

# SISTEMAS DE CONTROL TEÓRICO

(1)

CONTROL - T.

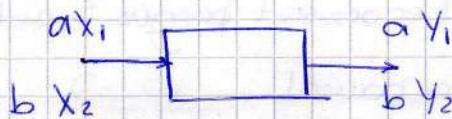
12.03.2013

PROFESOR: Juan Eduardo Picco

Consulta: jueves después de las 20:30hs.

Sistema: conjunto de elementos interrelacionados para cumplir un fin determinado.

Un sistema es lineal cuando cumple con superposición, aditividad y homogeneidad.



$$ax_1 + bx_2 = aY_1 + bY_2$$

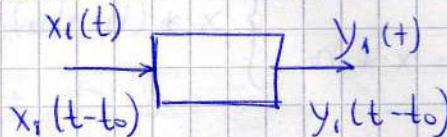
La integral y la derivada son dos operadores lineales.

$y = 3x + 2$  no es lineal porque

$$\begin{array}{r} x=2 \quad y=8 \\ x=3 \quad y=11 \\ \hline x=5 \quad y=19 \end{array} \rightarrow \text{pero da } 17.$$

Está desplazada del origen.

Sistema invariante en el tiempo: los coeficientes de una ecuación que lo represente son constantes.



SLIT

Un sistema es causal porque cuando no existen para tiempos negativos.

Un sistema es determinístico cuando se tiene una idea de la respuesta

puesta que puede dar. La misma causa produce el mismo efecto. El que no es determinístico es el que ~~no~~ tiene una ley de probabilidades para la respuesta (por ej. un dado)

Función de Transferencia: es la transformada de Laplace para la respuesta al impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero.

$$\frac{f(t)}{x(t)} \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow h(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

$$\frac{\Delta(s)}{X(s)} \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow H(s)$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$C.I. = 0$$

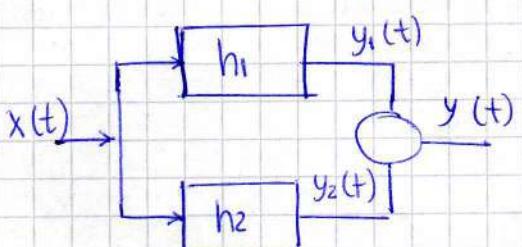
En la integral de convolución el límite superior es  $t$  porque  $\tau$  no puede ser mayor a  $t$  para que el sistema sea causal.

Conociendo la respuesta al impulso puedo conocer la respuesta a cualquier señal haciendo la multiplicación de la transformada de la respuesta por la transformada de la nueva señal.

$$y_1 = x * h_1 \quad y_2 = y_1 * h_2$$

$$y_2 = x * h_1 * h_2$$

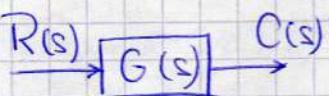
$$Y_2(s) = X(s) \cdot H_1(s) \cdot H_2(s)$$



$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x * h_1 \\ y_2 = x * h_2 \end{array} \right\} x * (h_1 + h_2) = y$$

$$Y(s) = X(s)(H_1(s) + H_2(s))$$

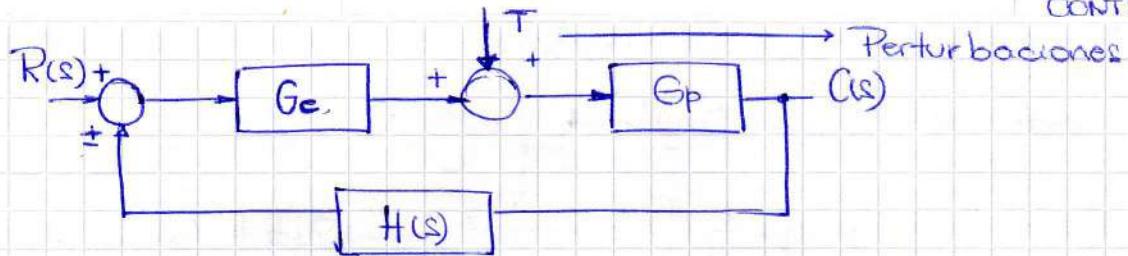
Sistema de lazo abierto: en la entrada no se tiene información de lo que pasa a la salida.



Sistema de lazo cerrado: en la entrada se tiene ~~debe~~ información de los valores de la ~~salida~~ salida.

(2)

CONTROL - T.



VENTAJAS DEL SISTEMA A LAZO ABIERTO: La perturbación en un sistema a lazo abierto pasa como por un tubo:

$$C(s) = T \cdot G_p + R \cdot G_p \quad R \xrightarrow{T} G_p \xrightarrow{C(s)}$$

En sistemas a lazo cerrado:

$$\frac{C_R}{R} = \frac{G_c \cdot G_p}{1 + G_p \cdot G_c \cdot H}$$

$$\frac{C_T}{T} = \frac{G_p}{1 + G_c \cdot G_p \cdot H}$$

$$C_R = \frac{1}{H} \cdot R$$

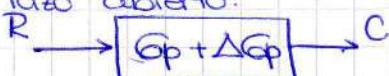
$$G_T = \frac{1}{G_c H} \cdot T$$

$$G_c \cdot G_p \gg 1$$

(Reducjo la respuesta al ruido  $G_c$  veces).

Si hay cambios en los valores de la planta:

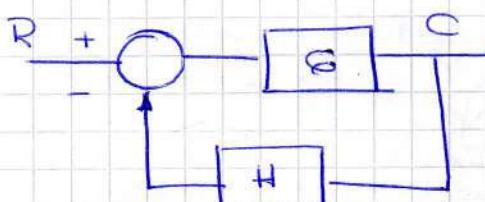
A lazo abierto:



$$C = \underbrace{G_p \cdot R}_{\text{Salida nominal.}} + \Delta G_p \cdot R$$

Salida nominal.

A lazo cerrado



$$C = \frac{G}{1 + G \cdot H} \cdot R$$

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \frac{R(1 + G \cdot H) - HGR}{(1 + G \cdot H)^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \frac{R}{1 + G \cdot H} \cdot \frac{1}{1 + G \cdot H}$$

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \frac{C}{G} \cdot \frac{1}{1 + G \cdot H}$$

$$\frac{\partial C}{C} = \frac{\partial G}{G} \cdot \frac{1}{1 + G \cdot H}$$

Se corrigen las variaciones pero hay un problema: la estabilidad

20. Marzo. 2013

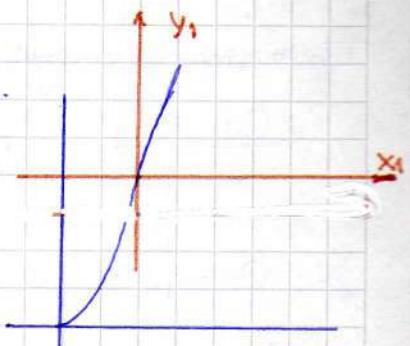
En la mayoría de los casos los sistemas son **NO LINEALES**. Se hace una **linealización** alrededor de los puntos de trabajo. Por ejemplo para linearizar  $f(x)$ : desarrollamos por Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_{x=x_0} (x-x_0)^3 + \dots$$

Hacemos una aproximación:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}}_K (x-x_0)$$

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{f_1} = K \underbrace{(x-x_0)}_{x_1} \quad \rightarrow \text{Tenemos linealidad.}$$



Ejemplo:  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = 2$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f'(x) = 2x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f(x_0) = 4 \\ f'(x_0) = 4 \end{array} \right.$$

$$f(x) = \underbrace{4}_{f(x_0)} + \underbrace{4}_{\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}} (x-2)$$

X	X REAL	X APPROX
1,8	3,24	3,2
2	4	4
2,2	4,84	4,8

La aproximación sería la recta tangente a  $x_0$ . En valores cercanos a  $x_0$  la aproximación es buena.

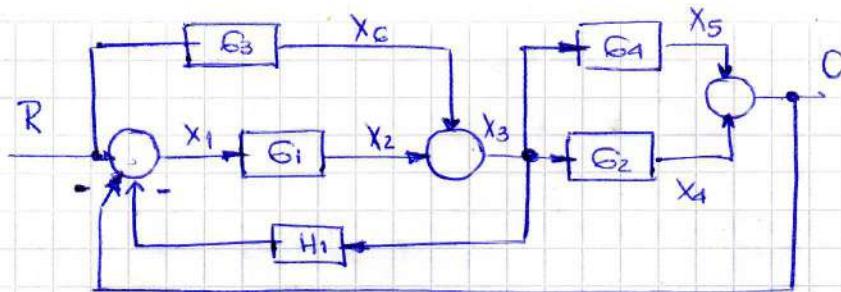
Movimos los ejes a los graficados en naranja.

Para una función de dos variables: lo que linealiza es el **plano tangente** al ~~punto~~ punto de nuestra superficie.

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = k_x (x-x_0) + k_y (y-y_0)$$

### Diagrama de flujo de señal - MASON

Los diagramas suelen ser complicados. Utilizando diagramas de flujo de señal se pueden simplificar.



Los diagramas de flujo de señal tienen nodos que representan las variables. La unión entre dos nodos se llama rama. La unión entre varias ramas se llama trayectoria. Las ramas son transnütancias (impedancias, ganancias, func. de transferencia)

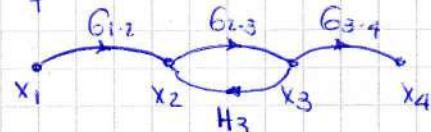
Nodos de entrada: a ellos SÓLO SALEN ramas, no llega ninguna.

Nodos de salida: a ellos sólo llegan ramas, no sale ninguna.

La trayectoria se considera SIN PASAR DOS VECES por el mismo nodo.

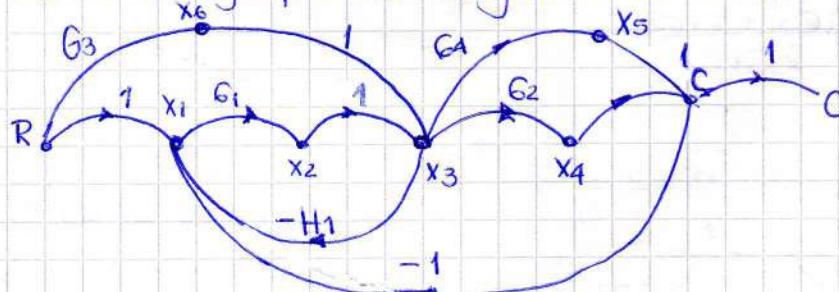
Una trayectoria es cerrada si se vuelve al nodo de partida sin pasar dos veces por el mismo nodo.

Los nodos que no son de entrada ni salida son intermedios



$$T_1 = G_{1-2} \cdot G_{2-3} \cdot G_{3-4} \quad (\text{Ganancia } 1-4 \text{ sería ésta})$$

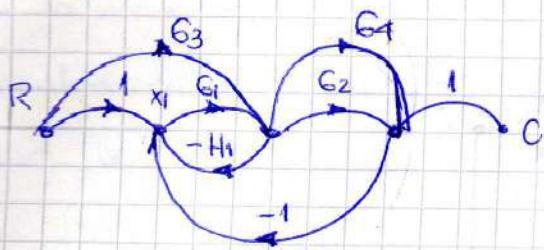
Resolvemos el ejemplo del diagrama de arriba.



→ Los 1 los ponemos para no perder variables. Si tenemos que volver al diagrama en bloques necesitamos

todas las variables. Cuando simplificamos perdemos variables en los puntos de suma.

Hacemos la simplificación.



$$\frac{C}{R} = \frac{\sum M_i \Delta_i}{\Delta}$$

MASON

$M_i$  = ganancias de las trayectorias directoras

$\Delta_i$  = determinante de la trayectoria  $i$ -ésima

$\Delta$  = determinante total.

$$M_1 = G_3 \cdot G_4$$

$$\Delta = 1 - \sum \text{Ganancia de lazos individuales}$$

$$M_2 = G_3 \cdot G_2$$

$$M_3 = G_1 \cdot G_2$$

$$M_4 = G_1 \cdot G_4$$

$\Delta = 1 - \sum \text{Ganancia de lazos individuales} + \sum \text{Producto de ganancias de lazos disjuntos tomados de 2 en 2} - \sum \text{Producto de ganancias de lazos disjuntos tomados de 3 en 3} + \dots$

$$L_1 = -G_1 H_1$$

$$L_2 = -G_1 \cdot G_2$$

$$L_3 = -G_1 \cdot G_4$$

No tienen nodos comunes.

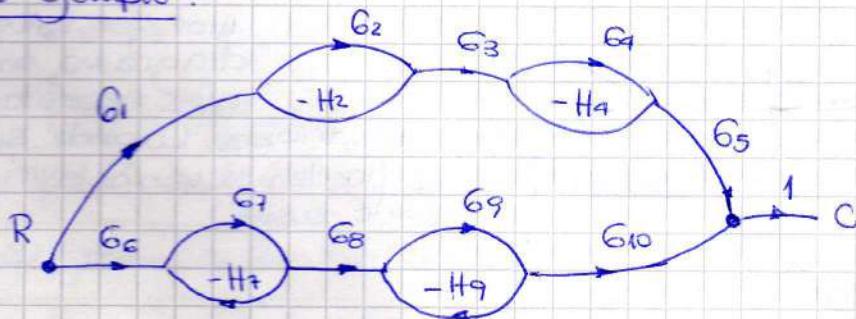
$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 + \sum \dots$$

$$1 + G_1 H_1 + G_1 G_2 + G_1 G_4$$

$\Delta_i$  = parte de  $\Delta$  que corresponde a cada trayectoria (anulando los lazos que comparten nodo con la misma).

$$\frac{C}{R} = \frac{G_3 G_4 + G_3 G_2 + G_1 G_2 + G_1 G_4}{1 + G_1 H_1 + G_1 G_2 + G_1 G_4}$$

Otro ejemplo:



$$M_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$M_2 = G_6 G_7 G_8 G_9 G_{10}$$

$$L_2 = -G_2 H_2$$

$$L_4 = -G_4 H_4$$

$$L_7 = -G_7 H_7$$

$$L_9 = -G_9 H_9$$

$$\Delta = 1 - L_2 - L_4 - L_7 - L_9 + L_2 L_4 + L_2 L_9 + L_2 L_7 + L_4 L_9 + L_4 L_7 + L_7 L_9 - L_2 L_4 L_7$$

$$- L_2 L_4 L_9 - L_4 L_7 L_9 - L_2 L_7 L_9 + L_2 L_4 L_7 L_9$$

$$\Delta_1 = 1 - L_7 - L_9 + L_7 L_9$$

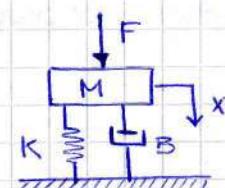
$$\Delta_2 = 1 - L_2 - L_4 + L_2 L_4$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\Delta_1 M_1 + \Delta_2 M_2}{\Delta}$$

(Si quiero conocer la relación entre R y algún nodo que no es el de salida saco una linea del nodo y lo tomo como salida).

### MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS

Planteamos un sistema elemental de segundo orden.



M → masa  
F → fuerza  
k → resorte  
B → amortiguador.

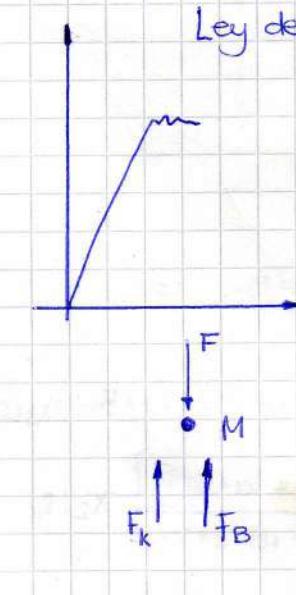
La masa sólo puede moverse en dirección x y las masas del resorte y el amortiguador se pueden despreciar. → Hacemos un diagrama de cuerpo libre.  
La fuerza es proporcional a la distancia → fuerza del resorte.

La fuerza del amortiguador es proporcional a la diferencia de velocidad de los extremos.

Ley de Hook (resorte)

$$F_k = kx (x - x_0)$$

$$F_B = B(\dot{x} - \dot{x}_0)$$



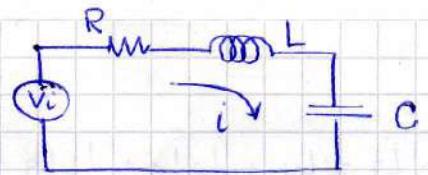
Este sistema sería representado por una ecuación de 2º orden porque hay dos elementos que almacenan energía (masa → cinética y resorte → potencial)

$$\sum F = M \ddot{x}$$

$$F - F_k - F_B = M \ddot{x}$$

$$F = M \ddot{x} + B \dot{x} + kx$$

$$V_i = L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q$$

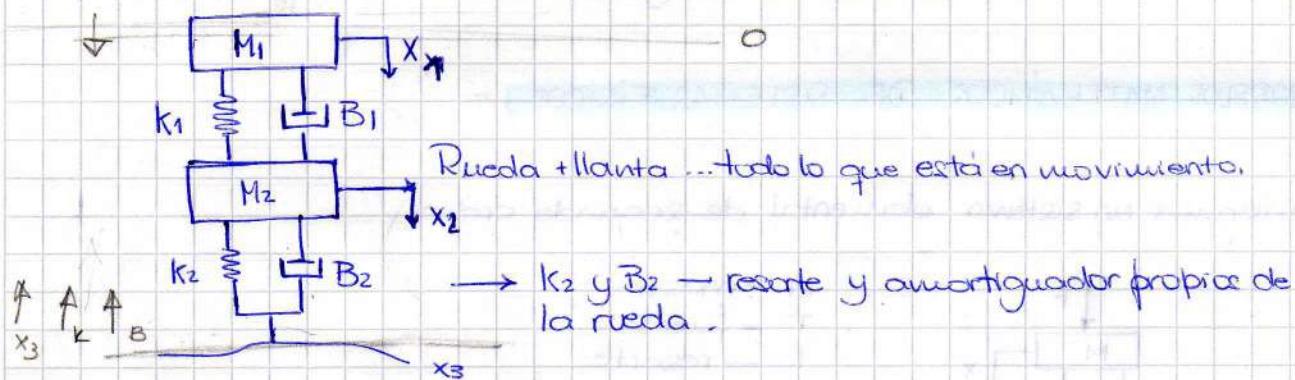


$$V_i = RI + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt$$

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$V_i = L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

### Ejercicio



$$\frac{x_1}{x_3} = ?$$

$$F_1 = m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\frac{x_2}{x_3} = ?$$

$$F_2 = m_2 \ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_3) + B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

$$F_1(s) = m_1 s^2 X_1(s) + k_1 [X_1(s) - X_2(s)] + B_1 [s X_1(s) - s X_2(s)]$$

$$F_2(s) = m_2 s^2 X_2(s) + k_1 [X_2(s) - X_1(s)] + B_1 [s X_2(s) - s X_1(s)] + k_2 [X_2(s) - X_3(s)] + B_2 [s X_2(s) - s X_3(s)]$$

$$F_1(s) = m_1 s^2 X_1(s) + k_1 X_1(s) + B_1 s X_1(s) - k_1 X_2(s) - B_1 s X_2(s)$$

$$F_1(s) + (k_1 + B_1 s) X_2(s) = (m_1 s^2 + B_1 s + k_1) X_1(s)$$

$$X_1(s) = \frac{F_1(s) + (k_1 + B_1 s) X_2(s)}{(m_1 s^2 + B_1 s + k_1)} \quad (1)$$

$$F_2(s) = [m_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + k_1 + k_2] X_2(s) - (B_1 s + k_1) X_1(s) - (k_2 + B_2 s) X_3(s)$$

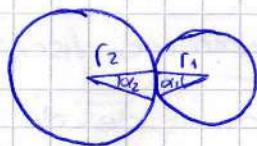
$$F_2(s) = [m_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + k_1 + k_2] X_2(s) - \frac{(B_1 s + k_1)[F_1(s) + (k_1 + B_1 s)]}{(m_1 s^2 + B_1 s + k_1)} X_2(s) - (k_2 + B_2 s) X_3(s)$$

$$F_2(s) + (k_2 + B_2 s) X_3(s) = \left\{ [m_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + k_1 + k_2] - (B_1 s + k_1) \frac{[F_1(s) + k_1 + B_1 s]}{m_1 s^2 + B_1 s + k_1} \right\} X_2(s)$$

## Modelos matemáticos en rotación

27.03.2013

Vemos cómo transmitimos una fuerza con sistemas de rotación



$$S_1 = \Theta_1 r_1 = \Theta_2 r_2$$

$$F_2 = F_1 = \frac{T_2}{r_2} = \frac{T_1}{r_1}$$

$$T_2 = \frac{r_2}{r_1} T_1$$

↓  
Relación de engranajes,  
radios o dientes puede  
ser.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

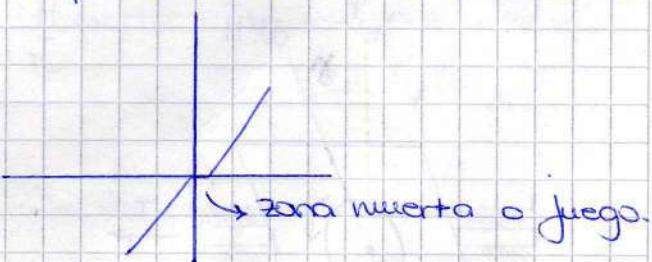
$$\Theta_2 = \frac{f_1}{f_3} \cdot \Theta_1$$

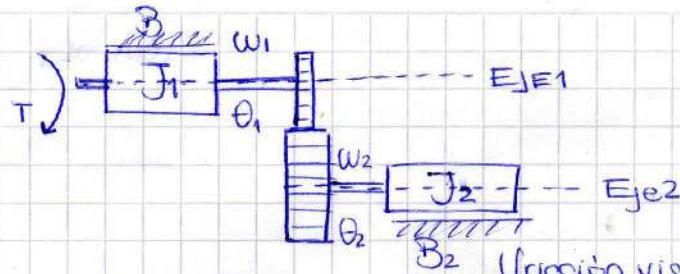
$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 = \frac{r_1}{r_3} \omega_1$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{n_2}{n_1} = n$$

(Si se trata de un engranaje,  $n_2/n_1$  es la relación entre los dientes si tienen el mismo paso.)

