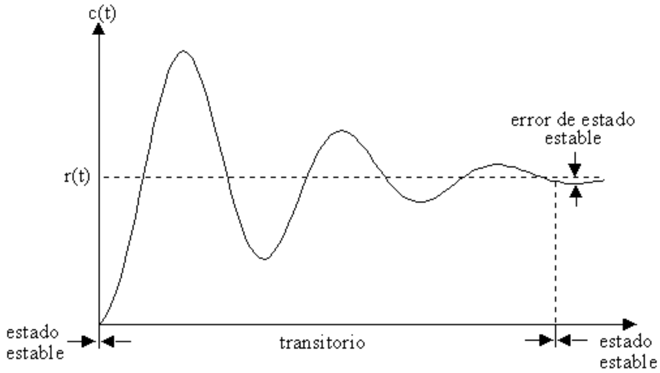
ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO

Error en Estado Estacionario



El error en estado estacionario es una medida de la exactitud de un sistema de control para seguir una entrada dada, después de desaparecer la respuesta transitoria.

Se analizará el error en estado estacionario provocado por la incapacidad del sistema de seguir determinados tipos de entradas.

El que un sistema dado presente o no un error en estado estacionario ante determinado tipo de señal de entrada, depende del *tipo* de función de transferencia de lazo abierto del sistema.

Clasificación de los sistemas de control

Los sistemas de control se clasifican de acuerdo con su capacidad de seguir entradas escalón, rampa, parábola, etc. Considere el sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto G(s):

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots(T_m s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots(T_p s + 1)}$$

Este sistema contiene el término s^N en el denominador, que representa un polo de multiplicidad N en el origen. El esquema de clasificación se basa en la cantidad de integraciones (términos $1/s$) indicadas por la función de transferencia en lazo abierto. Un sistema se denomina de tipo 0, si N = 0, de tipo 1, si N = 1, de tipo 2, si N = 2,…etc.

Ejemplo:

Sistema tipo 0	Sistema tipo 1	Sistema tipo 2
$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1}{s(s+1)}$	$\frac{1}{s^2(s+1)}$

Diga a que tipo de sistema corresponde cada función de transferencia.

$$G(s)H(s)=\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$ _________

$$G(s)H(s)=\frac{2}{(s+1)(s+3)}$$ _________

$$G(s)H(s)=\frac{2}{s^2+4s+16}$$ _________

$$G(s)H(s)=\frac{2}{s^2}$$ _________

$$G(s)H(s)=\frac{7(s+3)}{s^3+4s^2+16s}$$ _________

Error en estado estacionario

El error en un sistema de control es la diferencia entre el valor deseado r(t) y el valor actual c(t), de la variable controlada.
El error en estado estacionario es aquel error que permanece después de que ha desaparecido el transitorio.

1. $E(S)=R(S)-H(S)C(S)$
2. $C(S)=E(S)G(S)$

Sustituyendo 2 en 1

$$E(S)=R(S)-H(S)G(S)E(S)$$

$$E(S)+GH(S)E(S)=R(S)$$

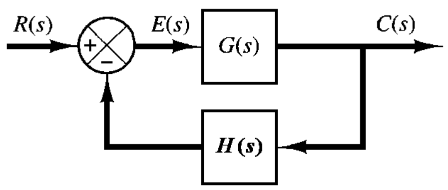
$$[1+GH(S)]E(S)=R(S)$$

$$E(S)=\frac{R(S)}{1+GH(S)}$$

Puede observarse de que el error depende:

- De la entrada: *R(S)*
- De las características del sistema de lazo abierto *GH(S)*

Para el siguiente sistema de control, la función de transferencia de lazo cerrado es



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad \frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)} \qquad E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

El error en estado estacionario es

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Error en estado estable para una entrada escalón de magnitud R_1 **,** $R(s) = R_1/s$

