

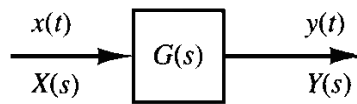
Análisis de respuesta en frecuencia

Con el término *respuesta en frecuencia*, nos referimos a la respuesta de un sistema en estado estable a una entrada senoidal.

En los métodos de la respuesta en frecuencia, la frecuencia de la señal de entrada se varía en un cierto rango, para estudiar la respuesta resultante.

El criterio de estabilidad de Nyquist nos permite averiguar la estabilidad relativa y absoluta de los sistemas lineales en lazo cerrado a partir del conocimiento de sus características de frecuencia en lazo abierto.

Obtención de salidas en estado estable para entradas senoidales.
Considere el sistema estable, lineal e invariante con el tiempo de la figura.



La entrada y la salida del sistema, cuya función de transferencia es $G(s)$, se representan mediante $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente.

Supongamos que la señal de entrada es

$$x(t) = X \sin \omega t$$

Suponga que la función de transferencia $G(s)$ se escribe como un cociente de dos polinomios en s ; es decir,

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}$$

En este caso, la salida transformada mediante el método de Laplace es

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)} X(s)$$

La respuesta en estado estable de un sistema estable, lineal e invariante con el tiempo ante una entrada senoidal no depende de las condiciones iniciales. (Por tanto, suponemos una condición inicial cero.) Si $Y(s)$ sólo tiene polos distintos, la expansión en fracciones parciales de la ecuación produce

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= G(s)X(s) = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} \\
 &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n}
 \end{aligned}$$

en donde a y b (para $i = 1, 2, \dots, n$) son constantes y \bar{a} es el complejo conjugado de a . La transformada inversa de Laplace de la ecuación

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + b_2e^{-s_2t} + \dots + b_ne^{-s_nt} \quad (t \geq 0)$$

Para un sistema estable, $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$, tienen partes reales negativas. De este modo, conforme t tiende a infinito, los términos $e^{-s_1t}, e^{-s_2t}, \dots, y e^{-s_nt}$ tienden a cero. Por lo tanto, todos los términos en el segundo miembro de la ecuación, excepto los dos primeros, se descartan en estado estable.

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

En donde la constante a se evalúa del modo siguiente:

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

Dado que $G(j\omega)$ es una cantidad compleja, se escribe en la forma siguiente:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

en donde $|G(j\omega)|$ representa la magnitud y ϕ representa el ángulo de $G(j\omega)$; es decir,

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{parte imaginaria de } G(j\omega)}{\text{parte real } G(j\omega)} \right]$$

El ángulo ϕ puede ser negativo, positivo o cero. Asimismo, obtenemos la expresión siguiente para $G(-j\omega)$:

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$$

Considerando que

$$a = -\frac{X|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = -\frac{X|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

La ecuación puede escribirse como

$$y_{ss}(t) = X |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j}$$

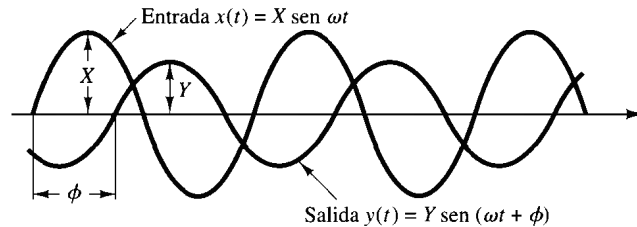
$$= X |G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi)$$

$$= Y \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Donde

$$Y = X|G(j\omega)|$$

Observamos que un sistema estable, lineal e invariante con el tiempo sujeto a una entrada senoidal tendrá, en estado estable, una salida senoidal de la misma frecuencia que la entrada. Pero la amplitud y la fase de la salida serán, en general, diferentes de las de la entrada.



$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = \text{cociente de las amplitudes de la senoidal de salida entre la senoidal de entrada}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \text{defasamiento de la senoidal de salida con respecto a la senoidal de entrada}$$

Por tanto, las características de respuesta de un sistema para una entrada senoidal se obtienen directamente de

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

La función $G(j\omega)$ se denomina función de transferencia senoidal. Es el cociente entre $Y(j\omega)$ y $X(j\omega)$. Es una cantidad compleja y se representa mediante una magnitud y un ángulo de fase con la frecuencia como parámetro. (Un ángulo de fase negativo se denomina atraso de fase y un ángulo de fase positivo se denomina adelanto de fase.) La función de transferencia senoidal de cualquier sistema lineal se obtiene sustituyendo s por $j\omega$ en la función de transferencia del sistema.

Ejemplo

Considere el siguiente sistema, cuya función de transferencia es

$$G(s)=\frac{5}{2s+1}$$

Cambiando la s por $j\omega$

$$G(j\omega)=\frac{5}{j2\omega+1}$$

La magnitud es

$$|G(j\omega)|=\frac{5}{\sqrt{4\omega^2+1}}$$

El defasamiento es

$$\phi=\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}2\omega$$

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0.01	5	-1.15°
0.02	4.996	-2.29°
0.05	4.975	-5.71°
0.1	4.903	-11.31°
0.2	4.642	-21.80°
0.5	3.535	-45.00°
1.0	2.236	-63.43°
2.0	1.213	-75.96°
5.0	0.497	-84.29°
10	0.249	-87.14°
20	0.125	-88.56°
50	0.05	-89.43°

Función de Transferencia	Ecuaciones de magnitud y fase
$G(s) = \frac{60}{s(s+4)(s+8)}$	$G(j\omega) = \frac{60}{j\omega(j\omega+4)(j\omega+8)}$ $ G(j\omega) = \frac{60}{\omega\sqrt{\omega^2+16}\sqrt{\omega^2+64}}$ $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{4} - \tan^{-1} \frac{\omega}{8}$
$G(s) = \frac{100(s+8)}{s^2(s+4)(s+12)}$	$G(j\omega) = \frac{100(j\omega+8)}{(j\omega)^2(j\omega+4)(j\omega+12)}$ $ G(j\omega) = \frac{100\sqrt{\omega^2+64}}{\omega^2\sqrt{\omega^2+16}\sqrt{\omega^2+144}}$ $\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{8} - 180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{4} - \tan^{-1} \frac{\omega}{12}$
$G(s) = \frac{70}{(s^2+4s+8)(s+5)}$	$G(j\omega) = \frac{70}{(-\omega^2+j4\omega+8)(j\omega+5)}$ $ G(j\omega) = \frac{70}{\sqrt{16\omega^2+(8-\omega^2)^2}\sqrt{\omega^2+25}}$ $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{4\omega}{8-\omega^2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{5} \quad \omega^2 < 8$ $\angle G(j\omega) = -\left(\tan^{-1} \frac{4\omega}{8-\omega^2} + 180^\circ\right) - \tan^{-1} \frac{\omega}{5} \quad \omega^2 > 8$
$G(s) = \frac{70}{(s+2+j2)(s+2-j2)(s+5)}$	$G(j\omega) = \frac{70}{(j\omega+2+j2)(j\omega+2-j2)(j\omega+5)}$ $ G(j\omega) = \frac{70}{\sqrt{(\omega+2)^2+2^2}\sqrt{(\omega-2)^2+2^2}\sqrt{\omega^2+25}}$ $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega+2}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega-2}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{5}$

Presentación de las características de la respuesta en frecuencia en forma gráfica.

