Linealización de un sistema hidráulico turbulento. {Ejercicio 7} {TP2-1

En estado estacionario un sistema hidráulico turbulento tiene un caudal $\bar{Q} = q_i(t) = q_o(t)$ En ese estado el caudal se relaciona con la altura en régimen según la siguiente expresión:

$$\bar{Q} = K\sqrt{\bar{H}}$$

Si suponemos a partir de este estado un incremento del caudal de entrada de modo que:

$$Q_i(t) = \bar{Q} + q_i(t)$$ provocará un cambio de altura

$$H(t) = \bar{H} + h(t)$$ con un cambio de caudal de salida

$$Q_o(t) = \bar{Q} + q_o(t)$$ con $Q_o(t) = K\sqrt{H(t)}$

$$Q_i(t) - Q_o(t) = A\frac{dH(t)}{dt} \quad ; \quad \frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{A}Q_i(t) - \frac{K}{A}\sqrt{H(t)}$$

que es una ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{dH(t)}{dt} = f\left[Q_i(t), H(t)\right]$$

$$\left.\frac{dH(t)}{dt}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\ H(t)=\bar{H}}} = 0$$ en régimen la altura no varía.

$$\frac{dH(t)}{dt} - \left.\frac{dH(t)}{dt}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\ H(t)=\bar{H}}} = \frac{dH(t)}{dt}$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \left.\frac{\partial f\left[Q_i(t), H(t)\right]}{\partial H(t)}\right|_{\substack{H(t)=\bar{H}\\ Q_i(t)=\bar{Q}}}\left[H(t) - \bar{H}\right] + \left.\frac{\partial f\left[Q_i(t), H(t)\right]}{\partial Q_i(t)}\right|_{\substack{H(t)=\bar{H}\\ Q_i(t)=\bar{Q}}}\left[Q_i(t) - \bar{Q}\right]$$

$$\left.\frac{\partial f\left[Q_i(t), H(t)\right]}{\partial H(t)}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\ H(t)=\bar{H}}} = -\frac{1}{2}\frac{K}{A}\left.\frac{1}{\sqrt{H(t)}}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\ H(t)=\bar{H}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{K}{A}\frac{1}{\sqrt{\bar{H}}} = -\frac{1}{2}\frac{\bar{Q}}{\sqrt{\bar{H}}}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{\bar{H}}} = -\frac{1}{2}\frac{\bar{Q}}{A\bar{H}}$$

Definiendo la resistencia hidráulica en régimen turbulento como $R_{HT} = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}}$; $\left.\frac{\partial f\left[Q_i(t), H(t)\right]}{\partial H(t)}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\ H(t)=\bar{H}}} = -\frac{1}{A R_{HT}}$.

$$\left.\frac{\partial f\left[Q_i(t), H(t)\right]}{\partial Q_i(t)}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\ H(t)=\bar{H}}} = \frac{1}{A}.$$

$$\therefore \frac{dH(t)}{dt} = -\frac{1}{A R_{HT}}\overbrace{\left[H(t)-\bar{H}\right]}^{h(t)} + \frac{1}{A}\overbrace{\left[Q_i(t)-\bar{Q}\right]}^{q_i(t)}$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{d\left[\bar{H}+h(t)\right]}{dt} = \frac{dh(t)}{dt}.$$

$$q_i(t) = A\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R_{HT}}h(t).$$

donde $R_{HT} = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}}$