ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P. 1-1: Aplicación Transf. Laplace. Convolución.

Ejercicio 1.

Resolver la siguiente ecuación diferencial y una vez obtenida la soluc[ión] demostrar la validez de la igualdad.

$$y'(t) + 2\,y(t) = 0 \qquad C.I.:\ y(0) = 3$$

Aplico Transformada de Laplace (tabla) a la ecuación diferencial

$$s\,Y(s) - y(0) + 2.Y(s) = 0$$

$$Y(s)\,(s+2) - y(0) = 0$$

$$Y(s) = \frac{y(0)}{(s+2)} = \frac{3}{(s+2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\text{ (por tabla)}} y(t) = 3.e^{-2t}\,\mu(t)$$

$\hookrightarrow y(0) = 3.\cancel{e^{-2.0}}_{1} = 3$ se verifica la C.I.

Derivo a $y(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = -6.e^{-2t}$$

Reemplazo $y(t)$, $y'(t)$ hallados en la ecuación diferencial, y evalúo p/ $t=0$:

$$-6e^{-2t} + 2\left(3.e^{-2t}\right) = 0$$

$$-6\cancel{e^{-2.0}}_{1} + 2\left(3.\cancel{e^{-2.0}}_{1}\right) = 0$$

$$-6 + 2.3 = 0$$

$$0 = 0 \longrightarrow \text{se cumple la igualdad}$$

Ejercicio 2.

Resolver la siguiente ecuación diferencial, considerando una entrada constante $x(t) = 8$, con C.I. nulas. Hallar los valores inicial y final de la expresión temporal, valuando la función para $t=0$ y $t=\infty$.

$$y''(t) + 3.y'(t) + 2.y(t) = x(t)$$

Por Transf. de Laplace:

$$s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 3s\,Y(s) - 3y(0) + 2\,Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)\left(s^2+3s+2\right) - \left(s\,y(0) + 3\,y(0) + y'(0)\right) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2+3s+2} + \cancel{\frac{s\,y(0) + 3\,y(0) + y'(0)}{s^2+3s+2}} \to 0, \text{ por ser C.I. nulas}$$

Como $x(t) = 8 \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{8}{s}$, reemplazo en $Y(s)$.

$$Y(s) = \frac{8}{s\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{8}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

NOTA

Aplicamos fracciones simples.

$$Y(s)=\frac{8}{s(s+1)(s+2)}=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s+2}$$

$$A_0=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\,\frac{8}{\cancel{s}(s+1)(s+2)}=4$$

$$A_1=\lim_{s\to -1}\cancel{(s+1)}\,\frac{8}{s\cancel{(s+1)}(s+2)}=-8$$

$$A_2=\lim_{s\to -2}\cancel{(s+2)}\,\frac{8}{s(s+1)\cancel{(s+2)}}=4$$

Por lo tanto:

$$Y(s)=\frac{4}{s}+\frac{-8}{s+1}+\frac{4}{s+2}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}Y(t)=4-8e^{-t}+4e^{-2t}$$

Evaluando a $y(t)$:

$$p/t=0\rightarrow y(0)=4-8e^{-0}+4e^{-2\cdot 0}=0$$

$$p/t=\infty\rightarrow y(\infty)=4-8e^{-\infty}+4e^{-\infty}=4$$

Comprobando por:

$$TVI:\quad y(0)=\lim_{s\to\infty}s\cdot Y(s)=\lim_{s\to\infty}\cancel{s}\cdot\frac{8}{\cancel{s}(s^2+3s+2)}=0$$

$$TVF:\quad y(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot Y(s)=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\,\frac{8}{\cancel{s}(s^2+3s+2)}=4$$

Se comprueban los resultados.

¡Para tener presente!
Una limitación del TVF, cuando se la aplica a una función senoidal pura (seno o coseno), el valor final resulta cero. Pero, físicamente, lo que está dando es el valor medio igual a cero, ya que una senoidal oscila entre 1 y -1.

Ejercicio 3.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales aplicando Transformada de Laplace.

$$\begin{cases}x'(t)=2x(t)-3y(t)\\ y'(t)=-2x(t)+y(t)\end{cases}\qquad C.I.:\begin{cases}x(0)=8\\ y(0)=3\end{cases}$$

Transformando:

$$\begin{cases}sX(s)-x(0)=2X(s)-3Y(s)\\ sY(s)-y(0)=-2X(s)+Y(s)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X(s)(s-2)+3Y(s)=x(0)\\ X(s)\cdot 2+Y(s)(s-1)=y(0)\end{cases}\qquad\begin{cases}X(s)\cdot(s-2)+Y(s)\cdot 3=8\\ X(s)\cdot 2+Y(s)(s-1)=3\end{cases}$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

Resolviendo por determinantes (Cramer):

$$\Delta p = \begin{vmatrix} (s-2) & 3 \\ 2 & (s-1) \end{vmatrix} = (s-2)(s-1) - 2.3 = s^2 - 3s - 4$$

$$\Delta sx = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & (s-1) \end{vmatrix} = 8.(s-1) - 3.3 = 8s - 17$$

$$\Delta sy = \begin{vmatrix} (s-2) & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (s-2)3 - 8.2 = 3s - 22$$

$$X(s) = \frac{\Delta sx}{\Delta p} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s-4)(s+1)}$$

Por fracciones simples:

$$X(s) = \frac{8s-17}{(s-4)(s+1)} = \frac{A_0}{(s-4)} + \frac{A_1}{(s+1)}$$

$$A_0 = \lim_{s \to 4} \cancel{(s-4)} \frac{8s-17}{\cancel{(s-4)}(s+1)} = 3$$

$$A_1 = \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)} \frac{8s-17}{(s-4)\cancel{(s+1)}} = 5$$

$$X(s) = \frac{3}{(s-4)} + \frac{5}{(s+1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = 3.e^{4t} + 5.e^{-t}$$

$$Y(s) = \frac{\Delta sy}{\Delta p} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{(s-4)(s+1)}$$

Por fracciones simples,

$$Y(s) = \frac{3s-22}{(s-4)(s+1)} = \frac{A_0}{(s-4)} + \frac{A_1}{(s+1)}$$

$$A_0 = \lim_{s \to 4} \cancel{(s-4)} \frac{3s-22}{\cancel{(s-4)}(s+1)} = -2$$

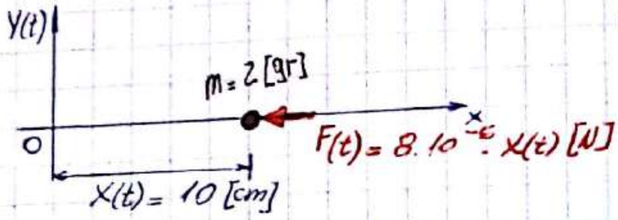
$$A_1 = \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)} \frac{3s-22}{(s-4)\cancel{(s+1)}} = 5$$

$$Y(s) = \frac{-2}{(s-4)} + \frac{5}{(s+1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = -2.e^{4t} + 5e^{-t}$$

Ejercicio 4.

Dada una partícula de masa igual a 2 gramos que se desplaza en el eje x, determinar posición, velocidad y aceleración para todo t, si se encuentra sometida una fuerza F(t) dirigida al origen en todo instante. Al inicio la partícula está en reposo en $x(t) = 10$ [cm].
Hallados las funciones temporales solicitadas, determinar si es posible encontrar la posición de la partícula para $t \to \infty$.

$$F(t) = 8.10^{-5}\, x(t)\ [N]$$



La ecuación diferencial que rige el fenómeno de este sistema, es la 2° Ley de Newton: (F = m.a)

$F(t)$ va con signo "−" por estar dirigida al origen

$$\Sigma F(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$$

$$-8.10^{-5}\, x(t)[N] = 2.10^{-3}[kg] \cdot \ddot{x}(t)$$

Las C.I. de $\ddot{x}(t)$, son la velocidad y la posición, siendo nula la primera y 10[cm] la segunda.

Transformando:

$$-8.10^{-5} \cdot X(s) = 2.10^{-3} \cdot \left(s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)\right)$$

$$-40.10^{-3} \cdot X(s) = s^2 X(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)$$

$$X(s)\left(s^2 + 40.10^{-3}\right) = s\,x(0) - \dot{x}(0)$$

$x(0) \to$ posición inicial

$\dot{x}(0) = \dfrac{dx(t)}{dt} \to$ velocidad inicial

$$X(s) = \frac{s \cdot x(0) - \dot{x}(0)}{(s^2 + 40.10^{-3})} = \frac{0{,}1 \cdot s}{s^2 + 40.10^{-3}}$$

$X(s)$ tiene la forma de: $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + w^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \cos(wt)$

$$w^2 = 40.10^{-3} \quad \therefore \quad w = 0{,}2\ [rps]$$

Entonces:

$$x(t) = 0{,}1 \cdot \cos(0{,}2 \cdot t) \to \text{posición}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -0{,}02 \cdot \operatorname{sen}(0{,}2 \cdot t) \to \text{velocidad}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) = -0{,}004 \cdot \cos(0{,}2 \cdot t) \to \text{aceleración}$$

NO es posible hallar la posición de la partícula p/$t \to \infty$, ya que se trata de un límite oscilatorio comprendido entre $-10cm \leq x \leq 10cm$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Ejercicio 5: Un sistema mecánico traslacional tiene por ecuación diferencial la expresión siguiente:

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + f\cdot\dot{x}(t) + K\,x(t)$$

Se aplica para $t=0^+$ una fuerza constante de $F(t) = 4\,[N]$ dirigido en la dirección positiva del desplazamiento; hallar la expresión del desplazamiento $x(t)$ suponiendo que el sistema estaba en reposo para $t=0^-$.

$m = 1\,[Kg]$; $f = 0{,}2\left[\frac{N\cdot seg}{m}\right]$; $K = 2\left[\frac{N}{m}\right]$ C.I: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$

Transformando a $F(t)$:

$$F(s) = m\left(s^2 X(s) - s\cancel{x(0)} - \cancel{\dot{x}(0)}\right) + f\left(s X(s) - \cancel{x(0)}\right) + K\cdot X(s)$$

como $F(t) = 4$ → $F(s) = \frac{4}{s}$

$$F(s) = m s^2 X(s) + f s X(s) + K X(s)$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{m s^2 + f s + K} = \frac{4}{s\,(s^2 + 0{,}2s + 2)}$$

$s^2 + 0{,}2s + 2 = 0 \left\{ s_{1,2} = -0{,}1 \pm j\frac{\sqrt{199}}{10} \right.$ → $\pm 1{,}41067359$

$$X(s) = \frac{4}{s(s+0{,}1-j1{,}4107)(s+0{,}1+j1{,}4107)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0{,}1-j1{,}4107)} + \frac{B^*}{(s+0{,}1+j1{,}4107)}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{4}{\cancel{s}(s^2+0{,}2s+2)} = 2$$

$$B = \lim_{s\to -0{,}1+j1{,}4107} \cancel{(s+0{,}1-j1{,}4107)}\,\frac{4}{s\cancel{(s+0{,}1-j1{,}4107)}(s+0{,}1+j1{,}4107)} = -0{,}999 + j0{,}0709$$

$$B^* = -0{,}999 - j0{,}0709$$

B y B^* resulta $\approx (-1 \pm j0{,}071)$

$$X(s) = \frac{2}{s} + \underbrace{\frac{-1+j0{,}071}{(s+0{,}1-j1{,}4107)} + \frac{-1-j0{,}071}{(s+0{,}1+j1{,}4107)}}_{①} \quad (*)$$

Debemos operar a ① de tal manera de eliminar el complejo y llevarlo a una forma de seno/coseno amortiguado.

$$\frac{-1+j0{,}071}{(s+0{,}1-j1{,}4107)} + \frac{-1-j0{,}071}{(s+0{,}1+j1{,}4107)} = \frac{(-1+j0{,}071)(s+0{,}1+j1{,}4107) + (-1-j0{,}071)(s+0{,}1-j1{,}4107)}{(s+0{,}1-j1{,}4107)(s+0{,}1+j1{,}4107)}$$

$$= \frac{-s - 0{,}1 - j1{,}4107 + j0{,}071s + j^2 7{,}1\cdot 10^{-3}\cdot - 0{,}1 - s - 0{,}1 + j1{,}4107 - j0{,}071s - j^2 7{,}1\cdot 10^{-3} - 0{,}1}{(s^2 + 0{,}2s + 2)} =$$

NOTA

$$= \frac{-2(s+0,2)}{s^2+0,2s+2}$$

al 0,2 lo expreso como:
$0,2 = 0,1 + 0,1$
de esa forma, lo llevo a la forma que necesito por tabla de $\mathcal{L}^{-1}$

se completa cuadrados en el denominador:

$$= -2\left\{\frac{s+0,2}{(s^2+0,2s+2)+\left(\frac{0,2}{2}\right)^2-\left(\frac{0,2}{2}\right)^2}\right\} = -2\left\{\frac{s+0,2}{(s^2+0,2s+0,01)+2-0,01}\right\} =$$

$$= -2\left\{\frac{s+0,2}{(s+0,1)^2+1,99}\right\} = -2\left\{\frac{s+0,1+0,1}{(s+0,1)^2+2}\right\} =$$

$$= -2\left\{\frac{(s+0,1)}{(s+0,1)^2+2} + \frac{0,1}{(s+0,1)^2+2}\cdot\frac{1,41}{1,41}\right\}$$

$$\text{I}\quad \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega t)$$

$$\text{II}\quad \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-\alpha t}\, sen(\omega t)$$

$$\omega^2 = 2 \therefore \omega = \sqrt{2} \simeq 1,41$$

Por lo tanto:

$$X(s) = \frac{2}{s} - 2\left\{\overbrace{\frac{s+0,1}{(s+0,1)^2+2}}^{\text{I}} + 0,071\cdot\overbrace{\frac{1,41}{(s+0,1)^2+2}}^{\text{II}}\right\}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

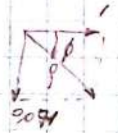
$$X(t) = 2 - 2\,e^{-0,1t}\left\{\cos(1,41.t) + 0,071.\,sen(1,41.t)\right\}$$

Llevo todo el {} a una sola expresión de seno o coseno:

$$\cos(1,41.t) + 0,071.\,sen(1,41.t) \Rightarrow \cos(1,41.t) + 0,071.\cos\left(1,41t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Ahora, todo a un sólo coseno; usando fasores:

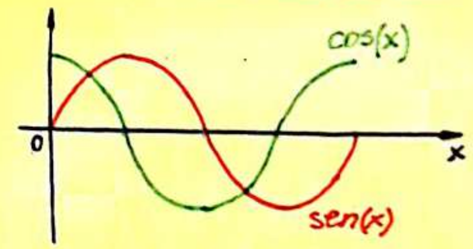
$$1\angle 0° + 0,071\angle -\tfrac{\pi}{2} = \rho\angle\phi$$



$$\rho = \sqrt{1^2+0,071^2} = 1,00252 \simeq 1$$

$$\phi = \operatorname{artg}\frac{-0,071}{1} = -4,06° = -0,071\ rad$$

Relación entre Seno y Coseno



$$\overset{\text{hacia}}{sen(x)} = \cos\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \underset{\text{hacia}}{sen}\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

Por lo tanto:

$$X(t) = 2 - 2\,e^{-0,1t}\left\{1\cdot\cos(1,41t - 4,06°)\right\}$$

$$X(t) = 2 - 2\,e^{-0,1t}\cdot\cos(1,41.t - 4,06°)$$

Otra forma de resolver a X(s) desde el punto (*) es:

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{-1+j0,071}{(s+0,1-j\sqrt{2})} + \frac{-1-j0,071}{(s+0,1+j\sqrt{2})}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$X(t) = 2 + (-1+j0,071).\,e^{-(0,1-j\sqrt{2})t} + (-1-j0,071)\,e^{-(0,1+j\sqrt{2})t}$$

$$X(t) = 2 - e^{-0,1t}\left\{e^{j\sqrt{2}t} + e^{-j\sqrt{2}t} - j0,071\left(e^{j\sqrt{2}t} - e^{-j\sqrt{2}t}\right)\right\}$$

Aplicando Euler.

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

$$x(t) = 2 - e^{-j0,1t}\left\{2\cos(\sqrt{2}t) - j\,0,071 \cdot j^2\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)\right\}$$

$$x(t) = 2 - 2e^{-j0,1t}\left\{\cos(\sqrt{2}t) + 0,071 \cdot \mathrm{sen}(\sqrt{2}t)\right\}$$

$$x(t) = 2 - 2e^{-j0,1t}\left\{\cos(\sqrt{2}t) + 0,071 \cdot \cos\left(\sqrt{2}t - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$ fasor

$$x(t) = 2 - 2e^{-j0,1t} \cdot \cos(\sqrt{2}t - 4,06^\circ)$$

Obteniendo igual resultado de $x(t)$

Identidad de Euler:

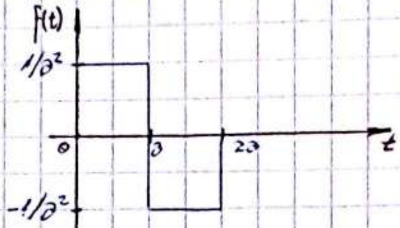
$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = j2\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Ejercicio 6. Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)$ de la figura. Obtenida la respuesta, determinar $F(s)$ cuando $a \to 0$.



Cuando $a \to 0$:

Primero, expresamos a $f(t)$ mediante funciones elementales:

$$f(t) = \frac{1}{a^2}\mu(t) - \frac{2}{a^2}\mu(t-a) + \frac{1}{a^2}\mu(t-2a) = \frac{1}{a^2}\left\{\mu(t) - 2\mu(t-a) + \mu(t-2a)\right\}$$

Transformando:

$$F(s) = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{s} - 2\frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s}\right\} = \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{a^2 \cdot s}$$

Obtenida la $F(s)$, determino el límite de $F(s)$ p/ $a \to 0$:

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \lim_{a \to 0}\frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{a^2 \cdot s} = \frac{1 - 2\overset{1}{\cancel{e^{-0}}} + \overset{1}{\cancel{e^{-0}}}}{0 \cdot s} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminado}$$

Para levantar la indeterminación, aplicamos L'hospital:

$$\lim_{a\to 0}\frac{\frac{d}{da}(1 - 2e^{-as} + e^{-2as})}{\frac{d}{da}(a^2 \cdot s)} = \lim_{a\to 0}\frac{0 + 2se^{-as} - 2se^{-2as}}{2as} = \frac{0 + 2s\overset{1}{\cancel{e^{-0}}} - 2s\overset{1}{\cancel{e^{-0}}}}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminado}$$

Volvemos a aplicar L'hospital:

$$\lim_{a\to 0}\frac{\frac{d}{da}(2se^{-as} - 2se^{-2as})}{\frac{d}{da}(2as)} = \lim_{a\to 0}\frac{-2s^2e^{-as} + 4s^2e^{-2as}}{2s} = \frac{-2s^2\overset{1}{\cancel{e^{-0}}} + 4s^2\overset{1}{\cancel{e^{-0}}}}{2s} = \frac{\cancel{2}s^{\cancel{2}}}{\cancel{2s}} = s$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = s$$

NOTA

Ejercicio 7. Conocidas las transformadas de Laplace de $R(s)$ y $G(s)$ determinar $y(t)$ utilizando la antitransformada de Laplace con los siguientes datos:

① $R(s) = \frac{1}{s^2}$, $G(s) = \frac{10}{s+1}$, $Y(s) = R(s) \cdot G(s)$

Luego y previo obtener a $r(t)$ y $g(t)$, obtener a $y(t)$ como la integral ó producto de convolución:

② $$y(t) = r(t) * g(t) = \int_0^t r(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$

Verificar los resultados recordando que:

$$\mathcal{L}\{r(t) * g(t)\} = R(s) \cdot G(s)$$

① $$Y(s) = R(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{10}{(s+1)} = \frac{10}{s^2(s+1)}$$

Por fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{10}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+1)}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \frac{10}{\cancel{s^2}(s+1)} = 10$$

$$B = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \left\{ \cancel{s^2} \frac{10}{\cancel{s^2}(s+1)} \right\} = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{10}{s+1} \right) = \lim_{s \to 0} \frac{-10}{(s+1)^2} = -10$$

$$C = \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)} \frac{10}{s^2 \cancel{(s+1)}} = 10$$

Entónces:

$$Y(s) = \frac{10}{s^2} + \frac{-10}{s} + \frac{10}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 10t - 10 + 10e^{-t}$$

②

De ① antitransformo, tal que: $r(t) = t$, $g(t) =$

Recordar que:

$$\int x \cdot e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)$$

$$y(t) = r(t) * g(t) = \int_0^t \tau \cdot 10 e^{-(t-\tau)} d\tau = 10 \cdot e^{-t} \int_0^t \tau \cdot e^{\tau} d\tau =$$

$$y(t) = 10 \cdot e^{-t} \cdot e^{\tau}(\tau - 1)\Big|_0^t = 10 \cdot e^{-t} \cdot \left\{ e^t(t-1) - \cancel{e^0}(0-1) \right\} = 10 \cdot e^{-t} \cdot \left\{ te^t - e^t + 1 \right\}$$

$$y(t) = 10t - 10 + 10e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{10}{s^2} - \frac{10}{s} + \frac{10}{s+1}$$

Ejercicio 7. Conocidas las transformadas de Laplace de $R(s)$ y $G(s)$ determinar $y(t)$ utilizando la antitransformada de Laplace con los siguientes datos:

① $R(s) = \frac{1}{s^2}$, $G(s) = \frac{10}{s+1}$, $Y(s) = R(s) \cdot G(s)$

Luego y previo obtener a $r(t)$ y $g(t)$, obtener a $y(t)$ como la integral ó producto de convolución: $y(t) = r(t) * g(t) = \int_0^t r(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$

②

Verificar los resultados recordando que:

$$\mathcal{L}\{r(t) * g(t)\} = R(s) \cdot G(s)$$

① $Y(s) = R(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{10}{(s+1)} = \frac{10}{s^2(s+1)}$

Por fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{10}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+1)}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \frac{10}{\cancel{s^2}(s+1)} = 10$$

$$B = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \left\{ \cancel{s^2} \frac{10}{\cancel{s^2}(s+1)} \right\} = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{10}{s+1} \right) = \lim_{s \to 0} \frac{-10}{(s+1)^2} = -10$$

$$C = \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)} \frac{10}{s^2 \cancel{(s+1)}} = 10$$

Entónces:

$$Y(s) = \frac{10}{s^2} + \frac{-10}{s} + \frac{10}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 10t - 10 + 10e^{-t}$$

②

De ① antitransformo, tal que:

$r(t) = t$, $g(t) = 10e^{-t}$, $y(t) = r(t) * g(t)$

$$y(t) = r(t) * g(t) = \int_0^t \tau \cdot 10 e^{-(t-\tau)} d\tau = 10 \cdot e^{-t} \int_0^t \tau \cdot e^{\tau} d\tau =$$

$$y(t) = 10 \cdot e^{-t} \cdot e^{\tau}(\tau - 1) \Big|_0^t = 10 \cdot e^{-t} \cdot \left\{ e^{t}(t-1) - \cancel{e^0}(0-1) \right\} = 10 \cdot e^{-t} \cdot \left\{ t e^{t} - e^{t} + 1 \right\}$$

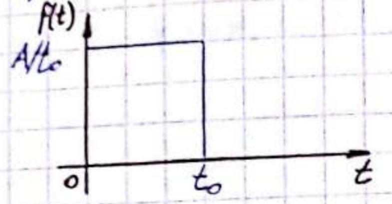
$$y(t) = 10t - 10 + 10e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{10}{s^2} - \frac{10}{s} + \frac{10}{s+1}$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

TP 1-2: Función de Transferencia

HOJA N
FECHA

Ejercicio 1. Determinar la transformada de Laplace de la función pulso de la figura. Luego, conocida la transformada, determinar la misma para el caso en que $t_0 \to 0$; es decir determinar la T. de Laplace de un impulso. Finalmente definir la función impulso unitario ó Delta Dirac en el tiempo y su respectiva transformada.



Primero definimos a $f(t)$ mediante funciones elementales:

$$f(t) = \frac{A}{t_0}\,\mu(t) - \frac{A}{t_0}\,\mu(t-t_0)$$

Transformando por Laplace:

$$F(s) = \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{s} - \frac{A}{t_0}\,\frac{1}{s}\cdot e^{-t_0 \cdot s} = \frac{A}{t_0 . s}\left(1-e^{-t_0 . s}\right)$$

Hasta aquí tenemos la transformada del pulso en dominio de S. Aplicando el límite $t_0 \to 0$ se obtiene un impulso:

$$\lim_{t_0\to 0} F(s) = \lim_{t_0\to 0} \frac{A}{\underbrace{t_0 . s}_{0}}\underbrace{\left(1-e^{-t_0 . s}\right)}_{=0} = \frac{0}{0} \longrightarrow \text{Indeterminado}$$

Aplicamos L'hospital para levantar la indeterminación:

$$\lim_{t_0\to 0} \frac{d/dt_0\left(A(1-e^{-t_0 s})\right)}{d/dt_0\,(t_0 . s)} = \lim_{t_0\to 0} \frac{0 + A\cancel{s}\,\cancel{e^{-t_0 s}}}{\cancel{s}} = A$$

Cuando $t_0 \to 0$, la transformada se convierte en el área bajo el pulso, ya que:

$$\text{área} = b.h = t_0 . \frac{A}{t_0} = A$$

$\delta(t)$ ó $\delta(t-t_0)$ — impulso unitario o Delta Dirac

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & p/\, t \neq t_0 \\ \delta(t-t_0) = \infty & p/\, t = t_0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$$ que es el área bajo la curva.

Ejercicio 2. Dado el siguiente sistema mecánico de rotación:

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + K\theta(t)$$

Determinar la función de transferencia $\theta(s)/T(s)$ y evaluarla sabiendo que

$J = 20\ [Kgm^2]$ momento de inercia

$B = 1 \left[\frac{N m seg}{rad}\right]$ coeficiente de fricción viscosa rotacional

$K = 5 \left[\frac{N.m}{rad}\right]$ constante elástica rotacional

Transformamos la ecuación diferencial al dominio S:

$$T(s) = J\left[s^2\theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0)\right] + Bs\,\theta(s) - \theta(0) + K\,\theta(s)$$

Dado que la función de transferencia se define para C.I. nulas, tenemos que:

$$T(s) = \theta(s)\left(Js^2 + Bs + K\right)$$

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K} = \frac{1/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}}$$

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{0{,}05}{s^2 + 0{,}05\,s + 0{,}25} \quad \left[\frac{rad}{N.m}\right]$$ → Función de Transferencia del sistema.

↳ Forma Canónica

Ejercicio 3. Hallar la función de transferencia $Y(s)/X(s)$ del siguiente sistema descripto por la ecuación integro-diferencial

$$y(t) + 2\int y(t)\,dt = x(t) + \int x(t)\,dt$$

Luego, obtener la respuesta temporal de salida $y(t)$ si de entrada se tiene que $x(t) = \delta(t)$ (Delta Dirac)

Transformando tenemos:

$$Y(s) + 2\,\frac{Y(s)}{s} = X(s) + \frac{X(s)}{s}$$

$$Y(s)\left(1 + \frac{2}{s}\right) = X(s)\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$ ← multiplico ambos miembros por s

$$Y(s)(s+2) = X(s)(s+1)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s+2}$$ → Función de Transferencia del sistema

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

ntrol

Cómo $x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = 1$:

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{s+1}{s+2} = 1 \cdot \frac{s+1}{s+2} = \frac{s+1}{s+2} \equiv F_T$$

$Y(s)$ ante una entrada impulso unitario es exactamente igual a la función de transferencia del sistema.

$Y(s) = \frac{s+1}{s+2}$ → cómo el °Num = °Den, hay que realizar la división polinómica.

$$\begin{array}{r|l} s+1 & s+2 \\ \hline -s+2 & 1 \\ 0-1 & \\ r & \end{array}$$

Resultado x Divisor + Resto = Dividendo

$1 \cdot (s+2) + (-1) = (s+1)$

Así, en éste caso, se tiene que:

$$(s+1) = \underbrace{(s+2)-1}_{\text{se usa ésta expresión}}$$

Entónces:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s+2} = \frac{(s+2)-1}{(s+2)}$$

$$Y(s) = 1 - \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \delta(t)$$

↳ expresión ... $\delta(t)$.

Ejercicio 4.
Deducir la ecuación diferencial correspondiente a la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

Simplemente distribuimos:

$$(s^2+s+1)\,Y(s) = (2s+1)\,X(s)$$

$$s^2 Y(s) + s Y(s) + Y(s) = 2s X(s) + X(s)$$

Antitransformando:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

Obteniendo la ecuación diferencial que define al sistema.

Multiplicar por s^n, implica en el tiempo, derivar con respecto a "t", n veces.

lc 1

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Como $x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = 1$:

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{s+1}{s+2} = 1 \cdot \frac{s+1}{s+2} = \frac{s+1}{s+2} =$$

Y(s) ante una entrada impulso unitario es
de transferencia del sistema.

$$Y(s) = \frac{s+1}{s+2}$$ → Como el °Num = °Den
polinómica.

$$\begin{array}{r|l} s+1 & s+2 \\ \hline -s+2 & 1 \\ 0-1 & \\ \gamma & \end{array}$$

Entonces:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s+2} = \frac{(s+2)-1}{(s+2)}$$

$$Y(s) = 1 - \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \delta(t) - e^{-2t}$$

↳ expresión temporal de salida, ante una entrada im...

Ejercicio 4. Deducir la ecuación diferencial correspondiente a la siguien te función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

Simplemente distribuimos:

$$(s^2+s+1)\, Y(s) = (2s+1)\, X(s)$$

$$s^2 Y(s) + s Y(s) + Y(s) = 2s X(s) + X(s)$$

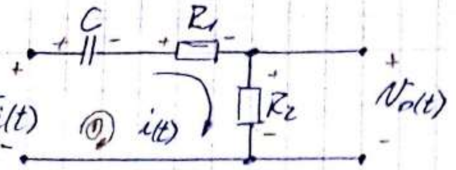
Antitransformando:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

Obteniendo la ecuación diferencial que define al sistema.

M...

Ejercicio 5: Determinar la F_T de la siguiente red.



$C = 1\,\mu F$
$R_1 = 1 M\Omega$
$R_2 = 100 K\Omega$

Hacemos:

LKT ①: $v_{i(t)} = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + i(t)\cdot R_1 + v_{o(t)}$

$v_{o(t)} = i(t)\cdot R_2 \quad \therefore \quad i(t) = \frac{v_{o(t)}}{R_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} I_{(s)} = \frac{V_{o(s)}}{R_2}$

$$v_{i(t)} = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + i(t)(R_1+R_2)$$

$\mathcal{L}$

$$V_{i(s)} = \frac{I_{(s)}}{sC} + I_{(s)}(R_1+R_2) = I_{(s)}\left(\frac{1}{sC} + (R_1+R_2)\right)$$

$$V_{i(s)} = V_{o(s)}\left(\frac{1}{sCR_2} + \frac{(R_1+R_2)}{R_2}\right) = V_{o(s)}\left(\frac{1+sC(R_1+R_2)}{sCR_2}\right)$$

$$F_T = \frac{V_{o(s)}}{V_{i(s)}} = \frac{sCR_2}{sC(R_1+R_2)+1} = \frac{s\cancel{C}R_2}{\cancel{C}(R_1+R_2)\left(s+\frac{1}{C(R_1+R_2)}\right)}$$

$$F_T = \frac{V_{o(s)}}{V_{i(s)}} = \frac{s}{s+\frac{1}{C(R_1+R_2)}}\cdot\frac{R_2}{(R_1+R_2)}$$

$\tau = C(R_1+R_2) = 1{,}1\ [seg]$

$$F_T = \frac{s}{s+\frac{10}{11}}\cdot\frac{1}{11}$$

• Consiste en una red pasa alto.

Para bajas frec. $\rightarrow \lim_{s\to 0} F_T = \lim_{s\to 0}\frac{1}{11}\frac{\cancel{s}}{\cancel{s}+\frac{10}{11}} = 0 \quad \therefore \quad V_{o(s)} = 0$

Para altas frec. $\rightarrow \lim_{s\to\infty} F_T = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{11}\cdot\frac{s}{s+\frac{10}{11}} = \frac{1}{11}\cdot\frac{\cancel{s}(1)}{\cancel{s}\left(1+\frac{10/11}{s}\right)} = \frac{1}{11} \quad \therefore \quad V_{o(s)} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$

Dando valores (y para frecuencias elevadas):

$$V_{o(s)} = \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{100K\Omega}{1M\Omega + 100K\Omega} = \frac{1}{11} \approx 0{,}09$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

FECHA

Ejercicio 6. Hallar la respuesta temporal $y(t)$ si $x(t) = 6\,\mu(t)$.

Por ser un sistema en Serie, la F_T resultante será el producto de cada uno de las F_T de los bloques que lo componen. Así:

$$F_T = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1 \cdot H_2 = \frac{s+1}{s+2} \cdot \frac{5}{s}$$

Cómo:

$$x(t) = 6\,\mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{6}{s}$$

Entónces:

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{5(s+1)}{s(s+2)} = \frac{30(s+1)}{s^2(s+2)}$$

Expandiendo por Fracciones simples:

$$Y(s) = 30\frac{(s+1)}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} \cdot 30\frac{(s+1)}{\cancel{s^2}(s+2)} = 15$$

$$B = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^1}{ds^1}\,\cancel{s^2}\,\frac{30(s+1)}{\cancel{s^2}(s+2)}\right] = \lim_{s\to 0} 30 \cdot \frac{(s+2)-(s+1)}{(s+2)^2} = 7{,}5$$

$$C = \lim_{s\to -2} \cancel{(s+2)}\,30\frac{(s+1)}{s^2\cancel{(s+2)}} = -7{,}5$$

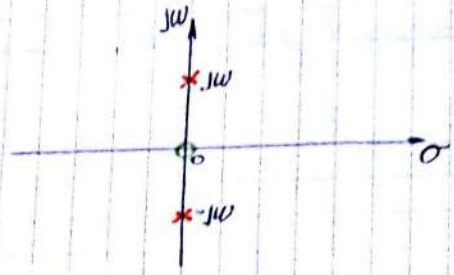
Por lo tanto:

$$Y(s) = \frac{15}{s^2} + \frac{7{,}5}{s} + \frac{-7{,}5}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 15\,t + 7{,}5\,\mu(t) - 7{,}5\,e^{-2t}$$

¿Por qué si a la entrada tengo un escalón a la salida tengo una rampa?
Ello se debe a que es un integrador, por ej: un capacitor.

NOTA

Ejercicio 7. Dado el siguiente diagrama de polos y ceros, perfilar a mano alzada la respuesta del sistema a una excitación impulsiva unitaria.



En base al diagrama, se observa que el sistema tiene un cero en origen y dos polos en jω y -jω. Esto representa a una F_T, que siempre tendrá una ganancia genérica K, de no tenerla, se asume unitaria e inferiría en un ERROR. Entónces:

$$F_T = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \cdot \frac{s}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$

$$F_T = K \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Cómo $x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = 1$:

$$Y(s) = \underbrace{X(s)}_{=1} \cdot K \frac{s}{s^2+\omega^2} = K \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Antitransformando:

$$y(t) = K \cdot \cos(\omega t)$$

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

X(t):

Y(t):

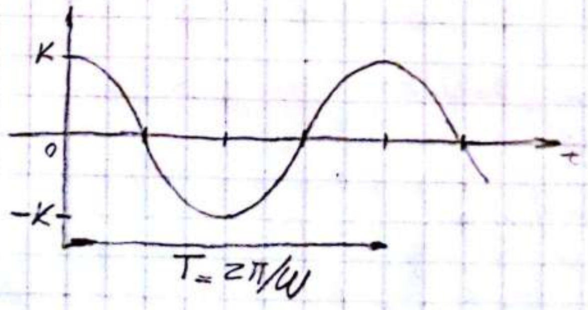
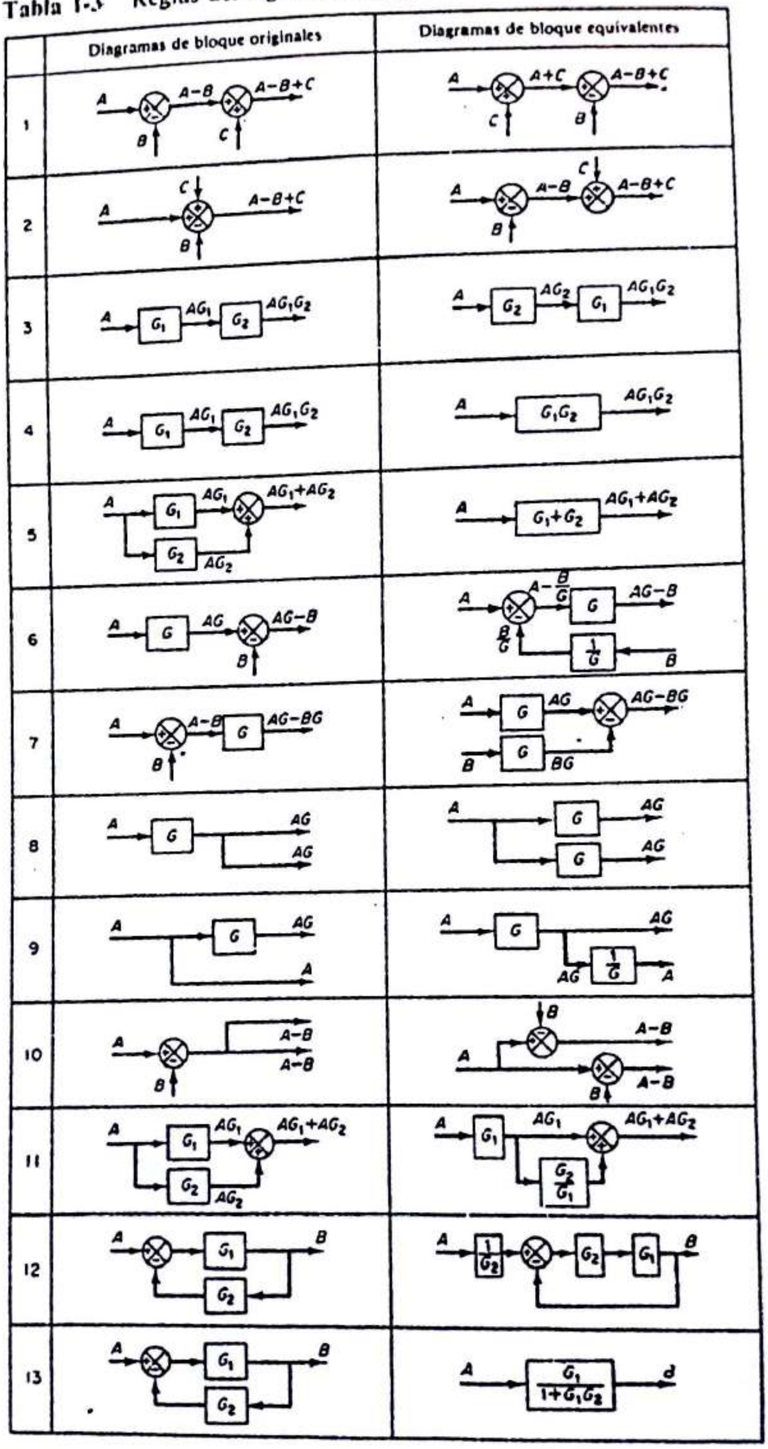


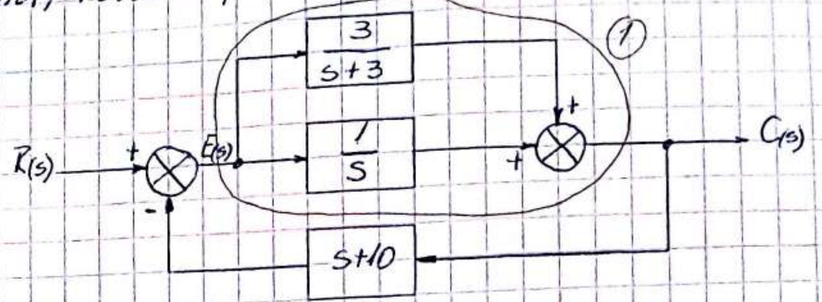
Tabla 1-3 Reglas del álgebra de diagramas de bloque



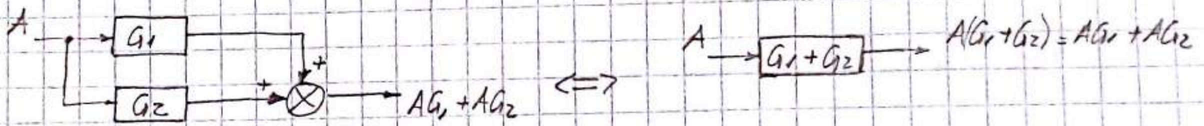
Ingeniería de control moderna

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Ejercicio 1. Determinar la relación $R(s)/C(s)$ reduciendo bloques; expresar la función de transferencia en forma canónica. Luego realizar el diagrama de flujo de señal; reducir aplicando fórmula de Mason.



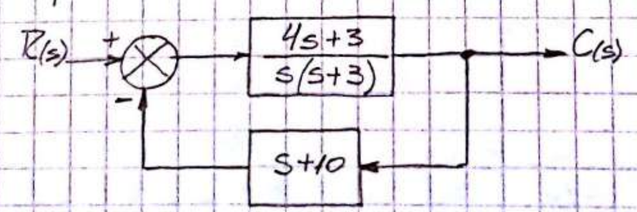
- Los diagramas de bloques y los diagramas de flujo, son distintas formas de representar los sistemas (y resolverlos).
- En álgebra de bloques se busca hacer bloques cada vez más chicos, pero matemáticamente más complejos.
- Al conjunto marcado como 1 en el diagrama, se lo transforma por "eliminación de bloques en paralelo o bloque suma", de la siguiente forma:



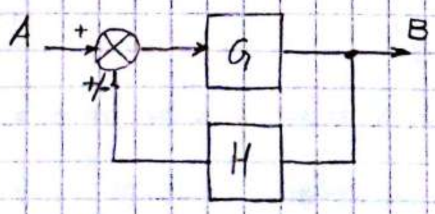
Entónces 1 será:

$$\frac{3}{s+3} + \frac{1}{s} = \frac{3s + s + 3}{(s+3)\,s} = \frac{4s+3}{s(s+3)}$$

En bloques:



Lo que conforma un sistema realimentado, que en forma genérica, su relación Salida/Entrada es:



$$\frac{B}{A} = \frac{G}{1 \pm G.H}$$

(+) si es realimentación negativa

(-) si es realimentación positiva

Por analogía, tenemos que:

NOTA

$A \to R_{(s)}$ $\qquad G \to \dfrac{4s+3}{s(s+3)}$ $\qquad H \to s+10$

$B \to C_{(s)}$

Entónces:

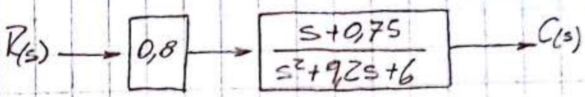
$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{\dfrac{4s+3}{s(s+3)}}{1 + \dfrac{4s+3}{s(s+3)} \cdot (s+10)} = \frac{4s+3}{\dfrac{s(s+3) + (4s+3)(s+10)}{s(s+3)}} \cdot \frac{1}{s(s+3)}$$

Expresamos en forma canónica. Es dejar (tanto en Num. como en Den) el polinomio, el término de mayor grado en coeficiente igual a 1.

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{4s+3}{s^2+3s+4s^2+40s+3s+30}$$

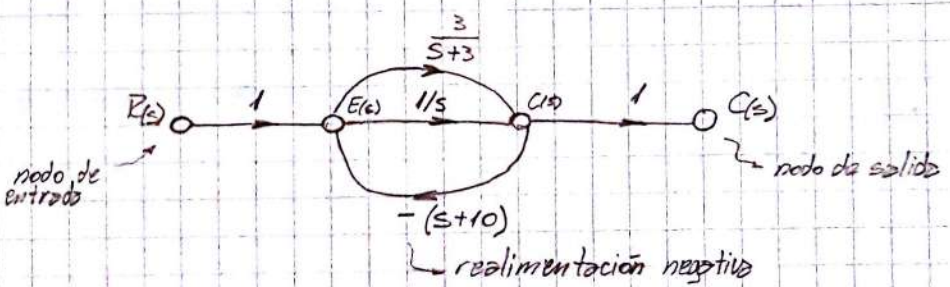
$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{4s+3}{5s^2+46s+30} = \frac{4\left(s+\frac{3}{4}\right)}{5\left(s^2+\frac{46}{5}s+\frac{30}{5}\right)}$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = 0{,}8 \cdot \frac{s+0{,}75}{s^2+9{,}2s+6}$$



$0{,}8$ → ganancia del sistema

Ahora, analizando mediante diagrama de flujo, tenemos:



Definimos:

Trayectorias Directas → $P_1 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot 1 = \frac{1}{s}$

→ $P_2 = 1 \cdot \frac{3}{s+3} \cdot 1 = \frac{3}{s+3}$

Lazos Cerrados → $L_1 = \frac{3}{s+3} \cdot -(s+10) = -3 \cdot \frac{s+10}{s+3}$

→ $L_2 = \frac{1}{s} \cdot -(s+10) = -\frac{s+10}{s}$

Aplicamos la formula de Mason para obtener la F_T:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{1}{\Delta} \sum_K P_K \cdot \Delta_K$$

cómo hay sólo 2 trayectorias directas, tenemos

$$\sum_K P_K \cdot \Delta_K = P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2$$

Para Δ en general:

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b \cdot L_c - \sum_{def} L_d \cdot L_e \cdot L_f + \ldots$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

L_1 y L_2 no son disjuntos, comparten nodos

$$\Delta = 1-(L_1+L_2) = 1-\left(-3\,\frac{s+10}{s+3} + -\frac{s+10}{s}\right)$$

$$\Delta = \frac{5s^2+46s+30}{s(s+3)}$$

Determinamos desde el diagrama, los Δ_1 y Δ_2:

$\Delta_1 = 1-0+0 = 1$; $\Delta_2 = 1-0+0 = 1$

Por lo tanto: $\sum_K P_K \cdot \Delta_K = P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2 = \frac{1}{s} \cdot 1 + \frac{3}{s+3} \cdot 1$

$$\sum_K P_K \cdot \Delta_K = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+3} = \frac{s+3+3s}{s(s+3)} = \frac{4s+3}{s(s+3)}$$

Así:

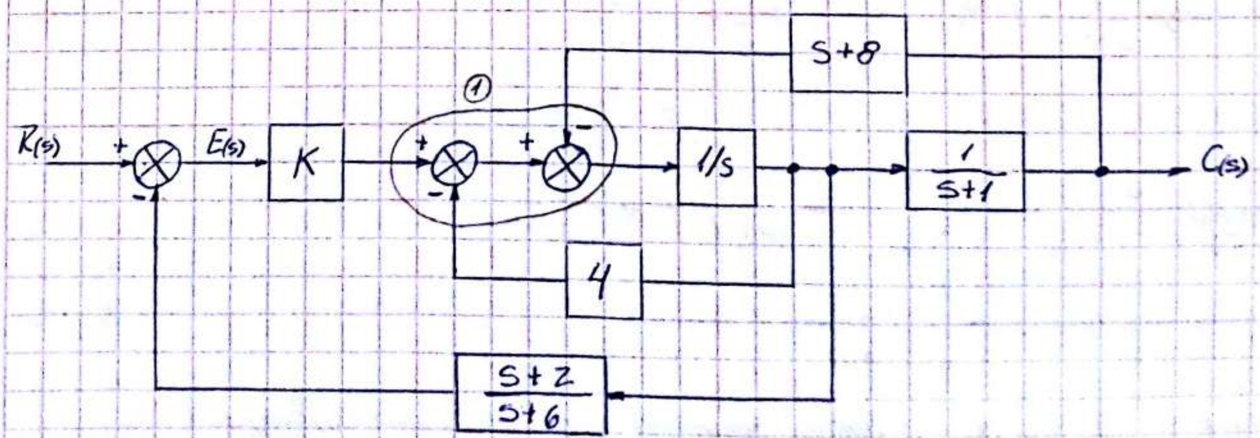
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s(s+3)}{5s^2+46s+30} \cdot \frac{4s+3}{s(s+3)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4s+3}{5s^2+46s+30} \underset{\text{canónica}}{=} \frac{4\left(s+\frac{3}{4}\right)}{5\left(s^2+\frac{46}{5}s+\frac{30}{5}\right)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = 0{,}8 \cdot \frac{s+0{,}75}{s^2+9{,}2s+6}$$ => igual resultado que en bloques.

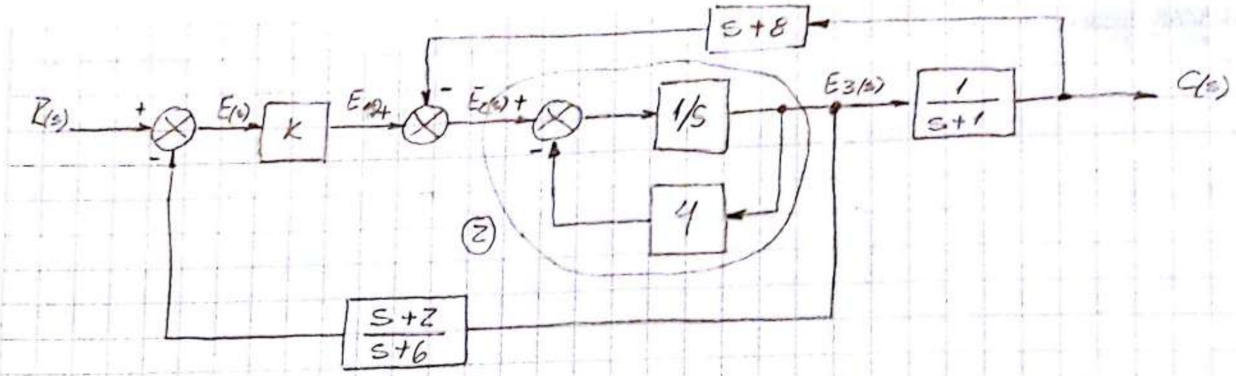
Ejercicio 2.

Idem ejercicio anterior.

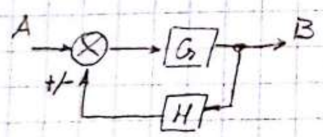


En ① hacemos redistribución de puntos de suma (propiedad conmutativa), Obtenemos.

NOTA



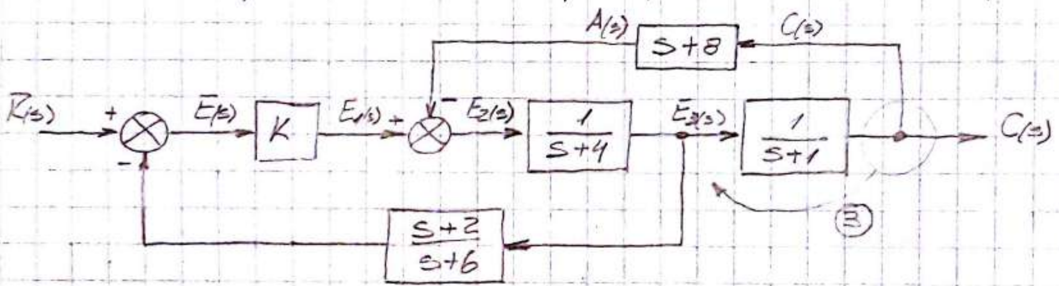
Gracias a ésto, hemos dejado a los bloques ② de forma realimentado, lo cuál conocemos su resolución (en forma genérica):



$$\frac{B}{A}=\frac{G}{1\pm G\cdot H} \quad \therefore \quad B \to E_{3(s)} \quad G \to 1/s \quad A \to E_{2(s)} \quad H \to 4$$

$$\frac{E_{3(s)}}{E_{2(s)}}=\frac{1/s}{\underbrace{1+\frac{1}{s}\cdot 4}_{\text{real. negativa}}}=\frac{1}{\frac{s+4}{\cancel{s}}}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}=\frac{1}{s+4}$$

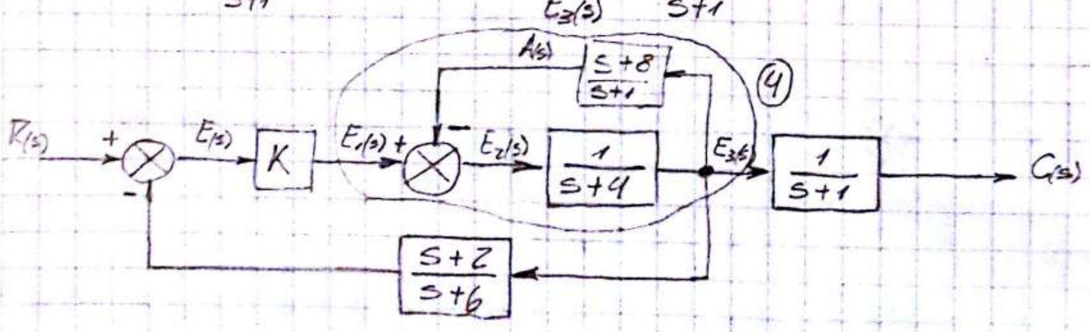
② se transforma en un bloque que tiene como $F_T = 1/(s+4)$, resultando:



Pasamos el punto de toma ③ hacia delante del bloque $1/(s+1)$; ésto implica que el bloque $(s+8)$ quede multiplicado por $1/(s+1)$

$$C_{(s)} = E_{3(s)}\cdot\frac{1}{s+1} \quad ; \quad A_{(s)} = C_{(s)}\cdot(s+8)$$

$$A_{(s)} = E_{3(s)}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot(s+8) \quad \therefore \quad \frac{A_{(s)}}{E_{3(s)}}=\frac{s+8}{s+1}$$

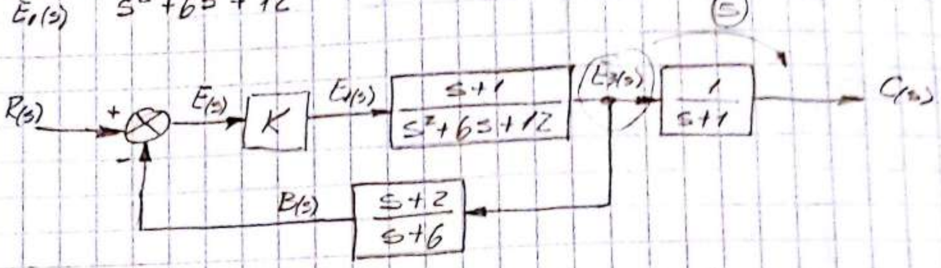


El conjunto ④ es un sistema realimentado con $F_T = E_{3(s)}/E_{1(s)}$:

$$\frac{E_{3(s)}}{E_{1(s)}}=\frac{\frac{1}{s+4}}{1+\frac{1}{s+4}\cdot\frac{s+8}{s+1}}=\frac{1}{\frac{(s+4)(s+1)+(s+8)}{\cancel{(s+4)}(s+1)}}\cdot\frac{1}{\cancel{(s+4)}}=$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

$$\frac{E_3(s)}{E_1(s)} = \frac{s+1}{s^2+6s+12}$$

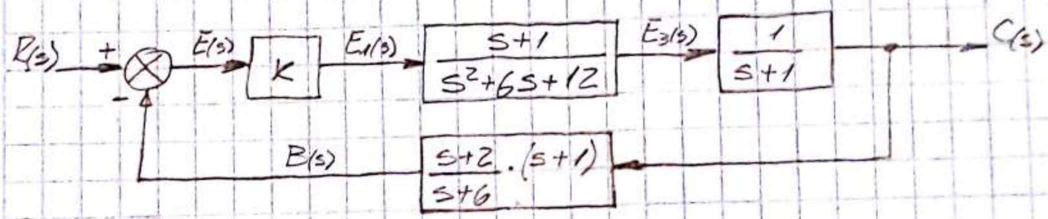


Pasamos el punto toma (S) después del bloque $1/(s+1)$; implica que el bloque $(s+2)/(s+6)$ quede dividido por $1/(s+1)$.

$$C(s) = E_3(s) \cdot \frac{1}{s+1} \quad \therefore \quad E_3(s) = C(s) \cdot (s+1) \quad \text{(I)}$$

$$B(s) = E_3(s) \cdot \frac{s+2}{s+6} \quad \text{(II)}$$

(I) en (II): $$B(s) = C(s) \cdot (s+1) \cdot \frac{s+2}{s+6} \quad \therefore \quad \frac{B(s)}{C(s)} = \frac{s^2+3s+2}{s+6} = \frac{s+2}{s+6} \cdot (s+1)$$



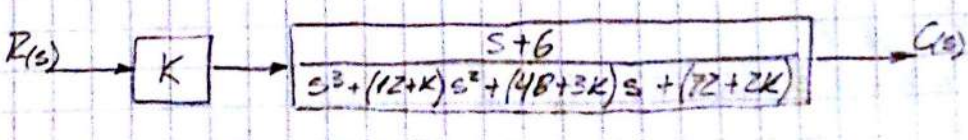
Resultando todo como un sistema realimentado. Su F_T será:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2+6s+12} \cdot \frac{1}{\cancel{s+1}}}{1 + \underbrace{K \cdot \frac{s+1}{s^2+6s+12} \cdot \frac{1}{s+1}}_{G} \cdot \underbrace{\frac{s+2}{s+6}\,(s+1)}_{H}} = \frac{K}{\frac{(s^2+6s+12)(s+6) + K(s+2)(s+1)}{(s^2+6s+12)(s+6)}} \cdot \frac{1}{(s^2+6s+12)}$$

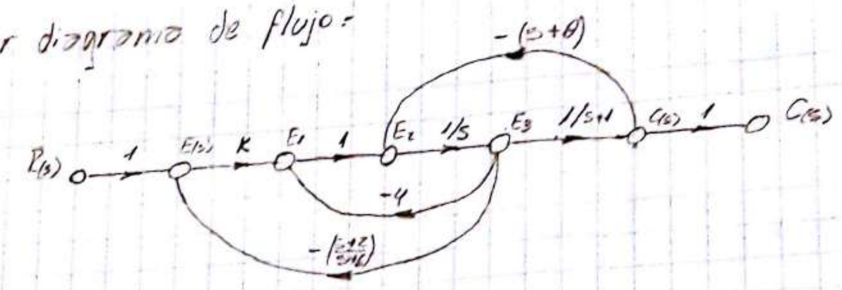
realiment. negativa

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+6)}{s^3+6s^2+12s+6s^2+36s+72+Ks^2+3Ks+2K}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = K \, \frac{s+6}{s^3+(12+K)s^2+(48+3K)s+(72+2K)}$$



Por diagrama de flujo:



Se definen: Trayectorias Directas $\rightarrow P_1 = 1 \cdot K \cdot 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot 1 = \frac{K}{s(s+1)}$

Lazos Cerrados $\rightarrow L_1 = K \cdot 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot -\frac{(s+2)}{(s+6)} = -K \cdot \frac{s+2}{s(s+6)}$

$L_2 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot -4 = -\frac{4}{s}$

$L_3 = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot -(s+8) = \frac{-(s+8)}{s(s+1)}$

L_1, L_2 y L_3 no son disjuntos (comparten nodos); además la trayectoria directa P_1 toca los tres lazos.

Por Mason:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \cdot \Delta_k \quad ; \quad \sum_k P_k \Delta_k = P_1 \cdot \Delta_1$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \cdots$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 - \left(-K \frac{s+2}{s(s+6)} - \frac{4}{s} - \frac{(s+8)}{s(s+1)}\right) = 1 + K \frac{s+2}{s(s+6)} + \frac{4}{s} + \frac{s+8}{s(s+1)}$$

$$\Delta = \frac{s(s+6)(s+1) + K(s+2)(s+1) + 4(s+6)(s+1) + (s+6)(s+8)}{s(s+6)(s+1)}$$

$$\Delta = \frac{s^3 + 7s^2 + 6s + Ks^2 + 3Ks + 2K + 4s^2 + 28s + 24 + s^2 + 14s + 48}{s(s+6)(s+1)}$$

$$\Delta = \frac{s^3 + (12+K)s^2 + (48+3K)s + (72+2K)}{s(s+6)(s+1)}$$

$\Delta_1 = 1 - (0+0+0) = 1 \rightarrow$ son 0 por lo explicado más arriba con L_1, L_2, L_3 y P_1

Así:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\cancel{s}(s+6)\cancel{(s+1)}}{s^3 + (12+K)s^2 + (48+3K)s + (72+2K)} \cdot \frac{K}{\cancel{s}\cancel{(s+1)}} \cdot 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+6)}{s^3 + (12+K)s^2 + (48+3K)s + (72+2K)} \Rightarrow \text{igual resultado}$$

EJEMPLO 1-11 Sea el sistema que aparece en la figura 1-27. Se desea hallar la función de transferencia de lazo cerrado $C(s)/R(s)$ utilizando la fórmula de Mason.

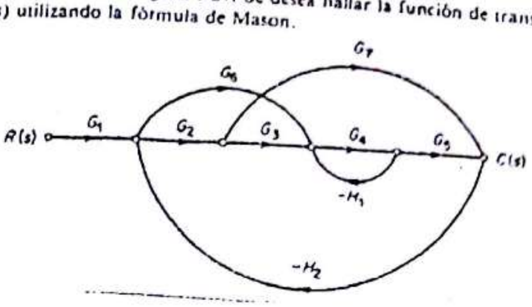


Figura 1-27
Gráfico de flujo de señal de un sistema.

Trayectorias directas:

$$P_1 = G_1 . G_2 . G_3 . G_4 . G_5 \; ; \; P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5 \; ; \; P_3 = G_1 G_2 G_7 .$$

Lazos cerrados:

$$L_1 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 \; ; \; L_2 = -G_6 G_4 G_5 H_2 \; ; \; L_3 = -G_7 H_2 G_2$$

$$L_4 = -G_4 H_1 .$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_3 L_4 \quad (L_3 \text{ y } L_4 \text{ disjuntas})$$

$\Delta_1 = 1 \; ; \; \Delta_2 = 1 \; ; \; \Delta_3 = 1 - L_4$ (la trayectoria P_3 es disjunta respecto L_4).

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_3 L_4 .$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3\right) = \frac{1}{\Delta}\left[P_1 + P_2 + P_3 (1 - L_4)\right] = \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$\Delta = 1 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 G_5 G_6 H_2 + G_2 G_7 H_2 + G_4 H_1 + (G_2 G_7 H_2 . G_4 H_1)$$

$$\Delta = 1 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 G_5 G_6 H_2 + G_2 G_7 H_2 + G_4 H_1 + G_2 G_4 G_7 H_1 H_2$$

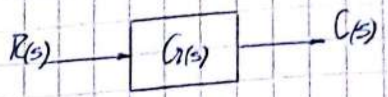
$$P_1 + P_2 + P_3 - P_3 L_4 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_4 G_5 G_6 + G_1 G_2 G_7 + G_1 G_2 G_7 G_4 H_1$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_4 G_5 G_6 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_4 G_5 G_6 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_4 G_7 H_1 H_2}}$$

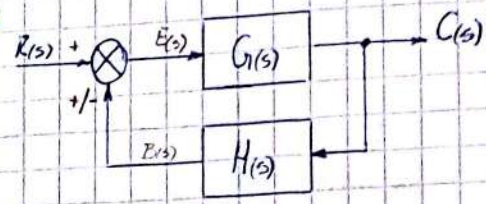
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Ejercicio 3: Dados los siguientes sistemas (el primero a lazo abierto, el otro a lazo cerrado) determinar para cada uno, la ganancia total y la sensibilidad.

Sistema A



Sistema B



• Para el sistema A:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = G_{(s)} \equiv M_{(s)}$$

• Para el sistema B:

① $E_{(s)} = R_{(s)} \pm B_{(s)}$; ② $B_{(s)} = C_{(s)} \cdot H_{(s)}$; $C_{(s)} = E_{(s)} \cdot G_{(s)} \therefore E_{(s)} = \frac{C_{(s)}}{G_{(s)}}$ ③

② y ③ en ①:

$$\frac{C_{(s)}}{G_{(s)}} = R_{(s)} \pm C_{(s)} \cdot H_{(s)}$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = G_{(s)} \pm \frac{G_{(s)} \cdot H_{(s)} \cdot C_{(s)}}{R_{(s)}}$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} \mp \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} \cdot G_{(s)} H_{(s)} = G_{(s)}$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} \left(1 \mp G_{(s)} \cdot H_{(s)}\right) = G_{(s)}$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{G_{(s)}}{1 \mp G_{(s)} \cdot H_{(s)}} = M_{(s)}$$

La sensibilidad se define como:

$$S_G^M = \frac{\partial M_{(s)}/M_{(s)}}{\partial G_{(s)}/G_{(s)}} = \frac{G_{(s)}}{M_{(s)}} \cdot \frac{\partial M_{(s)}}{\partial G_{(s)}}$$

$G_{(s)}$: ganancia de paso directo

$M_{(s)}$: señal de mando $= \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}$

S_G^M: sensibilidad de la señal de mando $M_{(s)}$ respecto a la ganancia $G_{(s)}$ del sistema.

La "ganancia" de cualquier sistema, es la relación entre la transformada de la salida y la transformada de la entrada, sin importar si el sistema es de Lazo Abierto o Lazo Cerrado.

NOTA

• Para el sistema A:

$$S_G^M = \frac{G(s)}{M(s)} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial G(s)} = 1 \cdot 1 = 1$$ → $M(s)$ varía tanto cómo varíe $G(s)$, ya que $M(s) = G(s)$ ∴ $S_G^M = 1$

• Para el sistema B:

$$S_G^M = \frac{G(s)}{M(s)} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial G(s)} = \left[1 \mp G(s) \cdot H(s)\right] \cdot \frac{1}{(1 \mp G(s) H(s))^2} = \frac{1}{1 \mp G(s) \cdot H(s)}$$

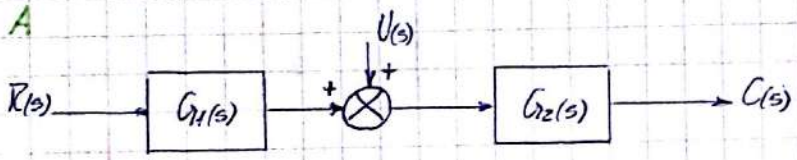
Cómo $M(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s) \cdot H(s)}$ ∴ $\frac{G(s)}{M(s)} = 1 \mp G(s) H(s)$

$$\frac{\partial M(s)}{\partial G(s)} = \frac{1 \cdot (1 \mp G(s) \cdot H(s)) - G(s) \mp H(s)}{(1 \mp G(s) H(s))^2} = \frac{1 \mp \cancel{G(s) H(s)} \pm \cancel{G(s) H(s)}}{(1 \mp G(s) H(s))^2} = \frac{1}{(1 \mp G(s) H(s))^2}$$

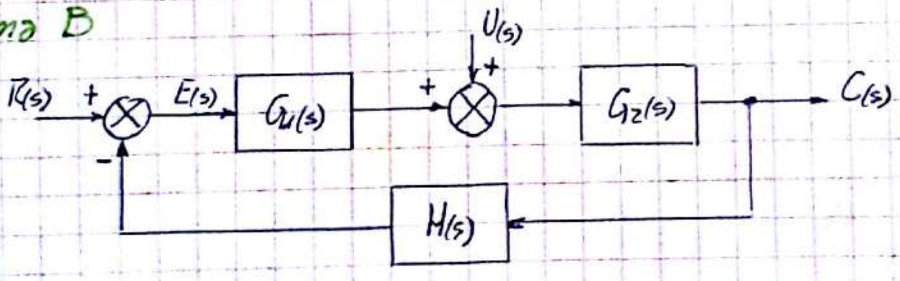
Ejercicio 4.

Para ambos sistemas, determinar la salida del sistema en función de la entrada de referencia y de la señal de perturbación.
↳ $R(s)$ ↳ $U(s)$

Sistema A



Sistema B



Por ser SLIT, es factible aplicar principio de superposición para analizar la salida $C(s)$ y determinar de qué manera influyen las entradas en $C(s)$.

• Sistema A.

$$\left.\frac{C(s)}{R(s)}\right|_{U(s)=0} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$\left.\frac{C(s)}{U(s)}\right|_{R(s)=0} = G_2(s)$$

$$C(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot R(s) \pm G_2(s) \cdot U(s)$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

• Sistema B:

$$\left.\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}\right|_{U_{(s)}=0} = \frac{G_{1(s)} \cdot G_{2(s)}}{1 + G_{1(s)} \cdot G_{2(s)} \cdot H_{(s)}}$$

$$\left.\frac{C_{(s)}}{U_{(s)}}\right|_{R_{(s)}=0} = \frac{G_{2(s)}}{1 + G_{1(s)} \cdot G_{2(s)} \cdot H_{(s)}}$$

$$C_{(s)} = \frac{G_{1(s)} \cdot G_{2(s)}}{1 + G_{1(s)} \cdot G_{2(s)} \cdot H_{(s)}} \cdot R_{(s)} \pm \frac{G_{2(s)}}{1 + G_{1(s)} \cdot G_{2(s)} \cdot H_{(s)}} \cdot U_{(s)}$$

Ejercicio 5. Linealizar la siguiente ecuación no lineal: $z = xy$. Hacerlo en la región:

$$5 \leq x \leq 7$$
$$10 \leq y \leq 12$$

Hallar el error si se utiliza linealizada para calcular los valores: $x=5$, $y=10$

Partimos de la ecuación de linealización obtenida (por los primeros términos) de la serie de Taylor:

$$z_{lin} - \bar{z} = k_x (x - \bar{x}) + k_y (y - \bar{y})$$

El punto de trabajo de la función, se ubica en el medio de la región, por lo que:

$$\bar{x} = x_0 = \frac{7+5}{2} = 6 \quad ; \quad \bar{y} = y_0 = \frac{12+10}{2} = 11$$

$$\bar{z} = z(x_0, y_0) = \bar{x} \cdot \bar{y} = 6 \cdot 11 = 66$$

Los términos k_x y k_y son derivadas parciales de z respecto de x e y, valuadas en el punto de trabajo.

$$k_x = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \left.\frac{\partial (xy)}{\partial x}\right|_{\substack{x=6\\ y=11}} = y\Big|_{\substack{x=6\\ y=11}} = 11$$

$$k_y = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \left.\frac{\partial (xy)}{\partial y}\right|_{\substack{x=6\\ y=11}} = x\Big|_{\substack{x=6\\ y=11}} = 6$$

Reemplazando:

$$z_{lin} - 66 = 11(x-6) + 6(y-11) = 11x - 66 + 6y - 66$$

$$z_{lin} = 11x + 6y - 66 \longrightarrow$$ ecuación linealizada de z, en esa región se comporta aprox. igual. $z_{lin} \cong z$

Vemos que error cometemos al usar z_{lin}:

NOTA

$$E_{\%} = \left|\frac{z_{lin} - z}{z}\right|_{\substack{x=5 \\ y=10}} \cdot 100\%$$

$$z\Big|_{\substack{x=5 \\ y=10}} = x \cdot y\Big|_{\substack{x=5 \\ y=10}} = 5 \cdot 10 = 50$$

$$z_{lin}\Big|_{\substack{x=5 \\ y=10}} = 11x + 6y - 66\Big|_{\substack{x=5 \\ y=10}} = 49$$

$$E_{\%} = \left|\frac{49 - 50}{50}\right| \cdot 100\% = 2\%$$

↳ el error cometido de expresar z_{lin} en vez de z.