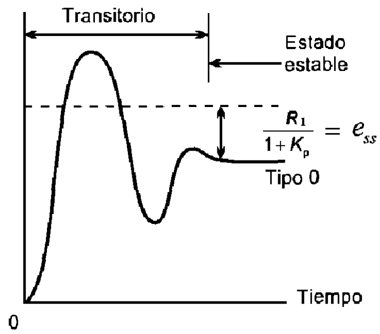
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)}\,\frac{R_1}{s} = \frac{R_1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)H(s)}$$

La constante estática de error de posición K_p **se define como**

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$$

$$e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p}$$

K_p sin unidades



Error en estado estable para una entrada rampa de magnitud R_2 **,** $R(s) = R_2/s^2$

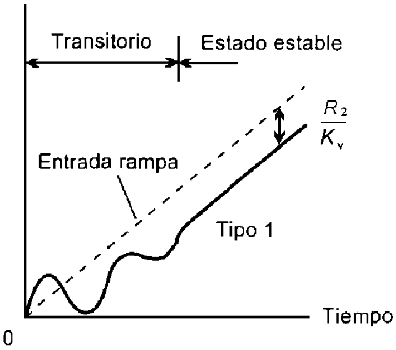
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)}\,\frac{R_2}{s^2} = \frac{R_2}{\lim_{s\to 0} sG(s)H(s)}$$

La constante estática de error de velocidad K_v **se define como**

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)$$

$$e_{ss} = \frac{R_2}{K_v}$$

$$K_v = \frac{1}{tiempo} = \frac{1}{seg} = seg^{-1}$$



Error en estado estable para una entrada parábola de magnitud R_3 **,** $R(s) = R_3/s^3$

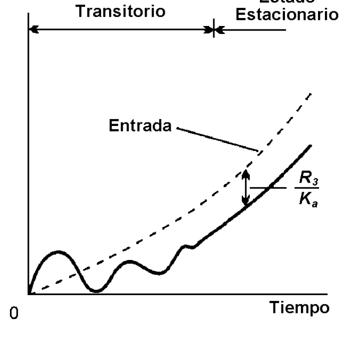
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)}\,\frac{R_3}{s^3} = \frac{R_3}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s)}$$

La constante estática de error de aceleración K_a ***se define como***

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s)$$

$$e_{ss} = \frac{R_3}{K_a}$$

$$K_a = \frac{1}{tiempo^2} = \frac{1}{seg^2} = seg^{-2}$$



Coeficiente estático de error de posición $K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s)$

Sistemas tipo 0 $K_p = \lim_{s \to 0} \left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = K$ (finito) $e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p} = \frac{R_1}{1+K}$

Sistemas tipo 1 $K_p = \lim_{s \to 0} \left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = \infty$ $e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p} = 0$

Sistemas tipo 2 $K_p = \lim_{s \to 0} \left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = \infty$ $e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p} = 0$

Coeficiente estático de error de velocidad $K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s)$

Sistemas tipo 0 $K_v = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = 0$ $e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = \infty$

Sistemas tipo 1 $K_v = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = K$ (finito) $e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = \frac{R_2}{K}$ (finito)

Sistemas tipo 2 $K_v = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = \infty$ $e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = 0$

Coeficiente estático de error de aceleración $K_a = \lim_{s \to 0} s^2G(s)H(s)$

Sistemas tipo 0 $K_a = \lim_{s \to 0} s^2\left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = 0$ $e_{ss} = \frac{R_3}{K_a} = \infty$

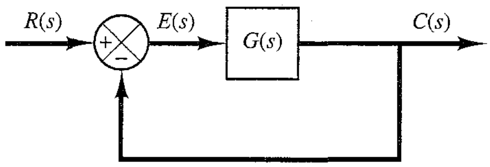
Sistemas tipo 1 $K_a = \lim_{s \to 0} s^2\left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = 0$ $e_{ss} = \frac{R_3}{K_a} = \infty$

Sistemas tipo 2 $K_a = \lim_{s \to 0} s^2\left[\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} \right] = K$ (finito) $e_{ss} = \frac{R_3}{K_a} = \frac{R_3}{K}$ (finito)

