

16,

16/3/16

19 a,

Ing. Picco Jueves → 21:15 consultas

## Sistemas de Control. Teórico.

jepicco@scdt.frc.utn.edu.ar

Sistema lineal:



$$aX_1 + bX_2$$

$$Y = aY_1 + bY_2$$

→ No es lineal el sistema

$$\begin{aligned} X_1 = 2 &\rightarrow Y_1 = 9 \\ Y = 3X + 3 &+ \\ X_2 = 3 &\rightarrow Y_2 = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

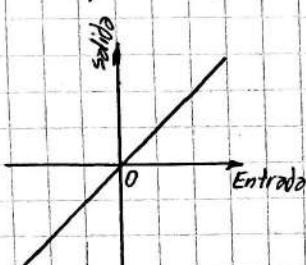
17 min.

Un sistema, es un elemento en el cual transforma determinadas entradas en salidas.

Cumple con las propiedades de superposición y de homogeneidad.

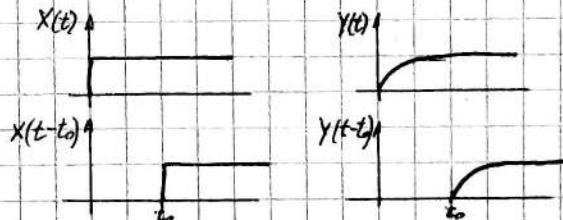
22 min.

Para que un sistema sea lineal, la gráfica que representa al sistema siempre debe pasar por el origen.



27 min.

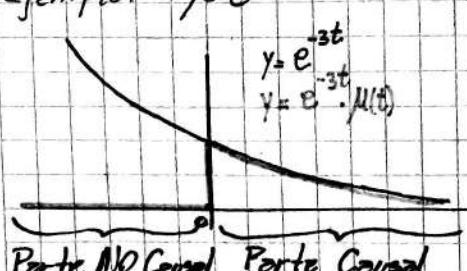
Sistema es invariante en el tiempo cuando:



2 s

28 min. Un sistema es causal (o no anticipativo) o físicamente realizable, suceden para  $t > 0$  (se dice que existen para la derecha de tiempo). (acción, reacción)

Ejemplo:  $y = e^{-3t}$



Para causalizar una señal, la multiplicamos por  $\mu(t)$ :

$$y = e^{-3t} \cdot \mu(t)$$

•  $\mu(t)$  es una señal causalizante.

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } t=0 \rightarrow \mu(t)=\frac{1}{2}$$

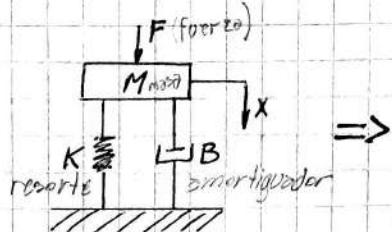
↳ para ser función

33 min.

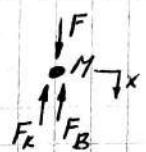
El sistema es determinístico, ante una misma causa, hay un mismo efecto. Si no el sistema se dice estocástico o aleatorio, cuando ante una entrada la salida tiene una distribución probabilística de que sucede determinado evento. Ej: tirar los dados

NOTA

34.11  
Un sistema es de constantes concentradas o de constantes distribuidas cuando en el primero podemos aproximar (bajo ciertas condiciones) por un modelo matemático de la realidad. Ejemplo: masa, resorte y amortiguador.



Modelo: cte. concentrada



Es válido si:  $M \gg M_c$  y  $M \gg M_B$

resorte  $\rightarrow$  Ley de Hooke

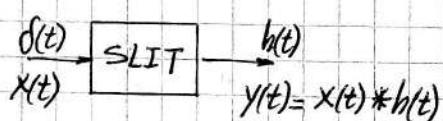
$$\sum F = M \ddot{x} = F - Kx - B\dot{x} \quad \therefore \boxed{F = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx}$$

aproximación muy elemental de la realidad

Se conforma una ecuación diferencial de 2º grado, debido a que existen 2 almacenadores de energía, el resorte y la masa. El amortiguador disipa energía, análogo a la resistencia. Cada elemento almacenador de energía agrega un orden a la ecuación diferencial.

Por ejemplo: una linea de cable coaxil, contiene constantes distribuidas a lo largo de todo su longitud.

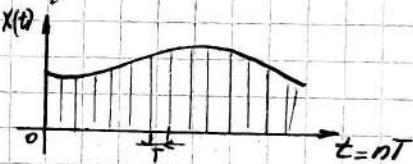
### Convolución



$$d(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1/\text{área} & t=0 \end{cases}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

A la  $x(t)$  se la puede pensar como una suma de impulsos ponderados desplazados en el tiempo.



"La convolución en dominio del tiempo, es el producto de las transformadas en el dominio de Laplace"

### Propiedades:

48mm

#### -Commutativa



$$Y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

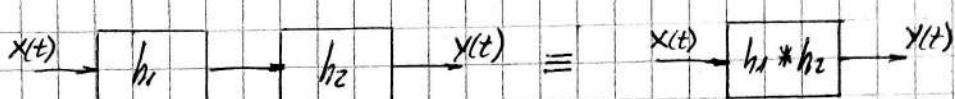
$$\text{Ejemplo: } h(t) = e^{-3t} \mu(t), \quad x(t) = \mu(t)$$

$$Y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t \mu(\tau) \cdot e^{-3(t-\tau)} d\tau = e^{-3t} \cdot \frac{e^{3\tau}}{3} \Big|_0^t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t}$$

$$Y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t e^{-3\tau} \cdot \mu(t-\tau) d\tau = \frac{e^{-3\tau}}{-3} \Big|_0^t = -\frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3}$$

• Asociativa

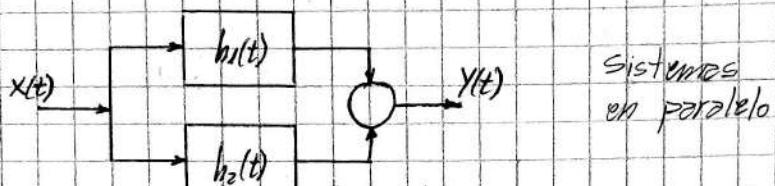
$$x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$



Sistemas  
en serie

• Distributiva

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$



Sistemas  
en paralelo

Ahora desde el punto de vista de las transformadas:

$$\begin{array}{c} d(t) \\ \xrightarrow{\text{SLIT}} \\ x(t) \end{array} \xrightarrow{h(t)} \begin{array}{c} y(t) \\ = x(t) * h(t) \end{array} \xrightarrow{\Delta(s)} \begin{array}{c} X(s) \\ \xrightarrow{\text{SLIT}} \end{array} \xrightarrow{H(s)} Y(s) = H(s) - X(s)$$

Luego  $H(s)$  es la transformada de la respuesta al impulso unitario  $h(t)$ ; cuando las condiciones iniciales son nulas,  $H(s)$  se denomina Función de Transferencia del sistema.

$$H(s) = F_T = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \text{con C.I.} = 0$$

Ejemplo:  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = 10x$

$$\text{por Laplace: } s^2 Y(s) - sY(0) - \dot{Y}(0) + 6sY(s) - 6Y(0) + 8Y(s) = 10X(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 6s + 8) - (sY(0) + \dot{Y}(0) + 6Y(0)) = 10X(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{10X(s)}{s^2 + 6s + 8}}_{\text{Solución Particular } \textcircled{1}} + \underbrace{\frac{sY(0) + \dot{Y}(0) + 6Y(0)}{s^2 + 6s + 8}}_{\text{Solución Homogénea } \textcircled{2}}$$

① depende de la excitación

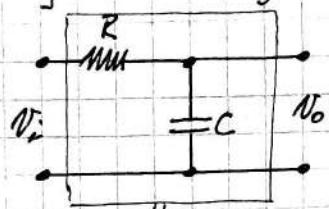
② cuando la excitación es nula

Si las C.I. = 0:

$$F_T = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10}{s^2 + 6s + 8}$$

*Importante a tener en cuenta! en el caso de sistemas en serie*

Supongamos el siguiente circuito:



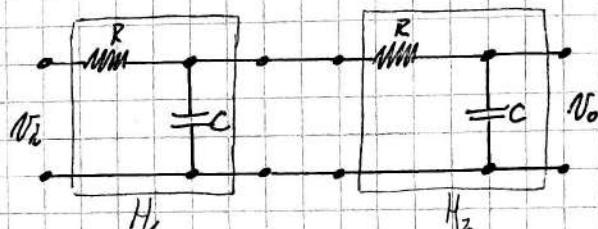
$$V_i = i \cdot R + \frac{1}{C} \int i \, dt \rightarrow V_i = \left( R + \frac{1}{sC} \right) I(s)$$

$$V_o = \frac{1}{C} \int i \, dt \rightarrow V_o = \frac{1}{sC} I(s)$$

$$H(s) = F_T = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{sC} I(s) \cdot \frac{1}{\left( R + \frac{1}{sC} \right) I(s)} = \frac{1}{RCS + 1} = \frac{1}{Zs + 1}$$

$Z$ : cte. de tiempo [seg]

Ahora hacemos:

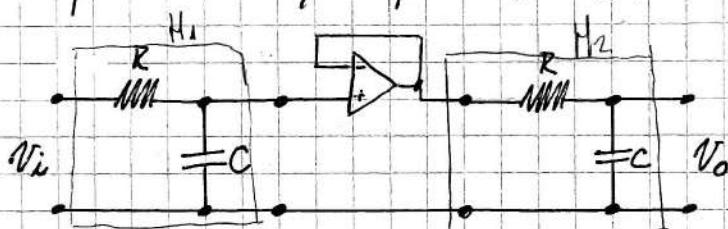


Teóricamente, en general, el sistema sería:

$$H_1(s) \cdot H_2(s)$$

¿es válido esto? no siempre es cierto que  $h_1(t) * h_2(t)$ . Ello se debe a que el sistema  $H_2$  está cargando al sistema  $H_1$ .

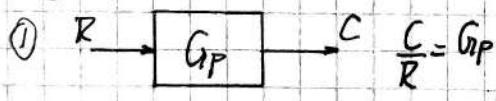
Para que se cumpla que  $H_1 \cdot H_2$ , se debe separar ambos:



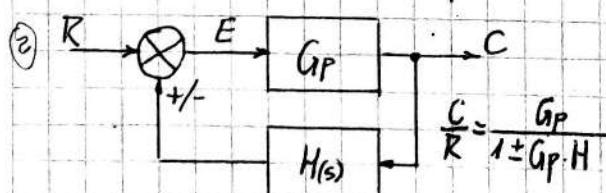
Se usa un buffer, que tiene ganancia 1,  $Z_2$  infinito y  $Z_0$  cero; de esta forma  $H_2$  no carga a  $H_1$ .

### Sistemas de Control 16:14min

En general, los sistemas de control pueden ser de dos tipos:



Originalmente, los sistemas de control estaban aplicados a las plantas de procesos, luego se amplió a otras cosas.



① Lazo Abierto

② Lazo Cerrado o Realimentado

$G_p$ : función de transferencia de la planta

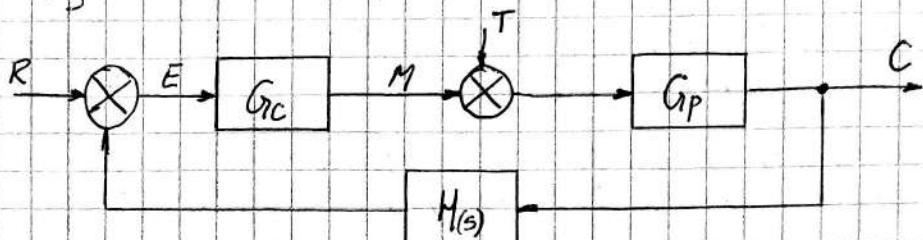
En un sistema de Lazo Cerrado, es un sistema en el cual, la entrada tiene información de lo que ocurre en su salida, y actúa en consecuencia para modificarla.

NOTA

La función Error respecto de la entrada es:

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 + G_p \cdot H} \quad (\text{Lazo Cerrado})$$

- En general, los sistemas de control son más elaborados, por ejemplo:



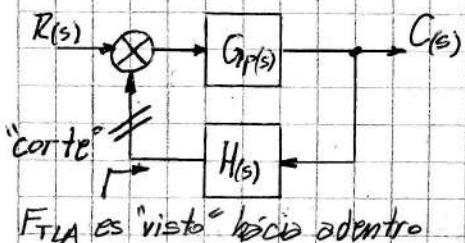
realimentación = feedback

$G_c$ : compensador o controlador

$M$ : variable controlada

$T$ : variable externa que afectará a  $G_p$  (perturbación)

$H(s)$ : realimentación; serán sensores/transductores para medir la salida  $C$ , luego debe reinyectarse a la entrada mediante acondicionadores de señal.



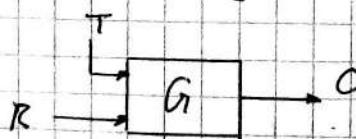
Cuando cortamos el lazo en  $\text{ff}$ , en un sistema la función de transferencia de lazo abierto nos queda:

$$F_{TAA} = G_p \cdot H$$

23/3/16

• Un sistema de Lazo Abierto, la entrada no tiene información de lo que ocurre a la salida.

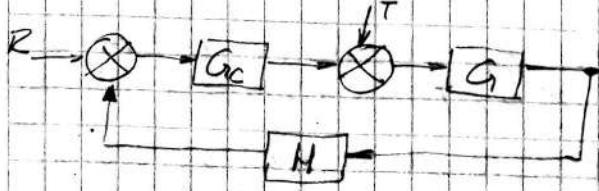
c) Que sucede si junto con la entrada, existe una perturbación?



Por ser un SLIT, se tiene que  $C$ :

$$C = \underset{T=0}{R \cdot G} + \underset{R=0}{T \cdot G} \quad (\text{superposición})$$

• En un sistema de Lazo Cerrado, se obtendrán respuestas debida a la perturbación y otra debida a la entrada. (se aplica superposición)



Queda:

$$G_T = \frac{G}{1 + G_c \cdot G \cdot H}$$

•  $C$  debido a  $T$ , pasivado  $R$

NOTA

$$|C_R|_{T=0} = \frac{G_C \cdot G}{1 + G_C \cdot G \cdot H} \quad (\text{ambas salen por superposición})$$

↳ C debido a R, pasivado T

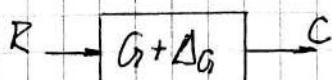
Si el producto  $G_C \cdot G \cdot H \gg 1$ , obtenemos que:

$$|C_T|_{T=0} = \frac{1}{G_C \cdot H} = \frac{|C_R|}{G_C}; \quad |C_R|_{T=0} = \frac{1}{H}$$

- Esto significa que la acción de la perturbación T respecto de la señal de entrada R, se ve disminuida en  $G_C$  veces.

- ¿Qué sucede al sistema si hay un cambio en los elementos <sup>(parámetros)</sup> de la planta? Ya sea por temperatura, obsolescencia de los componentes, etc.

- En Lazo Abierto:

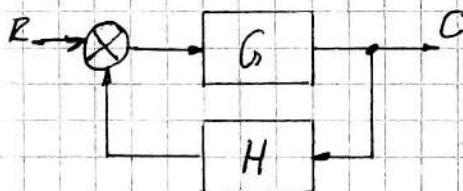


$$C = R \cdot G + \Delta G \cdot R$$

"la variación de la planta, se ve reflejada a la salida"

- \* Por eso en los sistemas de L.A., los componentes deben ser de muy buena calidad, para que no haya grandes variaciones y que éstas afecten el resultado de la salida.

- En Lazo Cerrado:



$$C = \frac{G}{1 + G \cdot H}$$

debo hallar el cambio de C respecto de una variación de G.

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \left[ \frac{1 + GH - GH}{(1 + GH)^2} \right] R = \underbrace{\frac{R}{1 + GH}}_{G \text{ nominal}} \cdot \frac{1}{1 + GH}$$

$\frac{\partial C}{\partial G}$

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \frac{C}{G} \cdot \frac{1}{1 + G \cdot H} \quad \therefore \quad \frac{\partial C}{C} = \frac{\partial G}{G} \cdot \frac{1}{1 + G \cdot H}$$

$\downarrow$  nominales

Significa que si por ej.: la variación de G respecto a su valor nominal es un 10%, la variación de la salida respecto a su nominal se ve disminuida en igual cantidad.

Esto es efecto de la realimentación; ello hace que los elementos usados no necesariamente sean de altísima calidad.

Inconvenientes de L.C. → los de L.A. son estables, mientras que al cerrar el lazo, pueden hacerse inestables.

• La inestabilidad depende de la ecuación característica  $1 + GH$ ; para que sea estable, las raíces a parte real de  $1 + GH$  deben ser negativas.

NOTA: También el criterio BIBO

Línealización de funciones. → Libro Ogata p 42 (54 en PDF)

Si se tiene un función analítica, simplemente valuada en un dominio suficientemente conexo, admite un desarrollo por serie de potencias, ej Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{df}{dx}(x-x_0) \right|_{x=x_0} + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2}(x-x_0)^2 \right|_{x=x_0} + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3}(x-x_0)^3 \right|_{x=x_0} + \dots$$

Un sistema es NO Lineal si no cumple con el principio de superposición.

→ se desprecian los términos de mayor orden

$$f(x) - f(x_0) = K_x(x - x_0) \quad (1)$$

$$K_x = \text{cte} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

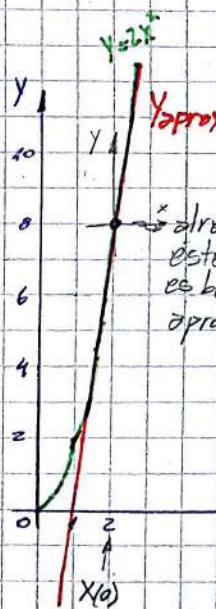
$$\Delta f = K_x \cdot \Delta x \rightarrow \text{me queda una relación lineal}$$

\* De esta forma, a un sistema no lineal se puede linealizarlo en un rango en el cual esto se cumple.

Ejemplo:

$$y = z \cdot x^2 \quad \text{no lineal}$$

$x_{(0)} = z \rightarrow$  alrededor de este punto se deseza linearizar



$1,8 \leq x \leq 2,2 \rightarrow$  rango de linealización válido

$$\text{Promedio} = \frac{1,8 + 2,2}{2} = 2 \Leftrightarrow x_0$$

para aproximar a la función  $y = z \cdot x^2$ , punto de (1).

$$f(x) = f(x_0) + K_x(x - x_0)$$

$f(x)$ : función aproximada

$f(x_0)$ : función a aproximar validado en el punto de approximación

$$f(x_0) = z \cdot x_{(0)}^2 = 8$$

$K_x = \frac{d}{dx} \left. z \cdot x^2 \right|_{x=x_0} = 4x \Big|_{x_{(0)}} = 8$

$$K_x = \frac{d}{dx} \left. z \cdot x^2 \right|_{x=x_0} = 4x \Big|_{x_{(0)}} = 8$$

$$f(x) = Y_{\text{aprox}} = 8 + 8(x - z)$$

$$Y_{\text{aprox}} = 8x - 8 \quad \text{cortes en } \begin{cases} x=1 \\ y=-8 \end{cases}$$

Analizando a  $Y$  y  $Y_{\text{aprox}}$  en el rango de aproximación:

$$Y_{1,8} = 2 \cdot (1,8)^2 = 6,48$$

$$Y_{\text{aprox}, 1,8} = 8(1,8) - 8 = 6,4$$

$$Y_{2,2} = 2 \cdot (2,2)^2 = 9,68$$

$$Y_{\text{aprox}, 2,2} = 8(2,2) - 8 = 9,6$$

Hay una diferencia de 0,08 entre cada uno. El error relativo es los extremos:

$$E_{R, 1,8} = \frac{Y_m - Y_R}{Y_R} = \frac{0,08}{6,48} = 0,01234 = 1,234\%$$

NOTA

Línealización de funciones → Libro Agata p 12 (54 en PDF)

Si se tiene un función analítica, simplemente válida en un dominio suficientemente conexo, admite un desarrollo por serie de potencias, ej Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x-x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0} + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x-x_0)^2}{dx^2} \Big|_{x=x_0} + \frac{1}{3!} \frac{d^3f(x-x_0)^3}{dx^3} \Big|_{x=x_0} + \dots$$

↓ → se desprecian los términos de mayor orden  
que sea  
lineal

$$f(x) - f(x_0) = K_x(x-x_0) \quad ①$$

$$K_x = \text{cte} = \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

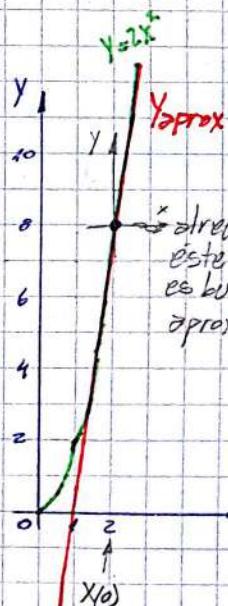
$$\Delta f = K_x \cdot \Delta x \rightarrow \text{me queda una relación lineal}$$

\* De esta forma, a un sistema no lineal se puede línearizarlo en un rango en el cuál esto se cumple.

Ejemplo:

$$y = 2x^2 \quad \text{no lineal}$$

$x_0=2$  → alrededor de este punto se desea linearizarlo



$1,8 \leq x \leq 2,2 \rightarrow$  rango de linearización válido

$$\text{Promedio} = \frac{1,8 + 2,2}{2} = 2 \Leftrightarrow x_0$$

para aproximar a la función  $y = 2x^2$ , punto de ①.

$$f(x) = f(x_0) + K_x(x-x_0)$$

$f(x)$ : función aproximada

$f(x_0)$ : función a aproximar válida en el punto de aproximación

$$f(x_0) = 2 \cdot x_0^2 = 8$$

$K_x = \frac{d}{dx} \Big|_{x=x_0}$  de la  $f$  a aproximar  
valida en el punto de aproximación

$$K_x = \frac{d}{dx} 2x^2 \Big|_{x=x_0} = 4x \Big|_{x_0} = 8$$

$$f(x) = Y_{\text{aprox}} = 8 + 8(x-2)$$

$$Y_{\text{aprox}} = 8x - 8 \quad \text{cortes en } \begin{cases} x=1 \\ y=-8 \end{cases}$$

Analizando a  $y$  y  $Y_{\text{aprox}}$  en el rango de aproximación:

$$Y_{1,8} = 2(1,8)^2 = 6,48$$

$$Y_{\text{aprox}, 1,8} = 8(1,8) - 8 = 6,4$$

$$Y_{2,2} = 2(2,2)^2 = 9,68$$

$$Y_{\text{aprox}, 2,2} = 8(2,2) - 8 = 9,6$$

Hay una diferencia de 0,08 entre cada uno. El error relativo en los extremos:

$$E_{R_{1,8}} = \frac{V_m - V_R}{V_R} = \frac{0,08}{6,48} = 0,01234 = 1,234\%$$

$$\epsilon_{R_{22}} = \frac{V_m - V_R}{V_R} = \frac{0,08}{9,68} = 0,00826 \rightarrow 0,826\%$$

Al hacer la linearización, hemos trasladado el eje coordenado al punto (para el ej. punto (2,8)), así luego trabajamos con los incrementos alrededor de dicho punto.

De tener dos variables, sería:

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} (y-y_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} (x-x_0)(y-y_0)$$

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = K_x \cdot (x-x_0) + K_y \cdot (y-y_0)$$

$$\Delta f = K_x \cdot \Delta x + K_y \cdot \Delta y \quad f(x,y) = K_x \cdot (x-x_0)$$

• En este caso, la aproximación es el plano tangente.

Para linealizar a una función:

$$f(x)_{\text{aprox}} = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)$$

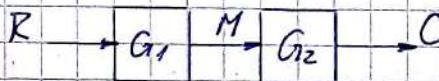
O en Z variables:

$$f(x,y)_{\text{aprox}} = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} (y-y_0)$$

└ desprecia

Diagramas de Bloques. → Libro Ogata p17 (29 en PDF)

\*Sistema en serie:

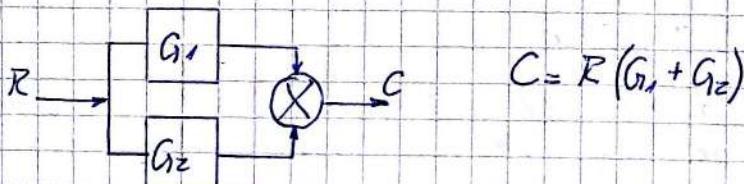


$$C = (G_1 \cdot G_2) \cdot R$$

P/ q  $h_1 * h_2$  sea cierto  
G1 no debe cargar a G2

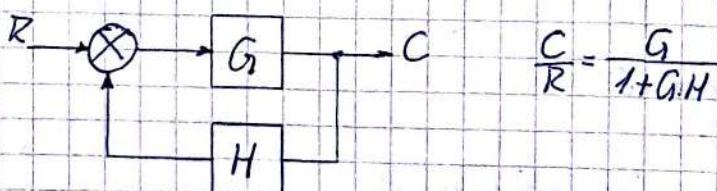
$$C(t) = h_1 * h_2 * r(t)$$

\*Sistema en paralelo:



$$C = R (G_1 + G_2)$$

\*Sistema realimentado:



$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

\*Estos son las conexiones básicas; así diagramas más complejos se pueden ir analizando/resumiendo en diagramas básicos para su simplificación.

Sin embargo, conforme se simplifica el diagrama de bloques, las funciones de transferencia de los bloques nuevos se vuelven más complejas, debido a que se generan nuevos polos y ceros.

$$\epsilon_{L_{22}} = \frac{V_m - V_k}{V_k} = \frac{0,08}{9,68} = 0,00826 \rightarrow 0,826\%$$

Al hacer la linearización, hemos trasladado el eje ej. punto  $(x_0, y_0)$ , así luego trabajamos con los in dicho punto.