Supongamos que tenemos un tren de engranajes que no tiene fredo (o zona muerta) entre los dientes de uno y otro engranajes. La zona muerta se elimina con una oscilación de alta frecuencia y pequeña amplitud o con el mecanismo de los relojes.





A medida que la cupla va aumentando por los engranajes, los ejes deben tener mayor radio para soportar la torsión.

Reflejamos hacia el eje 1:

$$T = J_1 \ddot{\theta}_1 + B_1 \dot{\theta}_1 + T_L$$

$$n T_L = J_2 \ddot{\theta}_2 + B_2 \dot{\theta}_2 = J_2 \ddot{\theta}_2 + B_2 \ddot{\theta}_2$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{n} ; \quad \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1}{n}$$

$$T_L = J_2 \frac{\ddot{\theta}_1}{n^2} + B_2 \frac{\ddot{\theta}_1}{n^2}$$

$$T = \left( J_1 + \frac{J_2}{n^2} \right) \ddot{\theta}_1 + \left( B_1 + \frac{B_2}{n^2} \right) \dot{\theta}_1$$

la fricción

Entonces el momento de inercia y el ~~momento~~ viscoso lo veremos  $n^2$  veces más chico. Si fuera que miráramos desde el otro lado, es decir que queremos reflejar hacia el eje 2, veremos  $J_1$  y  $B_1$   $n^2$  veces más grande.

~~Kappa~~ ~~rotacion~~  $\omega$  y  $\theta$  cuando reflejamos al Eje 1 ~~se~~ se verán  $n$  veces más chicas. Acá estamos considerando que  $J_1$  es el momento de inercia de todo el eje 1 y  $J_2$  el de todo el eje 2.

$$\dot{\phi}$$

$$\vec{\omega} \vec{H}$$

$\vec{H}$ : momento cinético

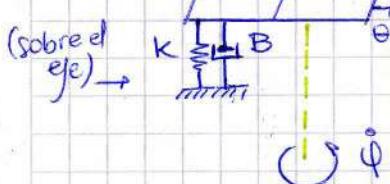
$J_r$ : momento de inercia del rotor

$$T = \vec{H} \wedge \vec{\dot{\theta}} = H \dot{\phi} \cdot \sin \gamma$$

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$T_0 = H \dot{\phi}$$

Nos movemos alrededor de  $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$  que es el ángulo para que esté nivelado el plano



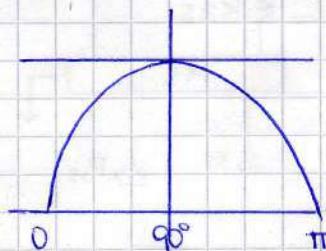
Linearizamos

$$\frac{dT}{d\gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_0} H \dot{\phi} \cos \gamma = 0$$

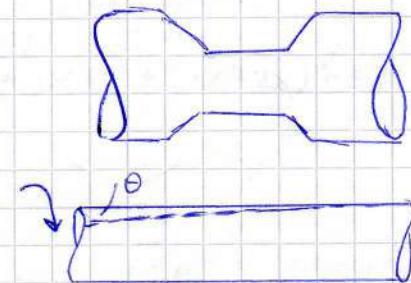
$$T = T_0 + \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)$$

$$T = T_0$$

Aproximamos la función seno por una recta horizontal cuando es tanos a  $90^\circ$



$$T = H\dot{\varphi} = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta$$



$$H\dot{\varphi} = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta \quad CI = 0$$

$$H\dot{\varphi}(s) = (Js^2 + Bs + K)\Theta(s)$$

$$\frac{\Theta(s)}{\dot{\varphi}(s)} = \frac{H}{Js^2 + Bs + K}$$

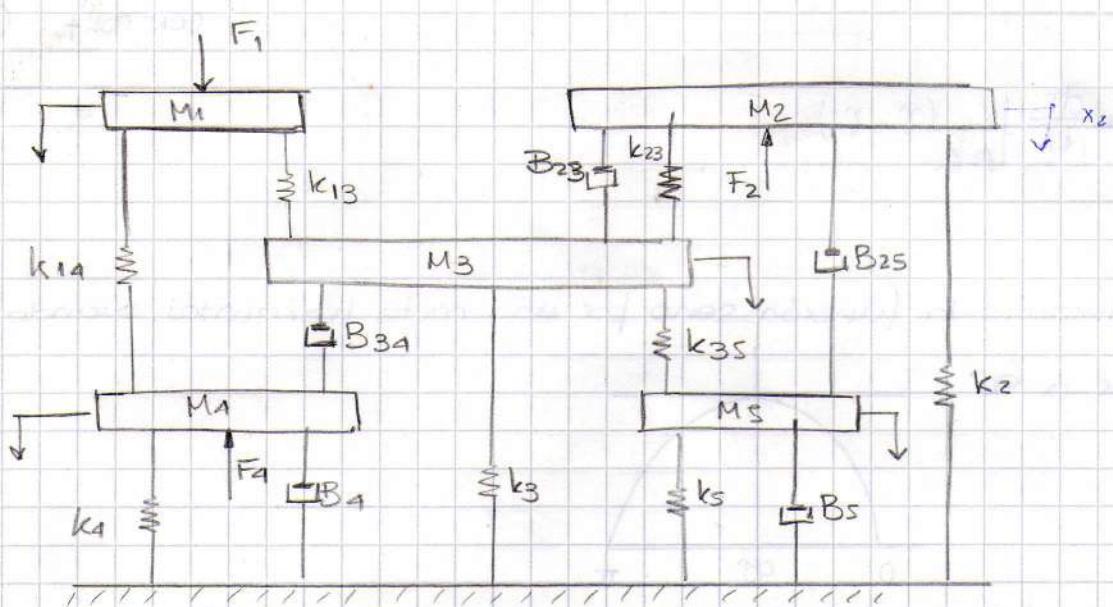
$$\frac{\Theta(s)}{\dot{\varphi}(s)} = \frac{H/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}}$$

$\dot{\varphi}$  es la velocidad de entrada  
y cuando transformo, transformo velocidad, por eso  
la multiplico por s.  $\dot{\varphi}$  es simplemente el nombre.

El que soporta toda esa culpa es el resorte

Determinaremos para esto entre qué límites de ángulo se mueve, qué grados de libertad se anulan.



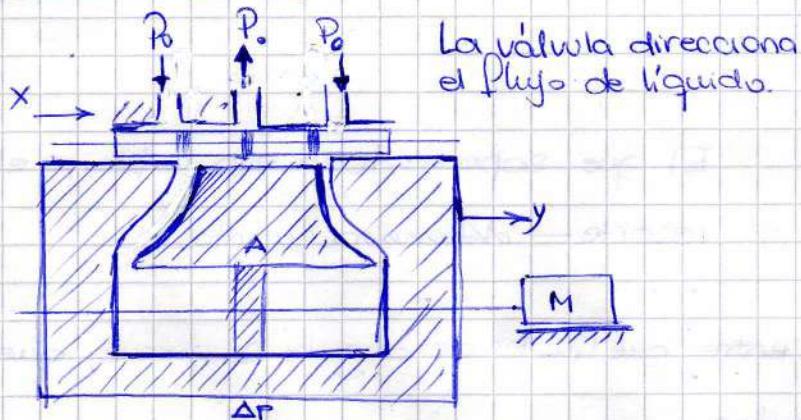


$$F_1 = M_1 \ddot{x}_1 + k_{14} (x_1 - x_4) + k_{13} (x_1 - x_3) \quad (\text{Para } M_1)$$

$$0 = k_{13} (x_3 - x_1) + B_{23} (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_{23} (x_3 - x_2) + B_{34} (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + k_3 x_3 + k_{35} (x_3 - x_5) + M_3 \ddot{x}_3$$

$$-F_4 = M_4 \ddot{x}_4 + k_{14} (x_4 - x_1) + k_{13} (x_4 - x_3) + B_{34} (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + B_4 \ddot{x}_4$$

### Motor Hidráulico

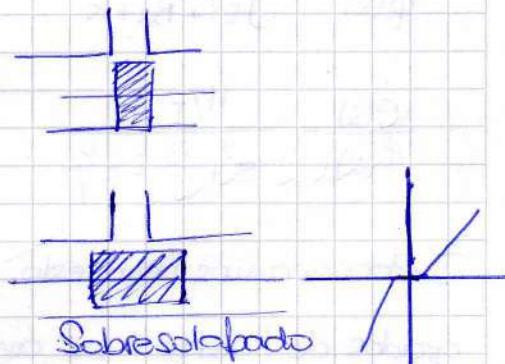


03 Abril. 2013

Suponemos que apenas se mueve el pistón

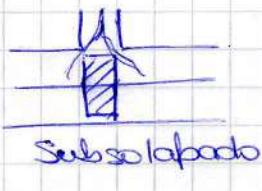
comienza a pasar el líquido, entonces la curva pasa por cero.

(sin zona muerta).



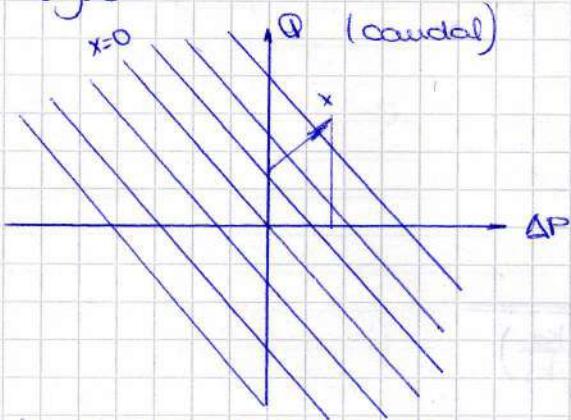
Sobresolapado

(zona muerta)



Subsolapado

Linealizado, el motor hidráulico tiene una serie de curvas constante que sigue:



Trabajamos con  $Q=0$ ,  $\Delta P=0$  y  $x=0$ : no hay diferencia de caudal, ni desplazamiento ni de presión. Ese va a ser nuestro punto de equilibrio.

$$Q_0=0, x_0=0, \Delta P_0=0$$

$$Q(x, \Delta P) = Q_0(x_0, \Delta P_0) + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{\emptyset} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ \Delta P=\Delta P_0}} (x - x_0) + \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial \Delta P}}_{\Delta P=\Delta P_0} \Big|_{x=x_0} (\Delta P - \Delta P_0)$$

$$Q(x, \Delta P) = k_x \cdot x - k_{\Delta P} \Delta P$$

cuando incremento  $\Delta P$  impido que el caudal avance.

Para la validez del modelo:

Las condiciones de nuestro sistema son: que no haya flujo turbulento, que sea laminar. Si no hay desprendimiento de la capa límite no hay turbulencia.



El líquido debe ser incompresible → se mide con el módulo de Bulk, lo consideramos  $\infty$ .

Además todo el conexionado es bien robusto de manera que las mangas no puedan cambiar su sección.

$$Q = A \cdot f \frac{dy}{dt} = k_x \cdot x - k_{\Delta P} \Delta P$$

$A$  = área  
 $f$  = densidad

$$\Delta P = (k_x \cdot x - A \cdot f \cdot y) \cdot \frac{1}{k_{\Delta P}}$$

$$F = A \cdot \Delta P = M \ddot{y} + B \dot{y} = \frac{A k_x}{k_{\Delta P}} \cdot x - \frac{A^2 f \cdot y}{k_{\Delta P}}$$

$$\rightarrow x \cdot \frac{A \cdot k_x}{K_{AP}} = M \ddot{y} + \left( B + \frac{A^2 P}{K_{AP}} \right) \dot{y}$$

$$x = \underbrace{\frac{M K_{AP}}{A \cdot k_x} \ddot{y}}_{k_1} + \underbrace{\left( \frac{B K_{AP}}{A \cdot k_x} + \frac{A P}{k_x} \right) \dot{y}}_{k_2}$$

$$X(s) = (k_1 s^2 + k_2 s) Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(k_1 s^2 + k_2 s)} = \frac{\frac{1}{k_1}}{s(s + \frac{k_2}{k_1})}$$

Si la entrada es un impulso  $X(s) = \delta(s) = 1$

$$Y(s) = \frac{N_1}{s} + \frac{N_2}{s + \frac{k_2}{k_1}}$$

sistema de primer orden.

integramos.

$$y(t) = N_1 + N_2 e^{-\frac{k_2}{k_1} t}$$

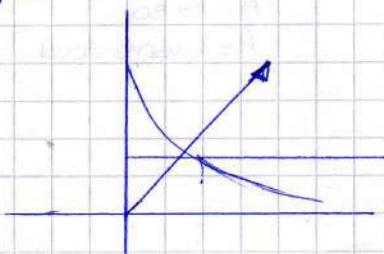
Si integrarmos un escalón tenemos una rampa, pasado lo transitorio el sistema se comporta como un integrador. Hay que tener en cuenta que no se sobrepasan ciertos valores, no podemos dejar que la rampa crezca indefinidamente.

Suponemos que le ponemos un escalón: sería mover la válvula y dejamos pasar el caudal.

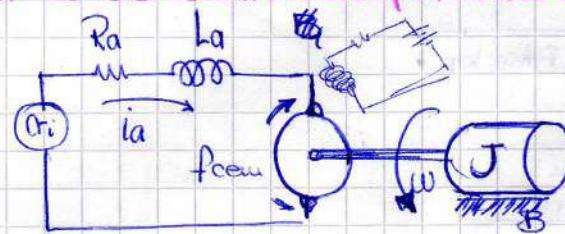
$$Y(s) = \frac{k_3}{s(s + k_1)} \cdot X(s)$$

$$Y(s) = \frac{k_3}{s^2(s + k_1)} = \frac{N_1}{s^2} + \frac{N_2}{s} + \frac{N_3}{(s + k_1)}$$

$$y(t) = N_1 t + N_2 + N_3 e^{-k_1 t}$$



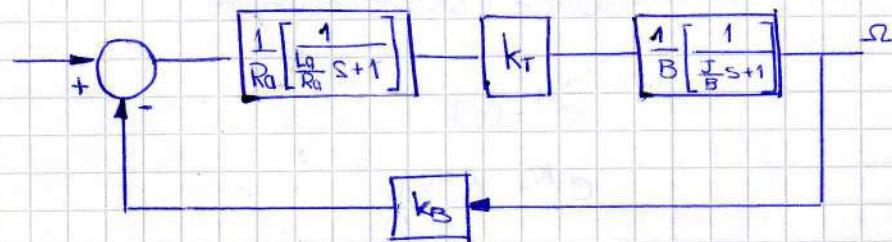
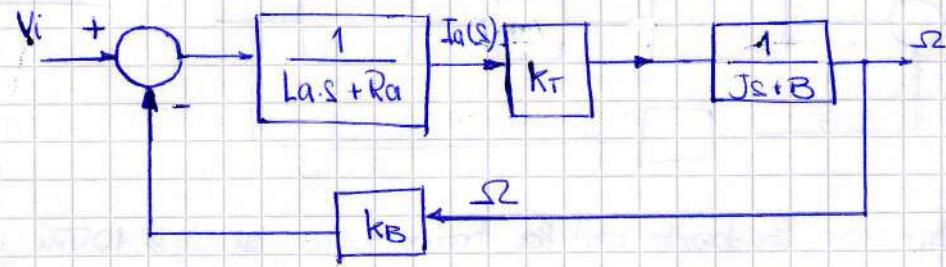
Motor de CC controlado por inducido.



El momento de inercia  $J$  es de la carga + el motor.

$B$  es la fricción viscosa.

$$\begin{aligned} \text{M.Ri} &= R_a \cdot i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k_B \cdot w \\ T &= k_T \cdot i_a \quad (\text{Torque}) \\ T &= k_T \cdot i_a = J \ddot{w} + B w \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} V_i(s) &= (R_a + L_a s) I_a(s) + k_B s \Omega(s) \\ k_T \cdot I_a(s) &= (J s + B) \Omega(s) \end{aligned} \right\}$$



Desde el punto de vista eléctrico la pareja se establece muy rápidamente, en el orden de los ms, según la constante de tiempo  $L_a/R_a$ . Esto significa que al darle tensión la corriente se establece inmediatamente. Normalmente la constante de tiempo eléctrica es mucho más chica que la mecánica.

$$T_e = \frac{L_a}{R_a}$$

$$T_m = \frac{J}{B}$$

$$\text{Si } T_e \ll \frac{1}{10} T_m \text{ podemos hacer } \frac{1}{R_a} \left[ \frac{1}{\frac{L_a}{R_a} s + 1} \right] \approx \frac{1}{R_a}$$

La corriente se establece rápido y hay una pareja, pero la velocidad no se establece con la misma rapidez si la carga inercial es grande.

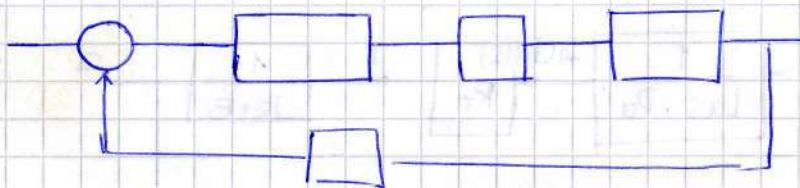
$$V_i(s) = \left[ (R_a + L_a s) \left( \frac{J_s + B}{k_T} \right) + k_B \right] \Omega(s)$$

$$\frac{\Omega(s)}{V_i(s)} = \frac{k_T}{L_a J s^2 + (R_a J + L_a B) s + R_a B k_B k_T}$$

$$\frac{V_i}{\Omega} = \frac{k_T / L_a J}{s^2 + \underbrace{\left( \frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J} \right) s}_{2s\omega_m} + \underbrace{\frac{R_a B + k_B k_T}{L_a J}}_{\omega_m^2}}$$

Se puede modelar un sistema de 2<sup>do</sup> orden como uno de 1<sup>o</sup> eliminando la cté de tiempo más rápida, pero hay que tenerla en cuenta para el diseño. (La corriente se establece instantáneamente, pero podemos el comportamiento transitorio)

10.04.2013



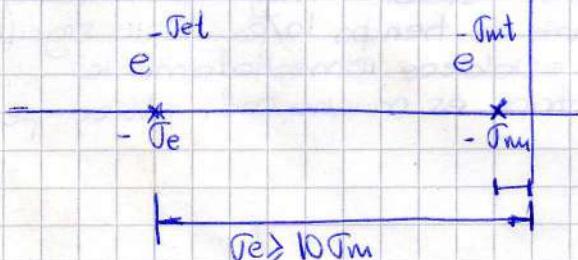
Podemos despreciar la parte del ~~I~~ transitorio si  $T_e \geq 10T_m$  y considerar que la  $I$  se establece instantáneamente

$$e^{-1} = 0,36$$

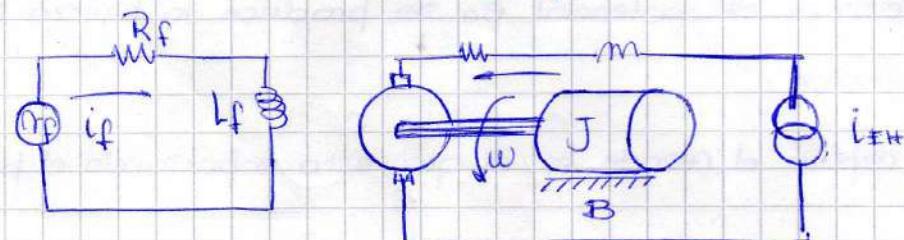
$$e^{-10} = 4,5 \times 10^{-5}$$

Quedaría un solo integrador, un sistema de 1<sup>er</sup> orden realimentado.

En el sist. internacional  $B$  y  $k$  son numéricamente iguales.