Tipo de sistema	**Coeficientes estáticos de error**			**Error de estado estable**		
	K_p	K_v	K_a	**Entrada escalón** $e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p}$	**Entrada Rampa** $e_{ss} = \frac{R_2}{K_v}$	**Entrada Parabólica** $e_{ss} = \frac{R_3}{K_a}$
0	Valor finito	0	0	Valor finito	∞	∞
1	∞	Valor finito	0	0	Valor finito	∞
2	∞	∞	Valor finito	0	0	Valor finito

Ejemplo

Determine el e_{ss} para una entrada escalón de magnitud 10, para el siguiente sistema de control



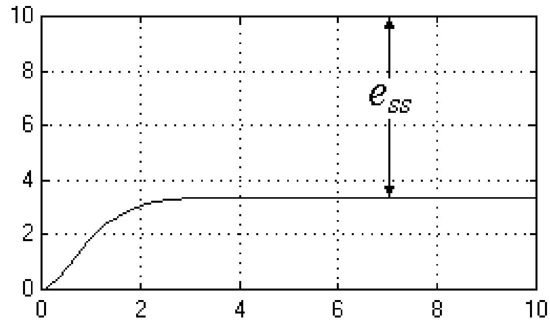
a)

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$ sistema tipo 0

$$R(s)=\frac{10}{s}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{2}=0.5$$

$$e_{ss}=\frac{R_1}{1+K_p}=\frac{10}{1+0.5}=6.667\Rightarrow 66.67\%$$



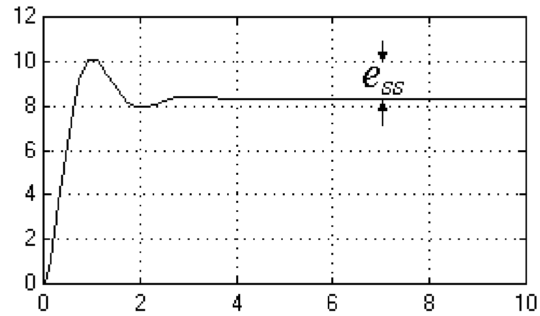
b) Si aumentamos la ganancia en un factor de 10, determinar el e_{ss}

$$G(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$ sistema tipo 0

$$R(s)=\frac{10}{s}$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{10}{(s+1)(s+2)}=\frac{10}{2}=5$$

$$e_{ss}=\frac{R_1}{1+K_p}=\frac{10}{1+5}=1.667\Rightarrow 16.67\%$$



c) Si ahora deseamos un $e_{ss}=5\%$, esto es para una entrada de magnitud 10 el $e_{ss}=0.5$, determinar la ganancia K necesaria para obtenerlo.

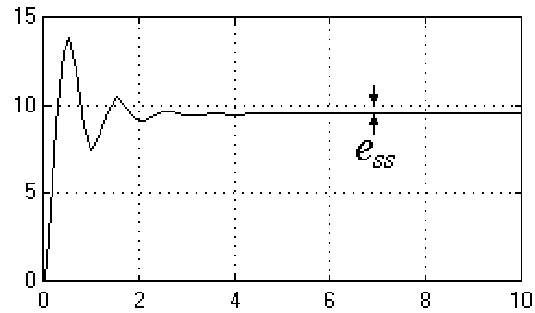
$$G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)}$$ sistema tipo 0

$$R(s)=\frac{10}{s}$$

$$e_{ss}=\frac{R_1}{1+K_p}=0.05R_1 \qquad K_p=\frac{1}{.05}-1=19$$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{(s+1)(s+2)}=\frac{K}{2}$$

$$K_p=\frac{K}{2}=19 \qquad K=38$$



El transitorio para las funciones anteriores

a) $G(s)H(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}} = \frac{1}{s^2+3s+3}$$

$2\zeta\omega_n = 3$ $\qquad \zeta = 0.804$

$\omega_n^{\,2} = 3$ $\qquad M_P = 1.43\%$

$G = \dfrac{1}{3} = 0.333$

b) $G(s)H(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{10}{(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{10}{(s+1)(s+2)}} = \frac{10}{s^2+3s+12}$$