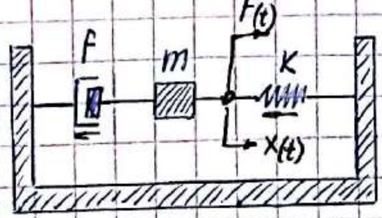
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P. 2-1: Componentes de sist. de control, modelos matemáticos de sist. físicos.

HOJA N°
FECHA

Ejercicio 1:

Plantear la ecuación que relaciona la posición $x(t)$ con la fuerza $F(t)$ en un sistema constituido por un resorte de constante elástica K, masa m y amortiguador de constante f.



f: constante viscosa del amortiguador

K: constante elástica del resorte

Esto constituye un sistema de 2° Orden, ya que tiene 2 elementos que almacenan energía: la masa y el resorte.

Partimos de la relación:

$x(t)$: espacio

$\dot{x}(t)$: velocidad

$\ddot{x}(t)$: aceleración

$$\Sigma F(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$$

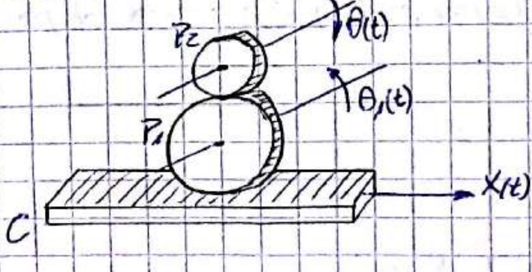
$$F(t) - K \cdot x(t) - f \cdot \dot{x}(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$$

Resultando:

$$F(t) = m \cdot \ddot{x}(t) + f \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t)$$

Ejercicio 2.

Se dispone del sistema mecánico compuesto por una cremallera C y dos engranajes P_1 y P_2. Encontrar la relación entre el desplazamiento lineal de la cremallera $x(t)$ y el desplazamiento angular $\theta(t)$ del engranaje P_2, sabiendo que: la cremallera tiene 10 dientes por milímetro, P_1 40 dientes y P_2 10 dientes; luego de establecer la relación, determinar cual sería el efecto de acoplar directamente C y P_2.



$C = 10$ [dientes/mm]

$N_1 = 40$ [dientes]

$N_2 = 10$ [dientes]

Por la relación de engranajes (transformación):

$$N_1 \cdot \theta_1(t) = N_2 \cdot \theta(t) \quad \therefore \quad \theta_1(t) = \frac{N_2}{N_1} \cdot \theta(t) \quad (1)$$

Por otro lado, el desplazamiento de C, $x(t)$, es la cantidad de dientes desplazados sobre la relación de dientes de la cremallera:

$$x(t) = \frac{n}{C} \quad \therefore \quad n = C \cdot x(t) \quad (2)$$

NOTA

Pero la cantidad de dientes n que desplaza P_1 en un giro ($360° = 2\pi$) es:

$$n = \frac{N_1}{2\pi} \cdot \theta_{1(t)} \quad ③$$

Igualamos ② y ③, las n;

$$C \cdot x(t) = \frac{N_1}{2\pi} \cdot \theta_{1(t)} \quad ④$$

Reemplazando ① en ④:

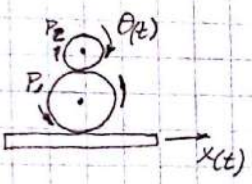
$$C \cdot x(t) = \frac{\cancel{N_1}}{2\pi} \cdot \frac{N_2}{\cancel{N_1}} \cdot \theta_{(t)}$$

Entónces:

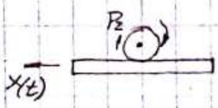
$$x(t) = \frac{N_2}{2\pi . C} \cdot \theta_{(t)}$$

→ vemos que no interviene P_1 por lo que si éste se saca y se acopla P_2 directamente a C, la relación es la misma; sólo cámbia la dirección del movimiento de C.

- Con P_1:

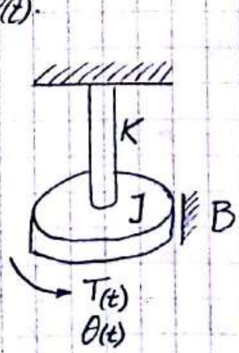


- Sin P_1:



Ejercicio 3.

Un sistema mecánico de rotación, consta de un disco montado sobre un eje que está fijo en un extremo. El momento de inercia del disco alrededor de su eje es J. El borde del disco roza sobre una superficie, por lo que el coeficiente de rozamiento o fricción viscosa es B. La inercia del eje es despreciable, pero la rigidez (constante elástica rotacional) es K; encontrar la ecuación diferencial que vincula al par $T(t)$ con el desplazamiento angular $\theta(t)$.



$\theta(t)$: ángulo girado

$\dot{\theta}(t)$: velocidad angular

$\ddot{\theta}(t)$: aceleración angular

Por la relación:

$$\Sigma T_{(t)} = J \cdot \ddot{\theta}_{(t)}$$

$$T_{(t)} - K . \theta_{(t)} - B . \dot{\theta}_{(t)} = J \cdot \ddot{\theta}_{(t)}$$

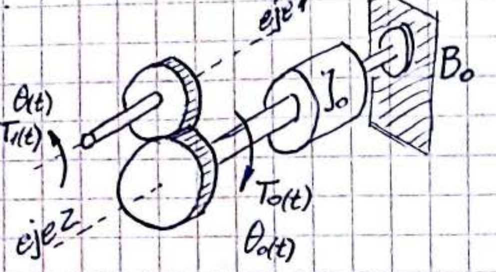
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

$$T_{(t)} = J.\ddot{\theta}_{(t)} + B.\dot{\theta}_{(t)} + K.\theta_{(t)}$$

Ejercicio 4.
Encontrar los valores de: par $T_1(t)$, momento de inercia J_1 y coeficiente de fricción viscosa B_1 reflejados en el eje 1 en función de J_0, B_0 y $T_{o(t)}$ medidos sobre el eje; el engranaje 1 tiene N_1 dientes y el engranaje 2 tiene N_2 dientes.



Consideramos un sistema mecánico ideal, dónde toda la potencia se transfiere del "eje 1" al "eje 2".

$$W_{(t)} = \int F_{(t)}\, dx_{(t)} \Rightarrow dW_{(t)} = F_{(t)} \cdot dx_{(t)} \quad (1)$$ → trabajo mecánico y diferencial de trabajo

La potencia se expresa cómo:

$$P(t) = \frac{dW_{(t)}}{dt}$$

Derivando a (1) respecto del tiempo:

$$P(t) = \frac{dW_{(t)}}{dt} = F_{(t)} \cdot \frac{dx_{(t)}}{dt} = F_{(t)} \cdot \dot{x}_{(t)}$$

Por analogía con el sistema rotacional:

$$P(t) = T_{(t)} \cdot \dot{\theta}_{(t)}$$

$T_{(t)}$: par
$\dot{\theta}_{(t)}$: velocidad angular

Por ser sistema ideal, la potencia de entrada es igual a la de salida:

$$T_{1(t)} \cdot \dot{\theta}_{1(t)} = T_{o(t)} \cdot \dot{\theta}_{o(t)} \quad \therefore \quad T_{o(t)} = \frac{\dot{\theta}_{1(t)}}{\dot{\theta}_{o(t)}} \cdot T_{1(t)} \quad (2)$$

Recordando que: $N_1 \cdot \theta_{1(t)} = N_o \cdot \theta_{o(t)}$ ← si derivamos d/dt

$$N_1 \cdot \dot{\theta}_{1(t)} = N_o \cdot \dot{\theta}_{o(t)}$$

$$\dot{\theta}_{o(t)} = \frac{N_1}{N_o} \cdot \dot{\theta}_{1(t)} \quad (3)$$

Haciendo (3) en (2):

Scanned by CamScanner

$$T_{o(t)} = \frac{\dot{\theta}_{1(t)}}{\frac{N_1}{N_0} \cdot \dot{\theta}_{1(t)}} \cdot T_{1(t)}$$

$$T_{o(t)} = \frac{N_0}{N_1} \cdot T_{1(t)} \quad (4)$$

Por lo hallado en el Ejercicio 3:

$$T_{o(t)} = J_o \, \ddot{\theta}_{o(t)} + B_o \, . \, \dot{\theta}_{o(t)} \quad (5)$$

Reemplazamos en (5), con (4) y (3):

$$\frac{N_0}{N_1} \cdot T_{1(t)} = J_o \left(\ddot{\theta}_{o(t)} \right) + B_o \, . \, \dot{\theta}_{o(t)}$$

$$\frac{N_0}{N_1} \cdot T_{1(t)} = J_o \left(\frac{N_1}{N_0} \, \dot{\theta}_{1(t)} \right)^{\cdot} + B_o \cdot \frac{N_1}{N_0} \, \dot{\theta}_{1(t)}$$

$$\frac{N_0}{N_1} \cdot T_{1(t)} = J_o \, \frac{N_1}{N_0} \cdot \ddot{\theta}_{1(t)} + B_o \frac{N_1}{N_0} \cdot \dot{\theta}_{1(t)}$$

$$T_{1(t)} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^2 \cdot J_o \cdot \ddot{\theta}_{1(t)} + \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^2 \cdot B_o \cdot \dot{\theta}_{1(t)}$$

Los términos:

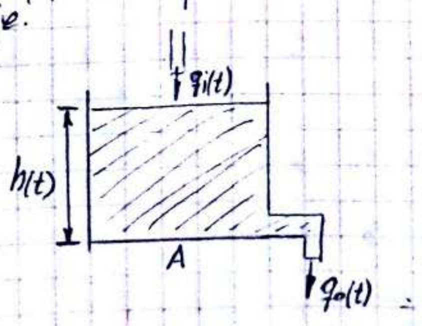
$$J_{1e} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^2 J_o \quad ; \quad B_{1e} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^2 \cdot B_o$$

son las reflexiones del momento de inercia y coeficiente de fricción viscosa del "eje 2" hacia el "eje 1".

Es muy similar a la reflexión de impedancias en el transformador eléctrico, de secundario a primario.

Ejercicio 5.

Un tanque de sección constante $A = 2[m^2]$ es alimentado por un caudal $q_i(t)$. La altura $h(t)$ del líquido, fuerza un caudal de salida $q_o(t)$ a través de un tubo de drenaje.



Se realizó la siguiente experiencia, se llenó el tanque hasta la altura de 4m, a continuación se hizo el caudal de entrada igual a cero y se abrió el drenaje. A los 30seg se registró una altura de 2,96m en el líquido. Se estableció que,

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

- La velocidad con que disminuye la altura del líquido en el tanque es proporcional a la diferencia entre el caudal de entrada y el de salida.
- El caudal de salida es linealmente proporcional a la altura del líquido del tanque.

Para condiciones normales de funcionamiento (caudal de entrada no nulo y drenaje abierto) se pide:

a- Las F_T : $\frac{H(s)}{Q_i(s)}$ y $\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)}$

b- Constante de tiempo del sistema

c- Diagrama polar del sistema y luego de un sistema que fuese dos veces más lento que el del ejercicio

d- Para condición normal de funcionamiento, determinar la forma temporal de $h(t)$.

e- Calcular el valor de la altura en régimen que se alcanzaría si el caudal de entrada fuese de 50[L/seg].

"ley de ohm"

$$\frac{dh(t)}{dt} = K_1 (q_i(t) - q_o(t)) \quad ; \quad q_o(t) = K_2 \cdot h(t) \quad \therefore \quad h(t) = \frac{1}{K_2} \cdot q_o(t) \Rightarrow \frac{1}{K_2} = R_H$$

$\hookrightarrow \frac{1}{K_1} = A$

resistencia hidráulica

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} \left(q_i(t) - \underbrace{\frac{1}{R_H} h(t)}_{q_o(t)} \right)$$

$$q_i(t) = A \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R_H} \cdot h(t)$$ → ecuación diferencial que rige al sistema (tanque)

El único dato que no se dispone de la ecuación diferencial, es el parámetro R_H. Lo podemos determinar en base a la experiencia realizada, en donde:

$q_i(t) = 0$ [L/seg] caudal de entrada

Entonces:
$$0 = A \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R_H} \cdot h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 = A \cdot [s H(s) - h(0)] + \frac{1}{R_H} \cdot H(s)$$

No se desea buscar la F_T, por lo que las C.I. ~~no~~ son nulas; se vincula las alturas obtenidas en la experiencia.

Despejando $H(s)$:
$$0 = A\, s\, H(s) - A h(0) + \frac{1}{R_H} \cdot H(s)$$

$$H(s) = \frac{A \cdot h(0)}{\quad} = \frac{h(0)}{\quad}$$

Volviendo al tiempo, se obtiene la ecuación que representa la evolución de la altura del agua:

$$h(t) = h(0) \cdot e^{-t/A \cdot R_H}$$

Valuando con los datos obtenidos:

$$2{,}96\,[m] = 4\,[m] \cdot e^{-30[seg]/2[m^2] \cdot R_H} \quad \rightarrow \text{despejando } R_H$$

$$\frac{2{,}96}{4} = e^{-30/2 \cdot R_H} \quad \rightarrow \ln$$

$$\ln\left(\frac{2{,}96}{4}\right) = \frac{-30}{2 \cdot R_H} \quad \therefore \quad R_H = \frac{-30}{2 \cdot \ln\left(\frac{2{,}96}{4}\right)} = 49{,}82\left[\frac{seg}{m^2}\right]$$

Determinado el valor R_H, ahora sí es posible hallar las F_T.

a) $$q_i(t) = A\,\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R_H}\,h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Q_{i(s)} = A\left[s H_{(s)} - h(0)\right] + \frac{1}{R_H}\,H_{(s)}$$

Dado que deseamos obtener las F_T, las C.I. son nulas:

$$Q_{i(s)} = A s H_{(s)} + \frac{1}{R_H} \cdot H_{(s)} = H_{(s)}\left(A s + \frac{1}{R_H}\right)$$

$$F_{T_1}: \frac{H_{(s)}}{Q_{i(s)}} = \frac{1/A}{s + \frac{1}{A R_H}}$$ → relaciona la transf. de la altura con la transf. del caudal de entrada.

Al comienzo, definimos que:

$$q_o(t) = \frac{1}{R_H} \cdot h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Q_{o(s)} = \frac{1}{R_H} \cdot H_{(s)} \quad \therefore \quad H_{(s)} = R_H \cdot Q_{o(s)}$$

Reemplazando $H_{(s)}$ en $Q_{i(s)}$:

$$Q_{i(s)} = A s \cdot R_H \cdot Q_{o(s)} + \frac{1}{R_H} \cdot R_H \cdot Q_{o(s)} = Q_{o(s)}\left[A R_H \cdot s + 1\right]$$

$$F_{T_2}: \frac{Q_{o(s)}}{Q_{i(s)}} = \frac{1/A R_H}{s + \frac{1}{A R_H}}$$ → relaciona la transf. del caudal de salida con la transf. del caudal de entrada.

Evaluando a F_{T_1} y F_{T_2}:

$$\frac{H_{(s)}}{Q_{i(s)}} = \frac{0{,}5}{s + 0{,}01} \quad \left[\frac{seg}{m^2}\right]$$

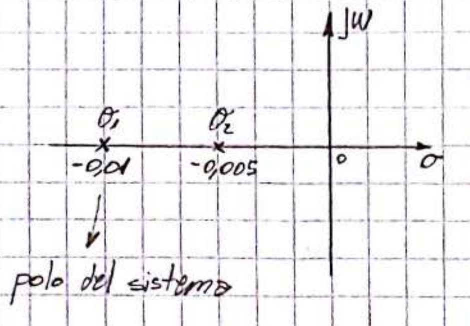
$$\frac{Q_{o(s)}}{Q_{i(s)}} = \frac{0{,}01}{s + 0{,}01} \quad [\text{adimensional}]$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

b) Dado que es un sistema de 1° Orden, el "tau" del sistema es:

$$\tau = A \cdot R_H = 100 \ [seg] \quad \therefore \quad \sigma = -\frac{1}{\tau} = -0{,}01 \quad \text{-- raíz del polo del sistema}$$

c) Graficamos el plano S, con el polo correspondiente:



Para que el sistema fuese 2 veces más lento, la constante de tiempo ha de ser 2 veces mayor, por lo tanto el polo será 2 veces más chico

$$\tau_1 = 100 \ [seg] \quad \therefore \quad \tau_2 = 2 \cdot \tau_1 = 200 \ [seg] = \frac{1}{\sigma_2}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sigma_1} \quad \therefore \quad \sigma_1 = \frac{1}{\tau_1} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} = 0{,}005$$

d) La condición normal de funcionamiento del tanque, es cuando existe un caudal de entrada no nulo y constante, con lo cual:

$$q_{i(t)} = Q_i \cdot \mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Q_{i(s)} = \frac{Q_i}{s}$$

amplitud del caudal

Desde la F_{T}:

$$\frac{H_{(s)}}{Q_{i(s)}} = \frac{1/A}{s + \frac{1}{A \cdot R_H}} \quad \therefore \quad H_{(s)} = \frac{1/A}{s + \frac{1}{A \cdot R_H}} \cdot Q_{i(s)} = \frac{1/A}{\left(s + \frac{1}{A \cdot R_H}\right)} \cdot \frac{Q_i}{s}$$

Por fracciones simples:

$$H_{(s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{A R_H}}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{Q_i}{A} \cdot \frac{1}{\cancel{s}\left(s + \frac{1}{A R_H}\right)} = R_H \cdot Q_i$$

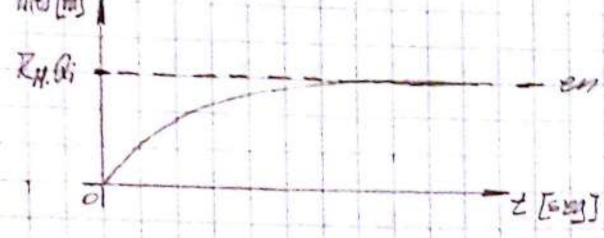
$$B = \lim_{s \to -\frac{1}{A R_H}} \left(s + \frac{1}{A R_H}\right) \cdot \frac{Q_i}{A} \cdot \frac{1}{s \cancel{\left(s + \frac{1}{A R_H}\right)}} = \frac{Q_i}{A} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{A R_H}} = -R_H \cdot Q_i$$

NOTA

$$H_{(s)} = \frac{R_H \cdot Q_i}{s} - \frac{R_H \cdot Q_i}{s + \frac{1}{A R_H}}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$h(t) = R_H \cdot Q_i \left[1 - e^{-t/A R_H} \right]$$ → respuesto de la altura del tanque para un caudal de entrada no nulo y constante



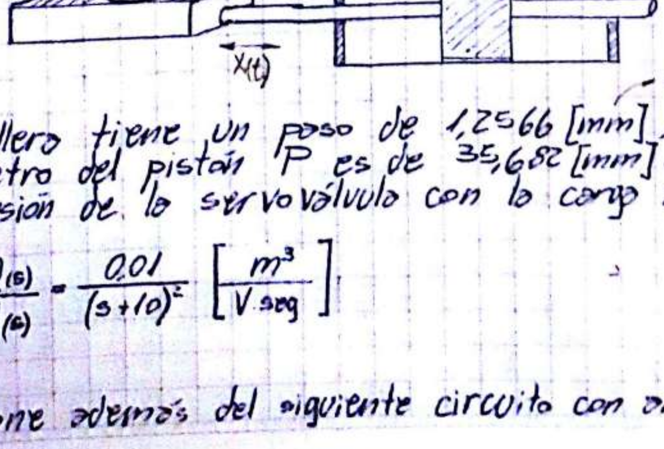
e) Con un caudal de entrada $Q_i = 50$ [litros/seg], dado que analizamos en régimen (transitorio extinto), el término exponencial es nulo.

$$h(\infty) = R_H \cdot Q_i = 50 \left[\frac{seg}{m^2}\right] \cdot 50 \left[\frac{litros}{seg}\right] \cdot \underbrace{\frac{1\ m^3}{1000\ litros}}_{\text{conversión litros a } m^3}$$

$h(\infty) = 2,5\ [m]$ → altura en régimen.

Ejercicio 6.

Para un sistema hidráulico cerrado, la tensión $U(t)$ controla mediante la servoválvula el caudal, este caudal acciona el pistón P que mueve mediante una cremallera y un engranaje, un vástago variando la posición angular $\theta(t)$. Se ha acoplado en forma rígida al eje del engranaje un potenciómetro de 360° de carrera, alimentado por tensiones de ±12,57 [V], de tal forma que un incremento positivo en el ángulo resulta un incremento positivo en la tensión del cursor.



en realidad es [mm/dientes]

La cremallera tiene un paso de 1,2566 [mm], y el engranaje 50 dientes. El diámetro del pistón P es de 35,682 [mm]. La F_T entre el caudal y la tensión de la servoválvula con la carga mencionada es:

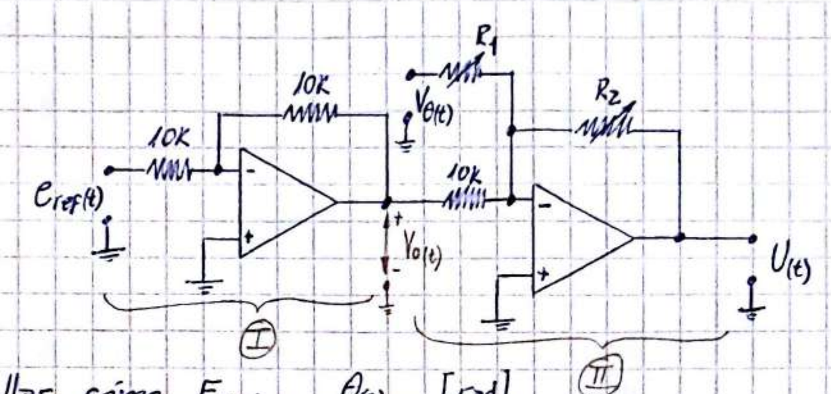
$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{0.01}{(s+10)^2} \left[\frac{m^3}{V \cdot seg}\right]$$

Se dispone además del siguiente circuito con amplificadores operacionales.

Scanned by CamScanner

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA



Hallar cómo F_T : $\frac{\theta_{(s)}}{E_{ref(s)}} \left[\frac{rad}{V}\right]$

El desarrollo de la F_T pedida, consistirá en hacer una interconexión de bloques de los subsistemas que componen al sistema en general.

1°) Partimos de la F_T conocida (servoválvula):

$$\frac{Q_{(s)}}{U_{(s)}} = \frac{0{,}01}{(s+10)^2} \left[\frac{m^3}{V.seg}\right]$$

Definimos el bloque cómo:

$$\underset{[V]}{U_{(s)}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{servoválv.}\\ \frac{0{,}01}{(s+10)^2}\end{array}} \rightarrow \underset{[m^3/seg]}{Q_{(s)}}$$

2°) El SHC (sistema Hidráulico Cerrado), se define cómo: "el caudal es igual a la variación del volumen del pistón P". Pero el pistón tiene cómo área A, un valor que es constante durante todo el desplazamiento o variación.
Tal que:

$$q(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

Recordar que Volumen es área por altura/desplazamiento:
$V(t) = \underset{cte}{A} . x(t)$

Despejando:

$$dx(t) = \frac{1}{A} \cdot q(t)\, dt$$

Cómo deseamos determinar $X(t)$, integramos la anterior expresión:

$$X(t) = \frac{1}{A}\int q(t)\, dt$$ → el SHC se comporta cómo un integrador

$\mathcal{L}$

$$X_{(s)} = \frac{1}{A} \cdot \frac{Q_{(s)}}{s}$$ en dónde $A = \pi . r^2 = \pi . \frac{d^2}{4} = \pi . \frac{(35{,}682\ mm)^2}{4}$

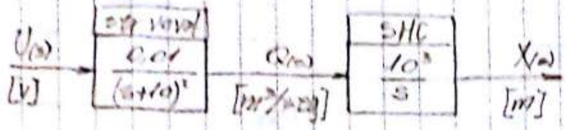
$A = 999{,}47 [mm^2] = 0{,}99947 \times 10^{-3} [m^2] \approx 1 \times 10^{-3} [m^2]$

Hacemos la F_T del SHC y su bloque:

NOTA

$$\frac{X_{(s)}}{Q_{(s)}} = \frac{1}{A\,s} = \frac{10^3}{s}\left[\frac{seg}{m^2}\right]$$

Hasta aquí tenemos:



3°) El sistema cremallera-engranaje (C-E), se relaciona el desplazamiento lineal $X_{(t)}$ con el desplazamiento angular $\theta_{(t)}$.

$$X_{(t)} = \frac{N}{2\pi . C}\,\theta_{(t)} = \frac{N\,P}{2\pi}\cdot\theta_{(t)}$$

dónde: N → n° de dientes del engranaje
P → paso de cremallera $P = \frac{1}{C}$ [m/dientes]
C → relación de cremallera [dientes/m]

$$\theta_{(t)} = \frac{2\pi}{NP}\cdot X_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta_{(s)} = \frac{2\pi}{NP}\cdot X_{(s)}$$

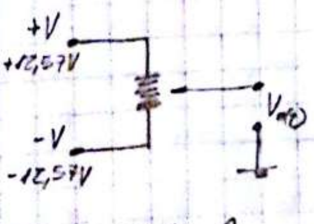
Resultando:

$$\frac{\theta_{(s)}}{X_{(s)}} = \frac{2\pi}{NP} = \frac{2\pi\ rad}{50\,dientes . 1{,}2566\,\frac{mm}{dientes}\cdot\underbrace{\frac{1\ m}{1000\ mm}}_{conversión\ mm\to m}} = 100$$

$$\frac{\theta_{(s)}}{X_{(s)}} = 100\left[\frac{rad}{m}\right]$$

Tenemos:

4°) Con el Potenciómetro (Pote) relacionamos el desplazamiento angular $\theta_{(t)}$ con la tensión $V_{a(t)}$.



360° = 2π =>

$V_1 + V_2 = V_E$
$V + V = V_E$
$2V = V_E$
$|V| = 12{,}57\,[V]$

$$V_{a(t)} = \frac{2V}{2\pi}\cdot\theta_{(t)} = \frac{\cancel{2}.\,12{,}57\,[V]}{\cancel{2}\ \pi\,[rad]}\cdot\theta_{(t)} = 4\cdot\theta_{(t)}$$

$\mathcal{L}$

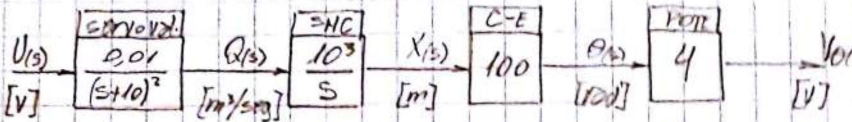
$$V_{a(s)} = 4\cdot\theta_{(s)}$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Lo que resulta como F_T:

$$\frac{V_{\theta(s)}}{\theta_{(s)}} = 4 \ [V/rad]$$

Obteniendo:



5º) El circuito con A.O. compone el Detector de Error, siendo un sistema lineal (ya que los A.O. son elementos lineales) admite análisis por superposición.
Consta de 2 etapas, la primera (I): configuración inversora de ganancia unitaria; la segunda (II): sumador inversor.

para (I) se tiene:
$$V_{o(t)} = -\frac{1}{\frac{10[k\Omega]}{10[k\Omega]}} \cdot e_{ref(t)} = -e_{ref(t)}$$

para (II):
$$U_{(t)} = -\frac{R_2}{10[k\Omega]} \cdot V_{o(t)} - \frac{R_2}{R_1} \cdot V_{\theta(t)}$$

Reemplazando (I) en (II):

$$U_{(t)} = -\frac{R_2}{10[k\Omega]} \cdot (-e_{ref(t)}) - \frac{R_2}{R_1} \cdot V_{\theta(t)}$$

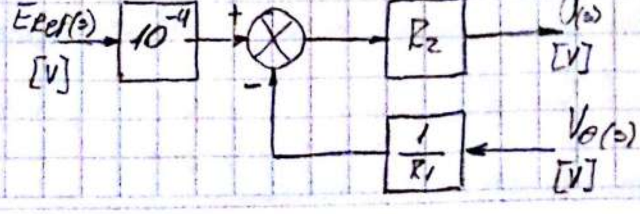
$$U_{(t)} = \frac{R_2}{10[k\Omega]} \cdot e_{ref(t)} - \frac{R_2}{R_1} \cdot V_{\theta(t)}$$

$$U_{(t)} = R_2 \left(10^{-4}[\mho] \cdot e_{ref(t)} - \frac{1}{R_1} \cdot V_{\theta(t)}\right) [V]$$ → ecuación que define al Detector de Error

$\mathcal{L}$

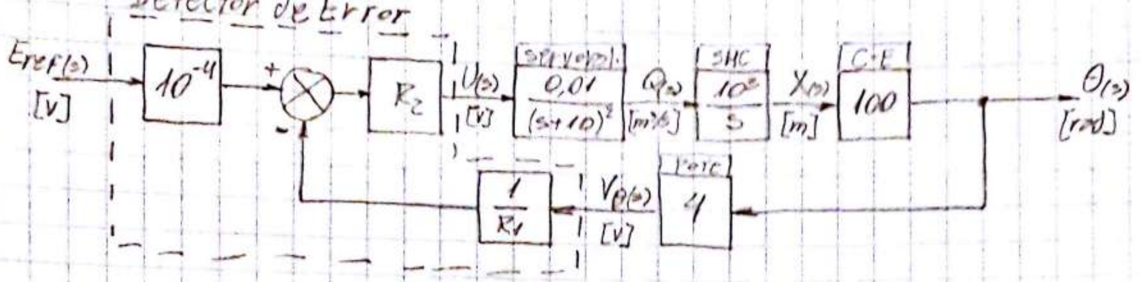
$$U_{(s)} = R_2 \left(10^{-4} \cdot E_{ref(s)} - \frac{1}{R_1} \cdot V_{\theta(s)}\right)$$

De esta última expresión armo el bloque:



NOTA

Finalmente, el sistema completo es:



Para obtener la F_T total del sistema en estudio, se resume todo a pensar todo como un gran sistema realimentado, dónde:

$R_{(s)} \Leftrightarrow E_{ref(s)}$; $C_{(s)} \Leftrightarrow \theta_{(s)}$

$G_{(s)} \Leftrightarrow R_2 \cdot \frac{0,01}{(s+10)^2} \cdot \frac{10^3}{s} \cdot 100$ $\quad K \Leftrightarrow 10^{-4}$

$H_{(s)} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} \cdot 4$ $\quad \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = K \cdot \frac{G_{(s)}}{1 + G_{(s)} \cdot H_{(s)}}$

Entónces:

$$\frac{\theta_{(s)}}{E_{ref(s)}} = 10^{-4} \cdot \frac{R_2 \frac{10^3}{s(s+10)^2}}{1 + R_2 \frac{10^3}{s(s+10)^2} \cdot \frac{4}{R_1}} = 10^{-4} \cdot 0,1 \cdot \frac{10^3 \cdot R_2}{s(s+10)^2 + 4 \times 10^3 \cdot \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\frac{\theta_{(s)}}{E_{ref(s)}} = \frac{0,1 \cdot R_2}{s^3 + 20 s^2 + 100 s + 4 \times 10^3 \cdot \frac{R_2}{R_1}} \left[\frac{rad}{V}\right]$$

La tensión $e_{ref(t)}$ permite controlar la posición del vástago a través de una realimentación y una actuación sobre el elemento de control que es la electroválvula

Ejercicio 7. Linealizar un sistema hidráulico abierto de régimen turbulento. (SHT)

En estado estacionario, un SHT tiene un caudal:

$\bar{Q} = q_i(t) = q_o(t)$

En ese estado el caudal se relaciona con la altura en régimen, según:

$\bar{Q} = K \cdot \sqrt{\bar{H}}$

Si bajo este estado, un incremento del caudal de entrada, se tiene que:

$Q_i = \bar{Q} + q_i(t)$ → provoca un cambio en la altura

$H(t) = \bar{H} + h(t)$ → provoca un cambio de caudal de salida

$$Q_o(t) = \bar{Q} + q_o(t) \qquad \text{dónde} \quad Q_o(t) = K\sqrt{H(t)}$$

Si:

$$Q_i(t) - Q_o(t) = A \cdot \frac{dH(t)}{dt}$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{A} Q_i(t) - \frac{K}{A}\sqrt{H(t)} \implies \frac{dH(t)}{dt} = f\big(Q_i(t), H(t)\big) \rightarrow \text{ecuación diferencial no lineal}$$

Debemos linealizar la ecuación, recordando que en general:

$$Z_{lin} = Z\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{\partial Z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\bar{x}_0\\y=\bar{y}_0}} \cdot (x-\bar{x}_0) + \frac{\partial Z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\bar{x}_0\\y=\bar{y}_0}} \cdot (y-\bar{y}_0)$$

En régimen la altura no varía:

$$\frac{dH(t)}{dt}\Big|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\H(t)=\bar{H}}} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dH(t)}{dt}\Big|_{lin} - \cancel{\frac{dH(t)}{dt}\Big|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\H(t)=\bar{H}}}}^{=0} = \frac{dH(t)}{dt}$$

Entónces:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f(Q_i(t), H(t))}{\partial Q_i(t)}\Big|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\H(t)=\bar{H}}}}_{①} \cdot \big(Q_i(t) - \bar{Q}\big) + \underbrace{\frac{\partial f(Q_i(t), H(t))}{\partial H(t)}\Big|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\H(t)=\bar{H}}}}_{②} \cdot \big(H(t) - \bar{H}\big)$$

$$① = \frac{\partial}{\partial Q_i(t)}\left[\frac{1}{A} Q_i(t) - \frac{K}{A}\sqrt{H(t)}\right]\Bigg|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\H(t)=\bar{H}}} = \frac{1}{A}$$

$$② = \frac{\partial}{\partial H(t)}\left[\frac{1}{A} Q_i(t) - \frac{K}{A}\sqrt{H(t)}\right]\Bigg|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\H(t)=\bar{H}}} = \frac{-K}{A} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{H(t)}}\Bigg|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\H(t)=\bar{H}}} \qquad \text{siendo } K = \frac{Q(t)}{\sqrt{H(t)}}$$

$$= \frac{-1}{2A} \cdot \frac{\bar{Q}}{\sqrt{\bar{H}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{H}}} = -\frac{\bar{Q}}{2A\bar{H}}$$

El término $2\bar{H}/\bar{Q}$ es la resistencia hidráulica en régimen turbulento.

$$R_{HT} = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}} \quad \therefore \quad ② = -\frac{1}{A \cdot R_{HT}}$$

La linealización resulta:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{A} \cdot \underbrace{\big(Q_i(t) - \bar{Q}\big)}_{=q_i(t)} - \frac{1}{A \cdot R_{HT}} \cdot \underbrace{\big(H(t) - \bar{H}\big)}_{=h(t)}$$

Reemplazando $H(t) = \bar{H} + h(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{H} + h(t)\right) = \cancel{\frac{d\bar{H}}{dt}}^{=0} + \frac{dh(t)}{dt} \equiv \frac{1}{A} \cdot q_i(t) - \frac{1}{A \cdot R_{TH}} \cdot h(t)$$

Despejamos a $q_i(t)$:

$$q_i(t) = A\left[\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{A R_{TH}} \cdot h(t)\right] \rightarrow \text{ecuación diferencial para un SHT}$$

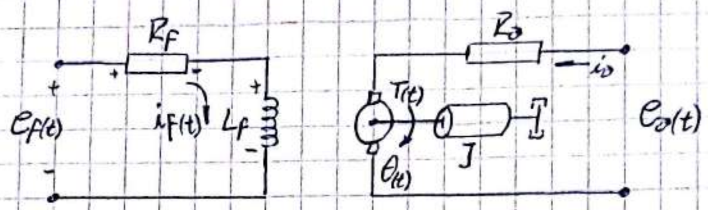
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P. 2-2: Motor de C.C.. Sistemas térmicos.

HOJA N°
FECHA

Ejercicio 1.

En el esquema se representa un motor de CC controlado por campo.



Hallar la $F_T = \frac{\theta_{(s)}}{E_{F(s)}}$, sabiendo que:

pautas del sistema
- El par motor es proporcional al flujo en el entrehierro y a la corriente del inducido.
- El flujo en el entrehierro es proporcional a la corriente de campo.
- La corriente del rotor es constante. (i_a)

Luego de encontrar la F_T, valuarla con los datos:

$L_F = 20\,[Hy]$; $R_F = 120\,[\Omega]$; $J = 1{,}35\,[Kg \cdot m^2]$; $B = 0{,}667 \left[\frac{N \cdot m \cdot seg}{rad}\right]$

Para determinar la constante de par del motor, tener en cuenta que al aplicar una tensión escalón de 110 [V] el motor gira en regimen con una velocidad angular de 1200 [rpm].

Partimos de las pautas del sistema:

$$\left.\begin{aligned} T_{(t)} &= K \cdot \Phi_{(t)} \cdot i_{a}(t) \\ \Phi_{(t)} &= K' \cdot i_{F(t)} \\ i_{a(t)} &= K'' \end{aligned}\right\} \therefore \; T_{(t)} = K \cdot K' \, i_{F(t)} \cdot K''$$

$$T_{(t)} = K_i \cdot i_{F(t)}$$

K_i, K_m o K_c: constante de par del motor

a) Modelamos el Estator:

LKT: $e_{F(t)} = i_{F(t)} \cdot R_F + L_F \cdot \frac{di_{F(t)}}{dt}$

$\mathcal{L}$

$$E_{F(s)} = I_{F(s)} \cdot R_F + L_F \cdot s\, I_{F(s)} = I_{F(s)} \left(s L_F + R_F\right)$$

$$\frac{I_{F(s)}}{E_{F(s)}} = \frac{1}{s L_F + R_F} = \frac{1}{L_F\left(s + \frac{R_F}{L_F}\right)} \;\therefore\; F_{T_{estator}} = \frac{I_{F(s)}}{E_{F(s)}} = \frac{1/L_F}{s + \frac{R_F}{L_F}} \quad [\mho]$$

Siendo el bloque:

$$\underset{[V]}{E_{F(s)}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Estator} \\ \dfrac{1/L_F}{s + R_F/L_F}\end{matrix}} \longrightarrow \underset{[A]}{I_{F(s)}}$$

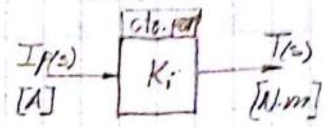
NOTA

Scanned by CamScanner

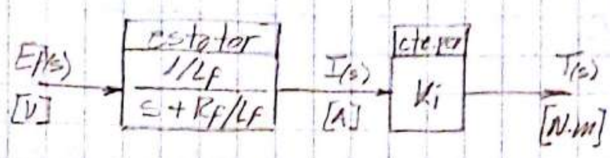
b) Constante de par motor:

$$T_{(t)} = K_i \cdot i_{f(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} T_{(s)} = K_i \cdot I_{f(s)}$$

$$\frac{T_{(s)}}{I_{f(s)}} = K_i \left[\frac{N.m}{A}\right]$$ en bloque:



Hasta aquí, se tiene el sistema:



c) Sistema mecánico del rotor; se vincula el par mecánico con el movimiento angular del rotor:

$$T_{(t)} = J\,\ddot{\theta}_{(t)} + B\,\dot{\theta}_{(t)}$$

$\mathcal{L}\{$

$$T_{(s)} = J s^2 \theta_{(s)} + B s \theta_{(s)} = (Js + B) \cdot s\theta_{(s)}$$

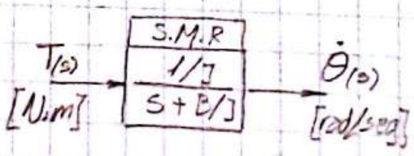
El término $s.\theta_{(s)}$ representa (en dominio de Laplace) una derivada en el dominio temporal. Si es ángulo, la derivada respecto de t dará la velocidad angular.

$$\dot{\theta}_{(s)} = s.\theta_{(s)} \rightarrow \text{vel. angular}$$

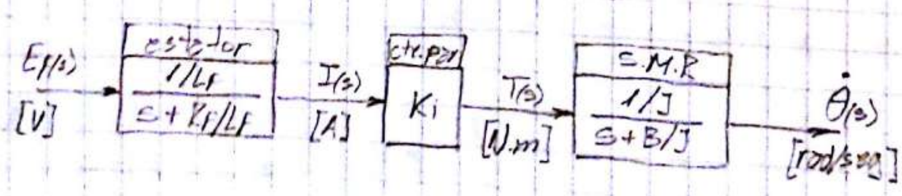
Reemplazando en $T_{(s)}$:

$$T_{(s)} = (Js + B) \cdot \dot{\theta}_{(s)} \quad \therefore \quad \frac{\dot{\theta}_{(s)}}{T_{(s)}} = \frac{1}{Js + B} = \frac{1}{J(s + B/J)}$$

$$\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{T_{(s)}} = \frac{1/J}{s + \frac{B}{J}} \left[\frac{rad/seg}{N.m}\right]$$



Finalmente el modelo del motor de C.C. en cuestión es:



Este motor de C.C. responde a un sistema de Lazo Abierto, que tiene dos polos, uno de origen eléctrico y otro de origen mecánico.

Por observación se obtiene la F_T:

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

$$\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{f(s)}} = \frac{K_i}{L_f \cdot J} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{R_f}{L_f}\right)\left(s + \frac{B}{J}\right)}$$

$$\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{f(s)}} = \frac{K_i}{L_f \cdot J} \cdot \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_f}{L_f} + \frac{B}{J}\right) s + \frac{R_f \cdot B}{L_f \cdot J}} = \frac{K_i}{27} \cdot \frac{1}{s^2 + 6{,}494 \cdot s + 2{,}964} \left[\frac{rad/seg}{V}\right]$$

Sólo resta determinar el K_i, para ello lo hacemos con el dato experimental siendo:

$$e_{f(t)} = E_f \cdot \mu(t) = 100\, \mu(t)\ [V] \qquad \dot{\theta}_{(t)} = 1200\ [rpm] \quad p/t \to \infty \ (\text{régimen})$$

$$\mathcal{L} \downarrow \ E_{f(s)} = \frac{E_f}{s} \qquad L = \dot{\theta}_{(\infty)}$$

$$\dot{\theta}_{(s)} = \frac{K_i}{L_f \cdot J} \cdot \frac{1}{\left[s^2 + \left(\frac{R_f}{L_f} + \frac{B}{J}\right) s + \frac{R_f \cdot B}{L_f \cdot J}\right]} \cdot \frac{E_f}{s}$$ ← mediante el TVF, relacionamos el valor $\dot{\theta}_{(\infty)}$

$$\dot{\theta}_{(t=\infty)} = \lim_{s \to 0} s \cdot \dot{\theta}_{(s)} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{K_i \cdot E_f}{\cancel{L_f \cdot J}} \cdot \frac{1}{\cancel{s}\left[\cancel{s^2} + \left(\frac{R_f}{L_f} + \frac{B}{J}\right)\cancel{s} + \frac{R_f \cdot B}{\cancel{L_f \cdot J}}\right]}$$

$$\dot{\theta}_{(t=\infty)} = \frac{K_i \cdot E_f}{R_f \cdot B} = 1200\ [rpm]$$

Despejando la incógnita K_i:

$$K_i = \frac{R_f \cdot B \cdot \dot{\theta}_{(t=\infty)}}{E_f} = 120[\Omega] \cdot 0{,}667 \left[\frac{N.m.\cancel{seg}}{\cancel{rad}}\right] \cdot \frac{1}{110[V]} \cdot 1200 \left[\frac{rev}{min}\right] \cdot \underbrace{\frac{2\pi[rad]}{1[rev]} \cdot \frac{1[min]}{60[seg]}}_{\text{conversor rpm a rps}}$$

$$K_i = 91{,}437 \left[\frac{N.m}{A}\right]$$

Resultando:

$$\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{f(s)}} = \frac{3{,}387}{s^2 + 6{,}494 \cdot s + 2{,}964} \left[\frac{rad/seg}{V}\right]$$

Ejercicio 2.

Obtener la F_T velocidad a tensión de armadura usando la hoja de datos del motor Inland TT4023; excluir la fricción estática. Luego determinar:

a) • Velocidad en régimen en [RPM] y [rad/seg].

b) • Corriente de armadura en régimen y la potencia utilizada por el motor en esta condición (excluir la utilizada por el estator para generar el campo)

c) • Incluyendo la fricción estática, calcular la nueva velocidad en régimen del motor.

SERIES TT-40

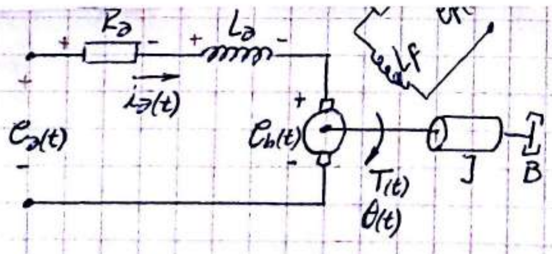
PERFORMANCE SPECIFICATIONS

FIG. : 2. 2. 1. 4 · (b)

Basic Motor-Tachometer Constants

	Symbol	Units					
Rotor inertia	J_M	lb · ft · sec²	0.010	0.010	0.012	0.012	0.018
		kg · m²	0.014	0.014	0.010	0.016	0.024
Weight	Wt.	lb	75	75	90	90	135
		kg (f)	34	34	41	41	61
Static friction	T_F	lb · ft	0.40	0.40	0.48	0.48	0.60
		N · m	0.54	0.54	0.65	0.65	0.80
Thermal time constant	Tct	minutes	57	57	90	90	120
Viscous damping (= Z source)	F_I	lb · ft/k rpm	0.08	0.08	0.11	0.11	0.165
		N · m/k rpm	0.11	0.11	0.15	0.15	0.224

Other windings are available to match with amplifier characteristics. For the TT4020/30 and TT4023/3 windings have been generated for system operation up to 3,000 rpm with corresponding changes in pe acceleration/deceleration or torque.



1) Hacemos LKT en la malla de entrada (armadura).

$$e_a(t) - e_b(t) = i_a(t) \cdot R_a + L_a \cdot \frac{d i_a(t)}{dt}$$

$e_b(t)$ es una fcem

$\mathcal{L}$

$$E_a(s) - E_b(s) = I_a(s) \cdot R_a + L_a \cdot s\, I_a(s)$$

$$E_a(s) - E_b(s) = I_a(s) \cdot (s L_a + R_a)$$

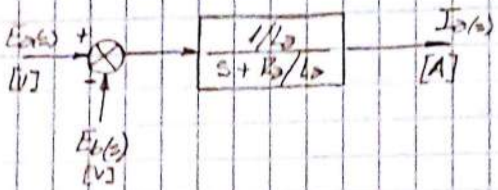
Siendo la F_T:

$$\frac{I_a(s)}{E_a(s) - E_b(s)} = \frac{1/L_a}{s + \frac{R_a}{L_a}} \quad [\text{I}]$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

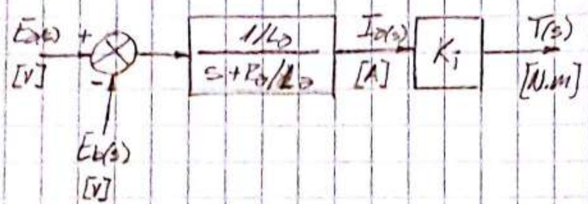
El diagrama para esta parte, sale observando la F_T



2°) El par motor es proporcional a la $i_a(t)$:

$$T(t) = K_i \cdot i_a(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} T_{(s)} = K_i \cdot I_{a(s)}$$

$$\frac{T_{(s)}}{I_{a(s)}} = K_i \left[\frac{N m}{A}\right]$$ cte. que se da en la hoja de datos (K_T)



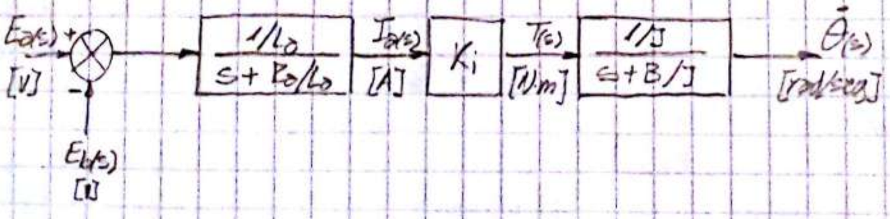
3°) El sistema mecánico se relaciona como:

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} T_{(s)} = J s^2 \theta_{(s)} + B s\, \theta_{(s)}$$

$$T_{(s)} = (Js + B) \cdot s\,\theta_{(s)} \qquad \text{dónde: } \dot{\theta}(t) = s \cdot \theta_{(s)}$$

└ velocidad angular

$$\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{T_{(s)}} = \frac{1/J}{s + \frac{B}{J}} \left[\frac{rad/seg}{N.m}\right]$$

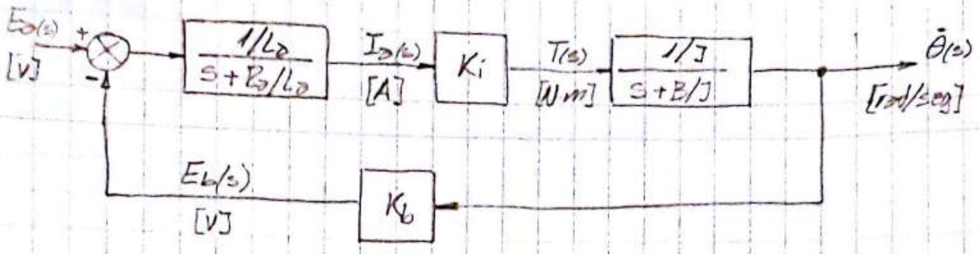


4°) La fcem $e_b(t)$ es proporcional a la velocidad $\dot{\theta}(t)$ del motor

$$e_b(t) = K_b \cdot \dot{\theta}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E_b(t) = K_b \cdot \dot{\theta}_{(s)}$$

$$\frac{E_{b(s)}}{\dot{\theta}_{(s)}} = K_b \left[\frac{V}{rad/seg}\right]$$

Diagrama completo del sistema.



Por inspección del diagrama, se obtiene la F_T:

$$\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{a(s)}} = \frac{\frac{1/L_a}{s+R_a/L_a}\cdot K_i \cdot \frac{1/J}{s+B/J}}{1+\frac{1/L_a}{s+\frac{R_a}{L_a}}\cdot K_i \cdot \frac{1/J}{s+\frac{B}{J}}\cdot K_b}$$

$$\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{a(s)}} = \frac{K_i}{J L_a}\cdot\frac{1}{s^2+\left(\frac{R_a}{L_a}+\frac{B}{J}\right)s+\frac{BR_a+K_iK_b}{JL_a}}\left[\frac{rad}{V.seg}\right]$$

Para evaluarlo, nos valemos de la hoja de datos usando las unidades en MKS, las que no sean MKS, habrá que convertirlas.

$K_T = K_i = 0{,}89\ [N.m/A]$ $\qquad J_M = J = 0{,}016\ [Kg\cdot m^2]$

$R_M = R_a = 0{,}57\ [\Omega]$ $\qquad L_M = L_a = 4\times10^{-3}[Hy] = \left[\frac{m^2.Kg}{seg^2.A^2}\right]$

$$FI = B = 0{,}15\left[\frac{N.m}{Krpm}\right]\cdot\underbrace{\frac{1\ Krpm}{1000\ \frac{rev}{min}}\cdot\frac{1\ rev}{2\pi\ rad}\cdot\frac{60\ seg}{1\ min}}_{\text{conversión Krpm a rad/seg}} = 1{,}43\times10^{-3}\left[\frac{N.m.seg}{rad}\right]$$

conversión Krpm a rad/seg $\rightarrow \frac{3}{100\pi}$ $\rightarrow$ factor de conversión

$$K_o = K_b = 93{,}7\left[\frac{V}{Krpm}\right]\cdot\frac{3}{100\pi}\frac{Krpm}{\frac{rad}{seg}} = 0{,}89\left[\frac{V.seg}{rad}\right]$$

Por lo tanto:

$[N = Kg\frac{m}{seg^2}]$

$$\frac{K_i}{J.L_a} = 0{,}89\ \frac{N.m}{A}\cdot\frac{1}{0{,}016\ Kg m^2}\cdot\frac{1}{4\times10^{-3}\ \frac{m^2.Kg}{seg^2.A^2}} = 13{,}91\times10^3\left[\frac{A}{m^2 Kg}\right]$$

$$\frac{R_a}{L_a}+\frac{B}{J} = \frac{0{,}57\ \Omega}{4\times10^{-3}\ Hy} + 1{,}43\times10^{-3}\ \frac{Kg\,m}{seg^2}\cdot\frac{m.seg}{rad}\cdot\frac{1}{0{,}016\ Kg\,m^2} = 142{,}5\ seg^{-1} + 0{,}0894\ seg^{-1}$$

$\Omega/Hy = seg^{-1}$

$$\cong 142{,}59\ [seg^{-1}]$$

$$\frac{B.R_a+K_i.K_b}{JL_a} = \frac{1{,}43\times10^{-3}\cdot0{,}57+0{,}89\cdot0{,}89}{0{,}016\cdot4\times10^{-3}} = 12{,}39\times10^3\ [\quad]$$

Resultando:

$$\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{a(s)}} = \frac{13{,}91\times10^3}{s^2+142{,}59.\,s+12{,}39\times10^3}\left[\frac{rad}{V.seg}\right]$$

Scanned by CamScanner

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N:
FECHA

a) Dado que la entrada (alimentacion del motor) es C.C.:

$e_a(t) = E_a . \mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E_a(t) = \frac{E_a}{s}$ ← en hoja de datos $V_T = E_a = 150 [V]$

y se desea hallar la velocidad en régimen ($t \to \infty$), aplicamos el TVF:

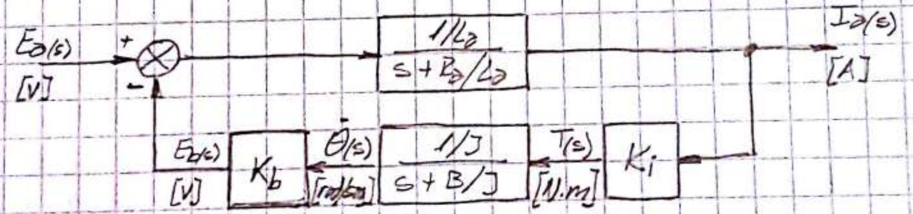
$$\dot{\theta}_{(t=\infty)} = \lim_{s \to 0} s . \dot{\theta}_{(s)} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} . \frac{K_i}{J L_a} . \frac{1}{\cancel{s^2}^{0} + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)\cancel{s}^{0} + \frac{B R_a + K_i K_b}{J L_a}} . \frac{E_a}{\cancel{s}}$$

$$\dot{\theta}_{(t=\infty)} = \frac{K_i . E_a}{B R_a + K_i K_b} = \frac{0,89 . 150}{1,43 \times 10^{-3} . 0,57 + 0,89 . 0,89} = 168,37 \left[\frac{rad}{seg}\right]$$

$$\dot{\theta}_{(t=\infty)} = 168,37 \frac{rad}{seg} . \underbrace{\frac{1 \, rev}{2\pi \, rad} . \frac{60 \, seg}{1 \, min}}_{\text{conversion rps a rpm}} = 1608 \, [rpm]$$

El valor obtenido es similar al que indica el fabricante: $w_{max} = 1500 [rpm]$

b) Como se desea encontrar la corriente en régimen, según la entrada de alimentación, desde el diagrama, se cambia la salida $\theta(s)$ por la nueva salida $I_a(s)$ y se saca la nueva FT.



$$\frac{I_a(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{1/L_a}{s + R_a/L_a}}{1 + \frac{1/L_a}{s + \frac{R_a}{L_a}} . K_b . \frac{1/J}{s + \frac{B}{J}} . K_i} = \frac{1}{L_a} . \frac{s + B/J}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right) s + \frac{B R_a + K_i . K_b}{J L_a}} \quad [\mho]$$

Con: $e_a(t) = E_a . \mu(t) = 150 \, \mu(t) \, [V] \xrightarrow{\mathcal{L}} E_a(s) = \frac{E_a}{s}$

$$I_a(s) = \frac{E_a}{L_a} . \frac{s + B/J}{s \left[s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right) s + \frac{B R_a + K_i K_b}{J L_a} \right]}$$

Aplicando TVF para hallar $i_a(t=\infty)$:

$$i_a(t=\infty) = \lim_{s \to 0} s . I_a(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} . \frac{E_a}{L_a} \frac{\cancel{s}^{0} + B/J}{\cancel{s} \left[\cancel{s^2}^{0} + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right) \cancel{s}^{0} + \frac{B R_a + K_i K_b}{J L_a} \right]}$$

NOTA

$$i_a(t{=}\infty) = \frac{E_a \cdot B}{B \cdot R_a + K_i K_b} = \frac{150 \cdot 1{,}43{\times}10^{-3}}{1{,}43{\times}10^{-3} \cdot 0{,}57 + 0{,}89 \cdot 0{,}89} = 0{,}27\ [A]$$

La potencia en régimen es:

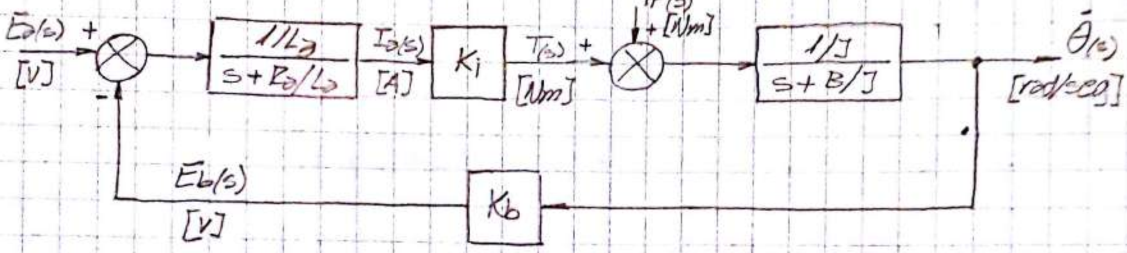
$$P(\infty) = i_a(\infty) \cdot E_a = 0{,}27\,[A] \cdot 150\,[V] = 40{,}5\ [W] \approx 0{,}054\ [HP]$$

Esta potencia corresponde en vacío (sin carga mecánica); sólo para que funcione.

c) La fricción estática es un par o momento que frena al eje del motor, considerandose una señal externa de perturbación.
En la hoja de datos se presenta como:

$$T_F = 0{,}65\ [N.m]$$

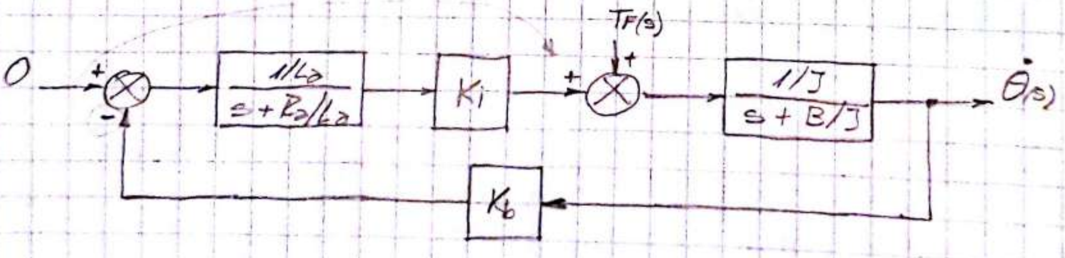
Por lo que se debe incluir en la rama de $T_{(s)}$ del diagrama.



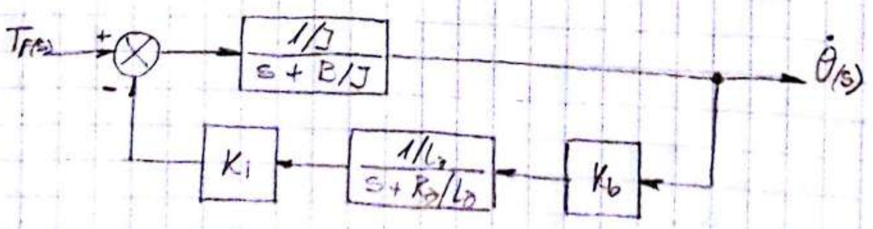
Ya que es un sistema lineal, aplicamos superposición, viendo el aporte que hace cada entrada a la salida $\dot{\theta}_{(s)}$.

$$\left.\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{a(s)}}\right|_{T_{F(s)}=0} = \frac{K_i}{J L_a} \cdot \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{B R_a + K_i K_b}{J L_a}}$$ — es la F_T ya calculada

Cuando hacemos $E_{a(s)} = 0$:



Reordenando:



$$\left.\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{T_{F(s)}}\right|_{E_{a(s)}=0} = \frac{\frac{1/J}{s + B/J}}{1 + \frac{1/J}{s + \frac{B}{J}} \cdot K_i \cdot \frac{1/L_a}{s + \frac{R_a}{L_a}} \cdot K_b} = \frac{1}{J} \cdot \frac{s + R_a/L_a}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{B R_a + K_i K_b}{J L_a}}$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Entónces: $\dot{\theta}_{(s)} = \left.\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{a(s)}}\right|_{T_{F(s)}=0} \cdot E_{a(s)} - \left.\frac{\dot{\theta}_{(s)}}{T_{F(s)}}\right|_{E_{a(s)}=0} \cdot T_{F(s)}$

menos porque se opone al movimiento

dónde:

$E_{a(s)} = \frac{E_a}{s}$ → alimentación de C.C. ⇒ $E_a = 150 [V]$

$T_{F(s)} = \frac{T_F}{s}$ → por ser un rozamiento, siempre es constante ⇒ $T_F = 0{,}6 [N \cdot m]$

$$\dot{\theta}_{(s)} = \frac{K_i}{J L_a} \cdot \frac{E_a}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{B R_a + K_L \cdot K_i}{J L_a}} - \frac{1}{J} \cdot \frac{s + R_a/L_a}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{B R_a + K_L K_i}{J L_a}} \cdot \frac{T_F}{s}$$

Aplicamos TVF, obteniendo el aporte de cada entrada para la velocidad en régimen:

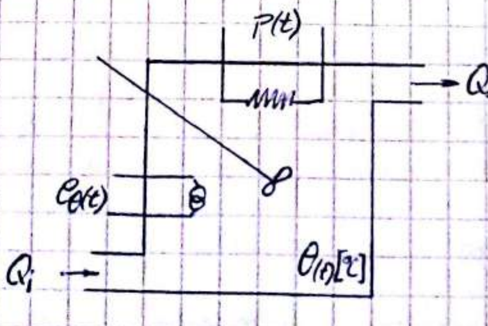
$$\dot{\theta}_{(t=\infty)} = \lim_{s \to 0} s \cdot \dot{\theta}_{(s)} = \frac{E_a \cdot K_i}{B R_a + K_L \cdot K_i} - \frac{T_F \cdot R_a}{B R_a + K_L \cdot K_i}$$

$$\dot{\theta}_{(t=\infty)} = 168{,}37 \left[\frac{rad}{seg}\right] - 0{,}47 \left[\frac{rad}{seg}\right]$$

$\dot{\theta}_{(t=\infty)} = 167{,}9 [rad/seg]$ — velocidad en régimen considerando la fricción estática, la variación no ha sido significativa respecto al no considerar la fricción.

Ejercicio 3.

En la figura se representa un tanque de agua de 100 litros de capacidad. Posee un calefactor para calentar el liquido y de un agitador para mantener homogénea la temperatura del tanque.
Por el tanque circula un caudal $Q = 1 [dm^3/seg]$ y la temperatura del agua de ingreso es de $0^+ [°C]$.



Un amplificador de potencia alimenta el calefactor cuya función de transferencia potencia a tensión es:

$$\frac{P_{(s)}}{E_{(s)}} = \frac{1000}{s + 0{,}1} \; [W/V]$$

Se ha instalado además un sensor de temperatura en contacto con el agua de $1 [V/°C]$.
Considerando que la aislación térmica es perfecta y la temperatura interior homogénea, construir con los elementos mencionados un control de temperatura que

NOTA

permite controlar la misma en el interior del tanque con una tensión de referencia $e_{ref}(t)$ (usar un detector de error de ganancia unitaria).
Luego, para una tensión de referencia de 10 [V], determinar en que valor se estabiliza el agua y cuanto tiempo tarda en ello (considerar al sistema estabilizado dentro del 5% del valor final)

Primero, convertimos ciertos parámetros:

$$Q = 1 \left[\frac{dm^3}{seg}\right] \cdot \frac{1\, m^3}{1000\, dm^3} = 1 \times 10^{-3} \left[\frac{m^3}{seg}\right] \quad \text{(caudal)}$$

$$V = 100\,[L] \cdot \frac{1 m^3}{1000\, L} = 0{,}1\,[m^3] \quad \text{(volumen del tanque)}$$

1) El elemento de partida será el calefactor; conocemos su F_T:

$$\frac{P_{(s)}}{E_{(s)}} = \frac{1000}{s+0{,}1}\left[\frac{W}{V}\right]$$

$E_{(s)}$ [V] → Calefactor $\frac{1000}{s+0{,}1}$ → $P_{(s)}$ [W]

2) La potencia eléctrica hay que convertirla en potencia térmica; partiendo de:

$1\,[cal] = 4{,}186\,[J]$ → son unidades de energía

$$Q_{(t)} = \frac{1\,[cal]}{4{,}186\,[J]} \cdot W_{(t)}$$ ← si derivamos respecto de t, se tiene $p(t)$ (potencia)

$W(t)$: trabajo/energía eléctrica
$Q(t)$: energía térmica, cantidad de calor.
$h(t)$: Flujo de calor

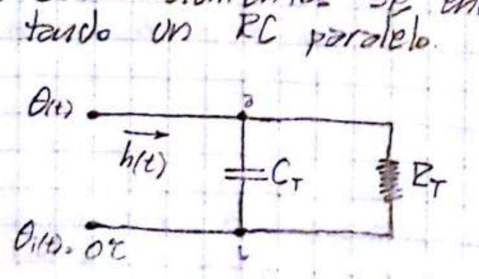
$$\frac{dQ_{(t)}}{dt} = h_{(t)} = 0{,}24 \left[\frac{cal}{J}\right] \cdot p(t)$$

$\mathcal{L}$

$$H_{(s)} = 0{,}24 \left[\frac{cal}{J}\right] \cdot P_{(s)} \quad \therefore \quad \frac{P_{(s)}}{H_{(s)}} = 0{,}24\,[cal/J]$$ — cte. de transformación de "potencias"

3) Para el sistema térmico decimos que:
- tiene capacidad térmica (cuánto mantiene la energía térmica)
- tiene resistencia térmica (cuánto se opone al flujo de calor)

Esto es análogo a un circuito eléctrico RC, estableciendo además:
- La dif. de temperatura es análoga a la dif. de potencial.
- el flujo de calor es análogo a la corriente eléctrica.
- estos elementos se encuentran a la misma dif. de temperatura, resultando un RC paralelo.



Scanned by CamScanner

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N

FECHA

Diferencia de temperatura establece a $h(t)$ por el circuito:

$$\theta_{(t)} - \overset{=0}{\cancel{\theta_{i(t)}}} = \theta_{(t)}$$

LKI nodo a:

$$h(t) = C_T \cdot \frac{d\theta_{(t)}}{dt} + \frac{\theta_{(t)}}{R_T}$$

$$\mathcal{L} \downarrow$$

$$H_{(s)} = C_T \cdot s\,\theta_{(s)} + \frac{1}{R_T} \cdot \theta_{(s)} = \theta_{(s)} \left(C_T \cdot s + \frac{1}{R_T} \right)$$

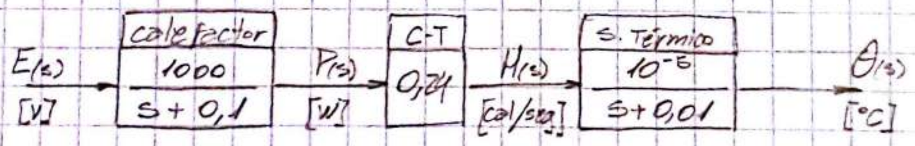
$$\frac{\theta_{(s)}}{H_{(s)}} = \frac{1}{C_T \cdot s + \frac{1}{R_T}} \therefore \frac{\theta_{(s)}}{H_{(s)}} = \frac{1/C_T}{s + \frac{1}{R_T \cdot C_T}} = \frac{10^{-5}}{s + 0{,}01} \left[\frac{°C \cdot seg}{cal} \right]$$

Dónde:

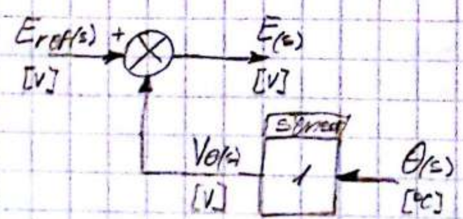
$$R_T = \frac{1}{\rho \cdot C_E \cdot Q} = \frac{1}{\frac{1\,kg}{dm^3} \cdot \frac{1\,cal}{g \cdot °C} \cdot 1 \times 10^{-3} \frac{m^3}{seg} \cdot \underbrace{\frac{1000\,g}{kg} \cdot \frac{1000\,dm^3}{m^3}}_{conversión}} = 10^{-3} \left[\frac{°C \cdot seg}{cal} \right]$$

$$C_T = m \cdot C_E = \rho \cdot V \cdot C_E = \frac{1\,kg}{dm^3} \cdot 0{,}1\,m^3 \cdot \frac{1\,cal}{g \cdot °C} \cdot \frac{1000\,g}{kg} \cdot \frac{1000\,dm^3}{m^3} = 10^5 \left[\frac{cal}{°C} \right]$$

$$\tau_{térmico} = R_T \cdot C_T = 10^{-3} \frac{\cancel{°C} \cdot seg}{\cancel{cal}} \cdot 10^5 \frac{\cancel{cal}}{\cancel{°C}} = 10^2\,[seg]$$

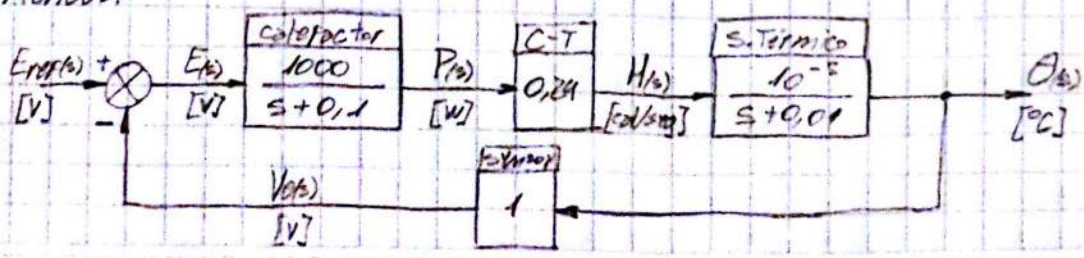


4) El detector de error, lo conforma el bloque:



$$\frac{V_{e(s)}}{\theta_{(s)}} = 1 \left[\frac{V}{°C} \right]$$

Entónces:



$$\frac{\theta_{(s)}}{E_{ref(s)}} = \frac{\frac{1000}{s+0,1} \cdot 0,24 \cdot \frac{10^{-5}}{s+0,01}}{1 + \frac{1000}{s+0,1} \cdot 0,24 \cdot \frac{10^{-5}}{s+0,01} \cdot 1}$$

$$\frac{\theta_{(s)}}{E_{ref(s)}} = \frac{2,4 \times 10^{-3}}{s^2 + 0,11 \cdot s + 3,4 \times 10^{-3}} \quad \left[\frac{°C}{V}\right]$$

$W_d = W_n \sqrt{1-\xi^2} = 0,01936$

$s^2 + 2\xi W_n \cdot s + W_n^2$

$s^2 + 0,11 \cdot s + 3,4 \times 10^{-3}$

$W_n = 0,0583$ [rad/seg]

$\xi = 0,9432$

$T = \frac{1}{\xi W_n} = 18,19$ [seg]

Si:

$e_{ref}(t) = E_{ref} \cdot \mu(t) = 10\, \mu(t)$ [V]

$E_{ref(s)} = \frac{E_{ref}}{s} = \frac{10}{s}$ [V]

La temperatura $\theta_{(t)}$ en régimen $(t=\infty)$, se corresponde con el TVF para dicha entrada:

$$\theta_{(t=\infty)} = \lim_{s\to 0} s \cdot \theta_{(s)} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{E_{ref}}{s} \cdot \frac{2,4 \times 10^{-3}}{s^2 + 0,11\, s + 3,4 \times 10^{-3}}$$

$\theta_{(t=\infty)} = 7,06$ [°C] → temperatura a la que se estabiliza el tanque.