De tener dos variables, sería:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (x-x_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (y-y_0) + \dots$$

$\hookrightarrow$  despreciamos estos términos

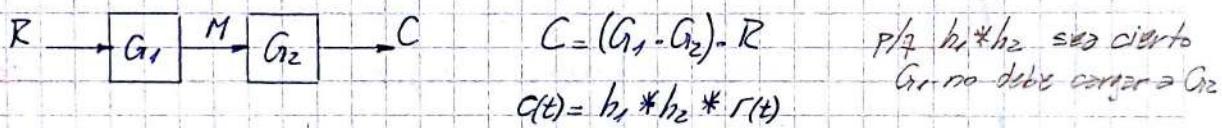
$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = K_x \cdot (x-x_0) + K_y \cdot (y-y_0)$$

$$\Delta f = K_x \cdot \Delta x + K_y \cdot \Delta y \quad f(x, y) = K_x \cdot (x-x_0) + K_y \cdot (y-y_0) + f(x_0, y_0)$$

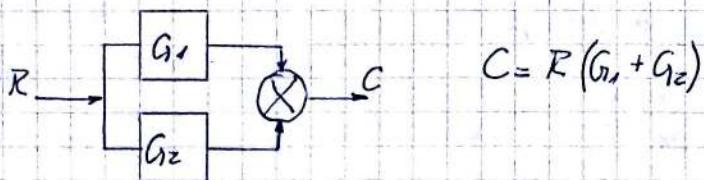
- En este caso, la aproximación es el plano tangente al punto  $(x_0, y_0)$ .

### Diagramas de Bloques → Libro Ogata p17/29 en PDF

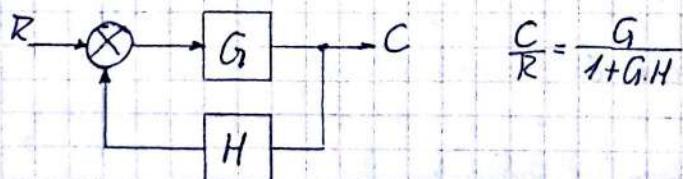
\*Sistema en Serie:



\*Sistema en Paralelo:



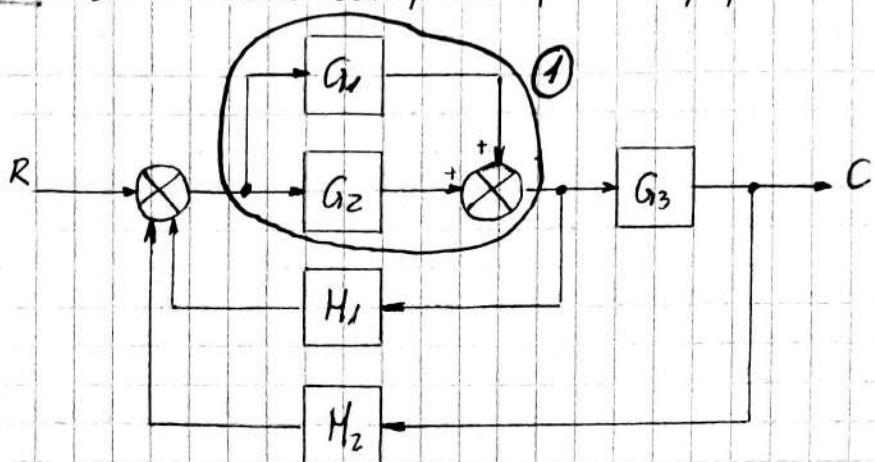
\*Sistema Realimentado:



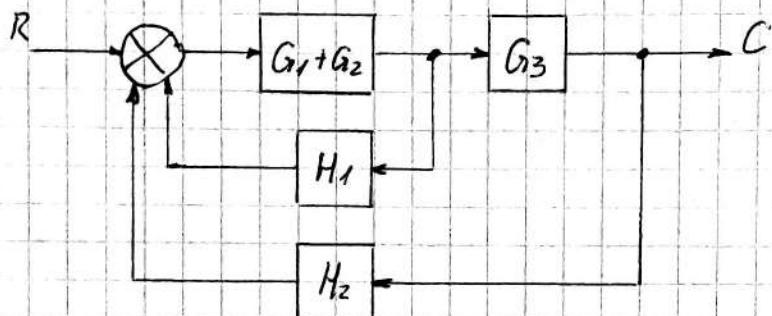
\*Estos son las conexiones básicas; así diagramas más complejos se pueden ir analizando/resumiendo en diagramas básicos para su simplificación.

Sin embargo, conforme se simplifica el diagrama de bloques, las funciones de transferencia de los bloques nuevos se vuelven más complejas, debido a que se generan nuevos polos y ceros.

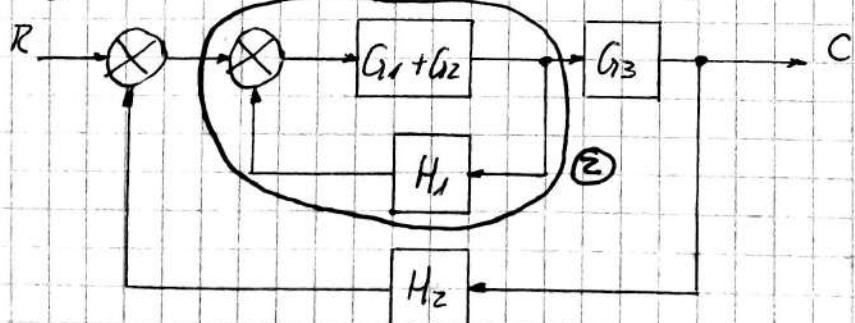
Ejemplo: un sistema cualquiera para simplificar



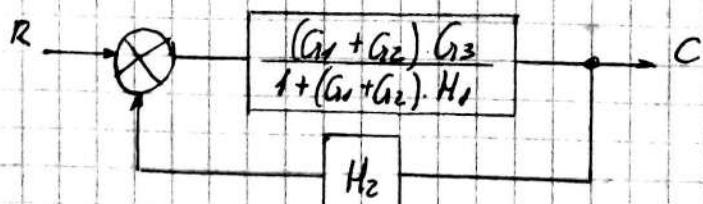
Decimos que ① es un sistema paralelo, por lo tanto



Luego, el sumador de entrada, se lo puede separar en dos, tal que:



② es un sistema realimentado, el cual queda:



Obteniendo:

$$\frac{C}{R} = \frac{(G_1 + G_2) \cdot G_3}{1 + (G_1 + G_2) H_1}$$

$$1 + \frac{(G_1 + G_2) G_3 \cdot H_2}{1 + (G_1 + G_2) H_1}$$

## Diagramas de Flujo de Señal

1h3min  
Libro Ruc p89 (p113 en PDF)

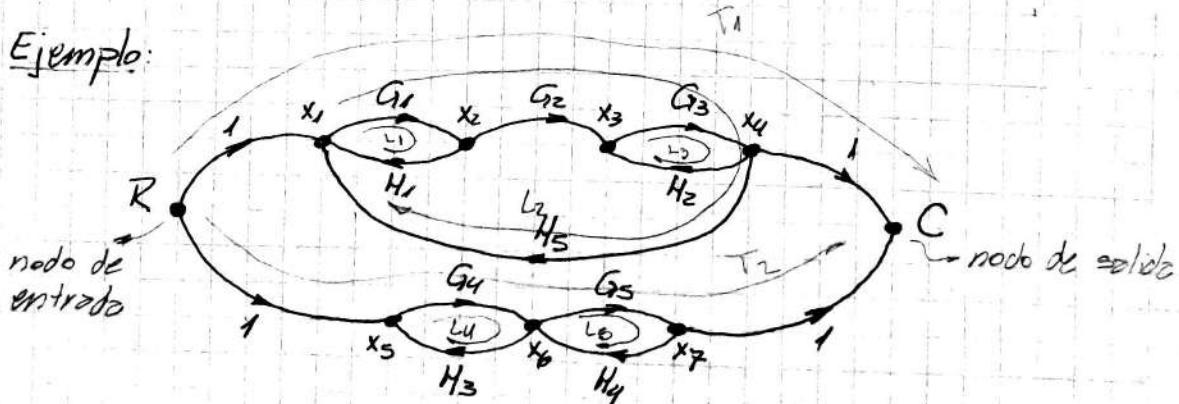
Se usan para resolver ecuaciones algebraicas y sistemas lineales.

Se caracterizan por:

- **Nodos** → representan variables
- **Ramas** → unen los nodos; varias ramas forman una trayectoria
- **Ganancia de Rama** → transmitancia, que hace que la salida sea la entrada (variable) por la rama.
- **Nodo de Entrada** → es un nodo en el cual únicamente salen ramas; sería una fuente.
- **Nodo de Salida** → es un nodo en el cual únicamente llegan ramas
- **Trayectoria Directa** → entre el nodo de entrada y el nodo de salida, o la sucesión de ramas, en la misma dirección, sin pasar 2 veces por el mismo nodo.
- **Ganancia de Trayectoria** → es el producto de las ganancias de todas las ramas que forman esa trayectoria.
- **Malla o Trayectoria Cerrada** → es una sucesión de ramas, en el cual vuelve al nodo de origen sin pasar 2 veces por un nodo intermedio.
  - Lazo



Ejemplo:



$$\text{Trayectorias Directas: } T_1 = 1 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot 1$$

$$T_2 = 1 \cdot G_4 \cdot G_5 \cdot 1$$

$$\text{Lazos: } L_1 = G_1 \cdot H_1$$

$$L_4 = G_4 \cdot H_3$$

$$L_2 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot H_5$$

$$L_5 = G_5 \cdot H_4$$

$$L_3 = G_3 \cdot H_2$$

¿Cómo sería la variable  $x_1$ ? 1b/15min

$$x_1 = R + H_1 \cdot x_2 + H_2 \cdot x_4$$

- Cada nodo (variable), se forma por la suma de todas las ramas que llegan o "entran" al nodo en cuestión.

¿  $x_2$ ? 1b/16min

$$x_2 = G_1 \cdot x_1$$

Regla de Mason. Libro Kuo p 96 (p 120 en PDF)

Para poder aplicarla, siempre hay que tomar una entrada y una salida; una salida respecto a una entrada determinada.

$$\frac{C}{R} = \sum_{n=1}^N \frac{T_n \cdot \Delta_n}{\Delta}$$

lazo disjunto  $\rightarrow$  lazos que no tienen nodos en común  
 $\Delta$ : cont. de trayectorias que tenemos

$\Delta = 1 - \sum$  ganancias de todos los lazos +  $\sum$  producto de las ganancias de todos los lazos disjuntos, tomados de 2 en 2 -  $\sum$  producto de las ganancias de todos los lazos disjuntos, tomados de 3 en 3 +  $\sum \dots 4 \text{ en } 4 \dots - \sum \dots 5 \text{ en } 5 \dots$

En base al Ejemplo:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + [L_1 \cdot L_3 + L_1 \cdot L_4 + L_1 \cdot L_5 + L_4 \cdot L_3 + L_3 \cdot L_5 + L_2 \cdot L_4 + L_2 \cdot L_5] - [L_1 \cdot L_3 \cdot L_4 - L_1 \cdot L_3 \cdot L_5]$$

$\Delta_{12} = 1 - \sum$  ganancias de los lazos que no están en la trayectoria en cuestión +  $\sum$  disjuntos 2 en 2. -  $\sum \dots 3 \text{ en } 3 \dots +$

En base al Ejemplo:

$$\Delta_1 = 1 - (L_4 + L_5)$$

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 \cdot L_3$$

29/3/16

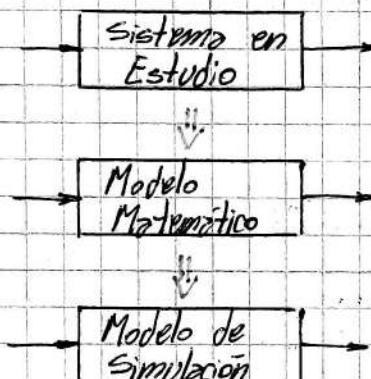
## Simulación de sistemas. Dinámicos.

Trabajamos con MODELOS que son aproximaciones de la realidad (nunca son exactamente iguales) ya que hay ciertas dinámicas que no se modelan, debido a que son muy rápidas, no se encuentran los modelos matemáticos para describirlos, etc.

Los MODELOS sirven a los fines del diseño pero no hay que suponer que es fielmente lo que sucede en la realidad.

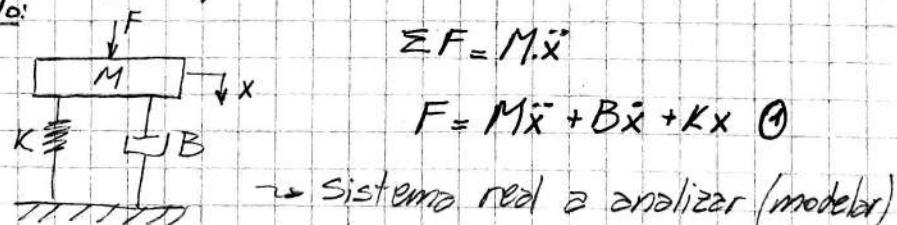
Para un sistema (real) en estudio tratamos de describirlo en un modelo matemático, ello nos permite hacer relaciones de cómo interactúan las variables intervenientes de interés. Aquí, aplicaremos linearización, rango de validez, etc.

Obtenido el modelo matemático, se pasa al modelo de simulación, cuyos ensayos se hacen por computadora y de forma real (telemetría). Generalmente, las expresiones matemáticas son de tipo integro-diferencial de orden  $n$ .



Para la simulación originalmente se trabajaba con computadoras analógicas, esto se refiere a que cualquier sistema en estudio (real) puede ser equivalente (bajo ciertas condiciones) a otro sistema conocido y de más fácil armado/manipulación.

Ejemplo:



Supongamos ahora el sistema:

$$V_t = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{Siendo: } i = \frac{dQ}{dt}$$
$$V_t = RQ + L\ddot{Q} + \frac{1}{C} Q \quad \text{circled 2}$$

Comparando  $\textcircled{1}$  y  $\textcircled{2}$ :

$$F = V_t, \quad M = L, \quad B = R, \quad K = \frac{1}{C}, \quad x = Q$$

Vemos que son EXACTAMENTE IGUALES. Por eso es más fácil cambiar componentes  $R, L$  y  $C$  que modificar masas, resortes y amortiguadores (para

NOTA

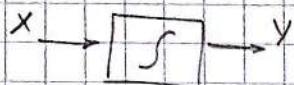
este ejemplo).

Esta analogía se denomina **Analogía Fuerza-Tensión**, pero existen otras tantas.

Lo más importante de las simulaciones son los **integradores**; es posible usar con **derivadores** pero éste trabaja cuando hay cambios, si existe ruido (que es de forma impulsiva) se amplifica y pasa a la siguiente etapa, por eso no es aconsejable usarlos, y se emplean los **integradores** ya que son "suavizadores" o promediadores ( $\lim \Sigma$ )  
Supongamos:

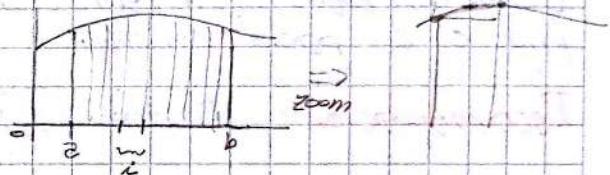
$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6x = \ddot{x} + 6x$$

Se despejará la derivada de mayor orden y se integrará la ecuación obtenida.



En el cálculo numérico hay muchas maneras de hacer la integración. La forma básica es:

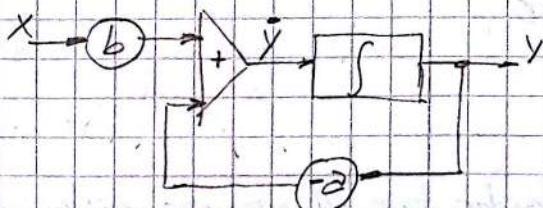
$$A = \sum f_i \cdot \Delta x_i$$



Segundo Ejemplo:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} = 6x$$

$$\ddot{y} = 6x - 2\dot{y} \rightarrow \text{expresamos ésto en diagrama en bloques}$$



con lo cual obtenemos un sistema de Lazo Cerrado; si se tienen errores en el cálculo de y, al realimentarse, los errores se realimentan, se propagan

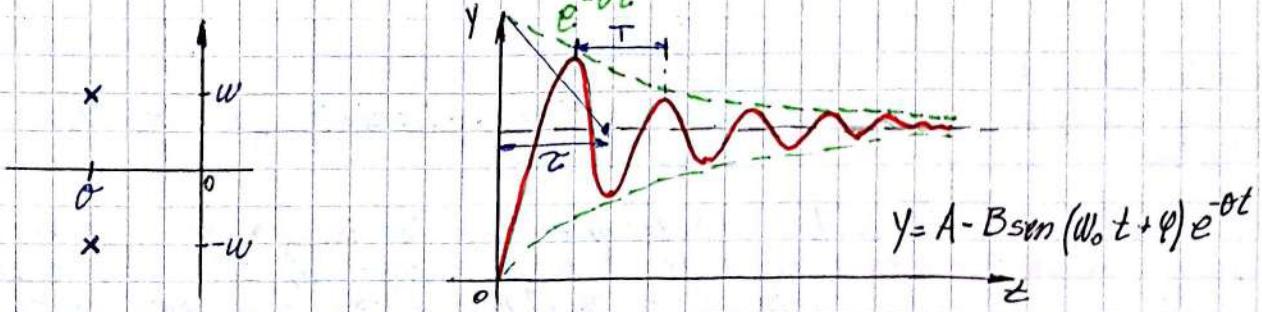
Un sistema físico que es estable, se puede hacer inestable por un mal cálculo numérico debido a no elegir método ni paso de integración adecuado.

El paso de integración tiene que ver con las constantes de tiempo involucradas en el proceso.

A tener en cuenta

- Método de Integración
- Paso de Integración

Ejemplo: un sistema de 2º Orden cuya respuesta al  $u(t)$  es:



Si el  $T \approx \tau$ , puedo tomar uno u otro para determinar el paso de integración, por lo menos:

1/10 de la Const. de Tiempo más pequeña del sistema

1/10 del Periodo de la frecuencia más alta del sistema

Cómo métodos de integración hay muchos, que pueden ser de paso fijo o de paso variable.

Recomendación: Método de Runge-Kutta 4º Orden (paso fijo)

Otros métodos → Euler-Heun, Euler mejorado.

Transformando por Laplace la ecuación diferencial de 3º Orden antes propuesta:

$$[s^3 + 6s^2 + 11s + 6] Y(s) = (s+6) X(s)$$

Siendo la  $F_T = G(s)$  cuando las C.I. = 0:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

en la simulación, se pueden incluir las C.I.

Dividimos al Numerador y al Denominador por el máximo orden del Denominador en s. (en este caso es  $s^3$ )

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}}$$

Dividir por s, implica integrar

47min

## 1º Método de Programación Directa.

$$Y + 6Ys' + 11Ys'' + 6Ys''' = Xs^2 + 6Xs^3$$

Despejando Y:

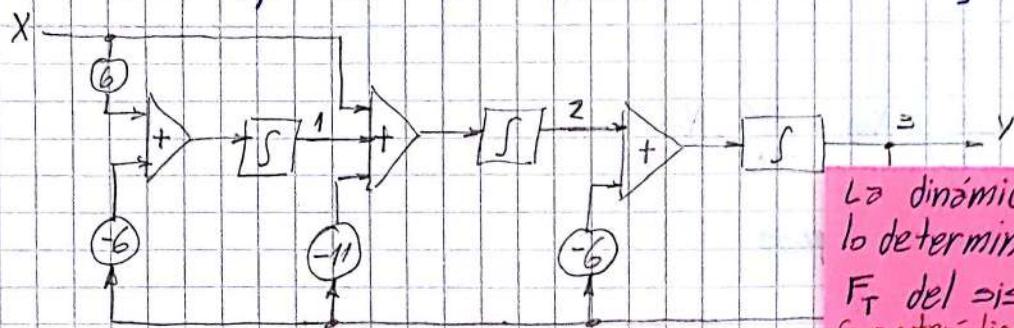
$$Y = (6X - 6Y)s^{-3} + (X - 11Y)s^{-2} - 6Ys^{-1}$$

Ahora expresamos el miembro derecho en factor de  $s'$ , tal que:

NOTA

$$Y = \{[(6X - 6Y)s^2 + (X - 11Y)]s^2 - 6Y\}s^2$$

Así, hemos expresado toda la ecuación mediante integraciones de 1º Orden.



La dinámica de los sistemas lo determinan los polos de la  $F_T$  del sistema. (o sea la Ecuación Característica de la  $F_T$ )

## 2º Método de Variables de Fase o Forma Cánonica Controlable

Otra forma es multiplicar y dividir por un polinomio conocido  $Q(s)$

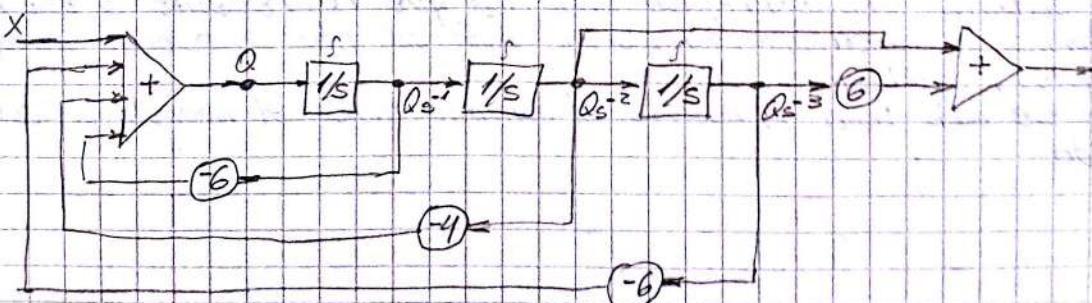
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}} = \frac{Q(s)}{Q(s)} \rightarrow \text{no cambia}$$

Entonces:

$$Y(s) = Q \cdot s^{-2} + 6 \cdot Q s^{-3}$$

$$X(s) = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

Ahora supongo que a  $Q$  lo dispongo y lo multiplico por  $1/s$  (equivale a integrarlo) obtengo  $Qs^{-1}$ , y así sucesivamente los órdenes que se requiera.

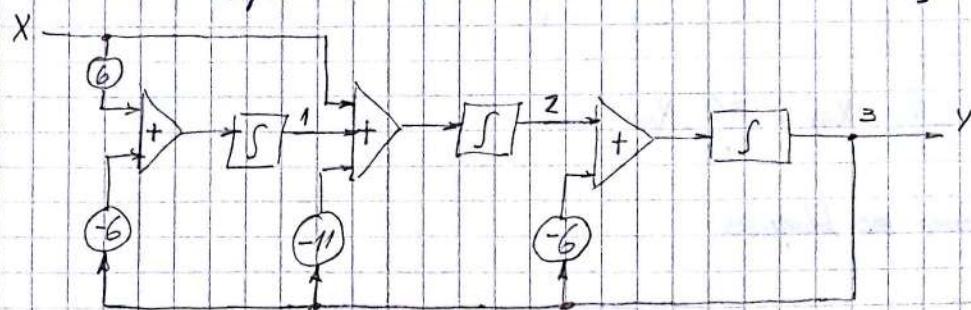


**Importante!** los dos sistemas (1º y 2º) representan EXACTAMENTE la misma  $F_T$ , pero internamente NO son iguales.

La  $F_T$  son una representación externa de los sistemas

$$Y = \{[(6X - 6Y)s^1 + (X - 11Y)]s^{-1} - 6Y\}s^{-1}$$

Así, hemos expresado toda la ecuación mediante integraciones de 1º Orden.



### 2º Método de Variables de Fase o Forma Cánonica Controlable

Otra forma es multiplicar y dividir por un polinomio conocido  $Q(s)$

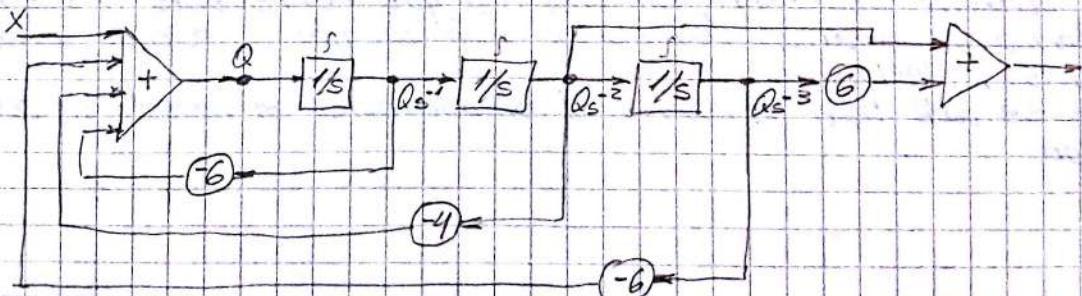
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)} \rightarrow \text{no cambio}$$

Entonces:

$$Y(s) = Q \cdot s^{-2} + 6 \cdot Q s^{-3}$$

$$X(s) = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

Ahora supongo que a  $Q$  lo dispongo y lo multiplico por  $1/s$  (equivale a integrarlo) obtengo  $Qs^{-1}$ , y así sucesivamente los órdenes que se requiera.



**¡Importante!** los dos sistemas (1º y 2º) representan EXACTAMENTE la misma  $F_T$ , pero internamente NO son iguales

La  $F_T$  son una representación externa de los sistemas

### 3º Método de Forms Canónica diagonalizada (expresión en parámetro)

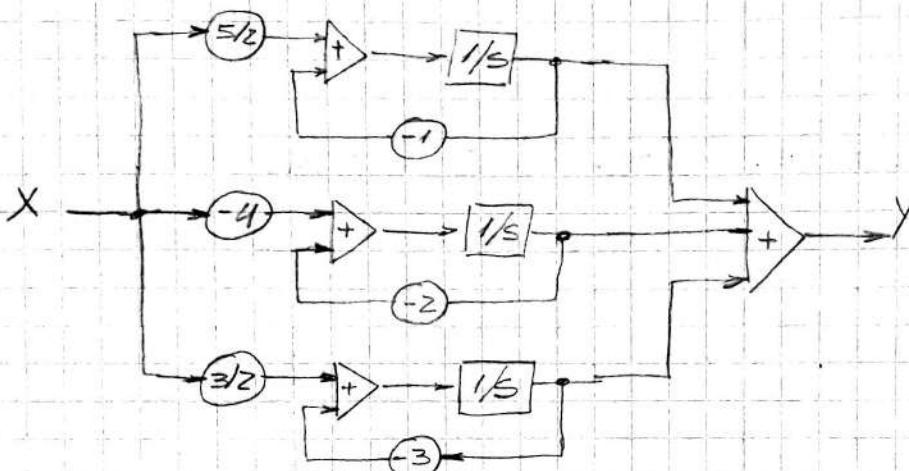
Es a la  $F_T$  expandirla en fracciones simples

$$G(s) = \frac{s+6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{5/2}{(s+1)} + \frac{-4}{(s+2)} + \frac{3/2}{(s+3)} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Despejando a  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{5/2}{s+1} \cdot X(s) - \frac{4}{s+2} \cdot X(s) + \frac{3/2}{s+3} \cdot X(s)$$

Armamos el diagrama de bloques:

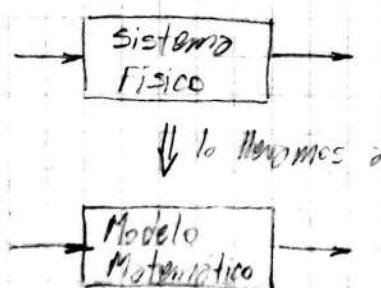


30/3/16

Modelos Matemáticos de los sistemas físicos - Libro Ogata p63 (75 am PSF)

Para un problema determinado, lo que se busca es de qué manera es posible obtener una expresión analítica que represente a ese modelo de tal forma de analizarlo/simularlo. Serán del tipo ecuaciones integro-diferenciales, algebraicas, etc.

