

Sistemas Físicos

Modelos de sistemas

Para analizar los sistemas de control se necesitan modelos matemáticos. Estos modelos son ecuaciones que representan la dinámica del sistema. La dinámica de los sistemas se describe en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado.

Sistemas eléctricos

Las leyes fundamentales que gobiernan los circuitos eléctricos son las leyes de Kirchhoff.

Ley de nodos, la suma algebraica de todas las corrientes que entran y salen de un nodo es cero.

Ley de voltajes, en cualquier instante determinado la suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier malla es cero.

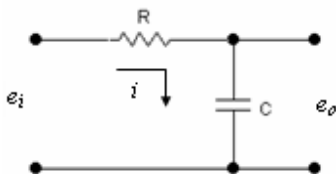
Un circuito está formado por inductancias L (henry), resistencias R (ohm) y capacitancias C (farad).

La caída de tensión en una *inductancia* es proporcional a la variación de corriente $e_l = L \frac{di}{dt}$

La caída de tensión en una *resistencia* es proporcional a la corriente $e_r = Ri$

La caída de tensión en un *capacitor* es proporcional a la cantidad de corriente que pasa a través de el $e_c = \frac{1}{C} \int i dt$.

Ejemplo 1



Ecuación de la malla

$$e_i = e_r + e_o$$

ecuaciones de cada uno de los elementos.

$$e_r = Ri, \quad e_o = \frac{1}{C} \int i dt$$

Transformando en Laplace

$$E_i(s) = E_R(s) + E_o(s), \quad E_R = RI(s), \quad E_o(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Sustituyendo

$$E_i(s) = RI(s) + \frac{1}{sC} I(s)$$

agrupando y despejando $I(s)$

$$I(s) = \frac{sC}{(RCs + 1)} E_i(s)$$

como

$$E_o(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

e_i = variable de entrada

e_o = variable de salida

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(RCs + 1)}$$

$e_i = \text{variable de entrada}$

$e_R = \text{variable de salida}$

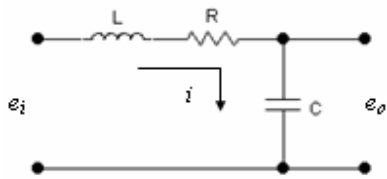
$$\frac{E_R(s)}{E_i(s)} = \frac{RCs}{(RCs + 1)}$$

$e_i = \text{variable de entrada}$

$i = \text{variable de salida}$

$$\frac{I(s)}{E_i(s)} = \frac{Cs}{(RCs + 1)}$$

Ejemplo 2



Ecuación de la malla

$$e_i = e_l + e_r + e_o$$

ecuaciones de cada uno de los elementos

$$e_l = L \frac{di}{dt}, \quad e_r = Ri, \quad e_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

Transformando en Laplace

$$E_i(s) = E_L(s) + E_R(s) + E_o(s)$$

$$E_L(s) = LsI(s), \quad E_R(s) = RI(s), \quad E_c(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

sustituyendo

$$E_i(s) = LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{sC} I(s)$$

agrupando y despejando $I(s)$

$$I(s) = \frac{sC}{LCs^2 + RCs + 1} E_i(s)$$

$e_i = \text{variable de entrada}$

$i = \text{variable de salida}$

$$\frac{I(s)}{E_i(s)} = \frac{sC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

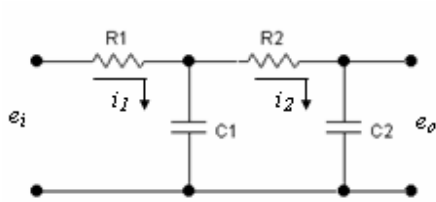
Como

$$E_o(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

$e_i = \text{variable de entrada}$

$e_o = \text{variable de salida}$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Ejemplo 3