Desarrollamos a $\theta_{(s)}$ para la entrada $E_{ref(s)} = E_o/s$

$$\theta_{(s)} = F_T \cdot \frac{E_o}{s} = \frac{24 \times 10^{-3}}{s^3 + 0,11 \cdot s + 3,4 \times 10^{-3} s}$$

$$\theta_{(s)} = \frac{24 \times 10^{-3}}{s\,(s+0,055-j0,01936)(s+0,055+j0,01936)}$$

Expancion en fracciones simples:

$$\theta_{(s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0,055-j0,01936)} + \frac{B^*}{(s+0,055+j0,01936)}$$

$A = \lim_{s\to 0} s \cdot \theta_{(s)} = 7,06$

$B = \lim_{s\to -0,055+j0,01936} (s+0,055-j0,01936) \cdot \theta_{(s)} = -3,53 + j\,10,03$

$B^* = -3,53 - j\,10,03$

$$\theta_{(s)} = \frac{7,06}{s} + \underbrace{\frac{-3,53+j10,03}{(s+0,055-j0,01936)} + \frac{-3,53-j10,03}{(s+0,055+j0,01936)}}_{1}$$

$$1 = \frac{(-3,53+j10,03)(s+0,055+j0,01936) + (-3,53-j10,03)(s+0,055-j0,01936)}{s^2 + 0,11 s + 0,0034} =$$

$$1 = \frac{-7,06\, s - 0,776}{s^2 + 0,11 s + 0,0034}$$ → completo cuadrados

$$s^2 + 0{,}11s + 0{,}0034 + \left(\frac{0{,}11}{2}\right)^2 - \left(\frac{0{,}11}{2}\right)^2$$

$$\left[s^2 + 0{,}11s + \left(\frac{0{,}11}{2}\right)^2\right] + 0{,}0034 - \left(\frac{0{,}11}{2}\right)^2 \Rightarrow (s+0{,}065)^2 + 3{,}75\times10^{-4}$$

$$① = \frac{-7{,}06s - 0{,}776}{(s+0{,}055)^2 + 3{,}75\times10^{-4}}$$ → esto me permite obtener expresiones en "s" de seno/coseno amortiguados.

De dónde: $\sigma = 0{,}055$

$$\omega^2 = 3{,}75\times10^{-4} \quad \therefore \quad \omega = 0{,}01936 \ [rad/seg] \equiv \omega_d$$

$$① = -7{,}06\left[\frac{s+0{,}10992}{(s+0{,}055)^2 + 3{,}75\times10^{-4}}\right] = -7{,}06\left[\frac{s+0{,}10992+0{,}055-0{,}055}{(s+0{,}055)^2 + 3{,}75\times10^{-4}}\right]$$

$$① = -7{,}06\left[\frac{s+0{,}055}{(s+0{,}055)^2 + 3{,}75\times10^{-4}} + \frac{0{,}10992-0{,}055}{(s+0{,}055)^2 + 3{,}75\times10^{-4}} \times \frac{0{,}01936}{0{,}01936}\right]$$

$$① = -7{,}06\left[\frac{s+0{,}055}{(s+0{,}055)^2 + 3{,}75\times10^{-4}} + 2{,}84 \cdot \frac{0{,}01936}{(s+0{,}055)^2 + 3{,}75\times10^{-4}}\right]$$

Resultando en dominio de t:

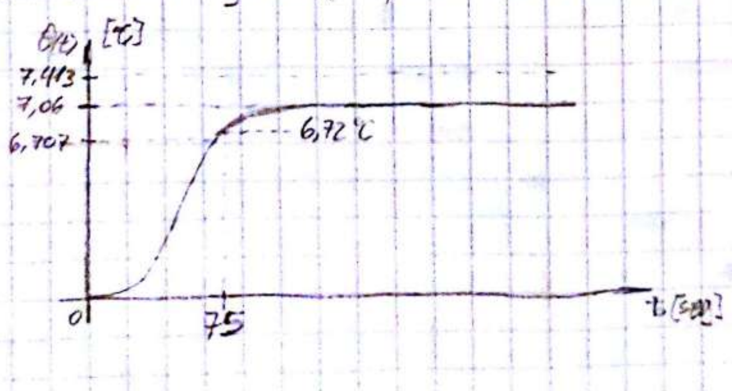
$$\theta_{(t)} = \underbrace{7{,}06}_{\text{régimen}} \underbrace{- 7{,}06 \cdot e^{-0{,}055 \cdot t} \cdot \left\{\cos(0{,}01936 \cdot t) + 2{,}84 \cdot \operatorname{sen}(0{,}01936 \cdot t)\right\}}_{\text{transitorio}} \quad [°C]$$

En ±5% de régimen:

5% = 0,353 °C

7,413 °C — +5%
7,06 °C — régimen
6,707 °C — −5%

La gráfica obtenida se asemeja más a un sistema críticamente amortiguado que a un subamortiguado. (comprobado con MS Math y SIMULINK)



Dándo valores a t en $\theta_{(t)}$, hasta que $\theta_{(t)} \geq 6{,}707$ °C para decir que se alcanzó el régimen
$t = 75$ [seg]
$\theta_{(75seg)} = 6{,}72$ °C

ALCAZAR Diego J. Leg. 52331	T.P. 3-1: Simulación analógica. Obtención de los diagramas de simulación. Simulación en PC	HOJA N° FECHA

Ejercicio 1:

Realizar el diagrama de simulación analógica del T.P. 2-1 Ejercicio 1 con los siguientes valores:

$K = 2\ [N/m]$; $m = 1\ [Kg]$; $f = 0.2\ [N.seg/m]$

Luego de realizado el diagrama, correr la simulación verificando la respuesta temporal con una entrada escalón unitario. Verificar función de transferencia, polos del sistema y respuesta en régimen.

En el ejercicio se llegaba a la ecuación diferencial de la forma:

$$F_{(t)} = m.\ddot{X}_{(t)} + f.\dot{X}_{(t)} + K.X_{(t)}$$

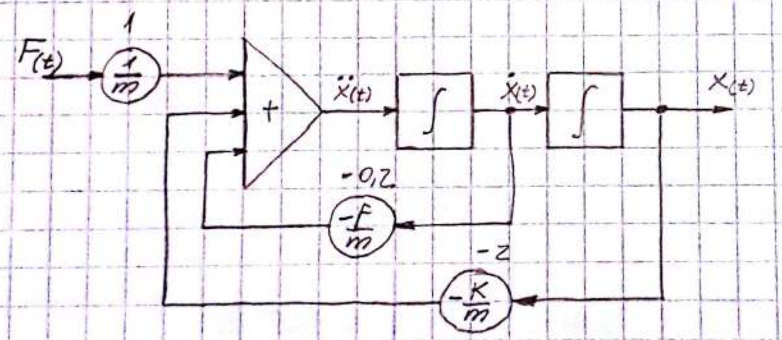
Para obtener el diagrama de simulación se despeja la variable de salida en su mayor órden de derivación, tal que:

$$\ddot{X}_{(t)} = -\frac{f}{m}\dot{X}_{(t)} - \frac{K}{m}X_{(t)} + \frac{1}{m}F_{(t)}$$

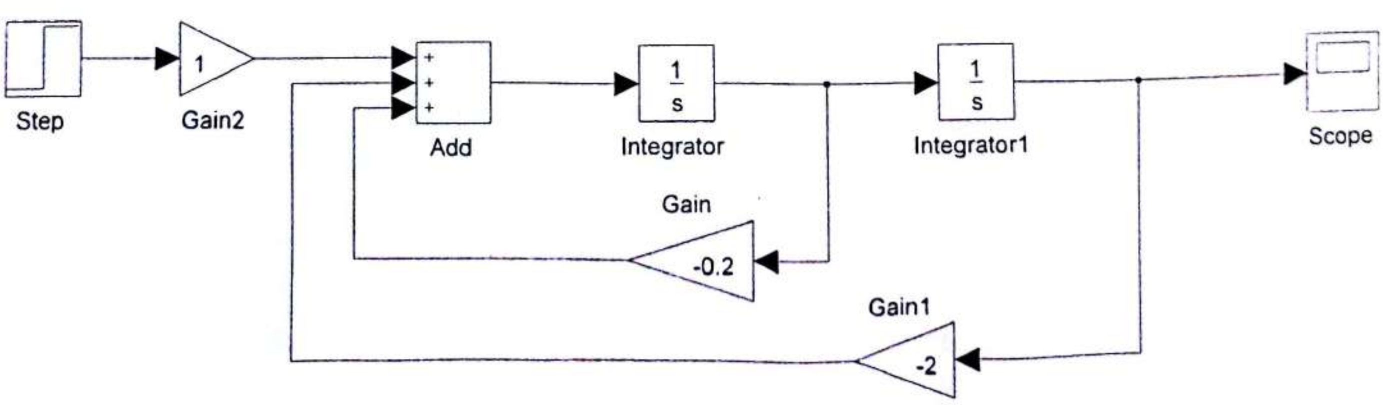
En particular:

$$\ddot{X}_{(t)} = -0{,}2.\dot{X}_{(t)} - 2.X_{(t)} + 1.F_{(t)}$$

El diagrama es:



La simulación se puede hacer mediante Simulink (o similar).



Verificando por la $F_{T(s)}$, hacemos $\mathcal{L}\{F(t)\}$:

$$F_{(s)} = m\, s^2 X_{(s)} + f\, s\, X_{(s)} + K\, X_{(s)}$$

$$F_{(s)} = X_{(s)}\, m\left(s^2 + \frac{f}{m} s + \frac{K}{m}\right)$$

$$F_{T(s)} = \frac{X_{(s)}}{F_{(s)}} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{f}{m} s + \frac{K}{m}}$$

En particular: $\frac{X_{(s)}}{F_{(s)}} = \frac{1}{s^2 + 0{,}2 s + 2} = \frac{1}{\left(s + 0{,}1 + j\frac{\sqrt{199}}{10}\right)\left(s + 0{,}1 - j\frac{\sqrt{199}}{10}\right)}$

$$s_{1,2} \approx -0{,}1 \pm j\,1{,}41067$$

Cómo $F_{(s)} = \frac{1}{s}$:

$$X_{(s)} = \frac{1}{(s+0{,}1+j1{,}41)(s+0{,}1-j1{,}41)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0{,}1+j1{,}41)} + \frac{B^*}{(s+0{,}1-j1{,}41)}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}(s^2 + 0{,}2s + 2)} = 0{,}5$$

$$B = \lim_{s\to -0{,}1-j1{,}41} \cancel{(s+0{,}1+j1{,}41)} \frac{1}{s\cancel{(s+0{,}1+j1{,}41)}(s+0{,}1-j1{,}41)} = -0{,}25 - j\,0{,}018$$

$$B^* = -0{,}25 + j\,0{,}018$$

Así:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(X_{(s)} = \frac{0{,}5}{s} + \frac{-0{,}25 - j0{,}018}{(s+0{,}1+j1{,}41)} + \frac{-0{,}25 + j0{,}018}{(s+0{,}1-j1{,}41)}$$

$$X_{(t)} = 0{,}5 - 0{,}25\, e^{(-0{,}1-j1{,}41)t} - j0{,}018\, e^{(-0{,}1-j1{,}41)t} - 0{,}25\, e^{(-0{,}1+j1{,}41)t} + j0{,}018\, e^{(-0{,}1+j1{,}41)t}$$

$$X_{(t)} = 0{,}5 - 0{,}25\, e^{-0{,}1t}\left(e^{j1{,}41t} + e^{-j1{,}41t}\right)\frac{2}{2} + j0{,}018\, e^{-0{,}1t}\left(e^{j1{,}41t} - e^{-j1{,}41t}\right) \times \frac{j2}{j2} \leftarrow \text{por Euler}$$

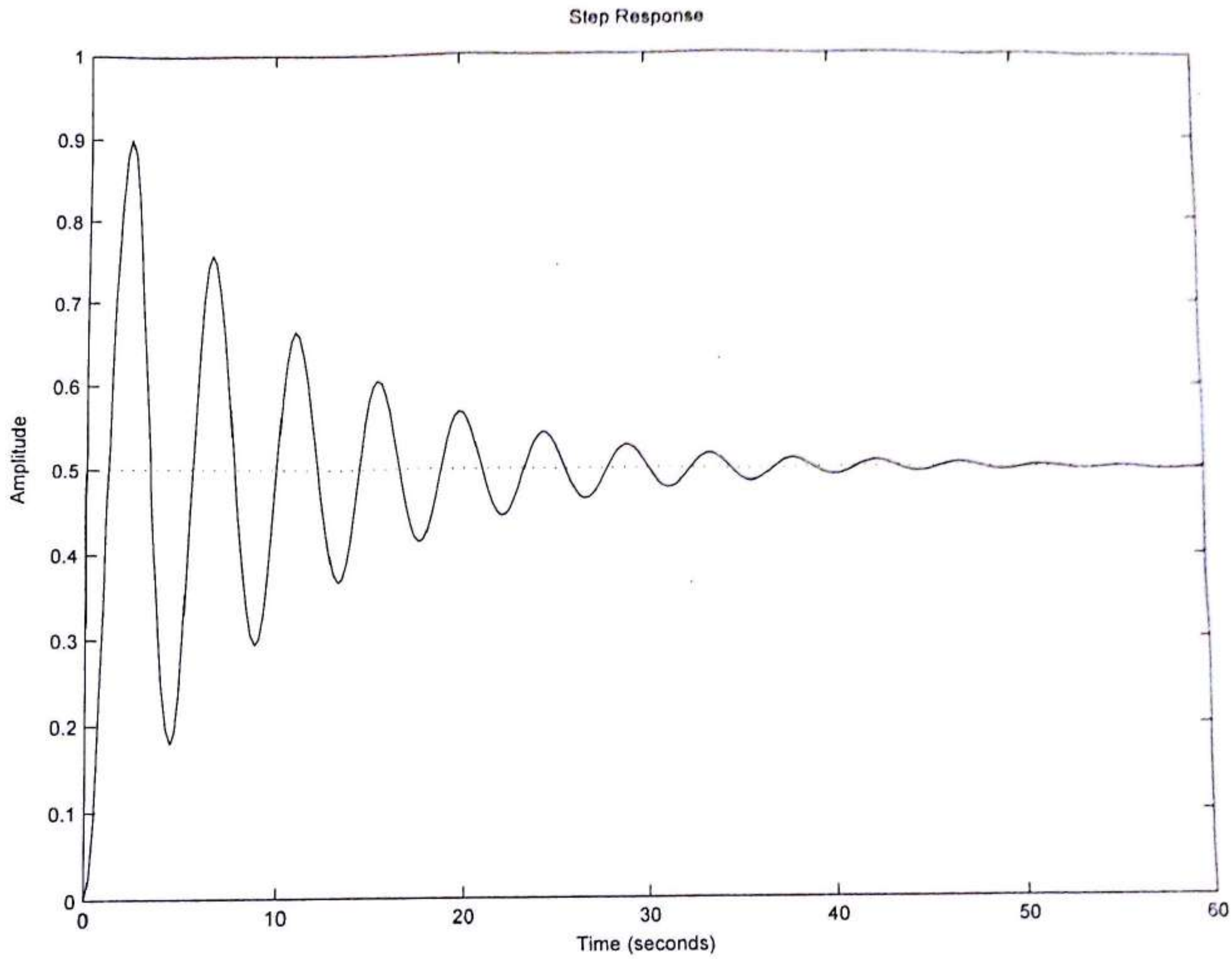
$$X_{(t)} = 0{,}5 - 0{,}5\, e^{-0{,}1t} \cos(1{,}41t) - 0{,}036\, e^{-0{,}1t} \cdot \operatorname{sen}(1{,}41t)$$

La respuesta temporal ante una entrada $F_{(t)} = \mu(t)$ es:

$$X_{(t)} = 0{,}5 - 0{,}5\, e^{-0{,}1t} \cdot \left(\cos(1{,}41t) + 0{,}072 \cdot \operatorname{sen}(1{,}41t)\right)$$

En Matlab:

```
Ft= tf(1, [1  0.2  2])
step(Ft)
```



Ejercicio 2:

Realizar el diagrama de simulación analógica del Ejercicio 4 TP1-1; considerar al desplazamiento y velocidad como salidas.

En el ejercicio se llegaba a la ecuación diferencial:

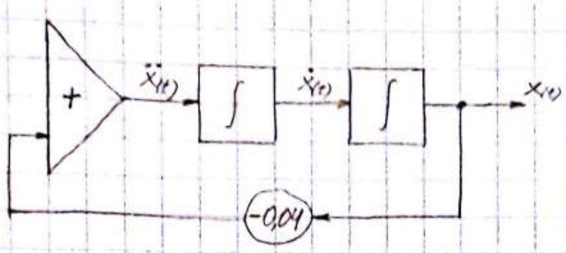
$$F_{(t)} = m \cdot \ddot{x}_{(t)} \qquad \text{siendo } F_{(t)} = 8\times10^{-5} \cdot x_{(t)} \;;\; m = 2\times10^{-3}\,[g]$$

$$-8\times10^{-5} \cdot x_{(t)} = m \cdot \ddot{x}_{(t)}$$

Para armar el diagrama de simulación, se despeja la variable de salida en su mayor órden de derivación:

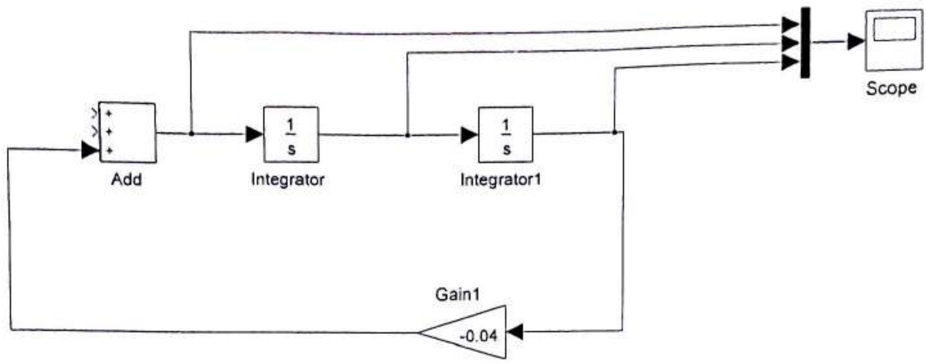
$$\ddot{x}_{(t)} = \frac{-8\times10^{-5}}{m} \cdot x_{(t)} = -0{,}04 \cdot x_{(t)}$$

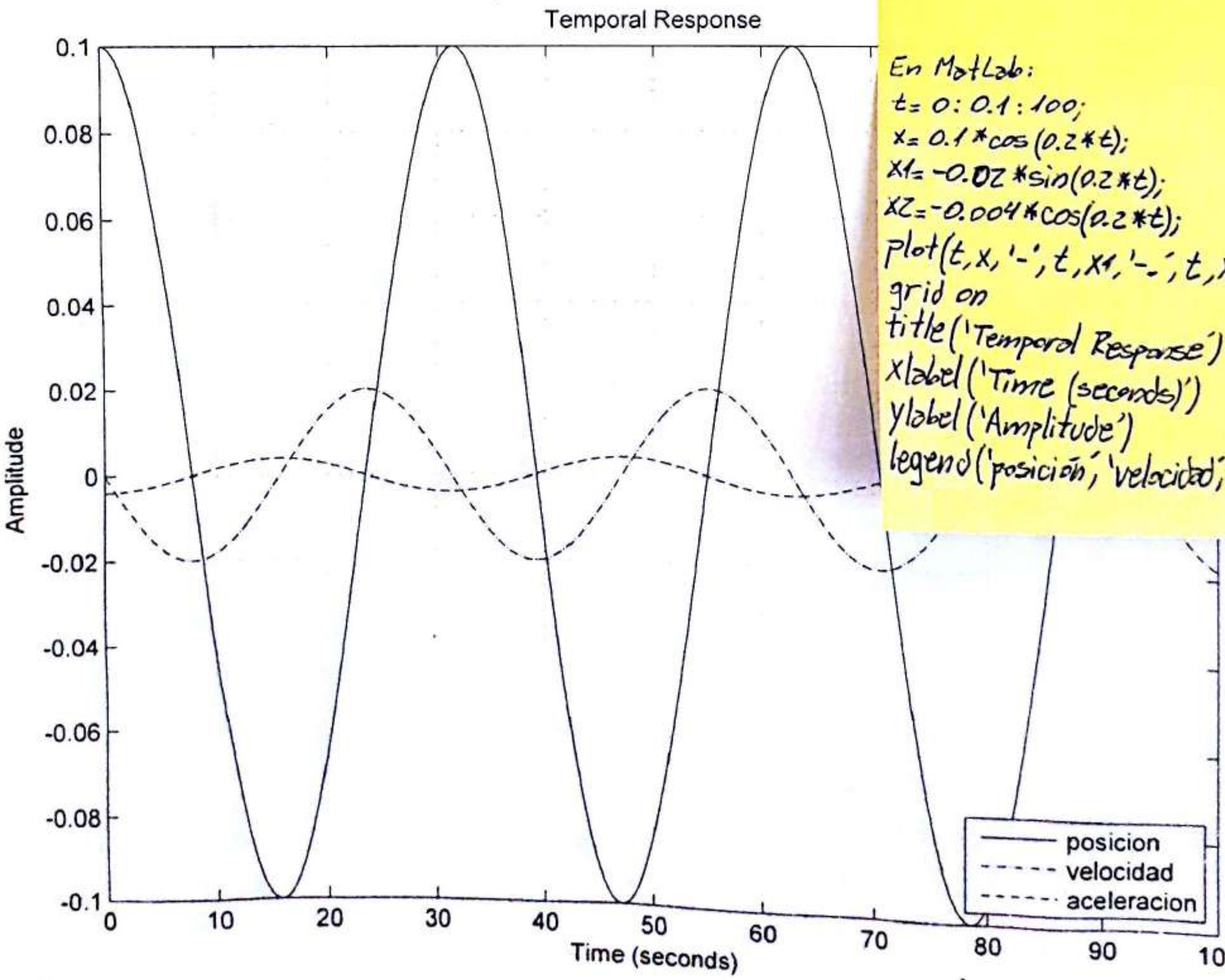
El diagrama es:



¡Importante!
Al bloque "Integrator1" se lo debe configurar con la condición inicial igual a 0.1 establecida en el T.P.1-1 Ejercicio 4.

Mediante Simulink:





En MatLab:

```
t= 0:0.1:100;
x= 0.1*cos(0.2*t);
x1= -0.02*sin(0.2*t);
x2=-0.004*cos(0.2*t);
plot(t,x,'-',t,x1,'-.',t,x2,'--')
grid on
title('Temporal Response')
xlabel('Time (seconds)')
ylabel('Amplitude')
legend('posición','velocidad','aceleración',4)
```

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 3:

Realizar el diagrama de simulación analógica del Ejercicio 4_T.P. 1-2. Verificar función de transferencia y la respuesta a una entrada escalón.

La ecuación diferencial del Ejercicio 4 T.P.1-2 es:

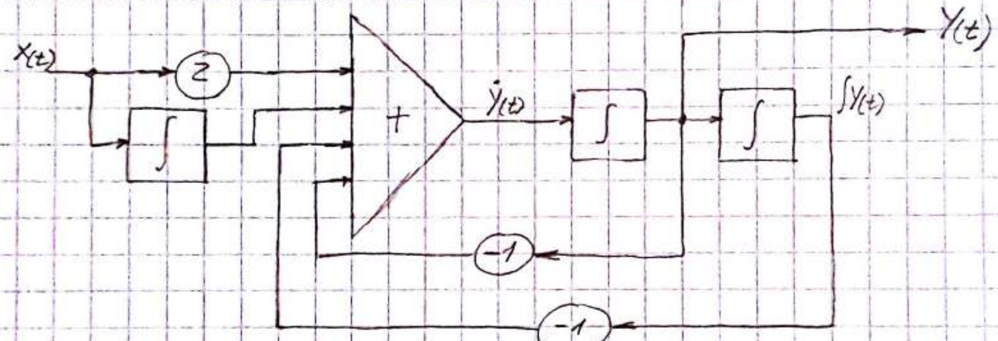
$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

Despejando a $\ddot{y}(t)$:

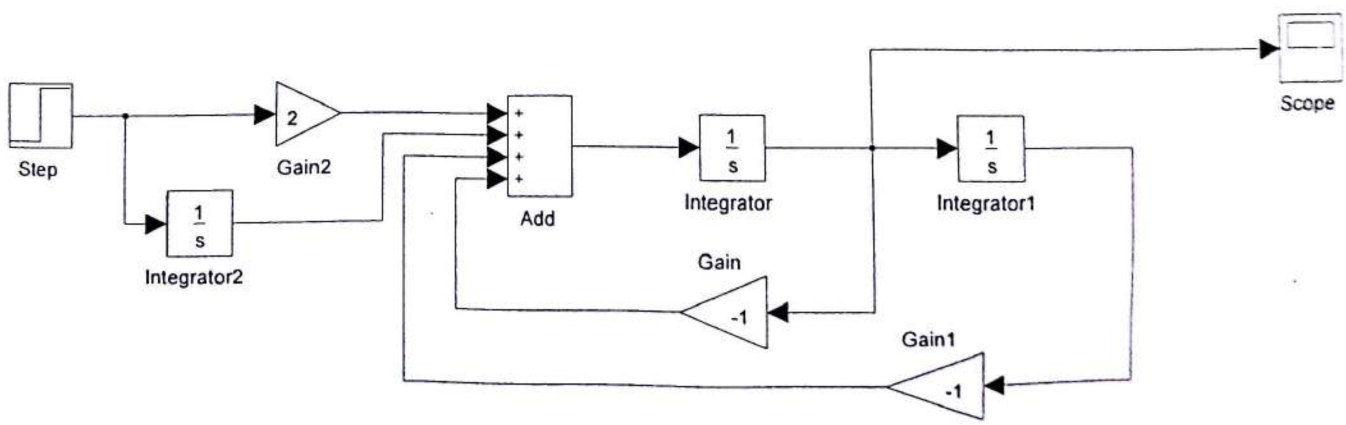
$$\ddot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + x(t) - \dot{y}(t) - y(t) \qquad -\int$$

$$\dot{y}(t) = 2x(t) + \int x(t)\,dt - y(t) - \int y(t)\,dt$$

A esta última ecuación se la emplea para armar el diagrama de simulación:



En Simulink:



NOTA

Verificación mediante la F_T para una entrada escalón unitario:

$$\frac{Y_{(s)}}{X_{(s)}} = \frac{2s+1}{s^2+s+1} = \frac{2s+1}{\left(s+0{,}5+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+0{,}5-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$Y_{(s)} = \frac{2s+1}{s\left(s^2+s+1\right)} = \frac{2s+1}{s\left(s+0{,}5+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+0{,}5-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0{,}5+j0{,}87)} + \frac{B^*}{(s+0{,}5-j0{,}87)}$$

$$s_{1,2} = -0{,}5 \pm j0{,}87$$

$$A = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{2s+1}{\cancel{s}\left(s^2+s+1\right)} = 1$$

$$B = \lim_{s\to -0{,}5-j0{,}87} (s+0{,}5+j0{,}87)\frac{2s+1}{s(s+0{,}5+j0{,}87)(s+0{,}5-j0{,}87)} = -1{,}5-j0{,}87$$

$$B^* = -1{,}5+j0{,}87$$

Así:

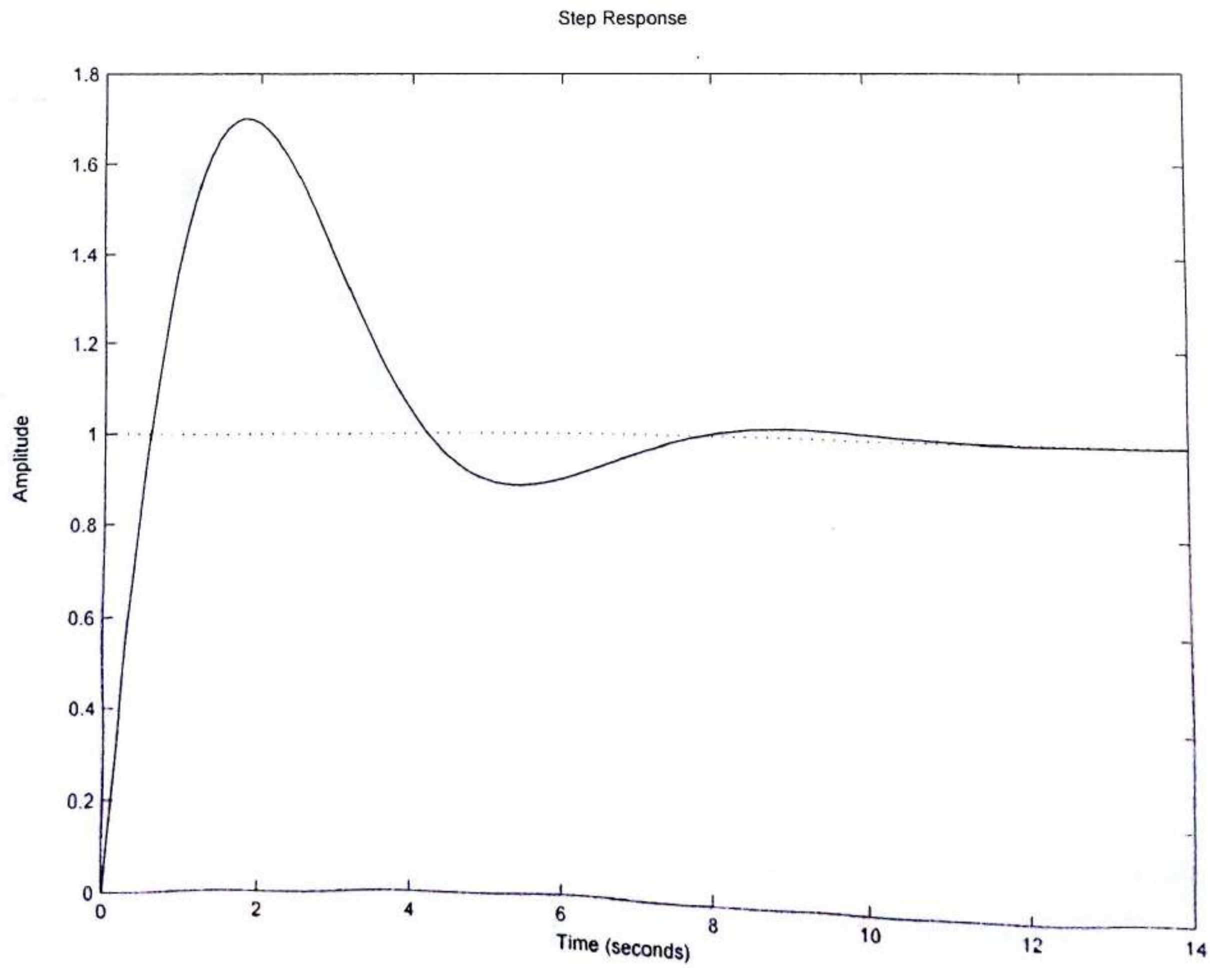
$$Y_{(s)} = \frac{1}{s} + \frac{-1{,}5-j0{,}87}{(s+0{,}5+j0{,}87)} + \frac{-1{,}5+j0{,}87}{(s+0{,}5-j0{,}87)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$Y_{(t)} = 1 - 3e^{-0{,}5t}\left(\cos(0{,}87t) + 0{,}58\,\mathrm{sen}(0{,}87t)\right)$$

En Matlab:

```
Ft= tf([2 1],[1 1 1])
step(Ft)
```



ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

Ejercicio 4:

Realizar el diagrama de simulación analógica del ejercicio anterior con el numerador de la función de transferencia igual a uno. Verificar función de transferencia y la respuesta del sistema a una entrada escalón.

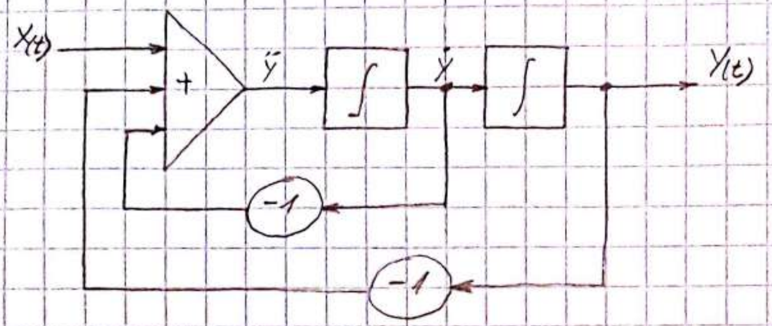
Así: $\dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{1}{s^2+s+1}$

$s^2 Y(s) + s\,Y(s) + Y(s) = X(s)$

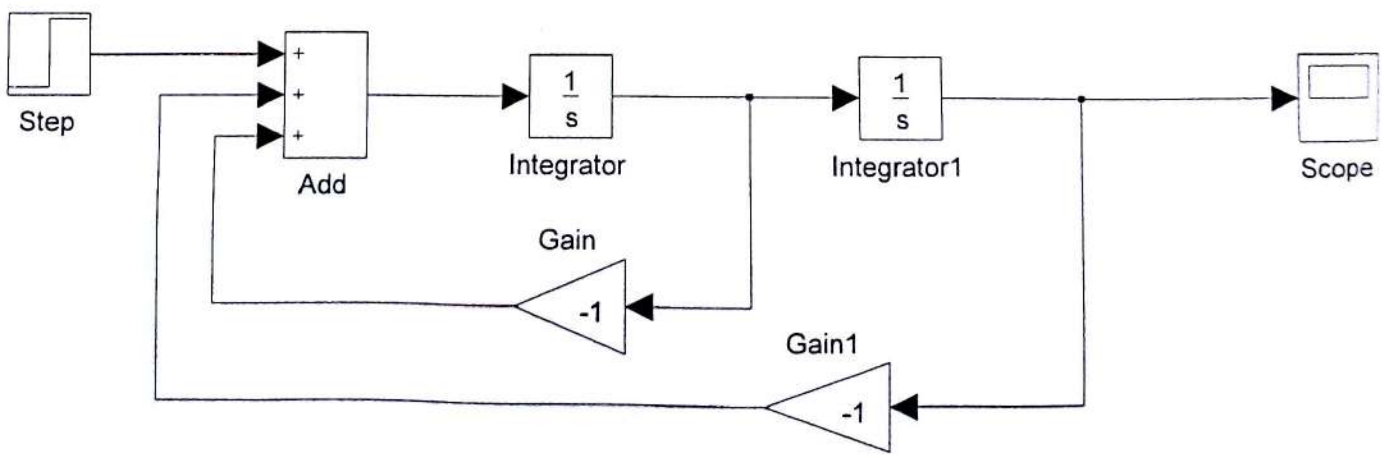
$\mathcal{L}^{-1}$

$\ddot{Y}(t) + \dot{Y}(t) + Y(t) = X(t) \quad \therefore \quad \ddot{Y}(t) = X(t) - \dot{Y}(t) - Y(t)$

Diagrama:



En simulink:



Verificando mediante la F_T ante una entrada $\mu(t)$.

$$Y(s) = X(s) \cdot \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s(s^2+s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\left(s+0{,}5+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{B^*}{\left(s+0{,}5-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$A = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s(s^2+s+1)} = 1$$

$$B = \lim_{s \to -0{,}5-j0{,}87} (s+0{,}5+j0{,}87) \frac{1}{s(s+0{,}5+j0{,}87)(s+0{,}5-j0{,}87)} = -0{,}5-j0{,}29$$

$$B^* = -0{,}5+j0{,}29$$

Así:

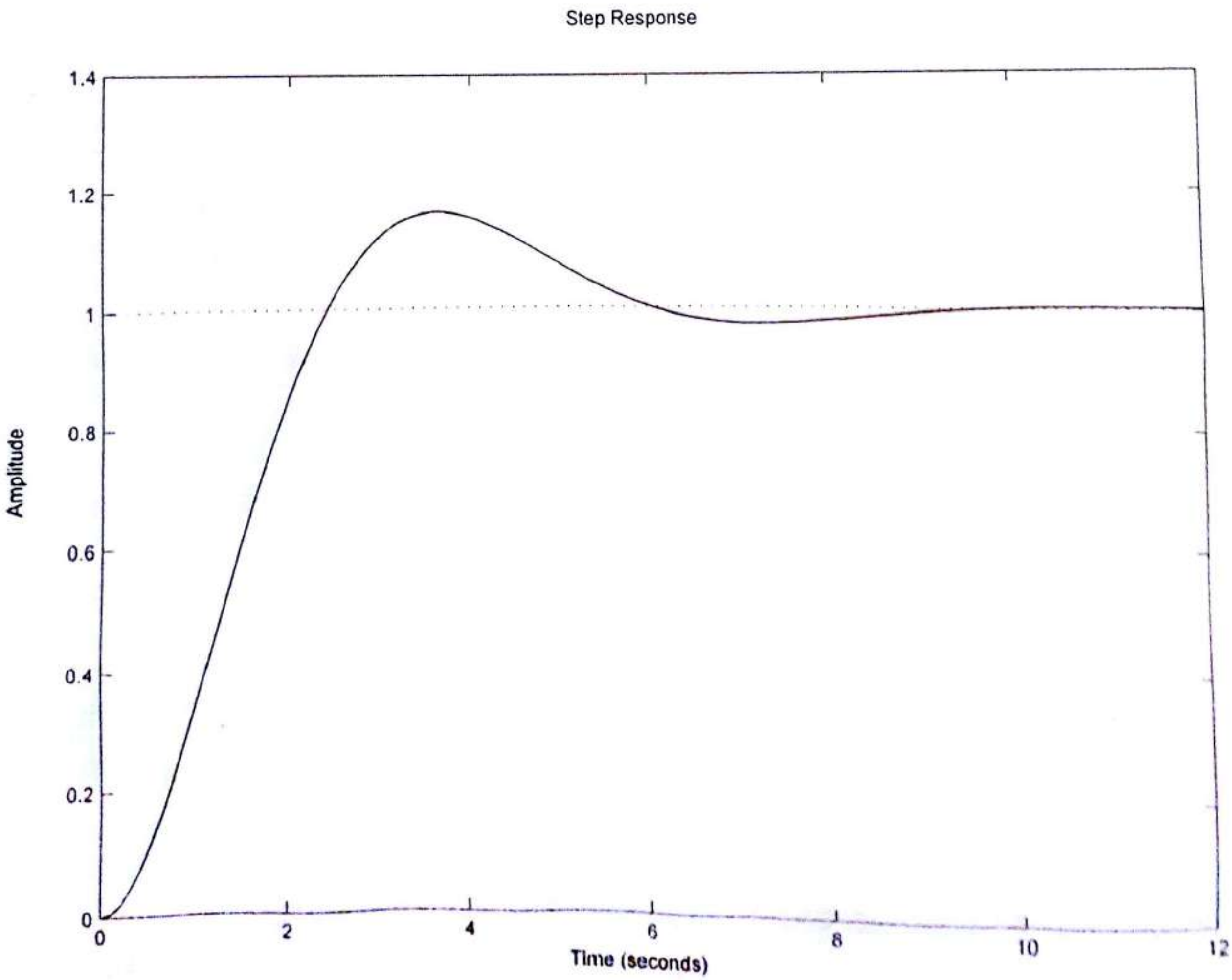
$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-0{,}5-j0{,}29}{(s+0{,}5+j0{,}87)} + \frac{-0{,}5+j0{,}29}{(s+0{,}5-j0{,}87)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$Y(t) = 1 - e^{-0{,}5t}\left(\cos(0{,}87t) + 0{,}58\,\mathrm{sen}(0{,}87t)\right)$$

En Matlab:

```
Ft= tf(1,[1 1 1])
step(Ft)
```



ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

Ejercicio 5:

Realizar el diagrama de simulación analógica y determinar la respuesta en régimen si la entrada es una rampa de la siguiente F_T:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{20s}{s^2+2s+2}$$

Operando de tal forma que:

$$C_{(s)}\left(s^2+2s+2\right) = 20s\,R_{(s)}$$

$$s^2C_{(s)} + 2sC_{(s)} + 2C_{(s)} = 20sR_{(s)}$$

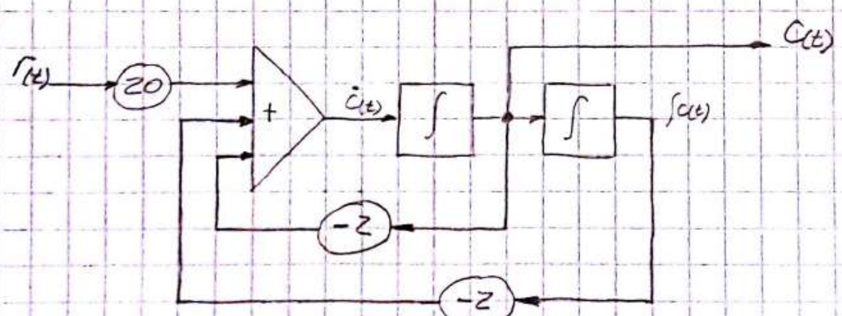
$$\mathcal{L}^{-1}: \quad \ddot{C}_{(t)} + 2\dot{C}_{(t)} + 2C_{(t)} = 20\dot{r}_{(t)}$$

Despejando a $\ddot{C}_{(t)}$:

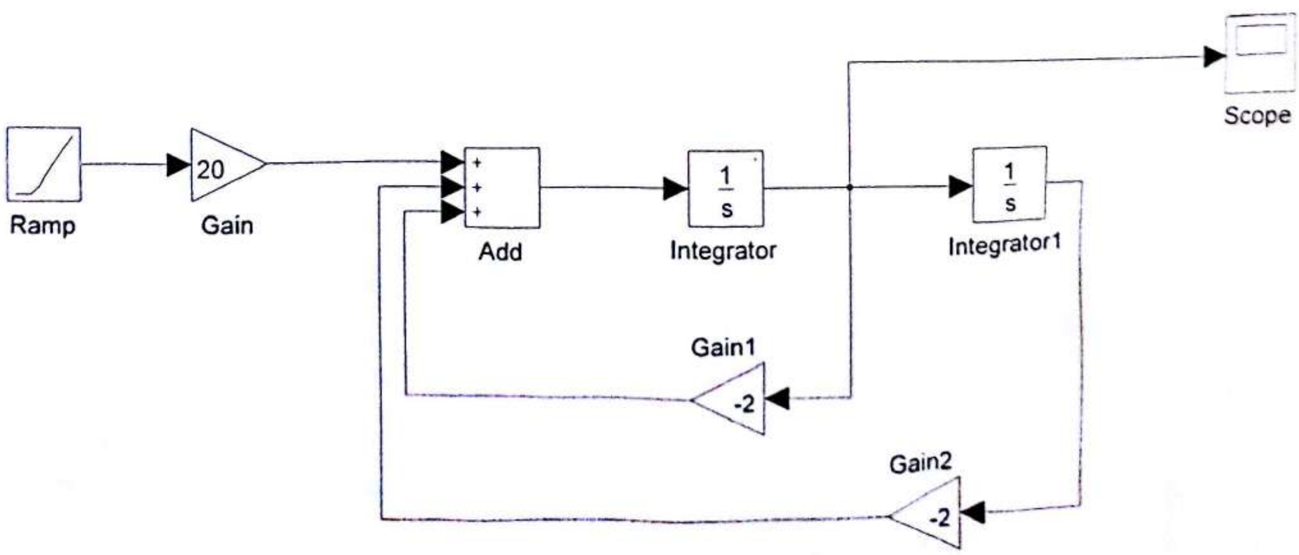
$$\ddot{C}_{(t)} = 20\dot{r}_{(t)} - 2\dot{C}_{(t)} - 2C_{(t)} \quad \to \int$$

$$\dot{C}_{(t)} = 20r_{(t)} - 2C_{(t)} - 2\int c_{(t)}\,dt$$

A esta última ecuación se le hace el diagrama de simulación:



En Simulink:



Verificando mediante la F_T: ante una entrada $R(t)$.

$$C_{(s)} = R_{(s)} \cdot \frac{20s}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{20s}{(s^2+2s+2)}$$

$$C_{(s)} = \frac{20s}{s^2(s+1+j)(s+1-j)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+1+j)} + \frac{C^*}{(s+1-j)}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \frac{20s}{\cancel{s^2}(s^2+2s+2)} = 0$$

$$B = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left\{\cancel{s^2} \cdot \frac{20s}{\cancel{s^2}(s^2+2s+2)}\right\} = \lim_{s \to 0} \frac{20(s^2+2s+2) - 20s(2s+2)}{(s^2+2s+2)^2} = 10$$

$$C = \lim_{s \to -1-j} \cancel{(s+1+j)} \frac{20s}{s^2\cancel{(s+1+j)}(s+1-j)} = -5-j5$$

$$C^* = -5+j5$$

Así:

$$C_{(s)} = \frac{0}{s^2} + \frac{10}{s} + \frac{-5-j5}{(s+1+j)} + \frac{-5+j5}{(s+1-j)}$$

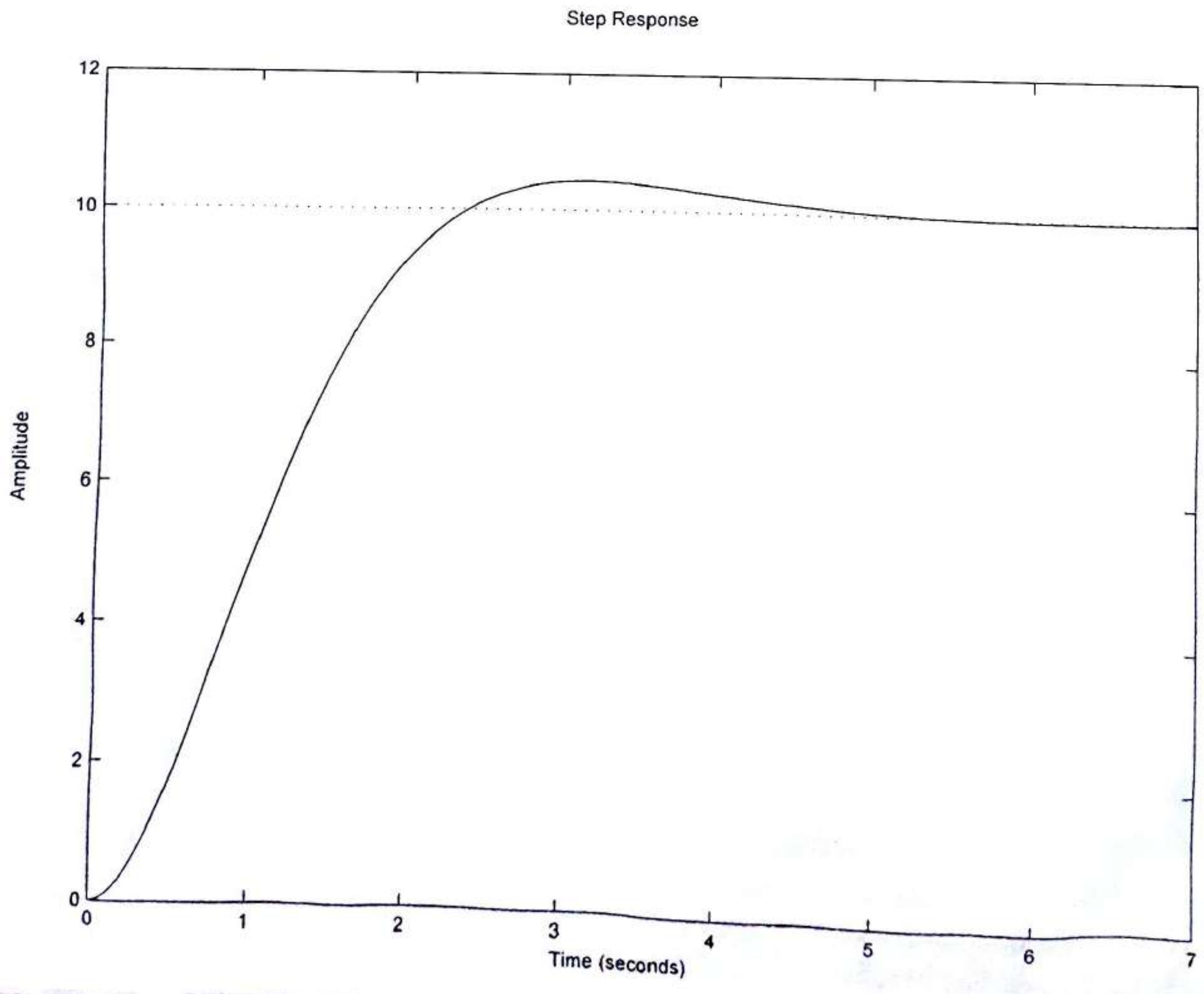
$\mathcal{L}^{-1}$

$$C(t) = 10 - 10e^{-t}(\cos(t) + \mathrm{sen}(t))$$

En Matlab:

```
Ft= tf(20,[1 2 2])
step(Ft)
```

→ se hace así ya que no hay función "ramp" en Matlab

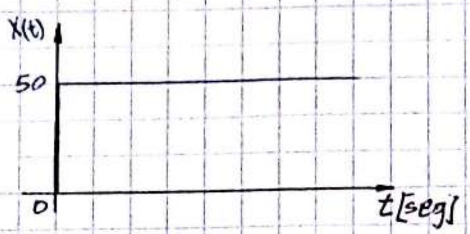


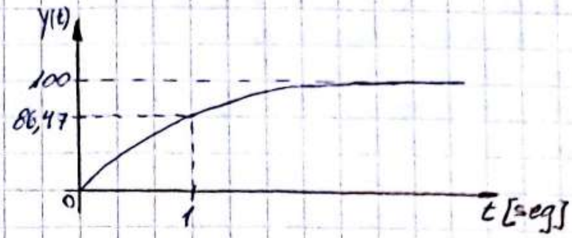
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P.4-1: Análisis de la respuesta transitoria.

FECHA

Ejercicio 1:
Evaluar la función de transferencia que corresponde al sistema que excitado con la función X(t), responde cómo Y(t).





En base a las gráficas temporales podemos decir que:

$$x(t) = 50\,\mu(t)$$

$$y(t) = 100\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

De esto último, debemos hallar τ mediante el dato suministrado:

$$86{,}47 = 100\left(1 - e^{-1/\tau}\right)$$

$$\frac{86{,}47}{100} = 1 - e^{-1/\tau} \quad \therefore \quad e^{-1/\tau} = 1 - \frac{86{,}47}{100} \quad \rightarrow \ln$$

$$-\frac{1}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{86{,}47}{100}\right)$$

$$\tau = \frac{-1}{\ln\left(1 - \frac{86{,}47}{100}\right)} = 0{,}4999 \cong 0{,}5\ [seg] \quad \therefore \quad y(t) = 100\left(1 - e^{-2t}\right)$$

Para hallar la $F_T = Y(s)/X(s)$, hay que hallar las transformadas de $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = 50\,\mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{50}{s}$$

$$y(t) = 100 - 100\,e^{-2t} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{100}{s} - \frac{100}{s+2} = \frac{200}{s(s+2)}$$

$$F_T = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{200}{s(s+2)}}{\frac{50}{s}}$$

$$F_T = \frac{4}{(s+2)}$$

Ejercicio 2.

Se ha excitado un sistema de segundo orden con una función escalón unitario. A partir del listado de valores y de la gráfica, reconstruir la función de transferencia del sistema y deducir los siguientes parámetros

1) - constante de amortiguamiento σ
2) - frecuencia natural no amortiguada ω_n
3) - frecuencia natural amortiguada ω_d
4) - factor de amortiguamiento ξ
5) - tiempo de retardo t_d
6) - tiempo de crecimiento t_r del 0% al 100%
7) - tiempo de pico t_p
8) - tiempo de establecimiento t_s al 5% y al 2%
9) - sobrepico porcentual $M_{p\%}$

Definimos:

$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

t_p: tiempo de pico, tiempo en el cual la función alcanza el mayor valor

t_s: tiempo de establecimiento, tiempo en el cual la función ingresa en una banda de $\pm x\%$ del valor de régimen, para no salir de la misma; "x" puede ser de 5% o 2%

$t_{s5\%} = \frac{3}{\sigma}$; $t_{s2\%} = \frac{4}{\sigma}$

t_d: tiempo de retardo, tiempo que le toma a la función en llegar por primera vez al 50% del valor de régimen.

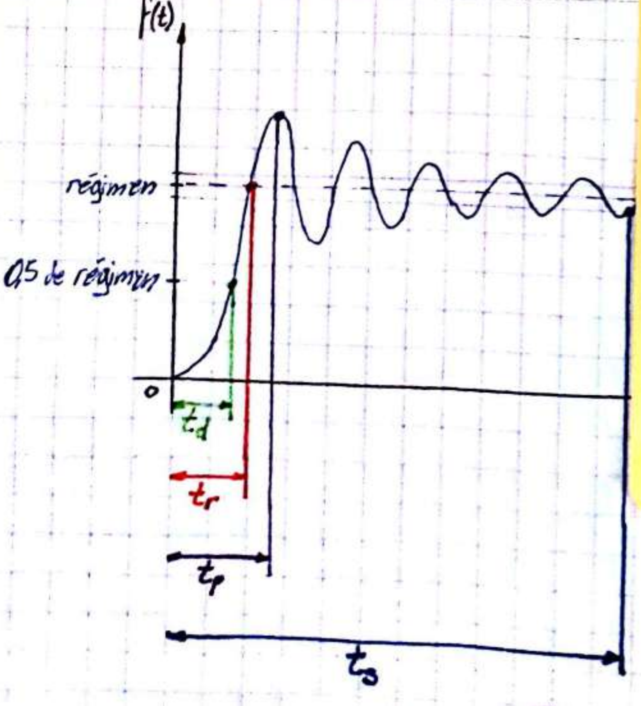
t_r: tiempo de crecimiento, tiempo que le toma a la función en llegar por primera vez al valor de régimen.

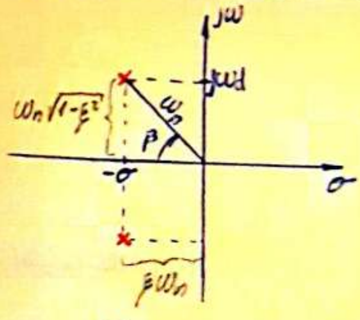
$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$

$M_{p\%}$: sobrepico porcentual, es en cuanto porciento se halla el valor de pico respecto del valor en régimen.

$$M_{p\%} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%$$

$$M_{p\%} = e^{-\sigma\pi/\omega_d} \cdot 100\%$$





$$\xi = \cos(\beta) = \frac{\sigma}{\omega_n} \therefore \sigma = \xi\omega_n$$

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$$

$$\beta = tg^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Ejercicio 2.

Se ha excitado un sistema de segundo orden con una función escalón unitario. A partir del listado de valores y de la gráfica, reconstruir la función de transferencia del sistema y deducir los siguientes parámetros

1). constante de amortiguamiento σ
2). frecuencia natural no amortiguada ω_n
3). frecuencia natural amortiguada ω_d
4). factor de amortiguamiento ξ
5). tiempo de retardo t_d
6). tiempo de crecimiento t_r del 0% al 100%
7). tiempo de pico t_p
8). tiempo de establecimiento t_s al 5% y al 2%
9). sobrepico porcentual $M_{p\%}$

Definimos:

t_p: tiempo de pico, tiempo en el cual la función alcanza el mayor valor

$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

t_s: tiempo de establecimiento, tiempo en el cual la función ingresa en una banda de $\pm x\%$ del valor de régimen, para no salir de la misma; "x" puede ser de 5% o 2%

$t_{s5\%} = \frac{3}{\sigma}$; $t_{s2\%} = \frac{4}{\sigma}$

t_d: tiempo de retardo, tiempo que le toma a la función en llegar por primera vez al 50% del val...

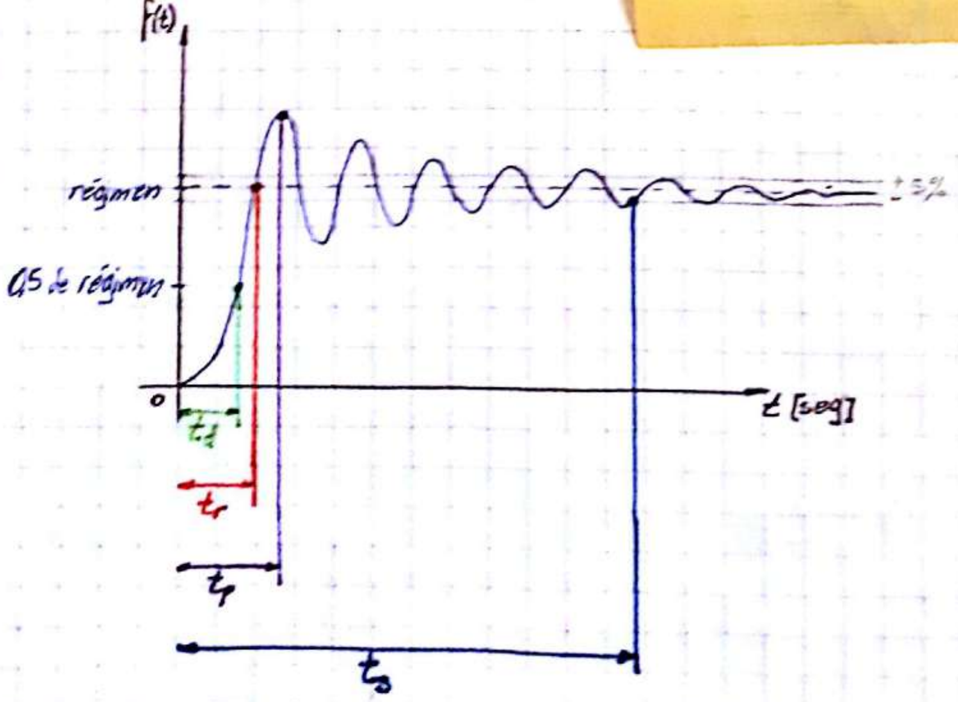
t_r: tiempo de crecimiento, tiempo que le tom... primera vez al va...

$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$

$M_{p\%}$: sobrepico porcentual, es en cuanto porcien... del valor en régimen.

$M_{p\%} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%$

$M_{p\%} = e^{-\sigma\pi/\omega_d} \cdot 100\%$

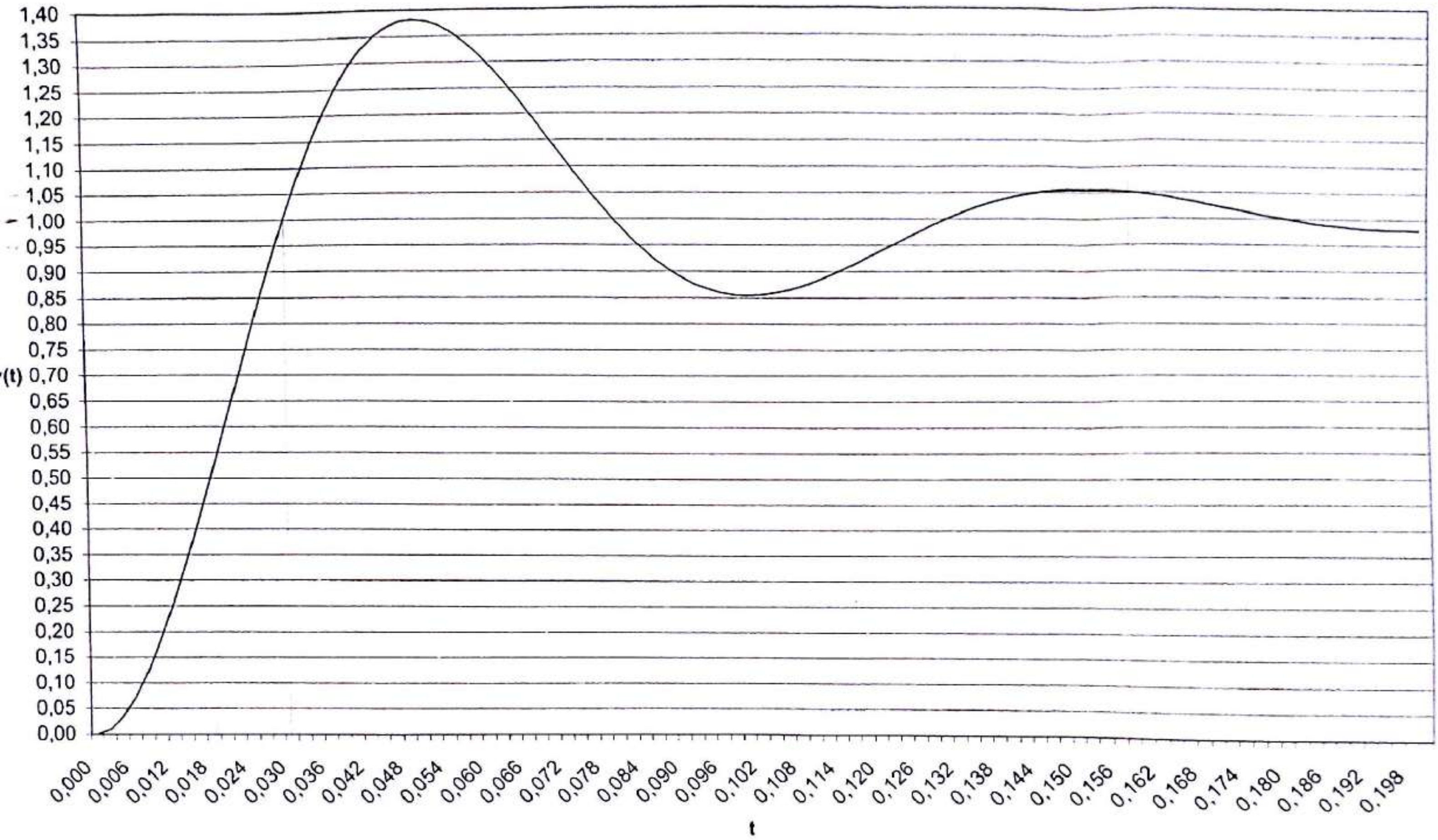


ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

TP 4 - Ejercicio 2



Listado de valoes

Valor	Tiempo	Función	Valor	Tiempo	Función
1	0,002	0,0084	51	0,102	0,8551
36	0,072	1,1222	86	0,172	1,0179
37	0,074	1,0887	87	0,174	1,0130
38	0,076	1,0563	88	0,176	1,0082
39	0,078	1,0253	89	0,178	1,0037
40	0,080	0,9962	90	0,180	0,9994
41	0,082	0,9692	91	0,182	0,9955
42	0,084	0,9448	92	0,184	0,9919
43	0,086	0,9232	93	0,186	0,9888
44	0,088	0,9044	94	0,188	0,9860
45	0,090	0,8886	95	0,190	0,9837
46	0,092	0,8758	96	0,192	0,9818
47	0,094	0,8660	97	0,194	0,9804
48	0,096	0,8591	98	0,196	0,9794
49	0,098	0,8551	99	0,198	0,9788
50	0,100	0,8538	100	0,200	0,9786

Observando la gráfica de la respuesta temporal del sistema, se trata de un sistema subamortiguado (2 polos complejos conjugados) con $\xi < 1$.

En base al listado de valores, se determinan:

7) $t_p = 0{,}05$ [seg] ; $y(t_p) = 1{,}3823$

8) Cómo el valor en régimen es de 1, calculo los límites para el $\pm 5\%$ y $\pm 2\%$

$$\underbrace{1. \pm 5\%}_{\pm 0{,}05} = \begin{cases} 1{,}05 \\ 0{,}95 \end{cases} \qquad \underbrace{1. \pm 2\%}_{0{,}02} = \begin{cases} 1{,}02 \\ 0{,}98 \end{cases}$$

Para el caso del $\pm 5\%$, los valores del listado son: $t_{s5\%} = 0{,}158$ [seg]

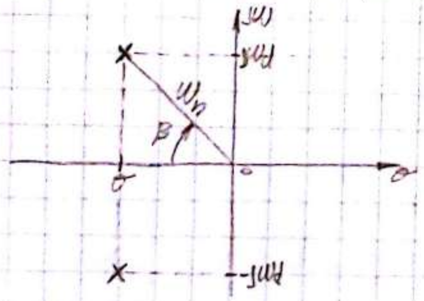
$y(t_{s5\%}) = 1{,}0490$

1) Sabiendo que: $t_{s5\%} = \frac{3}{\sigma}$ $\therefore$ $\sigma = \frac{3}{t_{s5\%}} = 18{,}99$

3) El t_p se relaciona cómo:

$$\underbrace{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}_{\text{se dispone de 7)}} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{\pi}{t_p} = \frac{\pi\ [\text{rad}]}{0{,}05\ [\text{seg}]} = 62{,}83\ [\text{rad/seg}]$$

4) Cómo se mencionó al principio, se trata de un sistema subamortiguado:



$\xi = \cos(\beta) = \frac{\sigma}{\omega_n}$ ⇒ relación desde el gráfico de raíces en S

$\xi = \frac{18{,}99}{65{,}64} = 0{,}29$ $\therefore$ $\beta = \cos^{-1}(\xi) = 73{,}18°$
$= 1{,}28$ [rad]

2) $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} = \sqrt{18{,}99^2 + 62{,}83^2}$

$\omega_n = 65{,}64$ [rad/seg] → con éste valor volvemos a 4)

5) Gracias a su definición, se lo obtiene por el listado de valores.

$t_d = 0{,}018$ [seg] ; $y(t_d) = 0{,}5029$

6) El primer valor que toma $y(t)$ cómo régimen (según el listado de valores)

$y(t_r) = 1{,}0101$ $\therefore$ $t_r = 0{,}030$ [seg]

Es posible obtenerlo mediante cálculo. cómo:

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi\,[rad] - 1{,}28\,[rad]}{62{,}83\,\left[\frac{rad}{seg}\right]} = 0{,}0296\ [seg]$$

Comparando valores entre el listado y el calculado, el error cometido es despreciable.

9) El sobrepico porcentual se lo obtiene con los datos del listado cómo:

$$M_{p\%} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\% = \frac{1{,}3823 - 1}{1} \cdot 100\%$$

$$M_{p\%} = 38{,}23\ \%$$

O bien por fórmula:

$$M_{p\%} = e^{-\sigma\pi/\omega_d} \cdot 100\% = e^{-18{,}99 \cdot \pi/62{,}83} \cdot 100\% = e^{-0{,}95} \cdot 100\%$$

$$M_{p\%} = 38{,}67\ \%$$

Nuevamente, el error cometido entre uno u otro procedimiento es insignificante.

Sólo resta dar forma a la F_T del sistema con los datos hallados; en general, todo sistema de 2° Orden tiene cómo F_T:

$$F_T = \frac{Y_{(s)}}{X_{(s)}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \leftarrow \text{reemplazando los valores}$$

$$F_T = \frac{Y_{(s)}}{X_{(s)}} = \frac{4{,}31 \times 10^3}{s^2 + 38{,}07\, s + 4{,}31 \times 10^3}$$

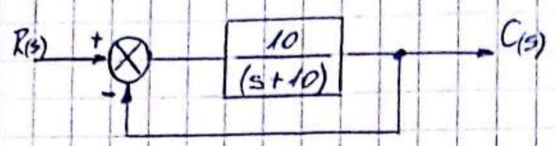
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P. 5-1: Respuesta en estado permanente. Error.

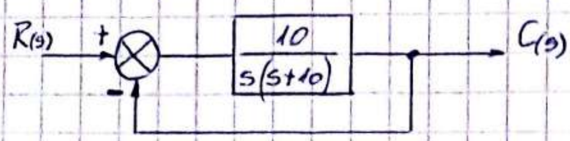
HOJA N°
FECHA

Ejercicio 1:
En los siguientes sistemas, hallar los coeficientes estáticos de error para entradas escalón, rampa y parábola.

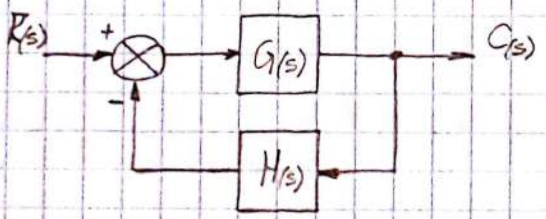
Sistema A



Sistema B



En general, un sistema realimentado es:



Por comparación entre este sistema general y los sistemas A y B, decimos que:

Sistema A: $G_{(s)} = \frac{10}{(s+10)}$; $H_{(s)} = 1$

Sistema B: $G_{(s)} = \frac{1}{s(s+10)}$; $H_{(s)} = 1$

Para una $r(t) = \mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} R_{(s)} = 1/s$:

"A": $K_p = \lim_{s\to 0} G_{(s)}.H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{10}{(s+10)} = 1$

"B": $K_p = \lim_{s\to 0} G_{(s)}.H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s(s+10)} = \infty$

Para una $r(t) = \rho_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} R_{(s)} = 1/s^2$:

"A": $K_v = \lim_{s\to 0} s.G_{(s)}.H_{(s)} = \lim_{s\to 0} s.\frac{10}{(s+10)} = 0$

"B": $K_v = \lim_{s\to 0} s.G_{(s)}.H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s}.\frac{10}{\cancel{s}(s+10)} = 1$

Para una $r(t) = t^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} R(s) = 1/s^3$:

"A" : $K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot G(s) \cdot H(s) = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot \frac{10}{(s+10)} = 0$

"B" : $K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot G(s) \cdot H(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \cdot \frac{10}{\cancel{s}(s+10)} = 0$

Ejercicio 2.

Hallar para los dos sistemas del Ejercicio 1 los errores estacionarios para las entradas escalón, rampa y parábola.

Ante una $r(t) = \mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} R(s) = 1/s$, el error estático es:

"A" : $E_{SS} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+1} = 0{,}5$

"B" : $E_{SS} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\infty} = 0$

Ante una $r(t) = P(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} R(s) = 1/s^2$, el error estático es:

"A" : $E_{SS} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0} = \infty$

"B" : $E_{SS} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{1} = 1$

Ante una $r(t) = t^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} R(s) = 1/s^3$, el error estático es:

"A" : $E_{SS} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$

"B" : $E_{SS} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$

- El error generalmente es la inversa de los coeficientes estáticos. Cuando el sistema presenta menos error, es cuando más grande son los coeficientes.

