03/11/09 Soluciones 2do parcial 5R2 (1)

1) $$G(s)H(s) = 10\,\frac{s+1}{s^3+3s^2-10s} = 10\,\frac{s+1}{s(s^2+3s-10)}$$

Aplicamos Nyquist

a) análisis de baja frecuencia

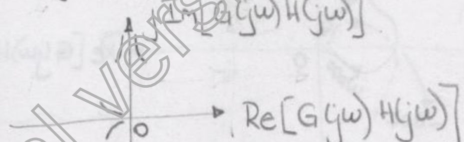
$$\lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{10}^{\,1}\,\frac{1}{s\,(-\cancel{10})} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{-s}$$

con $s = j\omega$ $$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega\to 0} \frac{1}{-j\omega} \to j\infty$$

b) análisis de alta frecuencia

$$\lim_{s\to\infty} G(s)H(s) = \lim_{s\to\infty} 10\,\frac{s+1}{s^3+3s^2-10s} = \lim_{s\to\infty} 10\,\frac{\cancel{s}^{\,1}}{s^{\cancel{3}\,2}}$$

$s = j\omega$ $$\lim_{\omega\to\infty} \frac{10}{(j\omega)^2} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{10}{-\omega^2} \to -0.$$



c) cruce a ejes

$$G(j\omega)H(j\omega) = 10\,\frac{j\omega+1}{-j\omega^3-3\omega^2-j10\omega} = 10\,\frac{1+j\omega}{-3\omega^2-j(\omega^3+10\omega)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = 10\,\frac{(1+j\omega)\left[-3\omega^2+j(\omega^3+10\omega)\right]}{9\omega^4+(\omega^3+10\omega)^2}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = 10\,\frac{-3\omega^2+j\omega^3+j10\omega-j3\omega^3-\omega^4-10\omega^2}{9\omega^4+(\omega^3+10\omega)^2}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = 10\,\frac{-13\omega^2-\omega^4-j2\omega^3+j10\omega}{9\omega^4+(\omega^3+10\omega)^2}$$

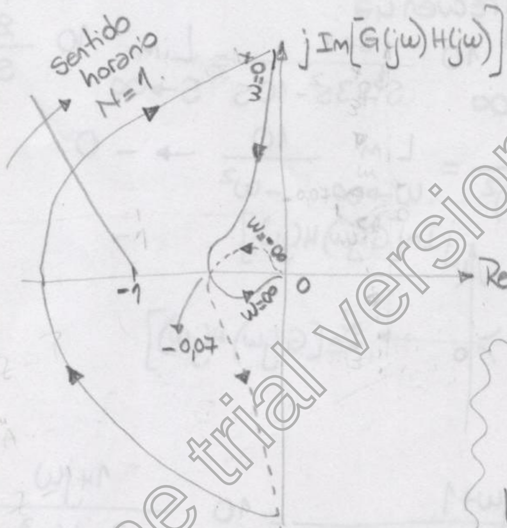
$$G(j\omega)H(j\omega) = 10 \; \frac{-\omega^2(\omega^2+13) - j\,2\omega(\omega^2-5)}{9\omega^4 + (\omega^3+10\omega)^2}$$

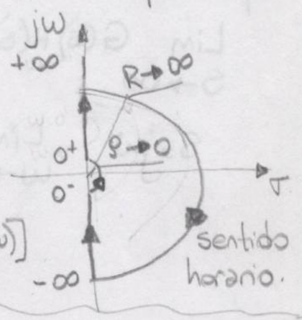
Para valores positivos de ω no se anula la parte real, por lo tanto no hay cortes al eje imaginario. La parte imaginaria si se anula por lo tanto hay cortes al eje real.

$$2\omega(\omega^2-5) = 0 \quad \therefore \quad \omega^2 = 5 \quad \omega = \sqrt{5} = 2{,}24 \; \frac{rad}{seg}$$

$$G(j\sqrt{5})H(j\sqrt{5}) = \frac{-5(5+13)}{225+1125} = \frac{-5(18)}{1350} = -6{,}67 \cdot 10^{-2} + j0$$

Contorno modificado:





Análisis de baja fcia:

$$s = \rho e^{j\theta}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{-\rho e^{j\theta}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho\, e^{j(\theta+\pi)}} \longrightarrow \infty \; e^{-j(\theta+\pi)}$$

$$N = Z - P = 1$$

"P" representa los polos de lazo abierto con parte real positiva.