Ecuaciones de las mallas

$$e_i = e_{r1} + e_{c1}$$

$$e_{c1} = e_{r2} + e_o$$

ecuaciones de cada uno de los elementos

$$e_{r1} = R_1 i_1, \quad e_{r2} = R_2 i_2, \quad e_{c1} = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt$$

$$e_o = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt$$

Transformando en Laplace

$$E_i(s) = E_{R1}(s) + E_{C1}(s)$$

$$E_{C1}(s) = E_{R2}(s) + E_o(s)$$

$$E_{R1}(s) = R_1 I_1, \quad E_{R2}(s) = R_2 I_2, \quad E_{C1}(s) = \frac{1}{sC_1} (I_1(s) - I_2(s))$$

$$E_o(s) = \frac{1}{sC_2} I_2(s)$$

sustituyendo

$$\frac{1}{sC_1} (I_1(s) - I_2(s)) = R_2 I_2(s) + E_o(s)$$

Despejando $I_1(s)$ y sustituyendo $I_2(s)$

$$I_2(s) = sC_2 E_o(s)$$

$$I_1(s) = C_2 s E_o(s) + C_1 R_2 C_2 s^2 E_o(s) + C_1 s E_o(s)$$

Como

$$E_i(s) = E_{R1}(s) + E_{R2}(s) + E_o(s)$$

$$E_i(s) = R_1 I_1(s) + R_2 I_2(s) + E_o(s)$$

Sustituyendo $I_1(s), I_2(s)$ en esta última ec.

$$E_i(s) = R_1 C_2 s E_o(s) + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 E_o(s) + R_1 C_1 s E_o(s) + R_2 C_2 s E_o(s) + E_o(s)$$

$$E_i(s) = (R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1) E_o(s)$$

 e_i = variable de entrada e_o = variable de salida

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

Sistemas mecánicos

Las formas básicas de bloque funcionales de sistemas mecánicos son resortes, amortiguadores y masas.

La ley fundamental que controla los sistemas mecánicos es la segunda ley de Newton.

En el caso de un resorte donde el estiramiento o compresión es proporcional a las fuerzas aplicadas.

$$F = k x$$

Donde k es una constante

En el caso de un amortiguador, La fuerza del amortiguador F es proporcional a la velocidad v del pistón. La velocidad es la razón de cambio del desplazamiento x

$$F = cv \qquad F = c \frac{dx}{dt}$$

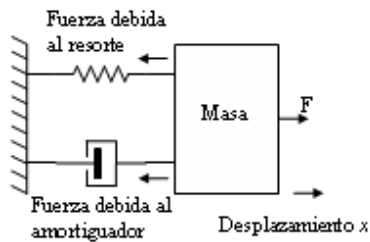
donde c es una constante.

En el caso de la masa, la relación entre la fuerza F y la aceleración a está relacionada con la segunda ley de Newton.

$$F = ma$$

Donde a es la aceleración que es la razón de cambio de la velocidad. Es decir dv/dt .

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ejemplo 1

$$ma = F - kx - cv = F - kx - c \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - kx - c \frac{dx}{dt}$$

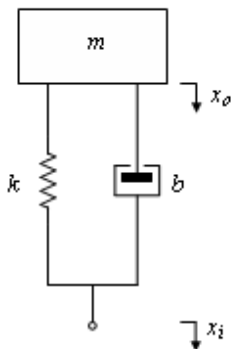
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

Transformando en Laplace y considerando las condiciones iniciales iguales a cero.

$$ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad \text{Función de Transferencia}$$

Ejemplo 2

$$ma = 0 - b(v_o - v_i) - k(x_o - x_i) = 0$$

$$m \frac{d^2 x_o}{dt^2} + b \left(\frac{dx_o}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \right) + k(x_o - x_i) = 0$$

$$m \frac{d^2 x_o}{dt^2} + b \frac{dx_o}{dt} + kx_o = b \frac{dx_i}{dt} + kx_i$$

Transformando en Laplace

$$(ms^2 + bs + k)X_o(s) = (bs + k)X_i(s)$$

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Sistemas de nivel de líquido

Resistencia y capacitancia de sistemas de nivel de líquido

Sea el flujo a través de una tubería corta que conecta dos tanques. En este caso la **resistencia** al flujo del líquido se define como la variación de diferencia de nivel (diferencia de niveles de líquido entre dos tanques) necesaria para producir una variación unitaria en el gasto.