## Motor de CC. controlado por campo

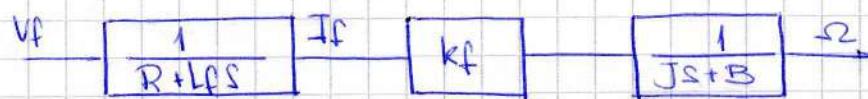


$$T = k_f i_f = J\dot{w} + Bw \quad \left. \begin{array}{l} k_f \\ R_f \\ L_f \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} k_f I_f(s) = (J_s + B) \Omega(s) \\ V_f(s) = (R + L_f s) I_f(s) \end{array} \right\}$$

$$R_f = R_{if} + L \frac{di_f}{dt} \quad \left. \begin{array}{l} k_f \\ R + L_f s \end{array} \right\} \quad k_f = \frac{V_f(s)}{R + L_f s} = (J_s + B) \Omega(s)$$

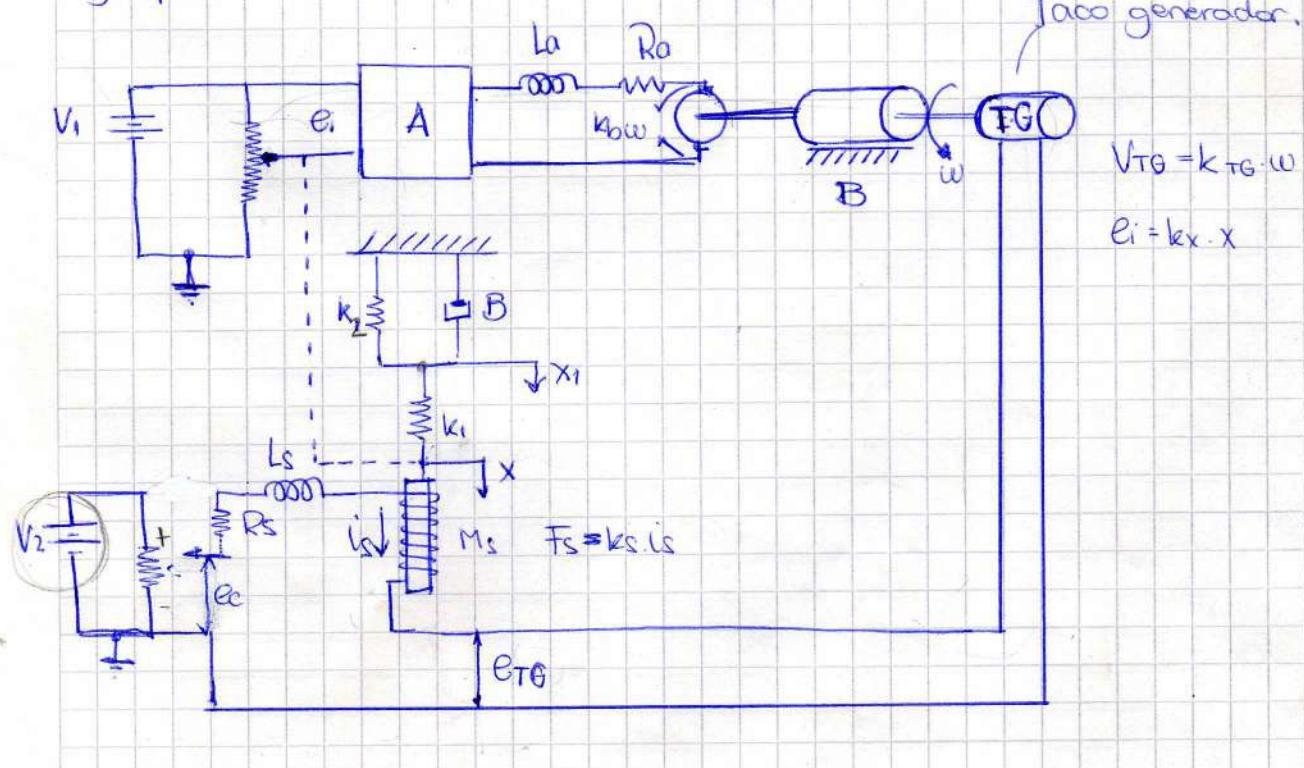
$$\frac{\Omega(s)}{V_f(s)} = \frac{k_f}{(R + L_f s)(J_s + B)}$$

Por lo general las atas eléctricas son parecidas a las mecánicas y hay que ver si tienen un transitorio suficientemente pequeño respecto al mecánico.



Motor a lazo abierto.

Ejemplo. → AGREGAR A LA CARPETA DE PRÁCTICOS



No está en funcionamiento cuando el primer cursor está arriba ( $e_1=0$ ),  
la masa (el solenoide) está lo más arriba que puede.

Cuando hay diferencia de potencial  $\Delta V$  se produce la fuerza sobre  
el pistón que se mueve.

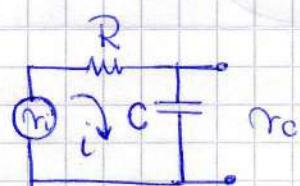
Cuando está en reposo el resorte es el que está soportando el peso.

## ANÁLISIS EN EL TIEMPO - RESPUESTA TRANSITORIA

*\*Sistemas de primer orden*      *Sistemas de primer orden*



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$



$$r_i = R_i + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad CI = \emptyset$$

$$r_{rc} = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

$$\left. \begin{array}{l} V_i(s) = \left( R + \frac{1}{sC} \right) I(s) \\ V_o(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s) \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{sC} I(s)}{\left( Rcs + 1 \right) I(s)} = \frac{1}{Rcs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

Si ponemos un impulso a la entrada:  $R(s) = 1$

$$V_C = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right) + r_{rc}(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

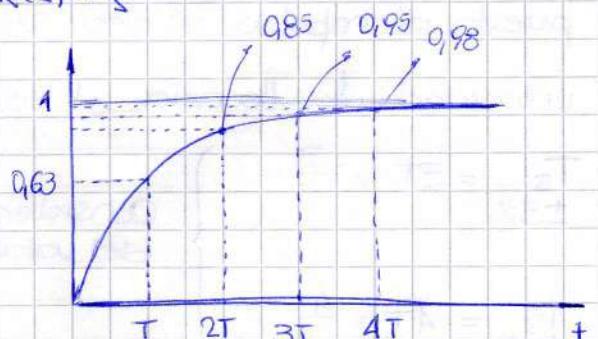
Cuanto más lejos del origen esté el polo más rápida es la respuesta.

Con una entrada escalón  $\Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

$$V_C = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\left( s + \frac{1}{T} \right)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1}$$

$$A_1 = 1 \quad A_2 = -1$$

$$V_C = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow r_{rc}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$



Con una entrada rampa  $\Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$V_C = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\left( s + \frac{1}{T} \right)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s+1}$$

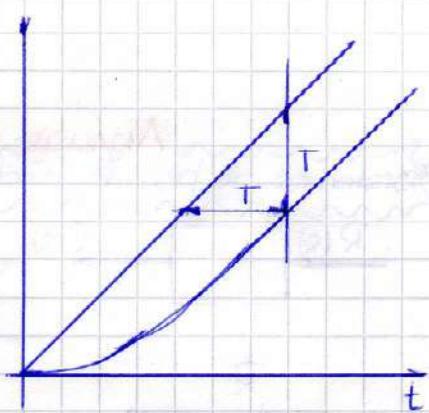
$$A_1 = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[ s^2 \frac{1}{T} \frac{1}{\left( s + \frac{1}{T} \right)} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = -\frac{1}{T} \frac{1}{\left( \frac{1}{T} \right)^2} = -T$$

$$A_3 = \lim_{S \rightarrow -\frac{1}{T}} \left( S + \frac{1}{T} \right) \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{S + \frac{1}{T}} \cdot \frac{1}{S^2} = T$$

$$V_C = \frac{1}{S^2} - \frac{1}{S} + \frac{T}{S + \frac{1}{T}} \Rightarrow v_c(t) = t - T + Te^{-t/T}$$

Cuando  $T \rightarrow \infty$  tengo esa diferencia entre la rampa unitaria y la salida.



Para que un sistema sea lineal se cumple que

$$\begin{aligned} x_1 &\xrightarrow{\text{SLIT}} y_1 \\ \dot{x}_1 &\xrightarrow{\text{SLIT}} \dot{y}_1 \\ \int_0^t x_1 dt &\xrightarrow{\text{SLIT}} \int_0^t y_1 dt. \end{aligned}$$

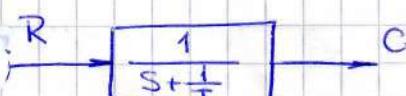
Como la respuesta del impulso es igual a la derivada de la respuesta al escalón, cada punto de la primera indica la velocidad de crecimiento de cada punto de la segunda. Se puede encontrar el valor de la constante de tiempo de la respuesta al escalón considerando el valor de su derivada para  $t=0$ , que es  $\frac{1}{T}$  según la respuesta al impulso. Es decir si ~~sigue~~ la señal siguiera creciendo con velocidad  $\frac{1}{T}$  llegaría al valor final en una constante de tiempo

$$T_S = 3T = \frac{3}{5}$$

$$T_S = 4T = \frac{4}{5}$$

} Consideraremos estos índices cuando llega cerca del valor estacionario.

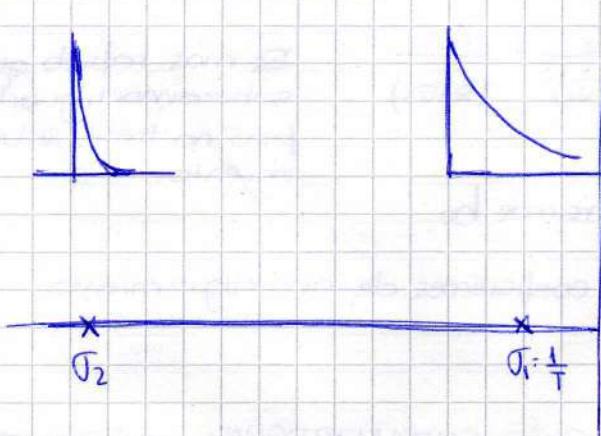
$\rightarrow x$



$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{sT}} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{sT+1}{sT}} = \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

Un sistema de primer orden es un integrador realimentado. Inicialmente comienza a funcionar como un integrador, por eso en respuesta al escalón en  $t=0$  comienza a dar una rampa. Luego la realimentación hace que cambie la pendiente, porque no lo deja seguir creciendo.

Si tuvieran otro sistema de primer orden acoplado con un polo más alejado del origen, por ende con una respuesta más rápida, el polo dominante será el del primero y será preponderante la respuesta ya que la otra (del segundo sistema) desaparece más rápidamente (la de régimen transitorio)



### Sistemas de segundo orden

17. Abril. 2013.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + bs + c}$$

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

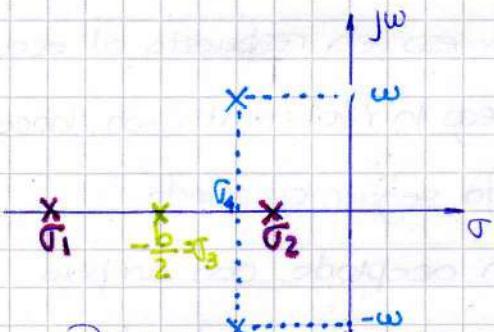
- $b^2 > 4c \rightarrow$  Raíces Reales diferentes
- $b^2 = 4c \rightarrow$  Raíces Reales iguales
- $b^2 < 4c \rightarrow$  Raíces complejas conjugadas

• Raíces reales y distintas: CASO SOBREAMORTIGUADO

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{(s+\zeta_1)(s+\zeta_2)} \quad \text{Si } R = \frac{1}{s}, \quad C(s) = \frac{K}{s(s+\zeta_1)(s+\zeta_2)}$$

$$C(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\zeta_1} + \frac{A_3}{s+\zeta_2}$$

$$C(t) = A_1 + A_2 e^{-\zeta_1 t} + A_3 e^{-\zeta_2 t}$$



• Raíces reales iguales: CASO CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO.

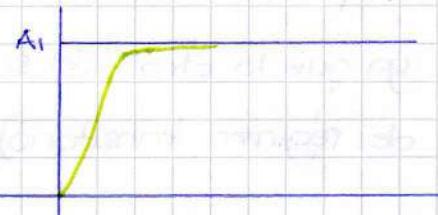
$$\zeta_3 = -\frac{b}{2}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{(s+\zeta_3)^2} \quad ; \quad R = \frac{1}{s} \quad (\text{Si ponemos un estabilón})$$

$$C(s) = \frac{K}{(s+\zeta_3)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+\zeta_3)^2} + \frac{A_3}{s+\zeta_3}$$

Coeff. amort.  $b^2 = 4c \Rightarrow b = \sqrt{4c} \rightarrow$  lo llamamos  $b_0$ .  
 $(b)$

$\frac{b}{b_0} = \xi \rightarrow$  Relación de coeficientes de amortiguamiento.



Es más rápido que el sobreamortiguado pero no tiene sobreoscilamiento.

• Raíces complejas conjugadas: CASO SUBAMORTIGUADO - OSCILATORIO.

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2} j$$

$$s_{1,2} = \zeta \pm j\omega$$

Para el caso de  $b=0 \rightarrow$  un sistema de segundo orden sin el término de primera derivada, tengo un oscilador.

$$\omega = \sqrt{c} = \omega_n \quad (\text{pulsación natural})$$

El sistema no tiene amortiguamiento:  
 $(\ddot{y} + 3y = x) \rightarrow$  ejemplo



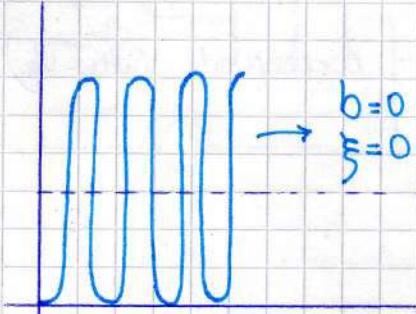
Si tengo un sistema con todos los términos y todos tienen el mismo signo el sistema es estable.

$$b_0 = 2\sqrt{C}$$

$$b = 2\sqrt{C} \xi$$

$$b = 2\xi \omega_n$$

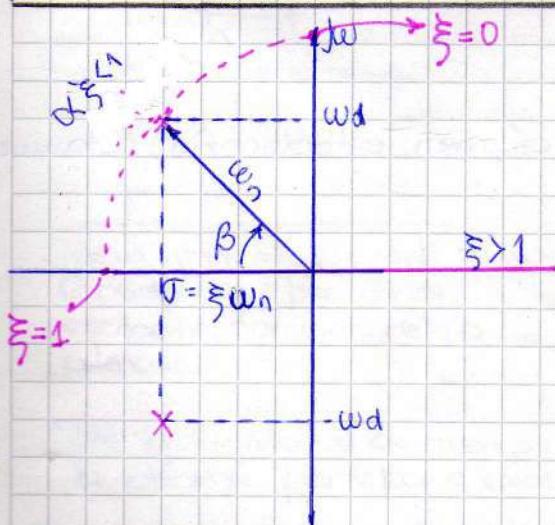
$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} ; K = R_n \cdot \omega_n^2$$



$$\frac{C}{R} = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta+j\omega)(s+\zeta-j\omega)}$$

AGREGAR ESTO A LA CARPETA DE PRÁCTICOS:  
Encontrar la solución temporal para entrada  $\frac{1}{s}$  (escalón) con  $\xi < 1$  para la siguiente función de transferencia

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$



$$\sigma = -\frac{b}{2} = -\frac{2\xi \omega_n}{2} = \xi \omega_n$$

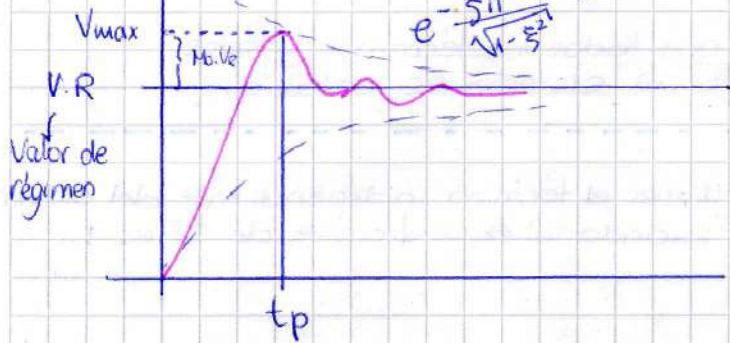
$$\omega = \frac{\sqrt{4C - b^2}}{2}$$

$$w_d = \frac{\sqrt{4\omega_n^2 - 4\xi^2\omega_n^2}}{2}$$

$$w_f = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$V = \sqrt{\xi^2 \omega_n^2 + \omega_n^2 - \xi^2 \omega_n^2} = \omega_n$$

$$\cos \beta = \xi$$



$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\frac{V_{max} - V_R}{V_R} = M_0$$

(Cuánto de  $V_R$  corresponde  $V_{max} - V_R$ )

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2 M_0}{\ln^2 M_0 + \pi^2}}$$

$$\frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow k \text{ lo obtengo del valor de régimen}$$

$$\xi^2 = \frac{\ln^2 M_0}{\ln^2 M_0 + \pi^2} \Rightarrow \xi^2 (\ln^2 M_0 + \pi^2) = \ln^2 M_0 \Rightarrow \xi^2 \ln^2 M_0 + \xi^2 \pi^2 = \ln^2 M_0$$

$$\ln^2 M_0 \left[ -\xi^2 + 1 \right] = \xi^2 \pi^2$$

$$\ln M_0 = \frac{\xi \pi}{1 - \xi^2} \Rightarrow M_0 = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

Cuando estamos en  $4^\circ C$  estamos en régimen estacionario, estamos dentro del  $\pm 2\%$ , o del  $\pm 5\%$  de  $T$ .

Si tengo 2 polos + alejados (otro sistema) tengo una resp. más rápida con igual  $\xi$ ? Creo que algo así.

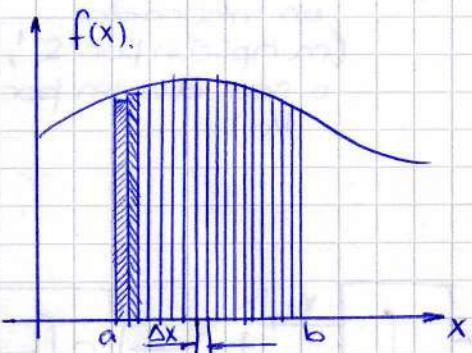
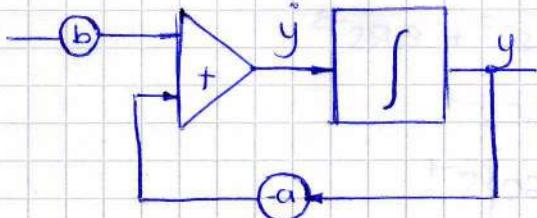
15. Mayo. 2013

## SIMULACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

$$\dot{y} + ay = bx$$

Una ecuación diferencial de orden  $n$  se puede resolver como  $n$  ecuaciones de orden 1.

Puedo hacer  $\dot{y} = bx - ay$



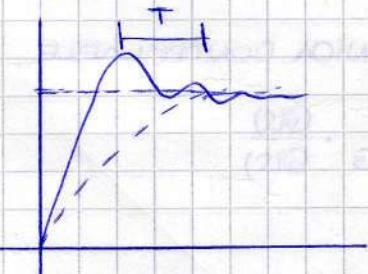
Puedo hacer

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{n=1}^N f(x_m) \Delta x = \bar{A}$$

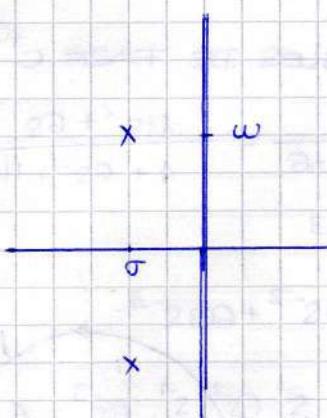
Si no hago una correcta elección de los límites de integración puedo obtener errores importantes.

Es importante conocer la constante de tiempo de los sistemas porque dan una buena idea de cuál debe ser el intervalo de integración.

Por ejemplo



Considerar el período de oscilación, constante de atenuación.



$$\sigma = \frac{1}{T}$$

$$f(t) = 1 - e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

De la constante de tiempo más pequeña y del menor período tomamos la décima parte para el intervalo de integración.

$$\Delta x < \frac{T_{\text{más pequeña}}}{10}$$

$$\Delta x < \frac{T_{\text{más pequeño}}}{10}$$

~~ejemplos~~

Por ejemplo, tomamos la siguiente función de transferencia, y la resolvemos:

$$\frac{C}{R} = \frac{11s+6}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{11s^{-2}+6s^{-3}}{1+6s^{-1}+11s^{-2}+6s^{-3}}$$

Cuando divido por  $s^3$  en Laplace estoy integrando 3 veces.