$2\zeta\omega_n = 3$ $\qquad \zeta = 0.433$

$\omega_n^{\,2} = 12$ $\qquad M_P = 22.11\%$

$G = \dfrac{10}{12} = 0.833$

c) $G(s)H(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{38}{(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{38}{(s+1)(s+2)}} = \frac{38}{s^2+3s+40}$$

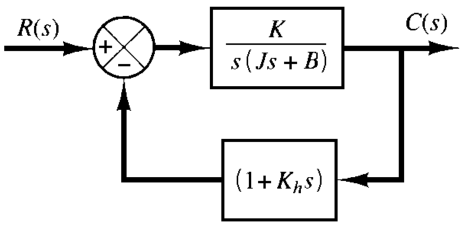
$2\zeta\omega_n = 3$ $\qquad \zeta = 0.237$

$\omega_n^{\,2} = 40$ $\qquad M_P = 46.47\%$

$G = \dfrac{38}{40} = 0.95$

Ejemplo 2

Para el sistema de la figura, determine los valores de la ganancia K y la constante de realimentación de velocidad K_h para que el sobrepaso máximo en la respuesta al escalón unitario sea 0.2 y el error en estado estable sea del 2%. Con estos valores de K y K_h, obtenga el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento. Suponga que $J = 1\ Kg - m$ y que $B = 1\ N - m / rad / seg$.



Función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \left(\frac{B + KK_h}{J}\right)s + \frac{K}{J}}$$

Estado estable

Función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(1 + K_h s)}{s(Js + B)}$$ Sistema tipo 1

Como el sistema es del tipo 1 existe un error de estado estable finito para entrada rampa $R(s) = \frac{R_2}{s^2}$

Para un error de estado estable del 2% se necesita una K_v de

$$e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = 0.02R_2 \qquad K_v = \frac{1}{.02} = 50$$

Para que el sistema cumpla con el $e_{ss} = 2\%$ necesita una ganancia de

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)H(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{K(1 + K_h s)}{s(s + 1)} = K \qquad K = 50$$

Como se observa, el error en estado estable solo es afectado por la ganancia *K* del sistema.

Transitorio

Para calcular K_h se toma la función de transferencia de lazo cerrado

Comparándola con la forma general del sistema de segundo orden, nos queda

$$2\zeta\omega_n = \frac{B + KK_h}{J} \quad y \quad \omega_n^2 = \frac{K}{J}$$ la ganancia del sistema es $G = 1$

$$c(\infty) = \lim_{s \to 0} c(s) = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K}\ \frac{1}{s} = 1$$

Como el sistema se estabiliza en la unidad y el máximo sobrepaso es 0.2 esto corresponde al $(M_p\% = 20\%)$

$$M_p\% = 100e^{\left(-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}\right)} = 20\% \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{\left[\ln\left(\frac{M_p\%}{100}\right)\right]^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{[\ln(0.2)]^2} + 1}} = 0.456$$

como $\omega_n^2 = \dfrac{K}{J}$ entonces

$$\omega_n = \sqrt{K} = \sqrt{50} = 7.071$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 7.071\sqrt{1-(.456)^2} = 6.293$$

como $2\zeta\omega_n = \dfrac{B+KK_h}{J}$

$$K_h = \frac{2\zeta\omega_n J - B}{K} = \frac{2(0.456)(7.071)(1)-(1)}{50} = 0.109$$

El tiempo de levantamiento t_r

$\beta = \cos^{-1}(\zeta) = \cos^{-1}(0.456)$

$= 1.097\ rad$

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = \frac{\pi - 1.097}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.325\ seg$$

Tiempo de asentamiento t_s

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0.456)(7.071)} = 1.24\ seg$$