La función de transferencia senoidal, función compleja de la frecuencia ω , se caracteriza por su magnitud y ángulo de fase, con la frecuencia como parámetro. Por lo general se usan tres representaciones gráficas de las funciones de transferencia senoidales:

1. Las gráficas de Bode o gráficas logarítmicas
2. Las gráficas de Nyquist o gráficas polares
3. Las gráficas de magnitud logarítmica contra la fase

Gráficas de Bode

Las gráficas de Bode están formadas por dos gráficas: una es el logaritmo de la magnitud de una función de transferencia senoidal y la otra es el ángulo de fase. Ambas se grafican contra la frecuencia en la escala logarítmica.

La unidad que se usa en esta representación del logaritmo de la magnitud es el decibel (dB),

$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$. Se trazan las curvas sobre papel semilogarítmico, con la escala logarítmica para la frecuencia y la escala lineal para la magnitud (en decibeles) o el ángulo de fase (en grados). (El rango de frecuencia de interés determina la cantidad de ciclos logarítmicos que se requieren en la abscisa.)

La ventaja principal de usar la grafica de Bode es que la multiplicación de magnitudes se convierte en adición. Además, cuenta con un método simple para trazar una curva aproximada de magnitud logarítmica. Se basa en aproximaciones asintóticas. Esta aproximación, mediante asíntotas (líneas rectas), es suficiente si sólo se necesita información general sobre la característica de la respuesta en frecuencia.

Ejemplo

Para la siguiente función de transferencia, determine el logaritmo de la magnitud y la fase para diferentes valores de frecuencia.

$$G(s) = \frac{5}{2s+1}$$

Cambiando la s por $j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{5}{j2\omega+1} \quad |G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{4\omega^2+1}}$$

La ecuación de la magnitud en decibeles es

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log 5 - 20 \log \sqrt{4\omega^2+1}$$

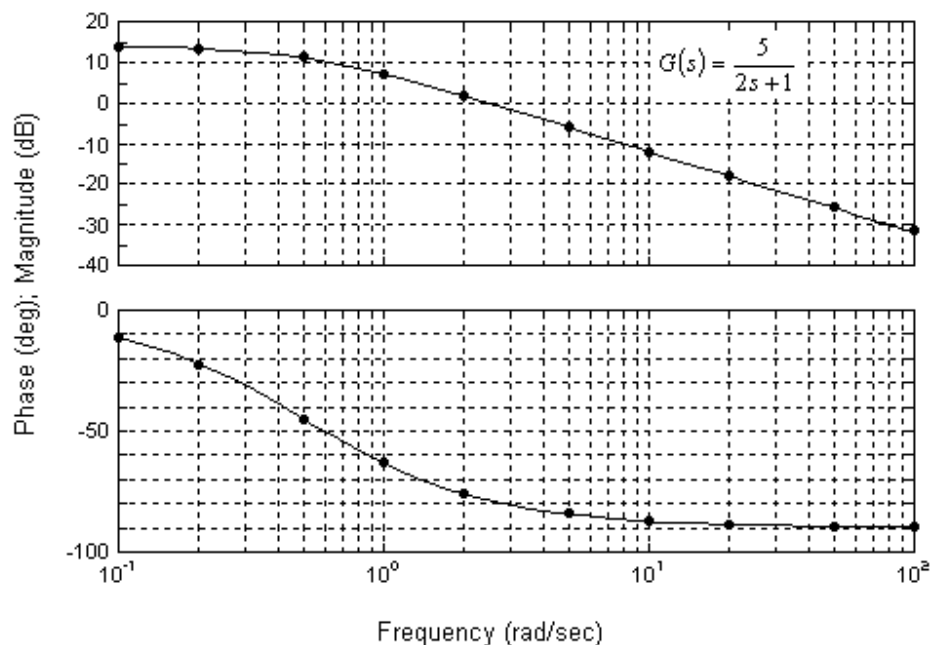
El defasamiento es

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} 2\omega$$

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0.01	13.977	-1.15°
0.02	13.972	-2.29°
0.05	13.936	-5.71°
0.1	13.809	-11.31°
0.2	13.335	-21.8°
0.5	10.969	-45°

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
1.0	6.989	-63.43°
2.0	1.675	-75.96°
5.0	-6.064	-84.29°
10	-12.052	-87.14°
20	-18.065	-88.57°
50	-26.021	-89.43°

Bode Diagrams



Ejemplo 1

$$G(s) = \frac{60}{s(s+4)(s+8)}$$

$$G(j\omega) = \frac{60}{j\omega(j\omega+4)(j\omega+8)} \quad |G(j\omega)| = \frac{60}{\omega\sqrt{\omega^2+16}\sqrt{\omega^2+64}}$$

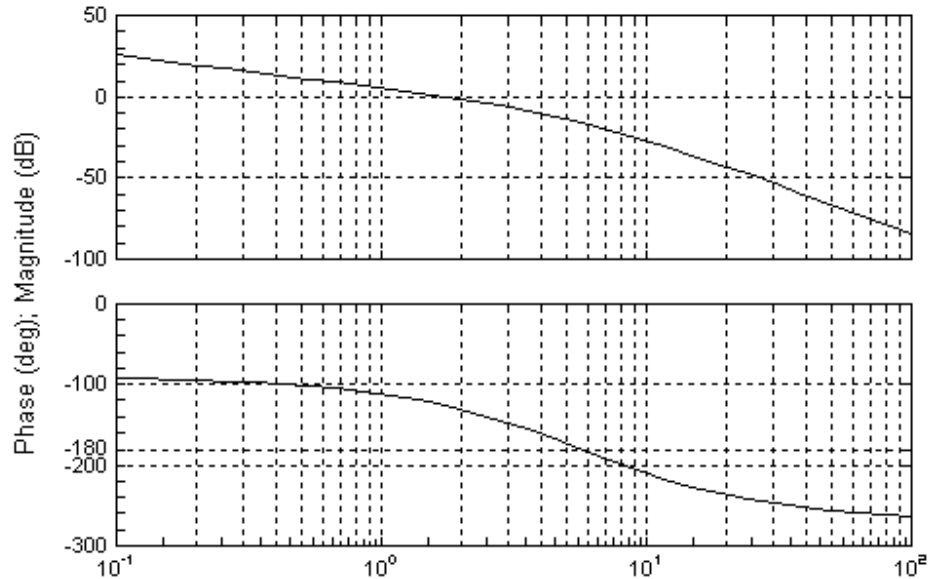
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log 60 - 20\log \omega - 20\log \sqrt{\omega^2+16} - 20\log \sqrt{\omega^2+64}$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{4} - \tan^{-1} \frac{\omega}{8}$$

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0.1	25.46	-92.15
0.2	19.43	-94.29
0.5	11.4	-100.7
1.0	5.13	-111.16
2.0	-1.79	-130.6

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
5.0	-14.04	-173.34
10	-27.23	-209.54
20	-43.31	-236.89
50	-66.51	-256.33
100	-84.47	-263.13