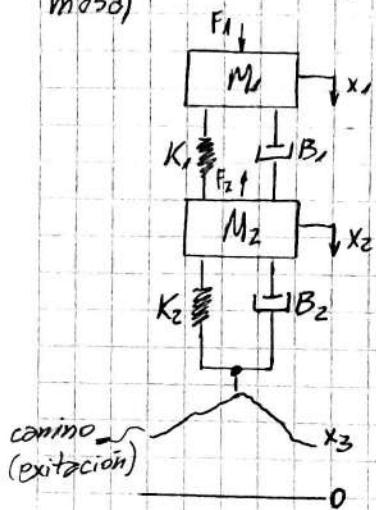
Siempre se debe tener presente el dominio donde el modelo en cuestión es válido.



"Comprender el problema es lo fundamental" 1º tener claridad sobre el problema

## Sistemas mecánicos en tracción.

Planteamos un ejemplo de un amortiguador de un automóvil (rueda, freno, muelle).



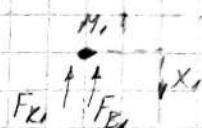
$B_2$  representa el amortiguamiento del neumático.

Para el modelo se hacen algunas restricciones:

- Movimiento sólo en el plano (de lo bajo)
- Masas puntadas
- Las masas son mucho mayores que las masas de  $K$  y  $B$

Con esto, planteamos:

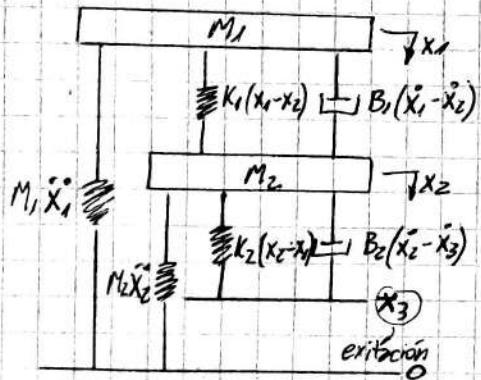
$$\sum F = M \ddot{x}$$



$$(F_1) 0 = M_1 \ddot{x}_1 + B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1(x_1 - x_2)$$

$$(-F_2) 0 = M_2 \ddot{x}_2 + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1(x_2 - x_1) + K_2(x_2 - x_3) + B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

Para analizarlo, recurrimos a un diagrama equivalente:



Hay un término que produce la aceleración de las masas  $M$  que está referido a la referencia 0, generando los resortes  $M \ddot{x}$ .

Todo el sistema actúa como filtro, de tal manera de minimizar las irregularidades del camino hacia el habitáculo (sistema) de los pasajeros.

Esto representa a un sistema pasivo; también existen sistemas activos.

- Determinar la relación:  $\frac{x_1}{x_3}$  y  $\frac{x_2}{x_3}$

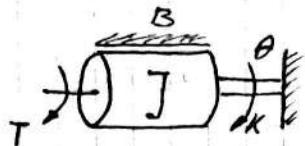
$x_1$ : habitáculo

## Sistemas en rotación

32min

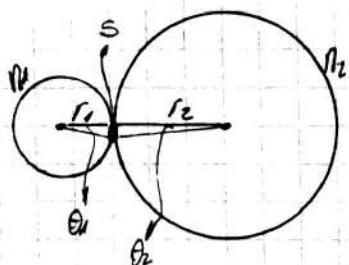
$$\text{Tenemos que: } \Sigma T = J \cdot \alpha = J \cdot \ddot{\theta} = J \cdot \dot{\omega}$$

Suponemos un sistema:



las ecuaciones son las mismas y se plantea de igual forma que en el anterior sistema.

Ejemplo:



en rotación son importantes los elementos que transfieren par, como ser los engranajes que actúan como poleas o como transformadores

Suponemos 2 engranajes, cuya relación es:

$$\frac{r_2}{r_1} = n = \frac{N_2}{N_1}$$

$N_2$ : nº de dientes de engranaje 2  
 $N_1$ : nº de dientes de engranaje 1

si el engranaje 1 se movió un  $\theta_1$ , el engranaje 2 se movió  $\theta_2$ . El camino o segmento de arco recorrido  $s$ , es igual para ambos engranajes, por lo que:

$$s = \theta_1 \cdot r_1 = \theta_2 \cdot r_2$$

Entonces:

$$\theta_2 = \theta_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} \quad \text{o} \quad \theta_1 = \theta_2 \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

Las velocidades angulares:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 \cdot n \quad \text{o} \quad \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1}{n}$$

Aceleración angular:

$$\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 \cdot n \quad \text{o} \quad \ddot{\theta}_2 = \frac{\ddot{\theta}_1}{n}$$

Las vueltas en el punto de unión, las fuerzas son iguales:

$$T_1 = r_1 \cdot F$$

$$T_2 = r_2 \cdot F$$

$$\therefore T_2 = T_1 \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

es una polea redonda

Transformando ambas ecuaciones:

$$0 = M_1 \cdot s^2 X_1 + B_1(sX_1 - sX_2) + K_1(X_1 - X_2)$$

$$\text{Holler: } \frac{X_2}{X_3} \text{ y } \frac{X_1}{X_3}$$

$$0 = [M_1 \cdot s^2 + B_1 \cdot s + K_1] \cdot X_1 - [B_1 \cdot s + K_1] \cdot X_2 \quad \textcircled{1}$$

$$0 = M_2 \cdot s^2 X_2 + B_2(sX_2 - sX_1) + K_2(X_2 - X_3) + B_2(sX_2 - sX_3)$$

$$0 = [M_2 \cdot s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)] X_2 - [B_2 \cdot s + K_2] X_1 - [s + K_2] X_3 \quad \textcircled{2}$$

$$\text{De } \textcircled{1}: \quad X_2 = \frac{[M_1 \cdot s^2 + B_1 \cdot s + K_1]}{B_1 \cdot s + K_1} \cdot X_1$$

En \textcircled{2}:

$$0 = [M_2 \cdot s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)] \cdot X_2 - [B_2 \cdot s + K_2] X_1 - [s + K_2] X_3$$

$$0 = \frac{[M_1 M_2 s^4 + M_2 B_1 s^3 + M_2 K_1 s^2 + (B_1 + B_2) M_1 s^3 + (B_1 + B_2) B_1 s^2 + (B_1 + B_2) K_1 s^2 + (K_1 + K_2) M_1 s^2 + (K_1 + K_2) B_1 s + (K_1 + K_2) K_1] \cdot X_2}{B_1 \cdot s + K_1} -$$

$$\rightarrow -[B_2 \cdot s + K_2] X_1 - [s + K_2] X_3$$

$$0 = \frac{[M_1 M_2 s^4 + (M_2 B_1 + (B_1 + B_2) M_1) s^3 + (M_2 K_1 + (B_1 + B_2) B_1 + (K_1 + K_2) M_1) s^2 + (K_1 + K_2) B_1 \cdot s + (B_1 + B_2 + K_1 + K_2) K_1] \cdot X_1}{B_1 \cdot s + K_1} +$$

$$\rightarrow -[B_2 \cdot s + K_2] X_1 - [s + K_2] X_3$$

$$0 = \frac{[M_1 M_2 s^4 + \{M_2 B_1 + (B_1 + B_2) M_1\} s^3 + \{M_2 K_1 + B_1 B_2 + (K_1 + K_2) M_1\} s^2 + (K_1 + K_2) B_1 \cdot s + (B_1 + B_2 + K_1 + K_2) K_1 - (B_1^2 s^2 + 2 B_1 K_1 s + K_1^2)]}{B_1 \cdot s + K_1} +$$

$$\rightarrow -[s + K_2] X_3$$

$$\frac{[M_1 M_2 s^4 + \{M_2 B_1 + (B_1 + B_2) M_1\} s^3 + \{M_2 K_1 + B_1 B_2 + (K_1 + K_2) M_1\} s^2 + \{(K_2 - K_1) B_1\} s + (B_1 + B_2 + K_2) K_1] X_1}{B_1 \cdot s + K_1} = [s + K_2] \cdot X_3$$

$$\frac{X_1}{X_3} = \frac{B_1 \cdot s^2 + s(K_1 + K_2 B_1) + K_1 K_2}{M_1 M_2 s^4 + \{M_2 B_1 + (B_1 + B_2) M_1\} s^3 + \{M_2 K_1 + B_1 B_2 + (K_1 + K_2) M_1\} s^2 + \{(K_2 - K_1) B_1\} s + (B_1 + B_2 + K_2) K_1}$$

$$\frac{X_1}{X_3} = \frac{\frac{B_1}{M_1 M_2} \left( s^2 + \left\{ K_2 + \frac{K_1}{B_1} \right\} s + \frac{K_1 K_2}{B_1} \right)}{s^4 + \left\{ \frac{B_1 + (B_1 + B_2)}{M_1} \right\} s^3 + \left\{ \frac{K_1}{M_1} + \frac{B_1 B_2 + (K_1 + K_2)}{M_1 M_2} \right\} s^2 + \left\{ \frac{(K_2 - K_1) B_1}{M_1 M_2} \right\} s + \frac{(B_1 + B_2 + K_2) K_1}{M_1 M_2}} \quad \boxed{F_{T_1} = \frac{X_1}{X_3}}$$

$$\text{D9 ①. } X_1 = \frac{B_1 s + K_1}{M_1 s^2 + B_1 s + K_1} \cdot X_2$$

En ②:

$$0 = [M_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)] X_2 - [B_1 s + K_1] \cdot \frac{B_1 s + K_1}{M_1 s^2 + B_1 s + K_1} \cdot X_2 - [s + K_2] X_3$$

$$\left\{ \frac{[M_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)] - [B_1 s + K_1] \cdot [B_1 s + K_1]}{M_1 s^2 + B_1 s + K_1} \right\} X_2 = [s + K_2] X_3$$

$$\frac{M_1 M_2 s^4 + M_2 B_1 s^3 + M_2 K_1 s^2 + (B_1 + B_2)M_1 s^3 + (B_1 + B_2)B_1 s^2 + (B_1 + B_2)K_1 s^2 + (K_1 + K_2)M_1 s^2 + (K_1 + K_2)B_1 s + (K_1 + K_2)K_1 - (B_1^2 s^2 + 2B_1 K_1 s + K_1^2)}{M_1 s^2 + B_1 s + K_1} X_2 = [s + K_2] X_3$$

$$\frac{M_1 M_2 s^4 + [M_2 B_1 + (B_1 + B_2)M_1] s^3 + [M_2 K_1 + (B_1 + B_2)B_1 + (K_1 + K_2)M_1 - B_1^2 s^2 + (B_1 + B_2)K_1 + (K_1 + K_2)B_1 - 2B_1 K_1] s + (K_1 + K_2)K_1 - K_1^2}{M_1 s^2 + B_1 s + K_1} \cdot X_2 = (s + K_2) X_3$$

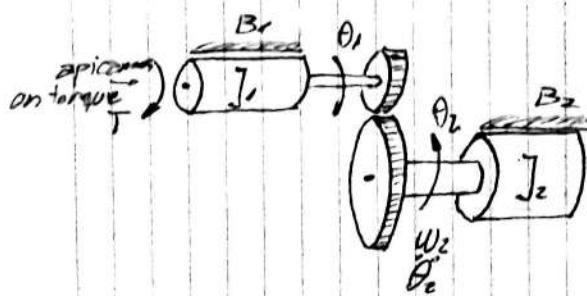
$$(M_1 M_2 s^4 + [M_2 B_1 + (B_1 + B_2)M_1] s^3 + [M_2 K_1 + B_1 B_2 + (K_1 + K_2)M_1] s^2 + [(B_1 + B_2)K_1] s + K_1 K_2) \cdot X_2 = (s + K_2) X_3$$

$$\frac{X_2}{X_3} = \frac{(s + K_2) \cdot (M_1 s^2 + B_1 s + K_1)}{M_1 M_2 s^4 + [M_2 B_1 + (B_1 + B_2)M_1] s^3 + [M_2 K_1 + B_1 B_2 + (K_1 + K_2)M_1] s^2 + [(B_1 + B_2)K_1] s + K_1 K_2}$$

$$\frac{X_2}{X_3} = \frac{\frac{1}{M_2} \left\{ s^3 + \left( K_2 + \frac{B_1}{M_1} \right) s^2 + \frac{K_1}{M_1} (1 + B_1) \cdot s + \frac{K_1 K_2}{M_1} \right\}}{s^4 + \left\{ \frac{B_1 + (B_1 + B_2)}{M_1} \right\} s^3 + \left\{ \frac{K_1 + B_1 B_2 + (K_1 + K_2)}{M_1 M_2} \right\} s^2 + \left\{ \frac{(B_1 + B_2)K_1}{M_1 M_2} \right\} s + \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2}} \quad F_{T_2} = \frac{X_2}{X_3}$$

min 44

Ejemplo 2: cómo se transmiten las cargas en un tren de engranajes y cómo se ven reflejadas en el eje del motor. (eje primario)



el torque aplicado:

$T_L$ : torque de carga  
remanente

$$\text{eje 1: } T = J_1 \ddot{\theta}_1 + B_1 \dot{\theta}_1 + T_L$$

$$\text{eje 2: } nT_L = J_2 \ddot{\theta}_2 + B_2 \dot{\theta}_2 = J_2 \frac{\ddot{\theta}_1}{n} + B_2 \frac{\dot{\theta}_1}{n}$$

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{J_2}{J_1}$$

Entonces:

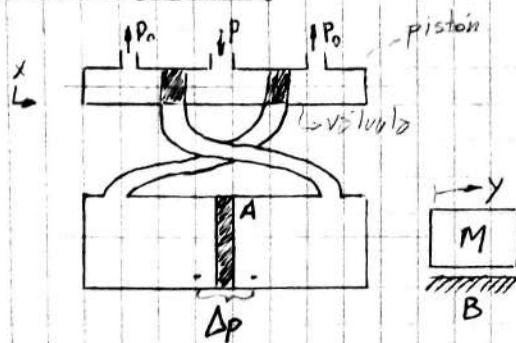
$$T = \left( J_1 + \frac{J_2}{n^2} \right) \ddot{\theta}_1 + \left( B_1 + \frac{B_2}{n^2} \right) \dot{\theta}_1$$

min 50

Esto significa que desde el eje primario (dónde se aplica  $T$ ), el momento de inercia y la fricción se ven disminuida en un factor de  $n^2$ . Y es al revés si lo vemos desde el eje 2, quedando multiplicado por  $n^2 \rightarrow n^2 J_2$ , y  $n^2 B_2$

min 54

Motor hidráulico:



módulo de Bulk infinito

Lo suponemos con varias restricciones:  

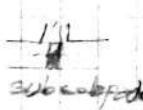
- el líquido hidráulico es incompresible
- no hay deformación de los elementos
- las válvulas son perfectas



caso ideal



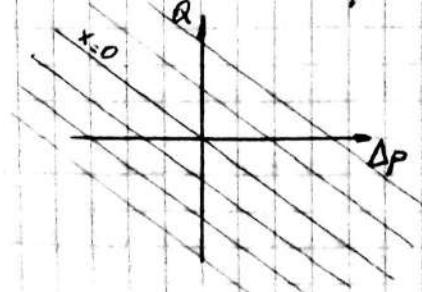
sobre abierto



sub abierto

caso real  
diferencia de presión  
real

- Un sistema como éste responde como (de forma linealizada)



$Q$ : caudal

$\Delta P$ : diferencia de presión

tengamos en equilibrio:

$$Q_0 = 0, x_0 = 0, \Delta P_0 = 0$$

Siendo el caudal  $Q$  proporcional a  $x$  y  $\Delta P$ :

$$Q = K_p x - K_{\Delta P} \Delta P$$

$K_p$  es negativo porque a mayor  $\Delta P$ ,  $Q$  disminuye

La fuerza sobre el pistón:  $F = A \cdot \Delta P = M \ddot{x} + B \dot{x}$

Sabemos que el caudal que ingresa es:

$$Q = P \cdot \frac{dy}{dt} \cdot A = K_p \cdot x - K_{dp} \cdot \Delta p \quad \therefore \Delta p = \frac{K_p \cdot x - P \cdot y \cdot A}{K_{dp}}$$

$y$  velocidad superficial = volumen

Reemplazando  $\Delta p$  en F:

$$F = \frac{(K_p \cdot x \cdot A)}{K_{dp}} - \frac{P \cdot y \cdot A^2}{K_{dp}} = M \ddot{y} + B \dot{y}$$

Como nos interesa hallar la relación entre  $x$  e  $y$ :

$$K_1 \cdot x = M \ddot{y} + \left( B + \frac{P \cdot A^2}{K_{dp}} \right) \dot{y}$$

Transformando por Laplace:

$$K_1 \cdot X(s) = [M s^2 + K_2 \cdot s] Y(s)$$

Entonces:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1 / M}{\left( s + \frac{K_2}{M} \right) s} = \frac{\frac{N_1}{M}}{s} + \frac{\frac{N_2}{M}}{s + \frac{K_2}{M}}$$

1º Orden

1b 9 min

• ¿Qué acción hace el sistema así como está planteado? tenemos un sistema de 1º Orden más un integrador (debido al  $1/s$ ), pasado el transitorio, el sistema sigue en forma de rampa.

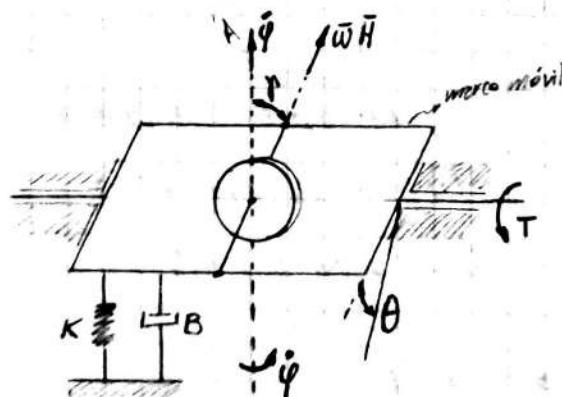
Si se implementa a Lazo Abierto, abrirá que dotarlo de algún elemento que lo pare (ej: finales de carrera).

13/4/16

2 min

### Girómetro

Es un sensor que registra movimientos rotacionales y mide su velocidad angular.



$\bar{\omega}$ : velocidad angular del rotor

$\bar{H}$ : momento cinético

$I_k$ : momento de inercia del rotor

$I_m$ : momento de inercia del marco móvil

$T$ : par de precesión

Consta de un rotor que gira a alta velocidad y genera precesión giroscópica, cuando se da un cambio en su posición del espacio, se generan pares según los vectores actuantes en el sistema.

Se le colocan el resorte  $K$  y el amortiguador  $B$  (entre el marco y el vehículo) para controlar que el eje del rotor coincida con lo perpendicular haciendo nula la cábula  $T$ . El ángulo  $\theta$  es el de interés a medir. (ej. con un pote)

Cuando el rotor está girando, genera:

$$\bar{H} = \bar{J}_R \cdot \bar{\omega}$$

$$\bar{T} = \bar{H} \times \bar{\varphi} \rightarrow \text{por ser un producto vectorial, } \bar{T} \text{ tiene una magnitud definida como: } T = H \cdot \varphi \cdot \sin(\theta) = |\bar{H}| \cdot |\bar{\varphi}| \cdot \sin(\theta)$$

Vemos que la magnitud de la cábula  $T$  varía en forma senoidal. Lo que se debe hacer, como primero medido, es linearizar la función alrededor del punto de trabajo.

El punto de trabajo se da cuando el marco está quieto, o lo que es igual a decir:

$$\theta = \theta_0 = 90^\circ \text{ ó } \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Linearizando por Taylor:

$$T = T|_{\theta_0} + \frac{dT}{d\theta}|_{\theta_0} \cdot (\theta - \theta_0)$$

$T$  genera la rotación del eje del marco

Entonces,  $T|_{\theta_0}$  vale:

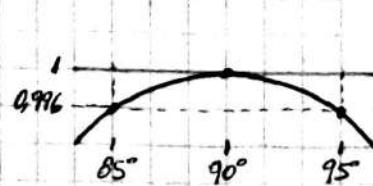
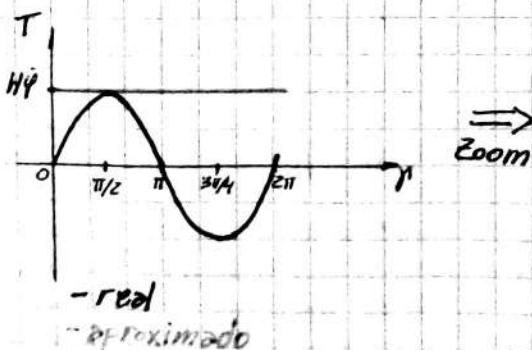
$$T_0 = T|_{\theta_0} = H \cdot \varphi \cdot \sin(90^\circ) = H \cdot \varphi$$

y lo derivado:

$$\frac{dT}{d\theta}|_{\theta_0} = \frac{d}{d\theta} (H \cdot \varphi \cdot \sin(\theta))|_{\theta_0} = H \cdot \varphi \cos(\theta)|_{\theta_0=90^\circ} = 0$$

Así, la cábula  $T$  linearizada es:

$$T = H \cdot \varphi$$



Hemos aproximado el seno con una linea recta alrededor del punto  $\pi/2$ . Al hacer un zoom de la zona, linearizando en una zona de  $90^\circ \pm 5^\circ$ , el error cometido es:

$$\text{Error absoluto} = 1 - 0.996 = 0.04$$

$$\text{Error relativo} = \frac{1 - 0.996}{1} \cdot 100 = 0.4\%$$

El error que se comete por considerar una función lineal en vez de la función seno

en dicha zona, es menos del 1%, lo cual es muy bueno.

Ahora bien, la copla  $T$  se aplica a: vencer la inercia del marco móvil cuando éste se mueve, vencer la oposición que genera  $K$  y  $B$ . Así:

$$T = H \cdot \dot{\varphi} = J_r \cdot \ddot{\theta} + B \cdot \dot{\theta} + K \cdot \theta$$

Aplicando Laplace, encontramos la relación entre la velocidad de entrada  $\dot{\varphi}$  y el ángulo de salida  $\theta$ .

$$H \cdot \dot{\varphi}_{(s)} = \left( J_r \cdot s^2 + B \cdot s + K \right) \cdot \theta_{(s)} \quad \therefore \quad \frac{\theta_{(s)}}{\dot{\varphi}_{(s)}} = \frac{H}{J_r s^2 + B \cdot s + K}$$

$$\frac{\theta_{(s)}}{\dot{\varphi}_{(s)}} = \frac{H/J_r}{s^2 + \frac{B}{J_r} \cdot s + \frac{K}{J_r}} \quad \rightarrow \text{sistema de } 2^{\circ} \text{ Orden; depende de los valores de } K \text{ y } B \\ \text{que serán elegidos para no hacerlo oscilatorio}$$

Lo analizado hasta aquí es un modelo muy limitado, ya que se suponen ciertos cosas como:

$\omega_{\text{rotor}} = \text{cte}$ ; no hay deformación en el marco móvil (que sea rígido); el resorte y el amortiguador son lineales en estos rangos de trabajo

27,40 min

Por ejemplo: si le aplicamos un estallón a la entrada (una velocidad constante de  $\dot{\varphi}_{(s)}$ ), tendrá un transitorio al principio, pero luego se queda quieto.

o) ¿Qué elemento soporta la copla generada? Es el resorte

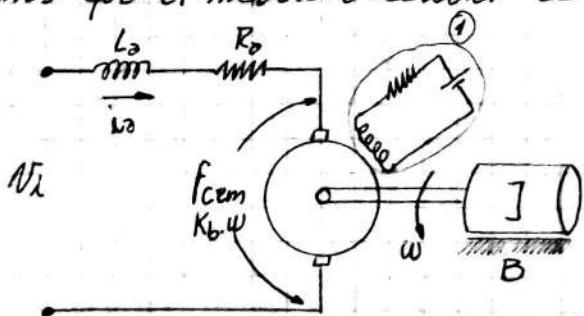
Analizando por el TVF para la entrada escalón:

$$\theta_{(s)} = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{H/J_r}{s^2 + \frac{B}{J_r} \cdot s + \frac{K}{J_r}} \cdot \frac{A}{s} = \frac{AH}{K} \quad \rightarrow \text{esto es igual a } \theta_{\text{reg}} \text{ (ángulo de régimen)} \\ A: \text{es la amplitud de giro de } \dot{\varphi} \\ \hookrightarrow \text{es más fácil ajustar el resorte } K$$

28 min

### Motor de C.C. controlado por inducido.

Suponemos que el modelo a estudiar es



f<sub>cem</sub>: fuerza contraelectromotriz

se genera cuando el rotor corta los líneas de fuerza. A los bornes del bobinado aparece una tensión proporcional a la velocidad de giro.

L<sub>i</sub>: es la inductancia del rotor

R<sub>a</sub>: resistencia del rotor, incluye la resistencia de los escobillas.

① es el generador de campo magnético, también puede ser imanes permanentes

33 min

Suponemos que la carga sobre el motor, es el momento de inercia  $J$  que incluye el momento de inercia propio del rotor.