En las simulaciones no se usa derivador porque hace pasar el ruido y lo amplifica. (Considerar que la derivada da cuenta de la variación de señales, entonces el ruido pasa bárbaro)

## 1) MÉTODO DE PROGRAMACIÓN DIRECTA

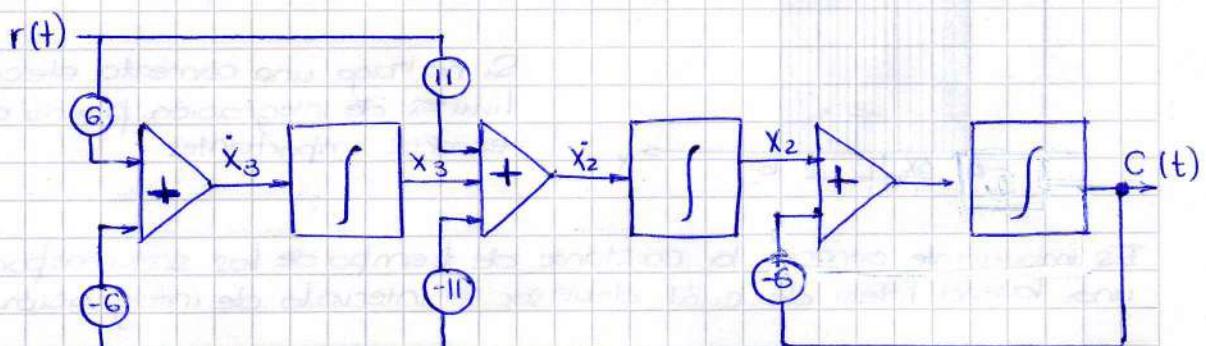
$$C + 6Cs^{-1} + 11Cs^{-2} + 6Cs^{-3} = 11Rs^{-2} + 6Rs^{-3}$$

$$C = (6R - 6C)s^{-3} + (11R - 11C)s^{-2} - 6Cs^{-1}$$

$$C = \left\{ \left[ (6R - 6C)s^{-1} + (11R - 11C) \right] s^{-1} - 6C \right\} s^{-1}$$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad\quad}^{x_3} \\ \overbrace{\quad\quad\quad}^{x_2} \\ \overbrace{\quad\quad\quad}^{x_1 (=C)} \end{array}$$

Son salidas de un integrador (multiplican por  $s^{-1}$ , o sea dividen por  $1/s$ )

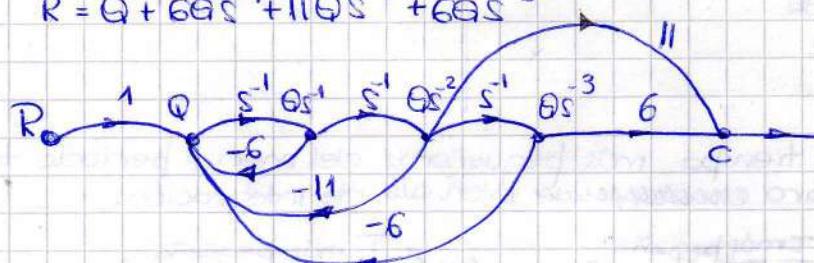


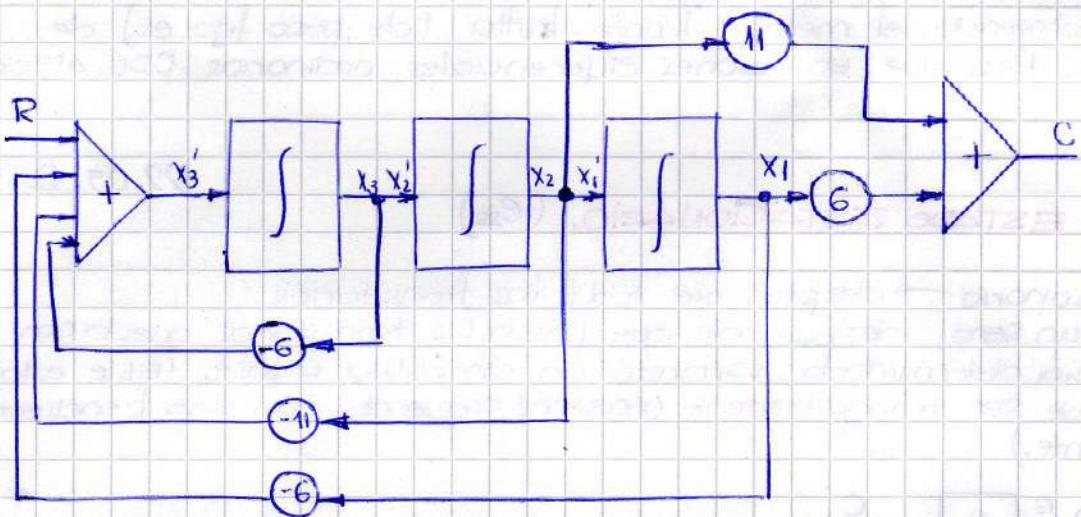
## 2) MÉTODO DE LAS VARIABLES DE FASE O FORMA CANÓNICA CONTROLABLE.

$$\frac{C}{R} = \frac{11s+6}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{11s^{-2}+6s^{-3}}{1+6s^{-1}+11s^{-2}+6s^{-3}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}$$

$$C = 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

$$R = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$





3)

$$\frac{C}{R} = \frac{11s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{11s + 6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+3)}$$

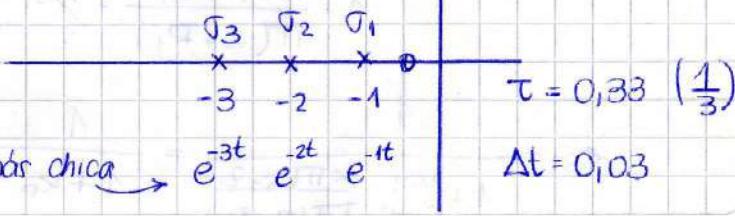
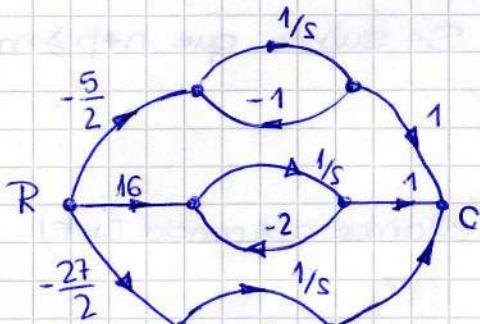
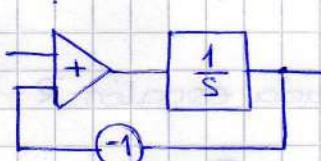
$$A_1 = -\frac{5}{2} \quad A_2 = 16 \quad A_3 = -\frac{27}{2}$$

$$C = \frac{-\frac{5}{2}}{s+1} R + \frac{16}{s+2} R + \frac{-\frac{27}{2}}{s+3} R$$

→ Habíamos dicho que un sistema de primer orden es un integrador realimentado.

Podemos hacer cada sistema así:

$$\frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1} \rightarrow$$



Hay algunos métodos que se llaman "de paso fijo" que usan siempre el mismo intervalo de integración. Otros son los métodos "de paso variable" que arrancan con un paso fijo y según cómo sea el cambio de pendiente, va tomando distintos intervalos de integración.

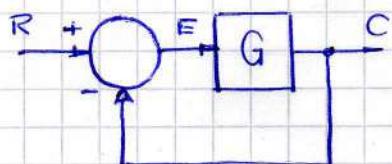
El profe recomienda el método Runge-Kutta (de paso fijo es) de cuarto orden. Resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias ODE 4<sup>to</sup> orden.

22.05.2013

### ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO. ( $e_{ss}$ )

Estado estacionario → después de todos los transitorios.

Por ejemplo un seno, después de que pasan los transitorios queda con una frecuencia determinada, variando en amplitud y fase. (Ej. e. estacionario puede ser tranquilamente una señal creciendo con una pendiente indefinidamente.)



$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1+G}$$

$$G = \frac{k \cdot \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^p (s + p_j)}$$

$\frac{1}{s}$  → Como señal es un escalón  
Como sistema es un integrador

#### TIPO DE SISTEMA.

- Si  $n=0$  → sistema tipo 0 (no hay integrador)
- Si  $n=1$  → sistema tipo 1
- Si  $n=2$  → sistema tipo 2

\* TIPO 0 (Entrada escalón  $R = \frac{1}{s}$ )

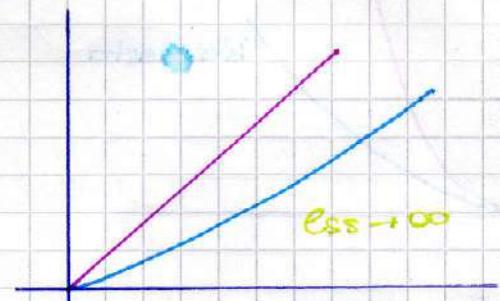
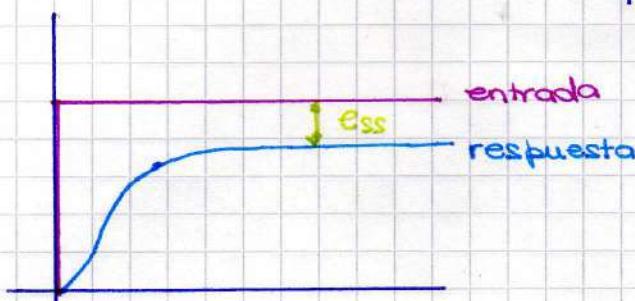
$$E = \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{\pi(s+p_j)}} \cdot R$$

Se supone que  $n+p \geq m$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{estamos aplicando T.V.F})$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k\pi(s+z_i)}{\pi(s+p_j)}} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

$k_p$ : Coeficiente de error estático de posición para una entrada escalón



Si como entrada pongo una rampa ( $\frac{1}{s^2}$ ) el error va a tender a  $\infty$  por lo que un sistema tipo 0 no puede seguir una rampa.

(El sistema trata de seguir la rampa, pero siempre con un error creciente). No tiene la velocidad necesaria para seguir la rampa ( $\alpha$ ). Puede seguir un cambio repentino en la entrada, con un  $e_{ss}$ .

(parábo

### \* TIPO 1

Si le pongo un escalón lo sigue sin error (si es estable el sistema)

$$E = \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{sT(s+p_j)}}$$

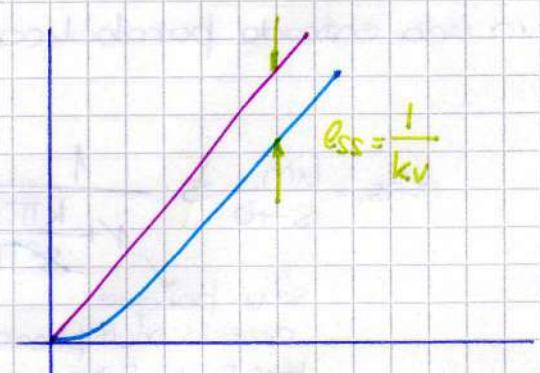
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{sT(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s}$$

Si pongo una rampa

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{sT(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k\pi(s+z_i)}{sT(s+p_j)}$$

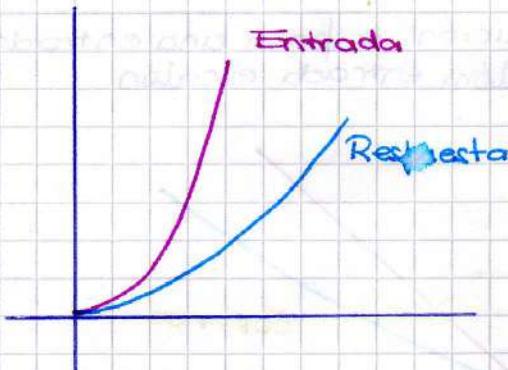
$$G(s)$$



$$e_{ss} = \frac{1}{k_v}$$

$k_v$ : coeficiente de error estático de velocidad para una entrada rampa.

Un sistema tipo 1 no puede seguir una entrada parabólica ya que trata de seguirla con un error creciente.



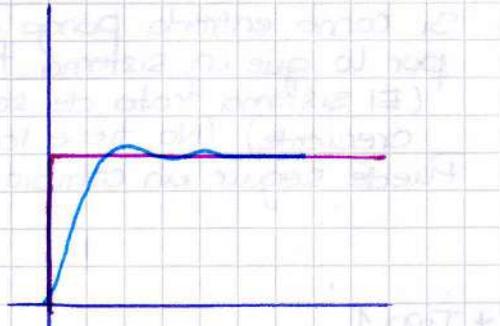
### \* TIPO 2

Para un escalón

$$F = \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}}$$

$$ess = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s}$$

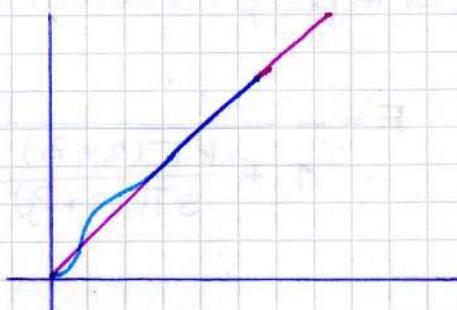
Lo sigue sin error



Para una entrada rampa.

$$ess = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s^2}$$

La sigue sin error

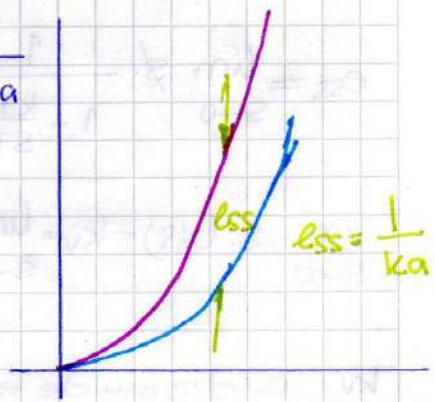


Para una entrada parabólica

$$ess = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{ka}$$

Se va porque  
quedó multiplicado  
por  $s$  y  $s \rightarrow 0$

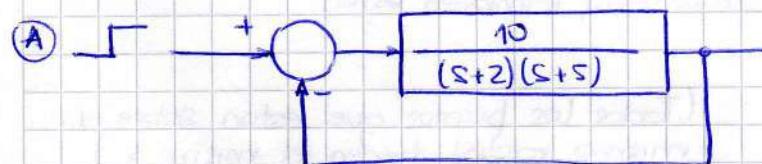
$$ka = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 b(s)$$



$k_a$  = error en estado estacionario de aceleración para una entrada parabólica.

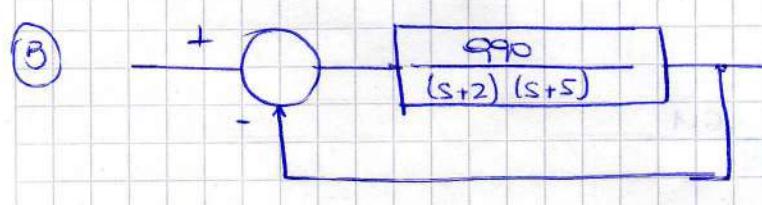
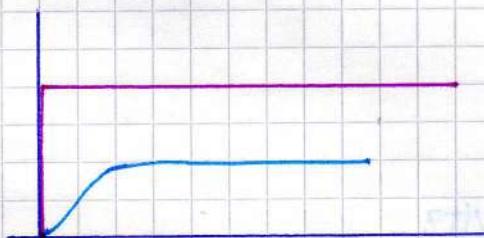
TIPO EN TRA DA	0	1	2
Escalón	$E_{ss} = \frac{1}{1+k_p}$ $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$	$E_{ss} = 0$	$E_{ss} = 0$
Rampa	$E_{ss} \rightarrow \infty$	$E_{ss} = \frac{1}{k_v}$ $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$	$E_{ss} = 0$
Parábola	$E_{ss} \rightarrow \infty$	$E_{ss} \rightarrow \infty$	$E_{ss} = \frac{1}{k_a}$ $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$

Ejemplo.



$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$$

$$E_{ss} = \frac{1}{1+k_p} = 0,5$$



$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 99$$

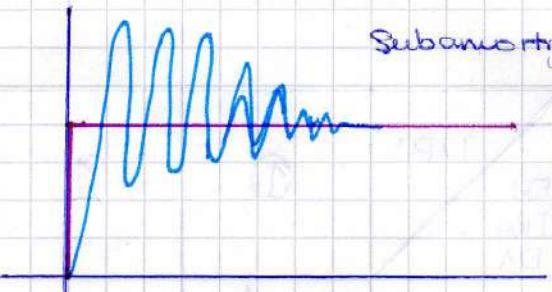
$$E_{ss} = \frac{1}{1+k_p} = 0,01$$

$$\textcircled{A} \quad \frac{\frac{10}{(s+2)(s+5)}}{1 + \frac{10}{(s+2)(s+5)}} = \frac{10}{s^2 + 7s + 20} = \frac{C}{R}$$

$\underbrace{s^2 + 7s + 20}_{2\zeta\omega_n \quad \omega_n^2}$

$$\omega_n = 31,6$$

$$\zeta = 0,11$$



Subanestriguado.

$$\textcircled{B} \quad \frac{990}{s^2 + 7s + 1000}$$

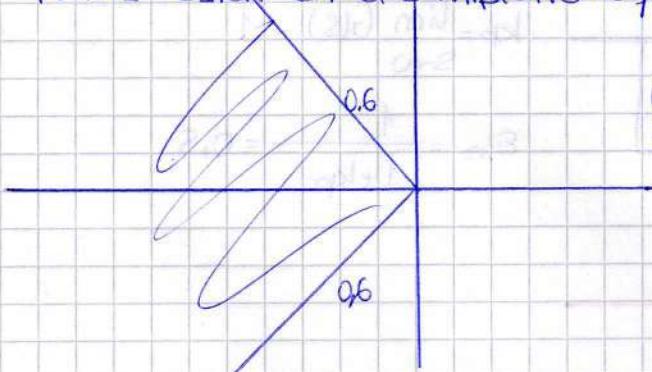
Podemos tener un ESS muy pequeño pero un transitorio completamente indeseable. En ese caso conviene poner un compensador del ESS pero tener un transitorio adecuado. No siempre sucede eso de ESS pequeño y transitorio horrible. Pasa principalmente si aumentamos mucho mucho la ganancia.

(No se si está bien lo que escribí de los compensadores).

### ESTABILIDAD ABSOLUTA Y RELATIVA.

① **Estabilidad absoluta:** todas las raíces del denominador están en el semiplano izquierdo. (Con raíces en el eje imaginario — oscilador).

② **Estabilidad relativa:** se considera para un  $\xi$  por debajo de 0,6. Dependiendo de cada problema en particular. No sólo se quiere que las raíces estén en el semiplano izquierdo, también esto)



(Todos los puntos que están sobre el mismo radial tienen el mismo  $\xi$ )

### CRITERIO DE ROUTH-HORWITZ

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

• Condición necesaria: polinomio completo en  $s$ .

• Condición suficiente.

$s^3$	1	11
$s^2$	6	
$s^1$	$\frac{6-6}{6}$	6
$s^0$	6	

$$\frac{6 \times 11 - 6 \times 1}{6}$$

## Caso particular 1

$$s^3 + 2s^2 + 20s + 40 = 0$$

$s^3$	1	20
$s^2$	2	40
$s^1$	$\Sigma$	
$s^0$	40	

Cuando los coeficientes de  $s^3$ ,  $s^2$  y  $s^1$  arriba y abajo de  $\Sigma$  tienen igual signo es porque hay raíces imaginarias puras.

Salen de la ecuación usando la fila de arriba de  $\Sigma$ .

$$2s^2 + 40 = 0$$

$$s^2 = -20 \rightarrow s = \pm \sqrt{20} \cdot j$$

## Caso particular 2. — Se anula toda una fila

$$s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 15s^2 + 5s + 25$$

$s^5$	1	3	5
$s^4$	5	15	25
$s^3$	20	30	
$s^2$			
$s^1$			
$s^0$			

COMPLETAR!!!

Tomo la ecuación superior a la fila que se anula.

$$\frac{d}{ds} [5s^4 + 15s^2 + 25]$$

$$20s^3 + 30s$$

y no puede seguir porque iba muy rápido

Lo unico en teoria II

29. Mayo. 2013

## LUGAR DE RAÍCES

En un sistema de control de lazo cerrado, por lo general podemos determinar o conocer la función de transferencia de los componentes.

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + G \cdot H}$$

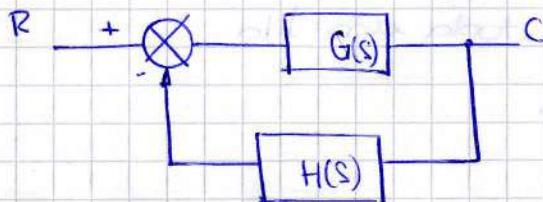
• Nos permite determinar si el sistema es estable y sus características.

$1 + G \cdot H = 0$  — Ecación característica.

Función de transferencia de lazo abierto  $G \cdot H$ .

$$G \cdot H = -1 \quad \begin{cases} \angle G \cdot H = \pm 180^\circ (2k+1) & \rightarrow \text{dónde está el lugar de raíces} \\ |G \cdot H| = 1 & \rightarrow \text{dónde me posiciono.} \end{cases}$$

A partir de la FTLA puedo saber cómo se modifican las raíces (polos de mi función de transferencia de lazo cerrado) cuando varío un parámetro de interés (como es  $k$ )



$$G \cdot H = \frac{k \prod (s + z_i)}{\prod (s + p_j)}$$

$$\text{Si } |G \cdot H| = 1 \rightarrow k = \frac{\prod (s + p_j)}{\prod (s + z_i)}$$

Hacemos el análisis para  $0 \leq k < \infty$

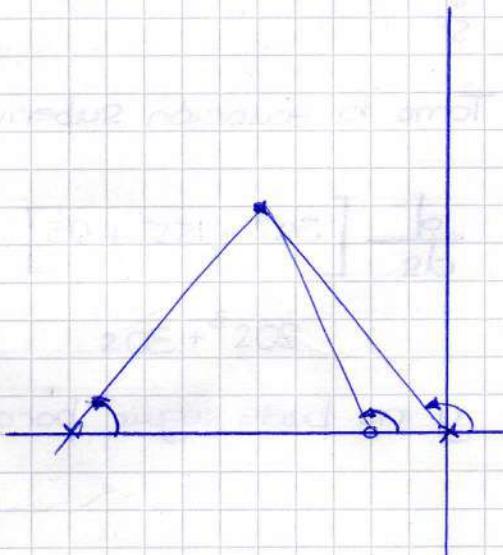
$k$  se hará cero cuando estoy en un polo: el lugar de raíces de la función de transferencia a lazo abierto empieza en los polos. A partir de cada polo hay una rama de la función de transferencia.

En general hay más polos que ceros para una función físicamente realizable (denominador > numerador -en orden)

$k$  se hace  $\infty$  cuando estoy en un cero.

El lugar de raíces termina en los ceros.

Hay tantas ramas como polos o ceros (el que sea más grande).



Para saber si un punto genérico cumple con el lugar de raíces:

•  $k$  empieza en los polos y termina en los ceros.