Bode Diagrams



Ejemplo 2

$$G(s) = \frac{50(s+10)}{(s+1)(s+3)(s+5)(s+7)}$$

$$G(j\omega) = \frac{50(j\omega+10)}{(j\omega+1)(j\omega+3)(j\omega+5)(j\omega+7)} \quad |G(j\omega)| = \frac{50\sqrt{\omega^2+100}}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{\omega^2+25}\sqrt{\omega^2+49}}$$

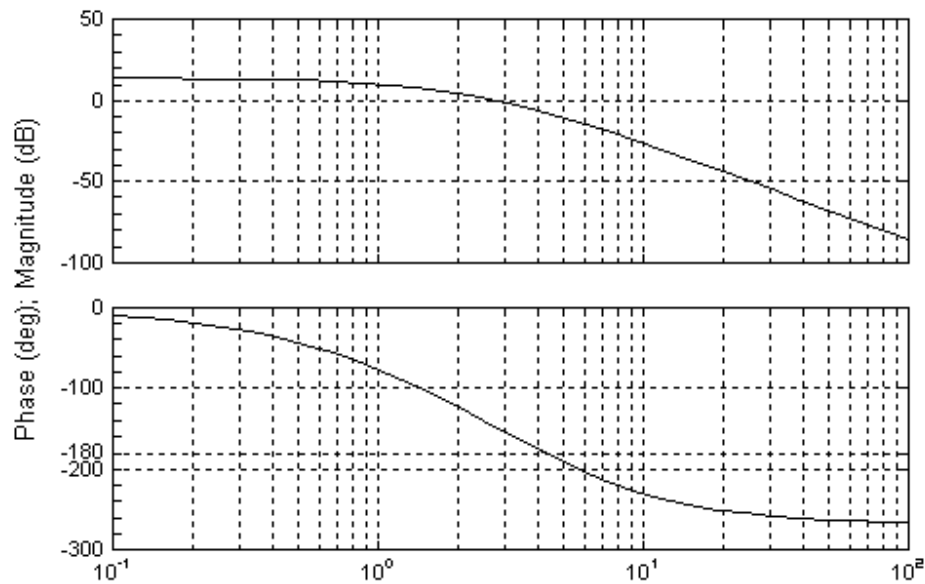
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log 50 + 20 \log \sqrt{\omega^2+100} - 20 \log \sqrt{\omega^2+1} - 20 \log \sqrt{\omega^2+9} - 20 \log \sqrt{\omega^2+25} - 20 \log \sqrt{\omega^2+49}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{10} - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{3} - \tan^{-1} \frac{\omega}{5} - \tan^{-1} \frac{\omega}{7}$$

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0.1	13.50	-9.01
0.2	13.35	-17.90
0.5	12.41	-42.96
1.0	9.87	-77.16
2.0	4.15	-123.56

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
5.0	-10.20	-191.69
10	-26.13	-231.03
20	-43.98	-251.84
50	-67.93	-263.05
100	-86.01	-266.55

Bode Diagrams



Ejemplo 3

$$G(s) = \frac{7(s+4)}{s(s+2)(s^2+4s+8)}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log 7 + 20 \log \sqrt{\omega^2 + 16} - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 4} - 20 \log \sqrt{16\omega^2 + (8 - \omega^2)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{4} - 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \frac{4\omega}{8 - \omega^2} \quad \omega^2 < 8$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{4} - 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \left(\tan^{-1} \frac{4\omega}{8 - \omega^2} + 180^\circ \right) \quad \omega^2 > 8$$

$$G(s) = \frac{7(s+4)}{s(s+2)(s+2+2j)(s+2-2j)}$$

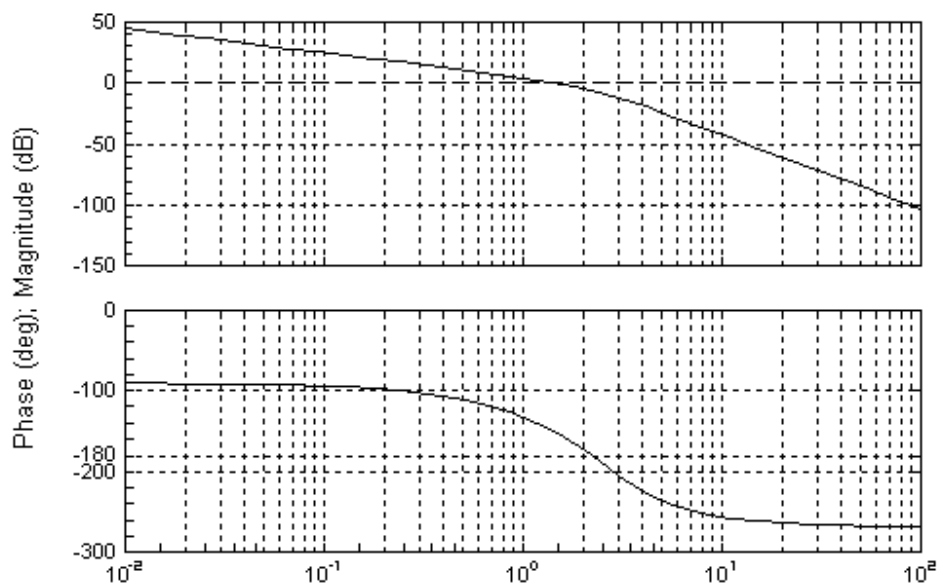
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log 7 + 20 \log \sqrt{\omega^2 + 16} - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 4} - 20 \log \sqrt{(\omega+2)^2 + 4} - 20 \log \sqrt{(\omega-2)^2 + 4}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega}{4} - 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega+2}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega-2}{2}$$

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0.1	24.85	-94.29
0.2	18.81	-98.56
0.5	10.68	-111.38
1.0	4.09	-132.27
2.0	-4.17	-171.87

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
5.0	-23.96	-237.22
10	-42.65	-256.99
20	-61.03	-264.06
50	-85.01	-267.69
100	-103.09	-268.85

Bode Diagrams



Las razones de frecuencia se expresan en términos de octavas o décadas.

Una octava es una banda de frecuencia de ω_1 a $2\omega_1$.

Una década es una banda de frecuencia de ω_1 a $10\omega_1$.

La distancia horizontal de $\omega_1 = 1$ a $\omega_1 = 10$ es igual a la de $\omega_1 = 3$ a $\omega_1 = 30$.