Armando ecuaciones:

$$\begin{cases} V_i = L_a \cdot \frac{d\alpha}{dt} + i_a \cdot R_a + K_b \cdot \omega \\ T = K_T \cdot i_a = J \ddot{\theta} + B \dot{\theta} = J \ddot{\omega} + B \omega \end{cases}$$

$K_b$ : coeficiente de freno  
 $K_T$ : constante de par motor

↓ similar al caso del giroscopio

Deseamos hallar la relación entre la velocidad angular de sólido y la tensión de entrada. Esta es una de las tantas relaciones que se pueden determinar.

Aplicando Laplace:

$$V_i(s) = (L_a \cdot s + R_a) I_a(s) + K_b \cdot \omega(s)$$

$$K_T \cdot I_a(s) = (J \cdot s + B) \omega(s)$$

Reemplazando  $I_a$  en  $V_i$ :

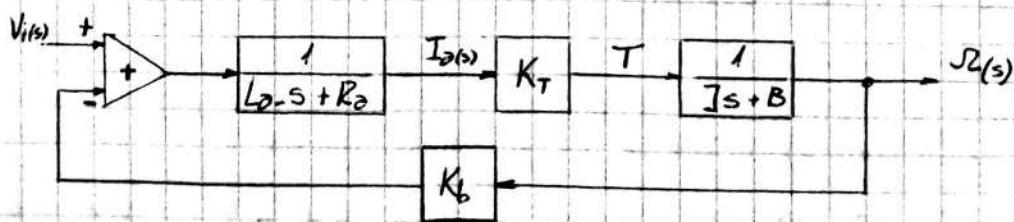
$$V_i(s) = \left[ (L_a \cdot s + R_a) \cdot \frac{(J \cdot s + B)}{K_T} + K_b \right] \omega(s)$$

La  $F_T$  entre la velocidad angular y la tensión de entrada es:

$$\frac{\omega(s)}{V_i(s)} = \frac{K_T}{L_a J s^2 + (R_a J + B L_a) s + B \cdot R_a + K_b \cdot K_T}$$

$$\frac{\omega(s)}{V_i(s)} = \frac{K_T / L_a J}{s^2 + \frac{B}{L_a J} s + \frac{B \cdot R_a + K_b \cdot K_T}{L_a J}} \rightarrow \text{sistema de } 2^{\circ} \text{ Orden}$$

42 min  
Visto en diagrama de bloques

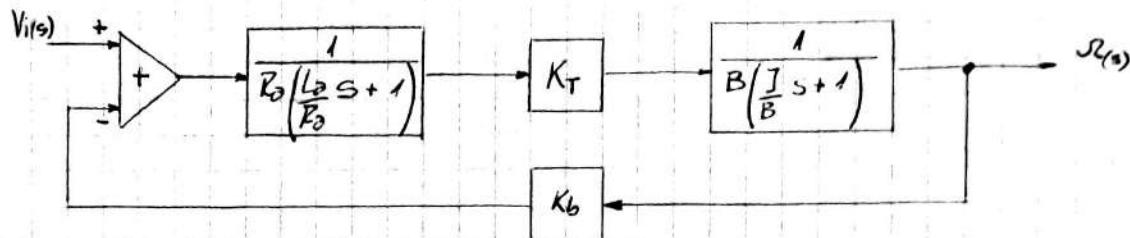


- El motor actúa como un sistema de lazo cerrado, en donde la retroalimentación aparece en el circuito primario a través de cuan rápido corta las líneas de campo el motor cuando gira a una velocidad determinada, eso produce una fuerza contraelectromotriz que se opone a  $V_i$ .

43 min  
¡Interesante! si medimos tensión y corriente a un motor, en el instante de aplicar la tensión, la corriente se establece muy rápidamente. Si la carga es

muy grande, toma velocidad hasta llegar a la velocidad de régimen, la corriente será máxima en el instante inicial y luego irá bajando conforme se pone en movimiento.

Si ponemos el diagrama desde el punto de vista de constantes de tiempo

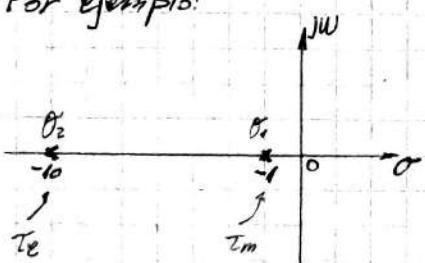


$L_o/R_o$ : es la constante de tiempo eléctrica ( $\tau_e$ ) [seg]  $\rightarrow \tau_e$

$J/B$ : es la constante de tiempo mecánica [seg]  $\rightarrow \tau_m$

• Cuanto más grande es el momento de inercia, más le cuesta al sistema arrancar

• ¿Cuál es la importancia? si las constantes de tiempo tienen una diferencia notable entre una y otra, el sistema que es de  $2^{\circ}$  orden, es posible tomarlo como de  $1^{\circ}$  orden.  
Por ejemplo:



$$\text{suponemos } \Omega_1 = -1 \text{ y } \Omega_2 = -10 \quad \text{en } t: e^{-\Omega t}$$

$$\text{recordando que: } \Omega = \frac{1}{\tau} \therefore \tau = \frac{1}{\Omega}$$

$$\Omega_1 = -1 = \frac{1}{\tau_e} \therefore \tau_e = 1 \text{ [seg]}$$

$$\Omega_2 = -10 = \frac{1}{\tau_m} \therefore \tau_m = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ [seg]}$$

Cada polo genera términos de la forma:  $e^{-\Omega t}$ , entonces tendremos

$$e^{-10t} \text{ y } e^{-1t}; \text{ si } t=1 \text{ [seg]} \Rightarrow e^{-10 \cdot 1} = 45,399 \times 10^{-6} = 0,000045$$

$$e^{-1} = 0,3678$$

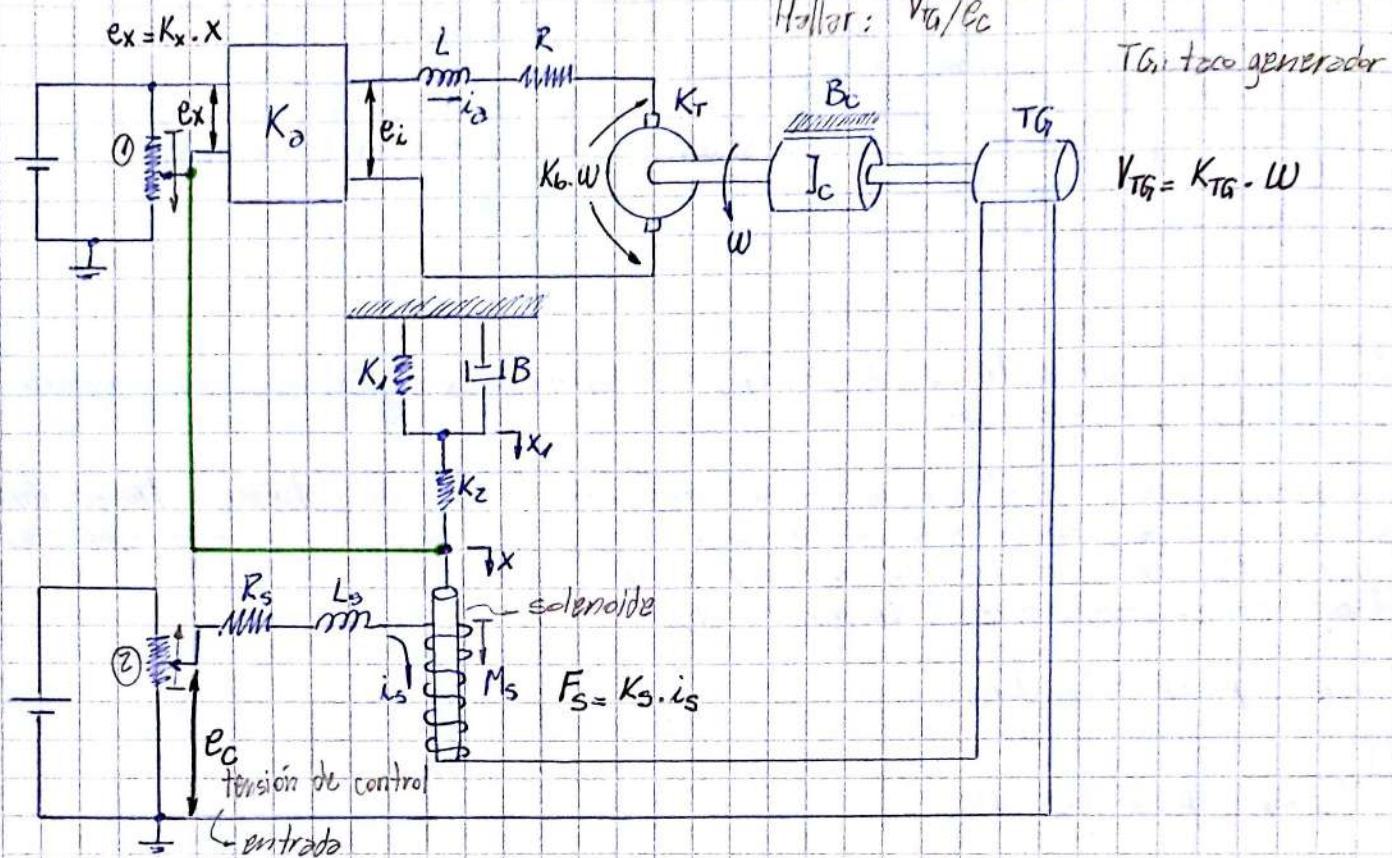
Conclusión: si  $L_o/R_o$  es muy pequeña, la podemos anular

Si  $\tau_m \gg \tau_e \Rightarrow \frac{L_o}{R_o} = 0$   $\rightarrow$  esto implica decir que no hay transitorios (eléctricos) e inmediatamente se establece la corriente en la  $R_o$ .

• Quedando un sistema de  $1^{\circ}$  orden

163 min 2020

Ejercicio: un sistema que tiene una parte mecánica y otra eléctrica.



Del motor se conocen todos sus parámetros:  $K_T$ ,  $J_c$ ,  $B_c$ . El taca generador  $TG$ , da una tensión proporcional a la velocidad, se redimensiona velocidad. Lo que está en verde, indica que esos puntos están mecánicamente unidos pero no electricamente unidos.

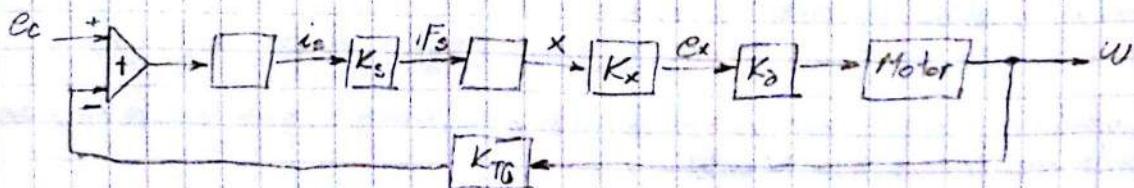
La fuerza en el solenoide es proporcional a la corriente que circula por él; y tiene una masa  $M_s$ .

El sistema mecánico conectado al solenoide, sirve para evitar ciertas oscilaciones.

Ahí comienza

• Cómo funciona?

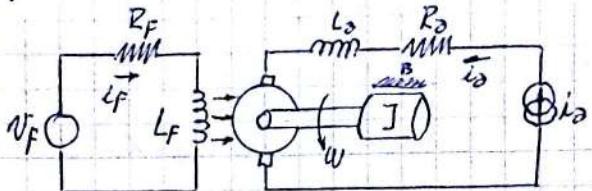
Para que el motor no tenga alimentación, el cursor ① debe estar conectado a la tensión de alimentación (arriba). Para que no se mueva el solenoide, el cursor ② (inicialmente) debe estar conectado a masa. Cuando ② se mueve, acciona el solenoide, éste mueve a ① y aparece una tensión (amplificada  $K_a$  veces) sobre el motor haciendolo girar. El TG sensa la velocidad, y redimensiona una tensión. Cuando esa tensión llega a un valor estacionario, queda en ese valor y el sistema tiene una velocidad constante.



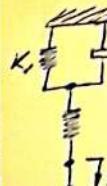
20/4/16

Motor de C.C. controlado por campo 7min 52seg

Suponemos el modelo a estudiar:



Breve explicación del Ejercicio anterior:



$$F_s = M_s \ddot{x} + K(x - x_r)$$

$$D = K(x_r - x) + B \dot{x}_r + K_r x_r$$

$$F_T = \frac{x}{M_s}$$

$$M_s \downarrow F_s = K_s \cdot i_s$$

R\_F: resistencia

L\_F: inductancia

R\_L: resistencia

L\_L: inductancia

zmin en audio del 20/4/16

Mediante la corriente de campo  $i_f$ , se controla la parada y de esa manera controlar la velocidad.

Si pretendemos controlar el motor mediante la  $i_f$ , no debemos tener variaciones de  $i_a$ , para que no se vea modificada la  $F_T$ . Por eso que se alimenta con una fuente de corriente constante.

Bajo estas condiciones, tenemos que:

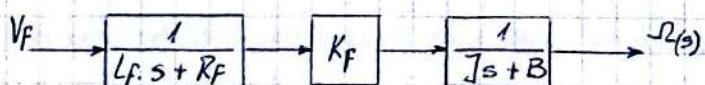
$$\begin{cases} V_F = R_F \cdot i_f + L_F \cdot \frac{di_f}{dt} \\ T = K_f \cdot i_f = J \ddot{\omega} + B \omega \end{cases}$$

En Laplace y sustituyendo:

$$V_F = (R_F + K_f s) \left( \frac{J s + B}{K_f} \right) \quad \therefore \quad \frac{V_F(s)}{V_F} = \frac{K_f}{(R_F + K_f s)(J s + B)} = F_T$$

Expresado en diagrama de bloques:

en gen. estos motores  
no se usan



Es un sistema de lazo abierto, en el cual la entrada no se entera que sucede a la salida.

Respuesta Transitoria 17min 35seg

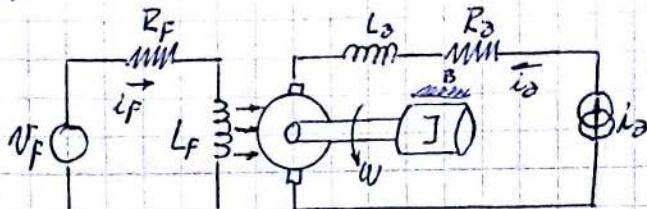
Cuando hablamos de respuesta transitoria, hablamos de señales de prueba. Estas señales son:  $d(t)$ ,  $M(t)$  y  $P(t)$ , básicamente. Luego en dominio de frecuencia, dividimos seno y coseno. 18min 39s a 22min 15s hace un repaso de las propiedades de  $d(t)$ ,  $M(t)$  y  $P(t)$ .

En este análisis, fundamentalmente, necesitamos conocer/determinar la respuesta  $h(t)$  (respuesta al  $d(t)$ )

20/4/16 •

## Motor de C.C. controlado por campo 7min 52seg

Suponemos el modelo a estudiar:



R<sub>f</sub>: resistencia de campo

L<sub>f</sub>: inductancia de campo

R<sub>a</sub>: resistencia de armadura

L<sub>a</sub>: inductancia de armadura

Mediante la corriente de campo  $i_f$ , se controla la parada y de esa manera controlar la velocidad.

Si pretendemos controlar el motor mediante la  $i_f$ , no debemos tener variaciones de  $i_a$ , para que no se vea modificada la  $F_T$ . Por eso que se alimenta con una fuente de corriente constante.

Bajo estas condiciones, tenemos que:

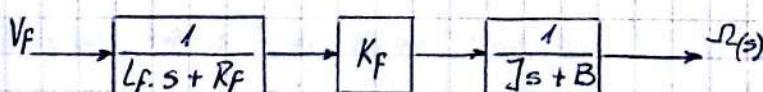
$$\begin{cases} V_f = R_f \cdot i_f + L_f \cdot \frac{di_f}{dt} \\ T = K_f \cdot i_f = J \ddot{\omega} + B\omega \end{cases}$$

En Laplace y sustituyendo:

$$V_f = (R_f + L_f s) \left( \frac{I_f(s)}{s} + B \right) \quad \therefore \quad \frac{I_f(s)}{V_f} = \frac{K_f}{(R_f + L_f s)(s + B)} = F_T$$

Expresado en diagrama de bloques:

en gen. estos motores  
no se usan



Es un sistema de lazo abierto, en el cuál la entrada no se entera que sucede a la salida.

## Respuesta Transitoria 17min 35seg

Cuando hablamos de respuesta transitoria, hablamos de señales de prueba. Estas señales son:  $d(t)$ ,  $M(t)$  y  $P(t)$ , básicamente. Luego en dominio de frecuencia, induvimos seno y coseno. 18min 39s a 22min 15s hace un repaso de las propiedades de  $d(t)$ ,  $M(t)$  y  $P(t)$ .

En este análisis, fundamentalmente, necesitaremos conocer/determinar la respuesta  $h(t)$  (respuesta al  $d(t)$ )

"Conociendo la función impulso unitario, la  $F_T$ , es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso unitario con todas las C.I. son cero"

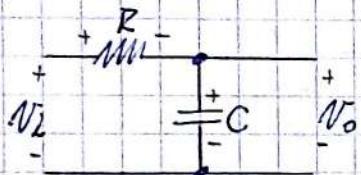
Sí.



De aquí, me permite decir que la  $F_T$  de un sistema es la relación entre la transformada de Laplace de la salida, sobre la transformada de Laplace de la entrada, cuando todos los C.I. son nulos.

### Sistema de 1º Orden

Analizamos un sistema muy sencillo. Su principal característica es que tiene un sólo almacenador de energía, y dependiendo dónde lo tengamos ubicado, será de adelanto, atraso, etc.



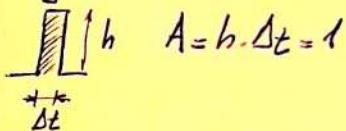
¿Cuál es la respuesta al  $\delta(t)$ ?

$$\left. \begin{aligned} V_i &= R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \, dt \\ V_o &= \frac{1}{C} \int i \, dt \end{aligned} \right\} \quad \text{L}$$

$$V_{i(s)} = \left( R + \frac{1}{sC} \right) I(s)$$

$$V_{o(s)} = \frac{1}{sC} I(s)$$

En la práctica es muy difícil hacer un  $\delta(t)$  (teórico). Por ello, si conocemos el  $\mathcal{Z}$  del sistema, lo que se puede hacer es generar un pulso rectangular procurando que su área sea igual a 1.

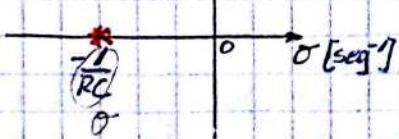


Por lo que la  $F_T = V_o/V_i$  será:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{R}{sC} + 1} = \frac{1}{R/s + 1} = \frac{1}{RC(s + \frac{1}{RC})}$$

→ Un sistema de 1º Orden tiene un polo en el semiplano izquierdo de Laplace en  $-1/RC$

Siendo la constante de tiempo  $\tau = RC$  [seg]. Entonces  $\sigma = 1/\tau = 1/RC$   
1JW [rad/sec]



$$F_T = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\left( s + \frac{1}{\sigma} \right)}$$

Si ponemos a la entrada un impulso  $\delta(t)$ .

$$V_i = \delta(t) \Rightarrow V_{i(s)} = \Delta(s) = 1$$

"Conociendo la función impulso unitario, la  $F_T$ , es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso unitario con todas las C.I. son cero?"

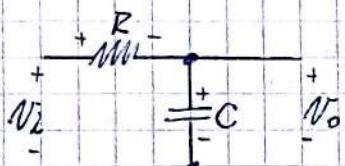
Sí:



De aquí, me permite decir que la  $F_T$  de un sistema es la relación entre la transformada de Laplace de la salida, sobre la transformada de Laplace de la entrada, cuando todos los C.I. son nulos.

### Sistema de 1º Orden

Analizamos un sistema muy sencillo. Su principio tiene un sólo almacenador de energía, y ubicado, será de adelanto, atraso, etc.



¿Cuál es la respuesta al  $\delta(t)$ ?

$$V_i = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt \quad \boxed{L}$$

$$V_o = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

$$V_{i(s)} = \left( R + \frac{1}{sC} \right) \cdot I(s)$$

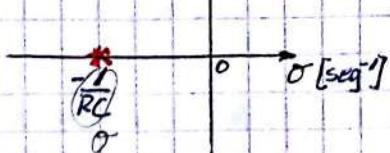
$$V_{o(s)} = \frac{1}{sC} \cdot I(s)$$

Por lo que la  $F_T = V_o/V_i$  será:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{RCs+1}{sC}} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{RC \left( s + \frac{1}{RC} \right)}$$

→ un sistema de 1º Orden tiene un polo en el semiplano izquierdo de Laplace en  $-1/RC$

Siendo la constante de tiempo  $\tau = RC$  [seg]. Entonces  $\sigma = 1/\tau = 1/RC$   
1JW [rad/seg]



$$F_T = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\left( s + \frac{1}{\tau} \right)}$$

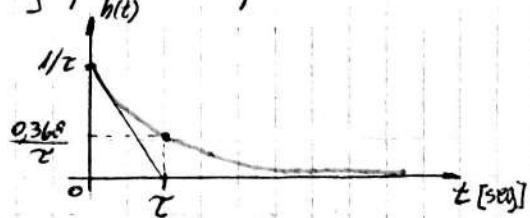
Si ponemos σ a la entrada un impulso δ(t).

$$V_i = \delta(t) \Rightarrow V_{i(s)} = \Delta(s) = 1$$

La salida  $V_o$  resulta:

$$V_o = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \xrightarrow{d^{-1}} V_o(t) = h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cuya gráfico temporal es:



Cuando  $t = \tau$ , el sistema cae a  $0.368$  del valor máximo ( $1/\tau$ ).

- Cuanto más pequeña sea  $\tau$ , más a la izquierda se encontrará  $\sigma$  en el plano s.

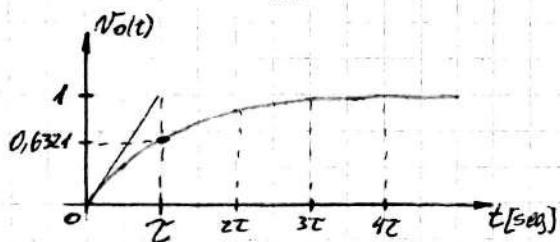
• Que sucede ante una entrada  $M(t)$ ? 33 min 30s

$$V_i(t) = M(t) \Rightarrow V_i(s) = \frac{1}{s}$$

Tenemos:

$$V_o = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$\text{Volviendo a } t: V_o(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$



Cuando  $t$  igual a:

$\tau \rightarrow 63,2\%$  del valor de régimen

$2\tau \rightarrow 86,47\%$

$3\tau \rightarrow 95,02\%$

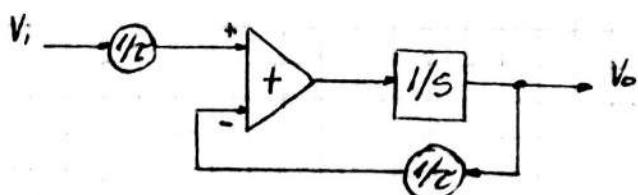
$4\tau \rightarrow 98,17\%$

en  $\infty \rightarrow 100\% \text{ del régimen}$

Definimos la constante de tiempo  $\tau$  como "el tiempo necesario para llegar al 63,2% del valor final".

En el origen, la función presenta una pendiente de  $1/\tau$ . Esto nos indica que si el sistema de 1º Orden sigue creciendo con la pendiente inicial, bortaría al Valor de Régimen en  $t = \tau$ .

Este sistema de 1º Orden es de tipo realimentado. Si expresamos lo  $F_T$  en diagramas de bloques tenemos que:



"Un sistema de 1º Orden es un integrador realimentado" - es por eso que crece hasta cierto valor y no sigue creciendo.

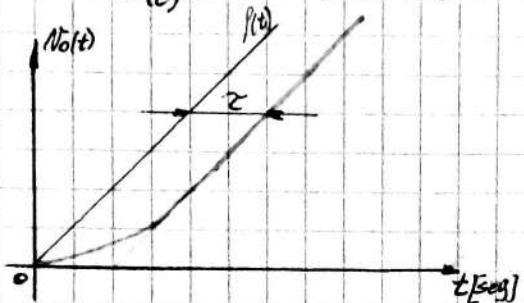
¿Qué pasa con una entrada  $P(t)$ ? 43 min

$$V_o(t) = P(t) \Rightarrow V_o(s) = \frac{1}{s^2}$$

Tenemos:

$$V_o = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{(s + \frac{1}{T})} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s + \frac{1}{T}} = \frac{1}{s^2} + \frac{-\zeta}{s} + \frac{\zeta}{s + \frac{1}{T}}$$

Volviendo a  $t$ :  $N_o(t) = t - \zeta + \zeta e^{-t/T}$



Ante una entrada  $P(t)$ , el sistema responde (verde) atrocesando una constante de tiempo  $\zeta$   
↳ se traduce en un error

48 min

- Existe una propiedad de los sistemas lineales, que establece que: si a un SIST lo exito con una señal  $x_1$ , obtengo una salida  $y_1$ ; si luego lo exito con señales derivadas o integrales de la señal  $x_1$ , puedo obtener la respuesta, derivando o integrando la  $y_1$ .



Así, aplicandolo a los ejemplos anteriores vistos, tenemos:

$$\left. \frac{N_o(t)}{V_o = P(t)} \right| = t - \zeta + \zeta e^{-t/T} \Leftarrow \frac{d}{dt} \text{ (derivando)}$$

Obtenemos:

$$V_o = t - e^{-t/T} \rightarrow \text{es la rt. al } u(t)$$

Derivamos de nuevo:

$$N_o = \frac{1}{T} e^{-t/T} \rightarrow \text{es la rt. al } \delta(t)$$

- Esto nos indica que podríamos haber determinado, en principio, la respuesta a  $P(t)$  y luego derivando obteníramos las demás respuestas.

## Sistemas de 2º Orden. 52 min

Cómo principal característica tienen 2 elementos almacenadores de energía.