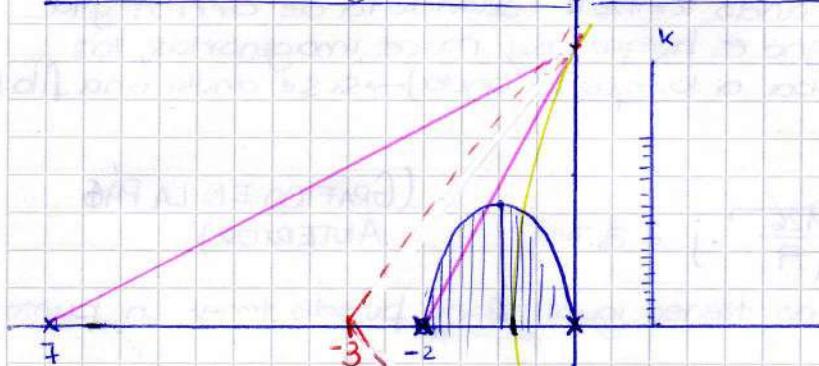
$$1/G \cdot H = \frac{1}{s + z_1} + \frac{1}{s + z_2} + \frac{1}{s + z_3} + \dots - \frac{1}{s + p_1} - \frac{1}{s + p_2} - \dots - \frac{1}{s + p_n}$$

Los ángulos se toman en sentido antihorario desde la dirección  $+x_2$  pasando por el punto singular (polo o cero).



Existe lugar de raíces sobre el eje real cuando a la derecha del punto considerado hay un número impar de singularidades (polos o ceros).

Separación o ingreso del lugar de raíces en el eje real:



$$GH = \frac{1}{s(s+2)(s+7)} = 1$$

$$K = s(s+2)(s+7) = s^3 + 9s^2 + 14s$$

$$\frac{dk}{ds} = 3s^2 + 18s + 14 = 0 \quad \begin{cases} s_1 = -0,92 \\ s_2 = -5,08 \end{cases}$$

$s_1 = -0,92$  cae en un lugar de raíces

(después veremos qué hacemos con la de  $-5,08$ )

### • Asintóticas

$$Count = n-m$$

$$\text{Ángulo de asintota} = \frac{+180}{n-m} (2k+1)$$

$$\frac{180}{3} (2k+1)$$

$\Gamma$  de corte

$$\gamma_c = \frac{\sum \operatorname{Re} P - \sum \operatorname{Re} Z}{n-m}$$

$$\gamma_c = -3$$

Ahora queremos ver cuándo se pasan para el semiplano derecho:

n: número de polos

m: número de ceros

$$GH = \frac{k}{s^2 + 9s^2 + 14s}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} = \frac{k}{s^3 + 9s^2 + 14s + k}$$

Aplicando Routh-Hurwitz →

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 14 \\ s^2 & 9 & k \\ s^1 & \frac{126-k}{9} \end{array}$$

Para que no haya cambios de signo  
 $0 < k < 126$

$$s^0 \ k$$

Quiero saber qué pasa cuando  $k=126$  (cuando la de arriba y la de abajo tienen igual signo es porque hay raíces imaginarias, las saco con la fila de arriba a la que se anula) → si se anula una fila pasa eso.

$$9s^2 + 126 = 0$$

$$9s^2 = -126 \Rightarrow s^2 = \sqrt{\frac{126}{9}} \cdot j = 3,74j$$

(Si el de arriba y abajo no tienen igual signo puedo tener un punto de ensilladura).

(GRÁFICO EN LA PÁGINA ANTERIOR).

Otra forma:

$$s^3 + 9s^2 + 14s + k = 0 \quad s = j\omega$$

$$-j\omega^3 - 9\omega^2 + 14j\omega + k = 0$$

$$k - 9\omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 126$$

$$14\omega - \omega^3 = 0$$

$$\omega [14 - \omega^2] = 0 \quad \omega = \sqrt{14}$$

En este caso cuando tengo  $k=126$  voy a tener un oscilador.

Tomamos un punto conocido  $(0, \sqrt{14})$

$$k = |s+2||s+7||s|$$

$$s = \sqrt{14}j$$

$$k = |\sqrt{14+4}| |\sqrt{14+49}| |\sqrt{14}|$$

$$k = \sqrt{18 \cdot 63 \cdot 14} = 126$$

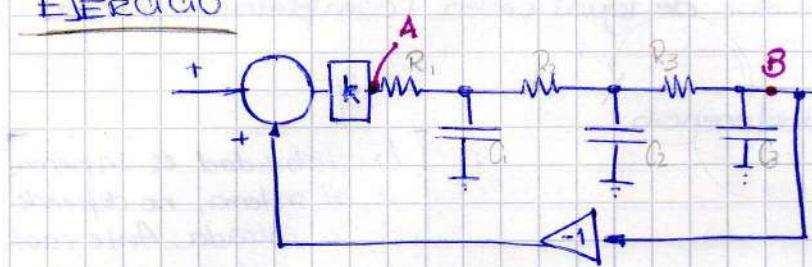
Puedo determinar la respuesta para cualquier valor de  $k$  — comportamiento dinámico

CONSULTAR - Faltó anotar algunas cosas porque me perdí bastante -

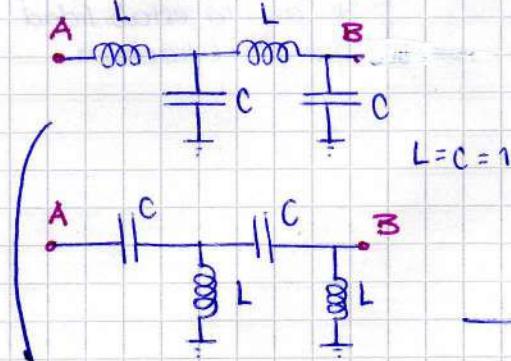
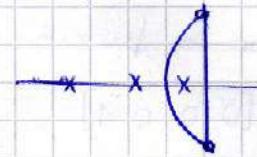
- y esto determina el valor de  $k$  para un punto

Filtros ideal - la salida tiene la misma forma que la entrada pero corriendo en el tiempo → desplazamiento de fase.

### EJERCICIO

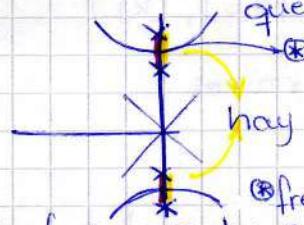


$$R = C = 1$$



Para que oscile a una sola frecuencia las raíces tienen que ser complejas conjugadas dobles.

HACER!!!  
Para estos tres osciladores (el de arriba y reemplazando entre A y B por lo de abajo) buscar el valor de k para que oscile.



④ freq. a la que va a oscilar a una sola

05/06/2013

## Lugar de raíces en MATLAB.

- Usar numerador y denominador de igual orden (completar con cero los coeficientes)

- Armar la función de transferencia:

$$n = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$d = [1 \ 9 \ 14 \ 0]$$

$$gh = tf(n, d)$$

Otra forma:

$$gh = zpk([0 \ 0 \ 0 \ 1], [1 \ 9 \ 14 \ 0], [k])$$

- Para encontrar el lugar de raíces

$$rlocus(gh)$$

Puedo posicionarme en los puntos del gráfico y ver los datos de ganancia.

Para una ganancia  $k = 17,9$  en este ejemplo, las raíces deberían ser

$$RC = -0,773 \pm 1,34j$$

$$RR = -7,44$$

Si le pongo una  $k = 126$  el sistema oscila.  $r = -7,16$

Para  $k = 6$  tengo un sistema críticamente amortiguado.

En  $k < 6$  el sistema es subamortiguado.

- Para hacer la función de lazo cerrado de  $gh$  con una realimentación unitaria negativa para ganancia 6

$$ghlc6 = feedback(gh, 1)$$

- Para la respuesta a un escalón, impulso

$$step(ghlc6)$$

$$impulse(ghlc6)$$

(hold mantiene el plot de la figura).

[La estabilidad es inherente al sistema, no depende de la entrada. Ante cualquier perturbación responde con la estabilidad que lo caracteriza.]

Si ahora tenemos una ganancia negativa:

$$G.H = - \frac{k \pi (s + z_i)}{\pi (s + p_j)}$$

$$1 - G.H = 0$$

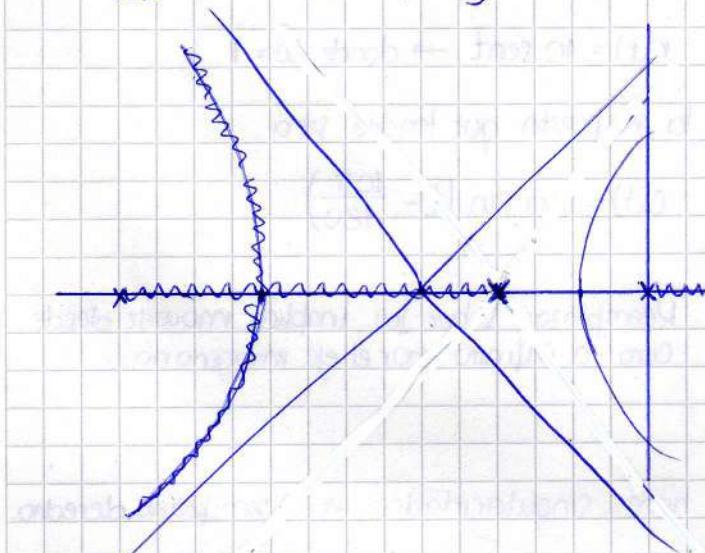
$$\begin{aligned} G.H = 1 &\rightarrow |G.H| = 360 \times k \quad (0, 1, 2, 3, \dots) \\ G.H = 1 &\rightarrow |G.H| = 1 \end{aligned}$$

Lo único que cambia es lo relacionado con el argumento.  
Ahora se completa el lugar de raíces.

Los asintotas ahora son (ángulo)

$$\frac{360 \cdot k}{n-m}$$

En el ejercicio que vimos de ejemplo la clase pasada había obtenido de  $dk/ds$  las raíces -0,92 y -5,08.



mmm → lugar de raíces

Ahora hay lugar de raíces cuando a la derecha del punto considerado hay un número par de singularidad

11.06.2013 (clase sorpresa!)

## Análisis de respuesta en Frecuencia.



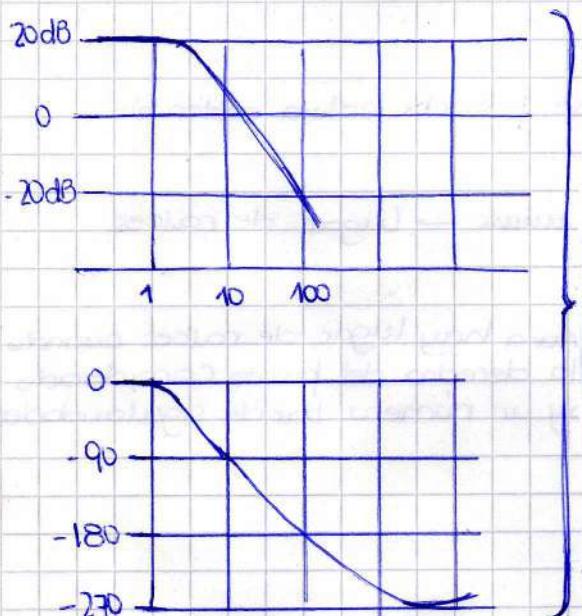
Para una función seno:  $R(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{A_1}{s+s_1} + \frac{A_2}{s+s_2} + \dots + \frac{A_n}{s+s_n} + \frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{\bar{B}_1}{s-j\omega}$$

$$C(t) = A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t} + \dots + A_n e^{-s_n t} + B_1 e^{j\omega t} + \bar{B}_1 e^{-j\omega t}$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $C(\infty)$  va a ser:

$$C(\infty) = B_1 \sin(\omega t + \phi) \quad - \text{Nos va a quedar corrido en fase y con distinta amplitud, pero oscilando con igual frecuencia.}$$



Para un sistema con esta respuesta en frecuencia al que excito con una entrada

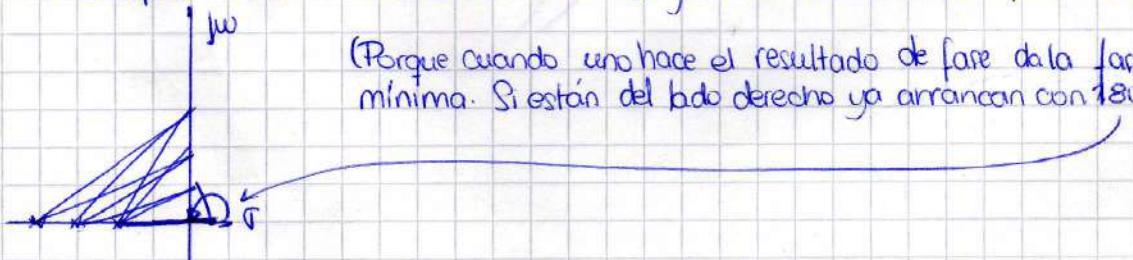
$$r(t) = 10 \text{ sent} \rightarrow \text{donde } \omega = 1$$

la respuesta que tendrá será

$$c(t) = 100 \sin\left(t - \frac{10\pi}{180}\right)$$

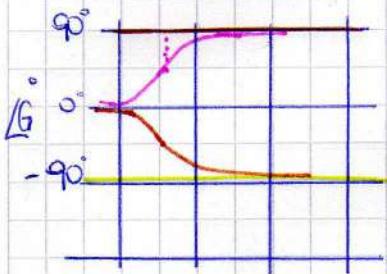
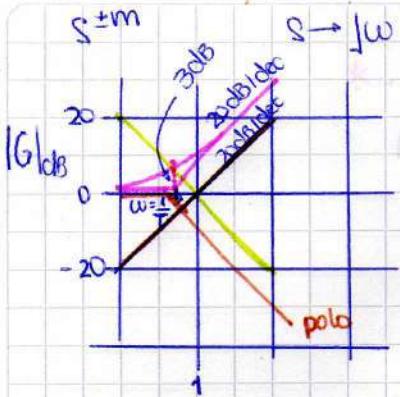
Reemplazar  $s$  por  $j\omega$  implica moverse desde cero a infinito por el eje imaginario.

Un sistema es de fase mínima cuando no tiene singularidades en el semiplano derecho.



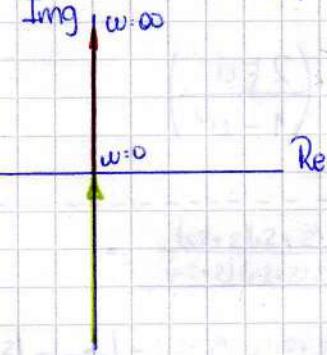
(Porque cuando uno hace el resultado de fase da la fase mínima. Si están del lado derecho ya arrancan con 180°)

Empezamos viendo los términos de tipo  $s^{\pm m}$ , que son integradores y derivadores



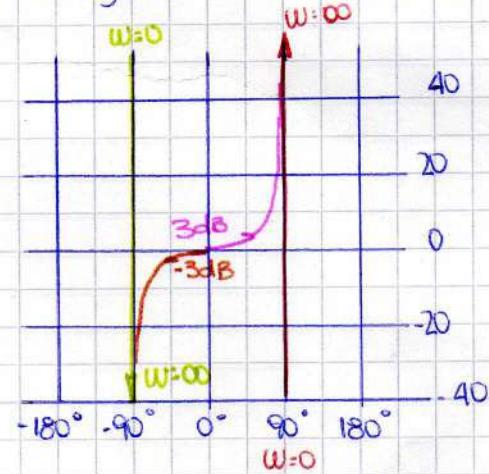
La representación de ceros y polos en Nyquist:

Img,  $w=\infty$



Buscar bien todos estos temas  
y completar los gráficos

En diagrama de Black:



Si la respuesta es una constante tenemos que determinar en qué rango de frecuencia.

Los componentes se comportan diferente para distintos valores de frecuencia.

Para sistemas con  $\omega = 1$

$$20 \log 10w_1 - 20 \log w_1 = 20 \log \frac{10w_1}{w_1} = 20 \text{ dB.}$$

La respuesta de un derivador es una línea de pendiente 20 dB/dec que comienza con fase 90°. \*

Para un integrador:  $\frac{1}{s} - \frac{1}{j\omega}$  \*

$\frac{1}{s} \rightarrow$  módulo:  $\log \frac{1}{10j\omega}, \log \frac{1}{\omega}$  → no se si está bien.

La amplitud viene con -20 dB/dec.

Para un sistema de primer orden:

$$T(s+1)^{\pm m}$$

$$|Tj\omega + 1| = \sqrt{T^2\omega^2 + 1^2} \quad \begin{cases} \text{Alta frecuencia} = Tw \\ \text{Baja frecuencia} = 1 \end{cases} \quad * \\ \angle Tj\omega + 1 = \tan^{-1} \frac{\omega}{T}$$

Vemos sistemas de segundo orden.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$s \rightarrow j\omega$  y dividimos todo por  $\omega_n^2$

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1} = \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{\omega}{\omega_n}j + 1}$$

$$\Rightarrow G(u) = \frac{1}{1 - u^2 + 2\xi u}$$

$$\angle G(u) = -\arctg \left( \frac{2\xi u}{1 - u^2} \right)$$

$$|G(j\omega)| = \text{mod} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{(s+s_1)(s+s_2)}{s(s+s_3)(s+s_4)} = \\ & = \frac{1}{s+s_1} + \frac{1}{s+s_2} - \frac{1}{s+s_3} - \frac{1}{s+s_4} \end{aligned}}$$

... nota ...

Buscamos si hay máximos o mínimos

$$\text{Radicando: } 1 - 2u^2 + u^4 + 4\xi^2 u^2$$

$$\frac{dR}{du} = -4u + 4u^3 + 8\xi^2 u = 0$$

$$4u(-1 + u^2 + 2\xi^2) = 0$$

$$u^2 = 1 - 2\xi^2$$

$$u = \pm \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$u_r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega_r}{\mu u} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

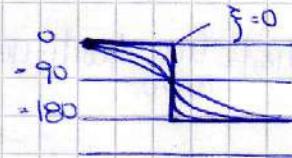
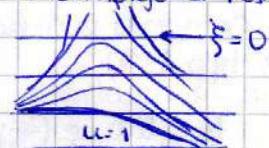
$$M_r = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (1-2\xi^2)\right]^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Se produce un máximo en  $M_r$ . Para valores de  $\xi$  comprendidos entre 0 y 0,707. Particularmente, cuando  $\xi = 0$ , la respuesta crece sin límite hasta que se rompe.

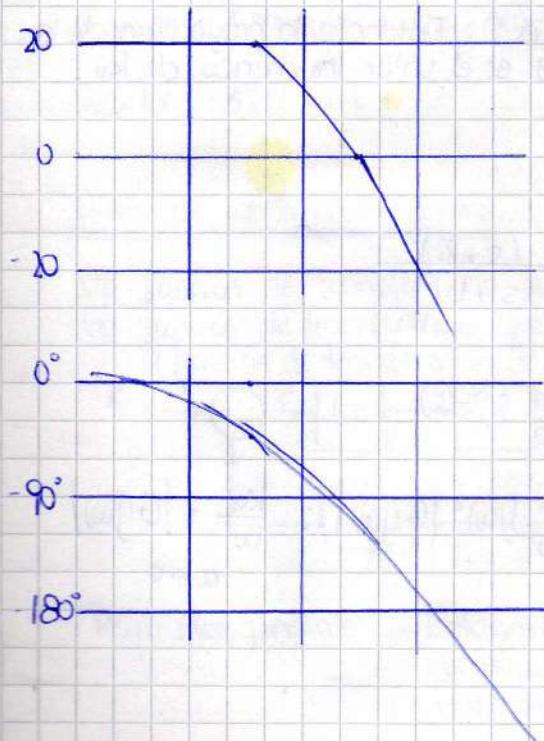
$$\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$0 < \xi < 0,707 \rightarrow$  si es mayor se me hace complejo el resultado de la raíz.

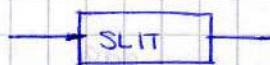
El gráfico que se obtiene de esto es el que nos daba G. Abad



12. Junio. 2013



Suponemos el caso en que el sistema en lugar de -180° terminar en 180° (suponiendo que  $P-Z=2$ ) sigue para abajo.



$$F(s) \cdot e^{-st} \rightarrow f(t-z)$$

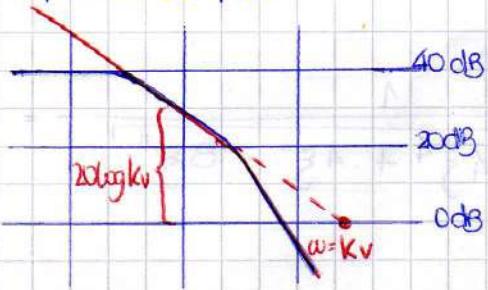
$$F(j\omega) |e^{-j\omega t}|$$

$$\varphi = -\omega t$$

$$\frac{e^{-st} \cdot K}{(s+a)(s+b)}$$

La fase sigue cayendo porque depende de  $\omega t$ . Dependiendo de cuál sea el corrimiento, puede ser muy perjudicial

Los retardos de tiempo se dan cuando la acción de control y la de sensed están en diferencia de fase.



Si de entrada veo que en baja frecuencia hay una linea horizontal se que es un sistema de tipo 0. (no tiene polos ni ceros al origen).

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$|k_p| = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)|$$

Si termina en  $180^\circ$  se que la función de transferencia será de la forma:

$$\frac{k_p}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Si la fase sigue es porque hay un corrimiento.

Si comienza con una pendiente de  $-20 \text{ dB/dec}$  tengo 1 polo al origen y un sistema de tipo 1 (✗)

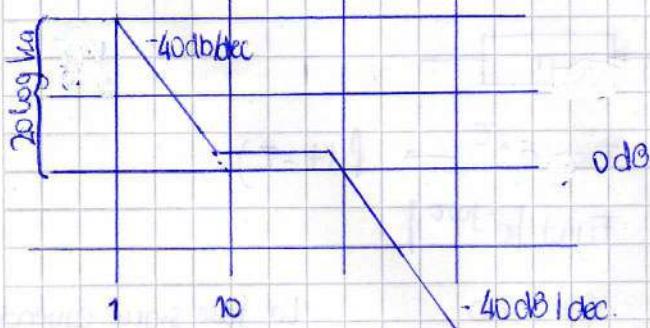
$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$$

$$|k_v| = \lim_{\omega \rightarrow 0} |j\omega| |G(j\omega)|$$

$$\left| \frac{k_v}{\omega} \right| = |G(j\omega)| \quad \text{Si } \omega = 1, \text{ el módulo será } 20 \log k_v.$$

Cuando  $\omega = k_v$ , el módulo es 0. Entonces la proyección de la recta donde corta con 0dB es el valor numérico de  $k_v$ .