$$G(s)H(s) = 10 \; \frac{s+1}{s(s-2)(s+5)}$$

Como se ve al factorear hay un polo de lazo abierto con parte real positiva, con lo cual $P = 1$

Soluciones 2do parcial 522 ②

o sea $N = Z - 1 = 1 \quad \therefore \quad Z = 2$

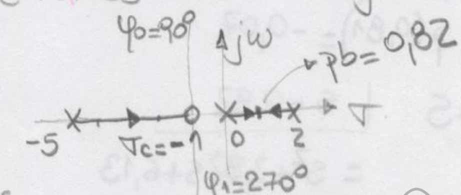
o sea que a lazo cerrado para $K = 10$ hay dos raices con parte real positiva y el sistema es inestable.

---

2) Veamos el diagrama del L.R de:

$$G(s)H(s) = K \frac{s+1}{s^3+3s^2-10s} = K \frac{s+1}{s(s-2)(s+5)}$$

a) Lugar de raices sobre el eje real:



b) Asintotas.

$$\sigma_c = \frac{\sum Re[p] - \sum Re[z]}{p-z} = \frac{2-5-(-1)}{3-1} = \frac{2-5+1}{2} = -1 = \sigma_c$$

$$\varphi_k = \frac{(2K+1)\,180°}{p-z} \quad \text{con} \quad K = 0, 1$$

$$\varphi_0 = \frac{(2.0+1)}{3-1} . 180° = 90°$$

$$\varphi_1 = \frac{(2.1+1)}{3-1} . 180° = 270°$$

c) Punto de bifurcación:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + K \frac{s+1}{s^3+3s^2-10s} = 0 \quad \therefore \quad K = -\frac{s^3+3s^2-10s}{s+1}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = -\frac{(3s^2+6s-10)(s+1) - (s^3+3s^2-10s)}{(s+1)^2} = 0 .$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = -\frac{3s^3 + \cancel{3s^2} + 6s^2 + 6s - \cancel{10s} - 10 - s^3 - \cancel{3s^2} + \cancel{10s}}{(s+1)^2} = 0$$

$$2s^3 + 6s^2 + 6s - 10 = 0$$

$$\therefore \quad s^3 + 3s^2 + 3s - 5 = 0.$$

$p(0) = -5 \quad p(2) = 21 \quad p(1) = 2 \quad p(0{,}6) = -1{,}9$

$p(0{,}8) = -0{,}17 \quad p(0{,}9) = 0{,}86 \quad p(0{,}84) = 0{,}23$

$\boxed{p(0{,}82) = 0{,}03} \quad p(0{,}81) = -0{,}07$

$$
\begin{array}{l|l}
s^3 + 3s^2 + 3s - 5 & s - 0{,}82 \\
-s^3 + 0{,}82s^2 & = s^2 + 3{,}82s + 6{,}13 \\
\hline
/ \quad 3{,}82s^2 + 3s & \quad \to s_{1-2} = -1{,}91 \pm j\,1{,}58 \\
-3{,}82s^2 + 3{,}13s & \\
\hline
/ \quad 6{,}13s - 5 & \therefore \boxed{pb = 0{,}82} \\
-6{,}13s + 5 & \\
\hline
\end{array}
$$

d) Criterio de Routh de la ecuación característica tenemos:

$$1 + K\frac{s+1}{s^3+3s^2-10s} = \frac{s^3+3s^2-10s+K(s+1)}{s^3+3s^2-10s} = 0.$$

$$s^3 + 3s^2 + (K-10)s + K = 0.$$

$$\frac{3K - 30 - K}{3} = \frac{2K-30}{3} = 0{,}67K - 10$$

$$
\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & K-10 \\
s^2 & 3 & K \\
s & 0{,}67K-10 & \\
s^0 & K &
\end{array}
$$

Cálculo K_c:

$0{,}67K_c - 10 = 0; \quad 0{,}67K_c = 10$

$K_c = 15$

con $K < K_c$ inestable con 2 raíces $Re[p]$

Soluciones 2do parcial 5R2 03/11/09

(3)