En general, presentan la relación:  $(F_T)$

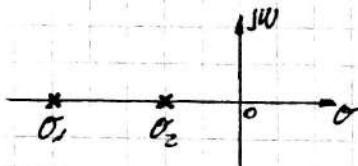
$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s^2 + bs + c}$$

$$\text{Raíces del polinomio denominador: } -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Tendremos 3 casos:

1) Caso  $b^2 > 4c \rightarrow ZRRD$  sobre amortiguado

Al haber 2 raíces reales distintas, estarán ubicadas en el Plano s

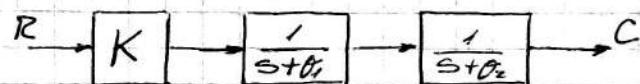


Y ante una entrada  $R(t)$ , tenemos:

$$C = \frac{K}{(s+\theta_1)(s+\theta_2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\theta_1} + \frac{A_3}{s+\theta_2}$$

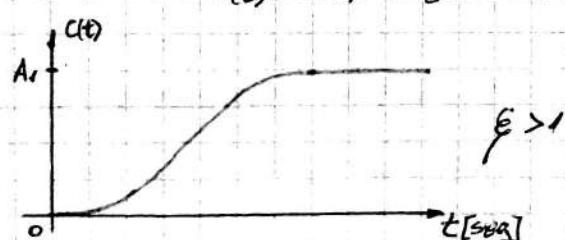
$R = R(t)$

Es equivalente a:



En dominio de t:

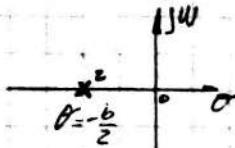
$$C(t) = A_1 + A_2 e^{-\theta_1 t} + A_3 e^{-\theta_2 t}$$



min 58

2) Caso  $b^2 = 4c \rightarrow ZRI$  Críticamente amortiguado

Tendremos 2 raíces en  $\theta = -b/2$



Definimos el coeficiente  $b_0$ :

$$b_0 = 2\sqrt{c} \rightarrow \text{es el valor que hace que se cumple } b^2 = 4c$$

La relación entre cualquier valor  $b$  referido a  $b_0$ , lo llamaremos relación o coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  (xita).

$$\xi = \frac{b}{b_0} \quad \text{factor de amortiguamiento}$$

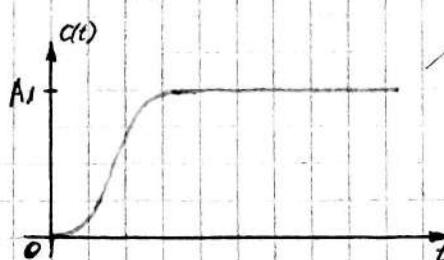
Ante una entrada  $U(t)$ :

$$C = \frac{K}{(s+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+\alpha)^2} + \frac{A_3}{s+\alpha}$$

$R = A_1 s + A_2$

En dominio  $t$ :

$$G(t) = A_1 + A_2 t e^{-\alpha t} + A_3 e^{-\alpha t}$$



→ es un sistema un poco más rápido que caso 1

$$\zeta = 1$$

1b 4 min

3) Caso  $b^2 < 4c \rightarrow ZRCC$  Subamortiguado o Oscilatorio

Las raíces se ubican en el Plano S en:  $-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} \Leftrightarrow \theta \pm j\omega$

Existe un caso particular cuando  $b=0$ , no existe parte real,  $\theta=0$ , y la parte imaginaria vale:

$$\text{No. 5 min } \omega_n = \sqrt{c} \quad \rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{c}} \quad \rightarrow \text{es la frecuencia angular no amortiguada del sistema}$$

$\hookrightarrow c = \omega_n^2 \quad \textcircled{1}$

El  $b_0$  es:  $b_0 = 2\sqrt{c}$

$$\text{Y } \zeta: \quad \zeta \cdot b_0 = b \Rightarrow b = \zeta \cdot 2\sqrt{c}$$

Pero recordando  $\omega_n$ :

$$b = \zeta \cdot 2\omega_n \quad \textcircled{2}$$

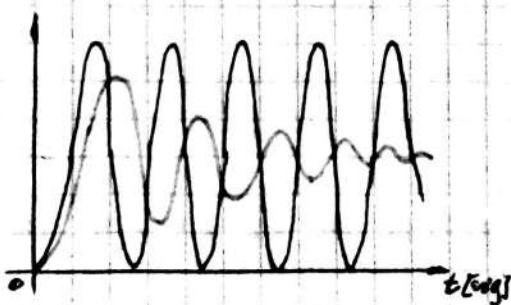
① y ② se reemplazan en la ecuación  $\frac{C}{R}$  general

Obtenemos

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

→ ecuación general parametrizada en  $\zeta$  y  $\omega_n$

o: Para qué me sirve de esa forma la ecuación? es útil para comparar sistemas de 2º Orden, si bien pueden ser: biológicos, mecánicos, eléctricos, etc. pero sus ecuaciones diferenciales pueden ser iguales; para ello los comparo con  $\zeta$  y  $\omega_n$



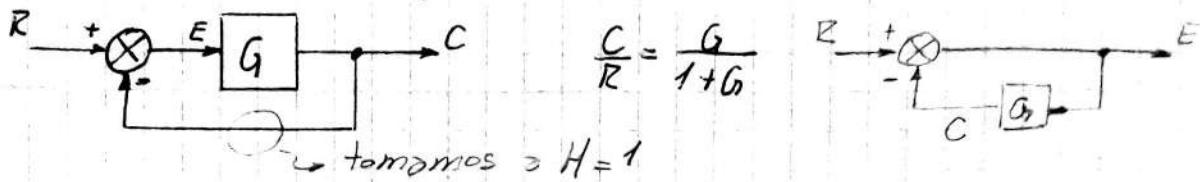
$0 < \zeta < 1$  verde → ZRCC (con parte real)

$\zeta = 0$  rojo → ZPCC (sin parte real,  $\theta = 0$ )  
↳ sobre el eje jw

11/5/16

## Error en estado estacionario.

En los sistemas de control, una de las cosas importantes es ver el error que queda luego de que pasaron todos los transitorios.



Para hablar de los Tipos de Sistemas, definimos a  $G$  como:

$$G = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^N (s + p_j)}$$

dónde:  $n + N \geq m$  → el <sup>o</sup> Den  $\geq$  <sup>o</sup> Num, así el sist. es físicamente realizable

El dividir por  $s^N$ , son integradores de orden  $N$ .

"Los tipos de sistemas se definen en base a la cantidad de integradores que tienen."

- $N=0$  → Sistema Tipo 0 - no tiene integrador (sin polo en or. gen).
- $N=1$  → Sistema Tipo 1 - un integrador (un polo en origen)
- $N=2$  → Sistema Tipo 2 - dos integradores (dos polos en origen)

10min  
¿Qué sucede con el error ante diferentes tipos de entradas en estado estacionario?

• Estabilidad Absoluta: todas las raíces del polinomio Den de la  $F_T$  están en el semiplano izquierdo de Laplace.  
aceptable  $\Rightarrow 0.5 < \zeta < 0.8$  • si es críticamente amortiguado  $\zeta = 1$

13min  
La función Error será:

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1+G} \quad \therefore E = \frac{1}{1+G} \cdot R$$

14:26min  
Sistema Tipo 0 con entrada escalón:

Tenemos que:

$$E = \frac{1}{1 + \frac{K \pi(s+z_i)}{\pi(s+p_i)}} \cdot \frac{1}{s}$$

entrada escalón

El error en estado estacionario  $E_{ss}$ , es cuando se ha extinto todos los transitorios, entonces aplica TVF.

16min

$$TUV: E_{ss} = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{1}{1 + \frac{K \pi (s^2 + Z_i)}{\pi (s_0^2 + P_j)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + K_p}$$

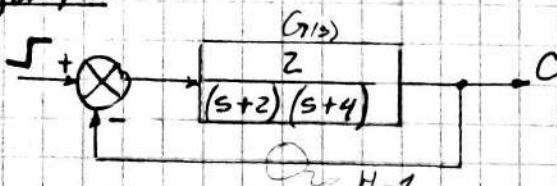
en el lím, es uno cte.

K<sub>p</sub>: coeficiente de error estético de posición o coeficiente de error estético para una entrada escalón.

19min

El K<sub>p</sub> se define como:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$

Ejemplo:



$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Z}{(s+2)(s+4)} = 0,25$$

$$E_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 0,25} = 0,8$$

22min

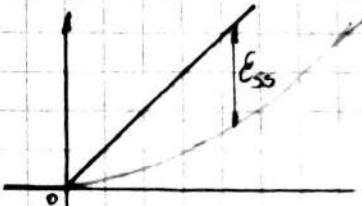
$$F_{TLA} = \frac{Z}{s^2 + 6s + 8} \quad F_{TC} = \frac{1}{1 + G} = \frac{Z}{s^2 + 6s + 8 + Z}$$

25min

Sistema Tipo 0<sup>N=0</sup> con entrada rampa.

$$E = \frac{1}{1 + \frac{K \pi (s^2 + Z_i)}{\pi (s + P_j)}} \cdot \frac{1}{s^2}$$

entrada rampa



el sistema trato de seguirlo pero no puede

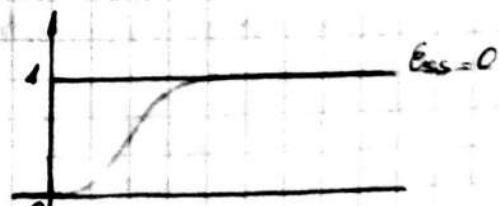
27min

Sistema Tipo 1<sup>N=1</sup> con entrada escalón.

$$E = \frac{1}{1 + \frac{K \pi (s^2 + Z_i)}{s \cdot \pi (s + P_j)}} \cdot \frac{1}{s}$$

escalón

G tiene 1 integrador

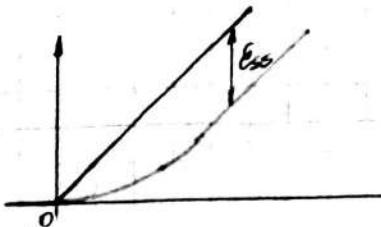


un sist. tipo 1 sigue al escalón sin error

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K \pi (s^2 + Z_i)}{s \cdot \pi (s + P_j)}} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

29 min Sistema Tipo 1 con entrada rampa.

$$E = \frac{1}{1 + \frac{K\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s^2}$$



→ el sistema lo sigue con un error constante cuando  $t \rightarrow \infty$

30 min Definimos:  $K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)$

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K\pi(s+z_i)}{\pi(s+p_j)} = \frac{1}{K_V}$$

$K_V$ : coeficiente estático de velocidad o coeficiente estático para entrada escalón

33 min ¿Qué sucede ante una entrada parabólica  $1/s^3$ ? el  $E_{ss} = \infty$ , el sistema lo trata de seguir, pero con un error creciente. NO tiene capacidad de seguir a la parábola.

34 min Sistema Tipo 2 con entrada escalón.

$$E = \frac{1}{1 + \frac{K\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

35 min Sistema Tipo 2 con entrada rampa

$$E = \frac{1}{1 + \frac{K\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s^2} = 0$$

35 min ¿Qué sucede para una entrada parabólica  $1/s^3$ ?

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K\pi(s+z_i)}{s^2\pi(s+p_j)}} \cdot \frac{1}{s^{3/2}} = \frac{1}{K_a}$$

Definimos:  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)$

$K_a$ : coeficiente de error estático de aceleración o coeficiente de error estático para entrada parabólica

el sistema sigue a la parábola con un error constante  $1/K_a$  cuando  $t \rightarrow \infty$

37 min

Resumiendo:

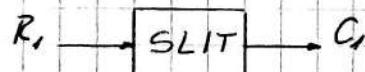
Tipo Entrada \ Tipo	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2
Escalón	$E_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$ $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot H(s)$	$E_{ss} = 0$	$E_{ss} = 0$
Rampa	$E_{ss} = \infty$	$E_{ss} = \frac{1}{K_V}$ $K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot H(s)$	$E_{ss} = 0$
Parábola	$E_{ss} = \infty$	$E_{ss} = \infty$	$E_{ss} = \frac{1}{K_a}$ $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) \cdot H(s)$

→ no siempre, según la situación es el mejor, ya que puede resultar en un oscilador, dependiendo del sistema metido

"A medida que incrementamos el orden integrador del sistema, el error en estado estacionario se reduce."

48 min

Otra manera de definir la estabilidad es:



$$|R_1| \leq M$$

BIBO  $\Leftrightarrow$  EASA

(Entrada Acotada, Salida Acotada)

$$|C_1| \leq L$$

Criterio de Routh - Hurwitz (criterio de estabilidad)

52 min

- Nos permite saber cuantas raíces del polinomio Denominador de la F<sub>r</sub> de un sistema, se encuentran en el semiplano izquierdo de Laplace. NO indica cuales son, SI cuantas son.

Establece que si se tiene:

$$s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

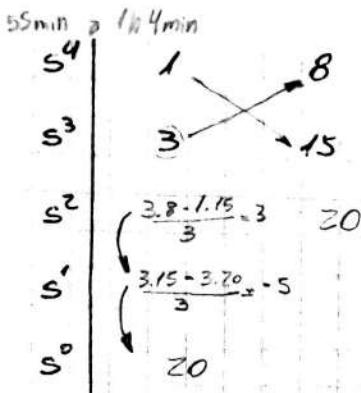
las raíces del polinomio están en el semiplano izquierdo si se cumplen:

• Condición Necesaria: todos los coeficientes  $\alpha_m$  tienen que ser del mismo signo y no nulos. (polinomio completo) → reales

• Condición Suficiente: tiene todas las raíces con parte real negativa

Ejemplo:  $s^4 + 3s^3 + 8s^2 + 15s + 20$  → es corresponde, en virtud F<sub>r</sub>, a la ecuación característica

NOTA



→ 2 raíces en el SPD

Se revisan los cambios de signo en la 1º columna, dichos números de cambios indican cuantas raíces a parte real positiva tiene el polinomio

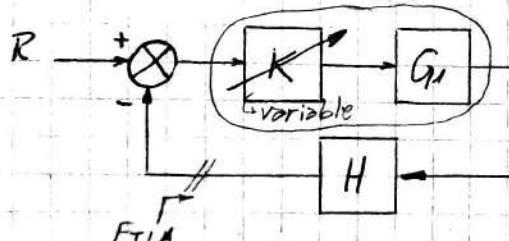
Existen casos especiales en el análisis por R-H. → Buscar lo de Teoría Z

### 1h 7min Lugar de raíces (Lugar de Evans)

G.H

- El lugar de raíces me permite, a partir de la FTLA, ver como se mueven los polos de la FTLA cuando se modifica un parámetro en la FTLA.

En general, un sistema de LC:  $G(s)$



K: no necesariamente  
ha de ser una ganancia, puede  
ser un polo, una relación de amar-  
tiguamiento

Para valores  $0 < K \leq \infty$  y realimentación negativa:

$$FTLA = \frac{C}{R} = \frac{K \cdot G_1}{1 + K \cdot G_1 \cdot H} \rightarrow \text{Ec. característica} \Rightarrow (1 + G_1 \cdot H) = 0 \rightarrow \text{me dice cuán estable es el sistema}$$

1h 8min Siendo la:

$$FTLA = K \frac{\pi(s+z_i)}{\pi(s+p_j)} \quad \therefore FTLA = G \cdot H$$

1h 10min

Normalmente uno conoce la FTLA, en base a esto queremos saber cómo se comporta el sistema al cerrar el lazo al variar K.

El análisis de estabilidad se hace con la FTLA.

En general:

$$1 + G \cdot H = 0 \rightarrow \text{ecuación característica}$$

de FTLA

por Evans  $\rightarrow G \cdot H = (-1)$

condición de signo o argumento

$\angle G \cdot H = \pm 180^\circ \cdot (2k+1) \quad k=0, 1, 2, \dots, n$

$|G \cdot H| = 1 \rightarrow \text{condición de módulo}$

tiene fase (argumento) y módulo

1h 13min

• Los puntos del Lugar de Raíces en lazo cerrado deben cumplir con Evans

1h14min

La función de análisis será la  $F_{TLA}$ :

$$G \cdot H = \frac{K \pi(s+z_i)}{\pi(s+p_j)}$$

$\sim$  se meten los integradores, no importa el tipo de sistema

Como el  $|G \cdot H| = 1$ , con  $0 \leq K \leq \infty$ , tenemos que:

$$K = \frac{\pi |(s+p_j)|}{\pi |(s+z_i)|} \quad \text{①} \quad \rightarrow (s+p_1) \cdot (s+p_2) \cdot (s+p_3) \cdots (s+p_n)$$

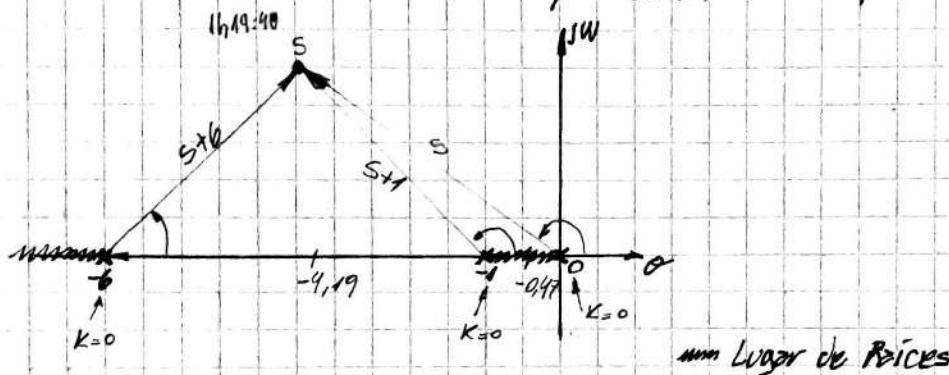
1h17min

Ejemplo:

$$F_{TLA}: G(s) \cdot H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+6)} \rightarrow 3 \text{ polos y } 1 \text{ cero}$$

1h18min

¿Cuando  $K$  de ① vale cero? Vale cero cuando algún  $|s+p_j| = 0$ ; cuando me posicione en un polo.



\* El lugar de las raíces arranca para  $K=0$  en los polos de la  $F_{TLA}$ .

1h19min

¿Cuando  $K$  de ① vale infinito? Vale  $\infty$  cuando algún  $|s+z_i| = 0$ ; cuando me posicione en un cero. → cero final de respuesta

\* El lugar de las raíces termina para  $K=\infty$

1h21min

- Si quisiera saber si el punto S es Lugar de Raíces, se tiene que cumplir la condición de ángulo. Siendo en este caso:

$$\angle G(s) \cdot H(s) = \angle \frac{K}{s(s+1)(s+6)} = \arg(\text{Num}) - \arg(\text{Den})$$

$$\angle G(s) \cdot H(s) = 0 - \angle s - \angle(s+1) - \angle(s+6) \rightarrow \text{si es lugar de raíces me debe dar } 180^\circ \text{ o múltiplo impar de } 180^\circ$$

1h23min

Supongamos que al punto S lo ubicamos en el eje  $\theta$  positivo ( $\theta > 0$ ), los polos contribuyen cada uno con argumento de  $0^\circ$ , no cumple con la condición, por tanto  $\theta \geq 0$  no es lugar de raíces.

Si ahora ubicamos a S entre los polos 0 y -1, tenemos otras

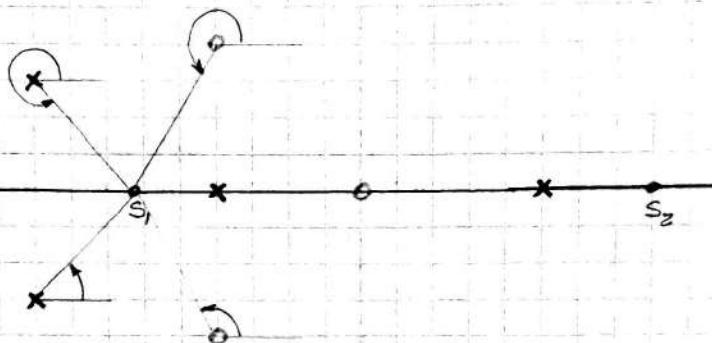
notas

de argumentos:  $180^\circ - 0^\circ - 0^\circ = 180^\circ$  - cumple condición, es lugar de raíces  
 si se estuviese entre los polos  $-1$  y  $-6$ , tenemos que:  $180^\circ - 180^\circ - 0^\circ = 0^\circ$   
 no cumple condición.  
 si se está  $s \geq -6$ , tenemos:  $180^\circ - 180^\circ - 180^\circ = -180^\circ$  - cumple condición

**1º Regla:** el Lugar de Raíces arranca para  $K=0$  en los polos de FTLA y termina en los ceros de la FTLA o ceros en el infinito.

**2º Regla:** existe Lugar de Raíces sobre el eje real, cuando a la derecha del punto considerado, hay una cantidad impar de ceros y/o polos

**Ejemplo:** un sistema con la siguiente distribución



• Polos o Ceros complejos conjugados sobre el eje real no contribuyen

18/5/16 (hace un repaso de lugar de raíces)

$$F_{TLC} = \frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

$$F_{TLA}: GH = K \cdot \frac{\pi/(s+z_i)}{\pi/(s+p_j)} = -1 \quad \begin{cases} GH = \pm 180(2k+1) \\ |GH| = 1 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Seguimos con el ejemplo anterior:

$$F_{TLA}: GH = \frac{K}{s(s+1)(s+6)} \rightarrow \text{polos en: } 0, -1 \text{ y } -6.$$

"Mediante las reglas construimos el Lugar de Raíces, y ver como varían o mueven los raíces de lo  $1+GH$  cuando se varía el parámetro  $K$ ".

Me interesan las raíces del polinomio  $1+GH$ , ya que éste me da la estabilidad en el Lazo Cerrado.

De sólo ver el Lugar de Raíces, puedo tener una idea de como será la respuesta temporal o en frecuencia del sistema.

Para el ejemplo, tomamos:  $0.5K500$   
 siendo  $K$ :

$$K = \frac{\pi/(s+p_j)}{\pi/(s+z_i)} \quad -\text{con esto sabemos la ganancia del sistema; significante es saber las distancias de los ceros/polos a cierto punto}$$

9min El Lugar de Raíces está dado exclusivamente por la Condición de Ángulo o Argumento.

Con la Condición de Módulo nos posicionamos en algún punto de dicho Lugar de Raíces.

10min Habrá tantas Ramas como polos o ceros hay en lo Fr

Habrá un máximo de  $K$ , por ejemplo entre los polos 0 y -1, el cuál se determina la separación o ingreso al eje real, como:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow p/\text{un máximo}$$

→ "punto de bifurcación" (pb)

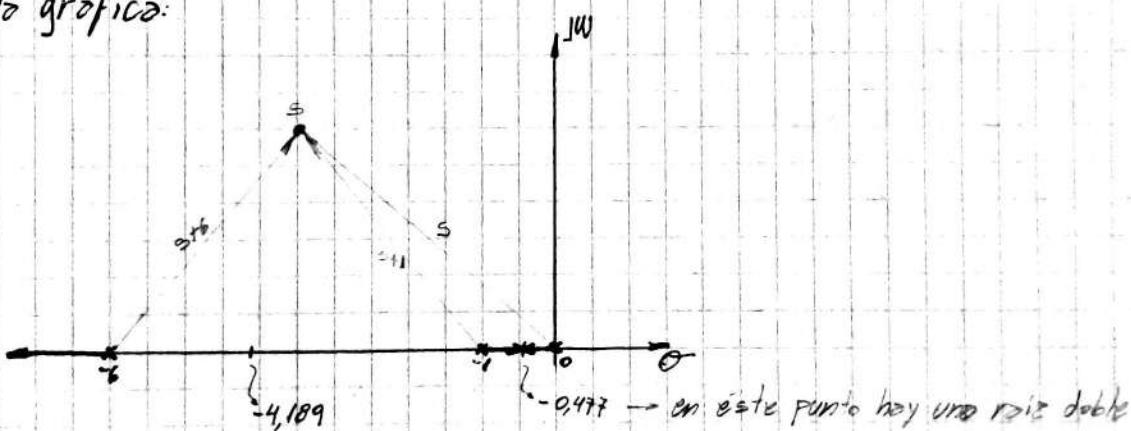
$$\text{Cómo: } |GH|=1 \therefore 1 = \frac{K}{s(s+6)(s+1)} \therefore K = s^3 + 7s^2 + 6s$$

29min Entonces:

$$\frac{dK}{ds} = 3s^2 + 14s + 6 = 0$$

$$\begin{cases} s_1 = -0,477 \rightarrow \text{pb por estar en el LP en el eje } \\ s_2 = -4,189 \rightarrow \text{no es pb ya que no pertenece} \\ \quad \quad \quad \text{al LR en el eje } 0 \end{cases}$$

30min En la gráfica:



Encontramos dónde se separa el Lugar de Raíces, es en  $-0,477$ .

Para hallar el  $K$  que nos posicione en ese lugar, es hallar el módulo de  $K$ , que será el producto  $(s+p_j)$  en el punto considerado:

$$K_{\text{punto de separación}} = |0,477| \cdot |0,523| \cdot |5,53| = 1,379 \rightarrow \text{valor de } K \text{ si acercarse en } -0,477$$

40min Asintotas que tendremos es la diferencia entre el número de polos y el número de ceros.

$$\text{Cantidad de Asintotas} = n - m$$

$n$  = n° polos  
 $m$  = n° ceros

43min Ángulo de las Asintotas.

$$\text{Asintotas} = \frac{180}{n-m} \cdot (2k+1) \left\{ \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow \pm 60^\circ \\ k=1 \Rightarrow \pm 120^\circ \\ k=2 \Rightarrow \pm 180^\circ \end{array} \right\} \text{ con } n-m=3$$

49min Dónde se cruzan las Asintotas?

$$\theta_{corte} = \frac{\sum \text{Re Polos} - \sum \text{Re Zeros}}{n-m} = \frac{\sum (0+(-1)+(-6)) - \sum 0}{3} = -2,33$$

- en este valor  
se cortan las  
asintotas

47min El  $\theta_{corte}$  no necesariamente tiene que formar parte del Lugar de Raíces.

Y las Asintotas no tienen porque coincidir con el Lugar de Raíces; son direcciones preferenciales hacia las cuales la función tiende, cuando la variable independiente tiende a infinito.