Sistema de tipo 2:

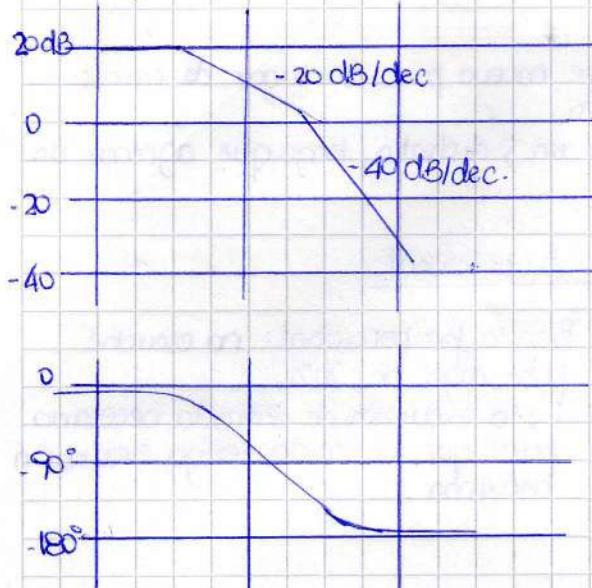


$$\frac{k_v (s+2)^2}{s^2 (s+b)^2}$$

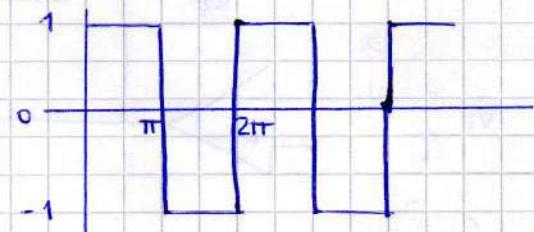
$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} |j\omega|^2 |G(j\omega)| \therefore \frac{k_a}{\omega^2} = |G(j\omega)| \quad (\omega \rightarrow 0)$$

Supongamos que tenemos un SII con la siguiente respuesta en frecuencia



¿Qué señal obtengo a la salida si pongo a la entrada una señal como la siguiente?



La señal de entrada (onda cuadrada) es una suma de señales senoidales. Es una función impar: su valor medio es nulo.

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sin(m\omega t) \xrightarrow{4} \frac{4}{n\pi}$$

En la señal cuadrada de entrada  $\omega = 1$  ( $f = 1/2\pi$ ,  $\omega = 2\pi f = 1$ )

$$\text{Entrada} = 1,27 \sin t + 0,42 \sin 3t + 0,127 \sin 5t$$

$$\text{Salida: } 12,7 \sin t + \dots$$

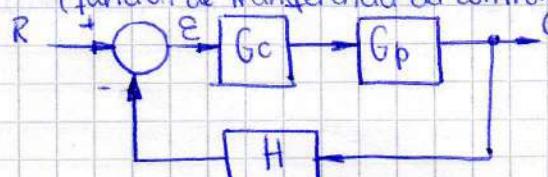
31 de Julio - 2011

Lauro  
Biolatto

### Diseño de los sistemas control.

$G_p$ : función de transferencia de la planta.

$G_c$ : función de transferencia que vamos a agregar para modificar la que tenemos.  
(función de transferencia del controlador)



Requisitos generales:

- Estabilidad
- Precisión
- Rapidez

Se debe tratar de que sea robusto e independiente de la variación de los parámetros.

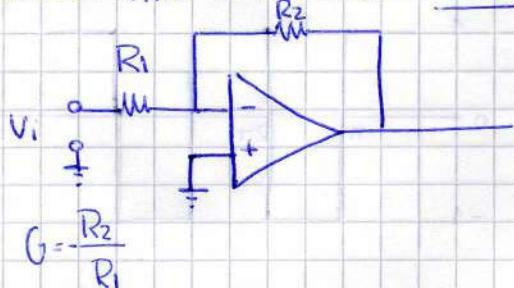
Vamos a considerar no sólo sistemas de control electrónicos, sino también mecánicos, neumáticos, etc.

### DESCARGAR ARCHIVO DE AUTOGESTIÓN

Si tengo un sistema con su lugar de raíces y me muevo por su lugar de raíces sólo tengo que variar la ganancia  $k$  de  $G_0$ .

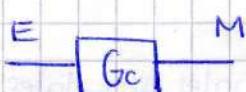
Si por ejemplo quiero agregar un punto? con un  $\zeta$  distinto, tengo que agregar un controlador (creo que mandé fruta acá).

El controlador más elemental es el controlador proporcional.



Banda proporcional: no escuché  
poco algo de 20%.

Es la excusión de entrada necesaria para que la salida tenga excusión máxima.



$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = k_p$$

- Controlador proporcional derivativo

$$m(t) = k_p \cdot e(t) + k_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$M(s) = [k_p + k_d \cdot s] E(s)$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = k_p + k_d \cdot s = k_p [T_d \cdot s + 1]$$

$$T_d = \frac{k_d}{k_p} : \text{tiempo derivativo.}$$

Tiempo en que la acción de control derivada adelanta a la acción de control proporcional.

la acción derivativa actúa cuando hay variación de la señal, normalmente en los transitorios.

Actúa como fpa.

La recta de la ganancia proporcional tiene pendiente  $k_p$  (crece  $k_d$  en  $T_d$ )

No usamos el derivativo solo porque amplifica el ruido (las frecuencias más altas) 20 dB/dec.

- Controlador proporcional integral

El factor integral genera un polo en el origen.

$$m(t) = k_p e(t) + k_i \int e(t) dt$$

$$M(s) = \left( k_p + \frac{k_i}{s} \right) E(s) \Rightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s}$$

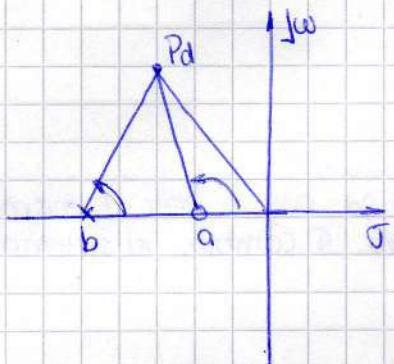
$$\frac{k_i}{k_p} = \frac{1}{T_i} \Rightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = k_p \left( \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \right)$$

No tengo que exagerar en los tiempos de integración para que no se haga muy lento.  
Actúa como fpb.

Antes la inversa de  $T_1$  se llamaba frecuencia de reposición. Indica cuántas veces la acción integral hace lo que hace la acción proporcional (o al revés?)

- Controlador proporcional-integral-derivativo: corrige error en estado estacionario y transitorio.

### COMPENSADOR DE ADELANTO



$$Pd \cdot \text{punto de diseño.} ; G_c = k \frac{(s+a)}{(s+b)}$$

La contribución angular de  $a$  y  $b$  en el punto de diseño será:

$$\angle G_c = \angle k + \angle s+a - \angle s+b$$

Cuando el cero está a la derecha del punto de diseño se comporta (el sistema) como un compensador de adelanto (el ángulo es mucho más grande).

$$G = k \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$G = \frac{k}{\alpha} \frac{\left[s + \frac{1}{T}\right]}{\left[s + \frac{1}{\alpha T}\right]}$$

Con un compensador de adelanto mejoramos rapidez

Nunca compensar en adelanto más de  $65^\circ$  con una red pasiva.

### COMPENSADOR DE ATRASO

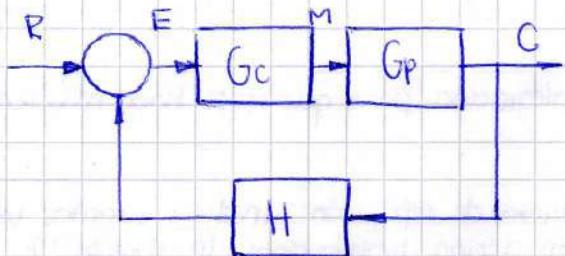
El polo está más a la derecha. Mejoramos precisión. Se usa muy cerca del origen. Se trata de que el ángulo (diferencia entre los de polos y ceros) no sea mayor a  $5^\circ$

### COMPENSADOR DE ATRASO-ADELANTO

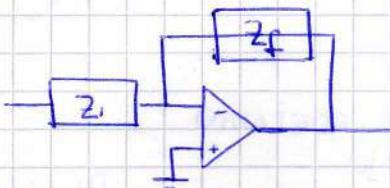
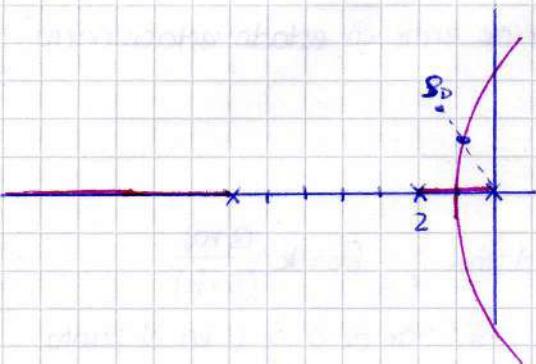
### COMPENSADOR DE CANCELACIÓN.

Se hacen sólo en el semiplano izquierdo. Se cancelan polos con ceros.

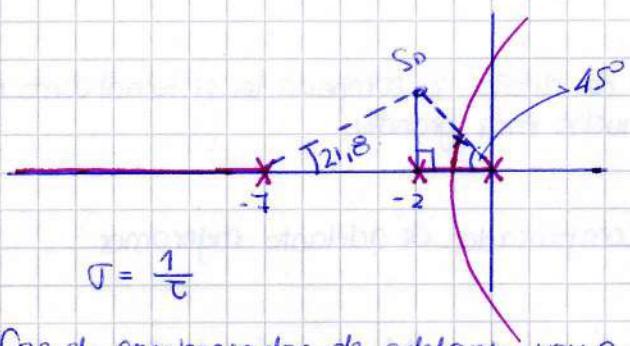
07.08.2013



Siempre se intenta que los compensadores no excedan los  $65^\circ$ .



Si quiero que mi polo se ubique en el punto de diseño  $S_d$  voy a tener el mismo  $\xi$  que en el que está marcado sobre el lugar de raíces pero  $\zeta$  cambia, el sistema en este caso va a ser más rápido.



$$G_p = \frac{k_1}{s(s+2)(s+7)}$$

$$\angle G_p = -135 - 90 - 21,8 = -246,8$$

$$-246,8 + 180 = -66,8$$

comp. ad.:  $-66,8^\circ \approx 67$  (lo usamos para el ejemplo aunque sea  $> 65^\circ$ ).

Con el compensador de adelanto voy a tener un sistema más rápido.

Si  $k=10,7$  vamos a estar en el punto sobre el lugar de raíces.

DESCARGAR LOS APUNTES DE AUTOGESTIÓN.

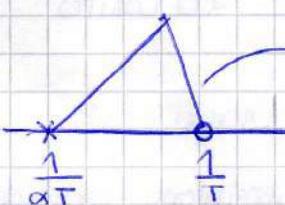
Para estar en  $S_d$   $\omega_n = \sqrt{8}$ .

Usamos el método de la bisectriz.

En la figura 3: los radiales son los valores constantes de  $\xi$ . Los círculos son  $\omega_n$ . Para igual  $\zeta$  igual tiempo de establecimiento.

$$G_c = k_1 \frac{T_s + 1}{\alpha T s + 1} = \frac{k_1}{\alpha} \left[ \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \right]$$

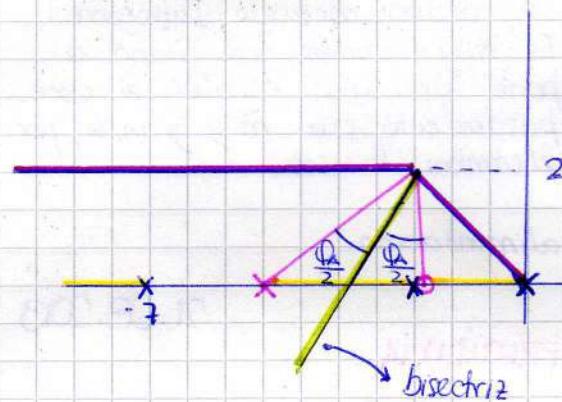
$\alpha < 1$



Compensador de adelanto. (cero a la derecha, polo a la izquierda.)

Método de la bisectriz: en el diagrama del lugar de raíces se traza una recta paralela al eje de abscisas que pase por el punto de diseño, y sumamos esa con el origen. Tomamos la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas. A ambos lados de la bisectriz trazamos rectas a la mitad del ángulo del compensador de adelanto. Entonces sabemos que cumplimos con la condición de ángulo en ese punto. En los cortes con el eje de abscisas marcamos el cero (a la derecha) y el polo (a la izquierda). Hay infinidad de posibilidades, pero esto nos da una ganancia k adecuada.

$$\frac{\ell_A}{2} = \frac{67}{2} = 33,5^\circ$$



$$k = \frac{\pi(s+P)}{\pi(s+Z_i)}$$

(No está a escala, el gráfico da cualquier cosa, es sólo para guiarme)

(Esto está hecho a ojo)

Los valores reales son:  
cero: -1,65  
polo: -5,08

$$\frac{\sqrt{3,08^2 + 4} \cdot \sqrt{8} \cdot 2 \cdot \sqrt{5,08^2 + 1}}{\sqrt{0,35^2 + 4}} = 55,86$$

Ver en el apunte, debería dar 55,3

El nuevo lugar de raíces queda marcado en amarillo.  
Tenemos 4-1=3 asíntotas.

Se podría hacer cancelando ceros con polos y viceversa pero sólo en el semiplano izquierdo: cancelo el polo que está en -2 con un cero y tengo  $90^\circ$  de adelanto. Tengo que atrazar  $23^\circ$  para que me queden los 6,7 de la consigna. Pongo un polo

$$\tan \alpha = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{\tan 23^\circ} = 4,71$$

El polo va a -4,71.

La ganancia ahora queda a 77,94 ( $= \sqrt{8} \cdot \sqrt{4+4,71^2} \cdot \sqrt{29} = 77,94$ ). También me cambia el lugar de raíces.

Mejoramos la respuesta transitoria y la rapidez de respuesta.

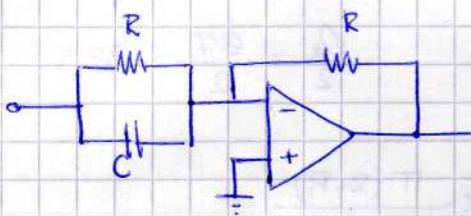
Otra forma es usar un compensador proporcional derivativo.

$$G_c = k_p \cdot \left[ T_d \cdot s + 1 \right] = k_p \cdot T_d \left[ s + \frac{1}{T_d} \right]$$

Me provee un cero que me tiene que dar un ángulo de  $67^\circ$ .

$$x = \frac{2}{\operatorname{tg} 67^\circ} = 0,84$$

En 2,84 (estoy en abusivo = 2), pongo el cero.



Cuando hay una señal de error la acción derivada funciona. Es muy probable que cuando se pone una señal escalón el sobre pasamiento sea muy grande, por el cambio brusco.

También podemos compensar utilizando la realimentación.

21.08.2013

### ANÁLISIS DE RESPUESTA EN FRECUENCIA.

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \quad (\text{DESCARGAR DIPOSITIVAS}).$$

cuando  $s = j\omega$  estamos en análisis cuando pasaron los transitorios.

$$k_v = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega G(j\omega)$$

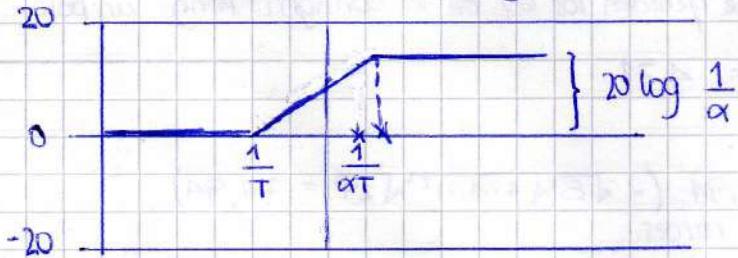
cuando el  $k_v$  es numéricamente igual a  $\omega$  estamos en 0dB.

Para los sistemas de segundo orden el margen de fase está relacionado con  $\xi$ . Para  $0,45 \leq \xi \leq 0,7$  el margen de fase es  $100\xi$ .

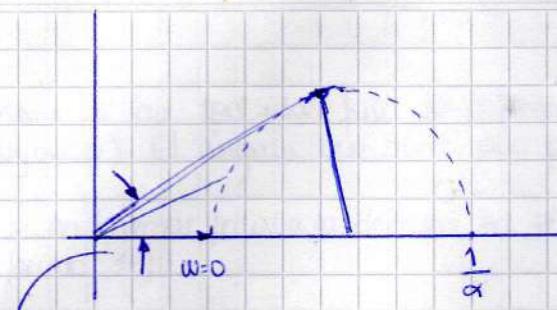
La estabilidad se analiza con margen de fase y de ganancia.

En el compensador de adelanto:

Módulo: cuando  $\omega \rightarrow 0$ , la ganancia empieza en 0dB.



El diagrama de Nyquist para un sistema como este es:



Mayor ángulo (cuando el vector es tangente al ~~gráfi~~ diagrama).

$$R = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{\max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} ; \quad \alpha = \frac{1-\operatorname{sen} \alpha}{1+\operatorname{sen} \alpha}$$

Ejemplo (de la diapositiva). → Pide el ~~extra~~ un error de estado estacionario específico para una ~~compensación de retraso~~ entrada rampa. ↗ Segunda Parte

- Dibujamos el Bode.

- Tenemos que subir la recta: nos va a quedar igual pero desplazada 20 dB.

- En las diapositivas está resuelto con detalle.

Después de los  $-180^\circ$  es muy complicado compensar con un compensador de adelanto.

$$\Phi_{\max} = MG_d - MF_a + S \quad 10^\circ \text{ o } 15^\circ \text{ por el mismo diseño}$$

↳ Hay que considerar el margen actual.

La curva de fase se modifica sustancialmente.

Compensación en retraso: Hay veces que la compensación tatala.

El  $\beta$  debe valer entre 1 y 15.

Para  $w \rightarrow 0$  el módulo es 0 dB, empieza a caer cuando se encuentra con el polo y en el cero vuelve a tener pendiente cero, quedando su valor en  $20 \log \frac{1}{\beta}$  cuando  $w \rightarrow \infty$ .

La fase en este caso no nos interesa mucho. Vamos a usar la atenuación a altas frecuencias. Esto no nos cambia el error de estado estacionario a bajas frecuencias.

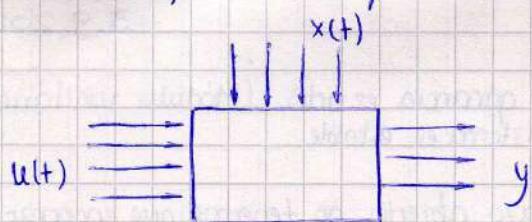
Ejemplo:  $Lss < 0,1$ , margen de fase  $40^\circ$ . → Veo en qué punto el margen de fase da  $40^\circ$  y ahí veo cuánto tengo que mover la curva de módulo para que cruce por cero en ese punto.

El sistema se hace más lento, el ancho de banda disminuye.

Descargar diapositivas.

04.09.2013

Variables de estado: el conjunto mínimo con cuyo conocimiento para  $t \geq t_0$  y sus entradas para  $t \geq t_0$  permiten caracterizar el sistema para  $t \geq t_0$ .

 $u(t)$ : entrada $y(t)$ : salida $x(t)$ : vector de estado.

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) \\ u(t) \quad t \geq t_0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} x(t) \quad t \geq t_0$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t, u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), t, u(t))$$

Para sistemas lineales:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

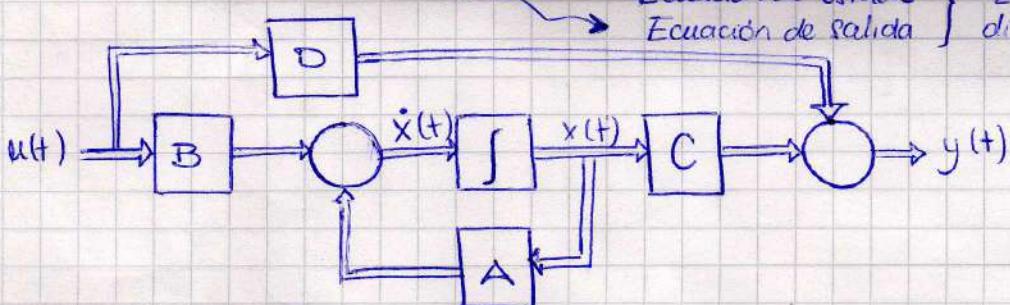
A, B, C, D son matrices.

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Nosotros trabajamos para sistemas lineales invariantes en el tiempo: SЛИT.  
Entonces las ecuaciones quedan

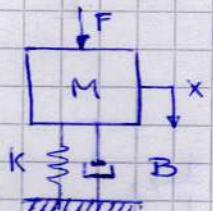
$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B u(t) \quad \text{A, B, C y D son matrices pero ahora de coeficientes constantes.}$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación de estado} \\ \text{Ecuación de salida} \end{array} \right\} \text{Ecuaciones dinámicas}$$

 $x(t)$ : vector de estado  $[n \times 1]$ A: matriz de coeficientes  $[n \times n]$  $\dot{x}(t)$ : vector de derivadas  $[n \times 1]$ u(t): vector de control  $[r \times 1]$ B: matriz de coeficientes  $[n \times r]$ C: matriz de coeficientes  $[P \times n]$ D: matriz de coeficientes  $[n \times P]$

Las variables de estado nos permiten analizar sistemas con varias entradas y varias salidas.