Factores básicos de $G(j\omega)H(j\omega)$

Los factores básicos que suelen ocurrir en una función de transferencia arbitraria $G(j\omega)H(j\omega)$ son:

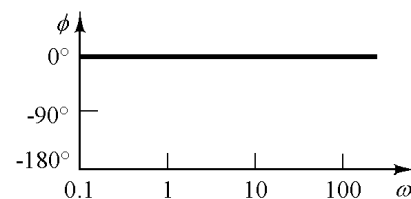
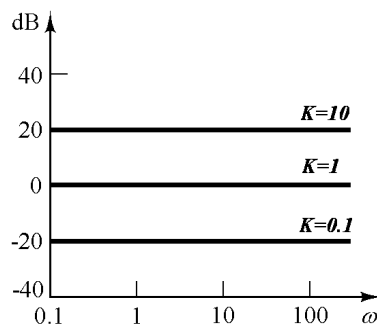
1. Ganancia K
2. Factores integral y derivativo $(j\omega)^{\mp 1}$
3. Factores de primer orden $(1 + j\omega)^{\pm 1}$
4. Factores cuadráticos $\left[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2\right]^{\mp 1}$

Ganancia K

Un número mayor que la unidad tiene un valor positivo en decibels, en tanto que un número menor que la unidad tiene un valor negativo. La curva de magnitud logarítmica para una ganancia constante K es una recta horizontal cuya magnitud es de $20 \log K$ decibels. El ángulo de fase de la ganancia K es cero. El efecto de variar la ganancia K en la función de transferencia es que sube o baja la curva de magnitud logarítmica de la función de transferencia en la cantidad constante correspondiente, pero no afecta la curva de fase.

$$20 \log(K \times 10) = 20 \log K + 20$$

$$20 \log(K \times 0.1) = 20 \log K - 20$$



Factores de integral y de derivada $(j\omega)^{\mp 1}$ (polos y ceros en el origen).

La magnitud logarítmica de $(1/j\omega)$ en decibels es

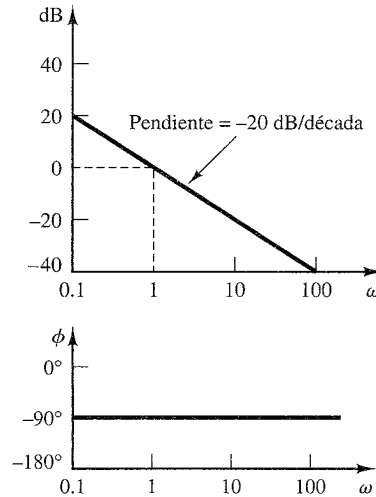
$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega$$

El ángulo de fase de $(1/j\omega)$ es

$$\phi = \angle \left(\frac{1}{j\omega} \right) = -90^\circ$$

Si se grafica la magnitud logarítmica de $-20 \log \omega \text{ dB}$ contra ω en una escala logarítmica, se obtiene una recta con pendiente de -20 dB/decada (-6 dB/octava).

Grafica de Bode



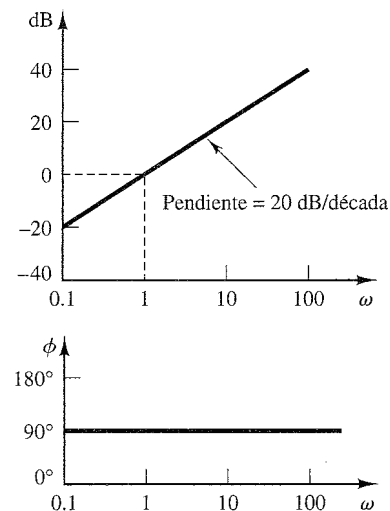
La magnitud logarítmica de $j\omega$ en decibels es

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega$$

El ángulo de fase de $(j\omega)$ es

$$\phi = \angle(j\omega) = 90^\circ$$

La curva de magnitud logarítmica es una recta con una pendiente de 20 dB/decada .



Si la función de transferencia contiene el factor $(1/j\omega)^n$ o $(j\omega)^n$ la magnitud logarítmica se convierte, respectivamente, en

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega$$

$$\phi = \angle \left(\frac{1}{(j\omega)^n} \right) = -n * 90^\circ$$

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20n \log \omega$$

$$\phi = \angle (j\omega)^n = n * 90^\circ$$

Por tanto, las pendientes de las curvas de magnitud logarítmica para los factores $(1/j\omega)^n$ y $(j\omega)^n$ son $-20n \text{ dB/decada}$ y $20n \text{ dB/decada}$, respectivamente. El ángulo de fase de $(1/j\omega)^n$ es igual a $-90^\circ \times n$ durante todo el rango de frecuencia, en tanto que el de $(j\omega)^n$ es igual a $90^\circ \times n$ en todo el rango de frecuencia. Las curvas de magnitud pasarán por el punto $(0 \text{ dB}, \omega = 1)$.

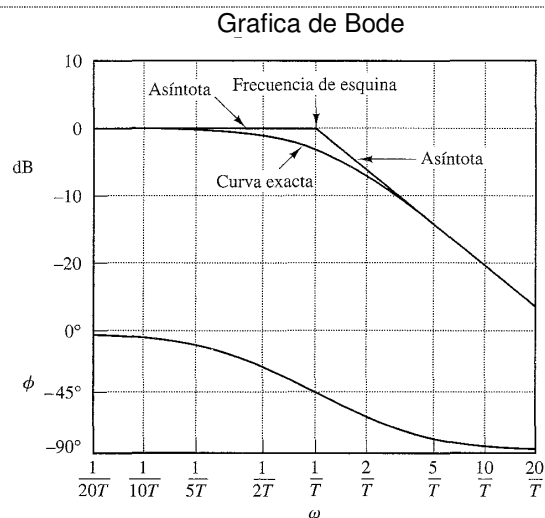
Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ (polos y ceros reales)

La magnitud logarítmica de $1/(1 + j\omega T)$ es

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

El ángulo de fase de $1/(1 + j\omega T)$ es

$$\phi = \angle \left(\frac{1}{1 + j\omega T} \right) = -\tan^{-1} \omega T$$

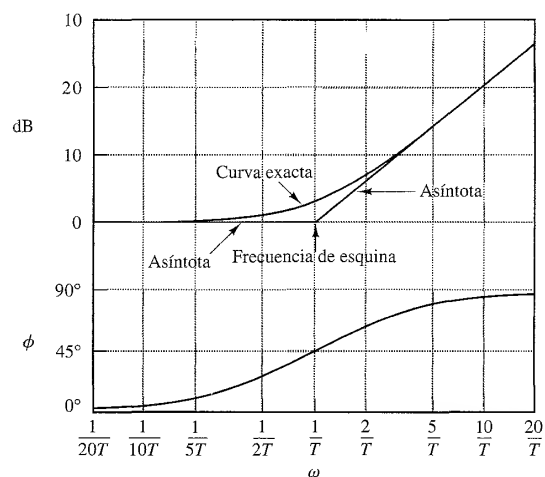


La magnitud logarítmica de $(1 + j\omega T)$ es

$$20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

El ángulo de fase de $(1 + j\omega T)$ es

$$\phi = \angle(1 + j\omega T) = \tan^{-1} \omega T$$



Factores cuadráticos $\left[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2\right]^{-1}$ (polos y ceros complejos)