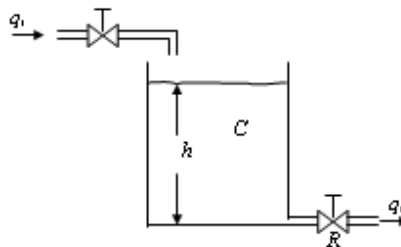
$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de niveles}}{\text{cambio en el gasto}}$$

Capacitancia C de un tanque se define como la variación en la cantidad de líquido acumulado, necesaria para producir una variación unitaria en el potencial (presión hidrostática). (El potencial es la magnitud que indica el nivel de energía del sistema).

$$C = \frac{\text{cambio en la cantidad del líquido almacenado}}{\text{cambio en el nivel}}$$

Ejemplo 1

Considere el sistema que aparece en la figura.



El flujo de entrada menos el flujo de salida durante el pequeño intervalo de tiempo dt es igual a la cantidad adicional almacenada en el tanque.

$$C dh = (q_i - q_o) dt$$

La relación entre q_o y h

$$q_o = \frac{h}{R}$$

La ecuación diferencial quedaría.

$$RC \frac{dh}{dt} + h = R q_i$$

donde h es la salida y q_i es la entrada.

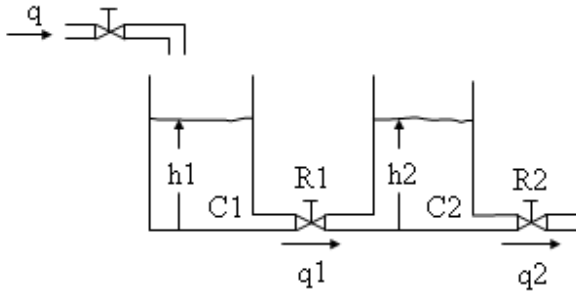
Transformando en Laplace

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s)$$

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Ejemplo 2**Sistema de nivel con interacción.**

Considere el siguiente sistema.



Las ecuaciones serían.

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1$$

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$$

Obteniendo la transformada de Laplace.

$$\frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1} = Q_1$$

$$C_1 s H_1(s) = Q(s) - Q_1(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{R_2} = Q_2(s)$$

$$C_2 s H_2(s) = Q_1(s) - Q_2(s)$$

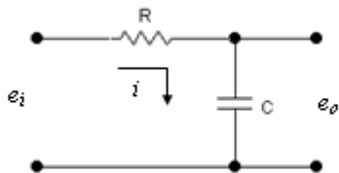
Si se considera a q como entrada y a q_2 como salida.

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + 1}$$

Diagrama de bloques por elementos

Circuito eléctrico

Ejemplo 1



Ecuación de la malla

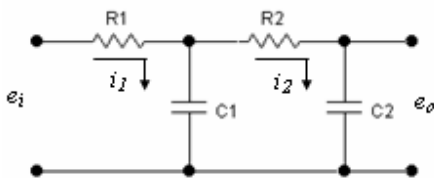
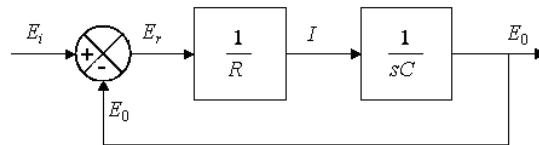
$$e_i = e_r + e_o$$

ecuaciones de cada uno de los elementos.

$$e_r = Ri, \quad e_o = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

Transformando en Laplace

$$E_i(s) = E_R(s) + E_o(s), \quad E_R = RI(s), \quad E_o(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$