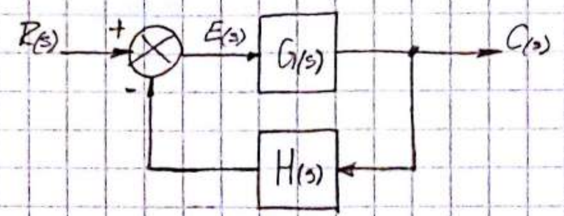
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N
FECHA

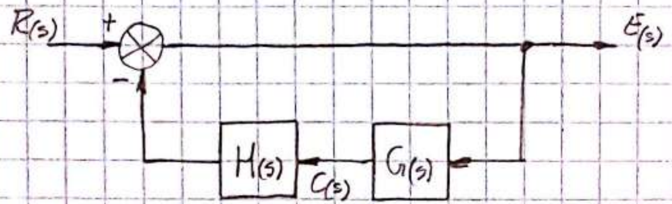
Ejercicio 3.

Determinar para los sistemas del Ejercicio 1 la respuesta temporal del error para una entrada rampa.

La señal de error, es la salida del Bloque "detector de error" o bloque suma presente al comienzo de todo sistema realimentado. Así:



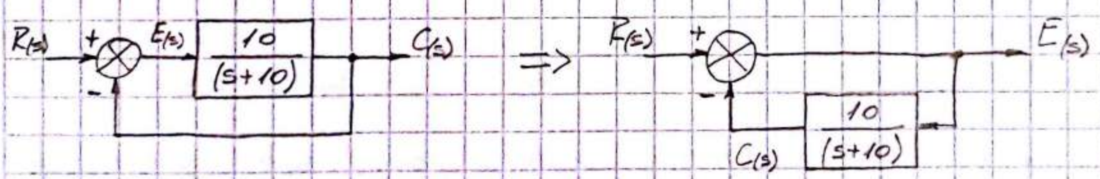
• Como se desea hallar el error ante cierta entrada, basta con reordenar el diagrama para obtener la nueva F_T.



Por lo tanto, la F_T es:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + 1 \cdot H(s) \cdot G(s)} \quad \therefore \quad E(s) = \frac{1}{1 + H(s) \cdot G(s)} \cdot R(s)$$

Sistema A:



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{10}{s+10}} = \frac{1}{\frac{s+10+10}{s+10}} = \frac{s+10}{s+20}$$

$$E(s) = \frac{s+10}{s+20} \cdot R(s)$$ ← siendo $R(s) = 1/s^2$, ya que $r(t) = f(t) = t$

$$E(s) = \frac{s+10}{(s+20)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{B}{s+20}$$

$$A_1 = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \cdot \frac{s+10}{\cancel{s^2}(s+20)} = 0,5$$

$$A_2 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \left(s^2 \cdot E(s) \right) = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \cancel{s^2} \cdot \frac{s+10}{\cancel{s^2}(s+20)} = \lim_{s \to 0} \frac{(s+20)-(s+10)}{(s+20)^2} = 0,025$$

NOTA

$$B = \lim_{s \to -20} (s+20) \cdot E(s) = \lim_{s \to -20} \cancel{(s+20)} \frac{(s+10)}{s^2 \cancel{(s+20)}} = -0{,}025$$

Por lo tanto:

$$E(s) = \frac{0{,}5}{s^2} + \frac{0{,}025}{s} - \frac{0{,}025}{(s+20)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$e(t) = 0{,}5 \cdot t + 0{,}025 - 0{,}025 \cdot e^{-20t}$$ → expresión temporal del error para la entrada rampa.

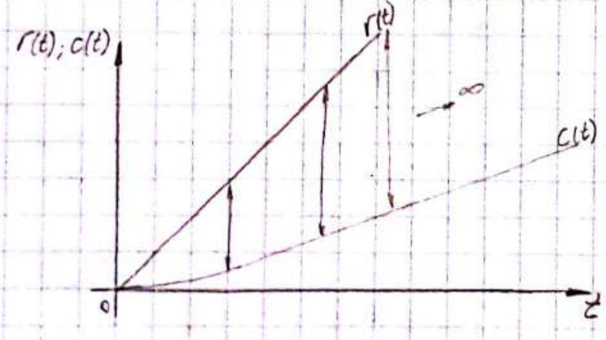
Teniendo en cuenta que:

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad \therefore \quad c(t) = r(t) - e(t)$$

donde $r(t) = \mathcal{r}(t) = t$:

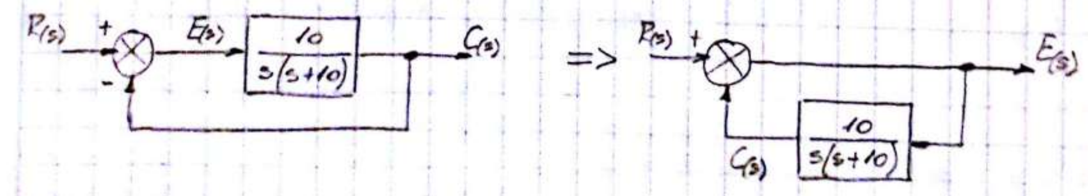
$$c(t) = t - 0{,}5 \cdot t - 0{,}025 + 0{,}025 \cdot e^{-20t}$$

$$c(t) = 0{,}5\, t - 0{,}025 + 0{,}025 \cdot e^{-20t}$$ → expresión temporal de la salida para la entrada rampa



- Como se observa en el gráfico, el error es la diferencia entre la señal de entrada (referencia) $r(t)$, y la señal de salida $c(t)$. A medida que crece el t el error aumenta, el sistema A no puede seguir a la señal de excitación.

Sistema B:



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{10}{s(s+10)}} = \frac{1}{\frac{s^2 + 10s + 10}{s(s+10)}} = \frac{s^2 + 10s}{s^2 + 10s + 10}$$

$$E(s) = \frac{s^2 + 10s}{s^2 + 10s + 10} \cdot R(s)$$ — siendo $R(s) = 1/s^2$, ya que $r(t) = \mathcal{r}(t) = t$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

$$E(s) = \frac{s^2+10s}{(s+5-\sqrt{15})(s+5+\sqrt{15})} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{B}{(s+5-\sqrt{15})} + \frac{C}{(s+5+\sqrt{15})}$$

$$A_1 = \lim_{s\to 0} s^2 . E(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2} . \frac{s^2+10s}{\cancel{s^2}(s+5-\sqrt{15})(s+5+\sqrt{15})} = 0$$

$$A_2 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(2-1)!} . \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left(s^2 . E(s)\right) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\cancel{s^2} . \frac{s^2+10s}{\cancel{s^2}(s^2+10s+10)}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{(2s+10)(s^2+10s+10) - (s^2+10s)(2s+10)}{(s^2+10s+10)^2} = 1$$

$$B = \lim_{s\to -5+\sqrt{15}} \cancel{(s+5-\sqrt{15})} . \frac{s^2+10s}{s^2\cancel{(s+5-\sqrt{15})}(s+5+\sqrt{15})} = -1{,}016$$

$$C = \lim_{s\to -5-\sqrt{15}} \cancel{(s+5+\sqrt{15})} . \frac{s^2+10s}{s^2(s+5-\sqrt{15})\cancel{(s+5+\sqrt{15})}} = 0{,}016$$

Por lo tanto:

$$E(s) = \frac{0}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1{,}016}{(s+1{,}127)} + \frac{0{,}016}{(s+8{,}873)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \downarrow$$

$$e(t) = 1 - 1{,}016 . e^{-1{,}127 . t} + 0{,}016 . e^{-8{,}873 . t}$$ → expresión temporal del error para la entrada rampa

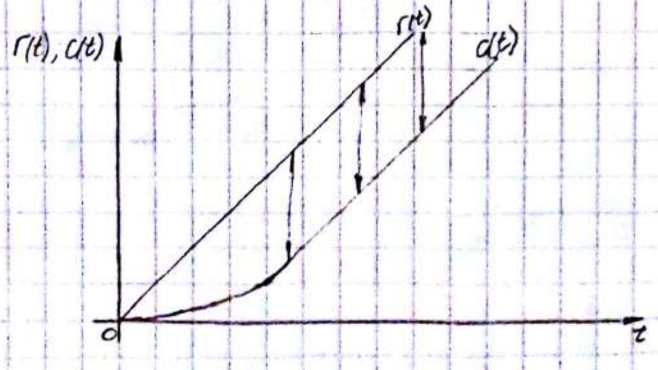
Cómo:

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad \therefore \quad c(t) = r(t) - e(t)$$

dónde $r(t) = \rho(t) = t$:

$$c(t) = t - 1 + 1{,}016 . e^{-1{,}127 . t} - 0{,}016 . e^{-8{,}873 t}$$

$$c(t) = -1 + t + 1{,}016 . e^{-1{,}127 . t} - 0{,}016 . e^{-8{,}873 . t}$$ → expresión temporal de la salida para la entrada rampa.

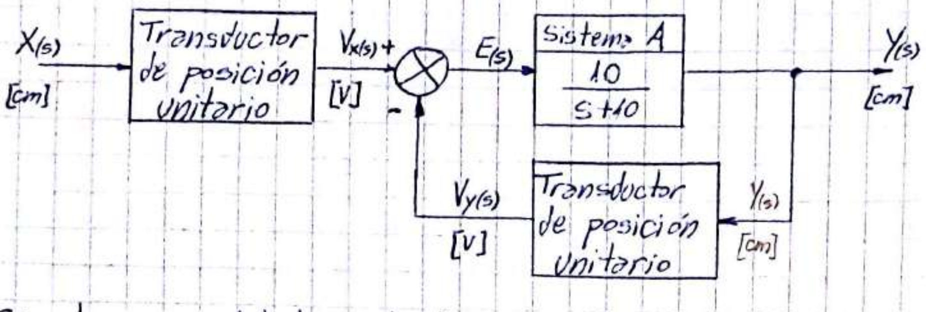


NOTA

• El error, siendo la diferencia entre la señal de referencia $r(t)$ y la señal de salida $c(t)$, permanece constante para todo $t > 0$.
El sistema B sigue a la señal de excitación con un error fijo, ya que se trata de un sistema Tipo 1.

Ejercicio 4.

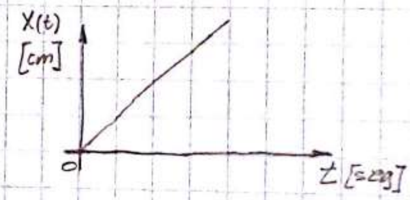
Dado el siguiente diagrama en bloques, considerar que el sistema "A" es un servo cuya variable controlada es la posición:



Si el cursor del transductor de entrada se desplaza a una velocidad constante de 1 [cm/seg], encontrar una vez extinguidos los transitorios los errores de posición y velocidad entre la entrada y salida.

Dado que el cursor de entrada se mueve a una velocidad constante, 1 cm/seg, la entrada $x(t)$ es una rampa:

$$\dot{x}(t) = 1 \left[\frac{cm}{seg}\right] \quad \rightarrow \int$$

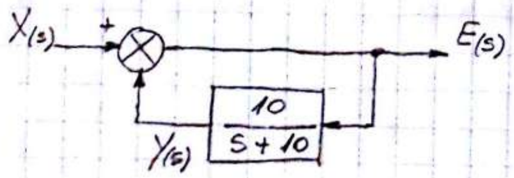


$$x(t) = \int \dot{x}(t)\, dt = \int 1 \left[\frac{cm}{seg}\right] dt = t \ [cm]$$

Como los transductores de posición son unitarios, 1 [cm] equivale a 1 [V], decimos que:

$$e(t) = x(t) - y(t) \quad \longrightarrow \text{error de posición}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \; E_{(s)} = X_{(s)} - Y_{(s)} \right.$$



$$\frac{E_{(s)}}{X_{(s)}} = \frac{1}{1 + \frac{10}{s+10}} = \frac{s+10}{s+20}$$

siendo $X_{(s)} = \frac{1}{s^2}$

$$E_{(s)} = \frac{(s+10)}{(s+20)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{B}{(s+20)}$$

$$A_1 = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \cdot \frac{(s+10)}{\cancel{s^2}(s+20)} = 0{,}5$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

$$A_2 = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(s^2 \cdot \frac{(s+10)}{s^2(s+20)}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{(s+20)-(s+10)}{(s+20)^2} = 0{,}025$$

$$B = \lim_{s\to -20} (s+20)\frac{(s+10)}{s^2(s+20)} = -0{,}025$$

$$E_{(s)} = \frac{0{,}5}{s^2} + \frac{0{,}025}{s} - \frac{0{,}025}{(s+20)}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$e(t) = 0{,}5 \cdot t + 0{,}025 - 0{,}025 \cdot e^{-20t} \; [cm] \rightarrow$$ expresión del error de posición

Cómo la posición (espacio) se relaciona con la velocidad mediante la derivada respecto de t, decimos que el error de velocidad es:

$$\dot{e}_{(t)} = \frac{de_{(t)}}{dt} = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot e^{-20t} \; \left[\frac{cm}{seg}\right] \rightarrow$$ expresión del error de velocidad

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t)$$

Los errores estáticos o de régimen permanente se obtendrán para $t \to \infty$

$$E_{ssp} = \lim_{t\to\infty} e_{(t)} = \infty \; [cm]$$

$$E_{ssv} = \lim_{t\to\infty} \dot{e}_{(t)} = 0{,}5 \; [cm/seg]$$

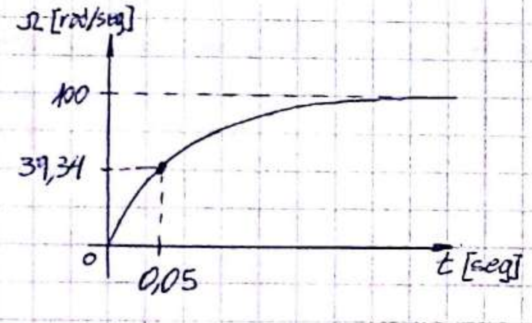
¿Por qué el error de velocidad es constante? porque la velocidad del cursor de entrada es 1 cm/seg y el de salida es 0,5 cm/seg.

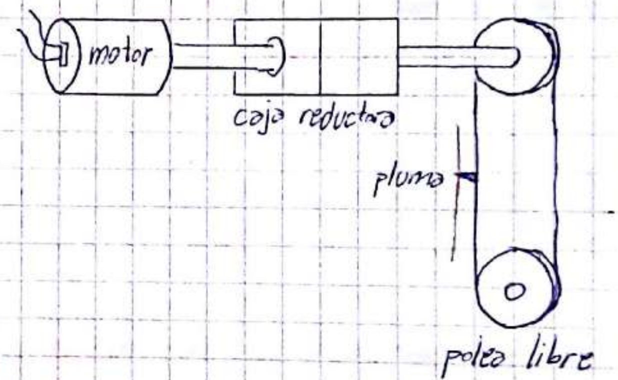
Ejercicio 5.

Se desea construir un registrador tipo x-t para graficar la posición en función del tiempo de una pieza móvil de desplazamiento restringido a una sola dirección en una máquina herramienta. Para ello se cuenta con los siguientes elementos:

- amplificador driver de ganancia de tensión ajustable utilizado como excitador.
- potenciómetros lineales de 10cm de carrera.
- fuente de tensión ±5V
- detector de error construido con amplificadores operacionales de ganancia unitaria.
- sistema electromecánico compuesto por un motor de C.C. controlado por armadura con caja reductora de relación 1/10 acoplada a su eje y el respectivo juego de poleas. La polea tractora tiene un diámetro de 2cm.

Se acopla la pluma del registrador directamente al hilo. Este sistema descripto se evaluó experimentalmente aplicando una tensión continua de 10V al motor y midiendo la velocidad en función del tiempo en el eje del motor.





Se pide:

a- construir el sistema completo de manera que un desplazamiento de 1cm en la pieza de la máquina, corresponda a 1cm de desplazamiento en la pluma del registrador.

b- con una ganancia de 2,5 en el driver calcular: sobrepico, tiempo de establecimiento y frecuencia amortiguada del sistema para una entrada escalón unitario. Graficar mapa de polos y ceros.

c- calcular el error para una entrada rampa unitaria.

d- disminuir 10 veces (sin agregar componentes al sistema) el error a una entrada tipo rampa unitaria.

e- manteniendo la modificación del punto anterior, calcular el sobrepico resultante para una entrada escalón unitario. Graficar mapa de polos y ceros. Según su criterio, ¿es aceptable este comportamiento para

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

un registrador ?, sugiera una solución

• El primer elemento que modelamos es el amplificador de ganancia ajustable:

$$\underset{[V]}{E_{(s)}} \longrightarrow \boxed{K_a} \longrightarrow \underset{[V]}{E_{a(s)}}$$

↳ excitación del motor

↳ señal de error

$$\frac{E_{a(s)}}{E_{(s)}} = K_a \text{ [adimensional]}$$

• El modelado del motor de C.C. lo hacemos en base a la experiencia que brinda la curva de velocidad en función del tiempo. Esta curva tiene una pinta similar a un sistema de 1° orden, con lo cual decimos que:

$$\dot{\theta}_{(t)} = 100\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$ → se debe determinar τ, para ello se usa el dato especificado para cierto t.

$$39{,}34 = 100\left(1 - e^{-0{,}05/\tau}\right) \quad \therefore \quad \tau = \frac{-0{,}05}{\ln\left(1 - \frac{39{,}34}{100}\right)} = 0{,}1 \text{ [seg]}$$

$$\dot{\theta}_{(t)} = 100\left(1 - e^{-10t}\right) \text{ [rad/seg]}$$ → expresión temporal de la velocidad del eje del motor de C.C.

$$\mathcal{L}\left\{ \quad \dot{\theta}_{(s)} = 100\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}\right) = \frac{1000}{s(s+10)} \text{ [rad/seg]}\right.$$

Cómo dicha curva se obtiene de una alimentación (entrada) de tensión continua, cuyo valor es:

$$e_{a(t)} = 10\,\mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E_{a(s)} = \frac{10}{s}$$

si relacionamos la velocidad (salida) con la alimentación (entrada) obtenemos la F_T del motor:

$$F_T = \frac{\dot{\theta}_{(s)}}{E_{a(s)}} = \frac{\frac{100\cancel{0}}{\cancel{s}(s+10)} \text{ [rad/seg]}}{\frac{\cancel{10}}{\cancel{s}} \text{ [V]}} = \frac{100}{s+10}\left[\frac{\text{rad}}{\text{seg}.V}\right]$$

$$\underset{[V]}{E_{a(s)}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Motor CC}\\ \hline \dfrac{100}{s+10}\end{array}} \longrightarrow \underset{[\text{rad/seg}]}{\dot{\theta}_{(s)}}$$

• La caja reductora, toma en su entrada la alta velocidad del motor y saca en su salida una velocidad menor, según sea su relación:

$$\underset{[\text{rad/seg}]}{\dot{\theta}_{(s)}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Caja R.}\\ \hline \dfrac{1}{10}\end{array}} \longrightarrow \underset{[\text{rad/seg}]}{\dot{\theta}_{R(s)}}$$

$$\frac{\dot{\theta}_{R(s)}}{\dot{\theta}_{(s)}} = \frac{1}{10} \text{ [adimensional]}$$

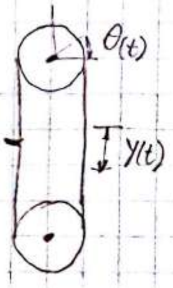
NOTA

Scanned by CamScanner

- Se debe convertir la velocidad en un desplazamiento. Si la velocidad es la derivada con respecto al tiempo del desplazamiento, lo inverso es una integración:

$$\underset{[rad/seg]}{\dot{\theta}_{r(s)}} \longrightarrow \overset{\int}{\boxed{\frac{1}{s}}} \longrightarrow \underset{[rad]}{\theta_{(s)}} \qquad \frac{\theta_{(s)}}{\dot{\theta}_{r(s)}} = \frac{1}{s} \ [seg]$$

- La polea-pluma relaciona un desplazamiento angular con uno lineal, tal que:



$\theta(t)$ es el ángulo rotado, $y(t)$ es el arco (desplazamiento) de dicho ángulo.

$$y(t) = r \cdot \theta(t)$$

$\mathcal{L}$

$$Y_{(s)} = r \cdot \theta_{(s)}$$

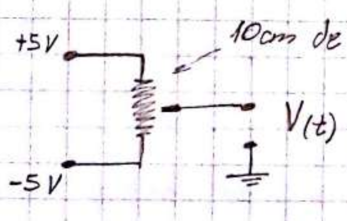
r: radio de la polea

$\varnothing = 2\,[cm] \ \therefore \ r = \frac{\varnothing}{2} = 1\,[cm] = 0{,}01\,[m]$

$$\frac{Y_{(s)}}{\theta_{(s)}} = r = 0{,}01\,[m/rad]$$

$$\underset{[rad]}{\theta_{(s)}} \longrightarrow \overset{\text{polea-pluma}}{\boxed{0{,}01}} \longrightarrow \underset{[m]}{Y_{(s)}}$$

- Un potenciómetro se usará cómo realimentación del sistema, convirtiendo el desplazamiento de la pluma en un valor de tensión.



$$V(t) = \frac{10\,[V]}{0{,}1\,[m]} \cdot X(t) = 100 \cdot X(t) \left[\frac{V}{m}\right]$$

$\mathcal{L}$

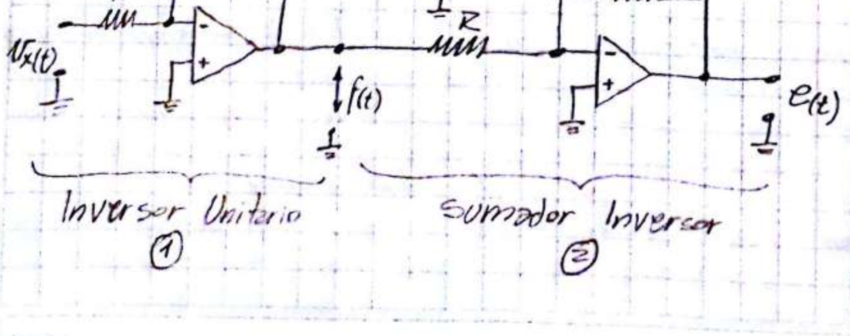
$$V_{(s)} = 100 \cdot X_{(s)} \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$\frac{V_{(s)}}{X_{(s)}} = 100 \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$\underset{[m]}{X_{(s)}} \longrightarrow \overset{\text{Potenciómetro}}{\boxed{100}} \longrightarrow \underset{[V]}{V_{(s)}}$$

Cómo la entrada de todo el sistema es la posición de una pieza móvil, se usa otro potenciómetro.

- El detector de error (o bloque sumador) relaciona las tensiones $v_{x(t)}$ y $v_{y(t)}$ mediante el circuito con A.O.:



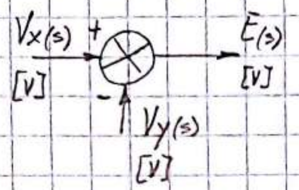
NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

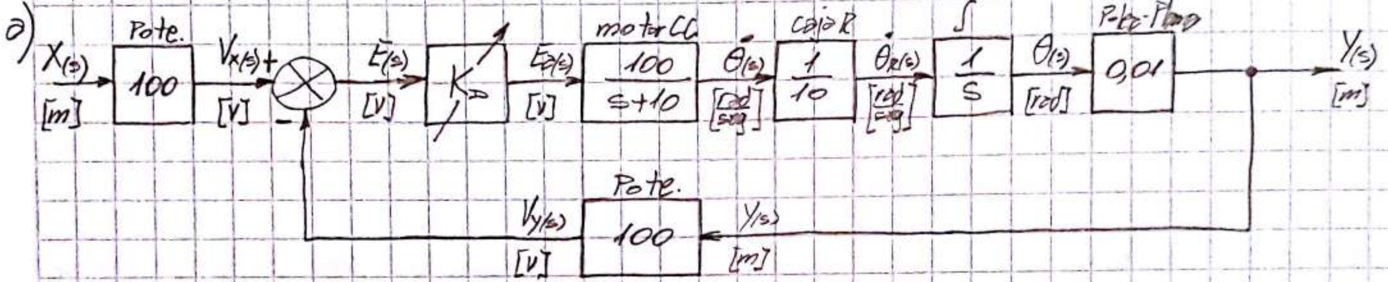
① $f(t) = -v_x(t)\cdot\frac{\cancel{R'}}{\cancel{R}} = -v_x(t)$

② $e(t) = -\left(f(t)\cdot\frac{\cancel{R'}}{\cancel{R}} + v_y(t)\cdot\frac{\cancel{R'}}{\cancel{R}}\right) = -f(t) - v_y(t)$

$$e(t) = v_x(t) - v_y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(s) = V_x(s) - V_y(s) \quad [V]$$



a)



Desde el diagrama del sistema se obtiene la F_T:

$$F_T = \frac{Y(s)}{X(s)} = 100\cdot\frac{K_D\cdot\frac{100}{s+10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s}\cdot 0{,}01}{1+K_D\cdot\frac{100}{s+10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s}\cdot 0{,}01\cdot 100} = 100\cdot\frac{\frac{0{,}1\,K_D}{s(s+10)}}{1+\frac{10\,K_D}{s(s+10)}} = 100\cdot\frac{0{,}1\,K_D}{s(s+10)+10K_D}$$

$$F_T = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10\cdot K_D}{s^2+10s+10K_D} \quad [\text{adimensional}]$$

Suponiendo que $x(t) = 0{,}01\,\mu(t)\,[m] \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{0{,}01}{s}\,[m]$

$$Y(s) = \frac{10K_D}{(s^2+10s+10K_D)}\cdot\underbrace{\frac{0{,}01}{s}}_{X(s)} = \frac{0{,}1\cdot K_D}{s\,(s^2+10s+10K_D)}$$

Por TVF:

$$Y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{0{,}1\cancel{K_D}}{\cancel{s}(\underbrace{s^2}_{0}+\underbrace{10s}_{0}+10\cancel{K_D})} = 0{,}01$$

$Y(\infty) = 0{,}01\,[m] = 1\,[cm]$ → Efectivamente, cuando la pieza se mueve $x(t) = 1\,[cm]$, el sistema hace una raya de $y(t) = 1\,[cm]$

b) Con una ganancia $K_D = 2{,}5$, se analiza la ecuación característica de la F_T, ya que contiene toda la información de la dinámica del sistema.

Ecu. Característica: $s^2 + 10s + 10K_D$

↳ Con $K_D = 2{,}5$: $s^2 + 10s + 25 \equiv s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2$ ← Forma genérica de un sist. de 2° orden

Haciendo términos semejantes:

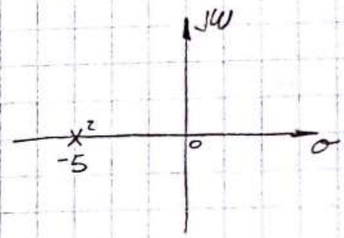
$$25 = \omega_n^2 \quad \therefore \; \omega_n = 5 \text{ [rad/seg]}$$

$$10 = 2\xi\omega_n \quad \therefore \; \xi = \frac{10}{2\omega_n} = \frac{10}{2 \cdot 5} = 1$$

Cómo $\xi = 1$, el sistema es críticamente amortiguado (ZRRI de la Ecu Característica). No tiene los parámetros pedidos.

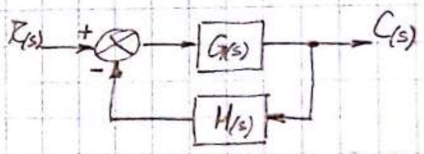
$\sigma = \xi\omega_n = 5 \rightarrow$ polo doble en $\sigma = -5$.

$s^2 + 10s + 25 = 0 \; \{ s_{1,2} = -5$

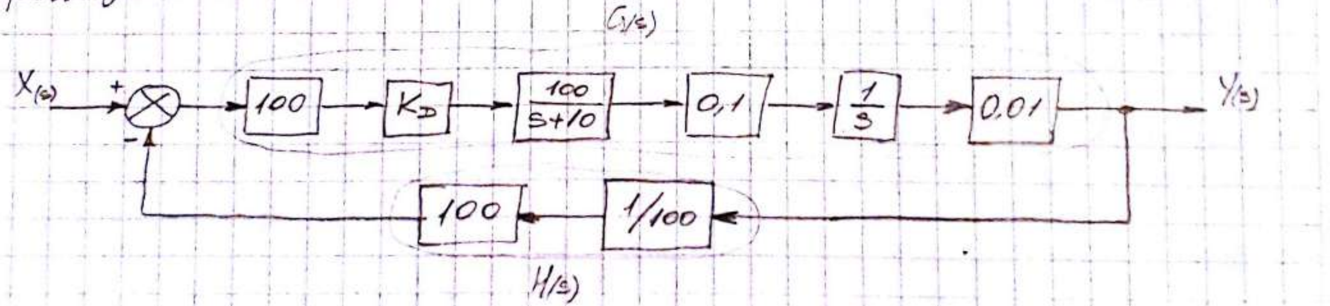


c) El error del sistema ante una entrada rampa unitaria se define cómo:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V} \quad ; \quad K_V = \lim_{s \to 0} s \cdot G_{(s)} \cdot H_{(s)}$$



Con el fin de expresar al sistema en estudio cómo la forma del sistema genérico realimentado, el bloque Potenciómetro de entrada lo paso luego del bloque sumador multiplicando; y en la realimentación será dividido, quedando:



$$G_{(s)} = \frac{10\,K_D}{s(s+10)} \quad ; \quad H_{(s)} = 1$$

Entónces:

$$K_V = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{10 \cdot K_D}{\cancel{s}(s+10)} \cdot 1 = K_D$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{K_D}$$

* Si $K_D = 2{,}5 \; \therefore \; e_{ss} = 0{,}4$

Cómo K_D es variable (se puede ajustar), el error se reduce variando la ganancia K_D del sistema.

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

d) $e'_{ss} = \frac{e_{ss}}{10} = 0{,}04 \quad \therefore \quad K'_p = \frac{1}{e'_{ss}} = \frac{1}{0{,}04} = 25$

e) Con la nueva ganancia $K'_p = 25$, se analiza la Ecu. Característica de la F_T para saber la nueva respuesta del sistema.

$$s^2 + 10s + 10K'_p \Rightarrow s^2 + 10s + 250 \equiv s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$s^2 + 10s + 250 = 0$

$\llcorner \begin{cases} s_1 = -5 + j15 \\ s_2 = -5 - j15 \end{cases}$

$\omega_n^2 = 250 \quad \therefore \quad \omega_n = 15{,}81 \text{ [rad/seg]}$

$2\xi\omega_n = 10 \quad \therefore \quad \xi = \frac{10}{2\omega_n} = 0{,}316$

$T = \frac{1}{\xi\omega_n} = 0{,}2 \text{ [seg]}$

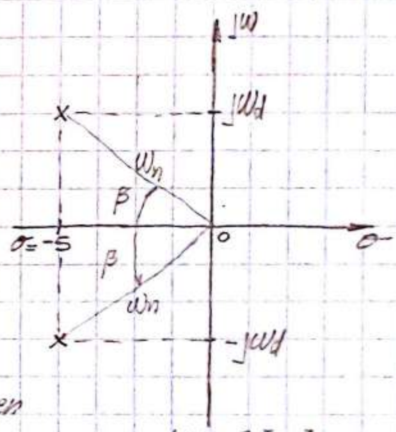
Por ser $\xi < 1$, el sistema es subamortiguado (2RCC), teniendo valores como:

$\sigma = \xi \cdot \omega_n \simeq 5$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \simeq 15 \text{ [rad/seg]}$

$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0{,}21 \text{ [seg]}$

$t_{s\,5\%} = \frac{3}{\sigma} = 0{,}6 \text{ [seg]}$



$M_{p\%} = e^{-\sigma\pi/\omega_d} \cdot 100\% = +35{,}09\%$ del valor de régimen

$\llcorner$ si $y(\infty) = 1 \text{ [cm]} \therefore y(t_p) = 1{,}3509 \text{ [cm]}$

$\beta = \arccos(\xi) = 71{,}58°$

Ante una $x(t) = 1 \text{ [cm]} \mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{0{,}01}{s} \text{ [m]}$, la salida $y(t)$ será:

$$Y(s) = \frac{10K'_p}{s^2 + 10s + 10K'_p} \cdot X(s) = \frac{250}{(s^2+10s+250)} \cdot \frac{0{,}01}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+5-j15)} + \frac{B^*}{(s+5+j15)}$$

$$A = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{2{,}5}{\cancel{s}(\cancel{s^2} + \cancel{10s} + 250)} = 0{,}01$$

$$B = \lim_{s \to -5+j15} (s+5-j15) \cdot Y(s) = \lim_{s\to -5+j15} \cancel{(s+5-j15)} \cdot \frac{2{,}5}{s\,\cancel{(s+5-j15)}(s+5+j15)} = -5m + j\frac{1}{600}$$

$$B^* = -5m - j\frac{1}{600}$$

$$Y(s) = \frac{0{,}01}{s} + \frac{-5m + j\frac{1}{600}}{(s+5-j15)} + \frac{-5m - j\frac{1}{600}}{(s+5+j15)}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$y(t) = 0{,}01 + \left(-5m + j\frac{1}{600}\right) \cdot e^{-5t} \cdot e^{j15t} + \left(-5m - j\frac{1}{600}\right) \cdot e^{-5t} \cdot e^{-j15t}$$

$$y(t) = 0{,}01 + e^{-5t}\left\{ -5m\,e^{j15t} + j\frac{1}{600}\,e^{j15t} - 5m \cdot e^{-j15t} - j\frac{1}{600} \cdot e^{-j15t} \right\}$$

$$Y(t)= 0{,}01 + e^{-5t}\left\{-5m\left(e^{j15t}+e^{-j15t}\right)\times\frac{2}{2} + j\frac{1}{600}\left(e^{j15t}-e^{-j15t}\right)\times\frac{j2}{j2}\right\}$$ — por Euler

$$Y(t)= 0{,}01 + e^{-5t}\left\{-0{,}01\cdot\cos(15t) - \frac{1}{300}\cdot\operatorname{sen}(15t)\right\}$$

$$Y(t)= 0{,}01 - 0{,}01\cdot e^{-5t}\left\{\cos(15t) + \frac{1}{3}\cdot\operatorname{sen}(15t)\right\} \quad [m]$$

$\sigma = -5$ $\omega_d = 15$

→ Comprobado con MS Math y Simulink; comprobándose también: t_p, $Y(t_p)$, etc.

El sistema al ser subamortiguado tiene un sobrepico, físicamente, para una variación de entrada de 1 [cm], la línea dibujada por la pluma (salida) sería de 1,3509 [cm], para luego quedar "oscilando" en 1 [cm]. La raya obtenida es un 35,09% más larga de lo que realmente se movió la pieza.

¿Es aceptable este comportamiento? Depende para qué se lo use, pero de por sí un error de 35% no es muy bueno.

¿Tiene solución? Con lo que se dispone no hay solución; si se aumenta la ganancia K_p (se disminuye el e_{ss}) se modifica de forma no deseable la dinámica del sistema.

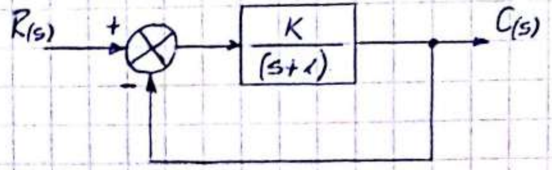
La mejor forma es compensar por Lugar de Raíces, en vez de un driver K_p hay que poner un filtro activo de forma de mejorar una cosa y no empeorar otra.

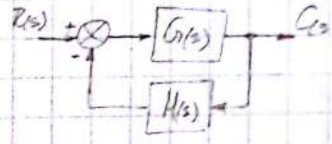
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P. 6-1: Lugar de raíces. Análisis de sistemas de control.

Ejercicio 1.

Para el siguiente sistema obtener: el diagrama del lugar de raíces y la expresión temporal de la salida $c(t)$ para una entrada escalón unitario. Verificar el tipo de dependencia entre la constante de tiempo del sistema y el valor de ganancia K.

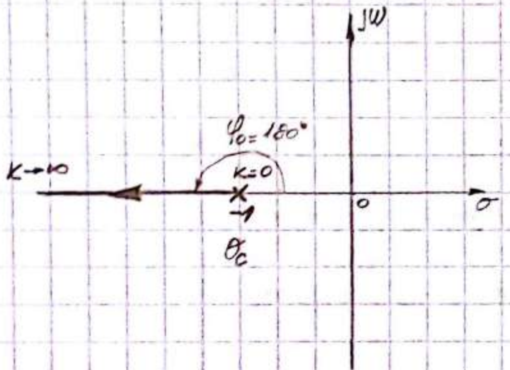




$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}$$

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)} \quad ; \quad H(s) = 1$$

Se indican los polos/ceros del lazo abierto en el plano S:



Regla de Evans: existe lugar de raíces en el eje real, en aquellos puntos en los cuales el número de singularidades a su derecha es impar. El diagrama de LR inicia en los polos de lazo abierto y termina siguiendo la pendiente de las asíntotas o en los ceros de lazo abierto. (p/ OCKSO)

• Las asíntotas serán:

$$\varphi_K = \frac{180°}{P-Z}(2K+1) \qquad K = 0, 1, \ldots, P-Z-1 \qquad \begin{cases} P: \text{n° de polos} \\ Z: \text{n° de ceros} \end{cases}$$

Como $K = 1-0-1 = 0$ → una asíntota

$$\varphi_0 = \frac{180°}{1-0}(2.0+1) = 180° \quad \to \text{asíntota a } 180°$$

• Baricentro de las asíntotas o $\sigma_c = \sigma_{corte}$:

$$\sigma_c = \frac{\Sigma Re\{P\} - \Sigma Re\{Z\}}{P-Z}$$

$$\sigma_c = \frac{-1-0}{1-0} = -1$$ → el LR comienza en -1 y va hasta $-\infty$ (por el eje σ) conforme $K \to \infty$

La F_T a Lazo Cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{(s+1)}}{1+\frac{K}{(s+1)}\cdot 1} = \frac{K}{s+1+K}$$ → el polo de Lazo Cerrado depende de K

Para una entrada $r(t) = \mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} R_{(s)} = \frac{1}{s}$, la salida será:

$$C_{(s)} = \frac{K}{(s+1+K)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{(s+1+K)}$$

$$A_0 = \lim_{s \to 0} s \cdot C_{(s)} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{K}{\cancel{s}(s+1+K)} = \frac{K}{1+K}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -1-K} (s+1+K) \cdot C_{(s)} = \lim_{s \to -1-K} \cancel{(s+1+K)} \frac{K}{s\cancel{(s+1+K)}} = -\frac{K}{1+K}$$

$$C_{(s)} = \frac{K}{1+K} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1+K)} \right] \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C(t) = \frac{K}{1+K} \left(1 - e^{-(1+K)t} \right)$$

$$\tau = \frac{1}{1+K} \ [seg]$$

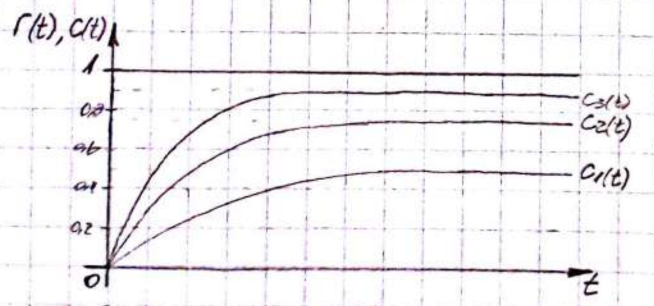
Veremos qué sucede al variar la ganancia K entre $0 \leq K \leq \infty$, respecto de la entrada escalón unitario:

Con $K = 1$; $c_1(t) = 0{,}5 \left(1 - e^{-2t}\right) \rightarrow c(\infty) = 0{,}5$, $\tau = 0{,}5$ [seg]

Con $K = 3$; $c_2(t) = 0{,}75 \left(1 - e^{-4t}\right) \rightarrow c(\infty) = 0{,}75$, $\tau = 0{,}25$ [seg]

Con $K = 9$; $c_3(t) = 0{,}9 \left(1 - e^{-10t}\right) \rightarrow c(\infty) = 0{,}9$, $\tau = 0{,}1$ [seg]

Con $K = \infty$; $c_4(t) = 1 \left(1 - e^{-\infty t}\right) \rightarrow c(\infty) = 1$, $\tau = 0$ [seg]



A medida que crece K, se aumenta el valor en régimen y la velocidad del sistema. Cuando $K \to \infty$, el sistema responde (en valor y velocidad) tal cual es la excitación (la salida copia al escalón).

En MatLab:

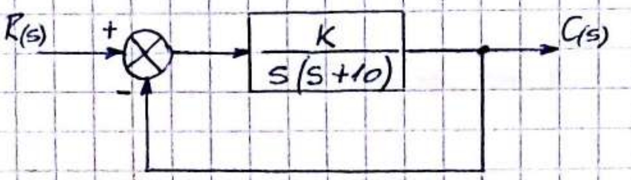
```
G = zpk([ ],[-1], 1)
rlocus(G)
```

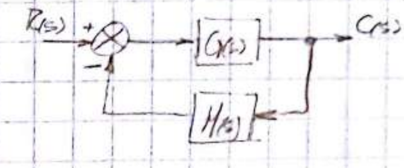
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

Ejercicio 2

Para el siguiente sistema, realizar el diagrama del lugar de raíces. Verificar y observar la variación del factor de amortiguamiento, sobrepico, frecuencia amortiguada y tiempo de establecimiento, con la variación de la ganancia K. ¿Hay algún valor que vuelva inestable al sistema?

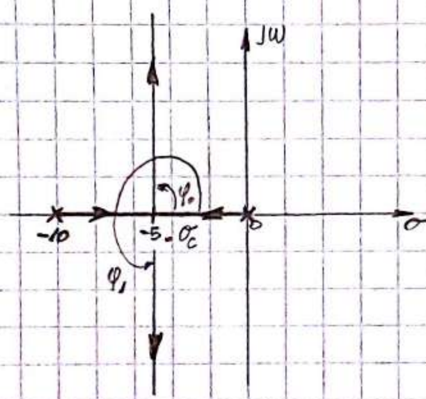




$$G_{(s)} = \frac{K}{s(s+10)} \quad ; \quad H_{(s)} = 1$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{K}{s(s+10)+K} = \frac{K}{s^2+10s+K}$$

└ Polos de Lazo Abierto $\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -10 \end{cases}$



Por Evans, hay LR entre los 2 polos

En Matlab:

```
G = zpk([],[0 -10],1)
rlocus(G)
```

• Asíntotas:

$$K = p - z - 1 = 2 - 0 - 1 = 1 \quad \therefore \quad K = 0, 1$$

$$\varphi_0 = \frac{180°}{p-z}(2.0+1) = 90°$$

$$\varphi_1 = \frac{180°}{p-z}(2.1+1) = 270°$$

• Baricentro o σ_{corte}:

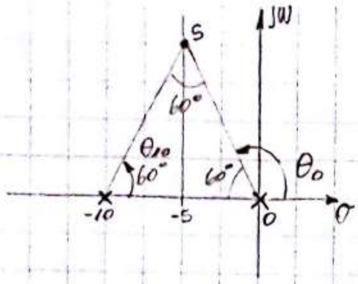
$$\sigma_c = \frac{\Sigma Re\{p\} - \Sigma Re\{z\}}{p-z} = \frac{0-10-0}{2-0} = -5$$

Del denominador de la F_T, aplicamos la condición de ángulo de Evans

$1 + G_{(s)} \cdot H_{(s)} = 0 \quad \therefore \quad G_{(s)} \cdot H_{(s)} = -1 = 1 \angle \pm 180°$ → para que un punto genérico S sea LR su contribución de fase es de 180°

Tomando un punto S en la asíntota superior φ_0, de tal manera que se forme un △ equilátero (con vértices en S y los polos), todos los ángulos internos valen 60°

NOTA



$\theta_0 = 120°$; $\theta_{10} = 60°$

$-\theta_0 - \theta_{10} = -120° - 60° = -180°$ → el punto s es LR

↳ contribución de ángulo de los polos, según el punto elegido

• Punto de bifurcación (pb):

Desde la Ecu. Característica de la F_T de lazo Cerrado

$1 + G_{(s)} \cdot H_{(s)} = 0$ ∴ $s^2 + 10s + K = 0$

↳ $K = -(s^2 + 10s)$

$\frac{\partial K}{\partial s} = 0$; $\frac{\partial K}{\partial s} = -(2s + 10) = 0$

↳ $2s + 10 = 0$ ∴ $\boxed{s = -5}$ → cómo el punto -5 está en el LR, es pb

• Criterio de R-H:

Desde la Ecu. Característica de la F_T de Lazo Cerrado.

$1 + G_{(s)} \cdot H_{(s)} = 0$ ∴ $1 + \frac{K}{s^2 + 10s} = 0$

$\boxed{s^2 + 10s + K = 0}$ ← aplico R-H a esta ecuación

s^2	1	K
s^1	10	
s^0	K	

- Cómo K varía entre $0 \leq K \leq \infty$, no hay valor de K que haga inestable al sistema, no hay valor que produzca cambio de signos en la 1° columna de R-H, las raíces de dicho polinomio se hallan en el SPI del plano s.

• Análisis del Sistema:

$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$ → por comparación con sist. de 2° Orden

$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 10s + K$

$\underbrace{2\xi\omega_n}_{\sigma} = 10$ ∴ $\sigma = \xi\omega_n = \frac{10}{2} = 5$ $\xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{5}{\sqrt{K}}$

$\omega_n^2 = K$ ∴ $\omega_n = \sqrt{K}$ [rad/seg]

$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2} = \sqrt{K - 25}$ [rad/seg] → a mayor K, mayor ω_d. Para $K < 25$, no existe ya que los polos están sobre el eje real y no hay subamortiguamiento

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

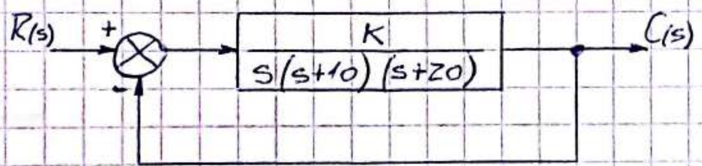
$M_{p\%} = e^{-\sigma\pi/\omega d} \cdot 100\% = e^{-5\pi/\sqrt{K-25}}$ → el sobrepico depende de K, a mayor K hay mayor sobrepico.

$t_{s5\%} = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ [seg]

* Si $K=4$, $\xi = 2{,}5$ → sist. sobreamortiguado
* Si $K=25$, $\xi = 1$ → sist. críticamente amortiguado
* Si $K=100$, $\xi = 0{,}5$ → sist. subamortiguado
* Si $K \to \infty$, $\xi \to 0$ → sist. oscilatorio

Ejercicio 3.

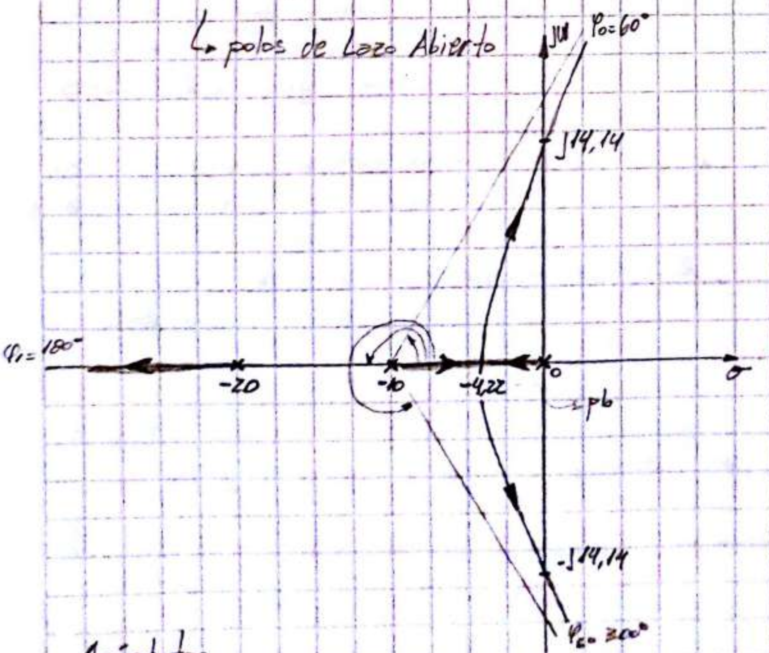
Dado el siguiente sistema, realizar el diagrama del lugar de raíces. ¿Es el sistema incondicionalmente estable?



$G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+20)}$; $H(s) = 1$

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+10)(s+20)+K} = \frac{K}{s^3+30s^2+200s+K}$

↳ polos de Lazo Abierto



Por Evans, hay LR entre 0 y -10, y desde -20 a -∞ (por el eje real σ)

En MatLab:

$G = zpk([\,],[0\ -10\ -20], 1)$
rlocus(G)

- Asíntotas:

$\left.\begin{matrix} p=3 \\ z=0 \end{matrix}\right\}$ $K = p - z - 1 = 2$ ∴ $K = 0, 1, 2$

Scanned by CamScanner

$$\varphi_0 = \frac{180°}{p-z}(2.0+1) = 60°$$

$$\varphi_1 = \frac{180°}{p-z}(2.1+1) = 180°$$

$$\varphi_2 = \frac{180°}{p-z}(2.2+1) = 300°$$

- Baricentro o σ_{corte}:

$$\sigma_c = \frac{\Sigma Re\{p\} - \Sigma Re\{z\}}{p-z} = \frac{0-10-20-0}{3-0} = -10$$

- Punto de bifurcación (pb):

$$s^3+30s^2+200s+K=0 \quad \therefore \quad K = -(s^3+30s^2+200s)$$

$$\frac{dK}{ds}=0 \quad \therefore \quad \frac{dK}{ds} = -(3s^2+60s+200) = 0 \longrightarrow \begin{cases} s_1 = -15{,}77 \\ s_2 = -4{,}22 \leftarrow pb \end{cases}$$

s_2 es pb, porque está en el LR en el eje real, no así el s_1

$$K\big|_{pb} = -(pb^3+30.pb^2+200.pb) = 384{,}899$$

- Criterio de R-H:

La Ecu. Característica de la F_{TLC}, tiene toda la información de los polos a LC para cualquier valor de $K \geq 0$.

$$s^3+30s^2+200s+K=0$$

s^3	1	200
s^2	30	K
s^1	$\frac{30.200-K}{30} = ①$	
s^0	K	

$① = 200 - \frac{K}{30}$ → para que el sistema sea estable (no haya cambios de signo), $K/30 \leq 200$

* $K_c \leq 6000$ → K crítico, mientras sea menor que 6000 el sistema es estable.
* $K > 6000$ → sistema inestable

- Cruce al eje jw:

Para hallar los puntos de corte al eje jw, se usa la fila 2 de R-H y K_c

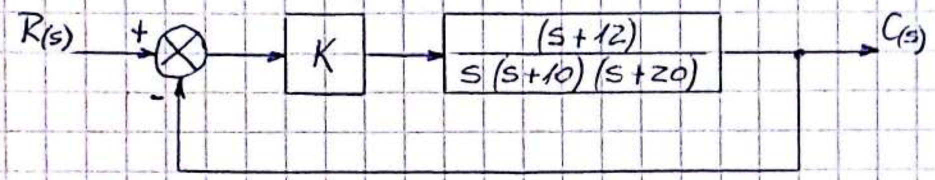
$$30s^2 + K_c = 0 \quad \therefore \quad 30s^2+6000=0 \quad \{ s_{1,2} = \pm j14{,}14$$

El sistema No es incondicionalmente estable, ya que existe un valor de K para el cuál se hace inestable.

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Ejercicio 4.

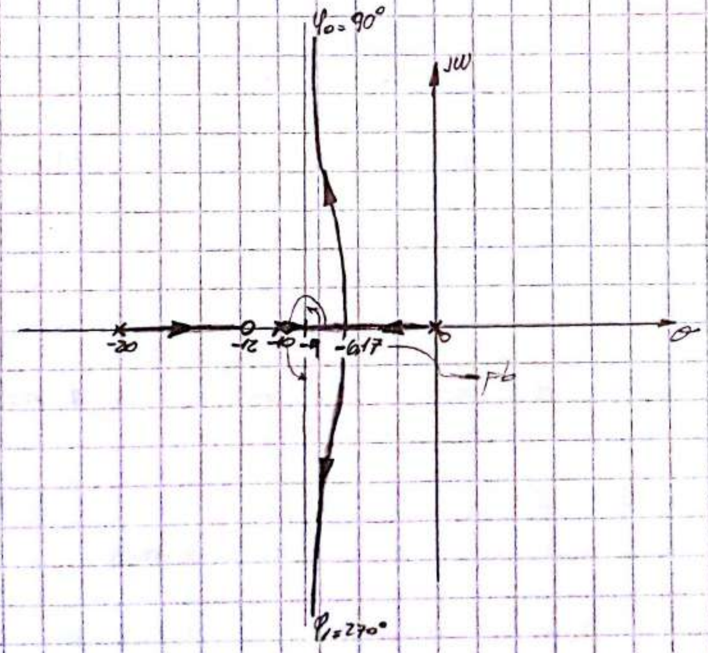
Para el siguiente sistema, realizar el diagrama del lugar de raíces. Comparar éste sistema con el del Ejercicio 3; observar la posición del cero y el efecto sobre las curvas.



$$G_{(s)} = K.\frac{(s+12)}{s(s+10)(s+20)} \quad ; \quad H_{(s)} = 1 \qquad \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{K.(s+12)}{s(s+10)(s+20)+K(s+12)} =$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{K(s+12)}{s^3+30s^2+(200+K)s+12K}$$

Polos / Ceros de la F_{TLA}: Z: $s=-12$
P: $s=0$, $s=-10$, $s=-20$



Por Evans existe LR entre 0 y -10, y entre -20 y -12.

En Matlab:

G = zpk([-12],[0 -10 -20], 1)
rlocus(G)

- Asíntotas: $p=3$, $z=1$ $\quad K = p-z-1 = 1 \quad \therefore K = 0, 1$

$$\varphi_0 = \frac{180°}{p-z}(2.0+1) = 90°$$

$$\varphi_1 = \frac{180°}{p-z}(2.1+1) = 270°$$

- Baricentro o σ_{corte}:

$$\sigma_c = \frac{\Sigma Re\{P\} - \Sigma Re\{Z\}}{p-z} = \frac{0-10-20-(-12)}{3-1} = -9$$

• Punto de bifurcación (pb):

Ecuación Característica de la F_T de LC igualada a cero, saco K

$$K \cdot \frac{(s+12)}{s(s+10)(s+20)} + 1 = 0 \quad \Leftarrow \quad 1 + G_{(s)} \cdot H_{(s)} = 0$$

$$K(s+12) + s(s+10)(s+20) = 0 \quad \therefore \quad K = -\frac{s(s+10)(s+20)}{(s+12)}$$

$$K = -\frac{s^3 + 30s^2 + 200s}{s+12}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2+60s+200)(s+12) - (s^3+30s^2+200s) \cdot 1}{(s+12)^2} = 0$$

para que sea cero, el Num. debe ser cero:

$$(3s^2+60s+200)(s+12) - (s^3+30s^2+200s) = 0$$

$$3s^3 + 60s^2 + 200s + 36s^2 + 720s + 2400 - s^3 - 30s^2 - 200s = 0$$

$$2s^3 + 66s^2 + 720s + 2400 = 0 \longrightarrow \begin{cases} s_1 = -6{,}17 \Rightarrow pb \\ s_{2,3} = -13{,}41 \pm j\,3{,}8 \end{cases}$$

Sólamente, la raíz s_1 es "pb" ya que está sobre el eje real y además está sobre el LR.

• Criterio de R-H:

Vemos si existe algún valor de K que haga inestable al sistema. Desde la Ecu. Característica de la F_T de Lazo Cerrado:

$$1 + K\frac{(s+12)}{s(s+10)(s+20)} = 0 \quad \Leftarrow \quad 1 + G_{(s)} \cdot H_{(s)} = 0$$

$$s(s+10)(s+20) + K(s+12) = 0$$

$$s^3 + 30s^2 + 200s + Ks + 12K = 0$$

$$\boxed{s^3 + 30s^2 + (200+K)s + 12K = 0}$$ → esta ecuación, da 3 puntos en el plano S para cada valor de K.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & (200+K) \\ s^2 & 30 & 12K \\ s^1 & \frac{30(200+K) - 12K}{30} = ① & \\ s^0 & 12K & \end{array}$$

$① = 200 + 0{,}6K$

Cómo $K > 0$ $(0 \le K \le \infty)$, no hay cambios de signo en la 1° columna de R-H, entonces todas las raíces de $1 + G_{(s)} H_{(s)}$ están en el SPI del plano S; el sistema es Estable

El agregado del "cero", volvió absolutamente estable al sistema

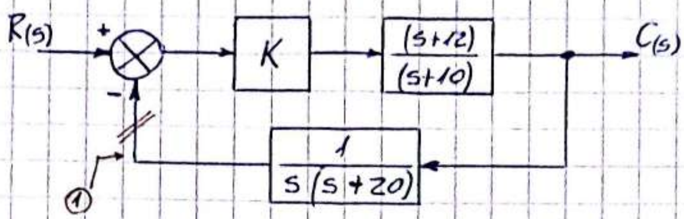
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 5.

Antes de realizar el diagrama del lugar de raíces del siguiente sistema, verifique si hay alguna diferencia con el del Ejercicio 4.



$$G_{(s)} = K \cdot \frac{(s+12)}{(s+10)} \quad ; \quad H_{(s)} = \frac{1}{s(s+20)}$$

Si bien es notorio que las funciones $G_{(s)}$ y $H_{(s)}$ de ámbos sistemas son distintos, daría lugar a pensar que los LR de los sistemas también son distintos; lo que caeríamos en un error.

El diagrama del LR se traza a partir de la F_T de Lazo Abierto, $G_{(s)} \cdot H_{(s)}$. Dicha función se obtiene de "cortar" el lazo de realimentación y "mirar" hacia adentro como se indica en ①.

Así, para éste sistema se tiene:

$$F_{TLA} = G_{(s)} \cdot H_{(s)} = K \cdot \frac{(s+12)}{(s+10)} \cdot \frac{1}{s(s+20)} = K \frac{(s+12)}{s(s+10)(s+20)}$$

Por lo tanto, ámbos sistemas tienen igual LR.

Ejercicio 6.

Realizar el lugar de raíces completo $(-\infty < K < \infty)$ del Ejercicio 3.

Recordando la F_T de Lazo Abierto del Ejercicio 3:

$$G_{(s)} \cdot H_{(s)} = K \cdot \frac{1}{s(s+10)(s+20)}$$

* Para los $K > 0$, fueron calculados en el Ejercicio 3:

- Asíntotas: $\varphi_0 = 60°$, $\varphi_1 = 180°$, $\varphi_2 = 300°$
- σ_{corte}: $\sigma_c = -10$
- pb: $pb = -4{,}22$
- Criterio R-H: $K_c = 6000$
- Cruce eje $j\omega$: $s = \pm j14{,}14$

NOTA

* Para los $K<0$, físicamente, la realimentación se vuelve positiva.

- Asíntotas:

$$p/K<0 \Rightarrow \varphi_K = \frac{180°}{p-z}(2k) \qquad \text{con } k = 0, 1, \dots, (p-z-1)$$

$$\begin{cases} p=3 \\ z=0 \end{cases} \quad \therefore k = 0, 1, 2$$

$$\phi_0 = \frac{180°}{p-z}(2.0) = 0°$$

$$\phi_1 = \frac{180°}{p-z}(2.1) = 120°$$

$$\phi_2 = \frac{180°}{p-z}(2.2) = 240°$$

El LR p/K<0, es el "resto" del eje real que <u>no</u> es LR p/K>0.

- Baricentro o σ_{corte}:

$$\sigma_c = \frac{\Sigma Re\{p\} - \Sigma Re\{z\}}{p-z} = \frac{0-10-20-0}{3-0} = -10$$

- Punto de bifurcación (pb).

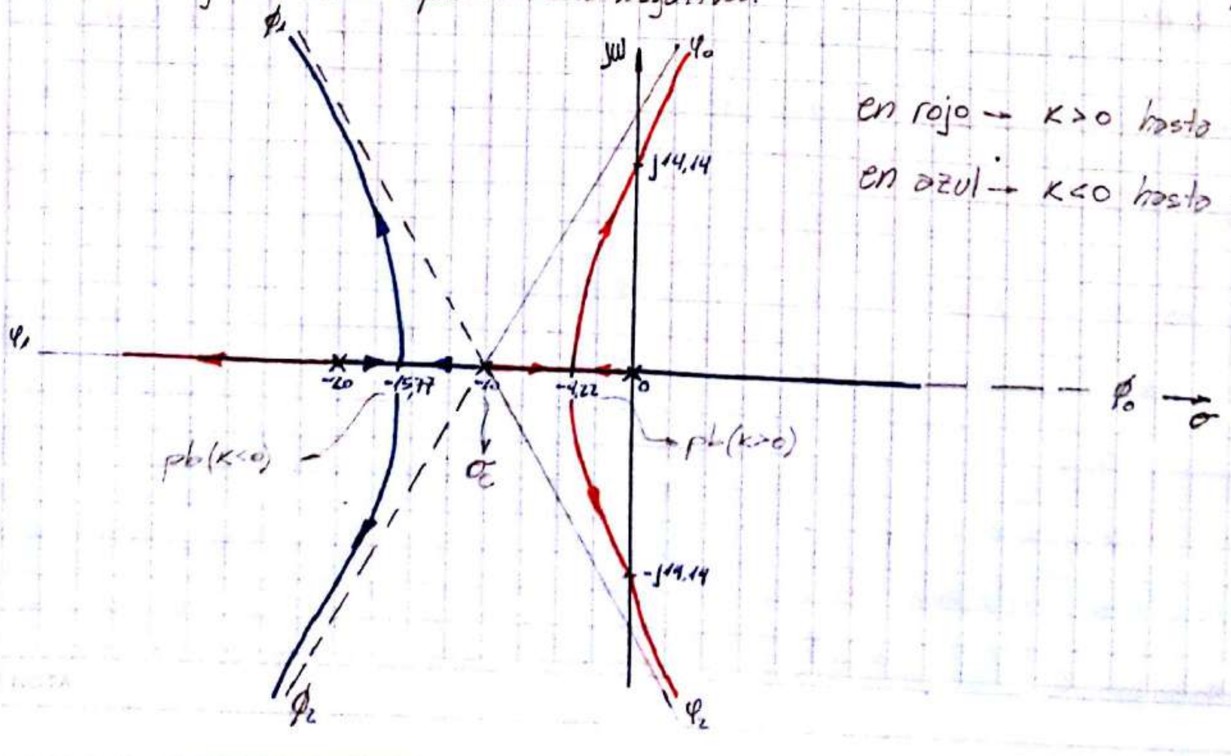
Con la F_{TLC}, $1+G(s) \cdot H(s) = 0$, se saca el K y se lo deriva igualando a cero

$$1 + K \cdot \frac{1}{s^3+30s^2+200s} = 0$$

$$s^3+30s^2+200s + K = 0 \quad \therefore \quad K = -(s^3+30s^2+200s)$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dK}{ds} = -(3s^2+60s+200) = 0 \longrightarrow \begin{cases} s_1 = -4{,}22 \\ s_2 = -15{,}77 \Rightarrow pb\,(K<0) \end{cases}$$

para el caso de $K<0$, el "pb" será el $s_2 = -15{,}77$, ya que ahora sí pertenece al LR bajo condición que K son negativos.



en rojo → $K>0$ hasta $+\infty$

en azul → $K<0$ hasta $-\infty$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Ejercicio 1:

Dado el siguiente sistema y la relación entre las variables de entrada y salida, obtener el diagrama de Bode correspondiente.

$$y''(t) + 2y'(t) = x''(t) + 11x'(t) + 10\,x(t)$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)\cdot H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Cómo hay que determinar la $F_T = Y(s)/X(s)$ del sistema, se transforma por Laplace la ecuación diferencial, tomando $C.I. = 0$.

$$s^2\,Y(s) + 2s\,Y(s) = s^2\,X(s) + 11s\,X(s) + 10\,X(s)$$

$$Y(s)\left(s^2+2s\right) = X(s)\left(s^2+11s+10\right)$$

$$G(s)\cdot H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+11s+10}{s^2+2s}$$

$$F_T = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+1)(s+10)}{s\,(s+2)}$$

Expresamos a la F_T en formato de Bode:

$$G(s)\cdot H(s) = \frac{1\left(\frac{s}{1}+1\right)10\left(\frac{s}{10}+1\right)}{s\cdot 2\left(\frac{s}{2}+1\right)} = 5\cdot\frac{(s+1)(0{,}1s+1)}{s\,(0{,}5s+1)}$$

$K_{te\ total} = 5 \longrightarrow 13{,}98\ dB$

Escala de frecuencia $\begin{cases} \omega_{min} = 1 \longrightarrow 0{,}1 \\ \omega_{max} = 10 \longrightarrow 100 \end{cases}$

Hacemos $s = j\omega$:

$$G(j\omega)\cdot H(j\omega) = 5\cdot\frac{(1+j\omega)\cdot(1+j0{,}1\omega)}{j\omega\cdot(1+j0{,}5\omega)}$$

• Módulo:

$$\left|G(j\omega)\cdot H(j\omega)\right| = |5|\cdot\frac{|1+j\omega|\cdot|1+j0{,}1\omega|}{|j\omega|\cdot|1+j0{,}5\omega|} = \frac{5\cdot\sqrt{1+\omega^2}\cdot\sqrt{1+0{,}01\omega^2}}{\omega\cdot\sqrt{1+0{,}25\omega^2}}$$

expresado en dB:

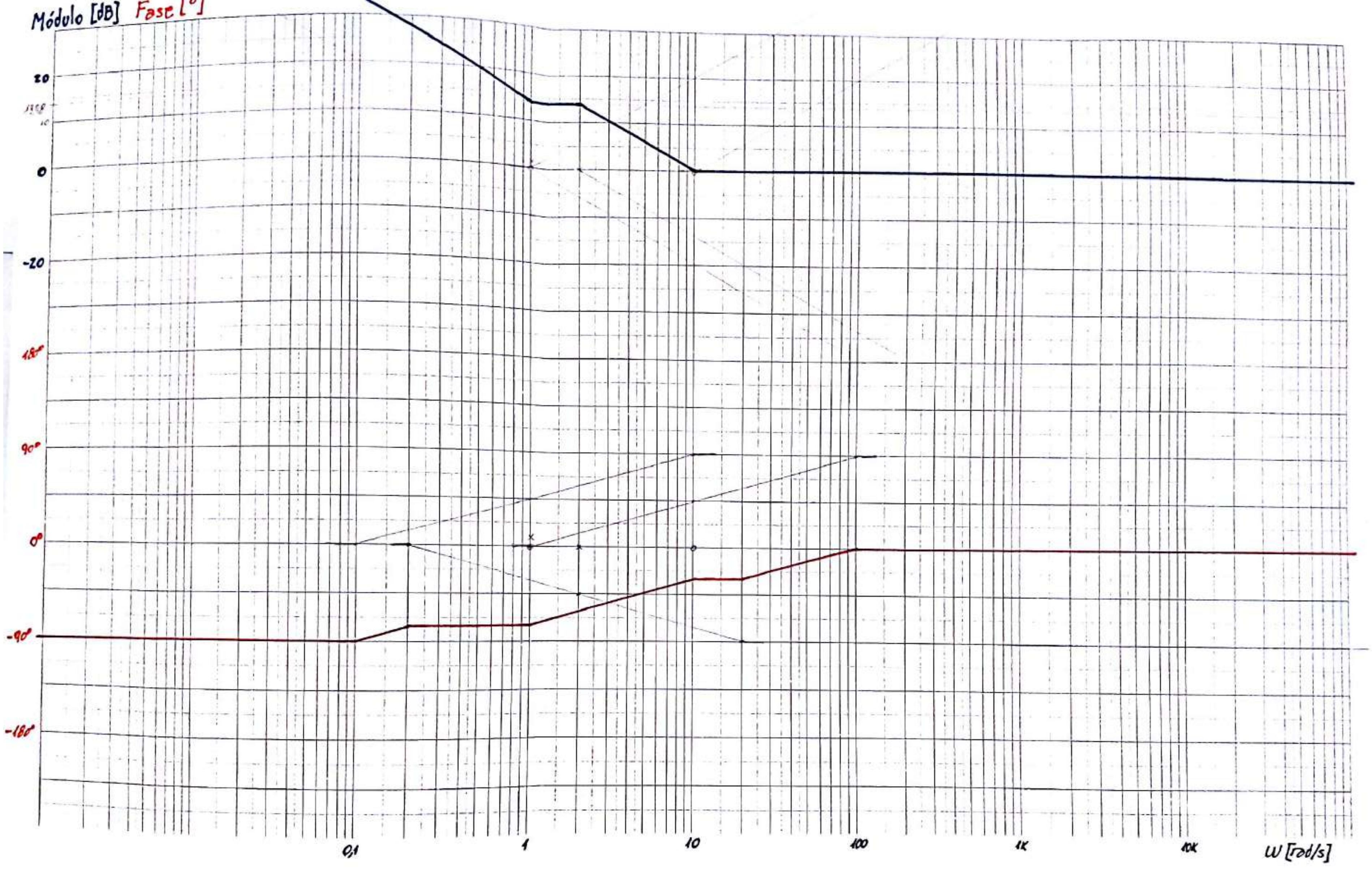
$$\left|G(j\omega)\cdot H(j\omega)\right|_{dB} = \underbrace{20\log(5)}_{13{,}98\,dB} + 10\log\left(1+\omega^2\right) + 10\log\left(1+0{,}01\omega^2\right) - 20\log(\omega) - 10\log\left(1+0{,}25\omega^2\right)$$

• Fase:

$$\angle G(j\omega)\cdot H(j\omega) = \frac{\angle 5\cdot\angle 1+j\omega\cdot\angle 1+j0{,}1\omega}{\angle j\omega\cdot\angle 1+j0{,}5\omega}$$

$$\angle G(j\omega)\cdot H(j\omega) = \overbrace{tg^{-1}\frac{0}{5}}^{=0} + tg^{-1}\frac{\omega}{1} + tg^{-1}\frac{0{,}1\omega}{1} - \overbrace{tg^{-1}\frac{\omega}{0}}^{90°} - tg^{-1}\frac{0{,}5\omega}{1}$$

$$\angle G(j\omega)\cdot H(j\omega) = tg^{-1}\omega + tg^{-1}0{,}1\omega - 90° - tg^{-1}0{,}5\omega$$



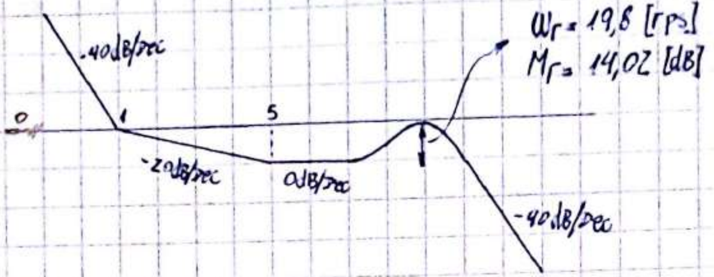
Comprobación con MatLab:

```
num = [1  11  10]
den = [1  2  0]
tf (num, den)
bode(num, den)
```

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

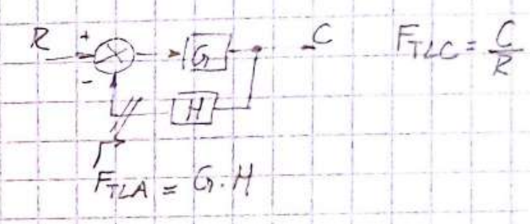
HOJA N°
FECHA

Ejercicio 2: El siguiente diagrama de Bode corresponde a un sistema de lazo abierto:



Se destaca en la representación del término cuadrático se dá un módulo de resonancia $|M_r|_{dB} = 14,02$ dB para $\omega_r = 19,8$ [rad/s].
Sabiendo que la F_T de realimentación es:

$$H_{(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+400}$$



Determinar $G_{(s)}$.