La magnitud logarítmica de

$$\left[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2\right]^{-1}$$

es

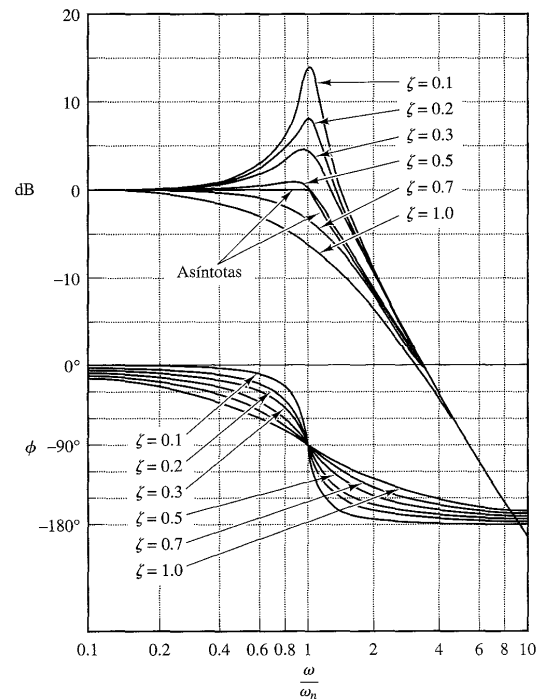
$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right|$$

$$= -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

El ángulo de fase es

$$\phi = \angle \left(\frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right) = -\tan^{-1} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$$

Grafica de Bode



La magnitud logarítmica de

$$\left[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2\right]$$

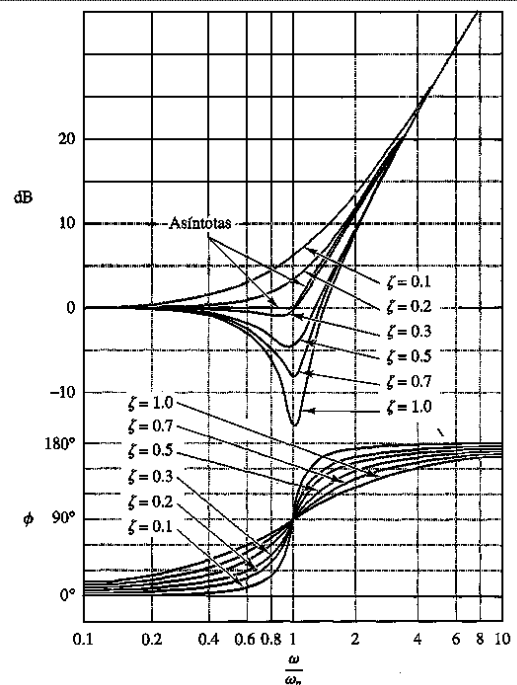
es

$$20 \log \left| 1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right|$$

$$= 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

El ángulo de fase es

$$\phi = \angle \left(1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right) = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$$



Estabilidad

Margen de fase:

El margen de fase es la cantidad de atraso de fase adicional en la frecuencia de cruce de ganancia requerida para llevar el sistema al borde de la inestabilidad.

La frecuencia de cruce de ganancia ω_c es la frecuencia en la cual la magnitud de la función de transferencia en lazo abierto, es unitaria, $|G(j\omega_c)| = 1$.

El margen de fase MF sería.

$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$$

Margen de ganancia:

El margen de ganancia es el recíproco de la magnitud $G(j\omega_f)$ en la frecuencia de cruce de fase ω_f .

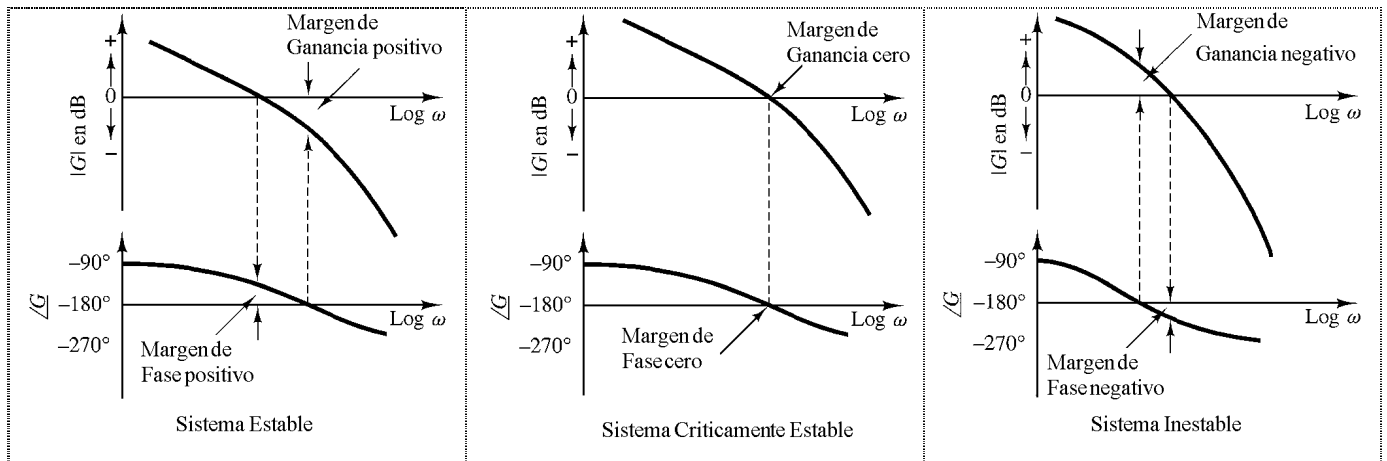
$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_f)|}$$

En términos de decibeles

$$MG(dB) = 20 \log MG = -20 \log |G(j\omega_f)|$$

La frecuencia de cruce de fase ω_f es la frecuencia en la cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto es -180° , $\angle G(j\omega_f) = -180^\circ$.

Margen de fase y de Ganancia para sistemas estables, críticamente estables e inestables.



Ejemplo 1

$$G(s) = \frac{3}{s(s+1)(s+2)}$$

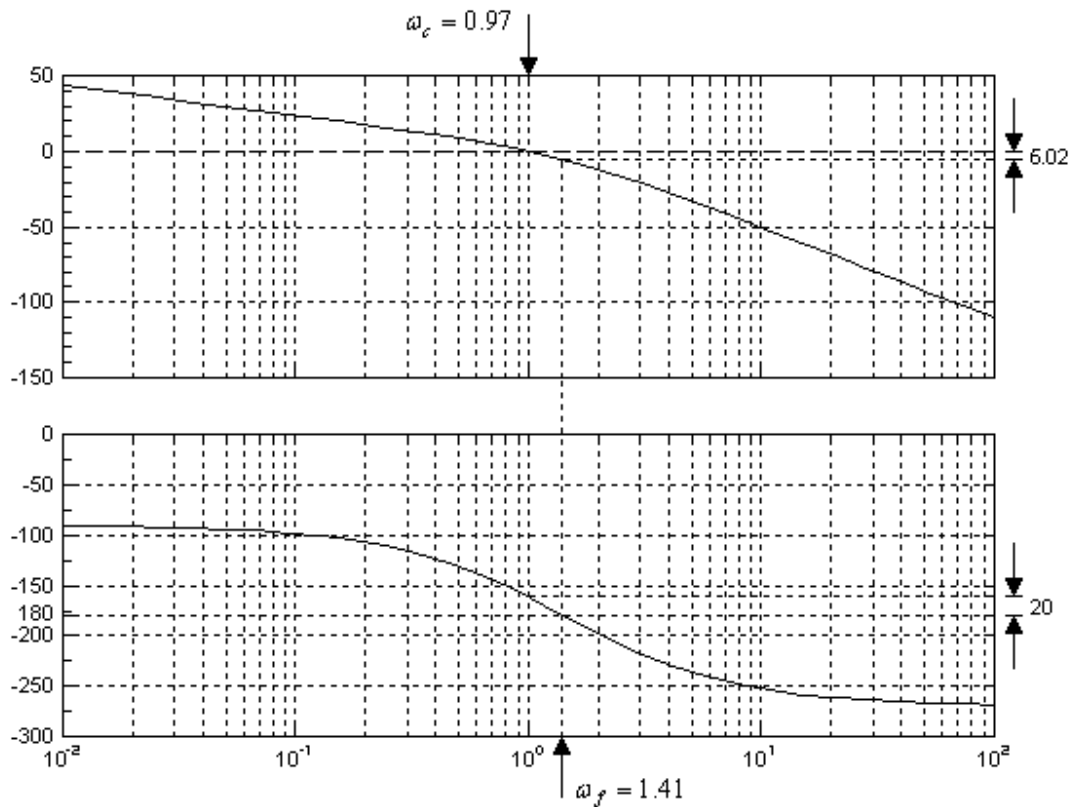
$$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log 3 - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 1} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 4}$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{2}$$