48min Ahora, deseamos saber si el lugar de raíces se posa o no al semiplano derecho; hacemos uso de R-H:

Determinación de corte del eje Im

$s^3$	1	6
$s^2$	7	$K$
$s^1$	$\frac{42-K}{7}$	
$s^0$	$K$	

Para que no haya cambio de signo en la 1º columna,  $K$  deberá ser:

$0 < K < 42 \rightarrow$  Rango de Estabilidad del Sistema.

50min Si:  $\frac{42-K}{7} = 0 \therefore K=42 \Rightarrow 7s^2 + 42 = 0 \quad \{s_{1,2} = \pm \sqrt{6} \approx \pm 2,45 \rightarrow$  punto en el que se posa el SPI

52min Otra forma de determinar el corte del eje Im, es hacer  $\theta=0 \therefore s=j\omega$  y reemplazar en la ecuación:

$$s^3 + 7s^2 + 6s + K = 0 \quad \therefore s = j\omega$$

$$-j\omega^3 - 7j\omega^2 + 6j\omega + K = 0$$

$$(K - 7\omega^2) + j(6\omega - \omega^3) = 0 \rightarrow \text{que un complejo sea cero, partes Re=0 = Im=0}$$

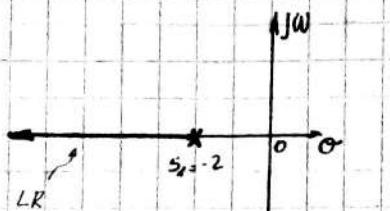
simultáneamente

$$K - 7\omega^2 = 0$$

$$6\omega - \omega^3 = 0 \rightarrow \omega(6 - \omega^2) = 0 \quad \begin{cases} \omega_1 = 0 & \text{-- no sirve, porque no cumple} \\ \omega_{2,3} = \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

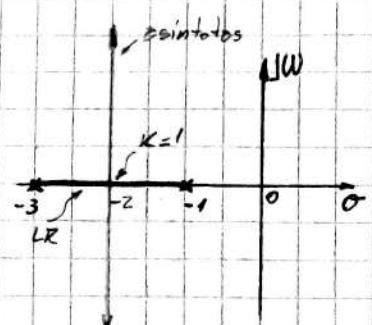
$$K - 7(\pm \sqrt{6})^2 = 0 \therefore K = 42 \quad \rightarrow \text{corte en el eje Im}$$

1h15min Lugares de Raíces elementales. Ejemplos.



$$GH = \frac{K}{s+2} \Rightarrow \text{Ec. Característica: } s+2+K=0$$

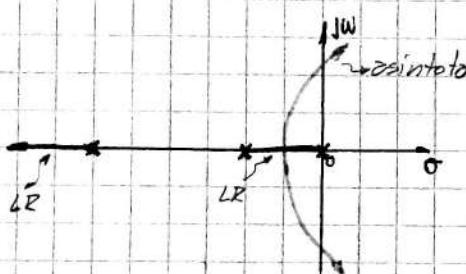
1h40min



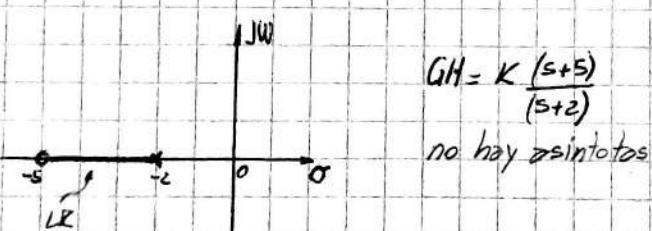
$$GH = \frac{K}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow \text{Ec. Caract: } s^2 + 4s + 3 + K = 0$$

$$s_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{16 - 4(3+K)}}{2}$$

1h40min



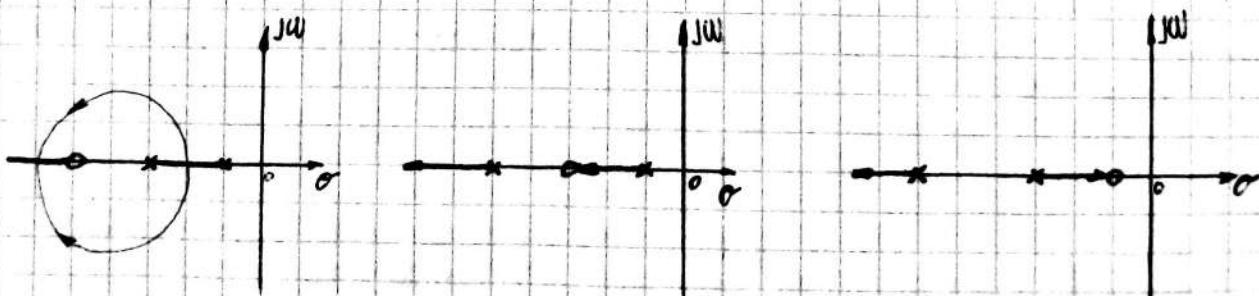
1h45min



$$GH = \frac{K(s+5)}{(s+2)}$$

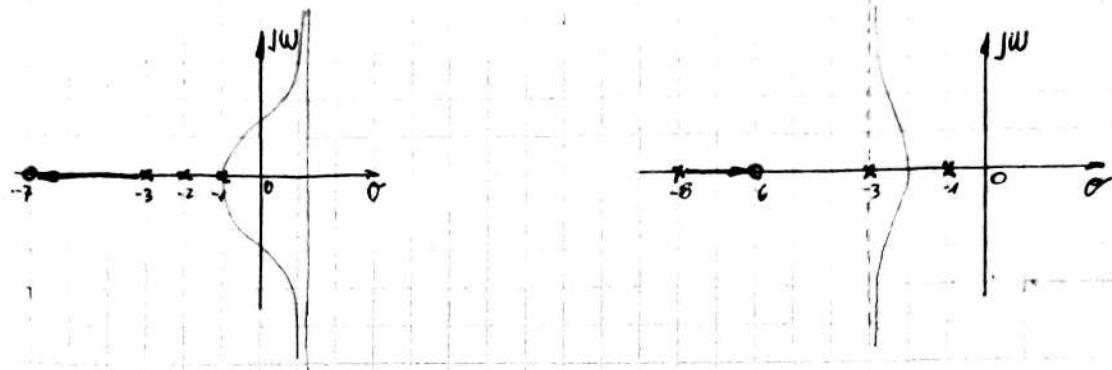
no hay asintotos

1h50min



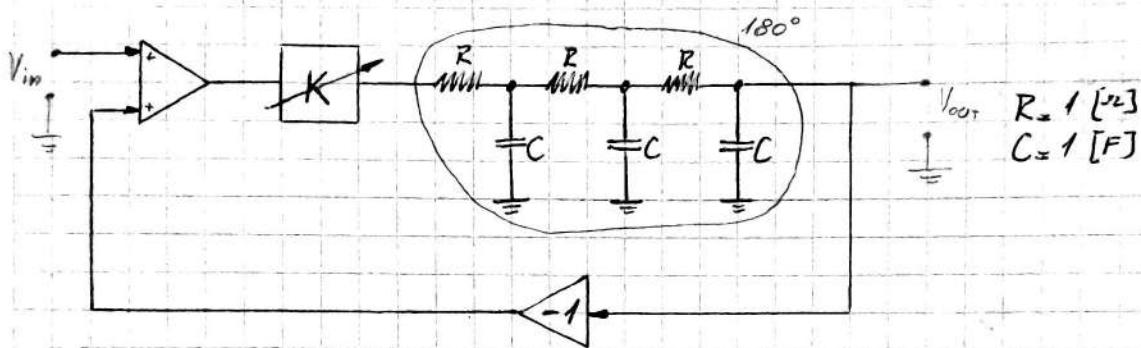
Los ceros hacen que las ramas tiendan a la izquierda, o sea, tratarse de estabilizar el sistema.  
Los polos hacen lo opuesto.

10/5 min



1b2 min

Ejemplo: Oscilador por desplazamiento de fase



15/6/16

### Análisis de Respuesta en Frecuencia.

Básicamente es determinar cómo se comporta el sistema para distintas frecuencias de la señal de excitación (entrada), que es del tipo sinusoidal.

¿Cómo se hace el análisis? se coloca un generador de señal sinusoidal a la entrada del sistema, cuya amplitud es fija (conocida) y se hace variar la frecuencia desde un valor pequeño a un valor elevado, midiendo la salida del sistema. Luego se relaciona la salida con la entrada para cada valor de frecuencia.

Este análisis es válido sólo en estado estacionario (pasado todos los transitorios del sistema)

8 min Ejemplo:

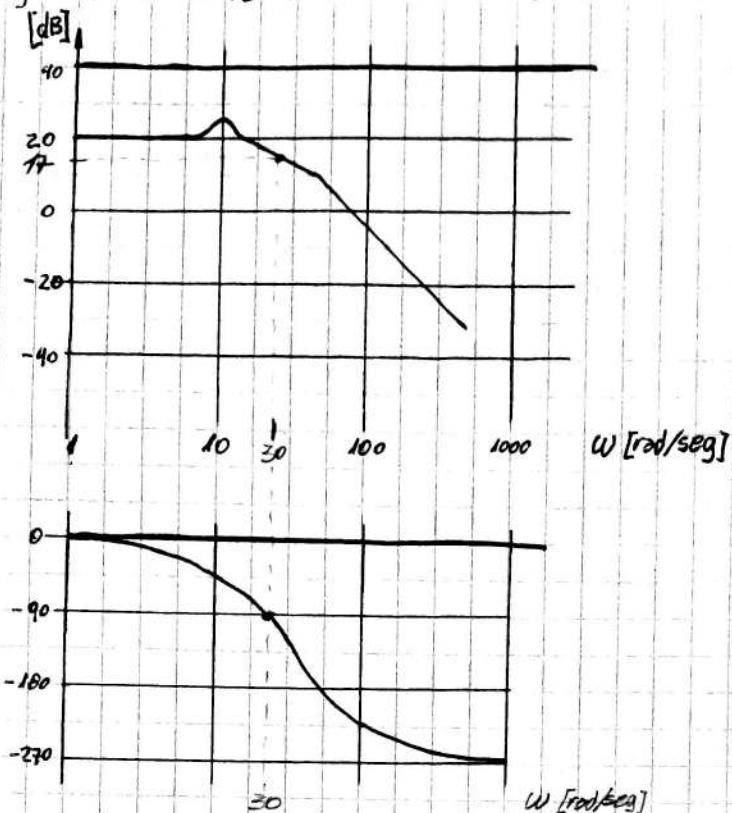
$$\begin{array}{l}
 \text{w=1 rad/sos} \\
 1 \text{sen}(t) \xrightarrow{\text{SLIT}} 10 \text{sen}(t) \\
 1 \text{sen}(t) \xrightarrow{\text{SLIT}} 7,079 \cdot \text{sen}(30t - \frac{\pi}{2})
 \end{array}$$

por el Bode, la salida tiene 20 dB respecto de la entrada y no hay desfase.

por el Bode:  $17 \text{dB} = 20 \cdot \log \left( \frac{\text{Sal}}{\text{Ent}} \right)$

$\therefore \left( \frac{\text{Sal}}{\text{Ent}} \right)^{10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 7,079 \cdot \text{Ent}_{\leq 1}$

Cuyo diagrama de Bode es:



14min. Ej: para un equipo de audio se busca que tenga una respuesta prácticamente plana desde baja freq. a altas freq.



15min Para este análisis, convertimos la  $F_T$  en dominio de  $s$ ,  $G(s)$ , al dominio  $jw$ ,  $G(jw)$ .

20min Supongamos un sistema K cuyo Bode es representado arriba (en azul); su salida vale 40 dB o 100 veces la entrada y no presenta desfasaje para toda frecuencia. Esta ganancia constante es un caso ideal, todo modelo real, tiene un rango de frecuencias que se comportan como el caso ideal (aproximadamente).

25min Digamos que:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \text{ con C.I.} = 0 \quad \therefore \quad C(s) = \overbrace{G(s) \cdot R(s)}$$

suponemos con polos reales

$$\text{Si la entrada es } r(t) = \sin(\omega t) \xrightarrow{\mathcal{L}} R(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

Expandimos a  $C(s)$  en fracciones simples.

$$C(s) = \frac{A_1}{s+s_1} + \frac{A_2}{s+s_2} + \dots + \frac{A_n}{s+s_n} + \frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{B_2}{s-j\omega}$$

$$C(t) = A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t} + \dots + A_n e^{-s_n t} + B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t}$$

NOTA

Cuando  $t \rightarrow \infty$ , los términos se hacen cero, quedando:

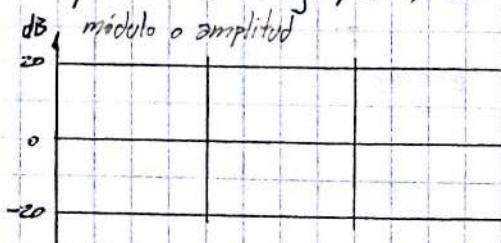
$$C(\infty) = B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t} \quad \text{en donde } B_1 \text{ y } B_2 \text{ son funciones de } j\omega$$

$$C(\infty) = B \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

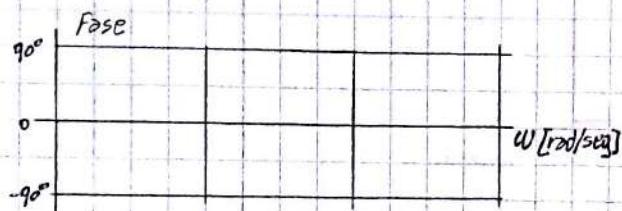
Esto surge de reemplazar  $s$  por  $j\omega$ ; decir  $s=j\omega$ , es tomar  $\theta=0$  y moverse por el eje  $j\omega$  entre  $-\infty < \omega < \infty$ .

30 min Existen 3 gráficos para representar un sistema en un análisis de frecuencia, ellos son:

32 min BODE: presento 2 gráficos, uno de amplitud y otro de fase.



• es el más usado e intuitivo



35 min Ej:  $G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$

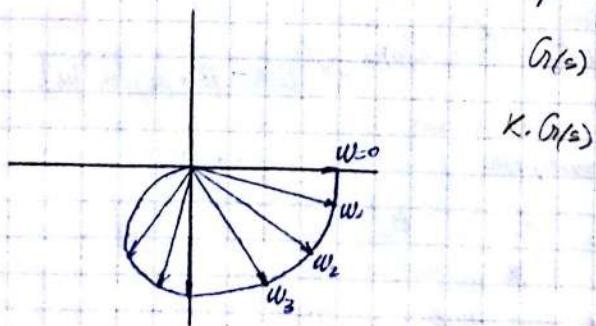
hacemos  $s=j\omega$

$$|G(s)| = \frac{|s+z_1| |s+z_2| |s+z_3|}{|s+p_1| |s+p_2| |s+p_3| |s+p_4|}$$

Funció n de órden mínimo: cuando todos los ceros y/o polos se localizan en el semiplano izquierdo.

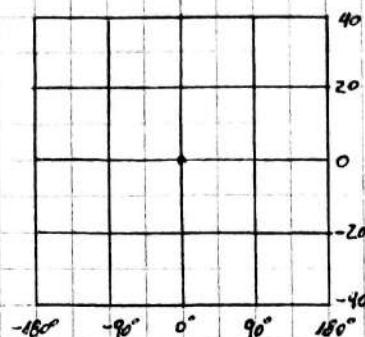
$$\angle G(j\omega) = \angle s+z_1 + \angle s+z_2 + \angle s+z_3 - \angle s+p_1 - \angle s+p_2 - \angle s+p_3 - \angle s+p_4$$

39 min NYQUIST: se grafica módulo y fase en un mismo dibujo; no es conveniente si se cambia algún parámetro (por ej: la ganancia de la  $F_T$ ) se debe volver a calcular todo con el nuevo parámetro.



• es indicado para ver/analizar la estabilidad

41min BLACK: utiliza dB y ° en un mismo gráfico



44min Analizamos los ceros y polos al origen:

$$s^{\pm n}, \text{ si tenemos } G(s) = s \Rightarrow j\omega \quad |G(j\omega)| = \omega \\ \angle G(j\omega) = e^{j\frac{\pi}{2}} = 90^\circ$$

45min  $P/W=0 \rightarrow -\infty \text{ dB}$  pendiente  $20 \text{ dB/dec.}$

$$P/W=1 \rightarrow 0 \text{ dB}$$

50min Si  $G(s) = s^{-1} = \frac{1}{s}$  (polo al origen)

pendiente  $-20 \text{ dB/dec}$

$$G(j\omega) \rightarrow |G(j\omega)| = 1/\omega$$

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ$$

53min Sistema de 1º orden:

$$(T_s + 1)^{\pm m} \Rightarrow (T_j\omega + 1)^{\pm m}$$

para un cero, tenemos que:

$$|1| = \sqrt{(T\omega)^2 + 1} \rightarrow P/W \ll 1 \Rightarrow |1| \approx 0 \text{ dB}$$

$$\angle = \tan^{-1}(T\omega) \rightarrow P/W \gg 1 \Rightarrow |1| \approx T\omega$$

1h02:30 Sistema de 2º orden:

$$\text{Si } G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow s = j\omega \rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$

dividimos todo por  $\omega_n^2$ , para normalizarlo:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

obtengo la variable  $\mu = \omega/\omega_n$

$$G(\mu) = \frac{1}{\underbrace{1 - \mu^2}_{Re} + \underbrace{2\zeta\mu}_{Im}}$$

1b5min El módulo y argumento serán:

$$|G(\mu)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + 4\zeta^2\mu^2}}$$

$$\angle G(\mu) = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta\mu}{1-\mu^2} \right)$$

1b6min ¿Habrá algún valor de  $\mu$  para el cual la función presente máx/min?

$$|G(\mu)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu^2 + \mu^4 + 4\zeta^2\mu^2}}$$

dónde analizamos a  $R = 1 - 2\mu^2 + \mu^4 + 4\zeta^2\mu^2$ ,  
• si  $R$  es mín.,  $|G(\mu)|$  es máx.  
• si  $R$  es máx.,  $|G(\mu)|$  es min.

para ello decimos que:

$$\frac{dR}{d\mu} = -4\mu + 4\mu^3 + 8\zeta^2\mu = 0 \quad \text{solo factor común a } 4\mu$$

$$4\mu \underbrace{(-1 + \mu^2 + 2\zeta^2)}_{} = 0 \rightarrow \mu = 0 \text{ implica frecuencia cero, no sirve, por eso analizamos el ()}$$

$$\mu^2 = 1 - 2\zeta^2$$

dónde:  $\mu = \frac{\omega}{\omega_n}$   $\mu = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  → este valor de  $\mu$  produce un máx., y se llama  $\mu$  de resonancia

cómo el radicando no puede ser negativo, el valor de  $\zeta$  será:

$$1 - 2\zeta^2 \geq 0 \quad \therefore \zeta \leq \sqrt{0,5} \quad - \boxed{0 \leq \zeta \leq 0,707} \rightarrow \text{existe sobrepaso}$$

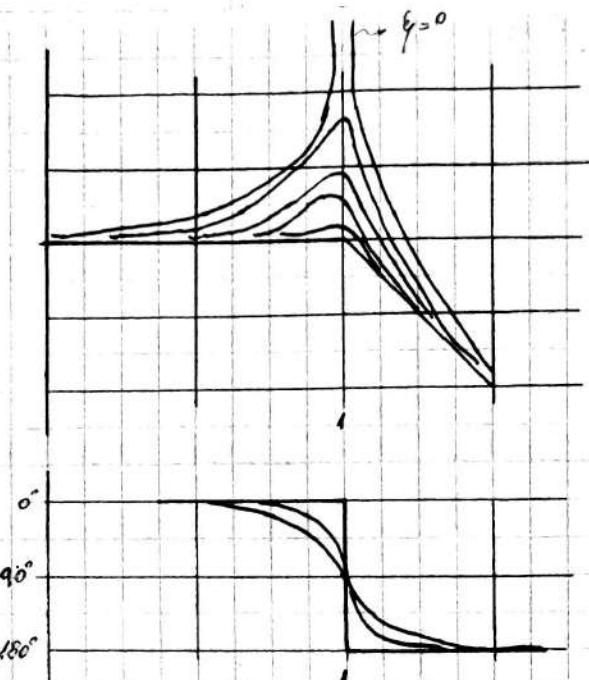
1b7min Con el valor de  $\mu$  que produce el máx., se reemplaza en  $|G(\mu)|$ :

$$|G(\mu)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{1}{1 - 2\zeta^2}\right) + \left(\frac{1}{1 - 2\zeta^2}\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{1}{1 - 2\zeta^2}\right)}}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \rightarrow \omega \text{ de resonancia}$$

1b8min  $|G(\mu)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \rightarrow M_R \rightarrow$  módulo de resonancia, depende del coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$ .

Expresamos a esto último en un Bode.



- Con  $\phi = 0$ , si al sistema lo exito con una frecuencia igual a la frecuencia natural lo amplitud crece sin límite

$$\mu = \frac{W}{W_n}$$

- los máximos se corren hacia la izquierda

29/6/16 Filtrado de respuesta en frecuencia, Lugar de Raíces, Bode, Nyquist, etc  
(dijo que iba a subirlo a autogestión)

13 min

$$20 \text{ min} \quad K = \frac{\pi / (\varepsilon + P_i)}{\pi / (s + Z_i)}$$

23 min por ser sistema Tipo 1, arranca (en Bode) con pendiente -20 dB/dec.

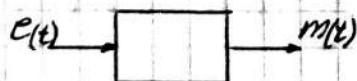
29 min Margen de Fase y Margen de Ganancia iguales a cero, el sistema es inestable (oscilatorio)

3/8/16

### Acciones de Control.

#### Acción Proporcional

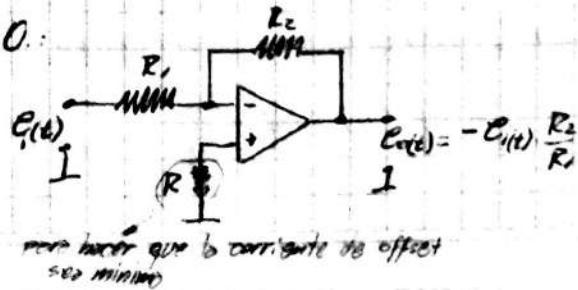
Es la acción de control más fácil de implementar.



$$m(t) = K_p e(t) \rightarrow \text{sólida proporcional a la entrada}$$

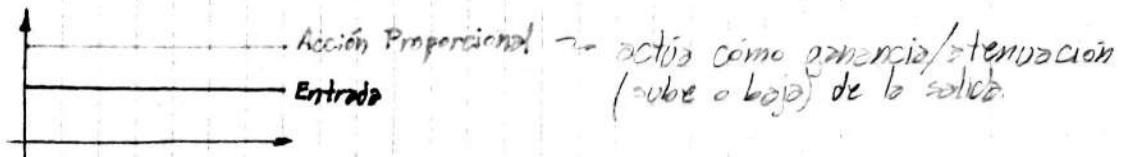
$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

Ejemplo con A.O.:

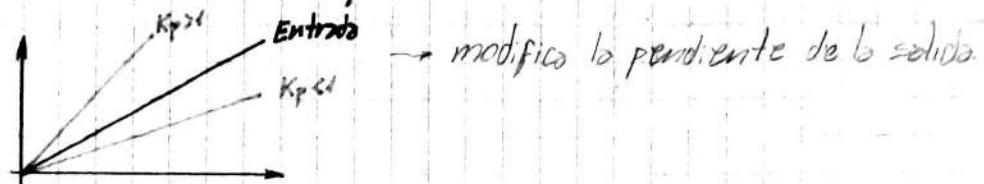


para hacer que la corriente de offset sea mínima

Si al sistema le ponemos una entrada constante, la acción proporcional será:

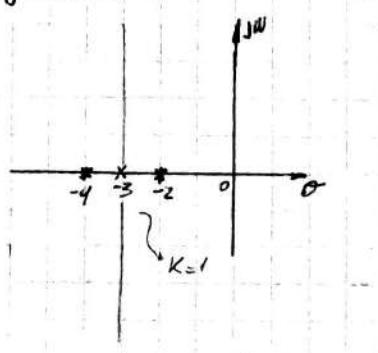


Si lo excitamos con una rampa:



5min Las acciones proporcionales no suelen ser satisfactorias salvo ciertos usos.

Ejemplo: un sistema de 2º orden tipo 0. - ante una entrada escalón, el error es de

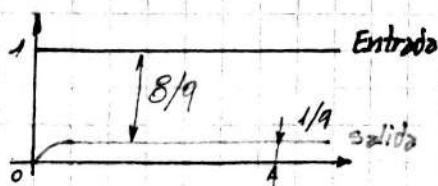


$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \rightarrow F_{TCA}$$

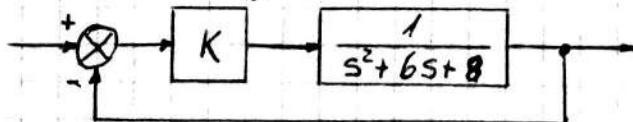
$$F_{TCC} = \frac{K}{s^2 + 6s + 8 + K} = \frac{1}{s^2 + 6s + 9} = \frac{1}{(s+3)^2}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$E_{SS} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{8}{9} \approx 0,89 \rightarrow \text{error que se obtiene ante entrada escalón}$$



11min Cómo el error es grande, incrementamos la ganancia.  
¿Qué se hace? se pone un controlador proporcional.



12min al incrementar K, la salida seirá aproximando al valor de la entrada, pero el sistema presentará sobrepicos (subamortiguado), por lo que no puede ser la mejor solución al problema. En ese caso se deberá agregar un compensador para modificar al sistema.