De la inspección del diagrama de Bode se construye la F_{TLA} del sistema:

$$F_{TLA} = \frac{(s+1)(s+5)\ \omega_n^2}{s^2(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} = G_{(s)} \cdot H_{(s)}$$

Expreso en formato Bode:

$$F_{TLA} = \frac{1\left(\frac{s}{1}+1\right) 5\left(\frac{s}{5}+1\right)\omega_n^2}{s^2\ \omega_n^2\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1\right)} = \frac{5\ (s+1)(0,2s+1)}{s^2\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1\right)} \rightarrow K_{te\,Total} = 5 \rightarrow 13,98\,[dB]$$

Dado que el Módulo de Resonancia, M_r, depende de ξ según:

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \therefore \quad |M_r|_{dB} = 20\log(M_r) = 14,02\,[dB]$$

Entónces:

$$M_r = 10^{14,02/20} = 5,023 \text{ [veces]}$$

$$5,023 = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$2\xi\sqrt{1-\xi^2} = \frac{1}{5,023} \quad \text{— elevo al cuadrados ambos miembros}$$

$$4\xi^2(1-\xi^2) = 0,039678$$

$$4\xi^2 - 4\xi^4 - 0,039678 = 0 \quad \rightarrow \times -\frac{1}{4}$$

$$\xi^4 - \xi^2 + 0,00991 = 0$$

NOTA

Esta expresión de 4° corresponde a una "cuadrática doble". Para resolverla se hace un cambio de variable:

$$\xi^2 = \beta \quad \therefore \quad \xi = \pm\sqrt{\beta}$$

$$\xi^4 - \xi^2 + 0{,}00991 = 0 \longrightarrow \beta^2 - \beta + 0{,}00991 = 0 \quad \begin{cases} \beta_1 = 0{,}99 \approx 1 \\ \beta_2 = 0{,}01 \end{cases}$$

Cada valor de β, dará dos valores de ξ:

$$\xi_{1,2} = \pm\sqrt{\beta_1} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$\xi_{3,4} = \pm\sqrt{\beta_2} = \pm\sqrt{0{,}01} = \pm 0{,}1$$

¿Cual elegimos? Para ello hay que aclarar/suponer ciertos puntos:

- Los ξ negativos se asócian a sistemas inestables (singularidades en el SPD), cómo se supone de que se trata de un sistema Estable, los $\xi < 0$ se descartan.

- Por inspección del gráfico de Bode de Módulo, el pico de resonancia se dá para un sistema subamortiguado, tal que $\xi < 1$.

Por lo tanto: $\xi = +0{,}1$

Se determina W_n desde la relación:

$$W_r = W_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad \therefore \quad W_n = \frac{W_r}{\sqrt{1-2\xi^2}} = \frac{19{,}8\,[\text{rad/s}]}{\sqrt{1-2(0{,}1)^2}} = 20\ [\text{rad/s}]$$

Con los valores de ξ y W_n, se particulariza la F_{TLA}

$$F_{TLA} = \frac{(s+1)(s+5)\ W_n^2}{s^2(s^2+2\xi W_n s + W_n^2)} = 400 \cdot \frac{(s+1)(s+5)}{s^2(s^2+4s+400)}$$

Cómo la F_T obtenida corresponde a un sistema de Lazo Abierto y conocida la $H(s)$; se despeja la incógnita $G(s)$:

$$F_{TLA} = G(s) \cdot H(s) \quad \therefore \quad G(s) = \frac{F_{TLA}}{H(s)} = 400\,\frac{(s+1)\cancel{(s+5)}}{s^2\cancel{(s^2+4s+400)}} \cdot \frac{\cancel{(s^2+4s+400)}}{\cancel{(s+5)}}$$

Así, el bloque de paso directo resulta:

$$G(s) = 400\ \frac{(s+1)}{s^2}$$

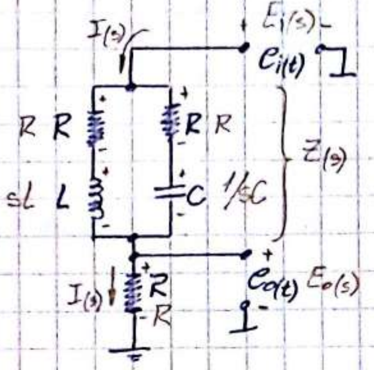
Comprobación en Matlab a traves de la F_{TLA} obtenida:

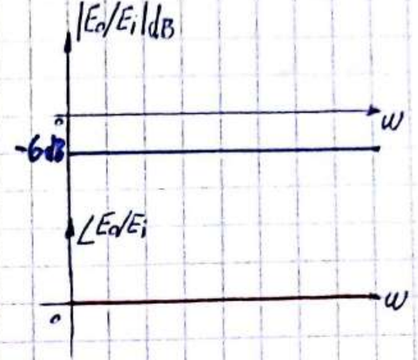
```
num = [400  2400  2000]
den = [1  4  400  0  0]
Ftla = tf(num, den)
bode(Ftla)
```

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Ejercicio 3:

Dada la red de la figura se pide determinar las relaciones necesarias entre R, L y C de manera que el diagrama de Bode de E_o/E_i sea coincidente con el que se muestra:





Primero transformo el circuito a Laplace, y aplico LKT:

$$E_{i(s)} = I_{(s)} \cdot Z_{(s)} + I_{(s)} \cdot R \quad ; \quad E_{o(s)} = I_{(s)} \cdot R \quad \therefore \quad I_{(s)} = \frac{E_{o(s)}}{R} \quad (2)$$

$$E_{i(s)} = I_{(s)} \left(Z_{(s)} + R \right) \quad (1)$$

Reemplazo (2) en (1):

$$E_{i(s)} = \frac{E_{o(s)}}{R} \left(Z_{(s)} + R \right) \quad \therefore \quad \frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = \frac{R}{R + Z_{(s)}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{(s)}}{R}} \quad (3) \Rightarrow F_T$$

Resta hallar la impedancia $Z_{(s)}$:

$$Z_{(s)} = \frac{1}{\frac{1}{R+sL} + \frac{1}{R + \frac{1}{sC}}} = \frac{1}{\frac{1}{R+sL} + \frac{sC}{sRC+1}} = \frac{1}{\frac{sRC+1+sC(R+sL)}{(R+sL)(sRC+1)}}$$

$$Z_{(s)} = \frac{sR^2C + R + s^2RLC + sL}{sRC + 1 + sRC + s^2LC} = \frac{s^2RLC + s(L+R^2C) + R}{s^2LC + s\,2RC + 1}$$

$$Z_{(s)} = \frac{s^2RLC + s(L+R^2C) + R}{LC\left(s^2 + 2\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{s^2R + s\left(\frac{1}{C} + \frac{R^2}{L}\right) + \frac{R}{LC}}{s^2 + 2\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$ — divido ambos miembros por R

$$\frac{Z_{(s)}}{R} = \frac{s^2 + s\left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}{s^2 + 2\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (4)$$

Reemplazo (4) en (3):

$$\frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = \frac{1}{1 + \frac{s^2 + s(1/RC + R/L) + 1/LC}{s^2 + 2\frac{R}{L}s + 1/LC}} = \frac{s^2 + 2\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + 2R/L\,s + 1/LC + s^2 + s(1/RC + R/L) + 1/LC}$$

$$\frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = \frac{s^2 + 2\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{2s^2 + \left(3\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)s + \frac{2}{LC}} = \frac{s^2 + 2\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{2\left(s^2 + \left(\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right)s + \frac{1}{LC}\right)}$$

$$\frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2 + 2\frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{R}{L} + \frac{1}{2RC}\right) s + \frac{1}{LC}}$$

El 1/2 forma parte de la $K_{teTotal}$, que traducido a decibeles es:

$20.\log\left(\frac{1}{2}\right) = -6{,}021$ [dB] → lo que concuerda con el gráfico de Bode de Módulo

Para que sea una constante para todo $w > 0$, el polinomio Num deberá ser igual al polinomio Den:

$$\text{Num} \rightarrow \quad 1 s^2 + \frac{2R}{L} s + \frac{1}{LC}$$

$$\text{Den} - \quad 1 s^2 + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\frac{R}{L} + \frac{1}{2RC}\right)} s + \frac{1}{LC}$$

$$\frac{2R}{L} = \frac{3}{2}\frac{R}{L} + \frac{1}{2RC}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} = \frac{1}{2RC} \quad \therefore \quad \boxed{R = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

- Cuando se cumple $R = \sqrt{L/C}$, el circuito está en resonancia y se comporta como un divisor de tensión.

Ejercicio 4: Realizar para los siguientes sistemas (el primero de fase mínima y el segundo de fase no mínima) el diagrama de Bode.

- Sistema A:

$$G(s)H(s) = 2\frac{s+1}{s^2(s+2)} = \frac{2s+2}{s^3+2s^2}$$

- Sistema B:

$$G(s)H(s) = 2\frac{s-1}{s^2(s+2)} = \frac{2s-2}{s^3+2s^2}$$

Sistemas de:
- Fase mínima: cuando todos sus singularidades están en el SPI.
- Fase no mínima: cuando al menos una de sus singularidades está en el SPD.

. Sistema A: (fase mínima)

$$G(s)H(s) = \cancel{2}\frac{1\left(\frac{s}{1}+1\right)}{s^2 . \cancel{2}\left(\frac{s}{2}+1\right)} = 1 \cdot \frac{(s+1)}{s^2(0{,}5 . s+1)}$$ → formato Bode

$K_{teTotal} = 1 \rightarrow 0$ dB

$s \rightarrow jw$:

$$|G(jw)H(jw)| = \frac{|1| . |1+jw|}{|(jw)^2||1+j0{,}5w|} = \frac{1 . \sqrt{1+w^2}}{w^2 . \sqrt{1+0{,}25w^2}}$$

Scanned by CamScanner

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

$$|G_{(j\omega)} \cdot H_{(j\omega)}|_{dB} = \underbrace{20 \log(1)}_{=0dB} + 10 \log(1+\omega^2) - 40 \log(\omega) - 10 \log(1+0{,}25\omega^2)$$

$$\angle G_{(j\omega)} H_{(j\omega)} = \underbrace{tg^{-1}\frac{0}{1}}_{=0°} + tg^{-1}\frac{\omega}{1} - \underbrace{tg^{-1}\frac{\omega^2}{0}}_{=180°} - tg^{-1}\frac{0{,}5\omega}{1}$$

Resultando:

$$|G_{(j\omega)} H_{(j\omega)}|_{dB} = 0dB + 10\log(1+\omega^2) - 40\log(\omega) - 10\log(1+0{,}25\omega^2)$$

$$\angle G_{(j\omega)} H_{(j\omega)} = -180° + tg^{-1}\omega - tg^{-1} 0{,}5\omega$$

- Sistema B: (fase no mínima)

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{\cancel{2} \, -1(-\frac{s}{1}+1)}{s^2 \, \cancel{2}(\frac{s}{2}+1)} = -1 \, \frac{(-s+1)}{s^2(0{,}5s+1)} \rightarrow \text{formato Bode}$$

$$K_{te\,Total} = -1 \xrightarrow{|-1|} 0dB$$

$s \rightarrow j\omega$:

$$|G_{(j\omega)} H_{(j\omega)}| = |-1| \, \frac{|1-j\omega|}{|(j\omega)^2| \, |1+j0{,}5\omega|} = 1 \cdot \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^2 \sqrt{1+0{,}25\omega^2}}$$

$$\angle G_{(j\omega)} \cdot H_{(j\omega)} = \underbrace{tg^{-1}\frac{0}{-1}}_{+180°} + tg^{-1}\frac{-\omega}{1} - \underbrace{tg^{-1}\frac{\omega^2}{0}}_{-(+180°)} - tg^{-1}\frac{0{,}5\omega}{1}$$

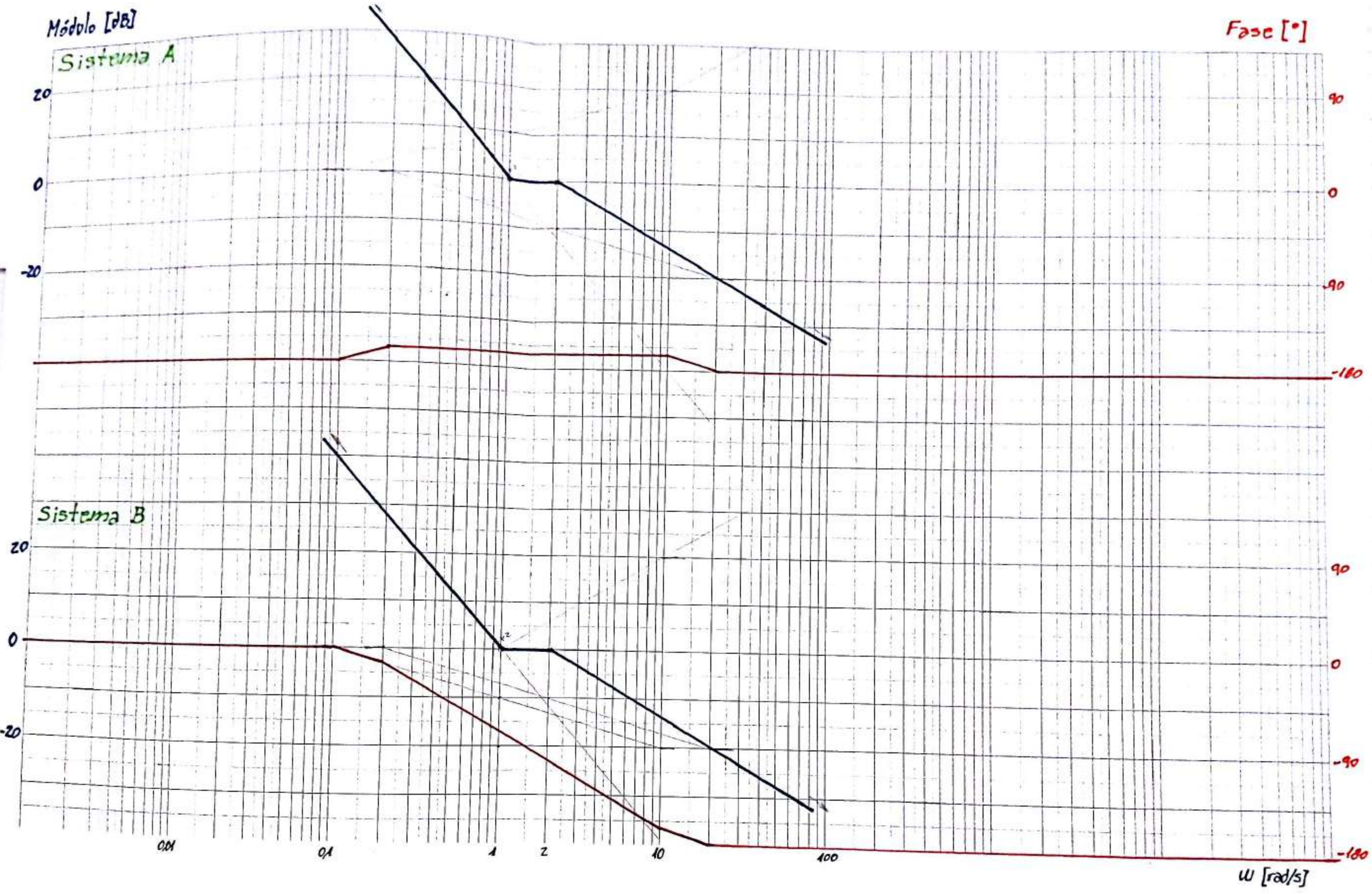
Resultando:

$$|G_{(j\omega)} H_{(j\omega)}|_{dB} = 0\,dB + 10\log(1+\omega^2) - 40\log(\omega) - 10\log(1+0{,}25\omega^2)$$

$$\angle G_{(j\omega)} H_{(j\omega)} = -tg^{-1}\omega - tg^{-1} 0{,}5\omega$$

- Los Módulos son iguales para ámbos sistemas, mientras que las fases sí difieren; la fase del cero (s-1) en el sistema B es de -45°/Dec, como si se tratase de un polo.

- Ámbos sistemas son estables; el sistema B presenta (en el Num) una singularidad en el SPD (en +1), esto haría pensar que vuelve inestable al sistema pero no es así, ya que quien determina la dinámica de cualquier sistema es su Ecuación Característica (el Den), allí si hay al menos una raíz a parte real positiva el sistema es inestable



Comprobado en MatLab:

Sistema A

```
num=[2 2]
den=[1 2 0 0]
F=tf(num,den)
bode(F)
```

Sistema B

```
num=[2 -2]
den=[1 2 0 0]
F=tf(num,den)
bode(F)
```

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P. 7-2: Respuesta en frecuencia. Diagrama Polar.

HOJA N
FECHA

Ejercicio 1: Hacer el diagrama polar de la siguiente función de transferencia a lazo abierto:

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{K}{s(s+10)(s+20)}$$

Dar a la ganancia el valor 1000 y 10000.

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{K}{s^3+30s^2+200s}$$

- Inicio, p/ $s \to 0$: $\lim\limits_{s\to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \lim\limits_{s\to 0} \frac{K_{te}}{s} = \lim\limits_{\substack{s\to 0 \\ \varepsilon = 0}} \frac{K_{te}}{(\varepsilon e^{j90})} = |\infty| \angle -90°$

- Final, p/ $s \to \infty$: $\lim\limits_{s\to\infty} G_{(s)}H_{(s)} = \lim\limits_{s\to\infty} \frac{K_{te}}{s^3} = \lim\limits_{\substack{s\to\infty \\ \rho=\infty}} \frac{K_{te}}{(\rho e^{j90})^3} = 0 \angle -270°$

- Cambio $s \to jw$:

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{K}{-jw^3 - 30w^2 + j200w} = \frac{K}{-30w^2 + j(200w - w^3)}$$

- Re + j Im:

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{K}{-30w^2 + j(200w - w^3)} \cdot \frac{-30w^2 - j(200w - w^3)}{-30w^2 - j(200w - w^3)}$$

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \underbrace{\frac{-30w^2K}{900w^4 + (200w - w^3)^2}}_{Re} + j\underbrace{\frac{-K(200w - w^3)}{900w^4 + (200w - w^3)^2}}_{Im}$$

- $Re = 0$: $-30w^2K = 0 \quad \therefore \quad w = 0$ → ya obtenido en "Inicio"

- $Im|_{w=0}$: No hay cortes al eje Im

- $Im = 0$:

$$-K(200w - w^3) = 0$$

$$200w - w^3 = 0 \quad \therefore \quad w = \begin{cases} \pm 14,14213562 \to \text{elijo el "+"} \\ 0 \end{cases}$$

NOTA

Scanned by CamScanner

• $Re|_{\omega=14{,}14}$:

$$\frac{-30\,(14{,}14)^2 K}{900\,(14{,}14)^4 + \left(200 \cdot 14{,}14 - (14{,}14)^3\right)^2} = -1{,}67 \times 10^{-4} \cdot K$$

con: $K = 1000 \rightarrow -0{,}17$
$K = 10000 \rightarrow -1{,}67$

• Análisis de argumento.

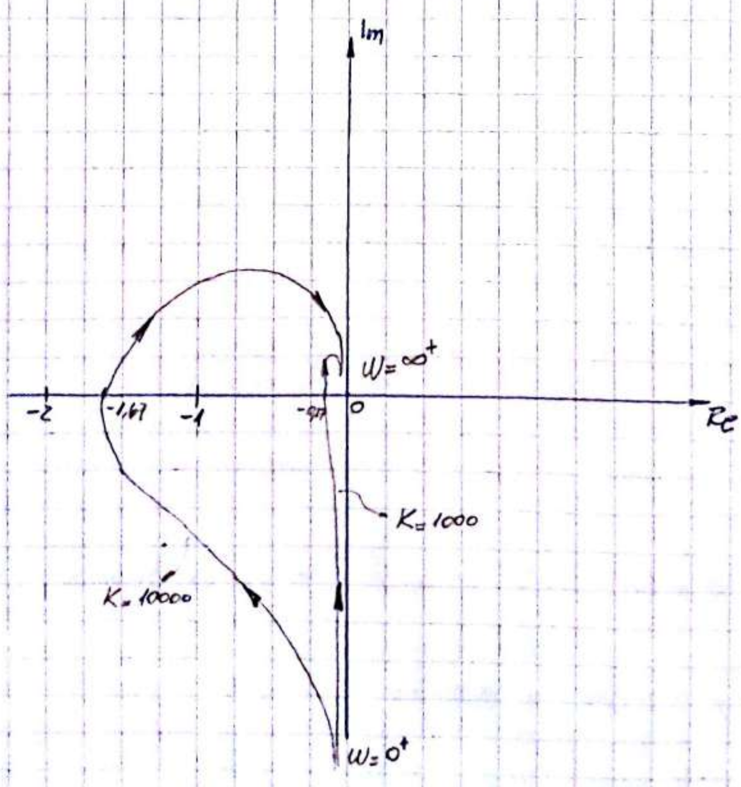
$$\varphi = tg^{-1}\frac{Im}{Re} = tg^{-1}\frac{200\omega - \omega^3}{30\omega^2}$$

$P/\omega \rightarrow 0$:
$$\lim_{\omega \to 0} tg^{-1}\frac{200\omega}{30\omega^2} = +\# \rightarrow 1° \text{ o } 3° \text{ cuadrante}$$

$P/\omega \rightarrow \infty$:
$$\lim_{\omega \to \infty} tg^{-1}\frac{-\omega^3}{30\omega^2} = -\# \rightarrow 2° \text{ o } 4° \text{ cuadrante}$$

Con los datos obtenidos, se asegura que la función se desarrolla para $\omega > 0$, en 3° y 2° cuadrantes del plano de la F_{TLA}.

• Diagrama Polar:



$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{1000}{s^3 + 30s^2 + 200s}$$

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{10000}{s^3 + 30s^2 + 200s}$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N

FECHA

Ejercicio 2: Realizar el diagrama de Bode del Ejercicio 1 para K = 1000, determinando en el gráfico el valor del coeficiente estático de error de velocidad Kv.

$$G_{(s)} H_{(s)} = \frac{1000}{s(s+10)(s+20)}$$

Expresado en formato de Bode.

$$G_{(s)} H_{(s)} = \frac{1000}{s \cdot 10(0{,}1s+1)\, 20(0{,}05s+1)} = \frac{5}{s(0{,}1s+1)(0{,}05s+1)}$$

$$K_{te\,Total} = 5 \longrightarrow |K_{te\,Total}|_{dB} = 20\log(5) = 13{,}98\ dB$$

. $s \rightarrow jw$:

$$G_{(jw)} H_{(jw)} = \frac{5}{jw(1+j0{,}1w)(1+j0{,}05w)}$$

. Módulo:

$$|G_{(jw)} H_{(jw)}| = \frac{|5|}{|jw|\,|1+j0{,}1w|\,|1+j0{,}05w|} = \frac{5}{w \cdot \sqrt{1+0{,}01w^2} \cdot \sqrt{1+0{,}0025w^2}}$$

$$|G_{(jw)} H_{(jw)}|_{dB} = 13{,}98\,dB - 20\log(w) - 10\log(1+0{,}01w^2) - 10\log(1+0{,}0025w^2)$$

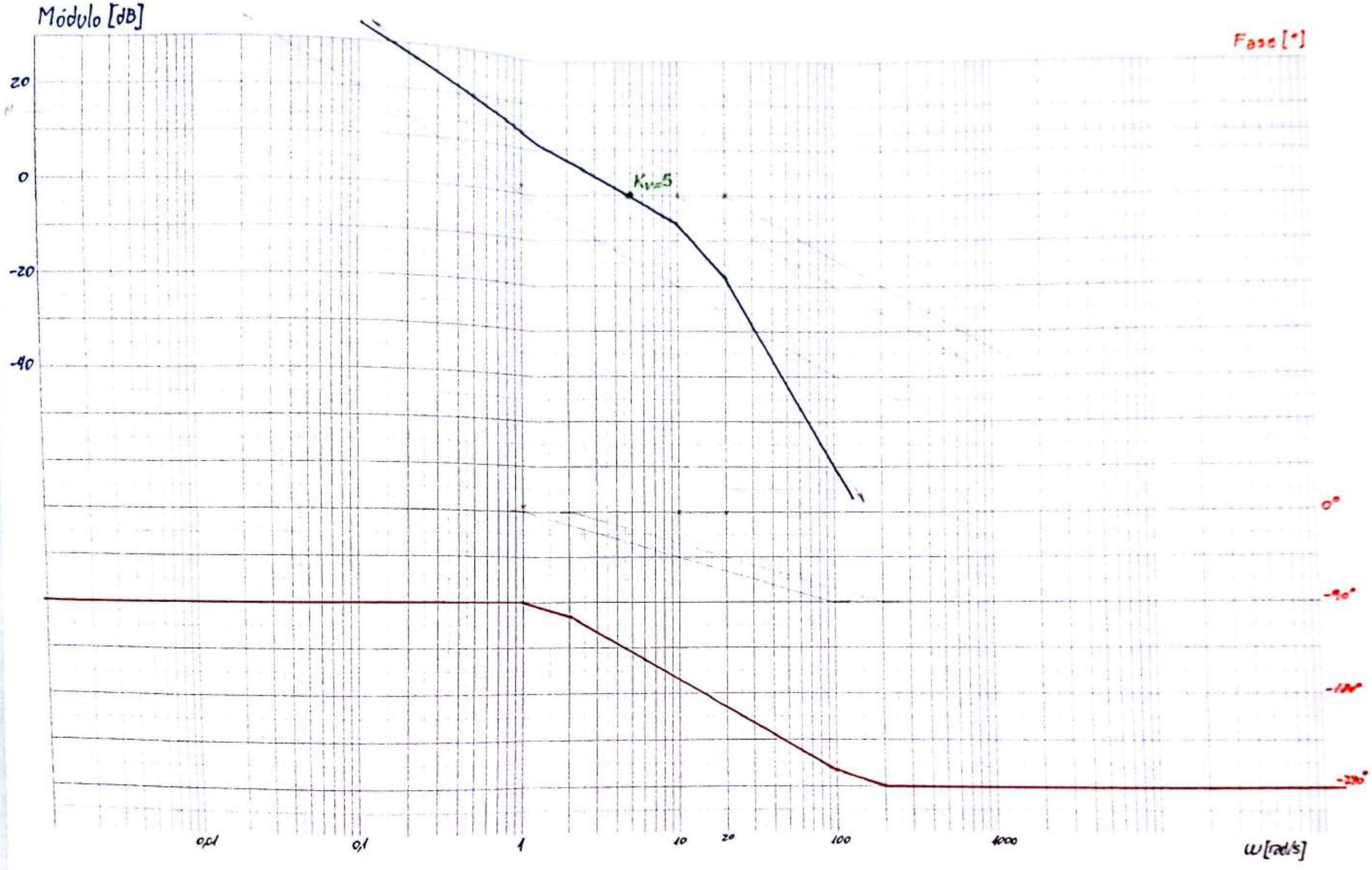
. Fase:

$$\angle G_{(jw)} H_{(jw)} = \frac{\angle 5}{\angle jw\ \angle 1+j0{,}1w\ \angle 1+j0{,}05w}$$

$$\angle G_{(jw)} H_{(jw)} = 0° - 90° - tg^{-1}\,0{,}1w - tg^{-1}\,0{,}05w$$

El coeficiente estático de error de velocidad es:

$$K_V = \lim_{s\to 0} s\, G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1000}{\cancel{s}(s+10)(s+20)} = 5$$



Comprobación con Matlab:

```
num = 1000
den = [1   30   200   0]
GH = tf(num, den)
bode (GH)
```

```
GH = zpk([ ], [0  -10  -20], 1000)
```

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 3:

Realizar el diagrama de Bode de la siguiente función de transferencia de Lazo Abierto determinando gráficamente K_a. Posteriormente trazar el diagrama del logaritmo de la magnitud en función de la fase.

$$G(s)H(s) = 10 \cdot \frac{(s+10)}{s^2}$$

En formato de Bode:

$$G(s)H(s) = 10 \cdot \frac{10(0{,}1s+1)}{s^2} = 100 \frac{(0{,}1s+1)}{s^2} \qquad K_{teTotal} = 100 \rightarrow 40\,dB$$

- $s \rightarrow j\omega$:

$$G(j\omega)H(j\omega) = 100 \cdot \frac{(1+j0{,}1\omega)}{-\omega^2}$$

- Módulo:

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = |100| \frac{|1+j0{,}1\omega|}{|-\omega^2|} = 100 \cdot \frac{\sqrt{1+0{,}01\omega^2}}{\omega^2}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)|_{dB} = 40\,dB + 10 \log(1+0{,}01\omega^2) - 40 \log(\omega)$$

- Fase:

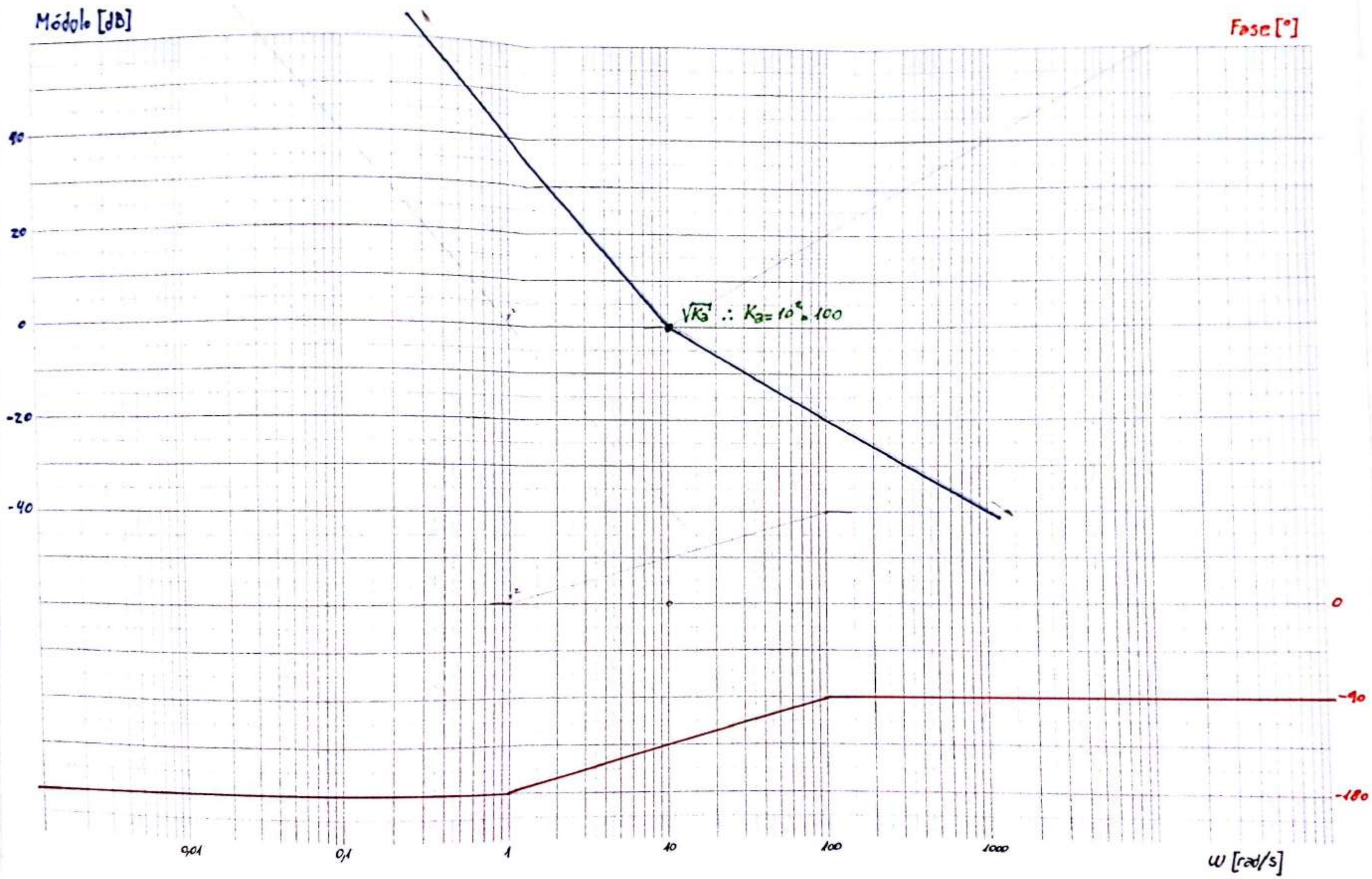
$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \angle 100 \frac{\angle 1+j0{,}1\omega}{\angle -\omega^2}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = 0° + tg^{-1} 0{,}1\omega - 180°$$

El coeficiente estático de error de aceleración es:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2}\, 10 \frac{(s+10)}{\cancel{s^2}} = 100$$

Scanned by CamScanner



Comprobación en MatLab:

```
num = [10  100]
den = [1  0  0]
GH = tf(num, den)
bode(GH)
nichols(GH)
```

```
GH = zpk([-10], [0 0], 10)
bode(GH)
```

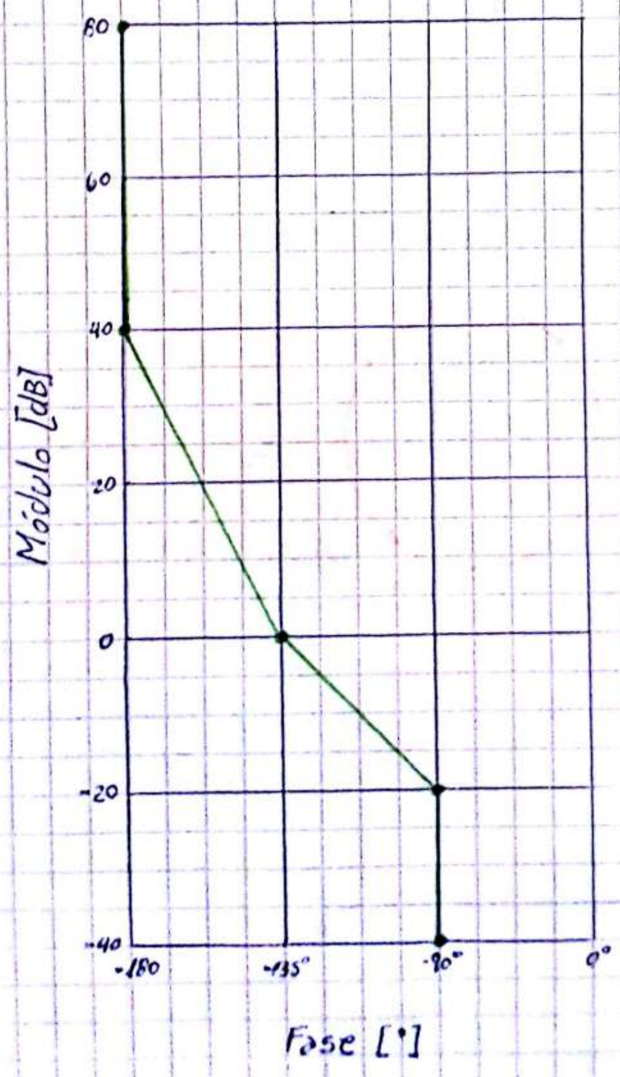
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Se realiza la siguiente tabla para hacer el diagrama del logaritmo de módulo y fase.

ω	$\lvert G(j\omega)H(j\omega)\rvert$	$\angle G(j\omega)H(j\omega)$
0,1	80	-180°
1	40	-180°
10	0	-135°
100	-20	-90°
1000	-40	-90°



Scanned by CamScanner

Ejercicio 4:

Dado el siguiente sistema con retardo de transporte, construir los diagrama de Bode y Polar.

$$G_{(s)} H_{(s)} = e^{-0,8s}$$

Hacemos el cambio de $s \rightarrow jw$.

$$G_{(s)} H_{(s)} = e^{-j0,8w} \xrightarrow{\text{por Euler}} = \underbrace{\cos(0,8w)}_{Re} - j\,\underbrace{\operatorname{sen}(0,8w)}_{Im}$$

- Módulo:

$$|G_{(jw)} H_{(jw)}| = \sqrt{\underbrace{\cos^2(0,8w) + \operatorname{sen}^2(0,8w)}_{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1}} = 1 \longrightarrow 0 \text{ dB}$$

- Fase:

$$\angle G_{(jw)} H_{(jw)} = tg^{-1} \frac{-\operatorname{sen}(0,8w)}{\cos(0,8w)} = tg^{-1}(-tg(0,8w)) = -0,8w \text{ [rad]}$$
$$= -45,84 w^{\circ}$$

Diagrama Polar:

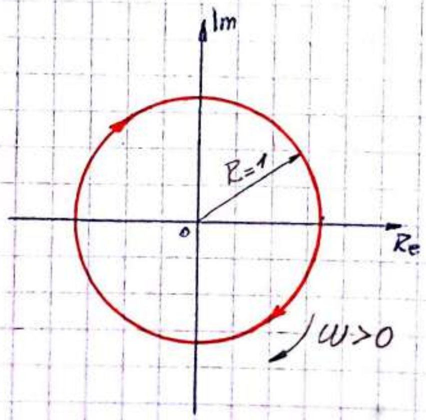
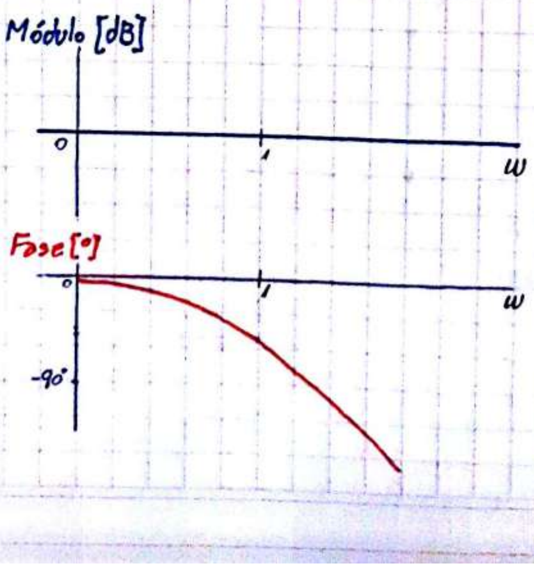


Diagrama de Bode:



ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P. 8-1: Estabilidad en dominio de la frecuencia. Criterio de Nyquist. Margen de ganancia y fase.

Ejercicio 1:

Determinar mediante los diagramas de Bode, polar y del logaritmo de la magnitud en función de la fase, los márgenes de ganancia y de fase del siguiente sistema de Lazo Abierto.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+10)} \quad \text{con} \quad K = 100 \quad y \quad 1000$$

• Bode:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s.\,5(0{,}2s+1)\,10(0{,}1s+1)} = \underbrace{\frac{K}{50}}_{K_{TeTotal}} \cdot \frac{1}{s(0{,}2s+1)(0{,}1s+1)}$$ — formato de Bode

escaleo de frecuencia {0,1 rps ; 100 rps

* Para K = 100:

$$G(s)H(s) = 2\,\frac{1}{s(0{,}2s+1)(0{,}1s+1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = 2 \cdot \frac{1}{j\omega\,(1+j0{,}2\omega)\,(1+j0{,}1\omega)}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = |2| \cdot \frac{1}{|j\omega|\,|1+j0{,}2\omega|\,|1+j0{,}1\omega|} = 2 \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{1+0{,}04\omega^2}\cdot\sqrt{1+0{,}01\omega^2}}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)|_{dB} = \underbrace{20\log(2)}_{6{,}0205} - 20\log(\omega) - 10\log(1+0{,}04\omega^2) - 10\log(1+0{,}01\omega^2)$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \angle 2\,\frac{1}{\angle j\omega\ \angle 1+j0{,}2\omega\ \angle 1+j0{,}1\omega}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \underbrace{tg^{-1}\frac{0}{2}}_{0^\circ} - \underbrace{tg^{-1}\frac{\omega}{0}}_{90^\circ} - tg^{-1}\frac{0{,}2\omega}{1} - tg^{-1}\frac{0{,}1\omega}{1}$$

Los sistemas con:
M_ϕ → positivos → son estables
→ negativos → son inestables

* Para K = 1000:

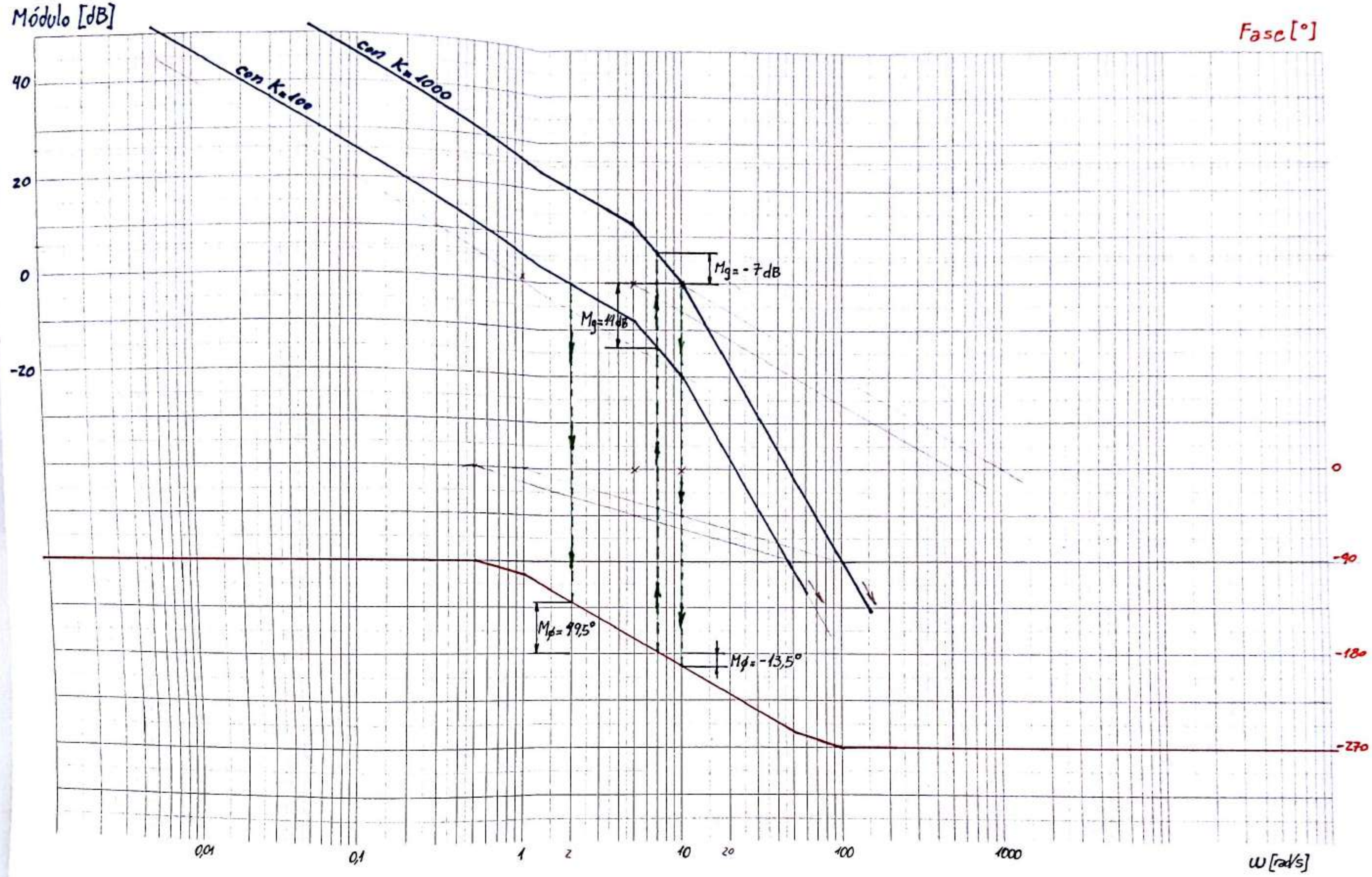
$$G(s)H(s) = 20\,\frac{1}{s(0{,}2s+1)(0{,}1s+1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = 20\,\frac{1}{j\omega\,(1+j0{,}2\omega)(1+j0{,}1\omega)}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)|_{dB} = 20\log(20) - 20\log(\omega) - 10\log(1+0{,}04\omega^2) - 10\log(1+0{,}01\omega^2)$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \underbrace{tg^{-1}\frac{0}{20}}_{0^\circ} - \underbrace{tg^{-1}\frac{\omega}{0}}_{90^\circ} - tg^{-1}\frac{0{,}2\omega}{1} - tg^{-1}\frac{0{,}1\omega}{1}$$

NOTA



Comprobado con MatLab:

```
num = 100
den = [1  15  50  0]
GH = tf(num, den)
bode (GH)
allmargin (GH)
```

```
                      1000
GH = zpk([ ],[0 -5 -10], 100)
bode(GH)
allmargin (GH)
```

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

- Diagrama Polar:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^3+15s^2+50s}$$

- Inicio: $\lim_{s\to 0} \frac{K}{s^3+15s^2+50s} = \lim_{s\to 0} \frac{K}{50s} = \frac{K/50}{\varepsilon e^{j90}} = \infty \angle -90°$ $\quad \varepsilon = 0$

- Final: $\lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3+15s^2+50s} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3} = \frac{K}{(\rho e^{j90})^3} = 0 \angle -270°$ $\quad \rho = \infty$

- $s \to j\omega$:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{-j\omega^3 - 15\omega^2 + j50\omega} = \frac{K}{-15\omega^2 + j(50\omega - \omega^3)}$$

- Re + j Im:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{-15\omega^2 + j(50\omega-\omega^3)} \cdot \frac{-15\omega^2 - j(50\omega-\omega^3)}{-15\omega^2 - j(50\omega-\omega^3)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \underbrace{\frac{-15K\omega^2}{225\omega^4 + (50\omega-\omega^3)^2}}_{Re} + j\underbrace{\frac{-K(50\omega-\omega^3)}{225\omega^4+(50\omega-\omega^3)^2}}_{Im}$$

- Re = 0:

$-15K\omega^2 = 0 \quad \therefore \quad \omega = 0 \;\rightarrow$ calculado en Inicio

- $Im|_{\omega=0}$: no hay corte al eje Im

- Im = 0:

$-K(50\omega - \omega^3) = 0$

$\omega(50 - \omega^2) = 0 \quad \therefore \quad \omega = \pm 7{,}071$ [rad/s] $\rightarrow$ elijo "+"

$\hookrightarrow 5\sqrt{2}$

- $Re|_{\omega=+7{,}071}$: $\frac{-15K\omega^2}{225\omega^4 + \underbrace{(50\omega-\omega^3)^2}_{=0}} = \frac{-15}{225(5\sqrt{2})^2} \cdot K = \frac{-1}{750} K$

$P/K=100 \Rightarrow Re|_{\omega=5\sqrt{2}} = -0{,}1\overline{3} = -\frac{2}{15}$

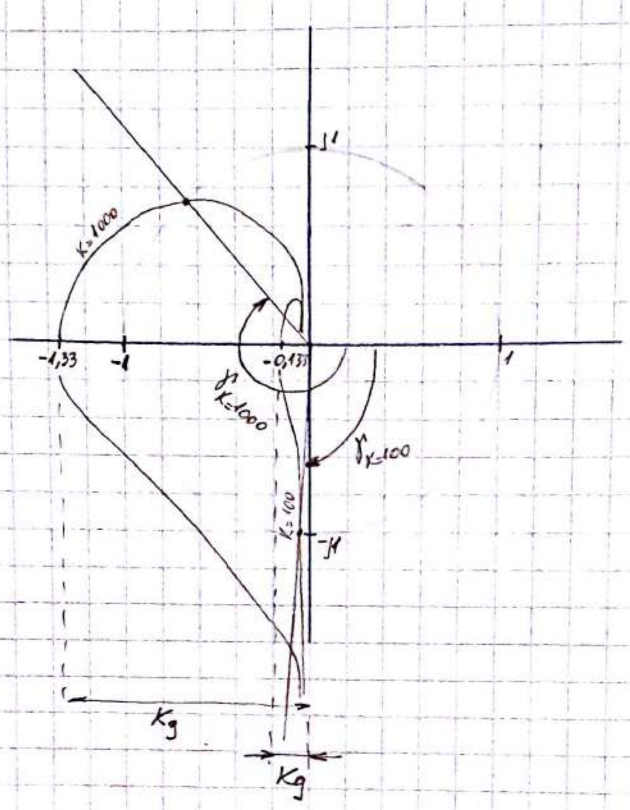
$P/K=1000 \Rightarrow Re|_{\omega=5\sqrt{2}} = -1{,}\overline{33} = -\frac{4}{3}$

- Análisis de argumento:

$$\varphi = tg^{-1}\frac{Im}{Re} = tg^{-1}\frac{50\omega-\omega^3}{\omega^2}$$

$p/\omega \to 0 \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\frac{50}{\omega} = +\# \to 1° \circ 3°$ cuad.

$p/\omega \to \infty \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\frac{-\omega^3}{\omega^2} = -\# \to 2° \circ 4°$ cuad.



Se determinan los M_g y M_ϕ para cada caso:

$p/K=100$:

$$M_g = \frac{1}{|K_g|} = \frac{1}{2/15} = 7,5 \qquad M_g|_{dB} = 17,5\ dB$$

$\hookrightarrow 0,133$

$$M_\phi = 180° - \gamma_{K=100} = 49,5°$$

$p/K=1000$:

$$M_g = \frac{1}{|K_g|} = \frac{1}{4/3} = 0,75 \qquad M_g|_{dB} = -2,498\ dB$$

$$M_\phi = 180° - \gamma_{K=1000} = -13,5°$$

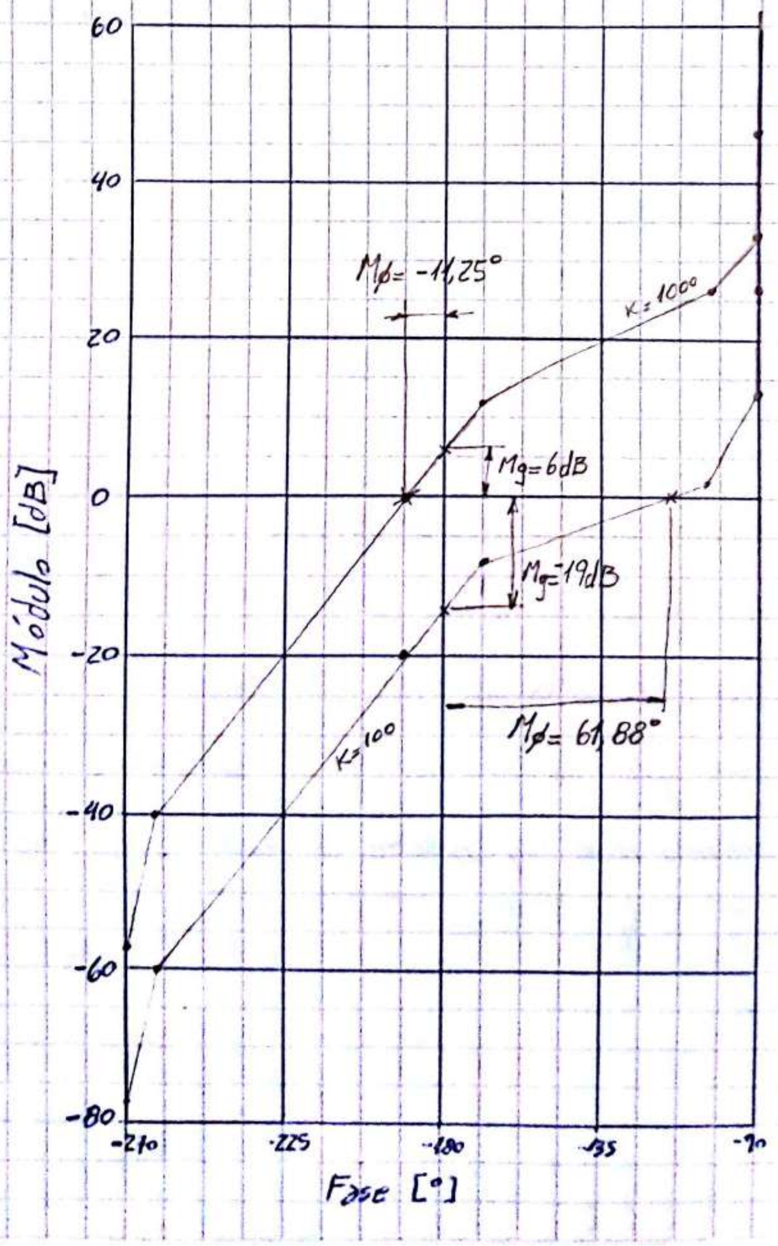
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

- Diagrama del logaritmo de la magnitud en función de la fase.

ω	∠GH	|GH| dB K=100	|GH| dB K=1000
0,1	-90°	26	46
0,5	-90°	13	33
1	-103,5°	6	26
5	-168,75°	-8,5	11,5
10	-191,25°	-20	0
50	-261°	-60	-40
100	-270°	-78	-58



Ejercicio 2:

Mediante el diagrama de Bode, determinar los márgenes de ganancia y de fase del sistema:

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{10(s+2)}{(s-1)(s+5)(s+10)}$$

Luego mediante el uso del diagrama Polar y criterio de Nyquist determinar la estabilidad del sistema a lazo cerrado.

• Bode:

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{10 \cdot 2(0{,}5s+1)}{(-1)(-s+1)\,5(0{,}2s+1)\,10(0{,}1s+1)} = \overbrace{0{,}4}^{\text{Kte total}} \frac{(0{,}5s+1)}{(-1)(-s+1)(0{,}2s+1)(0{,}1s+1)} \rightarrow \text{formato Bode}$$

$s \rightarrow jw$:

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = 0{,}4 \frac{(1+j0{,}5w)}{(-1)(1-jw)(1+j0{,}2w)(1+j0{,}1w)}$$

escaleo de frecuencia $\begin{cases} 0{,}1 \text{ rps} \\ 100 \text{ rps} \end{cases}$

$$|G_{(jw)}H_{(jw)}| = 0{,}4 \cdot \frac{\sqrt{1+0{,}25w^2}}{|(-1)|\sqrt{1+w^2}\sqrt{1+0{,}04w^2}\sqrt{1+0{,}01w^2}}$$

$$|G_{(jw)}H_{(jw)}|_{dB} = \underbrace{20\log 0{,}4}_{-7{,}96\,dB} + 10\log(1+0{,}25w^2) - \cancel{20\log 1}^{0} - 10\log(1+w^2) - 10\log(1+0{,}04w^2) - 10\log(1+0{,}01w^2)$$

$$\angle G_{(jw)}H_{(jw)} = \angle 0{,}4 \frac{\angle 1+j0{,}5w}{\angle -1\ \angle 1-jw\ \angle 1+j0{,}2w\ \angle 1+j0{,}1w}$$

$$\angle G_{(jw)}H_{(jw)} = 0° + tg^{-1}\frac{0{,}5w}{1} - 180° - tg^{-1}\frac{-w}{1} - tg^{-1}\frac{0{,}2w}{1} - tg^{-1}\frac{0{,}1w}{1}$$

$$\angle G_{(jw)}H_{(jw)} = tg^{-1}0{,}5w - 180° + tg^{-1}w - tg^{-1}0{,}2w - tg^{-1}0{,}1w$$

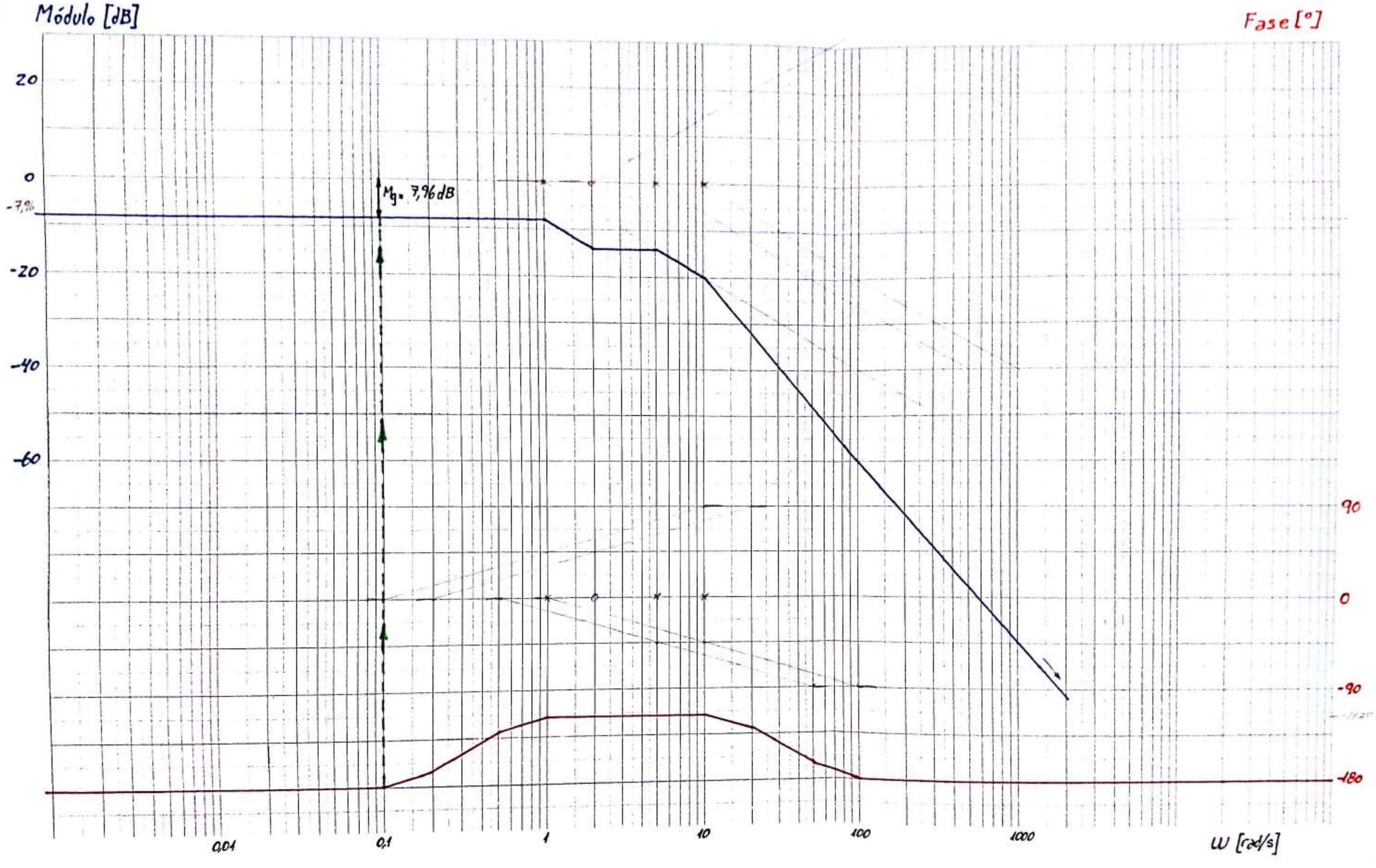
• El polo $(s-1)$, su representación en Bode de módulo es igual a cómo lo es $(s+1)$; mientras que en fase, se representa cómo si fuese un cero $(s+1)$.

• El sistema es de Fase no mínima, ya que hay un polo en el SPD

• No presenta una ganancia crítica, no corta el 0dB $\therefore M_\phi = \infty$

• Del gráfico asintótico tenemos que la Fase crítica se encuentra para $w > 100$ rps y $w \leq 0{,}1$ rps; observando el gráfico de Módulo, el sistema presenta más ganancia en frecuencias bajas, siendo más influyente el punto 0,1 rps. Así,

$$w_{crítica} = 0{,}1\ [rad/s] \quad \therefore \quad M_g = 7{,}96\ dB$$



Comprobación en MatLab:

```
GH = zpk([-2],[1  -5  -10], 10)
bode(GH)
allmargin(GH)
```

- Diagrama Polar:

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{10s+20}{s^3+14s^2+35s-50}$$

- Inicio: $\lim_{s\to 0} \frac{10s+20}{s^3+14s^2+35s-50} = \frac{20}{-50} = -0{,}4$

- Final: $\lim_{s\to\infty} \frac{10s+20}{s^3+14s^2+35s-50} = \frac{10s}{s^{3}} = \frac{Kte}{s^2} = \frac{Kte}{(\rho e^{j90})^2} = 0\angle{-180°}$ $\quad \rho \to \infty$

- $s \to jw$:

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{20+j10w}{-jw^3-14w^2+j35w-50} = \frac{20+j10w}{-(14w^2+50)+j(35w-w^3)} \times \frac{-(14w^2+50)-j(35w-w^3)}{-(14w^2+50)-j(35w-w^3)}$$

- $Re + jIm$:

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \underbrace{\frac{-10w^4+70w^2-1000}{(14w^2+50)^2+(35w-w^3)^2}}_{Re} + j\underbrace{\frac{-120w^3-1200w}{(14w^2+50)^2+(35w-w^3)^2}}_{Im} \qquad \varphi = tg^{-1}\frac{12(w^3+10w)}{w^4-7w^2+100}$$

- $Re = 0$:

$$-10(w^4-7w^2+100)=0 \Rightarrow w^2=\alpha \quad \therefore w = \pm\sqrt{\alpha_{1,2}}$$

$$\alpha^2 - 7\alpha + 100 = 0 \quad \therefore \alpha_{1,2} = 3{,}5 \pm j9{,}37$$

son complejos
No hay cortes al eje Im

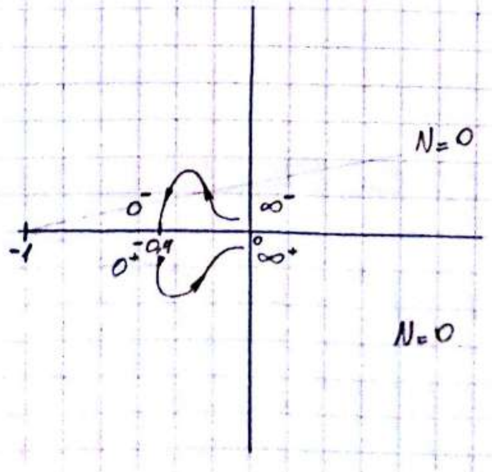
- $Im = 0$:

$$-120(w^3+10w)=0 \quad \therefore \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_{2,3} = \pm j3{,}16 \end{cases}$$ — No hay cortes al eje Re

- Análisis de Argumento:

$\lim_{w\to 0} tg^{-1}\frac{120w}{100} = +\# \rightarrow$ 1° o 3° cuadrante

$\lim_{w\to\infty} tg^{-1}\frac{12w^3}{w^4} = +\# \rightarrow$ 1° o 3° cuadrante



No hay rodeos al punto $-1+j0$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Para determinar cómo se comportará este sistema $G_{(s)}H_{(s)}$ en lazo cerrado, recordemos que:

$$F_{TLC} = \frac{G_{(s)}}{1+G_{(s)}H_{(s)}} \qquad N = Z - P$$

Hacemos:

$$1+G_{(s)}H_{(s)} = \frac{10(s+2)}{(s-1)(s+5)(s+10)} + 1$$

$$G_{(s)}H_{(s)}+1 = \frac{10(s+2)+(s-1)(s+5)(s+10)}{(s-1)(s+5)(s+10)} = \frac{s^3+14s^2+45s-30}{s^3+14s^2+35s-50}$$

Aplicamos Routh-Hourwitz a $G_{(s)}H_{(s)}+1$:

Num

s^3	1	45
s^2	14	-30
s^1	47,14	
s^0	-30	

$R_{Num} = 1$

Den

s^3	1	35
s^2	14	-50
s^1	38,57	
s^0	-50	

$R_{Den} = 1$

Cómo: $N = Z - P = R_{Num} - R_{Den} = 1 - 1 = 0$

Y como Num de $G_{(s)}H_{(s)}+1$ es el Den de F_{TLC}, hay 1 raíz a parte real positiva, el sistema es Inestable.

Ejercicio 3: Mediante el uso del criterio de estabilidad de Nyquist determinar la estabilidad a Lazo Cerrado del sistema:

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{10000}{s(s+10)(s+20)} = \frac{10000}{s^3+30s^2+200s}$$

• Diagrama Polar:

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{10000}{s^3+30s^2+200s}$$

- Inicio: $\lim_{s\to 0} \frac{10000}{s(\cancel{s}+10)(\cancel{s}+20)} = \lim_{s\to 0} \frac{50}{s} \Rightarrow \frac{K_{te}}{\varepsilon e^{j90}} = \infty \angle -90°$; $s = \varepsilon e^{j90}$, $\varepsilon \to 0$

- Final: $\lim_{s\to\infty} \frac{10000}{s^3+30s^2+200s} = \lim_{s\to\infty} \frac{10000}{s^3\left(1+\frac{30}{s}+\frac{200}{s^2}\right)} = \lim_{s\to\infty} \frac{10000}{s^3} \Rightarrow \frac{K_{te}}{(\rho e^{j90})^3} = 0 \angle -270°$; $s = \rho e^{j90}$, $\rho \to \infty$

NOTA

- $s \to jw$:

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{10000}{-jw^3 - 30w^2 + j200w}$$

- Re + jIm:

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{10000}{-30w^2 + j(200w - w^3)} \times \frac{-30w^2 - j(200w - w^3)}{-30w^2 - j(200w - w^3)}$$

$$\varphi = tg^{-1}\frac{Im}{Re}$$

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = 10000\left[\underbrace{\frac{-30w^2}{900w^4 + (200w - w^3)^2}}_{Re} + j\underbrace{\frac{w^3 - 200w}{900w^4 + (200w - w^3)^2}}_{Im}\right]$$

$$\varphi = tg^{-1}\frac{w^3 - 200w}{-30w^2}$$

- Im = 0:

$$w^3 - 200w = 0 \Rightarrow w(w^2 - 200) = 0 \to w = 0 \text{ – ya calculado en "inicio"}$$

$$w^2 - 200 = 0 \therefore w = \pm 14{,}1421 \text{ rps} \to \text{uso el "+"}$$

- $Re|_{w=14{,}1421}$:

$$10000\left(\frac{-30(14{,}14)^2}{900(14{,}14)^4 + (0)^2}\right) = -1{,}67$$

- Re = 0:

$$-30w^2 = 0 \therefore w = 0 \to \text{ya calculado en "inicio"}$$

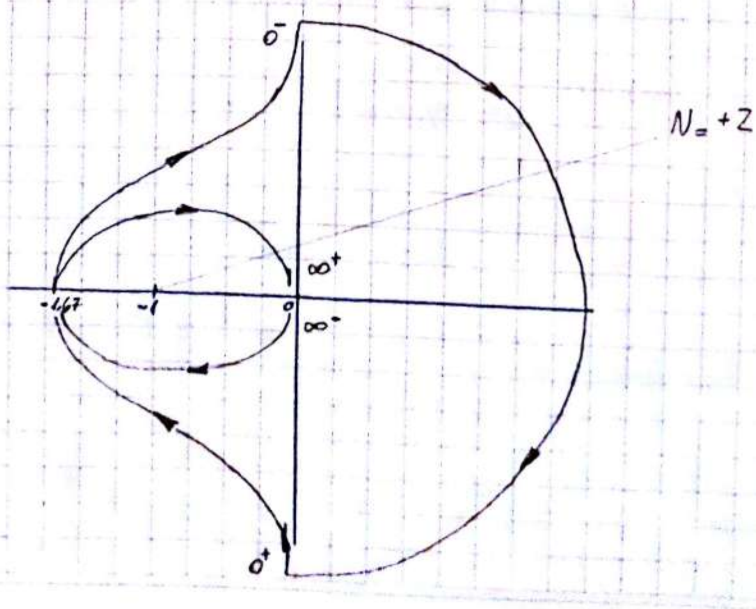
No hay corte eje Im

- Análisis de Argumento:

$$\lim_{w\to 0} tg^{-1}\frac{w^3 - 200w}{-30w^2} = \lim_{w\to 0} tg^{-1}\frac{\overset{20/3}{-200w}}{-30w^{2}} = \lim_{w\to 0} tg^{-1}\frac{Kte}{w} = +\# \text{ – 1° o 3° cuadrante}$$

$$\lim_{w\to\infty} tg^{-1}\frac{w^3 - 200w}{-30w^2} = \lim_{w\to\infty} tg^{-1}\frac{w^3}{-30w^2} = -\# \text{ – 2° o 4° cuadrante.}$$

- Diagrama:



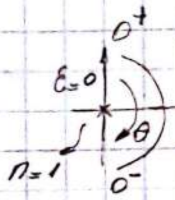
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

- Cierre p/ $s \to 0$:

$$\lim_{s\to 0} \frac{Kte}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{Kte}{\varepsilon e^{j90}}$$



$\theta = 180°$

$\varphi = -n \times \theta = -1 \times 180° = -180°$

recorrido opuesto al del plano s en el plano de la función

Se traza una recta desde el punto $-1+j0$ y se observan 2 rodeos a dicho punto con igual recorrido que en el recinto de Nyquist ($0^+ \to \infty^+ \to \infty^- \to 0^- \to 0^+$)

Así:

$N = Z - P = 2$ dónde $P = 0$ → no hay polos a parte real positiva en la F_{TLA} ($G_{(s)}H_{(s)}$)

$\therefore Z = N + P = 2 + 0$

$\boxed{Z = 2}$ → existen 2 ceros a parte real positiva, que serán polos en la F_{TLC} → Sist. Inestable.

Otra forma:

$$F_{TLC} = \frac{G_{(s)}}{1 + G_{(s)}H_{(s)}}$$

$$1 + G_{(s)}H_{(s)} = 1 + \frac{10000}{s^3 + 30s^2 + 200s}$$

$$1 + G_{(s)}H_{(s)} = \frac{s^3 + 30s^2 + 200s + 10000}{s^3 + 30s^2 + 200s}$$

Estabilidad de los sistemas:
- Estabilidad Absoluta por Nyquist
- Estabilidad Relativa por Bode (o Nichols) viendo M_G o M_ϕ

Num:

s^3	1	200
s^2	30	10000
s^1	-133,33	
s^0	10000	

$R_{Num} = 2$

Den:

s^3	1	200
s^2	30	0
s^1	200	
s^0	0	

$R_{Den} = 0$

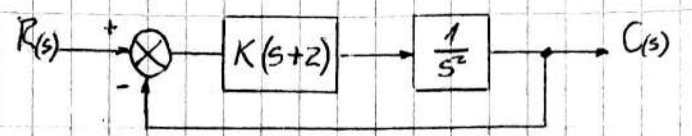
$N = Z - P = R_{Num} - R_{Den} = 2$

Cómo hay 2 raíces a parte real positiva en el Num de $1+GH$, el cual es el Den de la F_{TLC}, el sistema es Inestable

Ejercicio 4:

Dado el siguiente sistema, determinar K para un márgen de fase de 50°.