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0.1	23.47	-98.57
0.2	17.29	-107.02
0.5	8.31	-130.6
1.0	-0.46	-161.57
2.0	-12.5	-198.44

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
5.0	-33.21	-236.89
10	-50.67	-252.98
20	-68.57	-261.43
50	-92.4	-266.56
100	-100.46	-268.28



Frecuencia de transición de ganancia $\omega_c = 0.97 \text{ rad/seg}$

$$|G(j\omega_c)| = 0 \text{ dB} \quad \angle G(j\omega_c) = -160^\circ \quad MF = 20^\circ$$

Frecuencia de transición de fase $\omega_f = 1.41 \text{ rad/seg}$

$$\angle G(j\omega_f) = -180^\circ \quad |G(j\omega_f)| = -6.02 \text{ dB} \quad MG = 6.02 \text{ dB}$$

¿Cuál es la ganancia crítica K_c ?

La ganancia crítica es cuando tenemos un $MF = 0^\circ$ y $MG = 0 \text{ dB}$

Necesitamos subir la gráfica de magnitud 6.02 dB o sea que debemos de tener una de magnitud de 0 dB y un defasamiento de 180° en $\omega_f = 1.41 \text{ rad/seg}$.

$$20 \log K_c = 6.02 \quad K_c = 10^{6.02/20} = 2$$

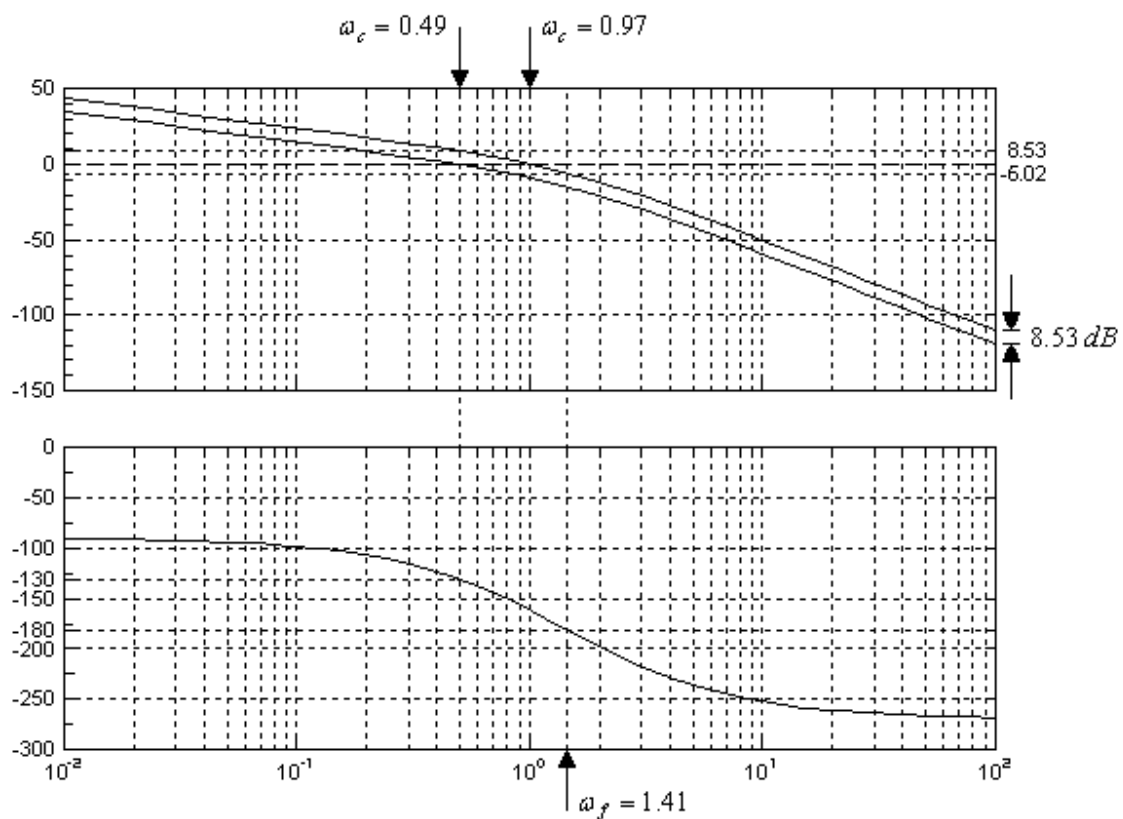
¿Cuál es la ganancia necesaria para tener un MF de 50° ?

Para cumplir con el MF debemos de tener un defasamiento de -130° ($-180^\circ + 50^\circ$), este defasamiento se presenta en $\omega = 0.49$ y tenemos una magnitud de 8.53 dB

Entonces, se necesita bajar la gráfica de magnitud 8.53 dB para tener 0 dB en $\omega = 0.49$.