19min Acción Proporcional y Derivativa (PD o P+D)

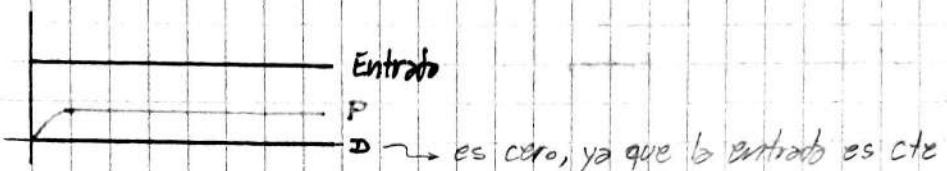
$$m(t) = K_p E(t) + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$M(s) = [K_p + K_d s] E(s) \quad \therefore \quad \frac{M(s)}{E(s)} = K_p [T_d s + 1] \quad \text{dónde } T_d = \frac{K_d}{K_p}$$

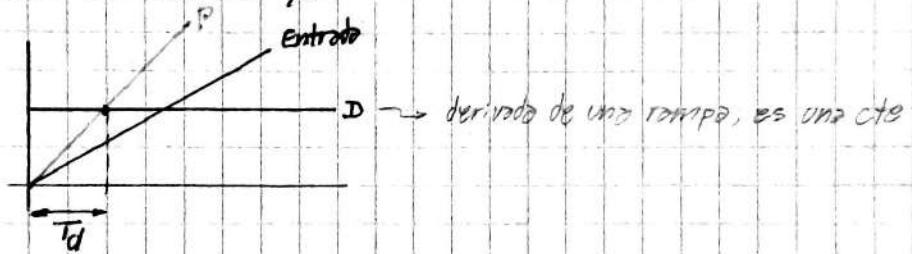
$$= K_p T_d \left[ s + \frac{1}{T_d} \right]$$

21min  $\ddot{\alpha}$  Cómo actúa? la acción proporcional actúa cuando el error (entrada) es constante o cuando varía, pero la acción derivativa actúa cuando hay cambios en el error

Ejemplo: si la entrada es un escalón.



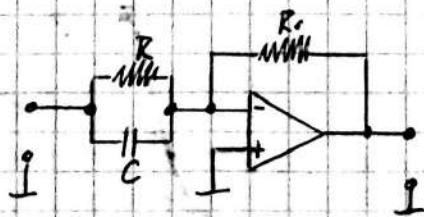
22min si la entrada es una rampa



23min  $T_d$ : tiempo derivativo, es el tiempo que le toma a la acción proporcional alcanzar o igualar a la acción derivativa.

24min  $\frac{M(s)}{E(s)} = K_p T_d \left( s + \frac{1}{T_d} \right)$  → físicamente representa colocar un "cero" al sistema, agregando un adelanto (fase positiva)  
Compensador de adelanto

Ejemplo con A.O:



26min Acción Derivativa.

Por sí sola nunca se usa, ya que los derivadores puros son elementos que amplifican el ruido, debido a que el derivador actúa ante los cambios en los valores de la señal de entrada.

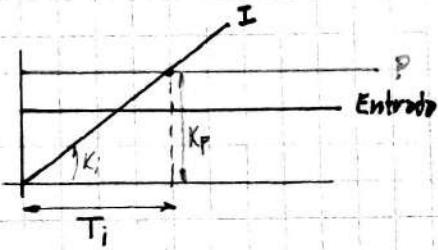
## Acción Proporcional e Integral (PI o P+I)

$$m(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt$$

$$M(s) = \left[ K_p + \frac{K_i}{s} \right] \cdot E(s) \quad \therefore \quad \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s} = \frac{K_p \left( s + \frac{1}{T_i} \right)}{s}$$

dónde  $\frac{1}{T_i} = \frac{K_i}{K_p}$

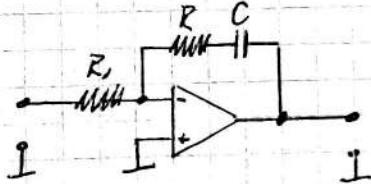
31min Ejemplo: entrada escalón



32min  $T_i$ : tiempo de integración, es el tiempo en el cual la acción proporcional adelanta a la acción integral.

- Los integradores actúan como filtros promediadores, eliminan las altas frecuencias. son alizadores.

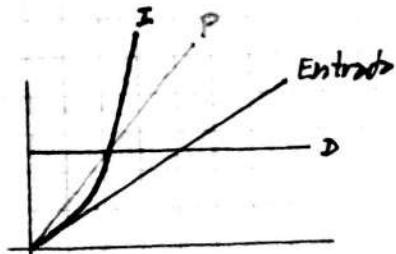
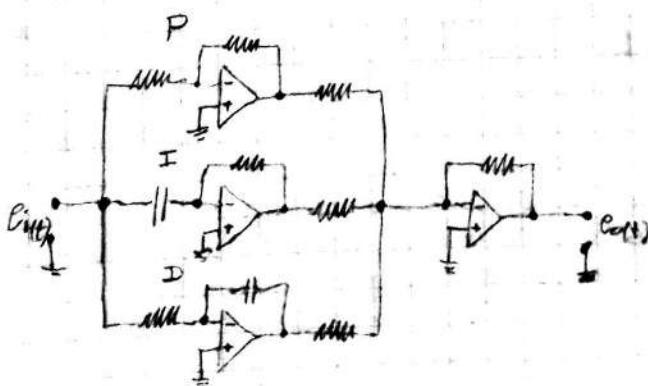
Ejemplo con A.O.:



## Acción Proporcional, Integral y Derivativa (PID o P+I+D)

Son muy usados en la industria. Es una combinación de los anteriores.

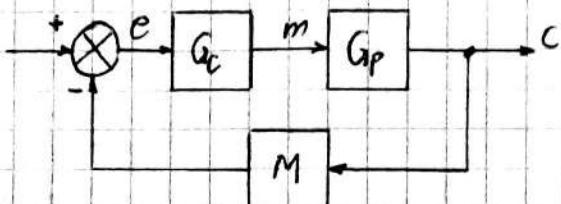
$$\rightarrow K_p \left( 1 + T_d \cdot s + \frac{1}{T_i \cdot s} \right) \rightarrow$$



### 37 min Compensación.

Es modificar la performance de cierto sistema que no cumple con ciertas especificaciones y que deseamos que cumpla.

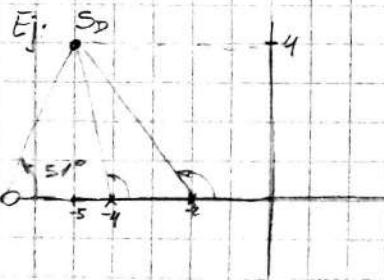
Ejemplo:



En general, podemos tener elementos que modifiquen el sistema en la rama directa o en la rama de realimentación.

37min Que se pretende modificar?

- Estabilidad Relativa  $\rightarrow M_o \rightarrow$  sobreímpico  $\rightarrow \zeta$
- Rapidez  $\rightarrow t_{s+2\%} \rightarrow t_s = 4T$   
 $\rightarrow t_{s+5\%} \rightarrow t_s = 3T$
- Precisión (Error)  $\rightarrow E_{ss} \Rightarrow K_p, K_v \text{ o } K_a$



$$1 + GH = 0 \quad \therefore GH = -1$$

$|GH| = \pm 180^\circ / 2K + 1$

$$|GH| = 1$$

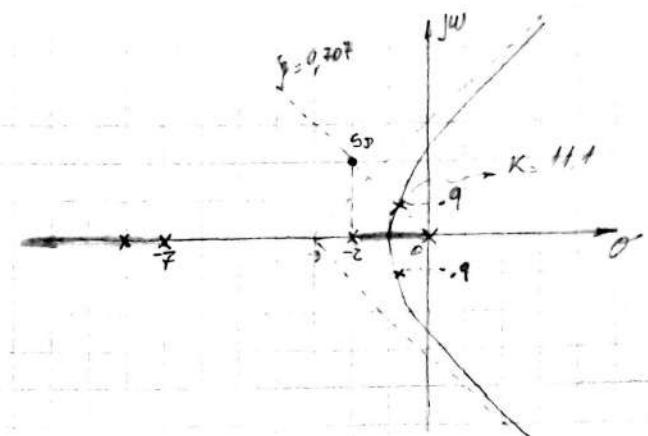
10/8/16

10min Compensación utilizando el lugar de raíces. (PDF de igual nombre)

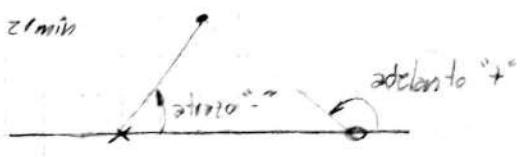
Cuando se quiere modificar el comportamiento de algún sistema, siempre hay que comenzar por el controlador más sencillo, el Proporcional, o sea ajustar una ganancia.

Ejemplo:  $G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 9s^2 + 14s} = \frac{1}{s(s+2)(s+7)}$  ;  $H(s) = 1$

Cuyo Lugar de Raíces es:



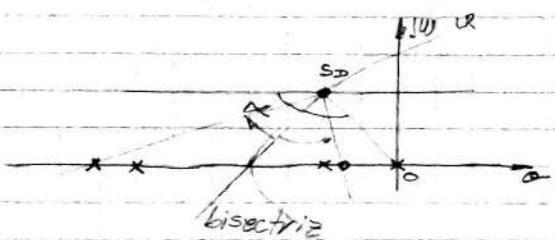
$$11,1 \cdot \sqrt{2,02} \cdot \sqrt{8} = 11,1$$



Se pide que al compensar, el sistema tenga un  $\theta = 0,707$  y  $W_n = \sqrt{8}$ .  
el compensador debe tener  $66,8^\circ$  en adelanto.

### 27min 1º Método: de la Bisectriz

Sobre el LR, en el punto de diseño  $S_D$ , se traza una recta paralela al eje Real (abscisas) y se une el punto  $S_D$  con el origen.



23min El ángulo  $\alpha$  formado, se toma su bisectriz, desde allí se suma/resta el ángulo del compensador y el corte con el eje real será donde se ubiquen los ceros/poles necesarios.

Así la  $F_T$  del compensador será:

$$G_C(s) = \frac{(55,3)(s+1,65)}{(s+5,079)}$$

R.C.L

25min Si se hace con elementos pasivos al compensador, los componentes suelen ser muy dispares entre sí, haciendo de este Método uno de los más optimizados en cuanto a valores que se pueden conseguir en elementos pasivos.

27min En Lazo Cerrado, el cero de  $G_C(s)$ , está presente como cero en el Lazo Cerrado. Este cero en el Numerador se dice que el sistema tiene dinámica de numerador.

### 28min 2º Método: uso de red de adelanto polo-cero alternativa

Hay veces que es posible cancelar con un cero a un polo. Esto es colocar un cero sobre la posición de un polo de la función original



32min • Este Método de cancelación, sólo es posible cuando se cancela en el SPI, ya que si la cancelación no es exacta queda un término remanente, por lo tanto que este sea tiene algún efecto y aún más si estamos en el SPD. (crecería sin límite) → se hace inestable.

Así obtenemos las funciones:

$$G_{2C}(s) = \frac{77,24(s+2)}{(s+6,6)}$$

$$F_{TLC_2}(s) = \frac{77,24}{(s+2,66)(s^2 + 3,998s + 7,994)}$$

36min 3º Método: uso de un controlador P+D.

$$G_{3C}(s) = K_p(T_d s + 1) = K_p \cdot T_d \left(s + \frac{1}{T_d}\right) \rightarrow \text{pone un cero en } -\frac{1}{T_d}$$

Se ubica el cero del PD, de tal forma de que provea los 67° de adelanto.

• Lo que provoca una modificación notable del Lugar de Raíces.

Las funciones son:

$$G_{3C}(s) = \underbrace{14}_{K_p \cdot T_d} \underbrace{(s + 2,85)}_{1/T_d}$$

$$F_{TLC_3}(s) = \frac{14(s+2,85)}{(s+4,99)(s^2 + 4s + 7,99)}$$

• Se lo puede implementar con elementos pasivos, A.O. etc.

42min 4º Método: uso de la realimentación de posición y velocidad.

52min • ¿Cuál de todos los métodos se elige?

la práctica.

Depende a dónde se lo quiere usar en

Los compensadores de adelanto, me permite modificar la respuesta transitoria, fundamentalmente Est. Relativa y Rápida.

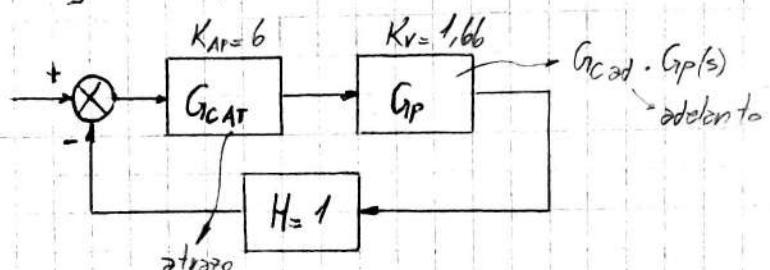
17/8/16

Compensadores en atraso. (continúa con el PDF anterior en "segunda Parte")

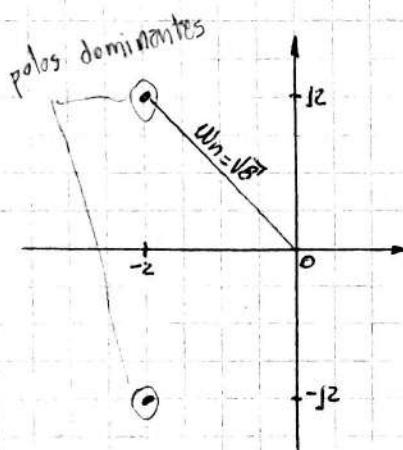
Estos compensadores nos permiten modificar la presión de un sistema. unto con las otras?

- Debe ser capaz de modificar la respuesta estacionaria sin modificar notablemente la respuesta transitoria.

Tiene la siguiente forma:



De los 4 Métodos vistos de compensación, usamos el de "cancelación".



Buscamos compensar tal que:

$$a) C_{ss} < 0,1$$

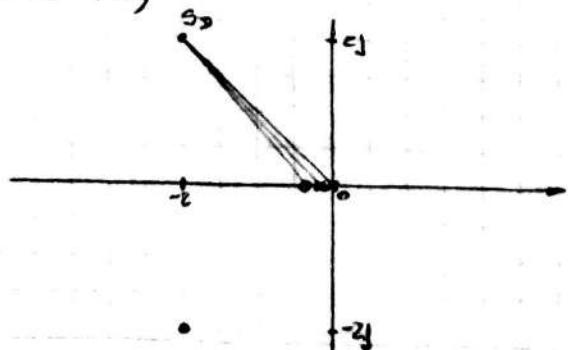
$$b) C_{ss} = 0$$

$$11\min K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{\text{cad}} \cdot G_P(s) = 1,66 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot 77,24 \frac{(s+2)}{s(1+6,66)(s+7)(s+2)} = 1,656799$$

13min El  $C_{ss}$  que se pretende es 0,1  $\therefore K_V = 1/C_{ss} = 10$ , el compensador de atraso deberá apertar la diferencia entre lo que se busca y lo que ya tiene el sistema.

$$K_{AP} = \frac{K_V}{K_V} = \frac{10}{1,66} = 6,024 \approx 6 \quad \rightarrow K_{AP}$$

15min Proponemos un controlador en atraso, el polo está a la derecha y el cero a lo izquierdo (todo en el SPI)



16min El controlador será de la forma:

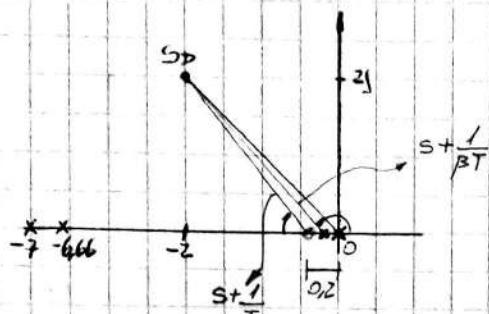
$$K \left[ \frac{T_S + 1}{\beta T s + 1} \right] = \frac{K T \left( s + \frac{1}{T} \right)}{\beta T \left( s + \frac{1}{\beta T} \right)} \quad \therefore G_{CAT} = \frac{K}{\beta} \cdot \frac{s + 1/T}{s + 1/\beta T}$$

$$1 < \beta < 15$$

17min  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \cdot T_S + 1}{\beta T s + 1} = \frac{77,24}{s(7+6,66)(7+7)} = 0,1$   $\therefore K = 6$  (como mínimo)

caso pedido

18min Dónde se ubican el polo y el cero para que cumplan con lo anterior?



Los módulos de los vectores de los ceros y polos al punto  $S_p$ , son prácticamente iguales.

19min Pero se debe respetar que:

- la diferencia entre los ángulos que aportan el cero y polo sea  $\leq 5^\circ$

23min • El cero se ubicará en el eje real, a la décima parte Real del polo dominante.

25min Cero:  $\frac{1}{T} = 0,2 \quad \therefore T = 5$

$$5^\circ > | \angle S + 0,2 - \angle S + 0,033 | = 2,52^\circ$$

$\beta = 6 \quad \therefore \beta T = 30 \quad \therefore \frac{1}{\beta T} = 0,033$  → ubicación del polo

26min Quedando:

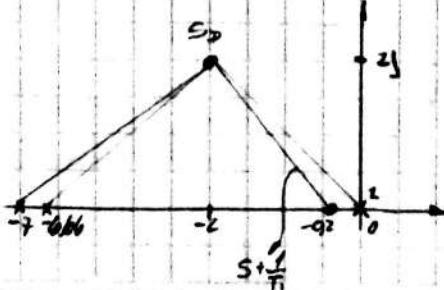
$$G_{CAT} = 1,04 \frac{(s+0,2)}{(s+0,033)}$$

30min Si los cálculos son correctos, el nuevo Lugar de Raíces debería ser muy parecido al LR original, salvo una mínima diferencia.

42min b) Para tener un  $E_{ss}=0$  ante una entrada rampa, usamos un controlador P+I, que nos provee de un polo en el origen.

$$P+I - K_P \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K_P}{s} \left( s + \frac{1}{T_i} \right)$$

→ polo en origen      → cero en  $-1/T_i$



$$\frac{1}{T_i} = 0,2 \quad \therefore T_i = 5 \text{ seg}$$

$$K_P = (\beta)^2 \frac{\sqrt{5^2 + 2^2} \sqrt{9,66^2 + 2^2}}{\sqrt{9,66^2 + 2^2}} = 81,19$$

5 min Las respuestas serán aproximadamente iguales, y lo que se busca que el  $T_i$  no sea muy grande para que no sea tan lenta la llegada a régimen del sistema.

24/8/16

### 8 min Respuesta en Frecuencia

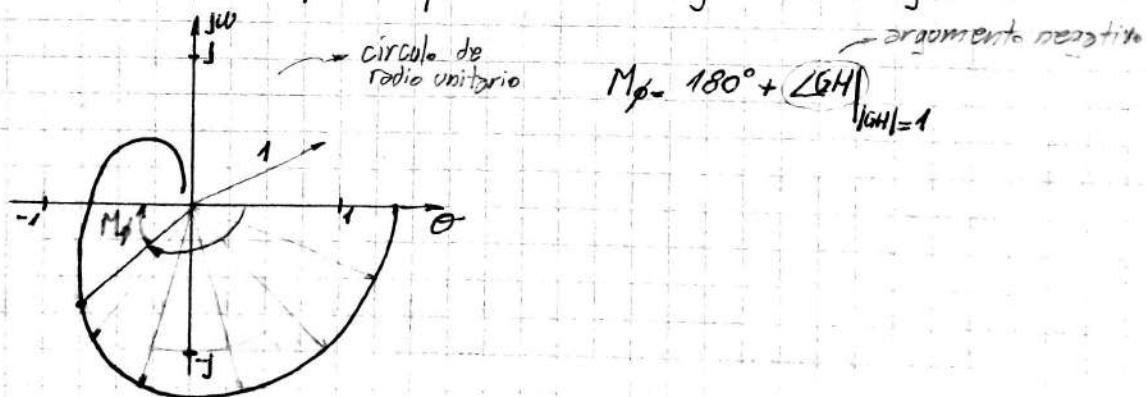
Como primera medida, un sistema debe ser estable; y se tendrán como especificaciones.

- Estabilidad Relativa  $\rightarrow M_\phi$  margen de fase
  - $M_G$  margen de ganancia
- Precisión  $\rightarrow E_{ss} \Rightarrow K_p, K_v, K_a$
- Rapidez  $\rightarrow B_w, W_h$ 
  - ancho de banda

#### 11:30 \*Márgen de Fase ( $M_\phi$ ):

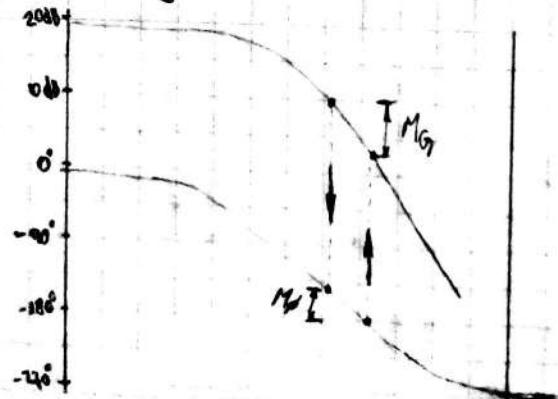
Es el argumento (ángulo) que le falta al sistema para llevarlo a la inestabilidad.

Ejemplo: un sistema Tipo 0 <sup>de 3º Orden</sup> que tiene el siguiente diagrama



14:50 Criterio de Estabilidad de Nyquist: si no hay singularidades en el SPD de la Fz del sistema, el sistema es estable si no se rodea al punto  $-1+j0$ .

16 min Por ejemplo en Bode:



17:20 min Márgen de Ganancia:

$$M_G = \frac{1}{|GH|} \quad |GH|=180^\circ$$

21:20 min Compensador en adelanto:

Tiene la siguiente forma

$$G_C(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{T(s + \frac{1}{T})}{\alpha T(s + \frac{1}{\alpha T})} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$G_C(j\omega) = \frac{Tj\omega + 1}{\alpha Tj\omega + 1}$$

En Bode:

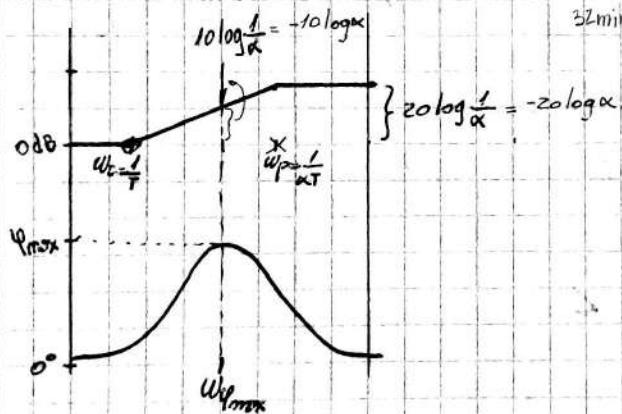
$$|G_C| = \frac{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}{\sqrt{\alpha^2 T^2\omega^2 + 1}}$$

$$-P/W \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \text{ dB (ganancia)} \quad 1$$

$$+P/W \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$$

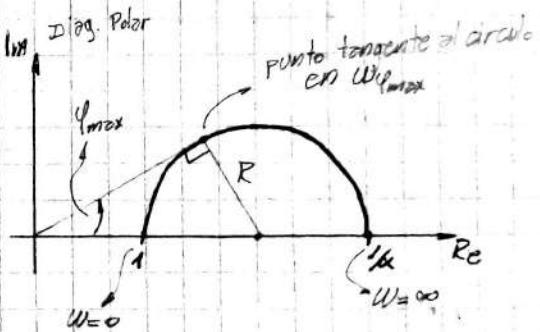
$$\angle G_C = \tan^{-1} Tw - \tan^{-1} \alpha Tw \quad \rightarrow \text{para que sea en "adelanto", } \alpha \text{ debe valer}$$

$$0 < \alpha < 1$$



32 min

1m Diag. Polar



31 min Para la frecuencia  $w_{\phi_{max}}$ , tendrá como fase  $\phi_{max}$ , que es el máximo valor de fase que me proveerá el compensador.

$$w_{\phi_{max}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \rightarrow \text{es la media geométrica de } w_c \text{ y } w_p$$

→ en esta  $w$ , la ganancia es de valor  $10 \log \frac{1}{\alpha}$

32 min Desde el Diagrama Polar, determinaremos el radio  $R$  del semicírculo.

$$R = \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{2} = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$$

34 min Hallamos el seno de  $\phi_{max}$ :

$$\sin(\phi_{max}) = \frac{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}{1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

Determinemos  $\alpha$ :

$$\operatorname{sen}(\varphi_{\max}) + \alpha \operatorname{sen}(\varphi_{\max}) = 1 - \alpha$$

$$\alpha(1 + \operatorname{sen}(\varphi_{\max})) = 1 - \operatorname{sen}(\varphi_{\max}) \quad \therefore \quad \alpha = \frac{1 - \operatorname{sen}(\varphi_{\max})}{1 + \operatorname{sen}(\varphi_{\max})}$$

38min • Con elementos pasivos, como máximo podemos lograr un adelanto entre  $60^\circ$  y  $65^\circ$ .

43min Si se desea hallar  $\varphi_{\max}$ :

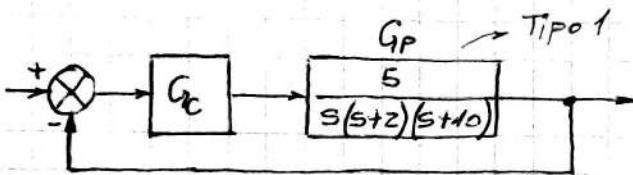
$$\varphi_{\max} = M_p - M_{\varphi_{\text{act}}} + 5^\circ \sim 10^\circ$$

↳ margen de fase actual  
↳ margen de fase pedido

31/8/16 hasta 4min, repaso de clase anterior

4min ¿Cómo usariamos el compensador en adelanto?