En MatLab:
GH= zpk([-2],[0 0], 1.8259)
bode(GH)
allmargin(GH)



Se determina la F_{TLA} del sistema:

$$G_{(s)}H_{(s)} = K\,\frac{(s+z)}{s^2}$$

$s \to j\omega$:

$$G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} = K\,\frac{z+j\omega}{-\omega^2}$$ → esta función de variable compleja tiene un módulo y una fase para cada valor de ω

$$\angle G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} = \angle K\,\frac{\angle z+j\omega}{\angle -\omega^2} = 0° + tg^{-1}\frac{\omega}{z} - tg^{-1}\frac{0}{-\omega^2}$$

$$\angle G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} = tg^{-1}\frac{\omega}{z} - 180°$$

Cómo la consigna es un $M_\phi = 50°$, para llegar a $-180°$ (punto de inestabilidad absoluta) se debe tener $-130°$. Entónces:

$$\angle G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} = tg^{-1}\frac{\omega}{z} - 180° = -130°$$

$$tg^{-1}\frac{\omega}{z} = 50° \quad \therefore \quad \omega = z.tg(50°) = 2{,}3835\ [rad/seg]$$

Para obtener el M_ϕ, se busca el punto de ganancia crítica (0dB o 1 veces). Hacemos que el módulo de la función sea igual a 1, determinando el K para la $\omega = 2{,}3835$ que cumple $M_\phi = 50°$.

$$|G_{(j\omega)}H_{(j\omega)}| = |K|.\frac{|z+j\omega|}{|-\omega^2|} = 1$$

$$K.\frac{\sqrt{4+\omega^2}}{\omega^2} = 1 \quad \therefore \quad K = \left.\frac{\omega^2}{\sqrt{4+\omega^2}}\right|_{\omega = 2{,}3835\,[rad/seg]} = 1{,}8259\ [veces]$$

Ajustando el $K = 1{,}8259$, el sistema tendrá un $M_\phi = 50°$

Ejercicio 5:

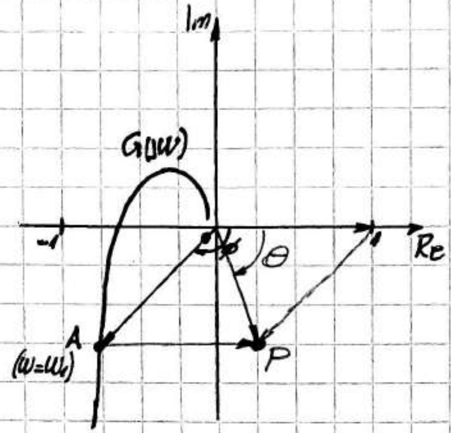
Dado el siguiente sistema de control con realimentación unitaria y cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G_{(j\omega)} = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)} \qquad j\omega \to s\,; \quad G_{(s)} = \frac{K}{s(s+1)}$$

Determinar el valor de la ganancia K de modo que el módulo de resonancia $M_r = 1{,}4$.

Marco Teórico para la resolución del
Ejercicio 5 TP 8-1.

Suponemos un Diagrama Polar genérico como el siguiente:



Recordemos que cada punto del Diagrama Polar se lo obtiene evaluando para cada valor de ω al módulo y fase de la F_{TLA}. Así, la representación de $| \, |$ y de $\angle$ se logra con un vector de origen en el punto O y final en un punto de la curva para cierto valor de ω.

Otra concideración, es que suponemos a los sistemas Estables en LA y con $H_{(s)} = 1$.
Así el sistema en LC será:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{G_{(s)}}{1+G_{(s)}} \qquad \text{haciendo } s \to j\omega: \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$$

Dado el Diagrama Polar y la F_{TLC} en dominio de $j\omega$, es posible hallar un algoritmo que permita, mediante geometría vectorial y números complejos, encontrar la respuesta del sistema a LC a partir de conocer la respuesta a LA.

Cómo ejemplo, tomemos el punto A del Diagrama, cuyo vector $\vec{OA}$ tiene módulo $\overline{OA}$ y fase ϕ para una $\omega = \omega_1$. Podemos decir, que hemos construido vectorialmente a la función $G(j\omega)$ (por supuesto para un sólo valor de ω).
Sólo faltaría determinar de la misma forma la función $1+G(j\omega)$.
El vector "1", es el vector formado entre el origen O y el final 1 (sobre el eje Re), el vector que representa a $G(j\omega)$ ya lo determinamos, sólo queda hacer la suma de ambos mediante el gráfico (método del paralelogramo) dando cómo resultado el vector $\vec{OP}$ de módulo $\overline{OP}$ y fase θ.
Así:

$$\left.\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}\right|_{\omega=\omega_1} = \underbrace{\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}}_{\text{módulo}} \underbrace{\angle \phi-\theta}_{\text{fase}} = M e^{j\alpha}$$

Los circulos M y N, son circulos de magnitud constante y de fase constante respectivamente. La superposición de éstos con la curva del Diagrama Polar de LA, sus intersecciones, nos permite obtener la respuesta en frecuencia a LC del sistema.

Desarrollo de Circulos M:

Cómo $M = \dfrac{|G(jw)|}{|1+G(jw)|}$, siendo $G(jw) = x + jy \therefore |G(jw)| = \sqrt{x^2+y^2}$

$1+G(jw) = x+1+jy \therefore |1+G(jw)| = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

Reemplazando:
$$M = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \Rightarrow M^2 = \frac{x^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$M^2(x^2+2x+1) + M^2y^2 = x^2+y^2 \quad ⓐ$$

$$M^2x^2 + 2xM^2 + M^2 + M^2y^2 = x^2+y^2$$

$$M^2x^2 + 2xM^2 - x^2 + M^2y^2 - y^2 = -M^2$$

$$x^2(M^2-1) + 2xM^2 + y^2(M^2-1) = -M^2 \quad \leftarrow \times 1/(M^2-1)$$

$$x^2 + \frac{2xM^2}{M^2-1} + y^2 = \frac{-M^2}{M^2-1} \quad \text{— sumo en ambos miembros } \left(\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{2xM^2}{M^2-1} + \frac{(M^2)^2}{(M^2-1)^2}}_{①} + y^2 = \frac{-M^2}{M^2-1} + \frac{(M^2)^2}{(M^2-1)^2} \qquad ① \; (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$\left(x + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{M^2}{(M^2-1)^2} \quad \rightarrow \text{ ecuación de una circunferencia } (x+a)^2+(y+b)^2 = r^2$$

Centro: $\left(-\dfrac{M^2}{M^2-1} ; 0\right)$ Radio: $\dfrac{M}{M^2-1}$ • cada valor de M genera un circulo

ⓐ con $M=1 \Rightarrow \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2}$

circulo de $R=\infty$ $\quad 2x+1=0 \therefore x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ recta // al eje "jw"

Cuanto más grande sean los valores de M, más chicos son los circulos. Hay una particularidad cuando se traza el Diagrama Polar y estos circulos, el módulo de resonancia M_r (es el pico que hace la función para una determinada W) va a ser el circulo más chico al cual sea tangente a la curva de la función $G(jw)$.

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

FECHA

Para resolverlo se debe emplear el diagrama de Nichols con las respectivas curvas de magnitud y fase constantes.

Primero, para obtener el diagrama de Nichols hay que determinar el Bode. Cómo K es la consigna a encontrar, hacemos:

$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)}$$ → esto es para independizarnos de K, ya que en módulo sólo "sube o baja" la curva y en fase no aporta.

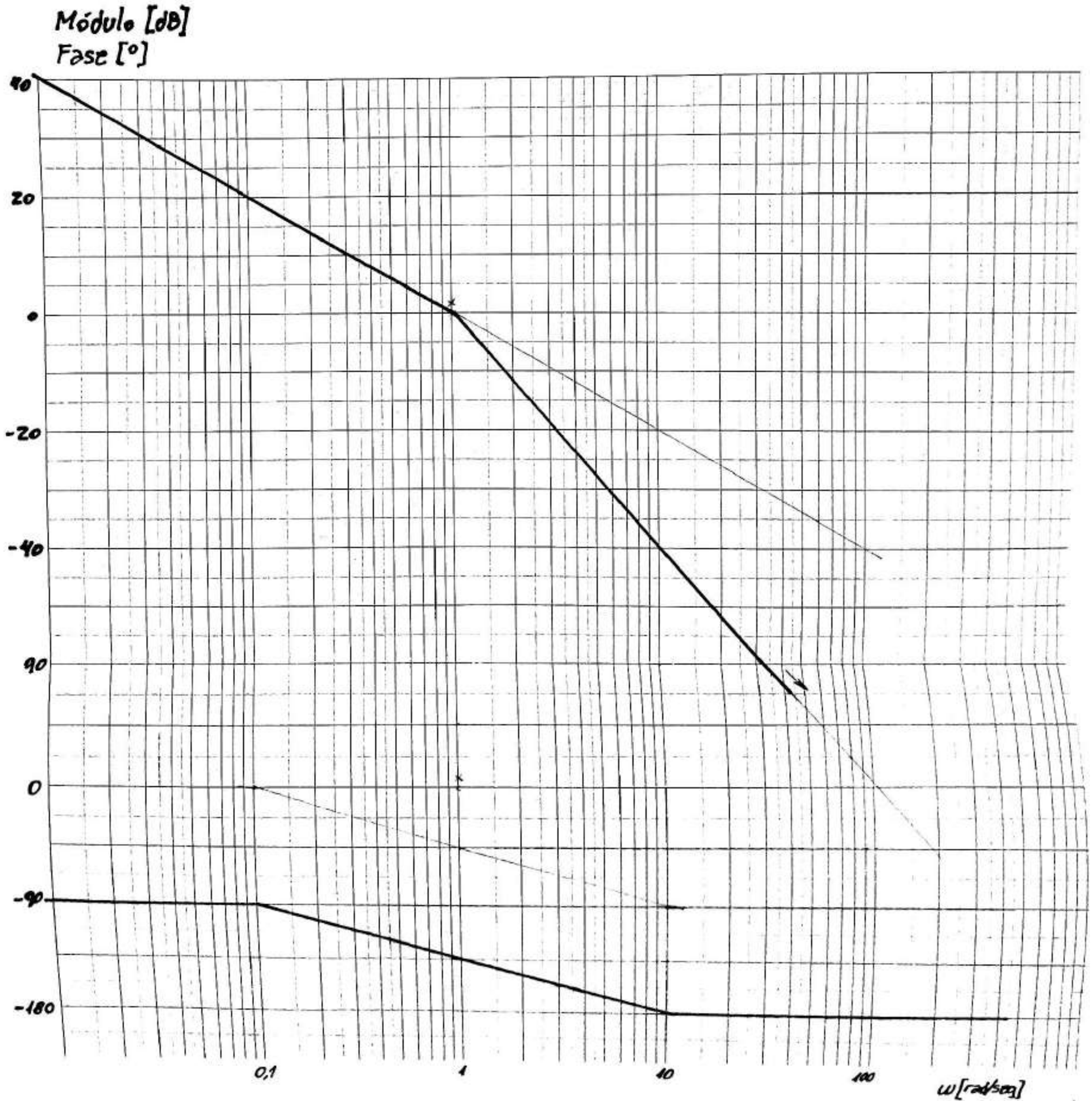
Así:

$$\left|\frac{G(j\omega)}{K}\right| = \frac{|1|}{|j\omega|\,|1+j\omega|} = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\left|\frac{G(j\omega)}{K}\right|_{dB} = -20\log(\omega) - 10\log(1+\omega^2)$$

$$\angle G(j\omega)/K = \frac{\angle 1}{\angle j\omega\ \angle 1+j\omega} = 0° - tg^{-1}\frac{\omega}{0} - tg^{-1}\frac{\omega}{1}$$

$$\angle G(j\omega)/K = -90° - tg^{-1}\omega$$

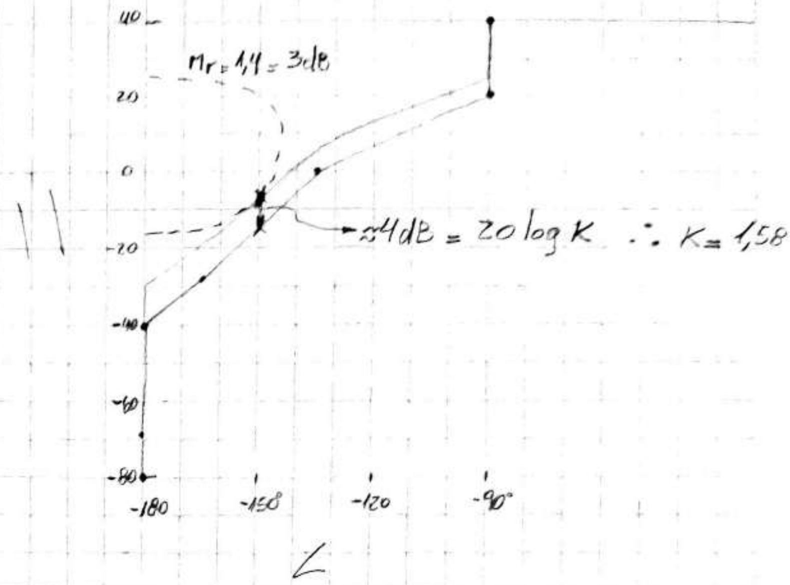


Scanned by CamScanner

mvergere...
rferrer@epec.com...

Se procede a construir el Nichols mediante la tabla de valores.

ω	$\angle G(j\omega)/K$	$\lvert G(j\omega)/K \rvert_{dB}$
0,1	-90°	20
0,5	-121,5°	6
1	135°	0
5	166,5°	28
10	-180°	-40
50	-180°	-68
100	-180°	-80



Se traza la curva correspondiente a $M = M_r = 1,4$ o lo que es lo mismo a 3 dB; se traslada la gráfica en función de la fase (cómo si se incrementara la ganancia) hasta que ésta sea tangente con la curva M_r pedida. Se mide esa "distancia recorrida" en dB que representa a la ganancia K aumentada.

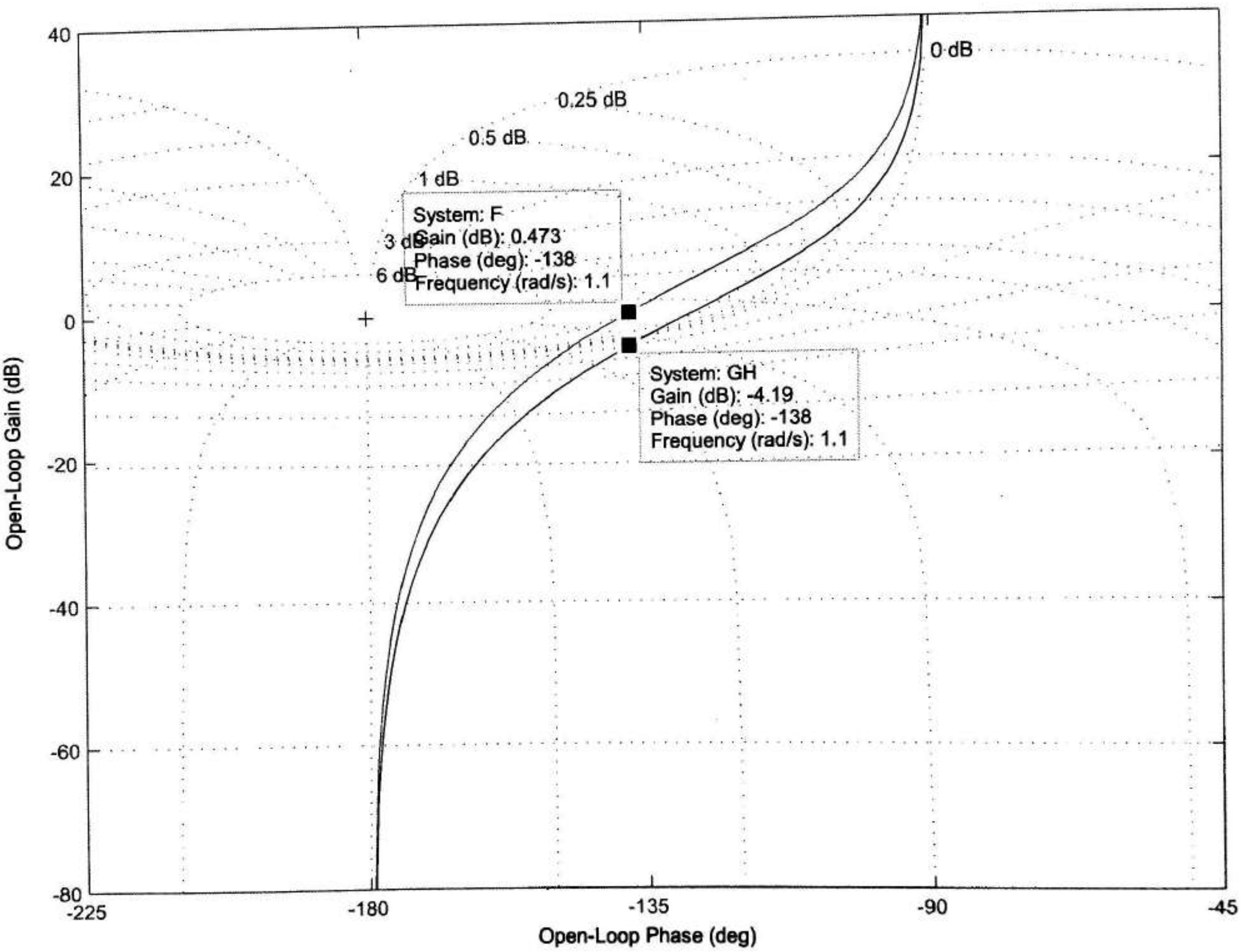
Comprobación en MatLab:

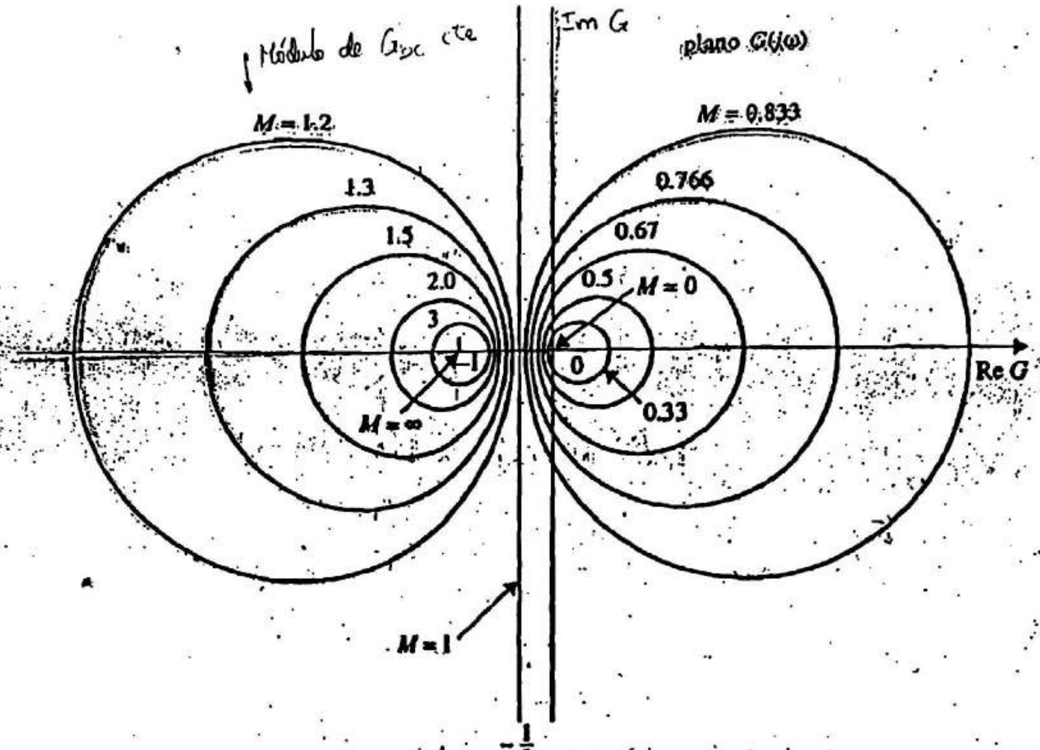
```
G-K = zpk([],[0 -1], 1)
nichols(G-k)
grid on
hold on
F = zpk([],[0 -1], 1.68)
nichols(F)
```

→ 1,68 valor de K para prueba, queda bien tangente a la curva de 3 dB en $\omega = 1,1$ rps.
Para esa ω, los puntos de las gráficas tienen:

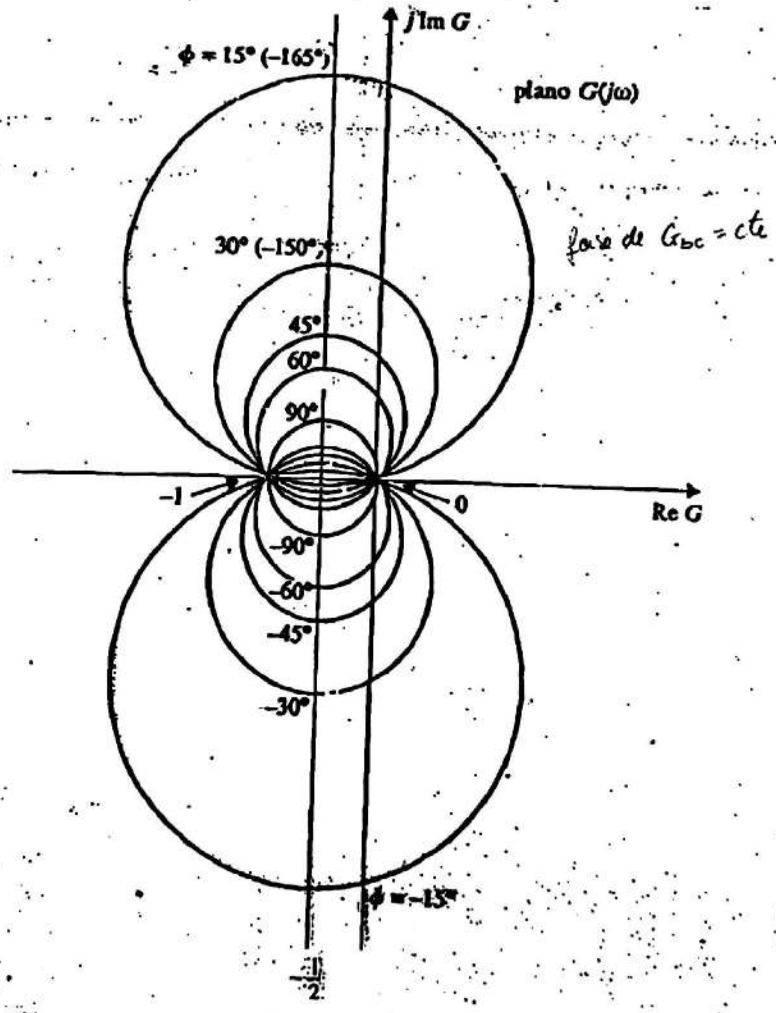
$$\left.\begin{array}{r} 0,248 \text{ dB} \\ -4,24 \text{ dB} \end{array}\right\} 3,992 \text{ dB}$$

Nichols Chart

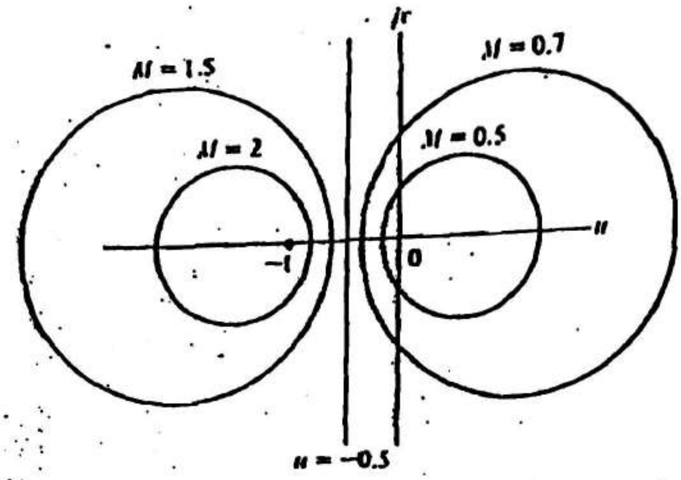




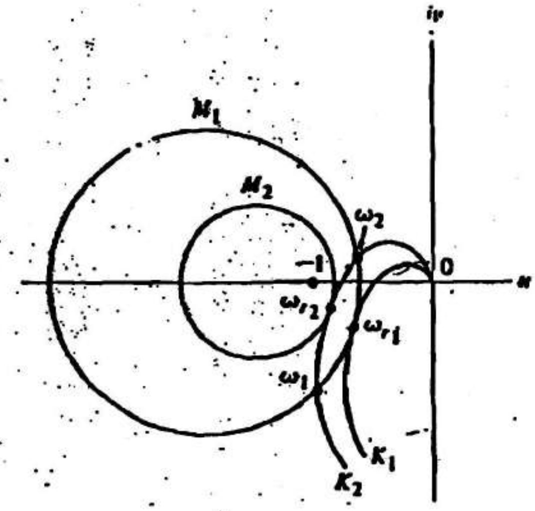
Círculos de M constante en coordenadas polares.



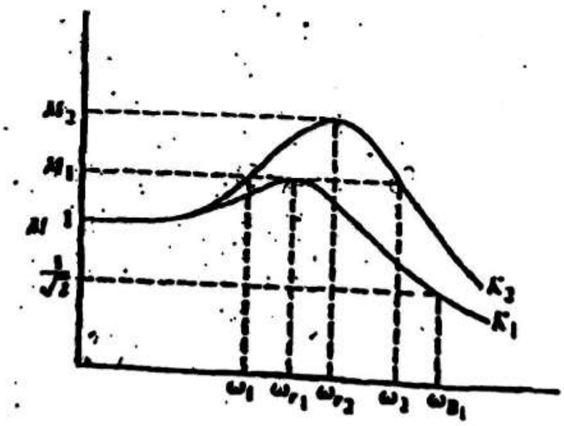
Círculos de N constante en coordenadas polares.



Circulos de M constante.



Gráfica polar de $G(j\omega)$ para dos valores de una ganancia.



Respuesta de frecuencia de circuito cerrado de $T(j\omega) = G(j\omega)/1 + G(j\omega)$.

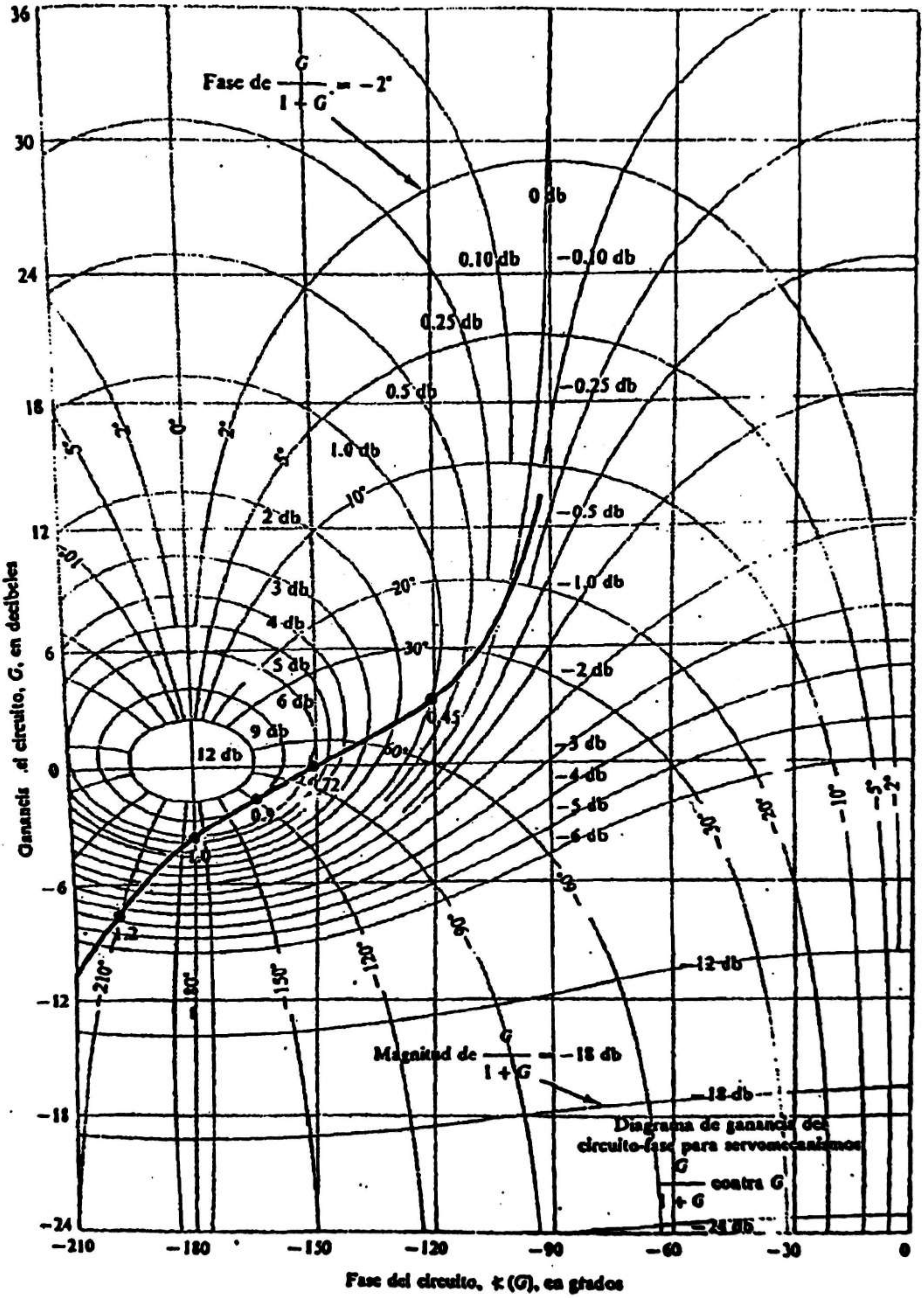
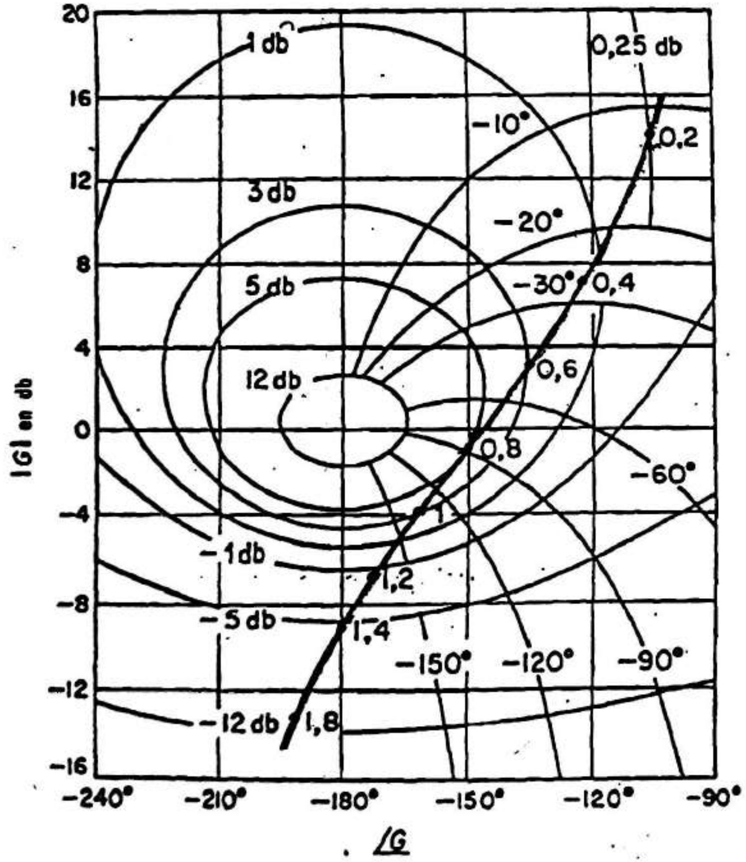
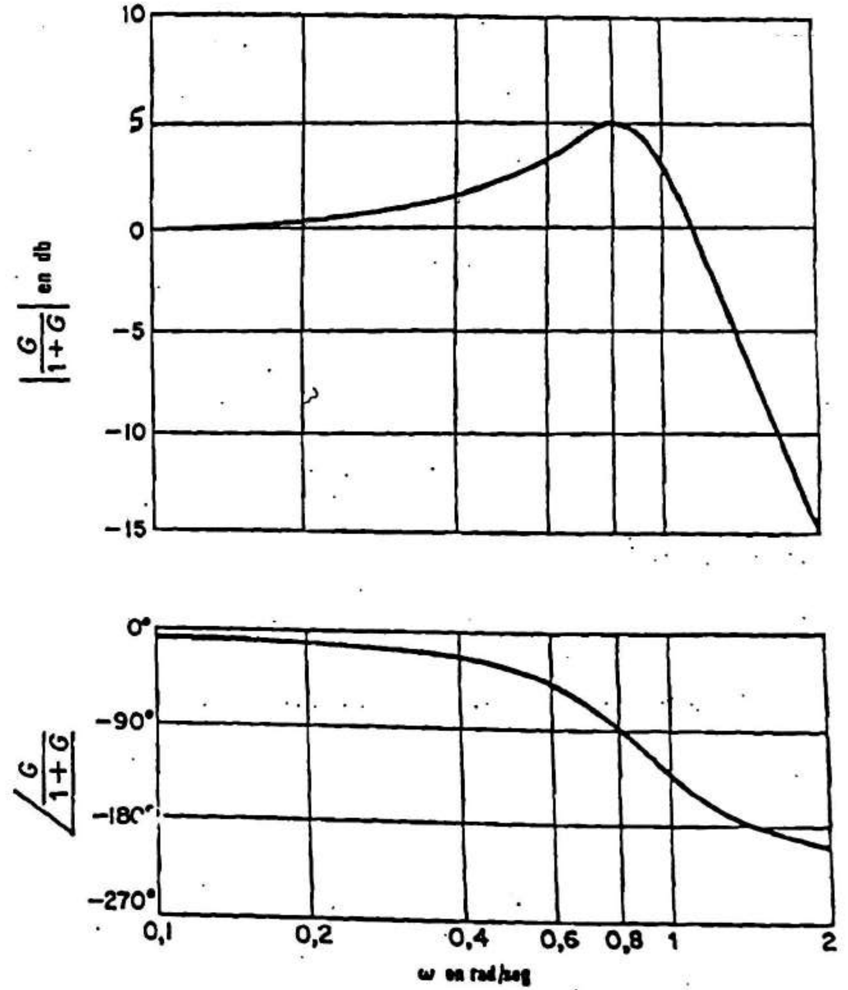


Diagrama de Nichols para $G(j\omega) = 0.64/j\omega((j\omega)^2 + j\omega + 1)$.

$$\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$$



(a)



(b)

(a) Diagrama de $G(j\omega)$ superpuesto a un diagrama de Nichols; (b) curvas de respuesta de frecuencia de lazo cerrado.

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

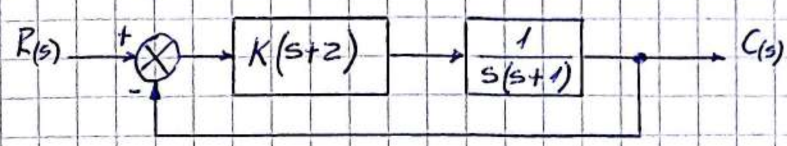
T.P. 9-1: Compensación de Sistemas de Control.

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 1:

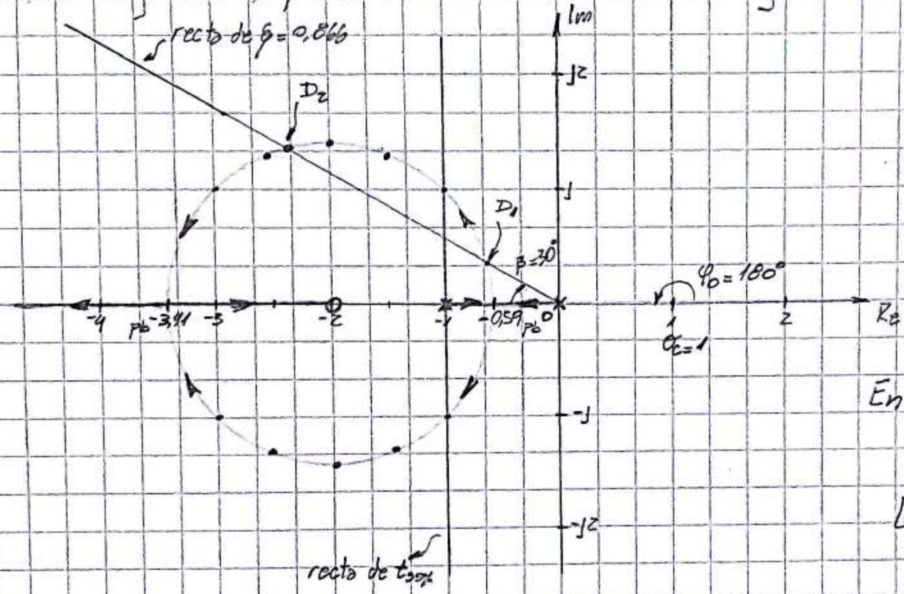
Dado el siguiente sistema, hallar el valor de K para que el factor de amortiguamiento sea $\xi = 0{,}866$ y que el tiempo de establecimiento sea $t_{s5\%} < 3$ [seg]



Determinamos la F_{TLA} del sistema, a la cual luego haremos el diagrama del LR:

$$G_{(s)}H_{(s)} = K\frac{(s+z)}{s(s+1)} \quad ; \quad G_{(s)} = K\frac{(s+z)}{s(s+1)} \qquad H_{(s)} = 1$$

En el diagrama, primero se ubican las singularidades de $G_{(s)}H_{(s)}$



Por Evans: hay LR en el eje Re en: $-1 < LR < 0$
$-\infty < LR < -2$

$D_2 \approx -\frac{7}{3} + j\frac{4}{3} \approx -2{,}\overline{33} + j1{,}\overline{33}$

En MatLab:
```
G=tf([1 2],[1 1 0])
rlocus(G)
[K,P]=rlocfind(G)
```

- Las asíntotas serán: $\varphi_K = \frac{180°}{p-z}(2K+1) \qquad K = 0, 1, \ldots, (p-z-1)$ $\quad \begin{cases} p = 2 \\ z = 1 \end{cases} \therefore K = 0$

$\varphi_0 = \frac{180°}{2-1}(2\cdot 0+1) = 180° \rightarrow$ asíntota a 180°

- Baricentro ó σ_{corte}: $\sigma_c = \frac{\Sigma Re\{p\} - \Sigma Re\{z\}}{p - z}$

$\sigma_c = \frac{0+(-1)-(-2)}{2-1} = 1 \rightarrow$ se ubica en el eje Re =

- Punto de bifurcación pb: Desde la Ecu. Característica

$1 + G_{(s)}H_{(s)} = 0 \quad \therefore \quad K\frac{(s+2)}{s(s+1)} + 1 = 0 \quad \therefore \quad K =$

Compensadores. (En LR)
Adelanto: mejora las características dinámicas del sistema. El cero se ubica más cerca del origen en el plano S.

Atrazo: mejora las características de régimen del sistema. El polo se ubica más cerca del origen en el plano S.

NOTA

Scanned by CamScanner

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

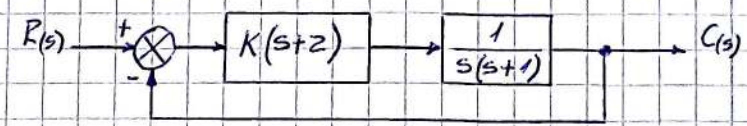
T.P. 9-1: Compensación de Sistemas de Control.

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 1:

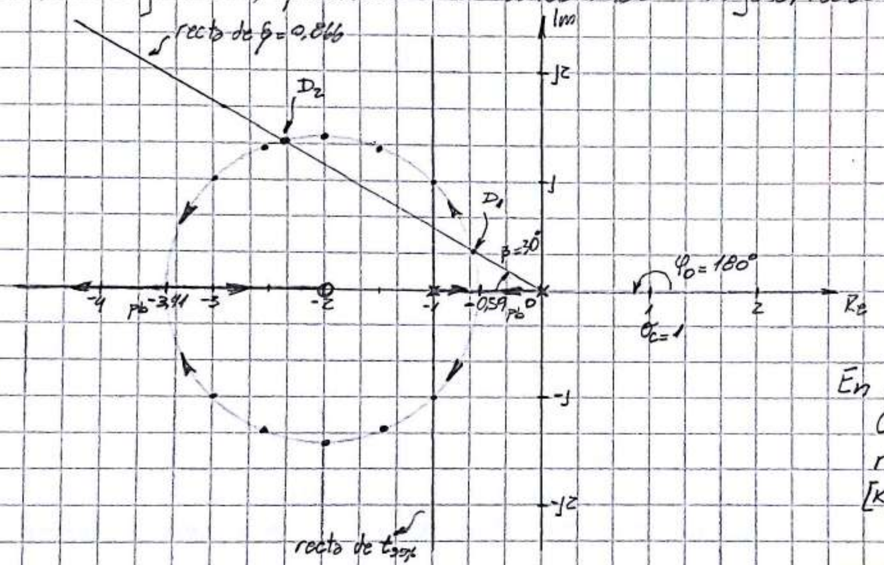
Dado el siguiente sistema, hallar el valor de K para que el factor de amortiguamiento sea $\xi = 0{,}866$ y que el tiempo de establecimiento sea $t_{s5\%} < 3$ [seg]



Determinamos la F_{TLA} del sistema, a la cual luego haremos el diagrama del LR:

$$G_{(s)} H_{(s)} = K \frac{(s+z)}{s(s+1)} \quad ; \quad G_{(s)} = K \frac{(s+z)}{s(s+1)} \qquad H_{(s)} = 1$$

En el diagrama, primero se ubican las singularidades de $G_{(s)} H_{(s)}$



Por Evans: hay LR en el eje Re en: $-1 < LR < 0$
$-\infty < LR < -2$

$$D_2 \approx -\frac{7}{3} + j\frac{4}{3} \approx -2{,}33 + j1{,}33$$

En Matlab:

```
G = tf([1  2],[1  1  0])
rlocus(G)
[K,P] = rlocfind(G)
```

- Las asíntotas serán:

$$\varphi_K = \frac{180°}{p-z}(2K+1) \qquad K = 0,$$

$$\varphi_0 = \frac{180°}{2-1}(2 \cdot 0 + 1) = 180° \rightarrow \text{asíntota a } 180°$$

- Baricentro o σ_{corte}:

$$\sigma_c = \frac{\Sigma Re\{p\} - \Sigma Re\{z\}}{p-z}$$

$$\sigma_c = \frac{0 + (-1) - (-2)}{2-1} = 1 \rightarrow \text{se ubica en el eje } Re = 1$$

- Punto de bifurcación pb:

Desde la Ecu. Característica de la F_{TLC}, se despeja K

$$1 + G_{(s)} H_{(s)} = 0 \quad \therefore \quad K \frac{(s+z)}{s(s+1)} + 1 = 0 \quad \therefore \quad K = -\frac{s(s+1)}{(s+z)}$$

NOTA

$$K = -\frac{s^2+s}{s+2} \quad (a)$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+1)(s+2)-(s^2+s)}{(s+2)^2} = -\frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2} = 0$$

Para que sea 0 basta que el Num = 0 $\Rightarrow s^2+4s+2=0 \quad \begin{cases} s_1 = -0{,}59 \\ s_2 = -3{,}41 \end{cases}$

Estas raíces halladas para que sean pb deben pertenecer al LR del eje Real; ámbas cumplen ésta condición, ello se interpreta que el diagrama "sale" en -0,59, recorre de alguna forma el SPI y "entra" en -3,41. Al entrar, un polo va hacia el cero en -2, y el otro polo va hacia $-\infty$ por la asíntota.

- Criterio de R-H:

Buscamos si existe algún valor de K que haga inestable al sistema en LC.

$$G_{(s)}H_{(s)} + 1 = 0$$

$$K(s+2) + s(s+1) = 0$$

$$Ks + 2K + s^2 + s = 0$$

$$s^2 + (1+K)s + 2K = 0 \quad (b)$$

s^2	1	2K
s^1	(1+K)	
s^0	2K	

Cómo K es siempre positivo, no hay cámbios de signo en la 1° columna de R-H, por lo tanto el sistema será Estable en LC.

Cuando el diagrama "sale" del eje Re, no se sabe que forma adopta, para ello hay que analizarlo punto a punto para ciertos valores de K.

¿Que valores adopta K? usando la ecuación (a) valuada en los puntos de biforcación

$K_{(-0,59)} = 0{,}172$

$K_{(-3,41)} = 5{,}83$

éstos valores indican que entre $0<K<0{,}17$ se está sobre el eje Re, y $K>5{,}83$ se vuelve a entrar al eje Re. Por lo tanto para $0{,}17<K<5{,}83$ se está fuera del eje Re.

Cumpliendo la condición $0{,}17<K<5{,}83$, se eligen valores de K usando la ecuación (b):

$K=1 \Rightarrow s^2+2s+2=0 \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j$

$K=2 \Rightarrow s^2+3s+4=0 \rightarrow s_{1,2} = -1{,}5 \pm j1{,}323$

$K=3 \Rightarrow s^2+4s+6=0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm j1{,}4142$

$K=4 \Rightarrow s^2+5s+8=0 \rightarrow s_{1,2} = -2{,}5 \pm j1{,}323$

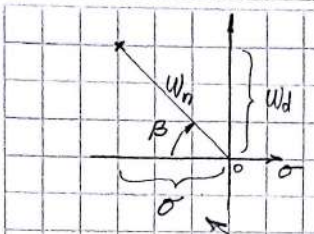
$K=5 \Rightarrow s^2+6s+10=0 \rightarrow s_{1,2} = -3 \pm j$

Todos estos puntos forman un círculo de R = 1,41 y C(-2; 0)

Con el diagrama del LR bien establecido, se pasa a la fase de diseño con las especificaciones pedidas. Buscamos una figura geométrica que corte al diagrama del LR. Recordando:

NOTA

ALCAZAR Diego J. Leg. 52331		HOJA N° FECHA



$\xi = \cos(\beta)$ ∴ $\beta = \cos^{-1}(\xi) = \cos^{-1}(0{,}866) = 30°$

Trazamos una recta de $\beta = 30°$ (todos los puntos de la recta tienen un $\xi = 0{,}866$) que corta al diagrama del LR. en dos puntos, con el otro dato de diseño se identifica cuál es el punto deseado.

Con $t_{s5\%} = \frac{3}{\sigma} < 3$ ∴ $\sigma > 1$ ⇒ es una recta // al eje Im ubicada en -1. Serán los puntos cuyo $|\sigma| > 1$, dejando como único punto el D_2 indicado en la gráfica.

Empleando la función de variable compleja ⓐ, se determina el valor del $|K|$ para el punto de diseño D_2, mediante un método geométrico-analítico, ello serán las distancias del punto D_2 a los puntos singulares.

$$K = -\frac{s(s+1)}{(s+2)} \Rightarrow |K| = \frac{|s|.|s+1|}{|s+2|}$$

Este método **no** sirve para cualquier situación; sirve siempre y cuando las condiciones de diseño corten el LR.

Analítico: aproximadamente $D_2 = -\frac{7}{3} + j\frac{4}{3}$

$$|K| = \frac{|D_2| \cdot |D_2+1|}{|D_2+2|} = \frac{\left|-\frac{7}{3}+j\frac{4}{3}\right| \cdot \left|-\frac{7}{3}+j\frac{4}{3}+1\right|}{\left|-\frac{7}{3}+j\frac{4}{3}+2\right|} = 3{,}687$$

Gráfico: se mide con la regla las distancias (tener en cuenta la escala) → $\frac{\text{Medido c/regla (mm)}}{\frac{15mm}{10}}$

$$|K| = \frac{\frac{41}{15} \cdot \frac{29}{15}}{\frac{7}{5}} = 3{,}775$$

Entonces con una ganancia $K \approx 3{,}7$, el sistema tendrá $\xi = 0{,}866$ y $t_{s5\%} < 3$ [seg].

Comprobación:
Hacer la F_{TLC}: $\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{3{,}7s + 7{,}4}{s^2 + 4{,}7s + 7{,}4}$

$s^2 + 4{,}7s + 7{,}4 \Leftrightarrow s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$

$\omega_n^2 = 7{,}4$ ∴ $\omega_n = 2{,}72$ [rad/s]

$2\xi\omega_n = 4{,}7$ ∴ $\xi = 0{,}864$

$\sigma = \xi\omega_n = 2{,}35008$

$t_{s5\%} = \frac{3}{\sigma} = 1{,}276$ seg < 3 seg

Usando Simulink, se arma el sistema con $K = 3{,}77$, y a la entrada se aplica un escalón unitario. El valor de amplitud en los 3seg debe ser menor a $1 \pm 0{,}05$

Ejercicio 2:

Dada la siguiente función de trans

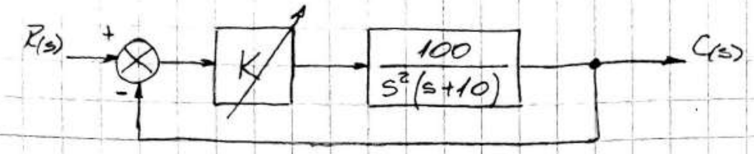
$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{100}{s^2(s+10)}$$

Se pide que en lazo cerrado:
- ser estable

Diseño
- $\xi = 0{,}5$
- $\omega_d = 5$ [rad/seg]
- $e_{ss} = 0$ para e

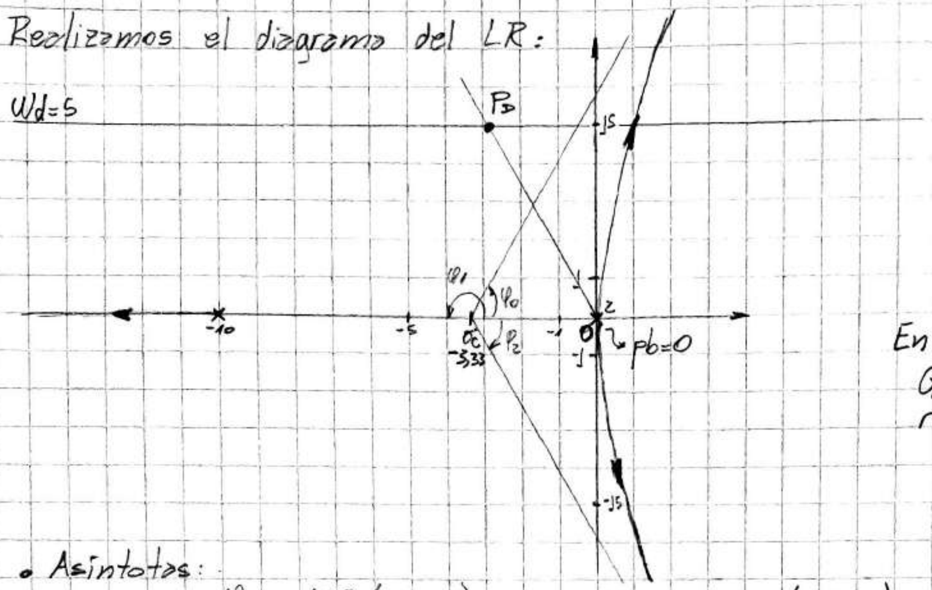
*Primero, como medida sencilla, probamos con ajuste de ganancia y determinamos si se puede lograr los datos de diseño.
Así tenemos:

NOTA



La F_{TLA} del nuevo sistema compensado: $G_{(s)}H_{(s)} = \dfrac{100K}{s^2(s+10)} \rightarrow K_e = 100K$

Realizamos el diagrama del LR:



- Por Evans hay LR en el eje Re en 0 y $-10 < LR < -\infty$

En MatLab:
GH = zpk([ ],[0 0 -10], 100)
rlocus(GH)

- Asintotas:

$$\varphi_K = \frac{180^\circ}{p-z}(2K+1) \qquad K = 0, 1 \ldots, \underbrace{(p-z-1)}_{=2} \quad \begin{cases} p=3 \\ z=0 \end{cases} \therefore K = 0, 1, 2$$

$$\varphi_0 = \frac{180^\circ}{3}(2.0+1) = 60^\circ$$

$$\varphi_1 = \frac{180^\circ}{3}(2.1+1) = 180^\circ$$

$$\varphi_2 = \frac{180^\circ}{3}(2.2+1) = 300^\circ = -60^\circ$$

- Baricentro o θ_{corte}:

$$\theta_c = \frac{\sum Re\{p\} - \sum Re\{z\}}{p-z}$$

$$\theta_c = \frac{0+0+(-10)-0}{3-0} = -\frac{10}{3} = -3,\overline{33} \rightarrow \text{se ubica en el eje Re} = -3,33$$

- Punto de Bifurcación pb:

Despejamos K_e desde la Ecu. Característica de la F_{TLC}

$$1 + G_{(s)}H_{(s)} = 0 \quad \therefore \quad 1 + \frac{K_e}{s^2(s+10)} = 0$$

$$s^2(s+10) + K_e = 0 \quad \therefore \quad K_e = -(s^3 + 10s^2)$$

$$\frac{dK_e}{ds} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dK_e}{ds} = -(3s^2 + 20s) = 0$$

$$3s^2 + 20s = 0 \quad \begin{cases} s_1 = 0 \rightarrow \text{pb ya que pertenece al LR} \\ s_2 = -\frac{20}{3} = -6,\overline{66} \end{cases}$$

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

• Critério de R-H:

Determinamos si algún valor de K_e hace inestable al sistema en LC.

$$1+G_{(s)}H_{(s)}=0 \Rightarrow 1+\frac{K_e}{s^2(s+10)}=0$$

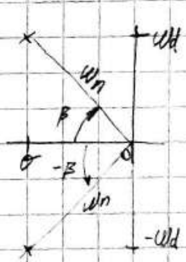
$$s^3+10s^2+K_e=0$$

s^3	1	0
s^2	10	K_e
s^1	$-\frac{K_e}{10}$	
s^0	K_e	

Existen 2 cambios de signo en la 1° columna de R-H independientemente que K_e sea positivo, por lo tanto un valor de K_e infinitesimal mayor que cero vuelve al sistema Inestable, las raíces pasan a estar en el SPD.

Sin importar la anterior conclusión, veremos qué sucede con el punto de diseño pedido.
Por un lado tenemos un $\omega_d = 5$ rps, eso es una recta // al eje Re que pasa por $j5$, la cual trazamos en el diagrama.
Por otro lado, se pide un $\xi = 0{,}5$. Recordando que:

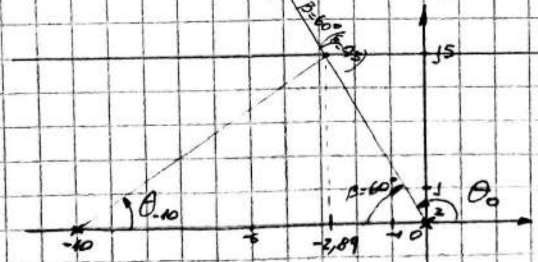
$$\xi = \cos(\beta) \quad \therefore \quad \beta = \cos^{-1}(\xi) = \cos^{-1}(0{,}5) = 60°$$



trazamos una recta a 60°; la intersección de esta con la anterior determina el punto de diseño
$P_D = -2{,}89 \pm j5$

Efectivamente, el P_D no pertenece al LR del sistema. Con lo cual no es posible lograr estabilidad y pautas de diseño con ajuste de ganancia.

* Usando un compensador por adelanto de fase, trataremos de cumplir con las pautas de diseño pedidas.
Primer paso: determinamos la contribución de fase de las singularidades al P_D; trazando rectas desde P_D hacia cada singularidad y midiendo el ∡ formado respecto del eje real positivo.



Geométricamente:

$$\theta_0 = 120°$$

$$\theta_{-10} = tg^{-1}\frac{5}{(10-2{,}89)} = 35{,}12°$$

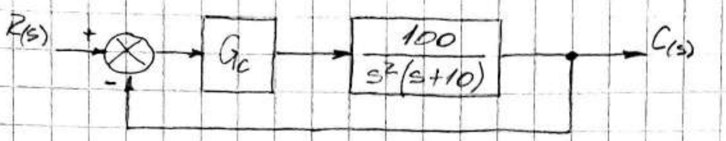
NOTA

Scanned by CamScanner

La contribución angular del sistema tiene en cuenta si son "p" o "z" además de los ángulos determinados, así:

$$\theta = -2.\theta_0 - \theta_{-10} = -2.120° - 35{,}12° = -275{,}12°$$

Cómo el sistema compensado será:



$$G_C = K_C . \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)}$$

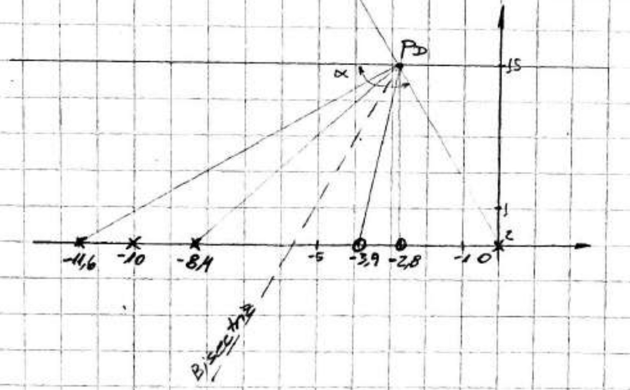
para que el p_D sea LR del sistema compensado, el aporte de fase de G_C más el aporte de fase del sistema original debe ser $\pm 180°$.

$$\varphi_c + \theta = \pm 180° \quad \therefore \quad \varphi_c = \pm 180° - \theta$$

$$\varphi_c = \pm 180° - (-275{,}12°) = 95{,}12°$$

Debido a que la φ_c es de valor próximo a 90°, se comporta cómo un derivador puro (amplifica ruido), para ello ponemos un límite "no usar nada mayor a 60°". Con lo cuál se emplearán dos compensadores, uno que aporte 60° $\rightarrow \varphi_{c1}$ y el otro que aporte 35,12° $\rightarrow \varphi_{c2}$, que sumados dan los 95,12° requeridos.

¿Cómo ubicamos los "p" y "z" de los compensadores? usamos el Método de la Bisectriz



$$\alpha = 120° \quad \therefore \text{Bisectriz} = \frac{\alpha}{2} = 60°$$

A partir de la Bisectriz, se traza a ambos lados de ésta $\varphi_{c1}/2$ y $\varphi_{c2}/2$; el corte al eje Re determinará la ubicación de los polos y de los ceros, éstos últimos se ubican más próximos al origen.

Gráficamente, sus posiciones son:

$z_{c1} = -2{,}8 \qquad p_{c1} = -11{,}6$

$z_{c2} = -3{,}9 \qquad p_{c2} = -8{,}4$

Con éstos valores es posible armar la F_{TLA} del sistema compensado

$$G_{(s)}H_{(s)} = K_C . \frac{(s+z_{c1})}{(s+p_{c1})} . \frac{(s+z_{c2})}{(s+p_{c2})} . \frac{100}{s^2(s+10)} = K_C \frac{(s+2{,}8)}{(s+11{,}6)} . \frac{(s+3{,}9)}{(s+8{,}4)} \frac{100}{s^2(s+10)}$$

Y para LC, la Ecuación Característica es:

$$1 + G_{(s)}H_{(s)} = 100 K_C (s+2{,}8)(s+3{,}9) + (s+11{,}6)(s+8{,}4)\, s^2 (s+10)$$

Haciendo $1+G_{(s)}H_{(s)} = 0$ y despejando K_C para determinar su valor:

$$K_C = -\frac{s^2(s+10)(s+11{,}6)(s+8{,}4)}{100(s+2{,}8)(s+3{,}9)} \quad ⓐ$$

cómo $|K_C|$ es un número real, se lo determina analítica o gráficamente.

NOTA:

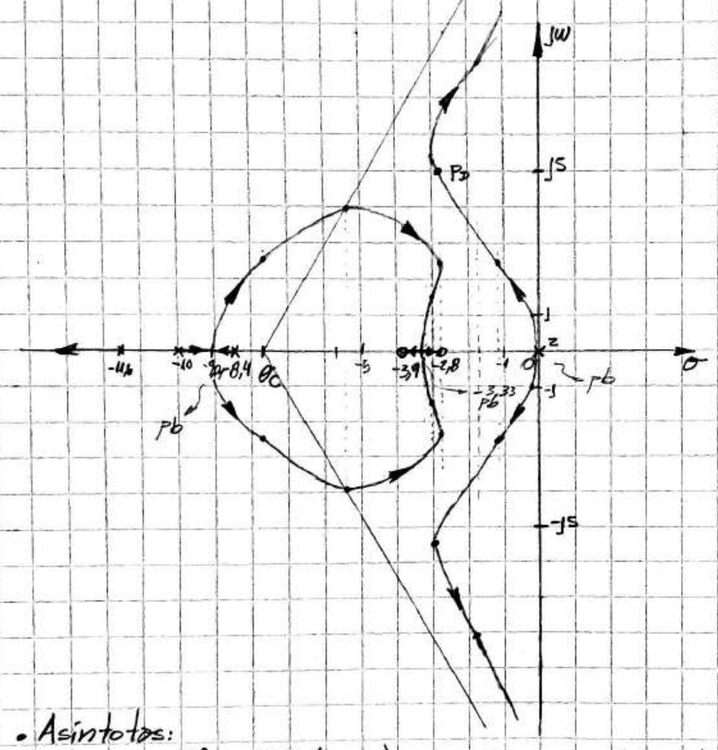
Analítico: $p_D = -2,89 + j5$

$$|K_c| = \frac{|p_D^2| \cdot |p_D+10| \cdot |p_D+11,6|\,|p_D+8,4|}{100\,|p_D+2,8|\,|p_D+3,9|} = 8,4922$$

Gráfico:

$$|K_c| = \frac{\left(\frac{29}{5}\right)^2 \cdot \frac{44}{5} \cdot \frac{50}{5} \cdot \frac{15}{2}}{100 \cdot \frac{25}{5} \cdot \frac{26}{5}} = \frac{33,64 \cdot 8,8 \cdot 10 \cdot 7,5}{100 \cdot 5 \cdot 5,2} = 8,5394$$

Confeccionamos el LR del sistema compensado:



En MatLab:

```
GHc = zpk([-2.8 -3.9],[0 0 -10 -11.6
-8.4], 100)
rlocus(GHc)
[K,P] = rlocfind(GHc)
```

• Asíntotas:

$$\varphi_K = \frac{180°}{P-Z}(2K+1) \qquad K = 0, 1, \ldots, (P-Z-1) \qquad \begin{cases} P = 5 \\ Z = 2 \end{cases} \therefore K \rightarrow 2$$

$$\varphi_0 = \frac{180°}{3}(2.0+1) = 60°$$

$$\varphi_1 = \frac{180°}{3}(2.1+1) = 180°$$

$$\varphi_2 = \frac{180°}{3}(2.2+1) = 300° = -60°$$

• Ocorte:

$$\theta_C = \frac{\sum Re\{P\} - \sum Re\{Z\}}{P-Z}$$

$$\theta_C = \frac{0+0-8,4-10-11,6-(-2,8-3,9)}{5-2} = -7,76$$ ← se ubica en el eje Re = -7,76

• Punto de bifurcación pb: $1 + G_{(s)}H_{(s)} = 0 \quad \therefore \quad K_c = -\frac{s^5 + 30s^4 + 297,44s^3 + 9744s^2}{100s^2 + 670s + 1092}$ ①

NOTA

$\frac{dK_c}{ds} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dK_c}{ds} = \frac{-(30000s^6+868000s^5+9550400s^4+52960960s^3+162726144s^2+212808960s)}{1000000s^4+13400000s^3+66730000s^2+146328000s+119246400} = 0$

para que sea 0 el Num=0: $s_1 = 0$ → pb $\in$ al LR

$s_2 = -10,899$

$s_3 = -9,04$ → pb $\in$ al LR

$s_{4,5} = -3,83 \pm j\,3,69$

$s_6 = -3,33$ → pb $\in$ al LR

• Criterio de R-H:

¿Hay algún valor de K_c que haga inestable al sistema?

$G_{(s)}H_{(s)} + 1 = 0 \quad \therefore \quad 100K_c(s+2,8)(s+3,9) + (s+11,6)(s+8,4)s^2(s+10) = 0$

R-H $s^5 + 30s^4 + 297,44s^3 + (100K+974,4)s^2 + 670Ks + 1092K_c = 0$ ⑥

s^5	1	$297,44$	$670K_c$
s^4	30	$(100K_c+974,4)$	$1092K_c$
s^3	$264,96 - \frac{10}{3}K_c$	$633,6K_c$	
s^2	$\dfrac{-\frac{1000}{3}K_c^2 + 4240K_c + 258177,024}{264,96 - \frac{10}{3}K_c}$	$1092K_c$	
s^1	$\dfrac{-\frac{670000K_c^3}{3} + \frac{23076864K_c^2}{5} + \frac{54324006912K_c}{625}}{-\frac{1000K_c^2}{3} + 4240K_c + 258177,024}$		
s^0	$1092K_c$		

1° columna

$K_{c_{crítico}} = 79,488$

En MatLab, para calcular las distintas raíces de la Ec. Característica ante los diferentes valores de K:

```
clc
K= 2 → poner el valor deseado
polinomio=[1 30 297.44 (100*K+974.4) (670*K) (1092*K)]
roots(polinomio)
```

Cuando el LR abandona el eje Re, adopta cierta form[…] que analizarlo punto a punto para distintos valores [...] pb $-9,04$ y $-3,33$.

$K_{c(-9,04)} = 0,04008$

$K_{c(-3,33)} = 102,65428$

para valores $0,04008 < K_c$ [...] eje Re

Con esa condición y eligiendo de K_c, usamos la ecuación ⑥.

$K_c = 1 \Rightarrow s^5 + 30s^4 + 297,44s^3 + 1074,4s^2 + 670s + 1092 = 0$ — $s_1 = -14,09$

$s_{2,3} = -7,77 \pm j\,2,46$

$s_{4,5} = -0,18 \pm j\,1,06$

$K_c = 5 \Rightarrow s^5 + 30s^4 + 297,44s^3 + 1474,4s^2 + 3350s + 5460 = 0$ — $s_1 = -16,98$

$s_{2,3} = -5,38 \pm j\,3,99$

$s_{4,5} = -1,13 \pm j\,2,43$

$K_c = 9 \Rightarrow s^5 + 30s^4 + 297,44s^3 + 1874,4s^2 + 6030s + 9828 = 0$ → $s_1 = -18,55$

$s_{2,3} = -2,92 \pm j\,5,48$

$s_{4,5} = -2,8 \pm j\,2,42$

NOTA

$$\frac{dK_c}{ds} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dK_c}{ds} = -\frac{(30000s^6 + 868000s^5 + 9550400s^4 + 52960960s^3 + 162726144s^2 + 212808960s)}{1000000s^4 + 13400000s^3 + 66730000s^2 + 196328000s + 119246400} = 0$$

para que sea 0 el Num=0: $s_1 = 0$ → pb $\in$ al LR

$s_2 = -10{,}899$

$s_3 = -9{,}04$ → pb $\in$ al LR

$s_{4,5} = -2{,}83 \pm j\,3{,}69$

$s_6 = -3{,}33$ → pb $\in$ al LR

• Criterio de R-H:

¿Hay algún valor de K_c que haga inestable al sistema?

$$G_{(s)}H_{(s)} + 1 = 0 \quad \therefore \quad 100K_c(s+2{,}8)(s+3{,}9) + (s+11{,}6)(s+8{,}4)s^2(s+10) = 0$$

R-H $\quad s^5 + 30s^4 + 297{,}44s^3 + (100K + 974{,}4)s^2 + 670Ks + 1092K_c = 0 \quad$ (6)

s^5	1	$297{,}44$	$670K_c$
s^4	30	$(100K_c + 974{,}4)$	$1092K_c$
s^3	$264{,}96 - \frac{10}{3}K_c$	$633{,}6K_c$	
s^2	$\frac{-\frac{1000}{3}K_c^2 + 4240K_c + 258177{,}024}{264{,}96 - \frac{10}{3}K_c}$	$1092K_c$	
s^1	$\frac{-\frac{670000K_c^3}{3} + \frac{23076864K_c^2}{5} + \frac{54324006912K_c}{625}}{-\frac{1000K_c^2}{3} + 4240K_c + 258177{,}024}$		
s^0	$1092K_c$		

← 1° column

Cuando el LR abandona el eje Re, adopta cierta forma en el plano. Para ello hay que analizarlo punto a punto para distintos valores de K_c. Evaluamos a K_c en los pb $-9{,}04$ y $-3{,}33$.

$K_c(-9{,}04) = 0{,}04008$

$K_c(-3{,}33) = 102{,}65428$

} para valores $0{,}04008 < K_c < 102{,}65428$ se está fuera del eje Re

Con esa condición y eligiendo de K_c, usamos la ecuación (6).

$K_c = 1 \Rightarrow \quad s^5 + 30s^4 + 297{,}44s^3 + 1074{,}4s^2 + 670s + 1092 = 0$ → $s_1 = -14{,}09$; $s_{2,3} = -7{,}77 \pm j\,2{,}46$; $s_{4,5} = -0{,}18 \pm j\,1{,}06$

$K_c = 5 \Rightarrow \quad s^5 + 30s^4 + 297{,}44s^3 + 1474{,}4s^2 + 3350s + 5460 = 0$ → $s_1 = -16{,}98$; $s_{2,3} = -5{,}38 \pm j\,3{,}79$; $s_{4,5} = -1{,}13 \pm j\,2{,}43$

$K_c = 9 \Rightarrow \quad s^5 + 30s^4 + 297{,}44s^3 + 1874{,}4s^2 + 6030s + 9828 = 0$ → $s_1 = -18{,}55$; $s_{2,3} = -2{,}92 \pm j\,5{,}48$; $s_{4,5} = -2{,}8 \pm j\,2{,}42$

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

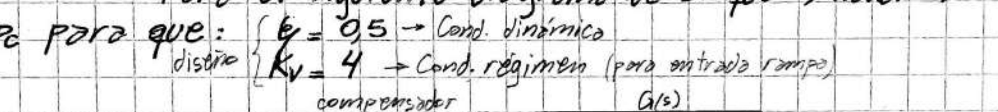
FECHA

$K_c = 15 \Rightarrow s^5 + 30s^4 + 297{,}44s^3 + 2474{,}4s^2 + 10050s + 16380 = 0 \rightarrow s_1 = -20{,}23$

$s_{2,3} = -1{,}73 \pm j\,7{,}91$

$s_{4,5} = -3{,}16 \pm j\,1{,}54$

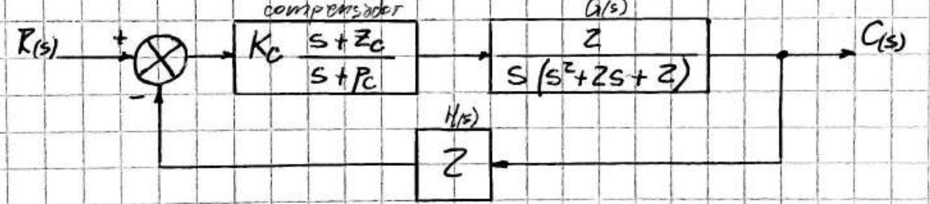
Cómo se puede observar, el diagrama del LR del sistema compensado se difiere bastante al original, pero ahora cumple con las condiciones de diseño.
Así:



Respecto a la condición de régimen, se cumple ya que el sistema es de Tipo 2 y el error para una entrada rampa es nulo. $\therefore e_{ss} = 0$.