Ejemplo:



$$F = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx$$

Tenemos una ecuación diferencial de segundo orden: dos elementos que almacenan energía (masa y resorte).

$$E_m = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{1}{2}M\ddot{x}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}Kx^2$$

VARIABLES DE ESTADO FÍSICA: las variables que entran en la ecuación de energía, de los elementos almacenadores de energía.

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

La ecuación expresada con variables de estado queda:

$$F = M\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + Kx_1$$

La ecuación de estado va a tener la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{M} \end{bmatrix} u \quad \text{Ecuación de estado.}$$

$$\text{El } \dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 \text{ lo despejamos}$$

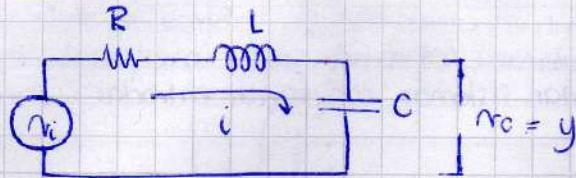
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u \quad \text{Ecuación de salida.}$$

$\rightarrow D$  es cero porque no hay una entrada que se manifieste directamente a la salida.

CUANDO el orden del numerador no es menor que el del denominador, sino igual, aparece la matriz D. En general es cero.

Las variables de estado se toman a la salida de los integradores, cuando hay un integrador hay una variable de estado.

Otro ejemplo:



$$m_i = L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow u = L \cdot \ddot{x}_1 + R \cdot x_1 + x_2$$

$$Ei = \frac{1}{2} L i^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} C m_C^2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{u}{L} - \frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2$$

$$i = x_1$$

$$m_C = x_2$$

$$m_i \rightarrow u.$$

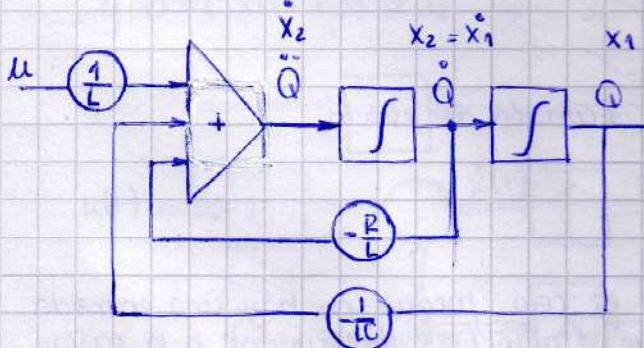
A)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$

Esto es con variables de estado físicas.

$$y = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Si pusiera la ecuación en función de la carga podría hacer:

$$m_i = L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{Q}{C}$$



Los integradores son los elementos de memoria del sistema.  
(En los sist. discretos son los retardos).

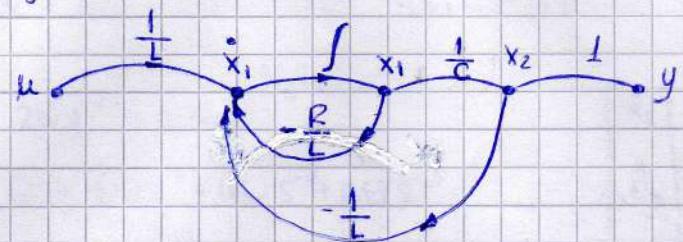
B)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} u$

Ec. estado

$$y = \left[ \frac{1}{C} \ 0 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u.$$

Ec. Salida.

\* Siguiendo la ecuación de estado (A) :



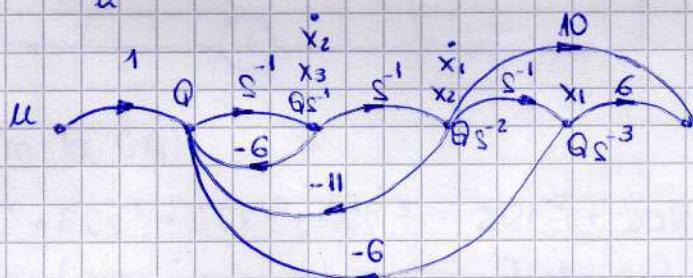
Suponemos una función de transferencia de la forma:

$$\frac{C}{R} = \frac{10s^2 + 6s^3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{10s^2 + 6s^3}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}$$

$$C = 10Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

$$R = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

$$Q = \frac{R}{u} - 6Qs^{-1} - 11Qs^{-2} - 6Qs^{-3}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Variables de estado de fase o Forma canónica controlable.

11.09.2013

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\frac{C}{R} = \frac{2s+20}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{2s^2+20s^3}{1+6s^{-1}+11s^{-2}+6s^{-3}}$$

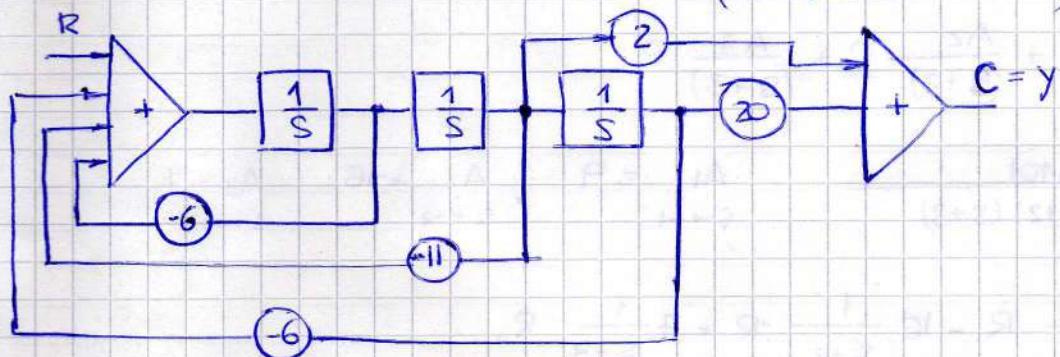
$\frac{Q(s)}{Q(s)}$

$$C = 2Qs^{-2} + 20Qs^{-3}$$

$$R = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Forma canónica controlable  
Forma variable de fase.  
(Matriz de Frobenius)

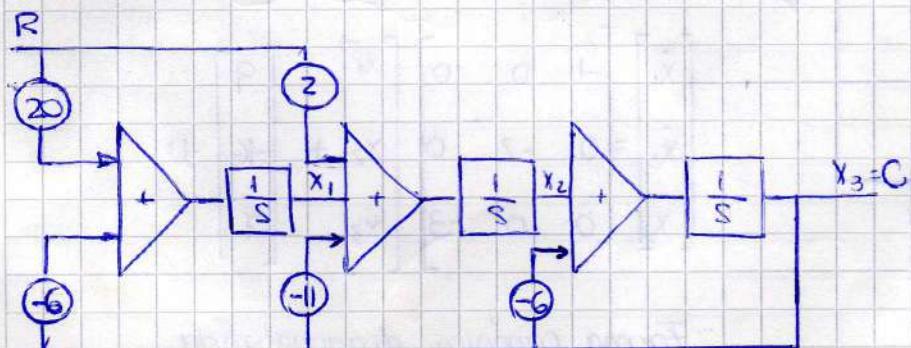


Sin los  $Q(s)$ :

$$C + 6Cs^{-1} + 11Cs^{-2} + 6Cs^{-3} = 2Rs^{-2} + 20Rs^{-3}$$

$$C = \left\{ [(20R - 6C)s^{-1} + (2R - 11C)]s^{-1} - 6C \right\} s^{-1}$$

$$\underbrace{x_1}_{\text{---}} \quad \underbrace{x_2}_{\text{---}} \quad \underbrace{x_3}_{\text{---}}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Forma canónica observable

(Si observamos, vemos que las matrices -ésta y la anterior- son transpuestas).

$$y = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

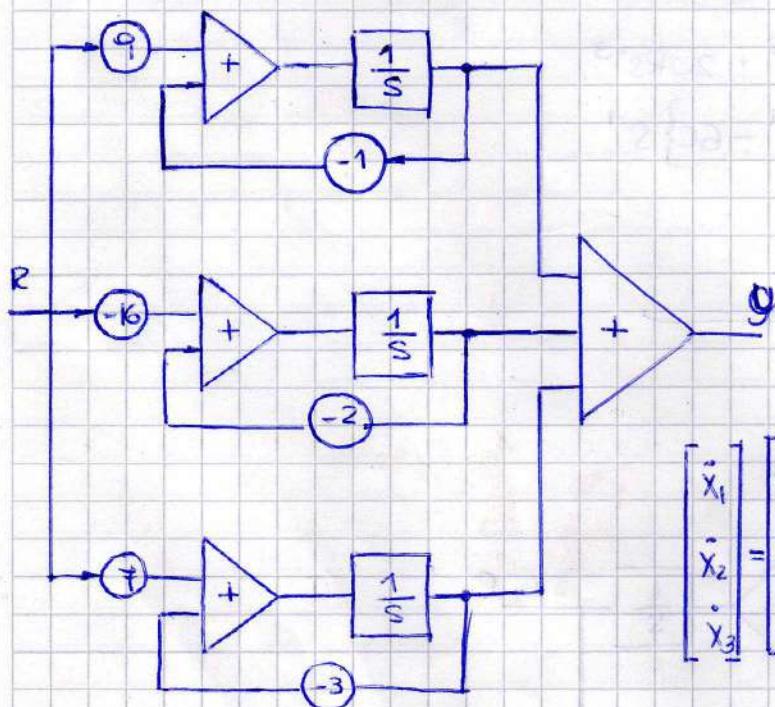
Otro método es por expansión en fracciones simples: tiene la ventaja de que da como resultado un sistema en paralelo.

$$C = \frac{A_1}{(s+1)} R + \frac{A_2}{(s+2)} R + \frac{A_3}{(s+3)} R$$

$$\frac{C}{R} = \frac{z(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{A_1}{s+1} = 9 ; \quad \frac{A_2}{s+2} = -16 ; \quad \frac{A_3}{s+3} = 7$$

$$C = 9 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot R - 16 \cdot \frac{1}{s+2} \cdot R + 7 \cdot \frac{1}{s+3} \cdot R.$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -16 \\ 7 \end{bmatrix} u.$$

Forma canónica diagonalizada.

Si  $u=0$

$$\ddot{x} = Ax = \lambda x$$

$$\ddot{x}x - Ax = 0$$

$$|\lambda I - A| |x| = 0$$

Los autovalores son los valores de  $\lambda$  que hacen  $|\lambda I - A| = 0$ .

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 6 + 11\lambda = 0$$

$$\underbrace{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6}_{} = 0.$$

los autovalores son  $-1, -2, -3$ .

Los autovalores se corresponden con los polos del sistema.

Vemos si varian ante una transformación lineal (cambio de referencia, forma de medida).

Quiero hacer una transformación lineal de  $x$  a  $z \rightarrow$  uso una matriz  $P$ .

La matriz  $P$  debe ser no singular, es decir  $\det(P) \neq 0$ , para que exista  $P^{-1}$  (la inversa de  $P$ ).

$$x = Pz$$

$$\dot{x} = P\dot{z}$$

$$P\dot{z} = APz + Bu$$

$$y = CPz + DU$$

$$\dot{z} = \underbrace{P^{-1}A}_{A} \cdot Pz + P^{-1}Bu$$

$$y = CPz + DU$$

$$\text{Autovalores: } |\lambda I - P^{-1}AP| = 0 \quad I = P \cdot P^{-1}$$

$$\underbrace{|P^{-1}|}_{\neq 0} \underbrace{|\lambda I - A|}_{0} \underbrace{|P|}_{\neq 0}$$

Invarianza de los autovalores ~~en~~ en una transformación lineal.

Traza de una matriz: suma de los elementos de la diagonal principal.

La suma de los autovalores es igual a la traza de la matriz (cualquiera de las matrices).

Los autovalores representan características propias del funcionamiento de un sistema.

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}$$

Matriz de Vandermonde (Van Der Monde)

→ Esta es la matriz que diagonaliza

### Ejercitarse

En nuestro caso:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Encontramos  $P^{-1}$ . Para eso primero buscamos la matriz de cofactores.

$$M_C = \begin{vmatrix} -6 & 6 & -2 \\ -5 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Cofactor  $a_{11} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}$

(Tomaba un pivote, eliminaba fila y columna y sacaba el determinante que quedaba).

### Determinante para el inversible

Sacamos la transpuesta y dividimos por el determinante.

$$T_{M_C} = \begin{vmatrix} -6 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Det}(P) = -2$$

$$P^{-1} = \frac{T_{M_C}}{\text{Det}(P)} = \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{vmatrix}$$

$$\text{Comprobar } P \cdot P^{-1} = I \text{ y } |P^{-1} \cdot A \cdot P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Asociado a una matriz A existe una serie de autovalores, y asociados a cada autovalor existe un autovector.

$$P = P_1, P_2, P_3 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix}$$

$$(\lambda_i I - A) | P_i = 0$$

Cuando los autovalores son reales y distintos.

$$\begin{vmatrix} \lambda_i & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_i & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_i & -6 & -11 & -6 \end{vmatrix} | P_{1i} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & P_{1i} \\ 0 & \lambda_i & -1 & P_{2i} \\ 6 & 11 & \lambda_i + 6 & P_{3i} \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_i P_{1i} - P_{2i} + 0 \cdot P_{3i} = 0$$

$$0 \cdot P_{1i} + \lambda_i P_{2i} - P_{3i} = 0$$

$$6 P_{1i} + 11 P_{2i} + (\lambda_i + 6) P_{3i} = 0.$$

Asignamos valores (los de los autovalores).

$$\text{Para } \lambda_i = -1$$

$$\text{Para } \lambda_i = -2$$

$$\text{Para } \lambda_i = -3$$

$$P_{11} = 1$$

$$P_{12} = 1$$

$$P_{13} = 1$$

$$P_{21} = -1$$

$$P_{22} = -2$$

$$P_{23} = -3$$

$$P_{31} = 1$$

$$P_{32} = 4$$

$$P_{33} = 9$$

P<sub>1</sub> P<sub>2</sub> P<sub>3</sub>

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

→ Autovectores.

es ↗

(Da igual a la de Vandermonde, pero no tiene por qué ser igual siempre)

Esta matriz me permite transformar

Si los autovalores no son reales y distintos, sino que se repiten:  
Supongamos raíces reales iguales:

$$\frac{10s+2}{(s+1)^3(s+2)}$$

Vamos a tener 4 autovectores  $P_1 P_2 P_3 P_4$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_4 = -2$$

$$|\lambda_1 I - A| P_1 = 0$$

$$|\lambda_1 I - A| P_2 = -P_1$$

$$|\lambda_1 I - A| P_3 = -P_2$$

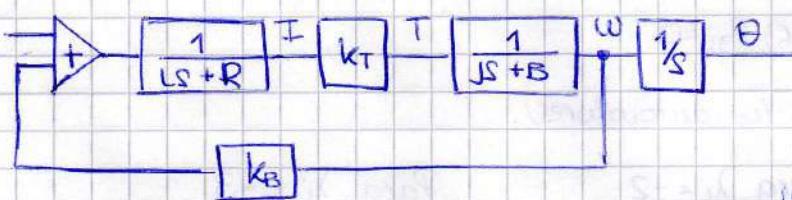
$$|\lambda_4 I - A| P_4 = 0.$$

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Representación motor.

18.09.2013.  
(copiada de Chirila).



$$\begin{aligned} \theta &= x_1 \\ \omega &= x_2 \\ I &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B/J & k_T/J \\ 0 & -k_B/I & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u.$$

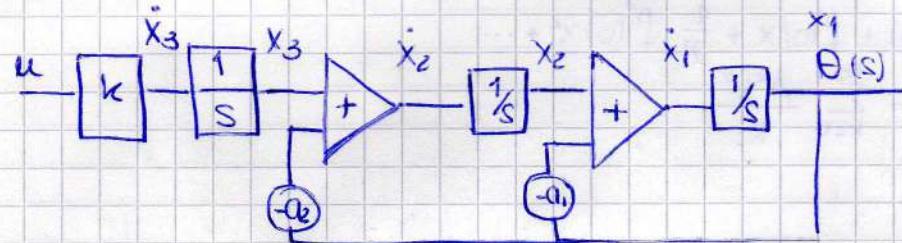
$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Theta}{U} = \frac{k}{JLs^2 + (LB + RJ)s + RB + KbKT} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k/s}{s^2 + (\frac{B}{J} + \frac{2}{L})s + \frac{RB + KbKT}{JL}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\frac{\Theta}{U} = \frac{k}{s^3 + a_1s^2 + a_2s} = \frac{ks^{-3}}{1 + a_1s^{-1} + a_2s^{-2}}$$

$$\Theta(s) = ks^{-3} - a_2s^{-2} - a_1s^{-1}$$

$$\Theta(s) = [kus^{-1} - a_2\Theta]s^{-1} - a_1\Theta$$



$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u.$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

### Funció n de Transferencia

De los ecuaciones de estado llegar a la función de transferencia por medio de Laplace.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$S X(s) - X(0) = A X(s) + B u(s)$$

$$Y(s) = C X(s) + D u(s)$$

$$S X(s) - A X(s) = B u(s)$$

$$(S\mathbb{I} - A)X(s) = B u(s)$$

$$X(s) = (S\mathbb{I} - A)^{-1} B u(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{[C(S\mathbb{I} - A)^{-1} B + D]}_{H(s)} u(s)$$

Despejo  $X(s)$  y agrego la matriz  $\mathbb{I}$  para poder restar  $A$ .

## MATRIZ DE TRANSICIÓN DE ESTADOS.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{ecuación de estado.}$$

Varias posibilidades de soluciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ \dot{x} &= \alpha x \\ \text{Generalizar}\end{aligned}$$

$$\mu = 0 \quad \text{sin excitación.}$$

$$x(t) = e^{\alpha t} x(0) \rightarrow \dot{x}(t) = \underbrace{\alpha e^{\alpha t}}_{x(t)} x(0)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) \\ x(t) &= e^{At} x(0) \rightarrow x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Condiciones iniciales.} \\ \dot{x}(t) &= Ae^{At} x(0)\end{aligned}$$

$$e^{At} = \phi(t) \rightarrow \text{Matriz de transición de estados.}$$

$$\text{Por Taylor... } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots$$

$$\phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

$$\text{Por Laplace... } \dot{x} = Ax$$

$$\begin{aligned}sX(s) - X(0) &= AX(s) \\ sX(s) - AX(s) &= X(0) \\ (sI - A)X(s) &= X(0)\end{aligned}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0) = \phi(s) X(0)$$

$$\begin{aligned}x(t) &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]}_{e^{At}} x(0) \\ e^{At} &= \phi(t)\end{aligned}$$

Solucionamos cuando el sistema no está excitado.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + Bu(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = X(0) + B u(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0) + (sI - A)^{-1} B u(s).$$

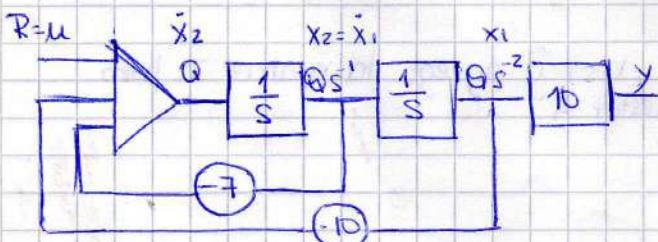
$$X(s) = \phi(s) X(0) + \phi(s) B u(s)$$

$$X(t) = \phi(t) X(0) + \int_0^t \phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau.$$

El sistema es causal.

Ejemplo

$$\frac{C}{R} = \frac{10}{s^2 + 7s + 10} = \frac{10}{(s+2)(s+5)} = \frac{10s^{-2}}{1 + 7s^{-1} + 10s^{-2}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}$$



$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \\ y &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

SOL. PUNTOS

19.2.2. (8) SA

$$SI - A = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 10 & s+7 \end{vmatrix}$$

cofatores  $\begin{bmatrix} s+7 & -10 \\ 1 & s \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} \begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(s) = \begin{vmatrix} \frac{s+10}{(s+2)(s+5)} & \frac{1}{(s+2)(s+5)} \\ \frac{-10}{(s+2)(s+5)} & \frac{s}{(s+2)(s+5)} \end{vmatrix}$

$$\phi_{11}(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+5} = \frac{8/3}{s+2} - \frac{5/3}{s+5}$$

$$\phi_{12}(s) = \frac{A_3}{(s+2)} + \frac{A_4}{s+5} = \frac{1/3}{s+2} - \frac{1/3}{s+5}$$

$$\phi_{21}(s) = \frac{A_5}{s+2} + \frac{A_6}{s+5} = \frac{-10/3}{s+2} + \frac{10/3}{s+5}$$

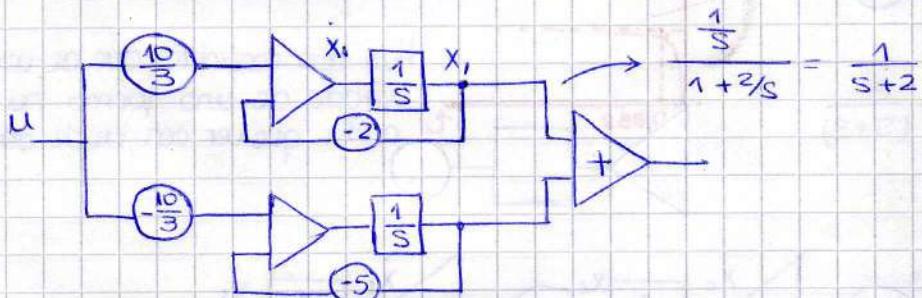
$$\phi_{22}(s) = \frac{A_7}{s+2} + \frac{A_8}{s+5} = \frac{-2/3}{s+2} + \frac{5/3}{s+5}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-5t} & \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ -\frac{10}{3}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-5t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-5t} \end{bmatrix}$$

como después  $x(t) = \phi(t)x(0)$  (queda muy largo) (?)

por ello diagonalizamos (fracciones simples).

$$\frac{C}{R} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+5} = \frac{10/3}{s+2} - \frac{10/3}{s+5} \Rightarrow C = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{(s+2)} R - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{(s+5)} R$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \end{bmatrix} u. \quad \left. \begin{array}{l} (SI - A) = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+5 \end{vmatrix} \\ y = [1 \ 1] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \end{array} \right\}$$

cofatores  $\begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(s+2)(s+5)} \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+5)} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{(s+2)(s+5)} \end{bmatrix} = \phi(s)$

$$\phi(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{vmatrix}$$

Nos da los modos de oscilación.

