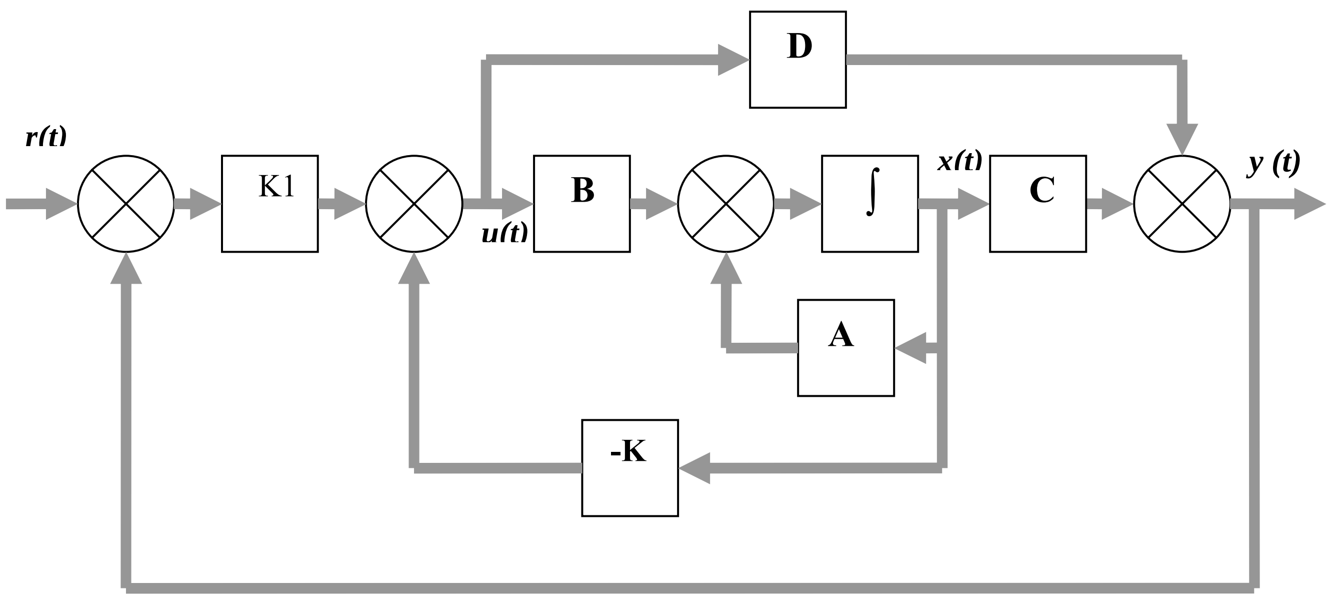
$$K = [\ 0\ \ K_2\ K_3\ K_4\ \ldots\ K_n\ ]$$

Donde el coeficiente K_1 de la matriz K es igual a cero, es decir que no se realimenta el estado X1, sino que lo que se hace es que mediante la elección adecuada del conjunto de variables de estado, se elige que la salida sea igual a la variable de estado deseada, en nuestro caso y(t) = X1 y la realimentación a través del vector u se hace

$$u = -[\ 0\ \ K_2\ K_3\ K_4\ \ldots\ K_n\ ] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + K_1 (r - x_1)$$

$$u = -K\,x + K_1\, r$$

$$\text{donde } K = [\ K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ \ldots\ K_n\ ]$$



Si la señal de entrada de referencia es una función escalón se aplica en t=0. Para t>0 la dinámica del sistema se expresa como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}u = (\mathrm{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}k_1 r$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathrm{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}k_1 r(\infty)$$

Considerando que $r(t)$ es una entrada escalón, tenemos $r(\infty) = r(t) =$ r(constante) para $t > 0$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathrm{A} - \mathrm{BK})[\mathrm{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)]$$

Defina

$$x(t) - \mathbf{x}(\infty) = e(t)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathrm{BK})\mathrm{e}$$