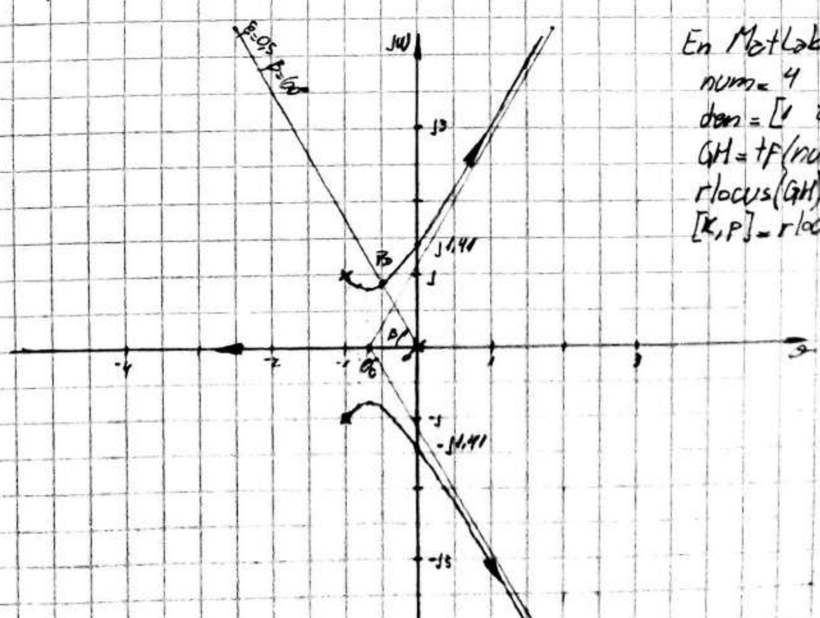
Ejercicio 3:

Para el siguiente diagrama de bloques, hallar los valores de K_c, z_c y p_c para que: diseño $\begin{cases} \xi = 0{,}5 \rightarrow \text{Cond. dinámica} \\ K_v = 4 \rightarrow \text{Cond. régimen (para entrada rampa)} \end{cases}$



Determinamos el LR del sistema, sin tener en cuenta el compensador; así:

$$G_{(s)}H_{(s)} = K_c \frac{4}{s(s^2+2s+2)} = K_c \frac{4}{s(s+1-j)(s+1+j)}$$



En Matlab:
```
num = 4
den = [1 2 2 0]
GH = tf(num,den)
rlocus(GH)
[K,P] = rlocfind(GH)
```

Por Evans, existe LR en el eje Re desde el polo en cero hacia $-\infty$, ya que par de polos complejos conjugados no modifican la paridad al determinar el LR.

- Asintotas:

$$\varphi_K = \frac{180°}{P-Z}(2K+1) \qquad K = 0, 1, \ldots, (P-Z-1) \quad \begin{cases} P=3 \\ Z=0 \end{cases} \therefore K \sim 2$$

$$\varphi_0 = \frac{180°}{3-0}(2.0+1) = 60°$$

$$\varphi_1 = \frac{180°}{3-0}(2.1+1) = 180°$$

$$\varphi_2 = \frac{180°}{3-0}(2.2+1) = 300° = -60°$$

- Baricentro o θ_{corte}:

$$\theta_c = \frac{\Sigma Re\{P\} - \Sigma Re\{Z\}}{P-Z}$$

$$\theta_c = \frac{0-1-1-0}{3-0} = \frac{-2}{3} \approx -0{,}67 \rightarrow \text{se ubica en el eje } Re = -0{,}67$$

- Punto de bifurcación pb:

Desde la Ecu. Caracteristica de la F_{TLC}, se despeja K

$$1 + G_{(s)}H_{(s)} = 0 \quad \therefore \quad 1 + K_c \frac{4}{s(s^2+2s+2)} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 4K = 0 \quad \therefore \quad K_c = -\frac{s^3+2s^2+2s}{4}$$

$$\frac{dK_c}{ds} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dK_c}{ds} = -\frac{1}{4}\cdot(3s^2+4s+2) = 0$$

$$3s^2+4s+2=0 \quad \left\{ s_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm j\frac{\sqrt{2}}{3} \approx -0{,}67 \pm j0{,}47 \right.$$

Al ser 2RCC no hay punto de bifurcación.

- Criterio de R-H:

¿Existe algún valor de K_c que haga inestable al sistema en LC?

$$1 + G_{(s)}H_{(s)} = 0 \quad \therefore \quad 1 + \frac{4K_c}{s^3+2s^2+2s} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 4K_c = 0$$

s^3	1	2
⇒ s^2	2	$4K_c$
s^1	$2-2K_c$	
s^0	$4K_c$	

$2-2K_c = 0 \therefore K_{critico} = \frac{-2}{-2} = 1$

Cuando $K_c > 1$, el sistema en LC se vuelve inestable y habrá 2 raíces a parte Re positiva

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Se arma una ecuación auxiliar con la 2° fila de R-H para determinar los cortes al eje $j\omega$ por parte del LR cuando $K_c = K_{critico}$

$$2s^2 + 4 \cdot 1 = 0 \quad \therefore \quad s_{1,2} = \pm j\sqrt{2} = \pm j\,1{,}41$$

- Angulo de salida:

Teniendo definido el LR del sistema, pasamos a la fase de diseño. Como el $\xi = 0{,}5$:

$$\beta = \cos^{-1}(\xi) = \cos^{-1}(0{,}5) = 60° \quad \rightarrow \text{recta a } 60° \text{ medido desde el Re negativo}$$

Esta recta corta al LR en el punto de diseño $P_D = -0{,}5 \pm j0{,}87$, siendo posible ajustar la ganancia K_c para estar en dicho punto. Para determinar K_c se parte de:

$$G_{(s)}H_{(s)} = K_c \frac{4}{s(s+1-j)(s+1+j)}$$

En LC: $G_{(s)}H_{(s)} + 1 = 0 \rightarrow$ se despeja K_c

$$K_c = -\frac{s(s+1-j)(s+1+j)}{4} \quad \rightarrow \text{como } K_c \text{ es función de variable compleja, sólo interesa su valor real (módulo) en el punto } P_D.$$

$$|K_c| = \frac{|s|.|s+1-j|.|s+1+j|}{|4|} \quad \text{con } s = P_D = -0{,}5 \pm j0{,}87$$

Analítico:

$$K_c = \frac{|P_D|.|P_D+1-j|.|P_D+1+j|}{4} = 0{,}251$$

Gráfico:

$$K_c = \frac{1 \, . \, 0{,}55 \, . \, 2}{4} = 0{,}275$$

- son las distancias entre el P_D y la singularidad en cuestión.

El sistema será:

$$G_{(s)}H_{(s)} = 0{,}26 \frac{4}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1{,}04}{s(s^2+2s+2)}$$

Comprobamos la condición de régimen ante una entrada rampa unitaria, tal que:

$$K_{v_{actual}} = \lim_{s\to 0} s\,G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{1{,}04}{\cancel{s}(s^2+2s+2)} = 0{,}52$$

NOTA

El K_V que posee el sistema es menor al que se pide por diseño, lo que se deberá compenzar por atrazo de fase para lograr la condición pedida en régimen.

Compensación por atrazo de fase:
Se agrega al sistema un "z" y un "p":

$$G_{(s)}H_{(s)} = \frac{1,04}{s(s^2+2s+2)} \cdot \frac{s+z_c}{s+p_c}$$

recalculando K_V:

$$K_V = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1,04}{\cancel{s}(s^2+2s+2)} \cdot \frac{s+z_c}{s+p_c} = 0,52 \cdot \frac{z_c}{p_c} = 4$$ → debe ser igual al $K_{V_{diseño}}$

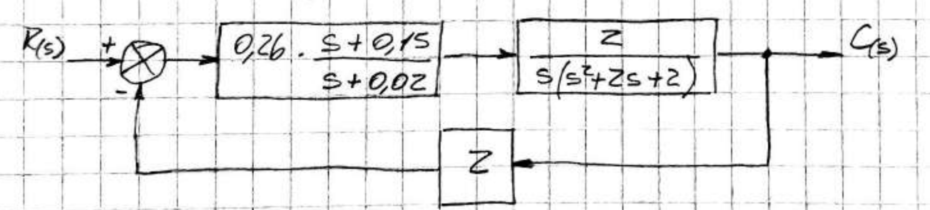
$$0,52 \cdot \frac{z_c}{p_c} = 4 \quad \therefore \quad \frac{z_c}{p_c} = 7,6923$$

Usamos el siguiente critério para ubicar el z_c en el eje Re: "debe estar lo suficientemente lejos de la parte real del p_D (al menos 1 década por debajo) y menor a 1 octava. Así:

$$p_D = -0,5 \pm j0,87 \Rightarrow Re\{p_D\} = -0,5 \begin{cases} 1 \text{ década}: -0,05 \\ 1 \text{ octava}: -0,25 \end{cases} -0,25 < z_c < -0,05$$

Elijo un valor de $z_c = -0,15 \quad \therefore \quad p_c = \frac{-0,15}{7,6923} = -0,0195 \approx -0,02$

El nuevo sistema compensado es:



Verificamos el $K_{V_{actual}}$:

$$K_V = \lim_{s\to 0} s \cdot G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot 0,26 \cdot \frac{s+0,15}{s+0,02} \cdot \frac{2}{\cancel{s}(s^2+2s+2)} \cdot 2 = \frac{0,26 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 2}{0,02 \cdot 2} = 3,9 \approx K_{V_{diseño}} = 4$$

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 4:

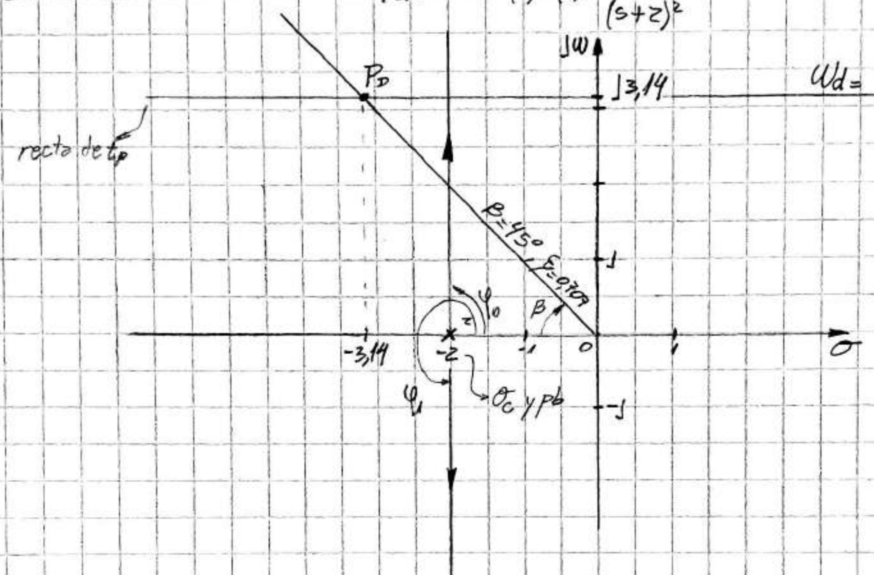
Dada la siguiente función de paso directo: $G_{(s)} = \frac{1}{(s+2)^2}$; como realimentación se usa un transductor de ganáncia unitaria. Se desea que el sistema a lazo cerrado tenga:

diseño $\begin{cases} \xi = 0{,}707 \\ t_p = 1 \text{ seg} \\ e_{ss} = 0{,}1 \text{ para entrada escalón} \end{cases}$

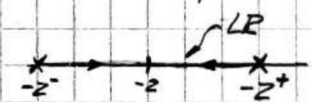
ξ y t_p: Cond. dinámico; e_{ss}: Cond. régimen

Cómo la realimentación es de ganancia unitaria, entónces $H_{(s)} = 1$.

Trazamos el LR de la F_{TLA}: $G_{(s)}H_{(s)} = \frac{1}{(s+2)^2} \cdot K$



Por Evans, sólo existe LR en el eje Re en el punto -2. Ya que si hacemos un zoom en -2 se tiene:



• Asintotas:

$$\varphi_K = \frac{180°}{P-Z}(2k+1) \qquad K = 0, 1, \ldots, (p-z-1) \quad \begin{cases} p=2 \\ z=0 \end{cases} \therefore K \to 1$$

$$\varphi_0 = \frac{180°}{2-0}(2 \cdot 0+1) = 90°$$

$$\varphi_1 = \frac{180°}{2-0}(2 \cdot 1+1) = 270°$$

• Baricentro o σ_{corte}:

$$\sigma_C = \frac{\Sigma Re\{P\} - \Sigma Re\{z\}}{P-Z}$$

$$\sigma_C = \frac{-2-2-0}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \to \text{se ubica en el eje } Re = -2$$

NOTA

- Punto de Bifurcación pb:

Se despeja K de la Ecu. Característica de la F_{TLC}

$1 + G_{(s)}H_{(s)} = 0 \therefore 1 + \frac{K}{(s+2)^2} = 0$

$(s+2)^2 + K = 0 \therefore K = -(s+2)^2 = -(s^2+4s+4)$

$\frac{dK}{ds} = 0 \therefore \frac{dK}{ds} = -(2s+4) = 0$

$2s+4 = 0 \rightarrow s = -2$ el pb se dá también en -2

$pb = -2$

- Criterio de R-H:

¿Hay algún valor de K que haga inestable al sistema en LC?

$1 + G_{(s)}H_{(s)} = 0 \therefore 1 + \frac{K}{(s+2)^2} = 0$

$(s+2)^2 + K = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + 4 + K = 0$

s^2	1	4+K
s^1	4	
s^0	4+K	

Como K es siempre positivo y mayor a cero, el sistema es estable.

Obtenido el LR del sistema, conciderамos los condiciones de diseño requeridos Así:

$t_p = \frac{\pi}{W_d} = 1\ seg \therefore W_d = \frac{\pi}{t_p} = 3{,}14\ [rad/seg]$ → recta // al eje Re en $\pm j3{,}14$

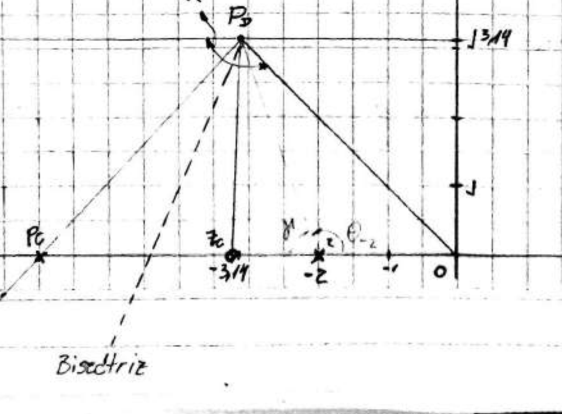
$\beta = \cos^{-1}(\xi) = \cos^{-1}(0{,}707) = 45°$ → recta con ángulo 45° medido desde el eje Re negativo en sentido horario

La intersección de éstas 2 condiciones determinan el punto de diseño P_D. Siendo $P_D = -3{,}14 \pm j3{,}14$, cómo P_D no pertenece al LR, NO es posible compensar por ganancia.

Compensación por adelanto de fase:

empleando el método de la bisectriz.

Ubicamos los "p" y "z" del compensador.



$\alpha = 135°$

$Bisectriz = \frac{\alpha}{2} = 67{,}5°$

$\gamma = tg^{-1} \frac{3{,}14}{|(-3{,}14-(-2))|} = 70°$

$\theta_{-2} = 180° - \gamma = 110°$

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Determinamos el aporte de fase del compensador más el del sistema original para que el punto p_D sea LR, por tanto $\pm 180°$.
El aporte del sistema es:

$$\theta = \underbrace{-2\theta_{-2}}_{\text{con 2 polos}} + \theta_C = \pm 180°$$

El compensador aportará: $\theta_C = \pm 180° + 2\theta_{-2} = \pm 180° + 220° = 40°$

Cómo $\theta_C = 40° < 60°$, no es necesario poner 2 compensadores (como en el Ejercicio 2). Desde la bisectriz se trazan $\pm 20°$ y el corte con el eje Re son las ubicaciones del "p" y del "z" del compensador, por ser "adelanto" de fase, el "z" se ubica próximo al origen y el "p" lejos del origen.
Así tenemos que:

$$Z_C = -3{,}25 \quad \wedge \quad P_C = -6$$

$$G_{(s)}H_{(s)} = K_C \frac{1}{(s+2)^2} \cdot \frac{(s+3{,}25)}{(s+6)}$$

Se procede a determinar K_C para el $p_D = -3{,}14 + j3{,}14$, despejando K_C de la ecuación $G_{(s)}H_{(s)} + 1 = 0$:

$$K_C = -\frac{(s+2)^2(s+6)}{(s+3{,}25)}$$ → sólo interesa el valor módulo

Analítico:

$$K_C = \frac{|(p_D+2)^2| \cdot |p_D+6|}{|p_D+3{,}25|} = 15{,}09$$

Gráfico:

$$K_C = \frac{3{,}4^2 \cdot 4{,}3}{3{,}14} = 15{,}83$$

• hasta aquí, se cumple con las condiciones dinámicas (transitorio) pedidos para el sistema.

Resta comprobar si cumple con el error de estado estacionario pedido. Se determina en base al e_{ss} pedido el K_P:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_P} = 0{,}1 \quad \therefore \quad K_P = \frac{1-e_{ss}}{e_{ss}} = 9 = K_{P_{deseado}}$$

Con lo cual, el $K_{P_{actual}}$ es:

$$G_{(s)}H_{(s)} = 15{,}09 \cdot \frac{(s+3{,}25)}{(s+2)^2(s+6)}$$

$$K_{P_{actual}} = \lim_{s \to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s \to 0} 15{,}09 \frac{(s+3{,}25)}{(s+2)^2(s+6)} = 2{,}04$$

→ el K_P del sistema es menor al requerido; se debe compensar por atrazo de fase

Compensación por atrazo de fase:
se le agrega otro "p" y otro "z" al sistema (compensador en atrazo). Con lo cual se tiene:

$$G_{(s)}H_{(s)} = 15{,}09 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} \cdot \frac{(s+3{,}25)}{(s+6)} \cdot \frac{(s+Z_c)}{(s+P_c)}$$

NOTA

ncia: Distancia entre columnas su[redacted]

Columna-Calzada: Distancia entre la [redacted] la co

Se calcula el K_p de éste nuevo sistema e iguala al $K_{p\,deseado}$.

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} 15{,}09 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} \cdot \frac{(s+3{,}25)}{(s+6)} \cdot \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)} = 9$$

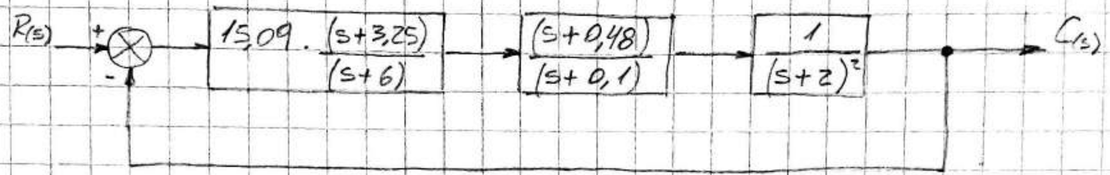
$$15{,}09 \cdot \frac{3{,}25 \cdot z_c}{2^2 \cdot 6 \cdot p_c} = 9 \quad \therefore \quad \frac{z_c}{p_c} = \frac{9}{2{,}04} = 4{,}41$$

Como es un compensador en atrazo el "p" está más cercano al origen y el "z" más alejado de éste; ubicamos a z_c con el criterio:

$$p_D = -3{,}14 \pm j\,3{,}14 \Rightarrow Re\{p_D\} = -3{,}14 \begin{cases} \to 1 \text{ década}: -0{,}314 \\ \to 1 \text{ octava}: -1{,}57 \end{cases} \quad -1{,}57 < z_c < -0{,}314$$

Elijo un valor de $z_c = -0{,}48 \quad \therefore \quad p_c = \frac{-0{,}48}{4{,}41} = -0{,}109 \approx -0{,}1$

Así:

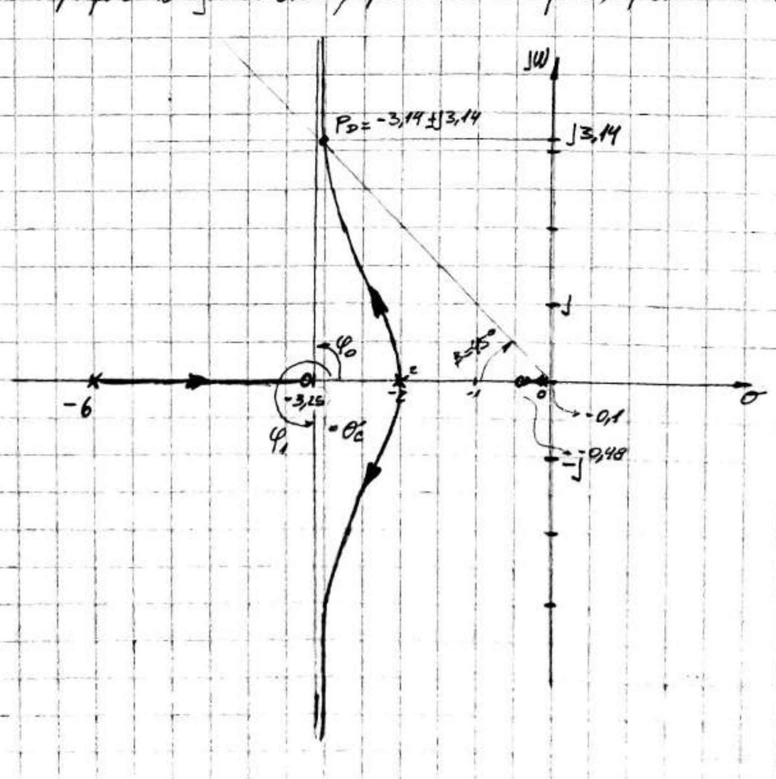


Verificamos el $K_{p\,actual}$:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} 15{,}09\,\frac{(s+3{,}25)}{(s+6)} \cdot \frac{(s+0{,}48)}{(s+0{,}1)} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{15{,}09 \cdot 3{,}25 \cdot 0{,}48}{6 \cdot 0{,}1 \cdot 2^2} = 9{,}8 \approx K_{p\,deseado} = 9$$

• este sistema cumple con los criterios dinámicos y estáticos pedidos.

El LR se verá modificado tal que, al colocar el "p" y el "z" (de atrazo) tan juntos, hace que no se modifique la ganáncia y fase en el p_D, pero sí afecta la respuesta en régimen.



• Por Evans, LR en el eje Re entre: $-0{,}48$ y $-0{,}1$; -2; -6 y $-3{,}25$

• Asíntotas: son 2, $\begin{cases} P=4 \\ Z=2 \end{cases}$ $K \sim 1$

$\varphi_0 = 90°$

$\varphi_1 = 270°$

• $\theta_C = \frac{-2^2 - 0{,}1 - 6 + 3{,}25 + 0{,}48}{4-2} = -3{,}19$

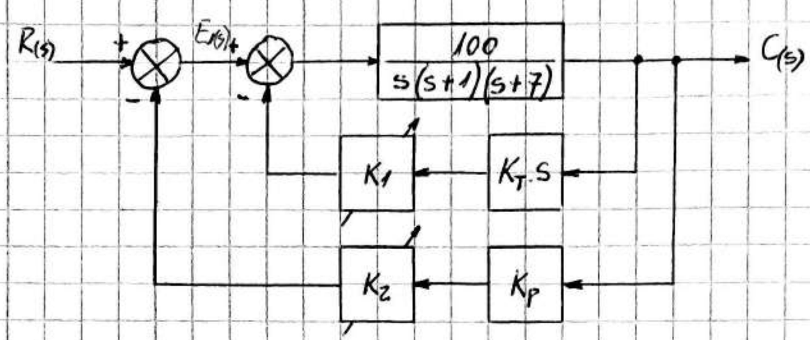
• $p_b = -2$

Scanned by CamScanner

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Ejercicio 1:

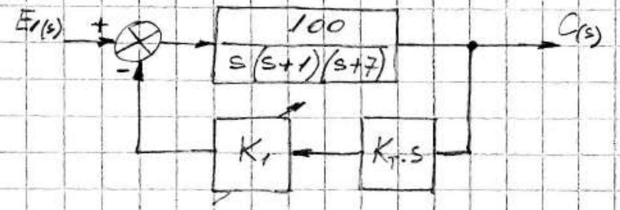
Se tiene la siguiente planta



Datos:
- ganancia derivativa $K_T = 0{,}2$
- ganancia proporcional $K_p = 1$

Sabiendo que K_1 y K_2 son variables, se pide determinar el valor de las mismas para:
- máximo sobrepico porcentual $M_p = 4{,}32\%$ } Cond. Dinámicas
- tiempo de pico $t_p = 1{,}57$ [seg]
- coeficiente estático de error de velocidad $K_V \geq 20$ } Cond. Estáticas

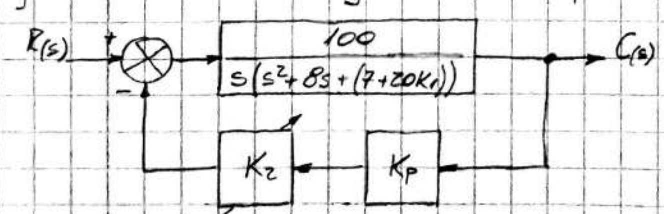
Primer paso, se desarrolla el lazo de realimentación conformado por:



$$\frac{C_{(s)}}{E_{1(s)}} = \frac{\frac{100}{s(s+1)(s+7)}}{1+\frac{100}{s(s+1)(s+7)} . K_1 . K_T . s} = \frac{100}{s(s+1)(s+7)+100 K_T K_1 s} \quad K_T = 0{,}2$$

$$\frac{C_{(s)}}{E_{1(s)}} = \frac{100}{s^3+8s^2+7s+20K_1 s} = \frac{100}{s(s^2+8s+(7+20K_1))}$$

Dibujamos el nuevo diagrama en bloques:



Determinamos la F_T del sistema completo:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{\frac{100}{s(s^2+8s+(7+20K_1))}}{1+\frac{100}{s(s^2+8s+(7+20K_1))} . K_2 . K_p} = \frac{100}{s^3+8s^2+(7+20K_1)s+100K_p K_2} \quad K_p = 1$$

NOTA

Aplicando las condiciones dinámicas de diseño, tenemos que:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1{,}57\ [\text{seg}] \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{\pi}{t_p} = \frac{3{,}14\ \text{rad}}{1{,}57\ \text{seg}} = 2\ [\text{rad/seg}]$$

$$M_{P\%} = e^{-\sigma\pi/\omega_d} \cdot 100\% = 4{,}32\% \quad \therefore \quad \sigma = -\frac{\omega_d}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{M_{P\%}}{100\%}\right) = -\frac{2\ \text{rad/seg}}{\pi\ \text{rad}} \cdot \ln\left(\frac{4{,}32\%}{100\%}\right) = 2\ [\text{seg}^{-1}]$$

Estos valores de diseño corresponden a los de un sistema de 2° Orden subamortiguado; así, planteamos la Ecuación Característica de dicho sistema:

$$s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2 \quad \text{ó también} \quad s^2 + 2\sigma \cdot s + \omega_n^2$$

siendo:

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega_d^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \qquad \xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{2}{2} = 1$$

Así: $s^2 + 4s + 8$ → Ec. Característica de sistema de 2° Orden que cumple con las condiciones dinámicas de diseño

Ahora bien, cómo la F_{TLC} del sistema bajo análisis tiene por Ec. Característica un polinomio en "s" de 3° grado (con K_1 y K_2 variables, ubico los polos de la F_{TLC} donde se desea) se lo divide por la Ec. Característica de 2° grado; si la división da resto igual a cero, ambos polinomios tienen las mismas raíces y el sistema cumplirá con las condiciones de diseño pedidas:

$$\begin{array}{l|l}
s^3 + 8s^2 + (7+20K_1)s + 100K_2 & s^2+4s+8 \\ \cline{2-2}
-s^3 - 4s^2 - 8s & s+4 \\ \cline{1-1}
0s^3 + 4s^2 + (-1+20K_1)s + 100K_2 & \\
\quad -4s^2 - 16s - 32 & \\ \cline{1-1}
\quad 0s^2 + (-17+20K_1)s + (-32+100K_2) &
\end{array}$$

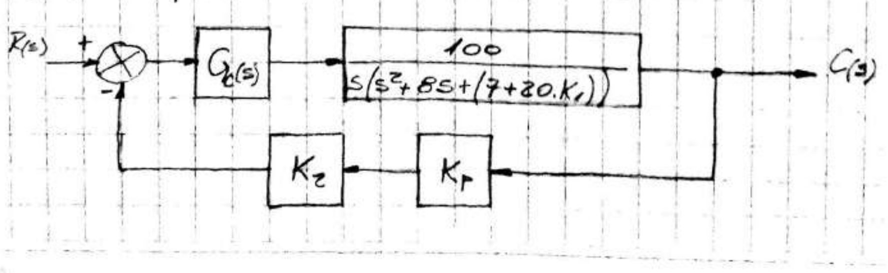
→ para que el resto sea cero, ambos términos deben ser cero

$$\left.\begin{array}{l}
-17 + 20K_1 = 0 \quad \therefore \quad K_1 = \frac{17}{20} = 0{,}85 \\
-32 + 100K_2 = 0 \quad \therefore \quad K_2 = \frac{32}{100} = 0{,}32
\end{array}\right\}$$ ajustando K_1 y K_2 a estos valores se cumplen las cond. dinámicas.

Calculamos el K_V del sistema para determinar si cumple con la condición estática de diseño:

$$K_V = \lim_{s\to 0} s \cdot G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{100}{\cancel{s}\left(\underset{0}{s^2} + \underset{0}{8s} + (7 + 20 \cdot 0{,}85)\right)} \cdot 0{,}32 \cdot 1 = \frac{4}{3} \approx 1{,}\overline{33}$$

Cómo el $K_{V_{actual}}$ es menor al pedido, se compensa en atraso así se mejora la respuesta en régimen sin afectar la respuesta dinámica del sistema.
Así tenemos que:



ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Siendo $G_{C(s)}$ el compensador en atrazo, de la forma:

$$G_{C(s)} = \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)}$$

En "atrazo", el p_c está ubicado más cercano al origen. Para ubicar al z_c y al p_c, primero determinamos el K_V del sistema compensado (que será igual al K_V pedido)

$$K_V = \lim_{s\to 0} s\, G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)} \cdot \frac{100}{\cancel{s}(s^2+8s+24)} \cdot 0{,}32 \cdot 1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{z_c}{p_c} = 20$$

$$\frac{z_c}{p_c} = 15$$

↳ cómo el punto de diseño es $P_D = \theta \pm j\omega_d = -2 \pm j2$, ubicamos a z_c entre la 10^{ma} parte y 1 octava de θ, $\frac{Re\{P_D\}}{10} < z_c < \frac{Re\{P_D\}}{2}$

$$-0{,}2 < z_c < -1 \longrightarrow \text{elijo } z_c = -0{,}3 \quad \therefore \quad p_c = \frac{z_c}{15} = -0{,}02$$

Por lo tanto: $G_{C(s)} = 1 \cdot \frac{s+0{,}3}{s+0{,}02}$; $K_1 = 0{,}85$; $K_2 = 0{,}32$

Ejercicio 2:

Dado el siguiente sistema:

$$G_{(s)} = \frac{4}{s(s+2)} \quad ; \quad H_{(s)} = 1$$

Se pide que el sistema tenga las siguientes características:

- coeficiente estático de error de velocidad $K_V = 20$ } cond. régimen
- márgen de fase $M_\phi \geq 50°$
- márgen de ganancia $M_G \geq 10\,dB$ } cond. dinámica

Se propone un compensador en adelanto cuya F_T es:

$$G_{C(s)} = K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad \text{siendo } \alpha < 1 \text{ (adelanto)}$$

Expresamos en formato Bode:

$$G_{C(s)} = K_c \frac{\frac{1}{T}(Ts+1)}{\frac{1}{\alpha T}(\alpha Ts+1)} = \alpha K_c \frac{(Ts+1)}{(\alpha Ts+1)} \qquad K = \alpha K_c$$

Cómo en estos métodos de respuesta en frecuencia lo primero que se hace es cumplir con la condición de régimen, por ello calculamos el K_V del sistema compensado.

$$K_V = \lim_{s\to 0} s \cdot G_{(s)} \cdot H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{4}{\cancel{s}(s+2)} \cdot K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \cdot 1 = 20$$

$$K_V = \frac{4}{2} K = 20 \quad \therefore \quad K = 10 = \alpha K_c$$

Se construye una F_T denominada $G_{1(s)}$: $G_{1(s)} = K \frac{4}{s(s+2)} = \frac{40}{s(s+2)}$

NOTA

Y a dicho función se le hace Bode:

$$G_{1}(s) = \frac{\cancel{40}^{20}}{s \cdot 2\,(0{,}5s+1)}$$

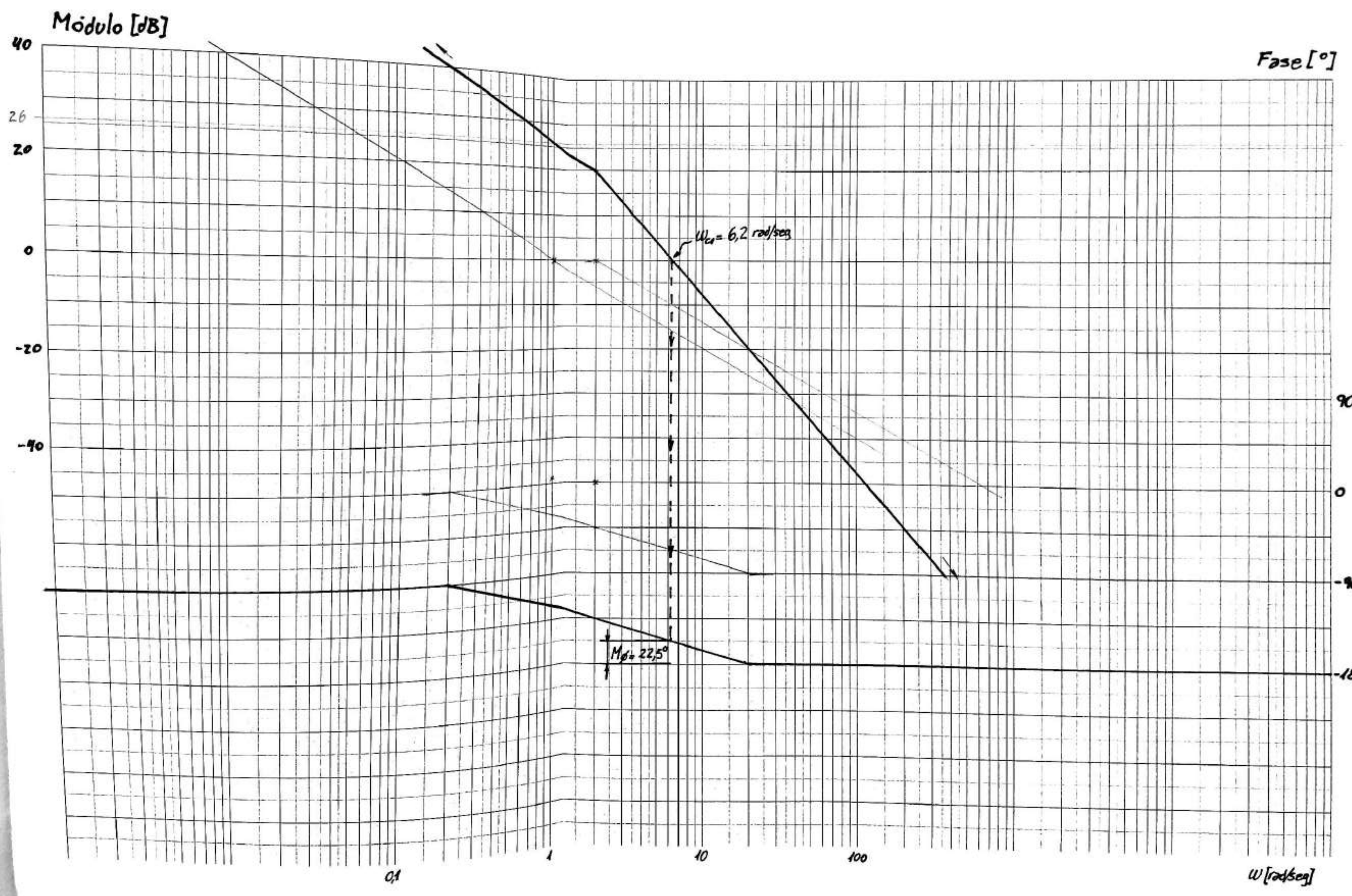
escaleo $\begin{cases} 0{,}1\ rps \\ 20\ rps \rightarrow 100\ rps \end{cases}$

$s \rightarrow j\omega$:

$$G_{1}(j\omega) = \frac{20}{j\omega(1+j0{,}5\omega)}$$

$$|G_{1}(j\omega)|_{dB} = \underbrace{20\log(20)}_{26{,}02\ dB} - 20\log(\omega) - 10\log(1+0{,}25\omega^2)$$

$$\angle G_{1}(j\omega) = 0^\circ - 90^\circ - tg^{-1}(0{,}5\omega)$$



ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

En W_{c}=6,2 [rad/seg] el sistema $G_{(s)}$ tiene ganáncia crítica, 0 dB, con un M_ϕ= 22,5°, por lo tanto una fase ϕ= -157,5°.
Cómo el M_ϕ actual del sistema es menor al pedido, se compensa por adelanto.
El compensador debe aportar M_ϕ positivo, con lo cual será:

$$\underbrace{50°}_{\text{pedido}} - \underbrace{22,5°}_{\text{actual}} = 27,5° \leftarrow \text{esa fase aportará el compensador}$$

Cómo el agregado del compensador genera un corrimiento de W_c, (hácia la derecha) se le suma a lo anterior unos grados extras, entre 5° a 10°, para asegurar el M_ϕ= 50°. Así:

$$27,5° + \underbrace{\text{ángulo extra}}_{8,5° \text{(elijo)}} = 36° \equiv \phi_{max}$$

Cómo el ángulo máximo dado por un compensador en adelanto es:

$$\text{sen}(\phi_{max}) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \therefore \quad \text{sen}(36°) = 0,59$$

Despejando α: $$\alpha = \frac{1-\text{sen}(\phi_{max})}{1+\text{sen}(\phi_{max})} = 0,26$$

La frecuencia dónde se dá el ϕ_{max}, es en W_{max}, siendo la media geométrica de la posición del "polo" y el "cero" del compensador:

$$W_{max} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\, T}$$

Si a la ecuación del compensador, $\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \xrightarrow{s \to jw} \frac{1+jTw}{1+j\alpha Tw}$, determinamos la ganáncia para $W = W_{max}$:

$$\left| \frac{1+jwT}{1+j\alpha wT} \right|_{W=W_{max}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ [veces]}$$

expresando el módulo en dB: $$\left|\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right|_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{0,26}}\right) = 5,85 \text{ dB} \approx 6 \text{ dB}$$

Ello significa que el compensador en W_{max} tiene una ganáncia ≈6dB, con lo cual en el gráfico de Bode se busca un valor de W dónde el valor de módulo sea -6dB, en ese punto se tendrá una nueva $W_{crítica}$ (0 dB).
Desde el gráfico:

$$-6 \text{ dB en } W_{c_2} = 9 \text{ [rad/seg]}$$

Entónces:

$$W_{max} = W_{c2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,T} = 9 \text{ [rad/seg]} \quad \therefore \quad \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{posición del "cero" del compensador}} = 9\sqrt{\alpha} = 9\sqrt{0,26} = 4,59$$

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha T}}_{\text{posición del "polo" del compensador}} = \frac{1}{0,26} \cdot 4,59 = 17,65$$

NOTA

Scanned by CamScanner

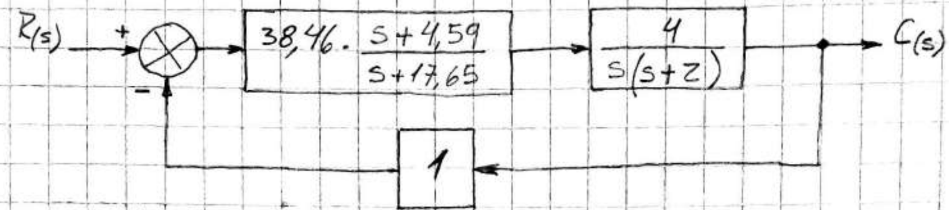
Resta determinar la ganancia del compensador, K_c:

$$K = \alpha . K_c = 10 \therefore \quad K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{10}{0{,}26} = 38{,}46$$

Finalmente el compensador es:

$$G_{C(s)} = 38{,}46 . \frac{s+4{,}59}{s+17{,}65}$$

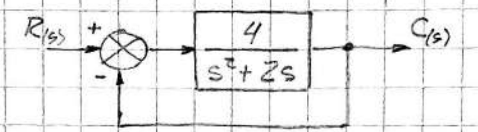
Y por tanto, el sistema compensado:



$$K_V = \lim_{s\to 0} s\, G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, 38{,}46 . \frac{(s+4{,}59)}{(s+17{,}65)} . \frac{4}{\cancel{s}(s+2)} = 20$$ → es igual al valor pedido

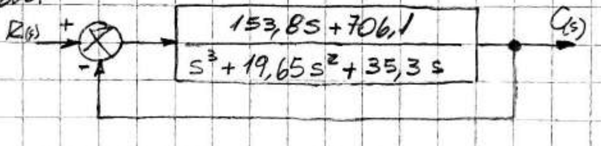
Comprobación:

- Sin compensar:



$$F_{TSC} = \frac{4}{s^2+2s+4}$$

- Compensado:



$$F_{TCC} = \frac{153{,}84s+706{,}1256}{s^3+19{,}65s^2+189{,}14s+706{,}1256}$$

$$G = \frac{4}{s^2+2s} \; ; \; G_1 = \frac{40}{s^2+2s} \; ; \; G_C = 38{,}46 . \frac{(s+4{,}59)}{(s+17{,}65)} \; ; \; G_{CC} = \frac{153{,}84s+706{,}1256}{s^3+19{,}65s^2+35{,}3s}$$

En MatLab:

```
G= tf(4,[1 2 0])
G1= tf(40,[1 2 0])
Gc= tf([38.46 176.5314],[1 17.65])
Gcc= tf([153.84 706.1256],[1 19.65 35.3 0])
FTsc= tf(4,[1 2 4])
FTcc= tf([153.84 706.1256],[1 19.65 189.14 706.1256])
bode(G)
hold on
bode(G1)
bode(Gc)
bode(Gcc)
bode(FTsc)
bode(FTcc)
```

→ en las gráficas, clic derecho: grid on
characteristics -- All Stability Margins

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA Nº

FECHA

Ejercicio 3:

Dado el siguiente sistema:
$$G_{(s)} = \frac{1}{s(s+1)(0{,}5s+1)} \quad ; \quad H_{(s)} = 1$$

Se desea para el sistema las siguientes características.
- coeficiente estático de error de velocidad $K_V = 5$ } cond. de régimen
- margen de fase $M_\phi \geq 40°$ } cond. dinámica
- margen de ganancia $M_G \geq 10\,dB$ }

Se propone un compensador en atraso cuya F_T es:

$$G_{C(s)} = K_C \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \quad \text{siendo } \beta > 1 \text{ (atraso)}$$

Expresamos en formato Bode:

$$G_{C(s)} = K_C \frac{\frac{1}{T}(Ts+1)}{\frac{1}{\beta T}(\beta Ts+1)} = \beta K_C \frac{(Ts+1)}{(\beta Ts+1)} \qquad K = \beta K_C$$

El compensador va colocado en cascada (serie) con la planta $G_{(s)}$ del sistema. Por la forma del método de compensación en frecuencia, primero se calcula el K_V del sistema compensado y se lo iguala al valor pedido por diseño.

$$K_V = \lim_{s\to 0} s\,G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{s(s+1)(0{,}5s+1)} \cdot K \frac{(Ts+1)}{(\beta Ts+1)} = 5$$

$$K_V = 1\,K = 5 \quad \therefore \quad K = 5 = \beta K_C$$

Se arma la F_T $G_{1(s)}$:
$$G_{1(s)} = K \cdot \frac{1}{s(s+1)(0{,}5s+1)} = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

Se le hace el Bode a $G_{1(s)}$:

$$G_{1(s)} = \frac{5}{s(s+1)(0{,}5s+1)}$$

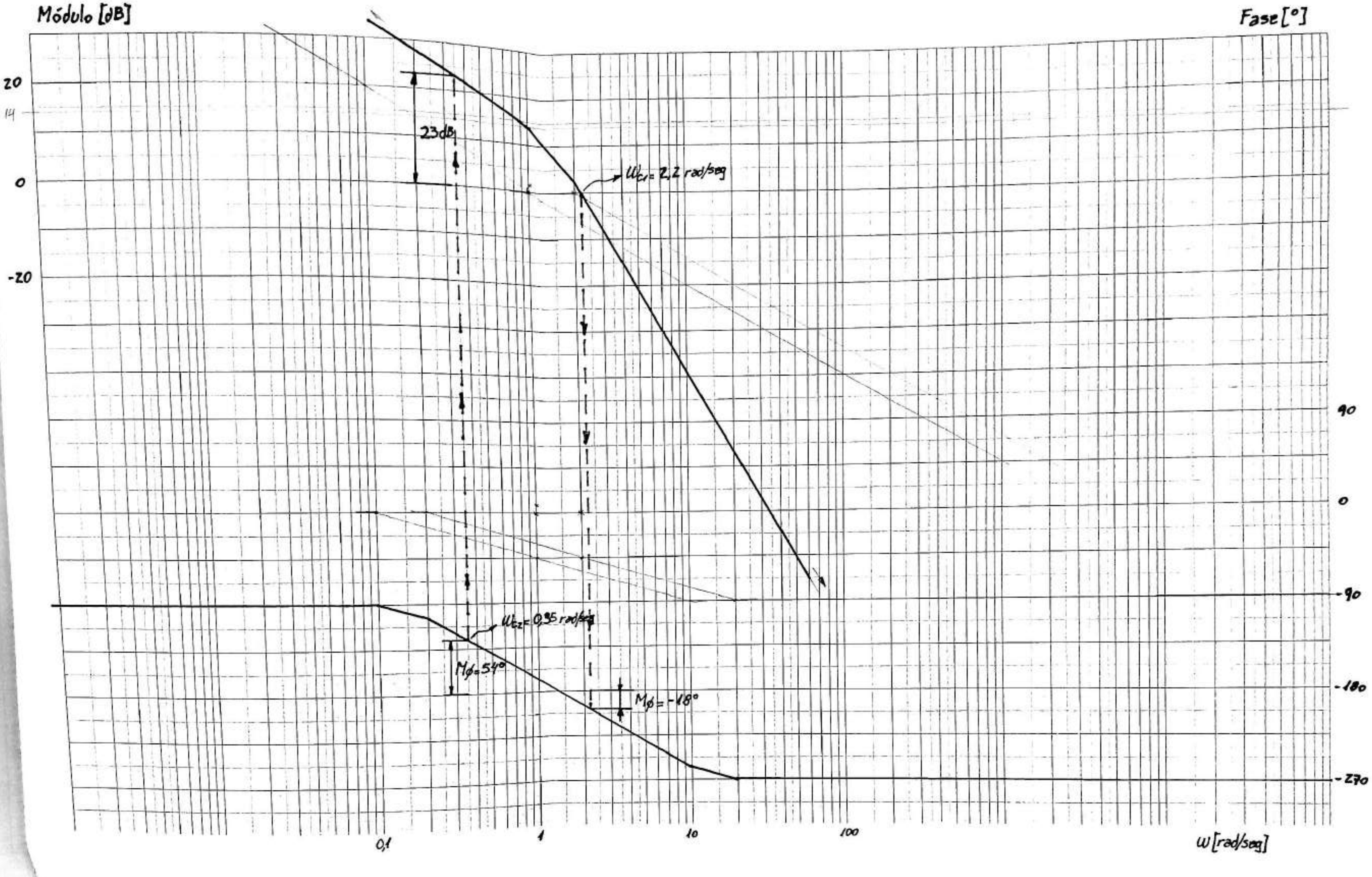
escaleo $\begin{cases} 0{,}1 \text{ rps} \\ 20 \text{ rps} - 100 \text{ rps} \end{cases}$

$s \to j\omega$:
$$G_{1(j\omega)} = \frac{5}{j\omega(1+j\omega)(1+j0{,}5\omega)}$$

$$|G_{1(j\omega)}|_{dB} = \underbrace{20\log(5)}_{13{,}98\,dB} - 20\log(\omega) - 10\log(1+\omega^2) - 10\log(1+0{,}25\omega^2)$$

$$\angle G_{1(j\omega)} = 0° - 90° - tg^{-1}(\omega) - tg^{-1}(0{,}5\omega)$$

NOTA



Del Bode, se observa que $G_{M(s)}$ tiene ganancia crítica (0dB) en $\omega_{c1} = 2{,}2$ rad/seg, con un márgen de fase $M_\phi = -18°$ (sistema inestable) y fase $\phi = -198°$. Con el ajuste de ganancia efectuado, el sistema es inestable.

Cómo se pide por diseño un $M_\phi \geq 40°$, se busca en el Bode una ω dónde el sistema tenga dicho M_ϕ, más algunos grados extras (de 5°~12° adicionales); así:

$$M_\phi = M_{\phi_{pedido}} + {}^\circ\text{extras} = 40° + 12° = 52° \rightsquigarrow 54° \text{ en Bode a } \omega = 0{,}35 \text{ rad/seg}$$

Entónces en $\omega_{c2} = 0{,}35$ rad/seg, el sistema tiene $M_\phi = 54°$, $\phi = -126°$ y una ganáncia de 23dB.

NOTA:

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Se ubica el "z_c" con el criterio de la 10^{ma} parte y a 1 octava de W_{cz}.

$$\frac{W_{cz}}{10} < z_c < \frac{W_{cz}}{2} \Rightarrow 0{,}035 < \frac{1}{T} < 0{,}175$$

se elije $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{T} = 0{,}1}^{z_c}$ $\therefore$ $T = 10$

Dado que en W_{cz} el sistema presenta mucha ganancia (23 dB), el compensador deberá contrarrestarlo (−23dB) de tal manera que W_{cz} sea efectivamente ganancia crítica (0dB).

Así:

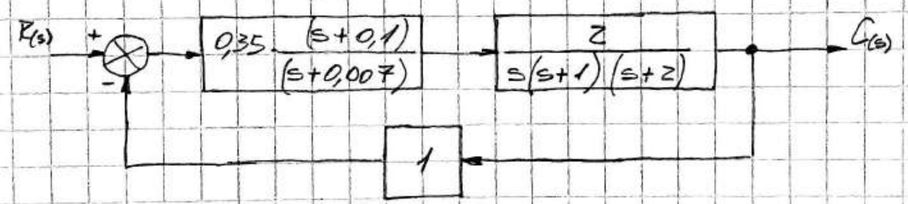
$$\left|\frac{1+jwT}{1+j\beta wT}\right|_{dB \; w=0{,}35 \; T=10} = -23\,dB \quad \therefore \quad \beta = \sqrt{\frac{\frac{1+w^2T^2}{\left(10^{-23/20}\right)^2} - 1}{w^2T^2}} = 14{,}12 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{1}{\beta T} = 0{,}007}^{P_c}$$

Por último, la ganancia del compensador K_c es:

$$K = \beta K_c = 5 \quad \therefore \quad K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{5}{14{,}12} = 0{,}35$$

$$G_{c(s)} = 0{,}35 \cdot \frac{(s+0{,}1)}{(s+0{,}007)}$$

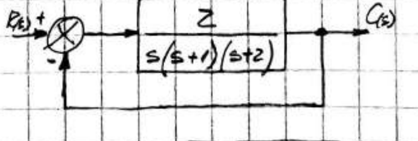
Siendo el sistema compensado:



$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_{(s)}H_{(s)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, 0{,}35 \frac{(s+0{,}1)}{(s+0{,}007)} \cdot \frac{2}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} \cdot 1 = 5 \longrightarrow \text{valor pedido por diseño}$$

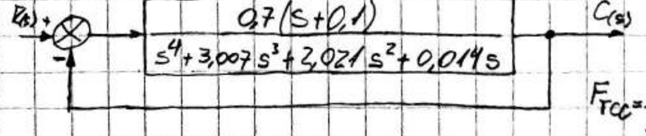
Comprobación:

• Sin compensar



$$F_{Tsc} = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2}$$

• Con compensador:



$$F_{Tcc} = \frac{0{,}7s + 0{,}07}{s^4 + 3{,}007s^3 + 2{,}021s^2 + 0{,}714s + 0{,}07}$$

$$G_{(s)} = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s} \; ; \; G_{1(s)} = \frac{10}{s^3 + 3s^2 + 2s} \; ; \; G_c = 0{,}35 \frac{(s+0{,}1)}{(s+0{,}007)} \; ; \; G_{cc} = \frac{0{,}7(s+0{,}1)}{s^4 + 3{,}007s^3 + 2{,}021s^2 + 0{,}014s}$$

NOTA

En MatLab:

```
G = tf(2,[1 3 2 0])
G1 = tf(10,[1 3 2 0])
Gc = zpk([-0.1],[-0.007],0.35)
Gcc = tf([0.7 0.07],[1 3.007 2.021 0.014 0])
FTsc = tf(2,[1 3 2 2])
FTcc = tf([0.7 0.07],[1 3.007 2.021 0.714 0.07])
bode(G)
hold on
bode(G1)
bode(Gc)
bode(Gcc)
bode(FTsc)
bode(FTcc)
```

→ en las gráficas, clic derecho: grid on
characteristics → all stability margins

Ejercicio 4:

Para el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad ; \quad H(s) = 1$$

Se pide que el sistema tenga las siguientes características:

- coeficiente estático de error de velocidad $K_V = 10$ } cond. régimen
- márgen de fase $M_\phi = 50°$
- márgen de ganancia $M_G \geq 10\,dB$ } cond. dinámicas

Se propone un compensador de atraso-adelanto, cuya F_T es:

$$G_C(s) = K_C \frac{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\underbrace{\left(s+\frac{\beta}{T_1}\right)}_{\text{adelanto}}\underbrace{\left(s+\frac{1}{\beta T_2}\right)}_{\text{atraso}}} \quad \text{siendo } \beta > 1$$

- los T_1 son "adelanto"
- los T_2 son "atraso"

Expresado en formato Bode:

$$G_C(s) = K_C \frac{\frac{1}{T_1}(T_1 s+1)\frac{1}{T_2}(T_2 s+1)}{\frac{\beta}{T_1}\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)\frac{1}{\beta T_2}(\beta T_2 s+1)} = K_C \frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(\beta T_2 s+1)}$$

Se calcula el K_V del sistema compensado y se lo iguala al valor pedido por diseño:

$$K_V = \lim_{s\to 0} s\,G(s) H(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} \cdot K_C \frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(\beta T_2 s+1)} = \frac{K_C}{2} = 10 \quad \therefore \quad K_C = 20$$

Se arma la $G_1(s)$ con el K_C calculado.

$$G_1(s) = K_C \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$$

Hacemos Bode a $G_{H}(s)$:

$$G_H(s) = \frac{\frac{10}{20}}{s(s+1)\,2\,(0{,}5s+1)} = \frac{10}{s\,(s+1)(0{,}5s+1)}$$

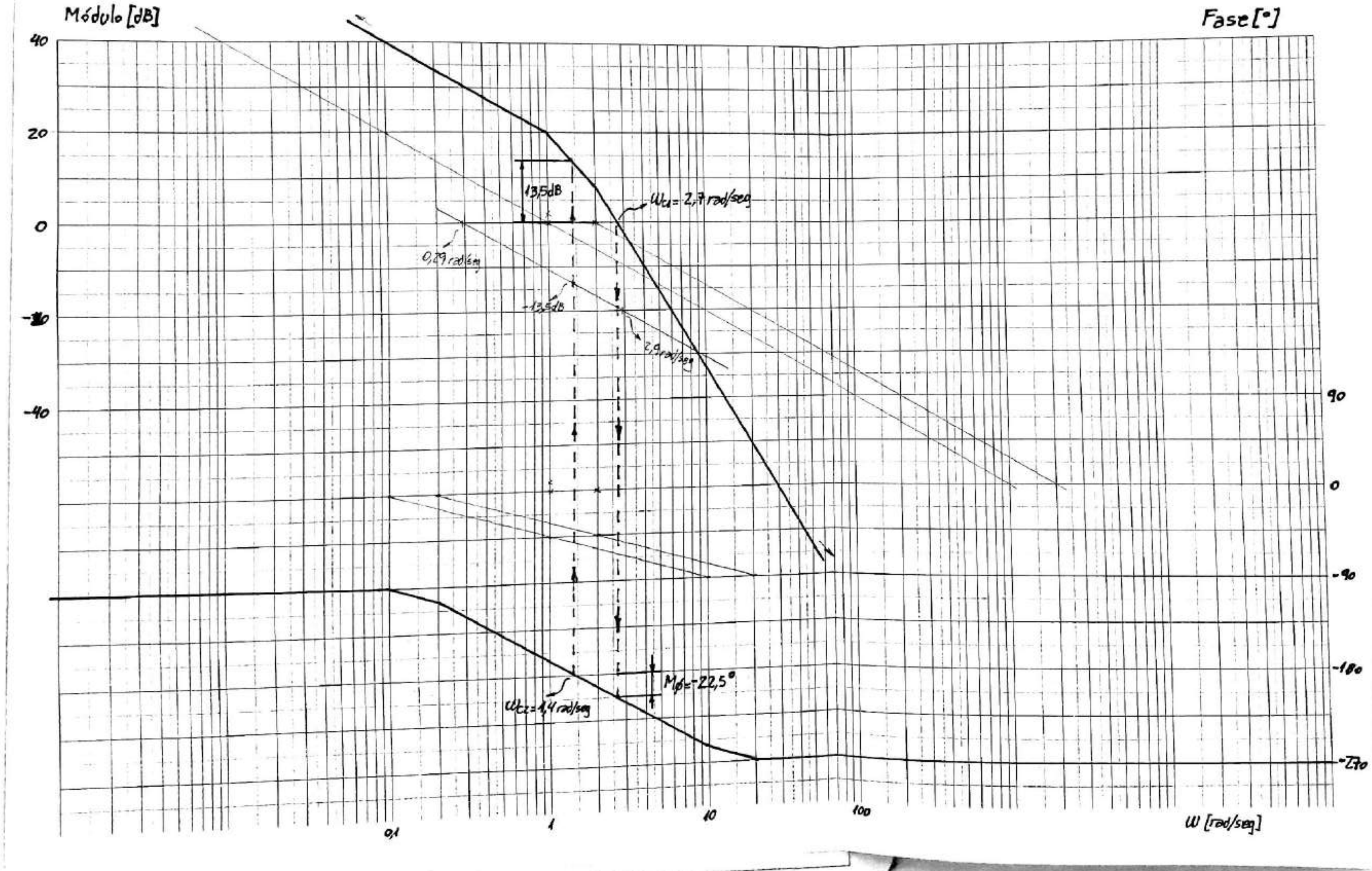
escaleo $\begin{cases} 0{,}1_{rps} \\ 20_{rps} - 100_{rps} \end{cases}$

$s \to j\omega$:

$$G_H(j\omega) = \frac{10}{j\omega\,(1+j\omega)(1+j0{,}5\omega)}$$

$$\left|G_H(j\omega)\right|_{dB} = \underbrace{20\log(10)}_{20dB} - 20\log(\omega) - 10\log(1+\omega^2) - 10\log(1+0{,}25\omega^2)$$

$$\angle G_H(j\omega) = 0^\circ - 90^\circ - tg^{-1}(\omega) - tg^{-1}(0{,}5\omega)$$



Desde el Bode se determina que $G_{1(s)}$ tiene ganancia crítica (0dB) a una $W_{c1} = 2,7$ rad/seg, con un márgen de fase $M_\phi = -22,5°$ (sist. inestable) y $\phi = -202,5°$.
Pero presenta fase crítica (-180°) a $W_{c2} = 1,4$ rad/seg, con una ganancia de 13,5 dB. ($M_g = 0°$)
La parte de "adelanto" debe aportar 50° en W_{c2}; dicho esto ubicamos el "z_c" en atraso con el critério:

$$\frac{W_{c2}}{10} < z_c < \frac{W_{c2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 0,14 < \frac{1}{T_2} < 0,7$$

se elije $\rightarrow \frac{1}{T_2} = 0,15$ rad/seg

Para la parte de "adelanto", hay una W en dónde se dá el máximo de fase:

$$\operatorname{sen}(\phi_{max}) = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(50°) = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad \therefore \quad \beta = \frac{-\operatorname{sen}(50°) - 1}{\operatorname{sen}(50°) - 1} = 7,55$$

se elije un β mayor al calculado $\Rightarrow \beta = 10 \quad \therefore \quad \phi_{max} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{10-1}{10+1}\right) = 54,9°$

Así, la ubicación del "p_c" en atraso es:

$$\frac{1}{\beta T_2} = \frac{1}{10} \cdot 0,15 = 0,015$$

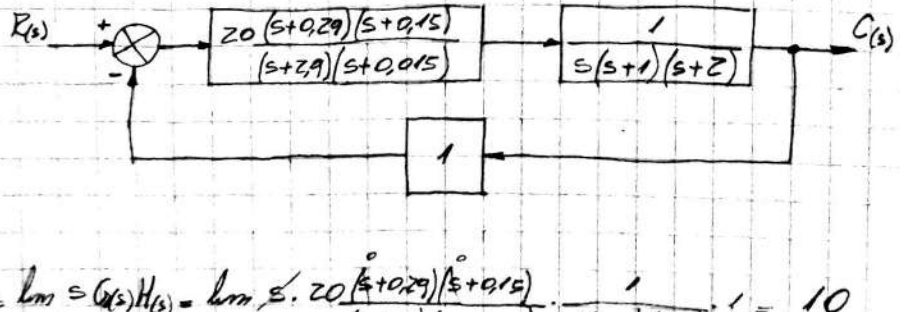
Cómo la ganancia de $G_{1(s)}$ es 13,5dB para $W_{c2} = 1,4$ rad/seg, el compensador, su parte de adelanto, debe atenuar -13,5dB, para llevar al sistema a 0dB.
Se ubica en el Bode de Módulo el valor de -13,5 dB (en W_{c2}), y se traza una recta de pendiente -20dB/déc, que cortará las líneas de 0dB y -20 dB. En el corte en 0dB se ubica el "z_c", mientras que el corte en -20dB se ubica el "p_c".
Según el gráfico:

$$z_c = 0,29 \text{ rad/seg} = \frac{1}{T_1} \; ; \quad p_c = 2,9 \text{ rad/seg} = \frac{\beta}{T_1}$$

El compensador será:

$$G_{c(s)} = 20 \, \frac{(s+0,29)\,(s+0,15)}{(s+2,9)\,(s+0,015)}$$

Siendo el sistema compensado:



$$K_V = \lim_{s\to 0} s\, G_{(s)} H_{(s)} = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot 20 \frac{(s+0,29)(s+0,15)}{(s+2,9)(s+0,015)} \cdot \frac{1}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} \cdot 1 = 10$$ $\rightarrow$ valor pedido por diseño

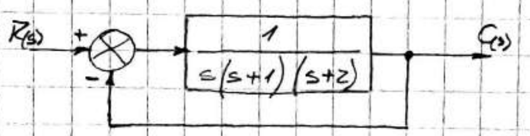
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°
FECHA

Comprobación en MatLab:

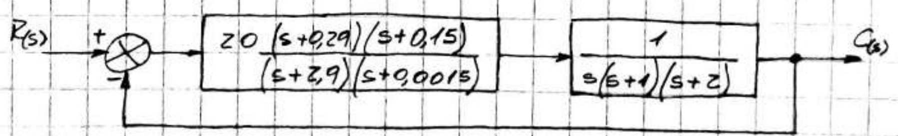
```
G= zpk([],[0 -1 -2], 1)
G1= zpk([],[0 -1 -2], 20)
Gc= zpk([-0.29 -0.15],[-2.9 -0.0015], 20)
Gcc= zpk([-0.29 -0.15],[0 -1 -2 -2.9 -0.0015], 20)
Ftsc= tf(1,[1 3 2 1])
Ftcc= tf([20 8.8 0.87],[1 5.9015 10.70885 25.81605 8.8087 0.87])
bode(G)
hold on
bode(G1)
bode(Gc)
bode(Gcc)
bode(Ftsc)
bode(Ftcc)
```

• Sin compensar:



$$F_{TSC} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

• Con compensador:



$$F_{TCC} = \frac{20s^2 + 8,8s + 0,87}{s^5 + 5,9015s^4 + 10,70885s^3 + 25,81605s^2 + 8,8087s + 0,87}$$

$$G_{(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \; ; \; G_{1(s)} = \frac{20}{s(s+1)(s+2)} \; ; \; G_{c(s)} = 20\,\frac{(s+0,29)(s+0,15)}{(s+2,9)(s+0,015)} \; ;$$

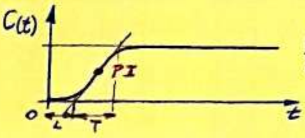
$$G_{cc(s)} = \frac{20(s+0,29)(s+0,15)}{s(s+1)(s+2)(s+2,9)(s+0,0015)}$$

Ejercicio 1:

Sintonizar mediante el primer método de Ziegler-Nichols el compensador PID para el siguiente sistema:

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{5}{(s+1)(s+5)}$$ con entrada escalón unitario

El 1° método de Z-N, aplica a sistemas que no tienen integración al origen; con lo cual se aproxima al sistema de 2° orden cómo un sistema de 1° Orden más un retardo.



$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{e^{-Ls}}{Ts+1}$$

Fórma genérica de un PID

$$G_{c(s)}=K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d \cdot s\right)$$

Tipo de Compensador	K_p	T_i	T_d
P	T/L	∞	0
PI	$0{,}9T/L$	$L/0{,}3$	0
PID	$1{,}2T/L$	$2L$	$0{,}5L$

Cómo $r(t)=\mu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} R_{(s)}=\frac{1}{s}$

$$C_{(s)}=\frac{5}{(s+1)(s+5)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+1)}+\frac{C}{(s+5)}$$

$$A=\lim_{s\to 0}\cancel{s}\cdot\frac{5}{\cancel{s}(s+1)(s+5)}=1$$

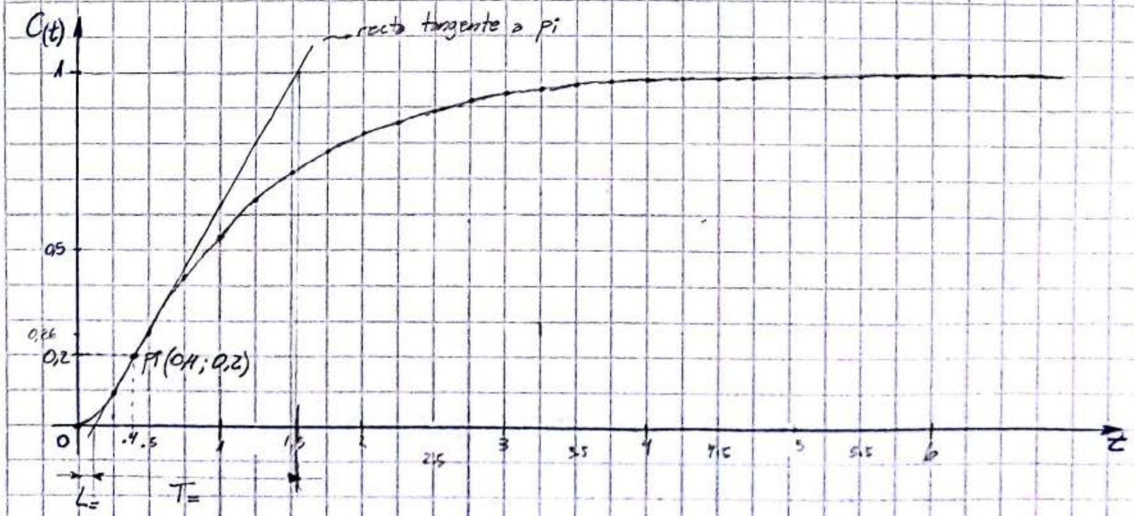
$$B=\lim_{s\to -1}\cancel{(s+1)}\frac{5}{s\cancel{(s+1)}(s+5)}=-\frac{5}{4}=-1{,}25$$

$$C=\lim_{s\to -5}\cancel{(s+5)}\frac{5}{s(s+1)\cancel{(s+5)}}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

Entónces, $C_{(s)}$ ante una entrada escalón vale:

$$C_{(s)}=\frac{1}{s}+\frac{-1{,}25}{(s+1)}+\frac{0{,}25}{(s+5)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_{(t)}=1-1{,}25e^{-t}+0{,}25e^{-5t}$$

Hacemos la gráfica de C(t):



Para hallar el punto de inflexión "pi" de C(t), se determina $C''_{(t)}=0$

$C(t) = 1 - 1{,}25\, e^{-t} + 0{,}25\, e^{-5t}$

$C'(t) = 1{,}25\, e^{-t} - 1{,}25\, e^{-5t}$

$C''(t) = -1{,}25\, e^{-t} + 6{,}25\, e^{-5t} = 0$ → se despeja t

$6{,}25\, e^{-5t} = 1{,}25\, e^{-t}$

$e^{-t} = \frac{6{,}25}{1{,}25}\, e^{-5t}$ ← $\ln()$

$-t = \ln\left(\frac{6{,}25}{1{,}25} \cdot e^{-5t}\right) = \ln\left(\frac{6{,}25}{1{,}25}\right) + (-5t)\underbrace{\ln(e)}_{1}$

$4t = \ln(5)$

$t = \frac{\ln(5)}{4} = 0{,}4023$ → se evalúa a $C(t)$ con $t = 0{,}4023$

$C(0{,}4023) = 0{,}1975$

El "pi" tiene coordenadas: $pi(0{,}4\,;\,0{,}2)$, y por él debe pasar una recta tangente que además corta al "eje t" y al valor de régimen 1. Esos cortes, proyectados sobre el "eje t" determinan los valores de tiempos L y T.
Desde el gráfico:

$L = 0{,}1$ [seg] , $T = 1{,}2$ [seg]

Obtenidos los valores de L y T, calculamos el compensador PID mediante la tabla, así:

$K_p = 1{,}2\,\frac{T}{L} = 1{,}2 \cdot \frac{1{,}2}{0{,}1} = 14{,}4$

$T_i = 2L = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$

$T_d = 0{,}5L = 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$

Desarrollando la ecuación del PID:

$G_{C(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right) = K_p\left(\frac{T_i \cdot s + 1 + T_i \cdot T_d \cdot s^2}{T_i \cdot s}\right) = K_p\left(\frac{T_i T_d\, s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s}\right)$

$G_{C(s)} = K_p \cdot \cancel{T_i}\, T_d \frac{\left(s^2 + \frac{1}{T_d} \cdot s + \frac{1}{T_i T_d}\right)}{\cancel{T_i}\, s}$ ← reemplazando valores K_p, T_i, T_d

$G_{C(s)} = 1{,}2\,\frac{T}{L} \cdot 0{,}5\cancel{L}\, \frac{\left(s^2 + 2\,\frac{1}{L}\, s + \frac{1}{L^2}\right)}{s}$ → $\frac{-\frac{2}{L} \pm \sqrt{\overbrace{\frac{4}{L^2} - \frac{4}{L^2}}^{0}}}{2} = -\frac{1}{L}$ (doble)

$G_{C(s)} = 0{,}6\, T\, \frac{(s + 1/L)^2}{s}$

Siendo la función de transferencia particular del compensador PID:

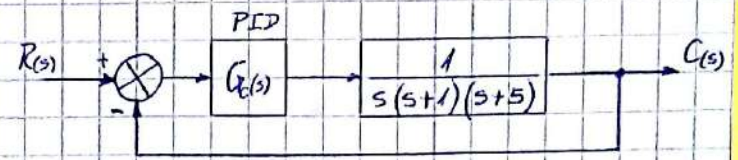
$G_{C(s)} = 0{,}72\, \frac{(s + 10)^2}{s}$

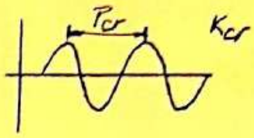
ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

FECHA

Ejercicio 2:

Obtener mediante el segundo método de Ziegler-Nichols el compensador PID para el siguiente sistema:





Forma genérica del PID

$G_{c(s)} = K_P\left(1+\frac{1}{T_i.s}+T_d.s\right)$

Tipo de Compensador	K_P	T_i	T_D
P	$0{,}5K_{cr}$	∞	0
PI	$0{,}45K_{cr}$	$\frac{1}{1{,}2}P_{cr}$	0
PID	$0{,}6K_{cr}$	$0{,}5P_{cr}$	$0{,}125P_{cr}$

El 2° método de Z-N hace uso del R-H para det... que hace oscilar al sistema. Dicha oscilación, presenta... crítica W_{cr}. Con los valores de K_{cr} y P_{cr}, se determi...