$$20 \log K = -8.53 \quad K = 10^{-8.53/20} = 0.374$$

$$G(s) = \frac{3 \cdot 0.374}{s(s+1)(s+2)}$$



Ejemplo 2

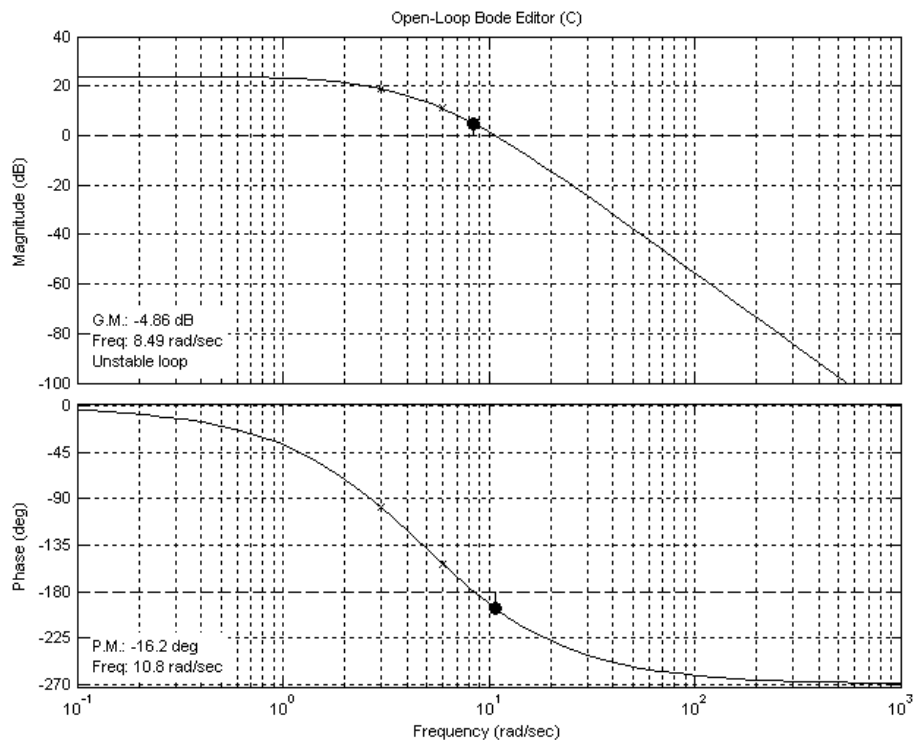
$$G(s) = \frac{1700}{(s+3)(s+6)^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1700}{(j\omega+3)(j\omega+6)^2}$$

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log 1700 - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 9} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 36} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 36} \\ \angle G(j\omega) &= -\tan^{-1} \frac{\omega}{3} - \tan^{-1} \frac{\omega}{6} - \tan^{-1} \frac{\omega}{6} \end{aligned}$$

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0.1	23.93	-3.82
0.2	23.91	-7.63
0.5	23.76	-18.99
1.0	23.24	-37.36
2.0	21.43	-70.56

ω	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
5.0	13.59	-138.65
10	1.56	-191.37
20	-14.3	-228.07
50	-37.47	-252.88
100	-55.43	-261.41



Frecuencia de transición de ganancia $\omega_c = 10.8 \text{ rad/seg}$

$$|G(j\omega_c)| = 0 \text{ dB} \quad \angle G(j\omega_c) = -196.2^\circ \quad MF = -16.2^\circ$$

Frecuencia de transición de fase $\omega_f = 8.49 \text{ rad/seg}$

$$\angle G(j\omega_f) = -180^\circ \quad |G(j\omega_f)| = 4.86 \text{ dB} \quad MG = -4.86 \text{ dB}$$

Sistema inestable

¿Cuál es la ganancia crítica K_c ? $20 \log K_c = -4.86 \quad K_c = 10^{-4.86/20} = 0.571$

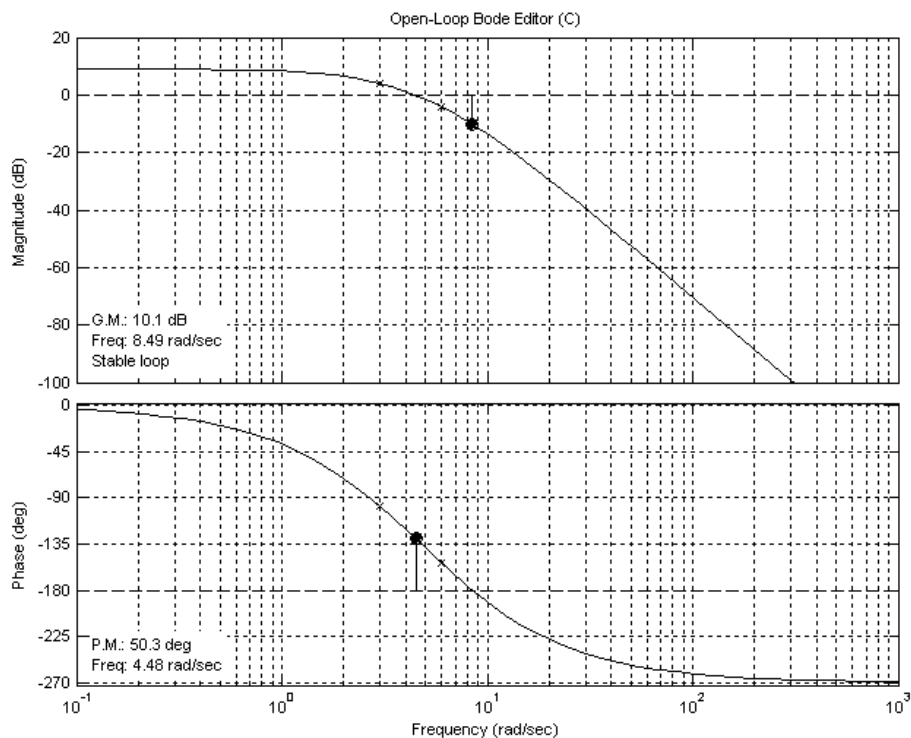
¿Cuál es la ganancia necesaria para tener un MF de 50° ?

Para cumplir con el $MF = 50^\circ$ debemos de tener un defasamiento de -130° , $(-180^\circ + 50^\circ)$, este defasamiento se presenta en $\omega = 4.5$ y tenemos una magnitud de 14.95 dB

Entonces, se necesita bajar la gráfica de magnitud 14.95 dB para tener 0 dB en $\omega = 4.5$.

$$20 \log K = -14.95 \quad K = 10^{-14.95/20} = 0.179$$

$$G(s) = \frac{1700 * 0.179}{(s+3)(s+6)^2} = \frac{304.3}{(s+3)(s+6)^2}$$



Frecuencia de transición de ganancia $\omega_c = 4.48 \text{ rad/seg}$

$$\left| G(j\omega_c) \right| = 0 \text{ dB} \quad \angle G(j\omega_c) = -129.7^\circ \quad MF = 50.3^\circ$$

Frecuencia de transición de fase $\omega_f = 8.49 \text{ rad/seg}$

$$\angle G(j\omega_f) = -180^\circ \quad \left| G(j\omega_f) \right| = -10.1 \text{ dB} \quad MG = 10.1 \text{ dB}$$