- con $K > K_C$ estable

Puntos de cruce eje $j\omega$:

$$3s^2 + 15 = 0$$ (reemplazando en fila "s^2" por K_C a K)

$$s^2 = -5 \; ; \quad s_{1-2} = \pm j\sqrt{5} = \pm j\,2{,}24$$

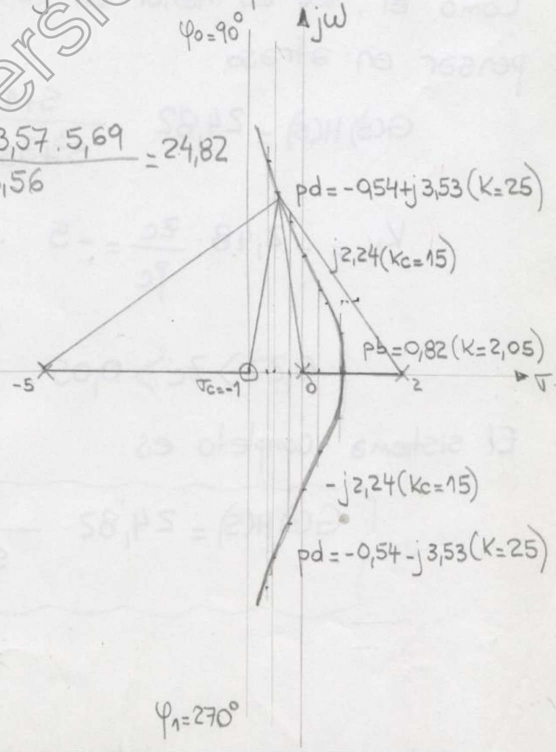
Dado que el sistema se ajustó para determinada condición dinámica, se asume que los puntos de diseño son efectivamente L.R, estos puntos son:

$$t_p = \frac{\pi}{w_d} = 0{,}89 \text{ seg} \; ; \quad w_d = \frac{\pi}{t_p} = 3{,}53 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\sigma} = 5{,}56 \text{ seg} \; ; \quad \sigma = \frac{3}{t_{s5\%}} = 0{,}54 \text{ seg}^{-1}$$

Por lo tanto el punto $-0{,}54 + j3{,}53$ es lugar de raiz.

$$K = \frac{|s-2|\,|s|\,|s+5|}{|s+1|} = \frac{4{,}35 \cdot 3{,}57 \cdot 5{,}69}{3{,}56} = 24{,}82$$



Puntos auxiliares para construcción L.R $s^3+3s^2+(K-10)s+K=0$.

$K=5$ $\quad s^3+3s^2-5s+5=0$ $\quad s_1=-4{,}4$ $\quad s_{2\text{-}3}=0{,}7\pm j0{,}82$

$K=10$ $\quad s^3+3s^2+10=0$ $\quad s_1=-3{,}72$ $\quad s_{2\text{-}3}=0{,}36\pm j1{,}6$

$K=20$ $\quad s^3+3s^2+10s+20=0$ $\quad s_1=-2{,}36$ $\quad s_{2\text{-}3}=-0{,}32\pm j2{,}9$

$K=30$ $\quad s^3+3s^2+20s+30=0$ $\quad s_1=-1{,}69$ $\quad s_{2\text{-}3}=-0{,}66\pm j4{,}17$

$K=25$ $\quad s^3+3s^2+15s+25=0$ $\quad s_1=-1{,}93$ $\quad s_{2\text{-}3}=-0{,}54\pm j3{,}56$ (punto de diseño)

Con el sistema ajustado en ganancia para el punto de diseño tenemos:

$$G(s)H(s)=24{,}82\,\frac{s+1}{s^3+3s^2-10s}$$

$$K_V=\lim_{s\to 0} G(s)H(s)=24{,}82\,\frac{1}{-10}=-2{,}48$$

Como el K_V es menor en valor absoluto a 5, debemos compensar en atraso.

$$G(s)H(s)=24{,}82\,\frac{s+1}{s^3+3s^2-10s}\cdot\frac{s+z_c}{s+p_c}$$

$$K_V=-2{,}48\,\frac{z_c}{p_c}=-5 \quad \therefore \quad \frac{z_c}{p_c}=\frac{5}{2{,}48}=2{,}02$$

$$0{,}27>z_c>0{,}05 \qquad z_c=0{,}2 \quad \therefore \quad p_c=\frac{0{,}2}{2{,}02}=0{,}1$$

El sistema completo es:

$$\boxed{G(s)H(s)=24{,}82\,\frac{s+1}{s^3+3s^2-10s}\,\frac{s+0{,}2}{s+0{,}1}}$$