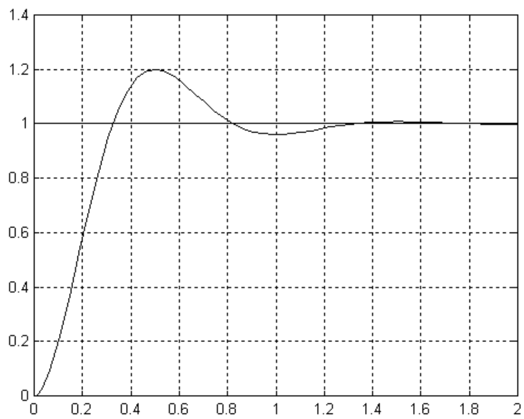
Tiempo de pico t_p

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.5\ seg$$

Gráfica de respuesta $c(t)$

El número de picos sería $N_{picos} = \dfrac{t_s}{t_p} = \dfrac{1.24}{0.5} = 2.48 \approx 2$

$$c(\infty) = GR_1 = 1$$

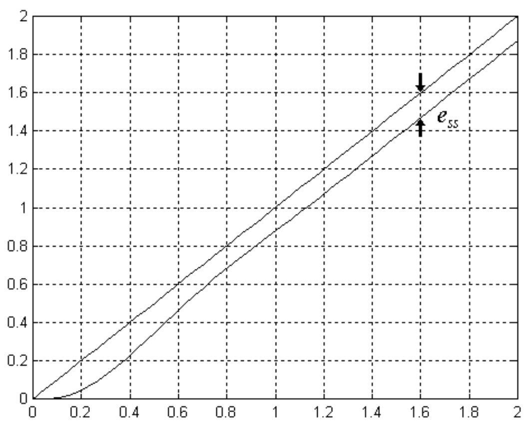


Respuesta del sistema para una entrada escalón unitario.

Los valores de la respuesta $c(t)$ son

$$c(t_p) = c(1) = \left(1 + e^{-\zeta\omega_n(t_p)}\right)c(\infty) = \left(1+e^{-1.612}\right)(1) = 1.2$$

$$c(2t_p) = c(2) = \left(1 - e^{-\zeta\omega_n(2t_p)}\right)c(\infty) = \left(1-e^{-3.224}\right)(1) = 0.96$$



Respuesta del sistema para una entrada rampa unitaria.

Sistemas tipo 0

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = K \quad (finito)$ $\qquad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = 0$ $\qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s) = 0$

$e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p} = \frac{R_1}{1+K} \quad (finito)$ $\qquad e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = \infty$ $\qquad e_{ss} = \frac{R_3}{K_a} = \infty$

Sistemas tipo 1

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \infty$ $\qquad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = K \quad (finito)$ $\qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s) = 0$

$e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p} = 0$ $\qquad e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = \frac{R_2}{K} \quad (finito)$ $\qquad e_{ss} = \frac{R_3}{K_a} = \infty$

Sistemas tipo 2

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \infty$ $\qquad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \infty$ $\qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s) = K \ (finito)$

$e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p} = 0$ $\qquad e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = 0$ $\qquad e_{ss} = \frac{R_3}{K_a} = \frac{R_3}{K} \quad (finito)$

Tipo de sistema	K_p	K_v	K_a	**Error de estado estable**		
				Entrada escalón $e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p}$	**Entrada Rampa** $e_{ss} = \frac{R_2}{K_v}$	**Entrada Parabólica** $e_{ss} = \frac{R_3}{K_a}$
0	Valor finito	0	0	Valor finito	∞	∞
1	∞	Valor finito	0	0	Valor finito	∞
2	∞	∞	Valor finito	0	0	Valor finito

Tipo de sistema	K_p	e_{ss}
0	*finito*	$\frac{R_1}{1+K_p}$
1	∞	0
2	∞	0

Tipo de sistema	K_v	e_{ss}
0	0	∞
1	*finito*	$\frac{R_2}{K_v}$
2	∞	0

Tipo de sistema	K_a	e_{ss}
0	0	∞
1	0	∞
2	*finito*	$\frac{R_3}{K_a}$