El diseño del sistema de seguimiento de tipo 1 se convierte aquí en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable tal que e(t) tienda a cero, dada cualquier condición inicial e(O). Si el sistema definido mediante la ecuación (12-89) es de estado completamente controlable, entonces, especificando los valores característicos deseados $\mu_1, \mu_2, \ldots,$ μ_n para la matriz $\mathrm{A} - \mathrm{BK}$, la matriz K se determina mediante la **técnica** de ubicación de polos p

Los valores en estado estable de x(t) y $u(t)$ se encuentran del modo siguiente: en estado estable $(t = \infty)$, a partir de la ecuación $(12-92)$, tenemos que,

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}k_1 r$$

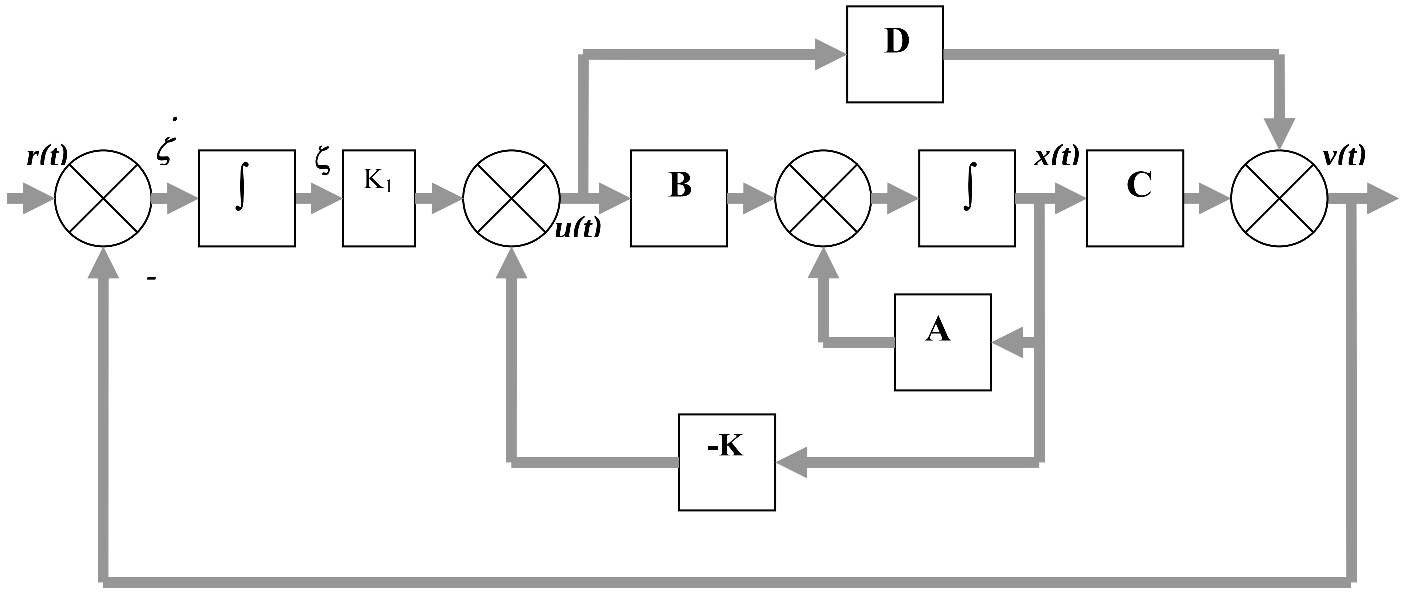
Dado que todos los valores característicos deseados de $\mathbf{A} - \mathrm{BK}$ están en el semiplano izquierdo del plano s, existe la inversa de la matriz $\mathbf{A} - \mathrm{BK}$. En consecuencia, $\mathbf{x}(\infty)$ se determina como

$$\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}k_1 r$$

Asimismo, $u(\infty)$ se obtiene como

$$u(\infty) = -\mathbf{Kx}(\infty) + k_1 r = 0$$

ASIGNACION DE POLOS PARA LOGRAR ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO NULO ANTE UNA ENTRADA ESCALON UNITARIO, CUANDO LA PLANTA NO POSEE UN INTEGRADOR.