Ejemplo 2

Ecuaciones de las mallas

$$e_i = e_{r1} + e_{c1}$$

$$e_{c1} = e_{r2} + e_o$$

ecuaciones de cada uno de los elementos

$$e_{r1} = R_1 i_1, \quad e_{r2} = R_2 i_2, \quad e_{c1} = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) \, dt$$

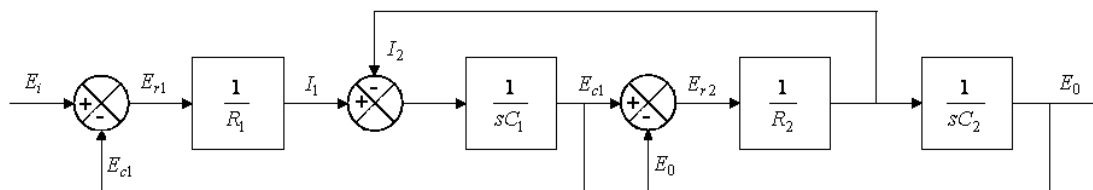
$$e_o = \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt$$

Transformando en Laplace

$$E_i(s) = E_{R1}(s) + E_{C1}(s)$$

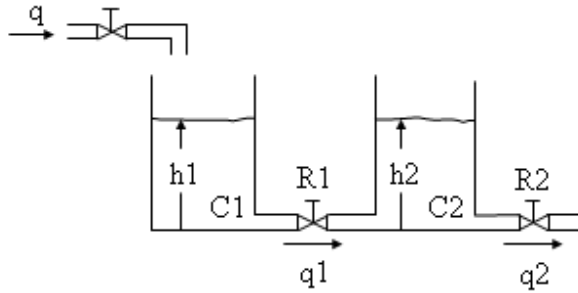
$$E_{C1}(s) = E_{R2}(s) + E_o(s)$$

$$E_{R1}(s) = R_1 I_1, \quad E_{R2}(s) = R_2 I_2, \quad E_{C1}(s) = \frac{1}{sC_1} (I_1(s) - I_2(s)), \quad E_o(s) = \frac{1}{sC_2} I_2(s)$$



Ejemplo 3**Sistema de nivel con interacción.**

Considere el siguiente sistema.



Las ecuaciones serían.

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1$$

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$$

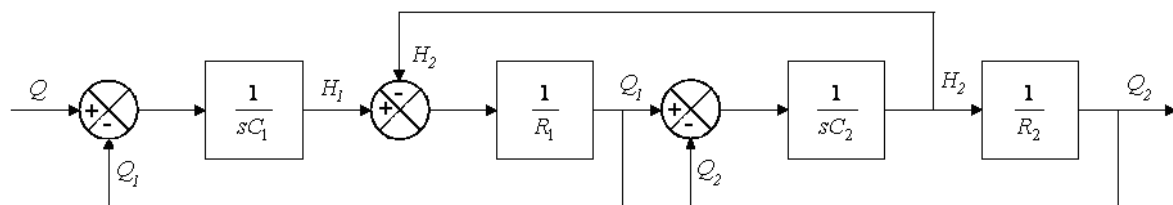
Obteniendo la transformada de Laplace.

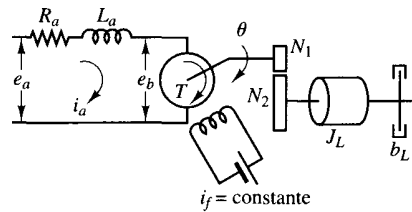
$$\frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1} = Q_1$$

$$C_1 s H_1(s) = Q(s) - Q_1(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{R_2} = Q_2(s)$$

$$C_2 s H_2(s) = Q_1(s) - Q_2(s)$$



Motor de cd controlado por armadura:

Flujo en el entrehierro

$$\Psi = K_f i_f$$

El par desarrollado por el motor

$$T = K_f i_f K_1 i_a$$

Si la corriente de campo es constante,

$$T = K i_a$$

Para un flujo constante la tensión inducida en la armadura (fuerza contra electromotriz)

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt}$$

La ecuación diferencial del circuito de armadura es.