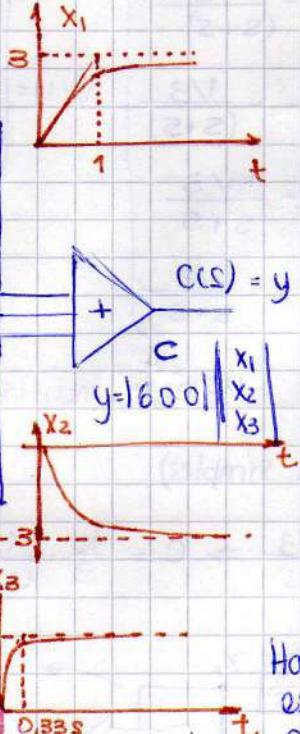
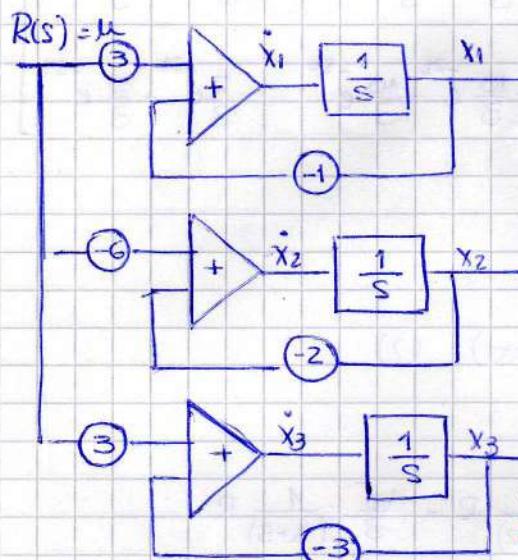
25.09.2013

$$\frac{C}{R} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow C(s) = \frac{A_1}{s+1} R(s) + \frac{A_2}{s+2} R(s) + \frac{A_3}{s+3} R(s)$$

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

La traza de la matriz es igual a la suma de los autovalores.

$$C(s) = \frac{3}{(s+1)} R(s) + \frac{-6}{(s+2)} R(s) + \frac{3}{(s+3)} R(s)$$



$$\frac{C}{R} = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{2}{(s+2)} \cdot \frac{3}{(s+3)}$$

matriz A      matriz B

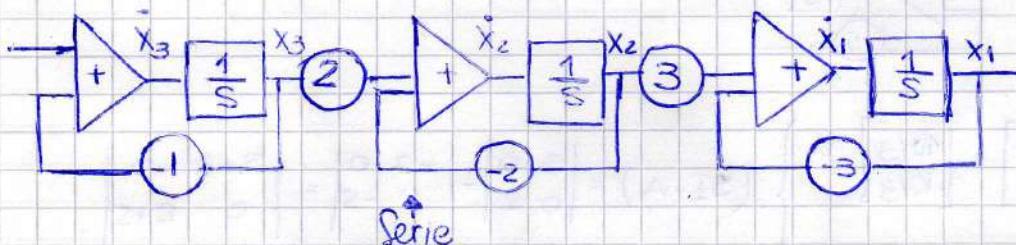
$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matriz } C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Forma canónica controlable.

Hay que considerar que las variables de estado de una forma no tienen nada que ver con las de otra!



$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Forma canónica diagonalizada:

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{vmatrix}$$

Saco la matriz de cofactores:

$$\begin{vmatrix} (s+2)(s+3) & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+3) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) \end{vmatrix}$$

Saco la transpuesta (que como es una matriz diagonal es igual).

Divido por el determinante y obtengo la inversa.

$$\text{Det} = (s+1)(s+2)(s+3)$$

$$(sI - A)^{-1} = \phi(s) = \begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{vmatrix}$$

$$\phi(t) \cdot e^{At} = L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$$

$$\phi(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{vmatrix}$$

Tenemos la  $\phi(t)$ . Queremos encontrar la respuesta del sistema ante un escalón unitario con condiciones iniciales 0.

Para un sistema lineal invariante en el tiempo y causal encontrábamos los estados:

$$x(t) = \underbrace{\phi(t)x(0)}_{\text{sol. de homogénea}} + \underbrace{\int_0^t \phi(t-\tau) \cdot B \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{solución particular.}}$$

$C\mathbf{I} = 0$ , entonces

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} t & (t-t) \\ e^t & 0 \\ 0 & e^{-2(t-t)} \\ 0 & 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ e^{3(t-t)} & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{escalón (1)}} u(\tau) d\tau$$

Ver gráficas de las variables en el gráfico de los tres sistemas en paralelo

(pagina anterior). 

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= 3e^{-t} \int_0^t e^\tau d\tau = 3e^{-t} [e^\tau]_0^t = 3 - 3e^{-t} \\ x_2(t) &= -6e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau = -6e^{-2t} \left[ \frac{e^{2\tau}}{2} \right]_0^t = -3 + 3e^{-2t} \\ x_3(t) &= 3e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau = 3e^{-3t} \left[ \frac{e^{3\tau}}{3} \right]_0^t = 1 - e^{-3t} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} t \\ -2t \\ -3t \end{array} \quad \begin{array}{l} 1-3e^{-t}+3e^{-2t}-e^{-3t} \end{array}$$

En matlab ...

$$A = [-1 \ 0 \ 0; 0 \ -2 \ 0; 0 \ 0 \ -3];$$

$$B = [3 \ ; -6 \ ; 3];$$

$$C = [1 \ 1 \ 1];$$

$$D = 0$$

$$SIST1 = SS(A, B, C, D);$$

STEP(SIST1) → sale la respuesta al escalón

IMPULSE(SIST1) → sale la respuesta al impulso.

la rampa hay que generarla:

$$INT = TF([0 \ 1], [1 \ 0]) \rightarrow \frac{1}{s}$$

STEP(INT, INT \* SIST1, 10) → respuesta a lo rampa.

seteamos un tiempo.

## CONTROLABILIDAD DE ESTADO

Un estado es controlable si con un vector de control puedo modificarlo en un tiempo finito.

Un sistema es totalmente controlable si todos sus estados son controlables.

Matriz de controlabilidad

Rango: cantidad de filas linealmente independiente.

$$COINT = | B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B |_{n \times m}$$

Si el rango de la matriz es  $n$ , ~~todo~~ el sistema es totalmente controlable

El rango de la matriz me dice cuántos estados son controlables.

## OBSERVABILIDAD DE ESTADO

Un estado es observable si desde la salida se puede observar el cambio del estado en un tiempo finito.

$$OBS = |C^T \cdot A^T C^T \cdot A^{T^2} C^T \dots A^{T^{n-1}} C^T|$$

Si el rango de la matriz es  $n$ , el sistema es totalmente observable.

Analizando la matriz diagonalizada: si un estado de la matriz  $B$  es cero ese estado no puede controlarse y si un estado de la matriz  $C$  es cero, ese estado no es observable.

En matlab...

$$OBSV = (A, C)$$

$$CTR = (A, B)$$

$$\text{rank}(M)$$

$$n = \text{rank}(\text{cont})$$

## Sistema Dual

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$CO = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad 4$$

$$OB = [C^T \ A^TC^T \ A^{T^2}C^T \ \dots \ A^{T^{n-1}}C^T] \quad 4$$

$$\begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T u \\ y_1 = B^T z + D u \end{cases}$$

$$CON = [C^T \ A^TC^T \ A^2C^T \ \dots \ A^{n-1}C^T] \quad 4$$

$$OBS = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad 4$$

[ 9.10.13 ]

(En autogestión  
ra a subir  
el apartado de  
hoy).

Un sistema es dual si la matriz de controlabilidad es igual a la de observabilidad de las transpuestas, y viceversa.

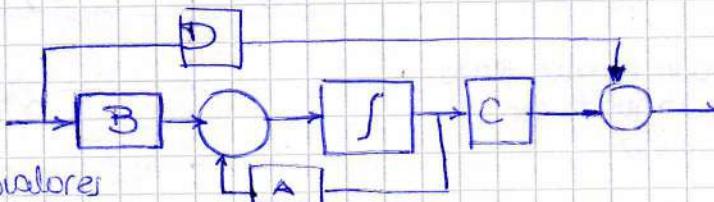
## DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADOS

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$(SI - A) = 0$$

→ Encuentramos autovalores



El comportamiento dinámico queda determinado por los autovalores.  
Vamos a ver si podemos modificar el comportamiento dinámico.

MÉTODO 1: Ubicación de polos (pole placement): se indica dónde queremos que estén los polos.

Lo primero que se hace es realinear los estados ( $x$ ). La ley que usamos es

$$u = -k \cdot x \quad (k \text{ es una matriz de ganancia}).$$

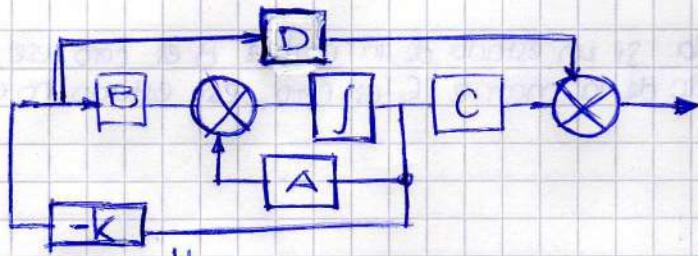
Para que podamos ubicar los polos en cualquier lugar del plano hay dos condiciones:

1º El sistema tiene que ser de estado totalmente controlable.

$$[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \rightarrow \text{rango } n.$$

2º Que el vector  $u$  no está acotado (no está limitado en su valor).

Lo que haremos es realimentar por medio de la matriz  $k$ .



$$\dot{x} = Ax + B(-kx)$$

$$\dot{x} = (A - Bk)x$$

La matriz  $A - Bk$  tiene que tener todos los polos del sistema que yo diseñé.  
Polos deseados:  $s_1, s_2, \dots, s_n$

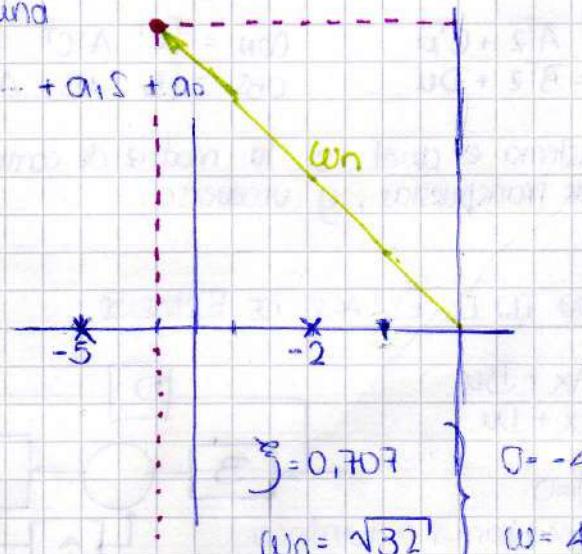
$$|sI - A + Bk| = |(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

Los polos del sistema original generan una

$$|sI - A| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

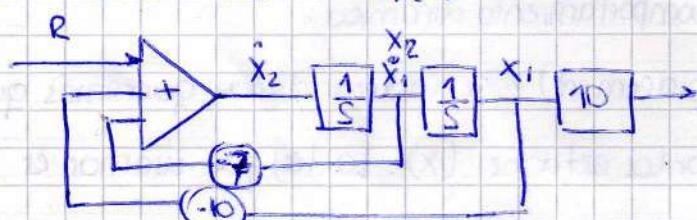
$$\text{Ejemplo: } \frac{C}{R} = \frac{10}{s^2 + 7s + 10}$$

$$s_1 = -2; s_2 = -5$$



Si le pongo una entrada escalón tengo un sistema subamortiguado con tiempos de respuesta 0,15 y 0,12

$$\frac{C}{R} = \frac{10s^{-2}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}$$



$$\text{Quiero: } s_{1,2} = -4 \pm j4$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{vmatrix} 10 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \end{array} \right\} \text{Este es el sistema original.}$$

El que yo quiero, el "compensado" tiene polos en  $(-4-4j)$  y  $(-4+4j)$

$$\text{El polinomio deseado quedó } (s+4+j4)(s+4-j4) = [s^2 + 8s + 32]$$

$$\text{Controlabilidad del sistema cont} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} = -1 \quad \checkmark$$

Usamos la realimentación.

$$u = -kx$$

En matlab, teniendo  $A, B, C, D$  y definir los polos deseados en un vector  $P$ , para encontrar la matriz  $k$  de realimentación

$$k = \text{Acker}(A, B, P) \rightarrow \text{hasta } 10 \times 10. \quad k = \text{place}(A, B, P) \rightarrow \text{por método de Ackerman}$$

$$k = [0 \ 0 \dots 0 \ 1] [\text{cont}]^{-1} (\phi(A))$$

↓      ↓  
lo vemos la clase que viene.

$$|sI - A + Bk| = 0 \quad (\text{incognita } k)$$

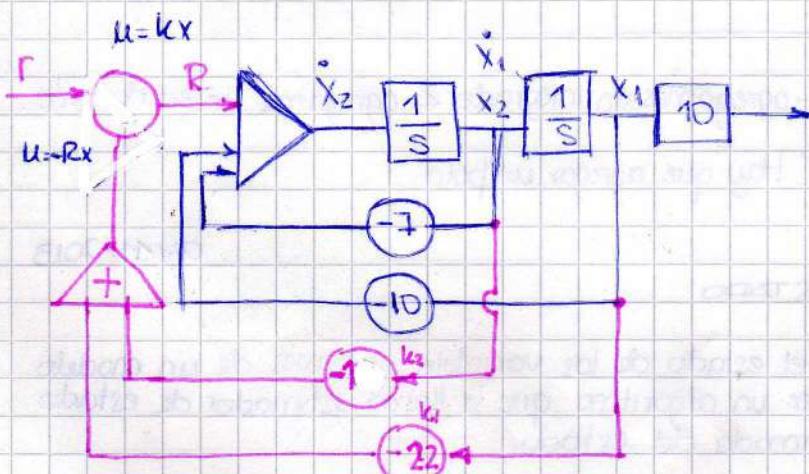
$$\begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k_1 \ k_2$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 \\ 10 & s+7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \frac{s}{10+k_1} - \frac{1}{s+7+k_2}$$

$$s^2 + (7+k_2)s + 10 + k_1 = s^2 + 8s + 32$$

$$7+k_2 = 8 \Rightarrow k_2 = 1$$

$$10+k_1 = 32 \Rightarrow k_1 = 22$$



Hay que tener en cuenta que con este procedimiento la ganancia disminuye.

### MATRIZ DE ACKERMAN

$$K = [0 \ 0 \ 0 \dots 1] [\text{cont}]^{-1} (\phi(A))$$

$\phi(A) \rightarrow$  Si la ecuación característica es  $s^3 + 5s^2 + 6s + 10 = 0$ ,  $\phi(A)$  es

$$\phi(A) = A^3 + 5A^2 + 6A + 10 \mathbb{1}_{10}$$

$A$  es solución de la ec. característica.

16.10.2013

En la forma canónica controlable

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \dot{x}_1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \dot{x}_2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \dot{x}_3 & -6 & -11 & -6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 & 0 \\ \hline x_2 & 0 \\ \hline x_3 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline u & \\ \hline \end{array}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$s^3 + 10s^2 + 20s + 10$$

$$\frac{C}{R} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$a_3 \quad a_2 \quad a_1$

$$k = (a_1 - a_1 \quad a_2 - a_2 \quad a_3 - a_3 \dots a_n - a_n)$$

Ver de diapositivas ..

La matriz k se puede encontrar → por sustitución

→ por ackerman

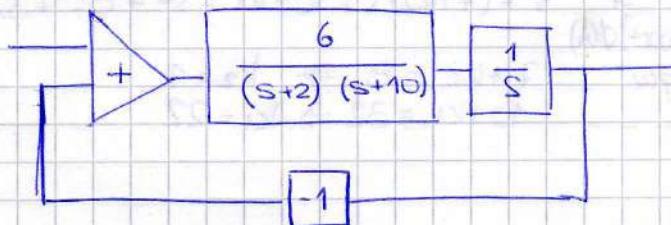
→ por la matriz de controlabilidad ?

Por efecto de la realimentación disminuimos la ganancia del sistema. Se cumple con las especificaciones dinámicas pero no se mantiene una salida similar a la anterior.

ASIGNACIÓN DE POLOS PARA LOGRAR ERROR DE ESTADO ESTACIONARIO NULO ANTE UNA ENTRADA ESCALÓN UNITARIO

\* Cuando la planta posee un integrador.

TODA LA EXPLICACIÓN  
ESTÁ EN LAS DIAPPOSITIVAS



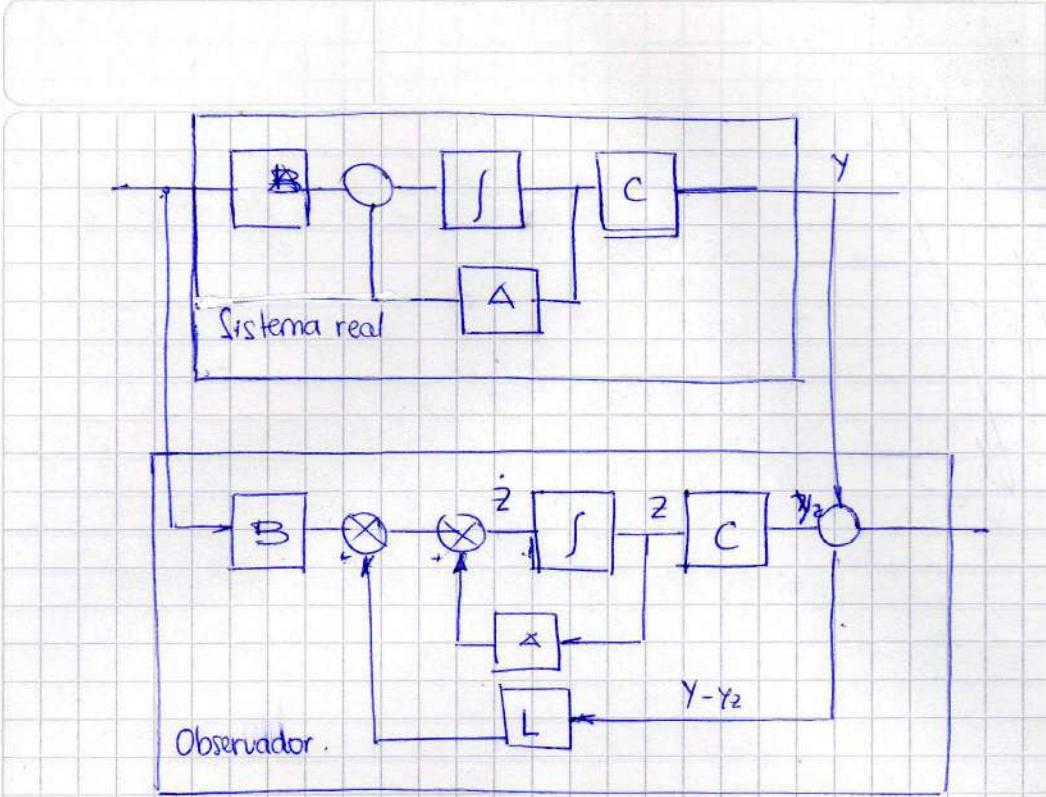
\* Si no tiene un integrador → agregamos un integrador ← agregamos un estado más.  
Hay que agregar un polo.

06/01/2013

### OBSERVADORES DE ESTADO

Cuando es difícil medir o tomar el estado de las variables, a través de un modelo matemático de la planta se hace un algoritmo que se llama estimador de estado y permite obtener una idea estimada del estado.

DIAPPOSITIVAS !!



El observador tiene que tener la misma cantidad de estados que el sistema original.

Se comparan los valores.

$$\text{Original} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - y_2)$$

Factor de corrección que realimentamos para aproximarlos al sistema. Se trata de que  $y - y_2 \rightarrow 0$ .

$$\dot{z} = Az + Bu + L(Cx - z)$$

$$\dot{z} = Az + Bu + Lc(x - z)$$

$$\dot{x} - \dot{z} = Ax - Az - Lc(x - z)$$

$$\dot{x} - \dot{z} = \underbrace{A(x-z)}_{e} - \underbrace{Lc(x-z)}_{e} \quad \begin{vmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ x_3 - z_3 \end{vmatrix}$$

$$\dot{e} = (A - Lc)e$$

$$\lambda I - A + Lc \rightarrow \text{Autovalor.}$$