Ganancia crítica K_c $20 \log K_c = 10.1 \quad K_c = 10^{10.1/20} = 3.199$

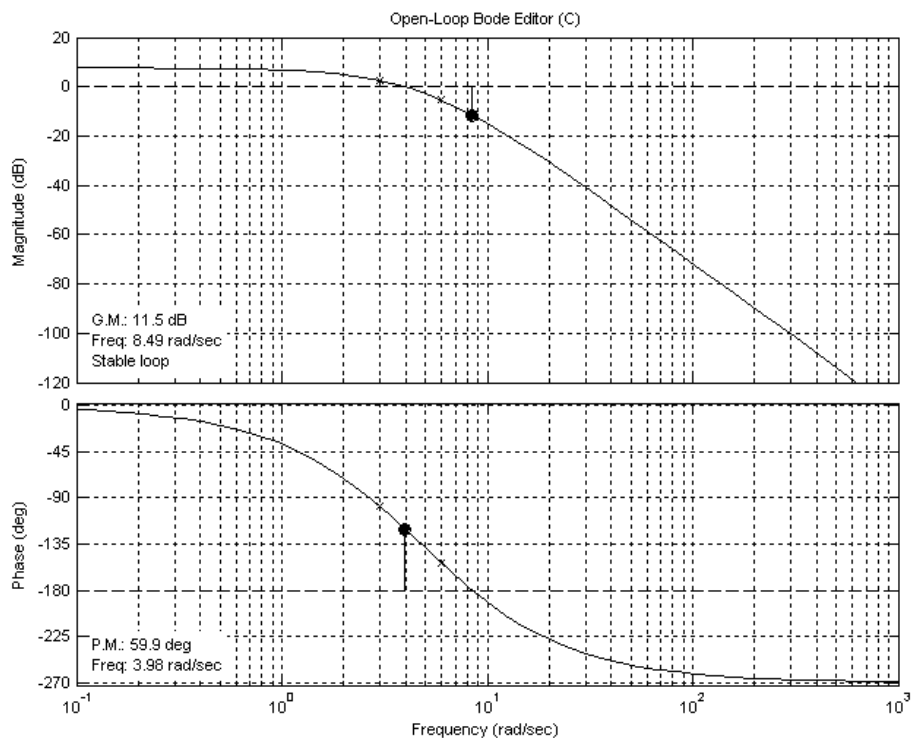
¿Cuál es la ganancia necesaria para tener un MF de 60° ?

Para cumplir con el $MF = 60^\circ$ debemos de tener un defasamiento de -120° , $(-180^\circ + 60^\circ)$, este defasamiento se presenta en $\omega = 3.98$ y tenemos una magnitud de 16.39 dB

Entonces, se necesita bajar la gráfica de magnitud 16.39 dB para tener 0 dB en $\omega = 3.98$.

$$20 \log K = -16.39 \quad K = 10^{-16.39/20} = 0.152$$

$$G(s) = \frac{1700 * 0.152}{(s+3)(s+6)^2} = \frac{258.4}{(s+3)(s+6)^2}$$



Frecuencia de transición de ganancia $\omega_c = 3.98 \text{ rad/seg}$

$$\left| G(j\omega_c) \right| = 0 \text{ dB} \quad \angle G(j\omega_c) = -120.1^\circ \quad MF = 59.9^\circ$$

Frecuencia de transición de fase $\omega_f = 8.49 \text{ rad/seg}$

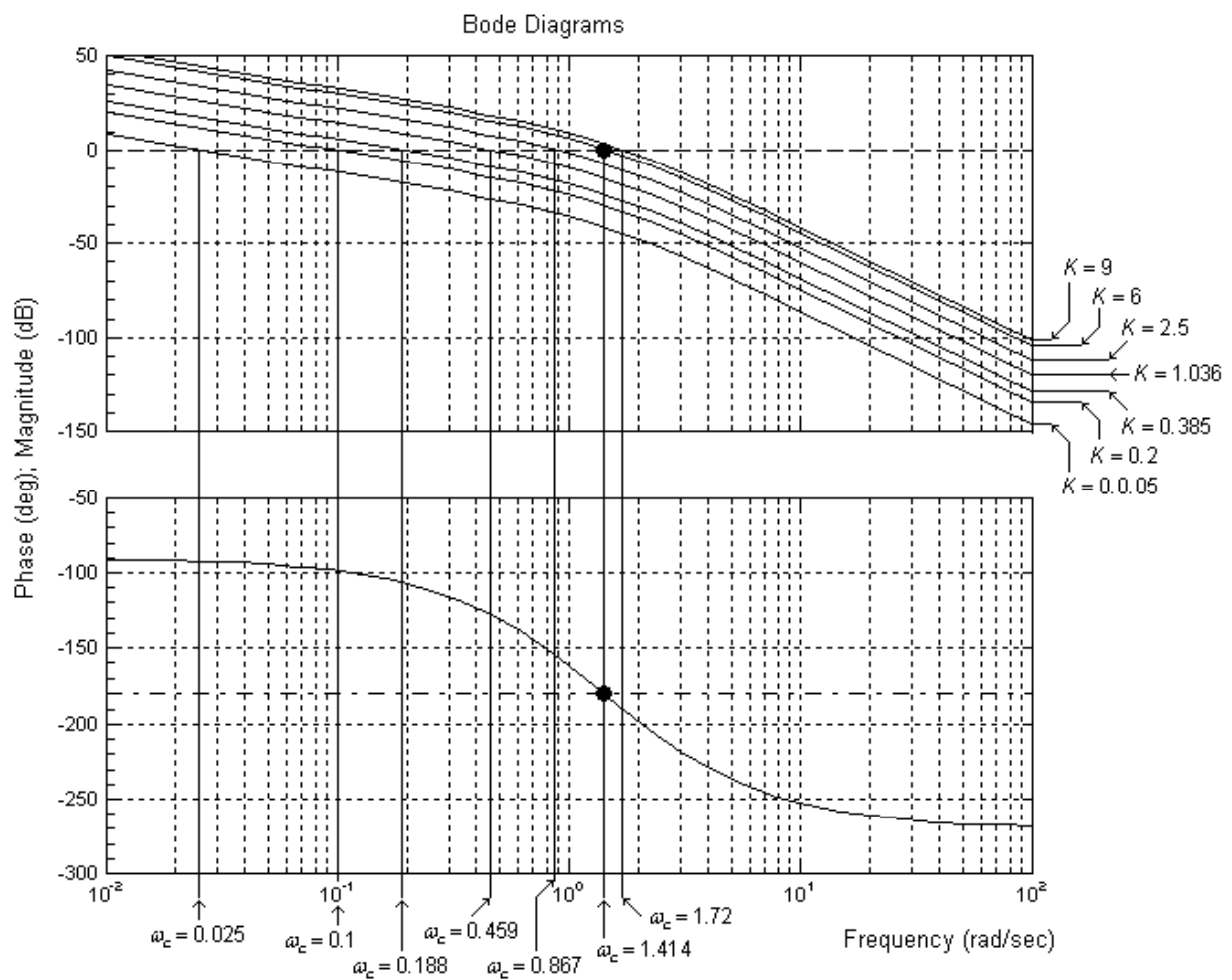
$$\angle G(j\omega_f) = -180^\circ \quad \left| G(j\omega_f) \right| = -11.5 \text{ dB} \quad MG = 11.5 \text{ dB}$$

Ganancia crítica K_c

$$20 \log K_c = 11.5 \quad K_c = 10^{11.5/20} = 3.758$$

Diagrama de Bode para diferentes valores de ganancia

$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$	
$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$	$ G(j\omega) _{dB} = 20 \log K - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 1} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + 4}$ $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{2}$



Margenes de fase y de ganancia para diferentes valores de ganancia

K	MF	ω_c	MG	ω_f		K	MF	ω_c	MG	ω_f
0.05	87.9	0.025	41.6	1.414		2.5	25.7	0.867	7.6	1.414
0.2	81.5	0.1	29.5	1.414		5.5	2.37	1.35	0.756	1.414
0.385	74	0.188	23.9	1.414		6	0	1.414	0	1.414
1.036	52.4	0.459	15.3	1.414		9	-10.43	1.72	-3.52	1.414