Primero usando sólo la acción proporcional K_p $(0<K_p<K_{cr}$...

$$F_{TLC} = \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{K_P\frac{1}{s(s+1)(s+5)}}{1+K_P.\frac{1}{s(s+1)(s+5)}.1} = \frac{K_P}{s(s+1)(s+5)+K_P}$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{K_P}{s^3+6s^2+5s+K_P}$$

Se hace R-H a la Ecu. Característica de la F_{TLC}:

s^3	1	5
s^2	6	K_P
s^1	$5-\frac{K_P}{6}$	
s^0	K_P	

$5-\frac{K_P}{6}=0 \quad \therefore \quad K_P = K_{cr} = 30$

Se forma una ecuación de 2° grado desde el R-H, de ésta forma se determinan los cortes al eje jw cuando el $K_P = K_{cr}$ y así determinar la W.

$$6s^2+K_{cr}=0 \quad \therefore \quad 6s^2+30=0 \quad \left\{ s_{1,2} = \pm j\sqrt{5} = \pm j\,2{,}24\ [rad/seg] = \pm jW_{cr} \right.$$

Cómo: $W_{cr} = 2\pi f_{cr} = 2\pi.\frac{1}{P_{cr}} = \sqrt{5} \quad \therefore \quad P_{cr} = \frac{2\pi}{W_{cr}} = \frac{2\pi[rad]}{2{,}24[rad/seg]} = 2{,}81\ [seg]$

Obtenidos los valores de K_{cr} y P_{cr}, se calcula el compensador PID mediante la tabla así:

$K_P = 0{,}6.K_{cr} = 0{,}6.30 = 18$

$T_i = 0{,}5.P_{cr} = 0{,}5.2{,}81 = 1{,}405$

$T_d = 0{,}125.P_{cr} = 0{,}125.2{,}81 = 0{,}35125$

Desarrollando la ecuación del PID:

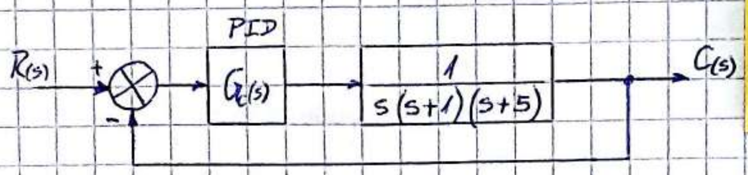
$$G_{c(s)} = K_P\left(1+\frac{1}{T_i.s}+T_d.s\right) = K_P\left(\frac{T_i T_d s^2+T_i.s+1}{T_i.s}\right)$$

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Ejercicio 2:

Obtener mediante el segundo método
sador PID para el siguiente sistema:



El 2° método de Z-N hace uso del R-H para determinar la ganancia crítica K_{cr}, que hace oscilar al sistema. Dicha oscilación, presenta un periodo crítico P_{cr} o frecuencia crítica W_{cr}. Con los valores de K_{cr} y P_{cr}, se determina el compensador mediante una tabla.

Primero usando sólo la acción proporcional K_p $(0<K_p<K_{cr})$, calculamos la F_{TLC} del sistema.

$$F_{TLC}=\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{K_p\frac{1}{s(s+1)(s+5)}}{1+K_p\cdot\frac{1}{s(s+1)(s+5)}\cdot 1}=\frac{K_p}{s(s+1)(s+5)+K_p}$$

$$\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{K_p}{s^3+6s^2+5s+K_p}$$

Se hace R-H a la Ecu. Característica de la F_{TLC}:

s^3	1	5
s^2	6	K_p
s^1	$5-\frac{K_p}{6}$	
s^0	K_p	

$5-\frac{K_p}{6}=0 \quad \therefore \quad K_p=K_{cr}=30$

Se forma una ecuación de 2° grado desde el R-H, de ésta forma se determinan los cortes al "eje jw" cuando el $K_p=K_{cr}$ y así determinar la W.

$$6s^2+K_{cr}=0 \quad \therefore \quad 6s^2+30=0 \quad \{s_{1,2}=\pm j\sqrt{5}=\pm j\,2{,}24\ [rad/seg] \equiv \pm jW_{cr}$$

Cómo: $W_{cr}=2\pi f_{cr}=2\pi\cdot\frac{1}{P_{cr}}=\sqrt{5} \quad \therefore \quad P_{cr}=\frac{2\pi}{W_{cr}}=\frac{2\pi[rad]}{2{,}24[rad/seg]}=2{,}81\ [seg]$

Obtenidos los valores de K_{cr} y P_{cr}, se calcula el compensador PID mediante la tabla, así:

$K_p=0{,}6\cdot K_{cr}=0{,}6\cdot 30=18$

$T_i=0{,}5\cdot P_{cr}=0{,}5\cdot 2{,}81=1{,}405$

$T_d=0{,}125\cdot P_{cr}=0{,}125\cdot 2{,}81=0{,}35125$

Desarrollando la ecuación del PID:

$$G_{c(s)}=K_p\left(1+\frac{1}{T_i\cdot s}+T_d\cdot s\right)=K_p\left(\frac{T_i T_d s^2+T_i\cdot s+1}{T_i\cdot s}\right)$$

Scanned by CamScanner

$G_{c(s)} = K_p \cdot \frac{T_i T_d \left(s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d}\right)}{T_i \cdot s}$ — reemplazando valores K_p, T_i, T_d

$G_{c(s)} = 0{,}6 K_{cr} \cdot 0{,}125 P_{cr} \frac{\left(s^2 + 8\frac{1}{P_{cr}} s + \frac{16}{P_{cr}^2}\right)}{s}$ — $\frac{-\frac{8}{P_{cr}} \pm \sqrt{\frac{64}{P_{cr}^2} - \frac{64}{P_{cr}^2}}}{2} = -\frac{4}{P_{cr}}$ (doble)

$G_{c(s)} = 0{,}075 \cdot K_{cr} \cdot P_{cr} \frac{\left(s + 4/P_{cr}\right)^2}{s}$

siendo la función de transferencia particular del PID:

$$G_{c(s)} = 6{,}323 \frac{(s + 1{,}424)^2}{s}$$

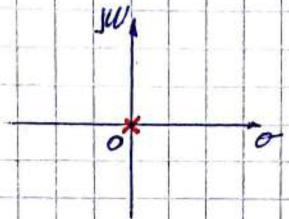
En los siguientes ejercicios determinar el circuito electrónico con amplificadores operacionales calculando los componentes eléctricos; utilizar resistencias con valores comprendidos entre:

$$1K\Omega < R < 1M\Omega$$

Ejercicio 3:

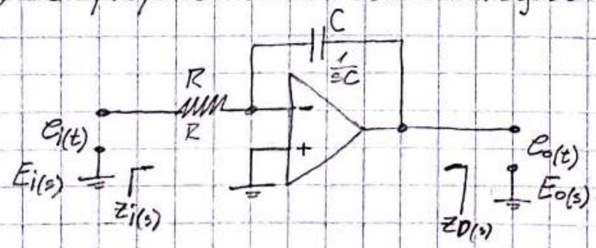
Determinar los componentes del siguiente controlador integral

$K = 5$



El diagrama de "polos-ceros" representa a una F_T de la forma: $F_T = 5 \cdot \frac{1}{s}$

Con lo cual, se propone un circuito integrador (inversor):



$Z_{i(s)} = R$

$Z_{o(s)} = \frac{1}{sC}$

Determinamos la F_T del circuito:

$$F_T = \frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = -\frac{Z_{o(s)}}{Z_{i(s)}} = -\frac{\frac{1}{sC}}{R} = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s}$$

Igualando ambas F_T:

$$5 \cdot \left(\frac{1}{s}\right) = \left(\frac{1}{RC}\right) \cdot \left(\frac{1}{s}\right)$$

Cómo:

$$5 = \frac{1}{RC} \quad \therefore \quad C = \frac{1}{5R} = 20\,\mu F$$

propongo $R = 10K\Omega$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

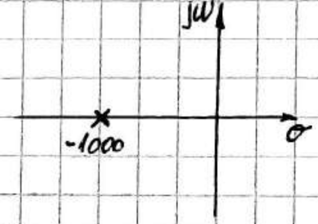
HOJA N°

FECHA

Ejercicio 4:

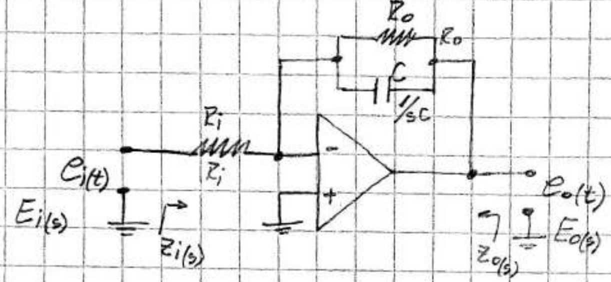
Realizar el circuito de la siguiente función de transferencia (polo desplazado del origen)

K = 100



El diagrama de "polos - ceros", corresponde a una $F_T = 100 \cdot \frac{1}{(s+1000)}$

Se propone circuito (inversor):



$$Z_{i(s)} = R_i$$

$$Z_{o(s)} = R_o // \frac{1}{sC} = \frac{1}{C\left(s + \frac{1}{R_o C}\right)}$$

Se determina la F_T del circuito:

$$F_T = \frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = -\frac{Z_{o(s)}}{Z_{i(s)}} = -\frac{\frac{1}{C\left(s+\frac{1}{R_oC}\right)}}{R_i} = -\frac{1}{R_iC} \cdot \frac{1}{\left(s+\frac{1}{R_oC}\right)}$$

Igualando ámbas F_T:

$$100 \cdot \frac{1}{(s+1000)} = \frac{1}{R_iC} \cdot \frac{1}{\left(s+\frac{1}{R_oC}\right)}$$

Cómo:

$$1000 = \frac{1}{R_oC} \quad \therefore \quad C = \frac{1}{1000 R_o} = 100\,nF$$

↳ elijo $R_o = 10K\Omega$

Con C ya calculado, se determina a R_i:

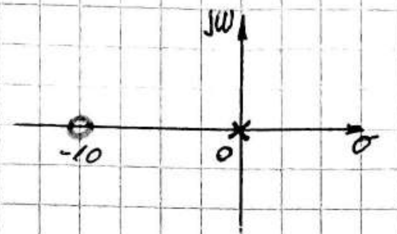
$$100 = \frac{1}{R_iC} \quad \therefore \quad R_i = \frac{1}{100\,C} = 100\,K\Omega$$

Scanned by CamScanner

Ejercicio 5:

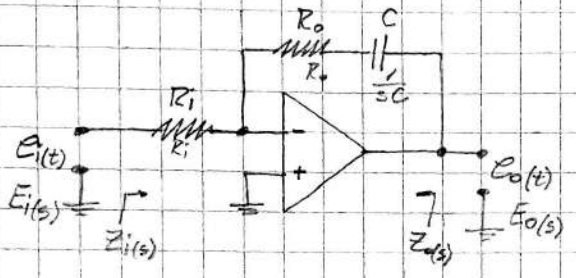
Dado el siguiente controlador PI (Proporcional-Integrativo) diseñar su circuito.

$K = 2$



El diagrama de "polos-ceros" representa a una $F_T = 2 \cdot \frac{(s+10)}{s}$

Se propone el circuito (inversor):



$Z_{i(s)} = R_i$

$Z_{o(s)} = R_o + \frac{1}{sC} = R_o \cdot \frac{(s + \frac{1}{R_o C})}{s}$

Siendo la F_T del circuito:

$$F_T = \frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = -\frac{Z_{o(s)}}{Z_{i(s)}} = -\frac{R_o \frac{(s+\frac{1}{R_o C})}{s}}{R_i} = -\frac{R_o}{R_i} \cdot \frac{(s+\frac{1}{R_o C})}{s}$$

Igualando las F_T:

$$2 \cdot \frac{(s+10)}{s} = \frac{R_o}{R_i} \cdot \frac{(s+\frac{1}{R_o C})}{s}$$

Cómo:

$$10 = \frac{1}{R_o C} \quad \therefore \quad C = \frac{1}{10 R_o} = 1\,\mu F$$

↳ elijo $R_o = 100\,K\Omega$

Se calcula a R_i:

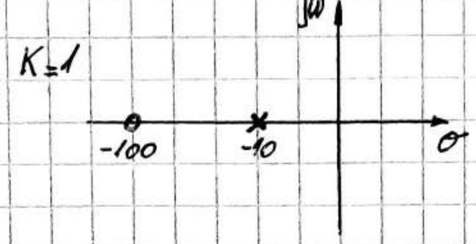
$$2 = \frac{R_o}{R_i} \quad \therefore \quad R_i = \frac{R_o}{2} = 50\,K\Omega$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

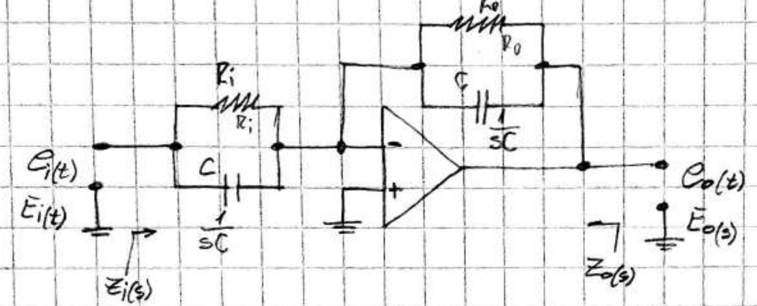
FECHA

Ejercicio 6: Sintetizar el siguiente controlador en atraso.



El diagrama de "polos-ceros", representa a una $F_T = 1 \cdot \frac{(s+100)}{(s+10)}$

Se propone el circuito (inversor):



$$Z_{i(s)} = R_i /\!/ \frac{1}{sC} = \frac{1}{C\left(s+\frac{1}{R_iC}\right)}$$

$$Z_{o(s)} = R_o /\!/ \frac{1}{sC} = \frac{1}{C\left(s+\frac{1}{R_oC}\right)}$$

Siendo la F_T del circuito:

$$F_T = \frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = -\frac{Z_{o(s)}}{Z_{i(s)}} = -\frac{\frac{1}{\cancel{C}\left(s+\frac{1}{R_oC}\right)}}{\frac{1}{\cancel{C}\left(s+\frac{1}{R_iC}\right)}} = -\frac{\left(s+\frac{1}{R_iC}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_oC}\right)}$$

Igualando las F_T:

$$1 \frac{(s+100)}{(s+10)} = 1 \frac{\left(s+\frac{1}{R_iC}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_oC}\right)}$$

• Cómo en un compensador en atraso, el polo está más cerca del origen, se deduce que $R_i < R_o$, con lo cual elijo $R_i = 10K\Omega$

Cómo:

$$100 = \frac{1}{R_iC} \quad \therefore \quad C = \frac{1}{100 R_i} = 1\mu F$$

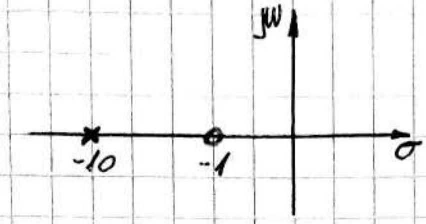
Se calcula a R_o:

$$10 = \frac{1}{R_oC} \quad \therefore \quad R_o = \frac{1}{10C} = 100K\Omega$$

Ejercicio 7:

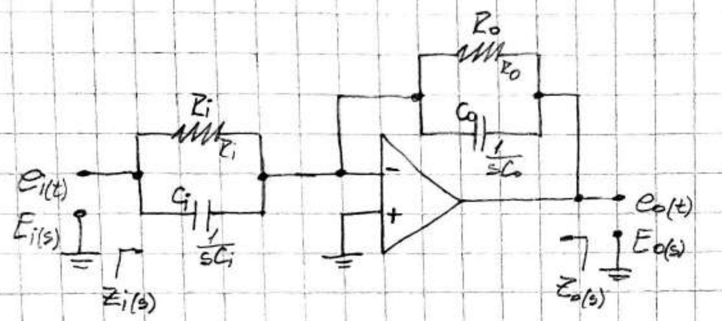
Dado el compensador en adelanto, diseñar el circuito electrónico determinando sus componentes.

$K = 5$



El diagrama de "polos-ceros", representa a una $F_T = 5 \cdot \frac{(s+1)}{(s+10)}$

Se propone el circuito (inversor):



$$Z_{i(s)} = R_i // \frac{1}{sC_i} = \frac{1}{C_i\left(s + \frac{1}{R_iC_i}\right)}$$

$$Z_{o(s)} = R_o // \frac{1}{sC_o} = \frac{1}{C_o\left(s + \frac{1}{R_oC_o}\right)}$$

Siendo la F_T del circuito:

$$F_T = \frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = -\frac{Z_{o(s)}}{Z_{i(s)}} = -\frac{\frac{1}{C_o\left(s+\frac{1}{R_oC_o}\right)}}{\frac{1}{C_i\left(s+\frac{1}{R_iC_i}\right)}} = -\frac{C_i}{C_o} \cdot \frac{\left(s+\frac{1}{R_iC_i}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_oC_o}\right)}$$

Igualando las F_T:

$$5 \cdot \frac{(s+1)}{(s+10)} = \frac{C_i}{C_o} \frac{\left(s+\frac{1}{R_iC_i}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_oC_o}\right)}$$

- Como en un compensador en adelanto el cero está más cerca del origen, se deduce que $R_i > R_o$, elijo $R_i = 100 k\Omega$

Cómo:

$$1 = \frac{1}{R_iC_i} \quad \therefore \quad C_i = \frac{1}{R_i} = 10 \mu F$$

Con C_i calculado, se determina C_o:

$$5 = \frac{C_i}{C_o} \quad \therefore \quad C_o = \frac{C_i}{5} = 2 \mu F$$

Y se determina a R_o,

$$10 = \frac{1}{R_oC_o} \quad \therefore \quad R_o = \frac{1}{10\, C_o} = 50 k\Omega$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

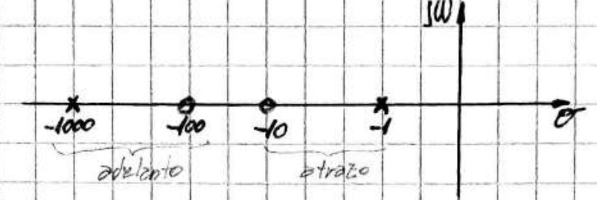
HOJA N°

FECHA

Ejercicio 8:

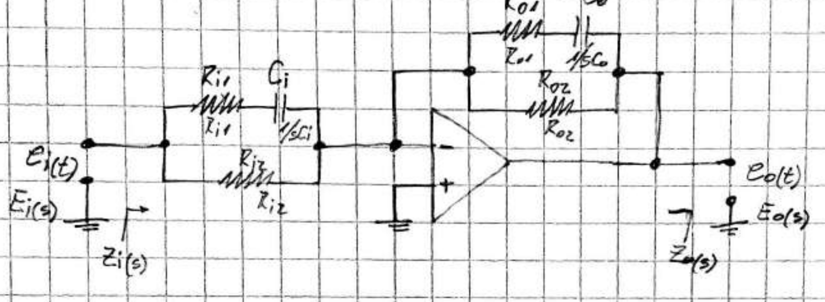
Sintetizar la siguiente función de transferencia del compensador de atraso-adelanto.

$K = 20$



El diagrama de "polos-ceros", representa a una $F_T = 20 \cdot \overbrace{\frac{(s+10)}{(s+1)}}^{\text{atrazo}} \overbrace{\frac{(s+100)}{(s+1000)}}^{\text{adelanto}}$

Se propone el circuito (inversor):



$$Z_{i(s)} = \left(R_{i1} + \frac{1}{sC_i}\right) // R_{i2} = \overbrace{\frac{R_{i1} \cdot R_{i2}}{(R_{i1}+R_{i2})}}^{(R_{i1}//R_{i2})} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{R_{i1}C_i}\right)}{\left(s + \frac{1}{C_i(R_{i1}+R_{i2})}\right)}$$

$$Z_{o(s)} = \left(R_{o1} + \frac{1}{sC_o}\right) // R_{o2} = \underbrace{\frac{R_{o1} \cdot R_{o2}}{(R_{o1}+R_{o2})}}_{(R_{o1}//R_{o2})} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{R_{o1}C_o}\right)}{\left(s + \frac{1}{C_o(R_{o1}+R_{o2})}\right)}$$

siendo la F_T del circuito:

$$F_T = \frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = -\frac{Z_{o(s)}}{Z_{i(s)}} = -\frac{R_{o1} \cdot R_{o2}}{(R_{o1}+R_{o2})} \cdot \frac{(R_{i1}+R_{i2})}{R_{i1} \cdot R_{i2}} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{R_{o1}C_o}\right)}{\left(s + \frac{1}{C_o(R_{o1}+R_{o2})}\right)} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{C_i(R_{i1}+R_{i2})}\right)}{\left(s + \frac{1}{R_{i1}C_i}\right)}$$

Igualando las F_T:

= adelanto

$$20 \frac{(s+10)}{(s+1)} \frac{(s+100)}{(s+1000)} = \frac{(R_{o1}//R_{o2})}{(R_{i1}//R_{i2})} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{R_{o1}C_o}\right)}{\left(s + \frac{1}{C_o(R_{o1}+R_{o2})}\right)} \frac{\left(s + \frac{1}{C_i(R_{i1}+R_{i2})}\right)}{\left(s + \frac{1}{R_{i1}C_i}\right)}$$

= atrazo

Partimos desde "atrazo", diciendo que: "en atrazo, el polo está más cerca del origen, por lo tanto $R_{o2} > R_{o1}$", entonces:

$$\frac{1}{R_{o1}C_o} = 10 \quad \therefore \quad C_o = \frac{1}{10 R_{o1}} = 1\mu F$$

↳ elijo $100k\Omega$

Siendo R_{o2}: $\frac{1}{C_o(R_{o1}+R_{o2})} = 1 \quad \therefore \quad R_{o2} = \frac{1}{C_o} - R_{o1} = 900k\Omega$

Cómo la ganancia del sistema es:

$$20 = \frac{R_{o1} // R_{o2}}{R_{i1} // R_{i2}} \quad \therefore \quad R_{i1} // R_{i2} = \frac{R_{o1} // R_{o2}}{20} = \frac{100K\Omega // 900K\Omega}{20} = \frac{90K\Omega}{20}$$

$$R_{i1} // R_{i2} = 4{,}5K\Omega = \frac{R_{i1} \cdot R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}} \quad (1)$$

Para la parte de "adelanto", si hacemos la relación entre la posición del cero y del polo, se obtiene:

$$\frac{Z_{ad}}{P_{ad}} = \frac{\frac{1}{C_i(R_{i1}+R_{i2})}}{\frac{1}{R_{i1}C_i}} = \frac{R_{i1}}{R_{i1}+R_{i2}} = \frac{100}{1000} \quad \therefore \quad \frac{R_{i1}}{R_{i1}+R_{i2}} = 0{,}1 \quad (2)$$

De (2) se sustituye en (1), obteniendo R_{i2}:

$$\underbrace{\frac{R_{i1}}{R_{i1}+R_{i2}}}_{0{,}1} R_{i2} = 4{,}5K\Omega \quad \therefore \quad R_{i2} = \frac{4{,}5K\Omega}{0{,}1} = 45K\Omega$$

Obtenido R_{i2}, se calcula R_{i1} por (1) o por (2):

Por (1):

$$R_{i1} = \frac{4{,}5K\Omega \cdot R_{i2}}{R_{i2} - 4{,}5K\Omega} = 5K\Omega$$

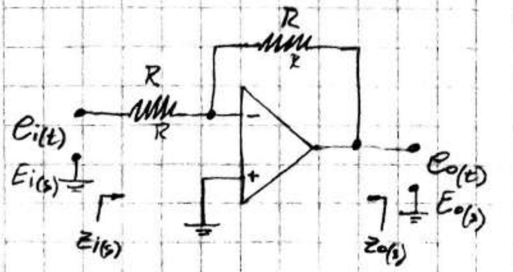
Por (2):

$$R_{i1} = \frac{0{,}1\, R_{i2}}{0{,}9} = 5K\Omega$$

Por último, resta hallar el valor de C_i:

$$\frac{1}{R_{i1}C_i} = 1000 \quad \therefore \quad C_i = \frac{1}{1000\, R_{i1}} = 200\,nF$$

- Tener presente que los circuitos implementados (Ej.: 3 ~ 8) son circuitos "inversores" por eso la presencia del signo menos; por lo que, para eliminarlo se deberá hacer uso de un amplificador inversor ganancia unitaria en la salida de cada uno de los circuitos, de esa forma se obtiene correctamente las F_T buscadas.



$$\frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = -\frac{Z_{o(s)}}{Z_{i(s)}} = -\frac{R}{R} = -1$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

T.P. 10-1: Repaso de álgebra matricial. Representación de sistemas en espacio de estado. Función de transf.

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 1:

Determinar si las siguientes matrices simétricas son singulares.

$$[A]=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ -3 & 10 & -6\\ 4 & -6 & 0\end{bmatrix} \quad [B]=\begin{bmatrix}-7 & 5 & -2\\ 5 & -1 & 4\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix} \quad [C]=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 5\\ -2 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

Para saber si una matriz es singular, su determinante debe ser nulo, y por lo tanto no tiene inversa. Si es matriz simétrica entonces $a_{ij}=a_{ji}$.

El determinante se lo puede calcular por: Sarrus, o por método de cofactores.

• Matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ -3 & 10 & -6\\ 4 & -6 & 0\\ 2 & -3 & 4\\ -3 & 10 & -6\end{vmatrix} = \underbrace{(2.10.0)}_{0}+(-3).(-6).4)+(4.(-3).(-6)) - \underbrace{(4.10.4)+(2(-6)(-6))}_{144}+\underbrace{((-3)(-3).0)}_{0}) \quad 144 - 232$$

$|A| = -88 \rightarrow$ matriz no singular

$$|A| = 2.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}10 & -6\\ -6 & 0\end{vmatrix} + (-3).(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -6 & 0\end{vmatrix} + 4.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 10 & -6\end{vmatrix}$$

$$|A| = 2.1.(\underbrace{10.\overset{0}{0}-(-6)(-6)}_{-72}) + (-3)(-1).(\underbrace{-3.\overset{0}{0}-(-6).4}_{72}) + 4.1.(\underbrace{(-3)(-6)-10.4}_{-88})$$

$|A| = -88$

• Matriz B:

$$|B| = (-7)(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix} + 5.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}5 & 4\\ -2 & 2\end{vmatrix} + (-2).(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}5 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}$$

$$|B| = (-7).1.(\underbrace{(-1).2-4.4}_{126}) + 5.(-1).(\underbrace{5.2-4(-2)}_{-90}) + (-2).1.(\underbrace{5.4-(-2)(-1)}_{-36})$$

$|B| = 0 \rightarrow$ matriz singular

• Matriz C:

$$|C| = 0.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 5 & 6\end{vmatrix} + 0.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 5\\ -2 & 6\end{vmatrix} + (-2).(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}$$

$|C| = 0 + 0 + (-2).1.(0.5-4(-2))$

$|C| = -16 \rightarrow$ matriz no singular

NOTA

Ejercicio 2:

Dadas las matrices [A] y [B], determinar los productos [A]x[B] y [B]x[A] si los mismos son conformables.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -10 & 0 \end{bmatrix} [2\times3] \qquad [B] = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} [3\times2]$$

El producto entre matrices existe, si A es conformable con B (o viceversa) si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda matriz.

- $[A]\times[B]$: $[2\times \underbrace{3] \; [3}_{=} \times 2]$ es conformable

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 10 & -2 \\ & & & 0 & 3 \\ & & & -1 & -2 \\ \hline 2 & -3 & 4 & 16 & -21 \\ 5 & -10 & 0 & 50 & -40 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & -21 \\ 50 & -40 \end{bmatrix} = [A]\times[B]$$

- $[B]\times[A]$: $[3\times \underbrace{2] \; [2}_{=} \times 3]$ es conformable

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 2 & -3 & 4 \\ & & 5 & -10 & 0 \\ \hline 10 & -2 & 10 & -10 & 40 \\ 0 & 3 & 15 & -30 & 0 \\ -1 & -2 & -12 & 23 & -4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -10 & 40 \\ 15 & -30 & 0 \\ -12 & 23 & -4 \end{bmatrix} = [B]\times[A]$$

Ejercicio 3:

Obtener la matriz inversa de las siguientes matrices.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

- Matriz A:

$$A^{-1} = \frac{(Cof.A)^T}{|A|} = \frac{adj.A}{|A|}$$

$$|A| = 2.(-1) - 10.(-5) = 48$$

$$Cof.A = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow (Cof.A)^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 2 \end{bmatrix} = adj.A$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}}{48} = \begin{bmatrix} -1/48 & 5/48 \\ -5/24 & 1/24 \end{bmatrix}$$

NOTA

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

Comprobación:

$$[A].[A^{-1}] = [A^{-1}].[A] = [I]$$

$$\begin{bmatrix} 1/48 & 5/48 \\ -5/24 & 1/24 \end{bmatrix} = [A^{-1}]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

• Matriz B:

$$B^{-1} = \frac{(Cof.B)^T}{|B|} = \frac{adj.B}{|B|}$$

$$|B| = 250 - 30 = 220$$

$$Cof.B = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 50 \\ 44 & -47 & -54 \\ 0 & 25 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow (Cof.B)^T = \begin{bmatrix} 0 & 44 & 0 \\ 15 & -47 & 25 \\ 50 & -54 & 10 \end{bmatrix} = adj.B$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 44 & 0 \\ 15 & -47 & 25 \\ 50 & -54 & 10 \end{bmatrix}}{220} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ 3/44 & -47/220 & 5/44 \\ 5/22 & -27/110 & 1/22 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$[B].[B^{-1}] = [B^{-1}].[B] = [I]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ 3/44 & -47/220 & 5/44 \\ 5/22 & -27/110 & 1/22 \end{bmatrix} = [B^{-1}]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

NOTA

Scanned by CamScanner

Ejercicio 4:

Expresar en forma matricial la representación en el espácio de estado del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} X_1'(t) = -X_1(t) + X_2(t) & = -1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0u_1 + 0u_2 \\ X_2'(t) = -X_2(t) - 3X_3(t) + u_1(t) & = 0x_1 - 1x_2 - 3x_3 + 1u_1 + 0u_2 \\ X_3'(t) = X_1(t) - 5X_2(t) - 3X_3(t) + u_2(t) & = 1x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 0u_1 + 1u_2 \end{cases}$$

En general se tiene:

$$\underbrace{[X'(t)]}_{\text{vector de estado}} = \overbrace{[A]}^{\text{matriz estado}} \cdot \underbrace{[X(t)]}_{\text{vector variable de estado}} + \overbrace{[B]}^{\text{matriz entrada}} \cdot \underbrace{[u(t)]}_{\text{vector entrada}}$$

Entónces:

$$[X'(t)] = \begin{bmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \\ X_3'(t) \end{bmatrix} \; ; \quad [X(t)] = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} \; ; \quad [A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \; ; \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad [u] = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \\ X_3'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5:

Idem anterior.

$$\begin{cases} X_1'(t) = X_2(t) & = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0u \\ X_2'(t) = X_3(t) & = 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0u \\ X_3'(t) = -6X_1(t) - 11X_2(t) - 6X_3(t) - 6u(t) & = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 - 6u \end{cases}$$

En general:

$$[X'(t)] = [A] \cdot [X(t)] + [B] \cdot [u(t)]$$

Entónces:

$$\begin{bmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \\ X_3'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u_1(t)$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

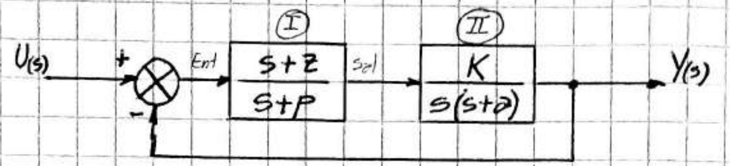
A25-10-16
27:40 min

HOJA N°

FECHA

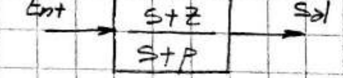
Ejercicio 6:

Encontrar las ecuaciones de estado del siguiente diagrama en bloques



Cómo las variables de estado se toman a la salida de los integradores, se deberá representar y explicitar a el/los bloques del diagrama, con bloques integradores (1/s).

Para el bloque I, se efectúa la división polinómica:



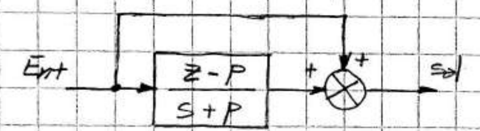
$$\begin{array}{r|l} s+z & s+p \\ -\;s+p & 1 \\ \hline 0s+(z-p) & \end{array}$$

se tiene que:

$$(s+p)\cdot 1+(z-p)=(s+z) \quad \text{todo por } \frac{1}{(s+p)}$$

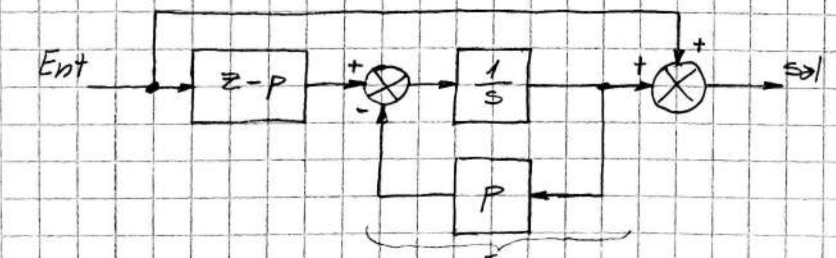
$$1+\frac{(z-p)}{(s+p)}=\frac{(s+z)}{(s+p)}=\frac{Sal}{Ent}$$

se ha logrado que el bloque original sea igual a:



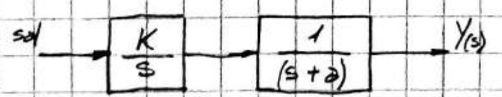
- z-p es un valor real, por tanto una constante.

pero el bloque z-p/(s+p) puede sustituirse por un integrador realimentado de la siguiente forma:

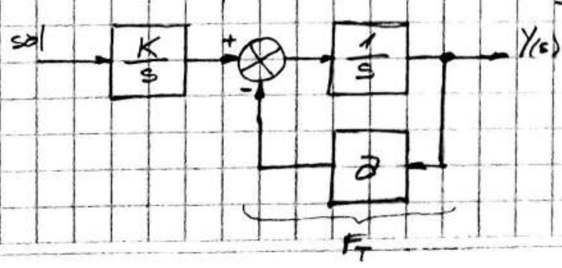


$$F_T=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}\cdot p}=\frac{1}{s+p}$$

Para el bloque II, se presenta un integrador, con lo cual es posible hacer 2 bloques en cascada:



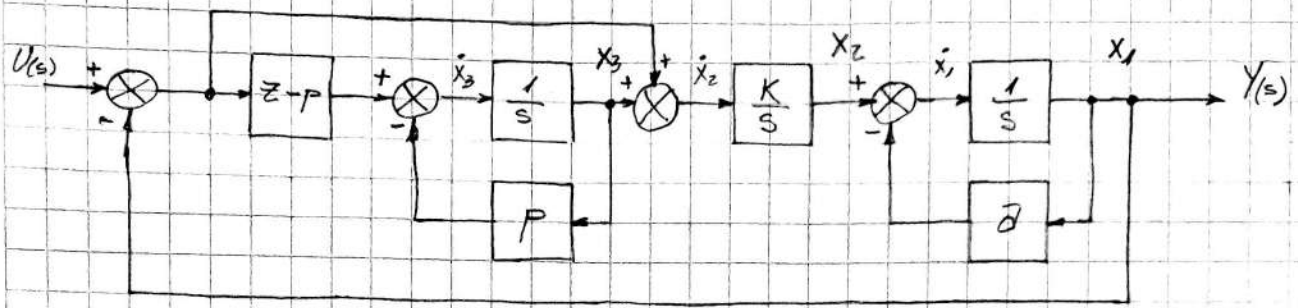
aquí también, el bloque 1/(s+a) es un integrador realimentado; con lo cual:



$$F_T=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}\cdot a}=\frac{1}{s+a}$$

NOTA

El nuevo diagrama para el sistema será:



Se identifica a la salida de cada integrador, las variables de estado que son 3: x_1, x_2 y x_3.

Se procede a armar las ecuaciones que definen a $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ y $\dot{x}_3$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a x_1 + K x_2 + 0 x_3 + 0 U \\ \dot{x}_2 = -1 x_1 + 0 x_2 + 1 x_3 + 1 U \\ \dot{x}_3 = -(z-p) x_1 + 0 x_2 - p x_3 + (z-p) U \end{cases}$$

y la salida es:

$$\{ y = 1 x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + 0 U$$

Expresando en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a & K & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ p-z & 0 & -p \end{bmatrix}}_{[A]} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ (z-p) \end{bmatrix}}_{[B]} \cdot U \quad \rightarrow \text{ec. de estado}$$

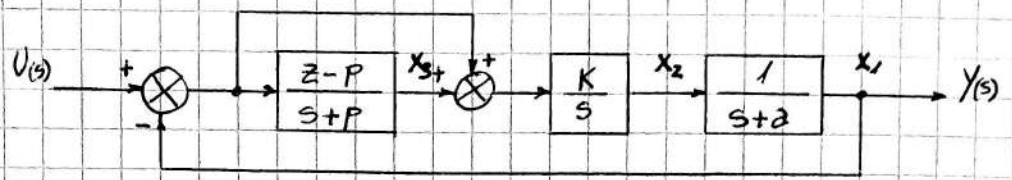
$$[y] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[C]} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{[D]} \cdot U \quad \rightarrow \text{ec. de salida}$$

Leg. 52331

FECHA

Ejercicio 6: otra forma de resolverlo

Al sistema original se lo opera y se obtiene un nuevo diagrama al que s
le explicitan las variables de estado x_1, x_2 y x_3:



Se arman las ecuaciones de la siguiente forma:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{s+a} \quad \therefore \quad X_1(s+a) = X_2$$

$$\underbrace{sX_1}_{\dot{X}_1} + aX_1 = X_2 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{X}_1 = -aX_1 + X_2} \text{ ec. de estado}$$

$$\frac{X_2}{X_3+U-X_1} = \frac{K}{s} \quad \therefore \quad \underbrace{sX_2}_{\dot{X}_2} = KX_3 + KU - KX_1 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{X}_2 = -KX_1 + KX_3 + KU} \text{ ec. de estado}$$

$$\frac{X_3}{U-X_1} = \frac{z-p}{s+p} \quad \therefore \quad X_3(s+p) = (U-X_1)(z-p)$$

$$\underbrace{sX_3}_{\dot{X}_3} + pX_3 = (z-p)U + (p-z)X_1 \quad \therefore \quad \boxed{\dot{X}_3 = (p-z)X_1 - pX_3 + (z-p)U} \text{ ec. de esta}$$

$$\boxed{Y = X_1} \text{ ec. de salida}$$

Entónces:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -aX_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0U \\ \dot{X}_2 = -KX_1 + 0X_2 + KX_3 + KU \\ \dot{X}_3 = (p-z)X_1 + 0X_2 - pX_3 + (z-p)U \end{cases}$$

$$\left\{ Y = 1X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0U \right.$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ p-z & 0 & -p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ z-p \end{bmatrix} \cdot U \rightarrow \text{ec. de estado}$$

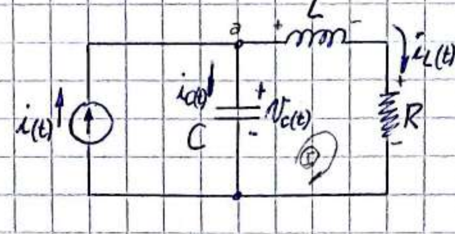
$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + [0] \cdot U \rightarrow \text{ec. de salida}$$

NOTA

ALCAZAR Diego J. Leg. 52331	A23-10-16 13:25min	HOJA N° FECHA

Ejercicio 7:

Obtener las ecuaciones de estado de la siguiente red, eligiendo cómo variable de estado la corriente de la bobina.



Se plantean las ecuaciones de LKI y LKT, y relaciones V-I de los elementos:

nodo a: $i_{(t)} = i_{c(t)} + i_{L(t)}$ $\qquad i_{c(t)} = C\dfrac{dv_{c(t)}}{dt}$

malla (I): $v_{c(t)} = v_{L(t)} + i_{L(t)} \cdot R$ $\qquad v_{L(t)} = L\dfrac{di_{L(t)}}{dt}$

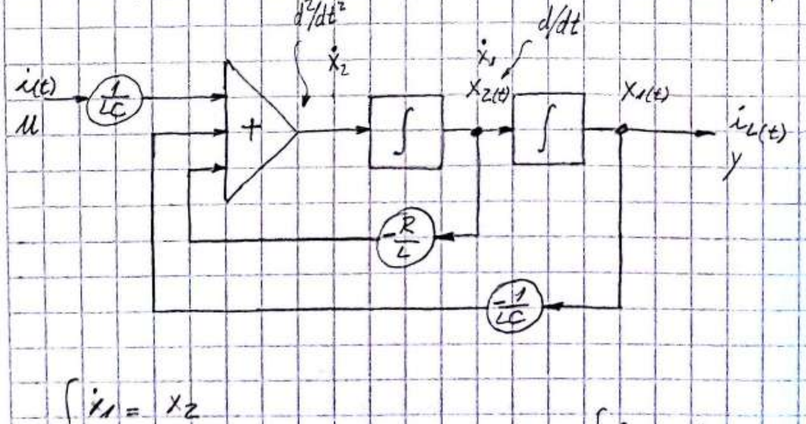
$$i = C\frac{dv_c}{dt} + i_L = C\frac{d}{dt}(v_L + i_L . R) + i_L$$

$$i = C\frac{d}{dt}\left(L\frac{di_L}{dt} + i_L . R\right) + i_L = CL\frac{d^2 i_L}{dt^2} + CR\frac{di_L}{dt} + i_L \quad \leftarrow \times \frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{1}{LC}.i$$ ← se despeja la derivada de mayor orden

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} - \frac{1}{LC}i_L + \frac{1}{LC}i$$

En base a la última ecuación, se arma el diagrama de simulación, que tiene cómo salida la variable i_L, entrada la variable i y 2 integradores.



• la salida de los integradores son las variables de estado x_1 y x_2

En los diagramas de simulación analógica (computadoras analógicas) se arman con integradores (además de sumadores, inversores y ganancias); la metodología empleada para representar una ecuación diferencial, es despejar la variable de salida en su mayor orden de derivación, así con integradores en cascada se van obteniendo las derivadas de órdenes menores, hasta la variable deseada.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}.i \end{cases} \qquad \{ i_L = x_1$$

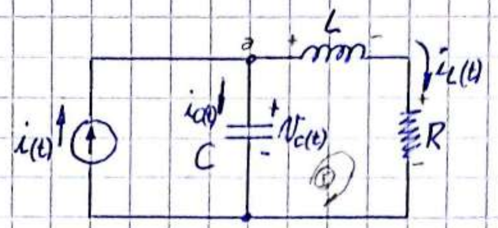
En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \cdot i \qquad [i_L] = [1 \quad 0] \ldots$$

NOTA

Ejercicio 7:

Obtener las ecuaciones de estado de la siguiente red, eligiendo como variable de estado la corriente de la bobina.



Se plantean las ecuaciones de LKI y LKT, y relaciones V-I de los elementos:

nodo a: $i_{(t)} = i_{C(t)} + i_{L(t)}$ $\qquad$ $i_{C(t)} = C\dfrac{dv_{C(t)}}{dt}$

malla (I): $v_{C(t)} = v_{L(t)} + i_{L(t)}\cdot R$ $\qquad$ $v_{L(t)} = L\dfrac{di_{L(t)}}{dt}$

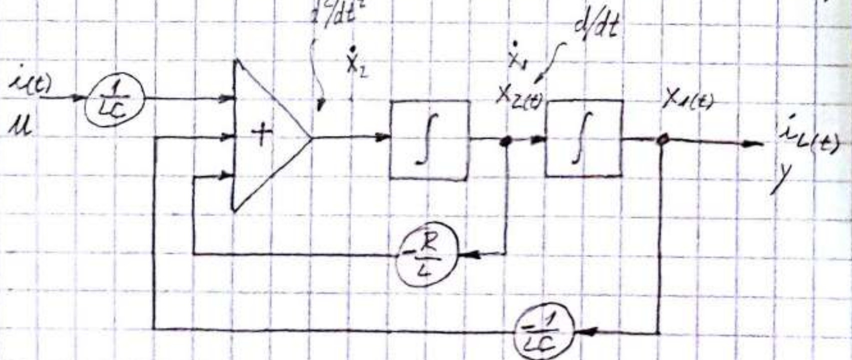
$$i = C\frac{dv_C}{dt} + i_L = C\frac{d}{dt}\left(v_L + i_L.R\right) + i_L$$

$$i = C\frac{d}{dt}\left(L\frac{di_L}{dt} + i_L.R\right) + i_L = CL\frac{d^2i_L}{dt^2} + CR\frac{di_L}{dt} + i_L \quad \leftarrow \times\frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{1}{LC}\cdot i \quad \leftarrow \text{se despeja la derivada de mayor orden}$$

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} - \frac{1}{LC}i_L + \frac{1}{LC}i$$

En base a la última ecuación, se arma el diagra[...] como salida la variable i_L, entrada la variable i y [...]



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}\cdot i \end{cases} \qquad \left\{ i_L = x_1 \right.$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \cdot i \qquad \left[i_L\right] = \left[1 \quad 0\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

NOTA

Cómo es un sistema de 2° órden, se va a expresar por 2 ecuaciones diferenciales de 1° órden.

Siendo: $x_1(t) = \int x_2(t)\, dt$

Por lo tanto, derivando ambos miembros, se obtiene la 1° ec. diferencial:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \rightarrow \text{ec. de estado}$$

Pero:

$$x_2(t) = \int \left[\frac{1}{LC} i(t) - \frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) \right] dt$$

Derivando ambos miembros, se obtiene la 2° ec. diferencial:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{LC} i(t) - \frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) \quad \rightarrow \text{ec. de estado}$$

Finalmente la ec. de salida:

$$i_L(t) = x_1(t)$$

Ejercicio 8:

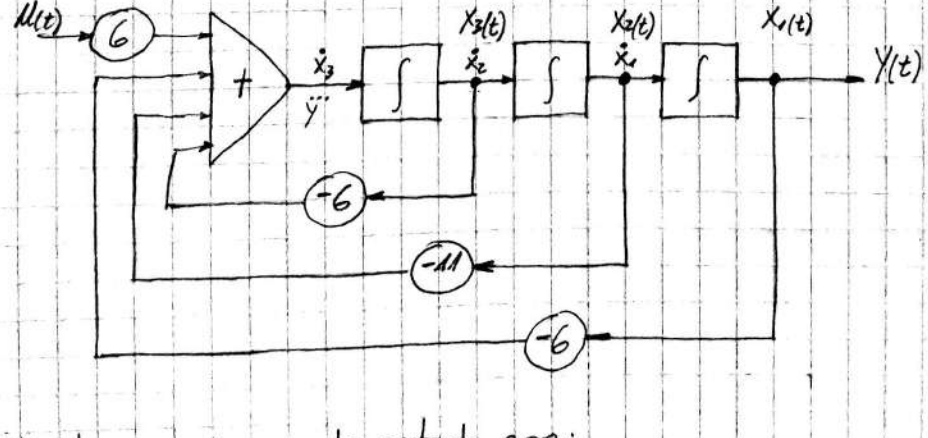
Para el siguiente sistema determinar las ecuaciones de estado

$$\dddot{y}(t) + 6\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 6y(t) = 6u(t)$$

Se despeja la variable de salida en su mayor órden de derivación:

$$\dddot{y}(t) = -6\ddot{y}(t) - 11\dot{y}(t) - 6y(t) + 6u(t)$$

Con ésta ecuación, se arma el diagrama de simulación (ec. dif. de 3° órden son 3 integradores):



Así las ecuaciones de estado son:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -6x_1(t) - 11x_2(t) - 6x_3(t) + 6u(t) \end{cases}$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Y la ecuación de salida:

$$y(t) = x_1(t)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [u(t)]$$

$$[y(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

Ejercicio 9:

Dado el siguiente sistema en su ecuación de estado, determinar la función de transferencia.

ec. estado $$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) - 1x_2(t) + 1u(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 1x_2(t) + 1u(t) \end{cases}$$

ec. salida $$[y(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\{ y(t) = 1x_1(t) + 0x_2(t) + 0u(t)$$

En general, un sistema puede ser expresado en variables de estado (dominio en el tiempo) como:

$$① \begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Debemos hallar una expresión que nos represente lo mismo en "función de transferencia", expresado como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Se aplica transformada de Laplace a ①:

$$s X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$Y(s) = C \cdot X(s)$$

NOTA

Despejando a $X_{(s)}$:

$$sX_{(s)} - AX_{(s)} = B \cdot U_{(s)}$$

$$X_{(s)}(sI - A) = B \cdot U_{(s)}$$

$$X_{(s)} = (sI-A)^{-1} \cdot B \cdot U_{(s)}$$

Sustituyendo $X_{(s)}$ en $Y_{(s)}$:

$$Y_{(s)} = C \cdot X_{(s)} = C\left\{(sI-A)^{-1} \cdot B \cdot U_{(s)}\right\}$$

Dividiendo todo por $U_{(s)}$, se obtiene la función de transferencia:

$$G_{(s)} = \frac{Y_{(s)}}{U_{(s)}} = C \cdot (sI-A)^{-1} \cdot B$$

- A, B, C matrices
- I matriz identidad

Para el ejercicio se tiene: $\underset{[2\times2]}{A} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; $\underset{[2\times1]}{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\underset{[1\times2]}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $D = 0$

Se comienza por $(sI-A)$:

$$(sI-A) = s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}$$

Ahora hay que hacer la inversa de $(sI-A)$:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{(Cof(sI-A))^T}{|sI-A|} \qquad |sI-A| = (s+4)(s+1) + 3 = s^2+5s+7$$

$$Cof(sI-A) = \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} \Rightarrow (Cof(sI-A))^T = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

entónces:

$$\underset{[2\times2]}{(sI-A)^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+5s+7} & \frac{-1}{s^2+5s+7} \\ \frac{3}{s^2+5s+7} & \frac{s+4}{s^2+5s+7} \end{bmatrix}$$

Realizamos el primer producto, $C \cdot (sI-A)^{-1}$,

$$\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+5s+7} & \frac{-1}{s^2+5s+7} \\ \frac{3}{s^2+5s+7} & \frac{s+4}{s^2+5s+7} \end{bmatrix} = \underset{[2\times2]}{(sI-A)^{-1}}$$

$$\underset{[1\times2]}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+5s+7} & \frac{-1}{s^2+5s+7} \end{bmatrix} = \underset{[1\times2]}{C(sI-A)^{-1}}$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

HOJA N°

FECHA

El segundo producto $C(sI-A)^{-1}.B$:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = B_{[2\times1]}$$

$$C(sI-A)^{-1}_{[1\times2]} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s^2+5s+7} & \dfrac{-1}{s^2+5s+7}\end{bmatrix} \quad \Big| \quad \frac{s}{s^2+5s+7} = C(sI-A)^{-1}B \equiv F_{T(s)}$$

Así la F_T del sistema es:

$$\frac{Y_{(s)}}{U_{(s)}} = \frac{s}{s^2+5s+7}$$

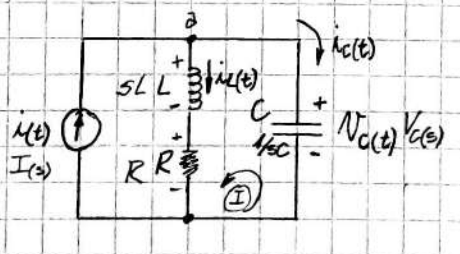
Comprobación en MatLab:

```
A=[-4  -1 ; 3  -1]
B=[1 ; 1]
C=[1  0]
D=0
[num, den]=ss2tf(A,B,C,D)
Ft=tf(num,den)
```

```
num=[1  0]
den=[1  5  7]
tf(num,den)
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

Ejercicio 10:

Idem Ejercicio 7 con $V_{C(t)}$ como variable de estado, determinar la función de transferencia y comprobar.



Se plantean las ecuaciones de LKI y LKT, y relaciones V-I de los elementos.

nodo ⓐ: $i = i_L + i_C$ $\qquad i_C = C\dfrac{dV_C}{dt}$

malla Ⓘ: $V_C = V_L + V_R$ $\qquad V_L = L\dfrac{di_L}{dt}$

$$V_C = L\frac{di_L}{dt} + i_L.R \quad \leftarrow \quad i_L = i - i_C$$

$$V_C = L\frac{d}{dt}(i-i_C) + (i-i_C)R$$

$$V_C = L\frac{di}{dt} - L\frac{di_C}{dt} + i.R - i_C.R \quad \leftarrow \quad i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

NOTA

$$v_C = L\frac{di}{dt} - LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + i\cdot R - RC\frac{dv_C}{dt} \qquad - \times -\frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C - \frac{1}{C}\frac{di}{dt} - \frac{R}{LC}i = 0$$

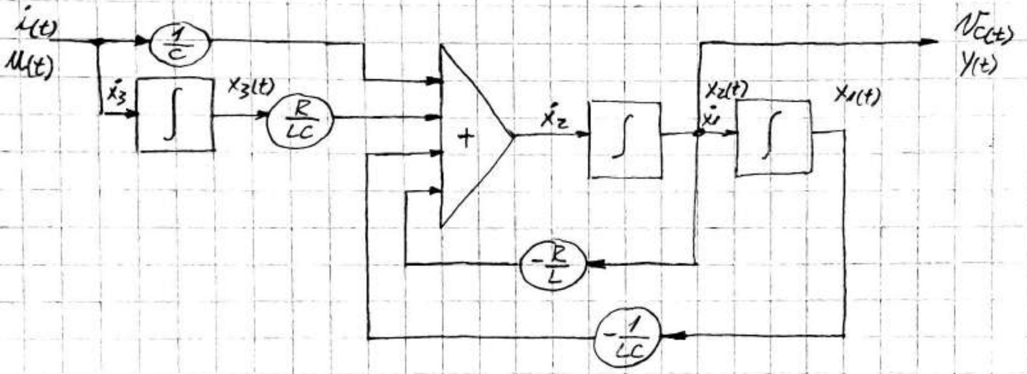
Se despeja la variable de salida v_C en su mayor órden de derivada:

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{LC}v_C + \frac{1}{C}\frac{di}{dt} + \frac{R}{LC}i \Rightarrow \dot{v}_C = -\frac{R}{L}\dot{v}_C + \frac{1}{C}\dot{i} + \frac{R}{LC}i$$

Se aplica una integación:

$$\dot{v}_C = -\frac{R}{L}v_C + \frac{1}{C}i + \frac{R}{LC}\int i\,dt$$

Con ésta ecuación se arma el diagrama de simulación, con salida v_C y entrada i.



Se establecen las variables de estado en las salidas de los integradores:

$x_1(t) = \int x_2(t)\,dt \quad \therefore \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$x_2(t) = \int\left[-\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{R}{LC}x_3(t) + \frac{1}{C}i(t)\right]dt \quad \therefore \quad \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{R}{LC}x_3(t) + \frac{1}{C}i(t)$

$x_3(t) = \int i(t)\,dt \quad \therefore \quad \dot{x}_3(t) = i(t)$

La ecuación de salida: $\quad y(t) = x_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{R}{LC}x_3 + \frac{1}{C}u \\ \dot{x}_3 = u \end{cases}$$

$$\{ y = x_2$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} & \frac{R}{LC} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[A]} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 1 \end{bmatrix}}_{[B]} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[C]} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{[D]} \cdot u(t)$$

ALCAZAR Diego J.
Leg. 52331

Para obtener la F_T del sistema se hace:

$$F_T = \frac{Y_{(s)}}{U_{(s)}} = C\cdot(sI-A)^{-1}\cdot B$$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} & \frac{R}{LC} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{1}{LC} & s+\frac{R}{L} & -\frac{R}{LC} \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{(Cof(sI-A))^T}{|sI-A|}$$

$$|sI-A| = s^2\left(s+\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}s = s\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)$$

$$Cof(sI-A) = \begin{bmatrix} s\left(s+\frac{R}{L}\right) & -\frac{1}{LC}s & 0 \\ s & s^2 & 0 \\ \frac{R}{LC} & \frac{R}{LC}s & s\left(s+\frac{R}{L}\right)+\frac{1}{LC} \end{bmatrix} \longrightarrow (Cof(sI-A))^T = \begin{bmatrix} s\left(s+\frac{R}{L}\right) & s & \frac{R}{LC} \\ -\frac{1}{LC}s & s^2 & \frac{R}{LC}s \\ 0 & 0 & s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+R/L}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{R/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \\ \frac{-1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{R/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Se hace el 1° producto, $C\cdot(sI-A)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{s+\frac{R}{L}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{R/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \\ \frac{-1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{R/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = (sI-A)^{-1}_{[3\times3]}$$

$$\underset{[1\times3]}{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{-1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{R/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \end{bmatrix} = C(sI-A)^{-1}_{[1\times3]}$$

El 2° producto, $C(sI-A)^{-1}B$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 1 \end{bmatrix} = \underset{[3\times1]}{B}$$

$$\underset{[1\times3]}{C(sI-A)^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{-1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} & \frac{R/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \qquad \frac{\frac{1}{C}\left(s+\frac{R}{L}\right)}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} = C(sI-A)^{-1}\cdot B$$

Por lo tanto la F_T del sistema es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{C}\left(s+\frac{R}{L}\right)}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

Como comprobación, se transforma todo el circuito en dominio s (Laplace), y haciendo uso de las ecuaciones de LKI, LKT y relaciones V-I de los elementos, se opera de tal forma de obtener $V_{C(s)}/I_{(s)}$:

nodo ⓐ: $I_{(s)} = I_{L(s)} + I_{C(s)}$ $\qquad I_{C(s)} = C.sV_{C(s)}$

malla Ⓘ: $V_{C(s)} = V_{L(s)} + V_{R(s)}$ $\qquad V_{L(s)} = LsI_{L(s)}$

$$V_C = LsI_L + I_L.R = Ls(I-I_C) + (I-I_C)R$$

$$V_C = Ls(I-CsV_C) + (I-CsV_C)R$$

$$V_C = LsI - LCs^2V_C + IR - RCsV_C$$

$$s^2V_C + \frac{R}{L}sV_C + \frac{1}{LC}V_C - \frac{1}{C}sI - \frac{R}{LC}I = 0$$

$$V_C\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right) = \frac{1}{C}I\left(s+\frac{R}{L}\right)$$

cómo: $V_C \rightarrow$ salida
$I \rightarrow$ entrada

La F_T del circuito es:

$$F_{T(s)} = \frac{V_{C(s)}}{I_{(s)}} = \frac{\frac{1}{C}\left(s+\frac{R}{L}\right)}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

obteniendo igual resultado que en ecuaciones de estado.

Carpeta Completa
29-11-16
[firma]

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCIONES ELEMENTALES

SEÑAL	TRANSFORMADA	ROC
$\delta(t)$	1	Todo s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	Para todo s
$[\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$[\mathrm{sen}\,\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\left[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\right]u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$
$\left[e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t\right]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$
$u_n(t) = \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	Para todo s
$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{\text{n veces}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Propiedad	Señal	Transformada	ROC
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	R R_1 R_2
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
Desplazamiento en el dominio s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R (es decir, s está en la ROC si s-s_0 está en R)
Escalado en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC escalada (es decir, s está en la ROC si s/a está en R)
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Diferenciación en el dominio del tiempo.	$\frac{d\,x(t)}{dt}$	$sX(s)$	Al menos R
Diferenciación en el dominio s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración en el dominio del tiempo.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$

Teoremas del valor inicial y final.

Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces

TVI: $$\lim_{t \to 0} x(0^+) = \operatorname*{Lim}_{x \to \infty} sX(s)$$

TVF: $$\operatorname*{Lim}_{t \to \infty} x(t) = \operatorname*{Lim}_{s \to 0} sX(s)$$

fracciones simples (coeficientes): $A_{n-k} = \lim_{s \to -\alpha} \left[\frac{1}{n-p!} \frac{d^{n-p}}{ds^{n-p}} \left((s+\alpha)^n \cdot \frac{F(s)}{Q(s)} \right) \right]$

n: orden ... p: orden ...

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA z

Propiedad	Señal	Transformada z	ROC
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
Expresión	$x[n]$	$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$	R
Linealidad	$a x_1[n] + b x_2[n]$	$a X_1(z) + b X_2(z)$	Al menos la intersección de R_1 y R_2
Desplazamiento en el tiempo	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R, excepto para la posible adición o supresión del origen
Escalado en el dominio z	$e^{j\omega_0 n} x[n]$ $z_0^n x[n]$ $a^n x[n]$	$X(e^{-j\omega_0} z)$ $X(z/z_0)$ $X(a^{-1} z)$	R $z_0 R$ Versión escalada de R (es decir, $\|a\|R$ = el conjunto de puntos $\{\|a\|z\}$ para z en R
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R invertida (es decir, R^{-1}= el conjunto de puntos z^{-1}, donde z está en R
Expansión en el tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ para algún entero r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ es decir, el conjunto de puntos $z^{1/k}$ donde z está en R
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) X_2(z)$	Al menos la intersección de R_1 y R_2
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1}) X(z)$	Al menos la intersección de R y $\|z\|>0$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{X(z)}{(1-z^{-1})}$	Al menos la intersección de R y $\|z\|>1$
Diferenciación en el dominio z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R

Teorema del valor inicial

Si x[n] = 0 para n < 0, entonces,

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

TVI: $\lim_{n \to 0} x[n] = x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

TVF: $\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} X(z)$

Scanned by CamScanner

TABLA DE TRANSFORMADAS z FRECUENTES

Secuencia x[n]	Transformada z X(z)	ROC
$\delta[n]$	1	Todo z
$\delta[n-m]$	z^{-m}	Para todo z excepto 0 (si m > 0) o infinito (si m < 0)
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$\overset{+}{a}{}^{n}u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z \mp a}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^{n}u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$n\overset{+}{a}{}^{n}u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = a\frac{z}{(z \mp a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^{n}u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$[\cos(\Omega_0 n)]u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$[\mathrm{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$	$\frac{z^{-1}\mathrm{sen}\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$[r^n\cos(\Omega_0 n)]u[n]$	$\frac{1-[r\cos\Omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\Omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
$[r^n\mathrm{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$	$\frac{[r\,\mathrm{sen}\,\Omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\Omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$

Corrimiento:

$x[n+n_0]$ $\quad z^{n_0}\left(Y(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m]\, z^{-m}\right)$

$x[n-n_0]$ $\quad z^{-n_0}\left(X(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m]\, z^{-m}\right)$

$x[n-1] \longrightarrow z^{-1}Y(z) + x[-1]$

$x[n-2] \longrightarrow z^{-2}X(z) + y[-1]\,z^{-1} + y[-2]$

$e^{-aTn} = (e^{-aT})^n \xrightarrow{z} \frac{z}{z-(e^{-aT})}$

Tabla de transformadas de Laplace

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\frac{1}{(n+1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
8	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
9	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
10	$b e^{-bt} - a e^{-at}$	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$
11	$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
12	$cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
13	$e^{-at} cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
14	$e^{-at} sen(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
15	$1 - e^{-at}\left(cos(bt) + \frac{a}{b} sen(bt)\right)$	$\frac{a^2+b^2}{s((s+a)^2+b^2)}$

$b = \omega$
$a = \sigma$

Propiedades de la Transformada de Laplace

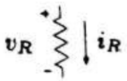
Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio s
Superposición	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$
Desplazamiento en el tiempo	$f(t-t_0)\, u(t-t_0)$	$F(s)\, e^{-st_0}$; $t_0 \geq 0$
Escalamiento en el tiempo	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Desplazamiento en s	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Derivada de primer orden	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
Derivada de segundo orden	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - f^{(1)}(0^-)$
Derivada de orden n	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - \ldots - f^{(n-1)}(0^-)$
Integración	$\int_{0^-}^{t} f(\zeta)d\zeta$	$\frac{1}{s}F(s)$
Teorema del valor inicial[1]	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Teorema del valor final	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Multiplicación por t	$t\, f(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$

$V_R(s) = R.I(s)$

$V_C(s) = \frac{1}{sC}\left(I(s) + C V_C(0)\right)$

$V_L(s) = sL\, I(s) - L\, i(0)$

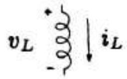
resistor R



$$v_R = i_R . R$$

$$i_R = \frac{v_R}{R}$$

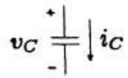
inductor L



$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int^t v_L\,dt + v_L(0)$$

capacitor C



$$v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C\,dt + v_C(0)$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

Señales.

Valor Medio.

$$F_{med} = \frac{1}{T}\int_0^t f(t)dt$$

Valor Eficaz.

$$F_{ef} = \sqrt[2]{\frac{1}{T}\int_0^t f_{(t)}^2\,dt}$$

Factor de forma.

$$f_f = \frac{F_{ef}}{F_{med}}$$

Factor de cresta.

$$f_c = \frac{F_{med}}{F_{ef}}$$

Fundamentales:

Fundamentales:

$$\delta \underset{d/dt}{\overset{\int dt}{\rightleftarrows}} \mu \underset{d/dt}{\overset{\int dt}{\rightleftarrows}} \rho$$

Señal cuadrada:

$$I_{ef} = I_m$$

$$I_{|med|} = I_m$$

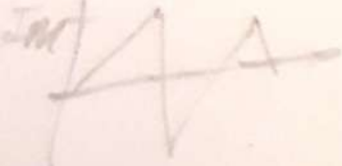
Diente de sierra:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

$$I_{med} = \frac{I_m}{2}$$

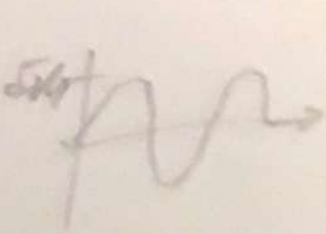
Triangular:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

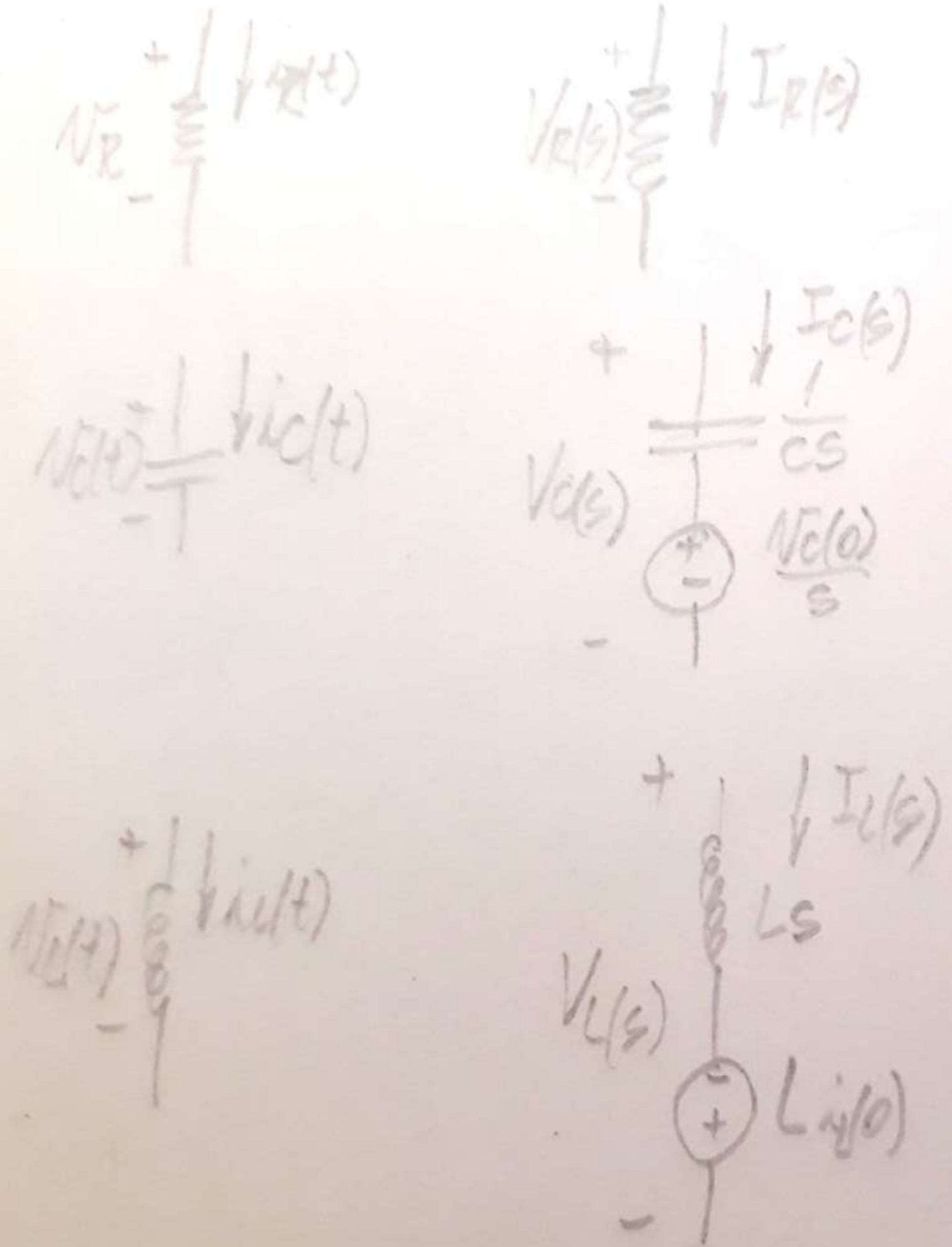


Senoidal:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$



$$I_{|med|} = \frac{2 I_m}{\pi}$$



$$V_R(s) = R.I(s)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC}\left(I(s) + C v_C(0)\right)$$

$$V_L(s) = sL\,I(s) - L\,i_L(0)$$