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

La corriente de armadura produce el par que se aplica a la inercia y fricción de la carga

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = T = K i_a$$

Tomando la transformada de Laplace inversa

$$K_b s \theta(s) = E_b(s) \quad (L_a s + R_a) I_a(s) + E_b(s) = E_a(s) \quad (Js^2 + bs) \theta(s) = T(s) = K I_a(s)$$

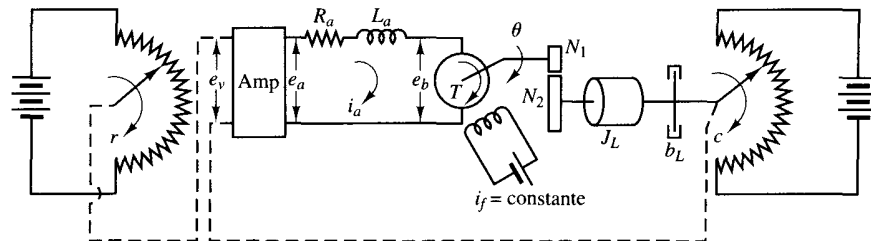
Si consideramos la inductancia de armadura L_a despreciable, nos queda

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

donde.

$$K_m = K / (R_a b + K K_a)$$

$$T_m = R_a J / (R_a b + K K_b)$$

Sistema de servo posición.

r = señal de entrada

c = señal de salida

Para el potenciómetro detector de error:

$$E(s) = K_1 [R(s) - C(s)]$$

Amplificador:

$$E_a(s) = K_p E(s)$$

Motor controlado por armadura:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

donde. $K_m = K / (R_a b + K K_a)$ $T_m = R_a J / (R_a b + K K_b)$

Momento de inercia equivalente J y el coeficiente de fricción viscosa equivalente b referido al eje del motor

$$J = J_m + n^2 J_L$$

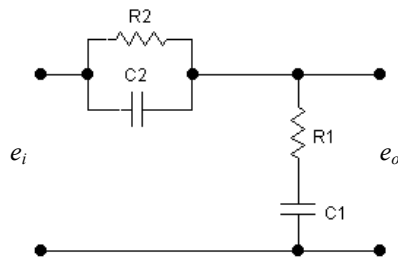
$$b = b_m + n^2 b_L$$

Relación de engranes

$$C(s) = \frac{N_1}{N_2} \theta(s) = \frac{1}{10} \theta(s)$$

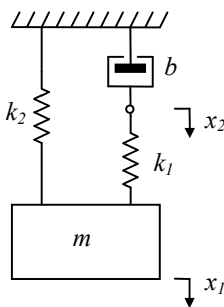
La función de transferencia del servo posición sería:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_p K n}{T_m s^2 + s + K_1 K_p K n}$$



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_2 C_1 s}$$

Ejemplo:



$$m \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + k_2 x_1 = 0$$

$$b_1 \dot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) = 0$$

Transformando en Laplace

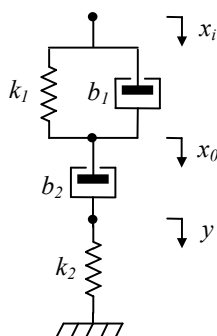
$$ms^2 X_1(s) + k_1(X_1(s) - X_2(s)) + k_2 X_1(s) = 0$$

$$b_1 s X_2(s) + k_1(X_2 - X_1) = 0$$

sustituyendo

$$ms^2 X_1(s) + bs X_2(s) + k_2 X_1(s) = 0$$

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{-(ms^2 + k_2)}{bs}$$



$$b_1(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + k_1(x_o - x_i) + b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) = 0$$

$$b_2(\dot{y} - \dot{x}_o) + k_2 y = 0$$