A partir del diagrama de bloques, con D = 0, se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathrm{x} + \mathrm{B}u$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{c}\mathrm{x}$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I\xi$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C}\mathbf{x}$$

en donde x = vector de estado de la planta (vector de dim
u = señal de control (escalar)
y = seña1 de salida (escalar)
ξ = salida del integrador (variable de estado del
r = señal de entrada de referencia (función esca
A = matriz de coeficientes constantes de n X n
B = matriz de coeficientes constantes de n X 1
C = matriz de coeficientes constantes de 1 X n

La función de transferencia de la planta se obtiene mediante

$$G_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

La entrada de referencia (funcion escalon) se aplica en t=0. En este caso , para t>0 la dinamica del sisgtema se describe mediante la siguiente representación . (Se supone que la funcion de transferencia Gp(S) no tiene un cero en el origen)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Diseñaremos un sistema asintóticamente estable, tal que $\mathbf{x}(\infty)$, $\xi(\infty)$ y $u(\infty)$ tiendan avalores constantes, respectivamente. Así, en un estado estable $\dot{\xi}(t) = 0$ y obtenemos $y(\infty) = r$.

Observe que, en estado estable, tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Considerando que r(t) es una entrada escalón unitario, se tiene que r(∞) =r(t) = 1 (Constante) para t>0. Restando el valor de x(t) actual menos el valor en régimen t=infinito x(∞), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)]$$

Defina

$$\mathrm{x(t)} - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$\mathrm{u(t)} - u(\infty) = \mathrm{u_e(t)}$$

Entonces, la ecuación (12-111) se escribe como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

en donde

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + k_I\xi_e(t)$$

Defina un nuevo vector de error e(t) $(n + 1)$-ésimo de orden mediante

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = (n + 1)\text{-vector}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \mathrm{B}u,$$

en donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}$$

en donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathrm{K} \quad -k_I]$$

Aquí, la idea básica de diseñar el sistema de seguimiento de tipo 1 es diseñar un sistema regulador estable de $(n + 1)$-ésimo orden que lleve a cero el nuevo vector de error $e(t)$, dada cualquier condición inicial e(O).

Los valores en estado estable de x(t), $\xi(t)$ y u(t) se encuentran del modo siguiente: en estado estable $(t = \infty)$,

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}u(\infty)$$

$$\dot{\xi}(\infty) = 0 = r - \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty)$$

lo cual se combina en una ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \end{bmatrix}$$

Si la matriz P, definida mediante

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{C} & 0 \end{bmatrix}$$

es de rango $n + 1$, entonces existe su inversa y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix}$$

$$u(m) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_I\xi(\infty)$$

y, por tanto

$$\xi(\infty) = \frac{1}{k_I}[u(\infty) + \mathbf{K}\mathbf{x}(\infty)]$$

Si la matriz P obtenida es de rango n+1 entonces el sistema definido mediante la ecuación $\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \mathrm{B}u,$ se vuelve de estado totalmente controlable y la solución a este problema se obtiene mediante el enfoque de ubicación de polos.

La ecuación de error de estado se obtiene de

$$\dot{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e}$$

Si los valores característicos deseados de la matriz $\hat{\mathbf{A}}$ $\hat{\mathbf{B}}$ $\hat{\mathbf{K}}$ (es decir, los polos en lazo cerrado deseados) se especifican como $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$, entonces la matriz de ganancias de realimentación del estado K y la constante de ganancia integral k_1 pueden determinarse. En el diseño actual, es necesario considerar varias matrices K diferentes (que correspondan a varios conjuntos distintos de valores característicos deseados) y realizar simulaciones en computadora para encontrar aquella que produzca el mejor desempeño general del sistema. A continuación, seleccione la mejor como la matriz K .

Como ocurre normalmente, no todas las variables de estado se pueden medir en forma directa. En ese caso, necesitamos usar un observador de estado. La figura 12-15 muestra un diagrama de bloques de un sistema de seguimiento de tipo 1 con un observador de estado.