Ejemplo:



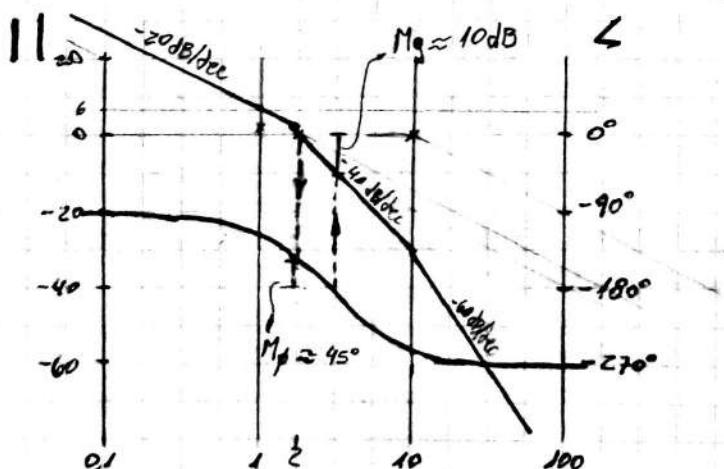
Para esta planta  $G_p$ , se desea usar un controlador de adelanto  $G_c$  y se pide:  $K_V = 2$  } especificaciones  
 $M_p = 60^\circ$  } de diseño  
 $E_{ss} = \frac{1}{K_V}$

Para el sistema  $G_p$ , su  $K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s G_p H = \frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow K_V$  actual

10min La ganancia de  $G_c$  debe valer 8 así en conjunto con  $G_p$ , obtengo el  $K_V = 2$  pedido.

$$8 \cdot \frac{5}{s(s+2)(s+10)} \rightarrow 8 \cdot \frac{5}{s \cdot 2(0,5s+1)10(0,1s+1)} = \frac{40}{20(0,5s+1)(0,1s+1)}$$

$\approx 20 \log(2) \approx 6 \text{ dB}$



21min:

En Matlab:  
 $gp = zpk([0 -2 -10], [0.1 1 20])$ ,  
 $margin(gp)$ ,  
 $allmargin(gp)$

$$\begin{aligned} M_g &= 6 \\ M_p &= 43,21 \end{aligned}$$

17min Hasta aquí, hemos cumplido con la especificación de Error, nos faltó cumplir con la especificación de  $M_p$  requerida.

22min Hacemos:

$$\varphi_{\max} = M_p - M_{\varphi_{\text{act}}} + 10^\circ = 60^\circ - 43^\circ + 10^\circ = 27^\circ$$

24min  $\alpha = \frac{1 - \operatorname{sen}(\varphi_{\max})}{1 + \operatorname{sen}(\varphi_{\max})} = 0,375 \rightarrow$  nuestro compensador tiene este  $\alpha$

25min Sabemos que en el valor de  $\varphi_{max}$  (en  $W_{\varphi_{max}}$ ), nos provee una ganancia de  $10 \log \frac{1}{\alpha}$ , significa que si se posiciona dicho máximo justo en el lugar para obtener el  $M_g = 60^\circ$ , será de tal forma que dé 0dB el módulo.

26min Así:  $10 \log \frac{1}{\alpha} = -10 \log \alpha = -10 \log 0,375 = 9,26 \text{ dB}$

Cómo el  $G_c$  nos aportará 9,26 dB, buscamos dónde (en qué valor de  $W$ ) hay -4,26 dB en el gráfico de Bode, obteniendo:

$$-4,26 \text{ dB} \leftarrow W = 2,17 \text{ rps} = W_{\varphi_{max}}$$

27min Obtenido  $W_{\varphi_{max}}$ , recordando que:

$$W_{\varphi_{max}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad \therefore T = \frac{1}{W_{\varphi_{max}}\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2,17\sqrt{0,375}} = 0,7525$$

28min Quedando el compensador como:

$$G_c = K \cdot \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1} = \textcircled{B} \cdot \frac{0,7525 s + 1}{0,2821 s + 1} = 21,34 \frac{(s + 1,33)}{(s + 3,55)}$$

$\rightarrow$  ¡OJO! que en los cálculos en Matlab lo incluyó en la 'gp' no en 'gc'

35min • Resumiendo los pasos a realizar:

1º- Cumplir con el  $\dot{E}_{ss}$ , incrementando la ganancia.

2º- Usar el compensador en adelanto; calculamos el  $\varphi_{max}$  a poner en el sistema

3º- Determinamos  $\alpha$  con el  $\varphi_{max}$  del paso 2º.

4º- Con el valor de  $\alpha$ , vemos cuánto hay que incrementar de ganancia, buscamos en el gráfico de Bode el valor de  $W$  donde se produce el opuesto (-) que nos dará el compensador.  $\rightarrow = W_{\varphi_{max}}$

5º- Determinamos  $T$ , teniendo como datos  $\alpha$  y  $W_{\varphi_{max}}$ .

6º- Tenemos todos los valores para describir el compensador en adelanto.

40min • Compensador en retraso:

Tiene la forma:

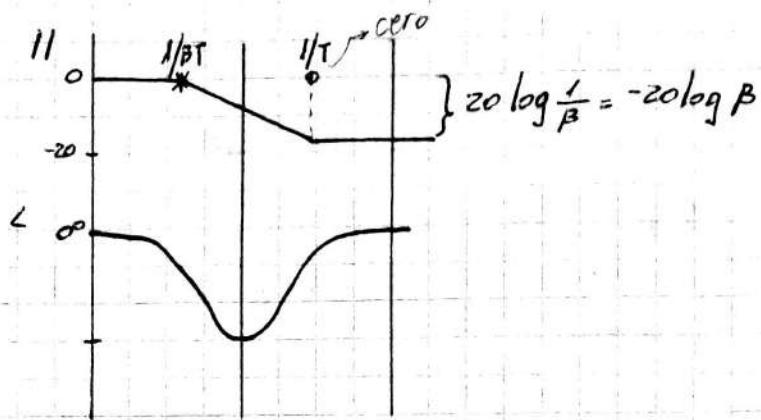
$$G_c = \frac{T_s + 1}{\beta T_s + 1} \quad 1 < \beta < 15$$

42min Al hacer  $s \rightarrow jW$ :

$$|G_d| = \frac{\sqrt{T^2 W^2 + 1}}{\sqrt{\beta^2 W^2 + 1}}$$

$$\begin{cases} W=0 \Rightarrow 1 \\ W=\infty \Rightarrow \frac{1}{\beta} \end{cases}$$

43min El Bode tiene una pinta como:



44.25min Lo importante de este compensador es la capacidad de atenuar las altas frecuencias, a partir de donde se ubica el cero atenua las AF en  $-20 \log \beta$

45min Ejemplo:

$$G_p = \frac{5}{s(\beta s + 1)(s + 10)} \quad \text{con } K_v = 2 \text{ y } M_\phi = 60^\circ \rightarrow \text{valores deseados para diseño}$$

46min Hacemos lo siguiente, nos fijamos en el Bode del sistema compensado con ganancia, donde tenemos los  $60^\circ$  de  $M_\phi$ , el cual se ubica en fase  $120^\circ$  obteniendo  $W = 0,91 \text{ rps} \rightarrow G_p = ZPK([1], [0 -2 -10], 40)$

48.50min Para esa  $W = 0,91$ , se tiene un módulo de  $6,03 \text{ dB}$ , por lo tanto se debe cancelarlo (llevarlo a 0dB) para lograr la condición pedida de  $M_\phi = 60^\circ$ , pero lo que no se debe modificar es la pendiente en baja frecuencia.

Cómo se vio, un compensador en strass, en BF no aporta pendiente, por lo tanto no modifica la pendiente original del sistema. Si la pendiente original se prolonga con una línea hasta cortar el 0dB, lo debe hacer en  $W = 2 \text{ rps}$  (para este ej.)  $\rightarrow K_v = W = 2 \Rightarrow$  se comprueba la compensación por ganancia

50min Pero si el  $G_C$  debe bajar los  $6,03 \text{ dB}$  en  $W = 0,91 \text{ rps}$ ; por lo tanto:

$$\beta = 10^{-\frac{6,03 \text{ dB}}{20}} = 2$$

53min Con  $\beta = 2$ , una década antes de  $0,91 \text{ rps}$ , osea en  $W = 0,091 \text{ rps}$  se posiciona el "cero"  $1/T$ :

$$54min \quad W = \frac{1}{T} = 0,091 \quad \therefore \quad T = \frac{1}{W} = \frac{1}{0,091} = 10,989 \approx 11$$

Por lo tanto:  $\beta T = 22$

Quedando el compensador como:

$$G_C = \frac{T_0 + 1}{\beta T s + 1} = \frac{11s + 1}{22s + 1} = 0,5 \frac{s + 0,0909}{s + 0,04545}$$

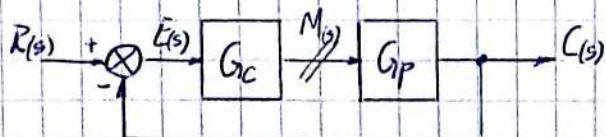
$$G_C = ZPK(0,0909, 0,04545, 0,5) \\ G = \text{series}(g_p, g_C) \\ \text{bode}(G)$$

14/9/16

• Compensador PID:

Hay situaciones donde se desea realizar modificaciones en la performance de cierto sistema y se desconoce la  $F_T$  de la "planta"  $G_p$ . Para ello, existen algunos métodos para conocer la respuesta de la planta y poder sintetizar los controladores PID.

1º Método:



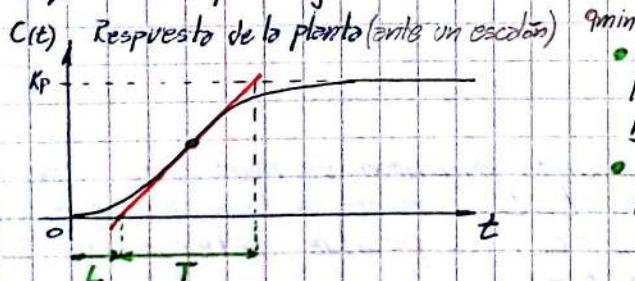
sin conocer  $G_p$  se desea obtener cierta respuesta utilizando un controlador tal que se pueda modificar la respuesta transitoria y la respuesta en estado permanente.

Usamos un PID para cumplir lo anterior. Recordando:

$$G_C = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left[ 1 + T_d \cdot s + \frac{1}{T_i \cdot s} \right]$$

4:45min • ¿Qué valores le damos si desconocemos a  $G_p$ ?

• Si se coloca a la entrada de  $G_p$  una señal escalón de prueba, eso arroja una respuesta, por ej.



- El sistema es de Tipo 0, ya que al abrirlo con un escalón, la respuesta obtenida no es una rampa (carece de integrador)
- Por la forma de la respuesta, el sistema es de 2º (o más) órdenes.

11:50am El método consiste en trazar en el punto de inflexión (de la respuesta) una recta, que corta al eje de abscisas y al valor de régimen  $K_p$ . Así quedan definidos 2 tramos en el eje  $t$ : el tiempo  $L$ , de retardo puro, y el tiempo  $T$ : la constante de tiempo del sistema de orden propuesto.

Entonces, se ha aproximado la respuesta mediante segmentos de recta. Por lo tanto se propone una función que tenga una ganancia, un sistema de 1º orden y un retardo puro.

$$G_p = \frac{K_p \cdot e^{-ts}}{Ts + 1}$$

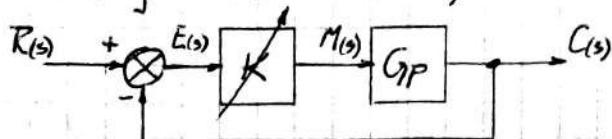
$$f(t-t_0) \underset{\approx}{=} F(s) \cdot e^{-t_0 \cdot s} \Rightarrow \text{retardo puro}$$

19:40min PDF

Este método es válido siempre y cuando  $G_p$  no tenga integradores

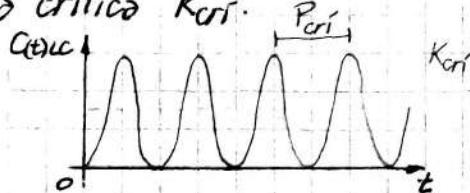
## 2º Método:

Si por el 1º Método, se encuentra que  $G_P$  posee un integrador, a  $G_C$  se le hace una ganancia variable y se lo observa en Lazo Cerrado.



se lo excita con una pequeña entrada y se le incrementa la ganancia, hasta que el sistema empieza a oscilar.

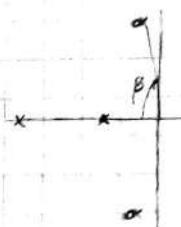
Cuando comienza a oscilar, se mide el periodo de oscilación  $P_{\text{ori}}$ , y la ganancia crítica  $K_{\text{ori}}$ .



26min PDF

31/min cancelación

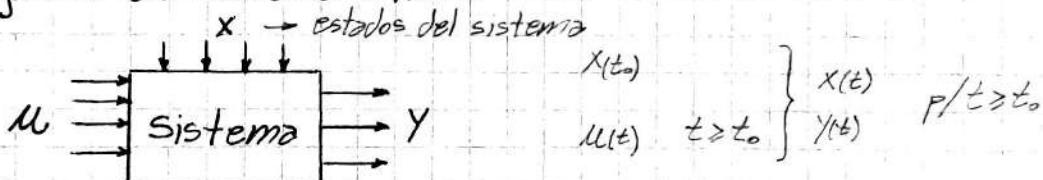
$$\beta = \cos(\frac{\pi}{P})$$



## 39min Variables de Estado.

Una forma de representación de un sistema es mediante variables de estado.

Supongamos un sistema MIMO:



Definición:

"Las Variable de Estado es el conjunto mínimo de números, con cuyo conocimiento para un tiempo  $t=t_0$  (conozco a todos los  $x$  en  $t_0$ ) y conozco la entrada  $U(t)$  para  $t \geq t_0$ , es posible determinar el comportamiento del sistema para  $t > t_0$ .

42min En general, los sistemas se pueden definir a partir de sus derivadas, como

$$\dot{x} = f(x, u, t) ; \quad y = g(x, u, t)$$

Para sistemas Lineales:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

• hay 4 matrices:  $A, B, C$  y  $D$   
donde los coeficientes son dependientes del tiempo

44min Pero como trabajamos con SLIT, las ecuaciones anteriores quedan:

$$\text{Ecación de Estado} \rightarrow \dot{x} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

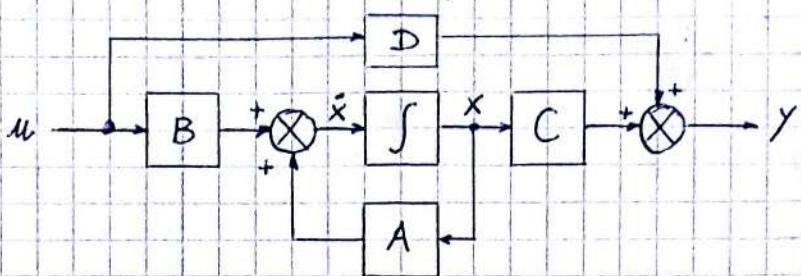
• matrices  $A, B, C$  y  $D$  de coeficientes constantes

$$\text{Ecación de Salida} \rightarrow y = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

• Ecaciones Dinámicas del Sistema

45:50min

Si a éstas ecuaciones las ponemos en forma de diagrama, se tiene:



- D es una ganancia que vincula directamente la entrada con la salida y puentea todo el bloque interno, que es la dinámica propia del sistema. Esto no sucede cuando la función es estrictamente propia ( $D=0$ )

48:50min Dimensionando a cada matriz:

- $X \rightarrow$  vector de estado  $[n \times 1]$  matriz columna
- $\dot{X} \rightarrow$  vector de derivadas de estado  $[n \times 1]$  matriz columna
- $A \rightarrow$  matriz de coeficientes  $[n \times n]$  matriz cuadrada
- $u \rightarrow$  vector de entradas, p entradas  $[p \times 1]$  matriz fila
- $B \rightarrow$  matriz de coeficientes  $[n \times p]$
- $y \rightarrow$  vector de salidas, q salidas  $[q \times 1]$

Los elementos almacenadores o eficientes  $[q \times n]$   
de energía, son los elementos  
que llevan la historia del sistema,  
cómo evolucionó el sistema.

→ no es más

eficientes entradas-salidas  $[q \times p]$

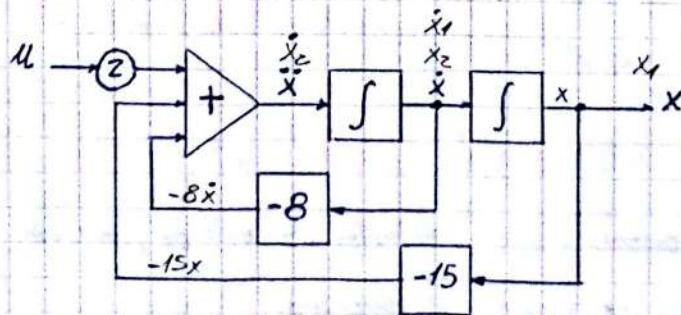
54min Ejemplo: representar el sistema en variables de estado

$$\ddot{X} + 8\dot{X} + 15X = ZU \xrightarrow{\text{L}} (s^2 + 8s + 15) X(s) = Z U(s)$$

$$\ddot{X} = ZU - 8\dot{X} - 15X$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Z}{s^2 + 8s + 15} = \frac{Z}{(s+3)(s+5)}$$

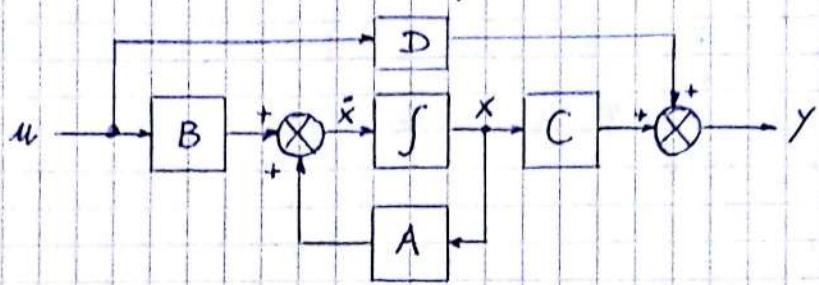
57min Si usamos el método de despejar la derivada de mayor orden,  $\ddot{X}$ , y hacemos el diagrama para determinar las variables de estado:



- La cantidad de elementos almacenadores de energía tienen que ver con la cantidad de integradores presentes en el sistema.

46:50min

Si a éstas ecuaciones las ponemos en forma de diagrama, se tiene:



- D es una ganancia que vincula directamente la entrada con la salida y puentea todo el bloque interno, que es la dinámica propia del sistema. Esto no sucede cuando la función es estrictamente propia ( $D=0$ )

48:50min Dimensionando a cada matriz:

- $x \rightarrow$  vector de estado  $[n \times 1]$  matriz columna
- $\dot{x} \rightarrow$  vector de derivadas de estado  $[n \times 1]$  matriz columna
- $A \rightarrow$  matriz de coeficientes  $[n \times n]$  matriz cuadrada
- $u \rightarrow$  vector de entradas, p entradas  $[p \times 1]$  matriz fila
- $B \rightarrow$  matriz de coeficientes  $[n \times p]$
- $y \rightarrow$  vector de salidas, q salidas  $[q \times 1]$
- $C \rightarrow$  matriz de coeficientes  $[q \times n]$
- $D \rightarrow$  matriz de coeficientes entradas-salidas  $[q \times p]$

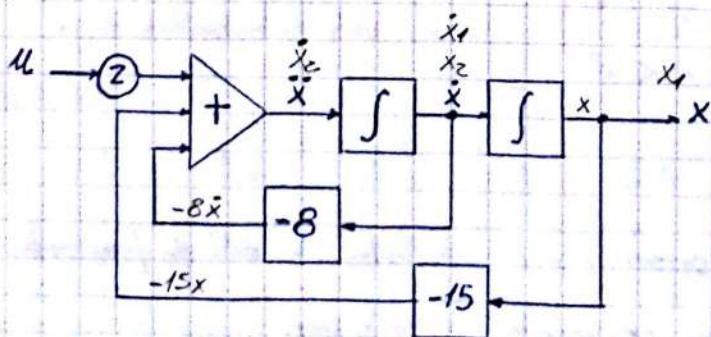
54min Ejemplo: representar el sistema en variables de estado

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 15x = 2u \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} (s^2 + 8s + 15)X(s) = 2U(s)$$

$$\ddot{x} = 2u - 8\dot{x} - 15x$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 8s + 15} = \frac{2}{(s+3)(s+5)}$$

57min Si usamos el método de despejar la derivada de mayor orden,  $\ddot{x}$ , y hacemos el diagrama para determinar las variables de estado:



- La cantidad de almacenadores de energía tienen que ver con la cantidad de integradores presentes en el sistema.

\* Una forma de obtener las variables de estado, es tomar como variable de estado la salida de los integradores.

Se fijan las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$ , y se arman las matrices:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \cdot u \Rightarrow \text{Ecuación de Estado}$$

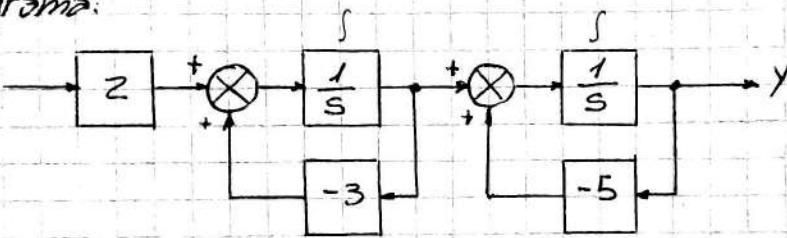
$$[y] = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D \cdot u \Rightarrow \text{Ecuación de Salida}$$

$D = 0$  ya que no hay nada que relacione la salida con la entrada

1h3:23min También podríamos haberlo obtenido de la ecuación de Laplace:

$$u \rightarrow \frac{2}{s+3} \rightarrow \frac{1}{s+5} \rightarrow y \Rightarrow 2 \text{ sistemas de } 1^{\circ} \text{ orden en cascada}$$

1h4min En diagrama:



• Es el mismo sistema pero representado de otra forma.  
Cuando se planteen las variables de estado serán distintas a las anteriores.

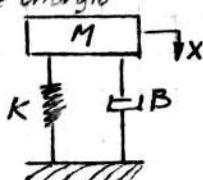
28/9/16

### Variables de Estado Físicas.

3:45min "Son aquellas variables que aparecen en los elementos almacenadores de energía."

Por ejemplo, un sistema mecánico de  $2^{\circ}$  orden:

2 almacenadores:  $M, K$  de energía



Las energías de los elementos almacenadores:

$$\left. \begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2} M \cdot v^2 \\ E_K &= \frac{1}{2} K \cdot x^2 \end{aligned} \right\} 2 \text{ variables de estado} \rightarrow v, x$$

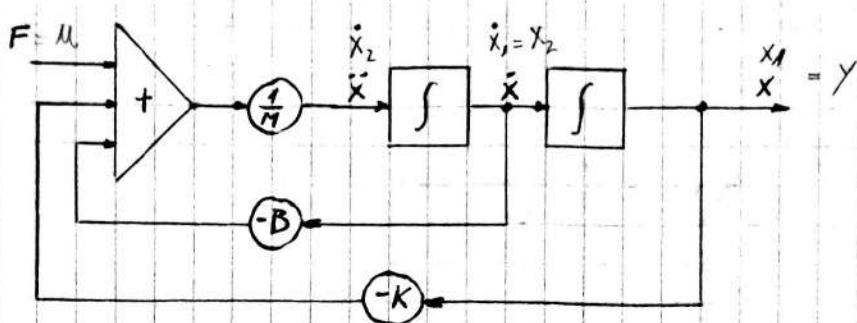
$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Así:

$$F = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx$$

Si decimos que  $x = x_1$ , tenemos dos variables de estado (variables de estado físicas) que están en los términos de energía.  
 $\dot{x} = x_2$

7:15min



\*se ha tomado a la salida de los integradores las variables de estado

9:30min: Cómo se plantea en matrices?

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{M} \end{bmatrix} M$$

$$\ddot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot M$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{K}{M} x_1 - \frac{B}{M} x_2 + \frac{1}{M} M$$

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2$$

10min

- \* El hecho de usar variables de estado físicas, tiene la ventaja de que son variables que se pueden medir. Si bien, hay variables de estados que pueden usarse y facilitan la resolución de un problema, a veces no tienen un significado físico de cómo medirla o cómo establecer de qué se trata.

11:20min Entonces, como variable de estado física, tomamos las variables de estado del término de energía de cada uno de los elementos almacenadores de energía, en el caso del ejemplo son  $x$  y  $v$ .

12min

Supongamos una  $F_T$ :

$$\frac{C}{R} = \frac{s+6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

en los diagramas de simulación, hay varias maneras de representarlos, una de ellas era sacar factor común en el denominador del término de  $s$  al mayor orden (o lo que es lo mismo dividir todo por  $s^n$ ):

$$\frac{C}{R} = \frac{s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}} \rightarrow \text{en este caso, dividir por } s^3 \text{ significa integrar 3 veces: } \left(\frac{1}{s}\right)^3$$

Despejando a  $C$ :

$$C = R \cdot s^{-2} + R \cdot 6s^{-3} - 6Cs^{-1} - 11Cs^{-2} - 6Cs^{-3}$$

$$C = (6R - 6C)s^{-3} + (R - 11C)s^{-2} - 6Cs^{-1}$$

$$C = \underbrace{\{(6R - 6C)s^{-3} + (R - 11C)s^{-2} - 6Cs^{-1}\}}_{x_3} s^{-1}$$

$C$  es la salida de un  $\int$

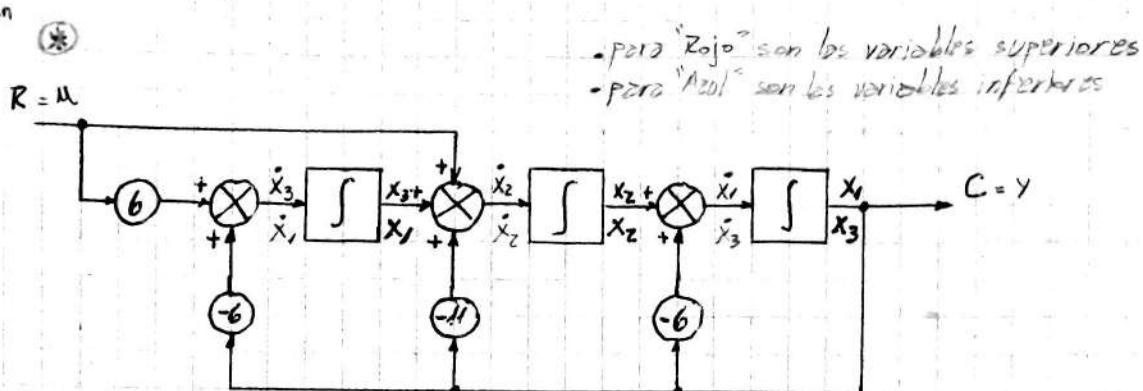
$x_1, x_2, x_3$  : var. de estado

NOTA

$x_1$

$x_2$

18 min tenemos 3 variables de estado que están a la salida de los integradores; planteamos el diagrama de simulación:



Planteamos matrices: (con "Rojo")

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 11$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

• Esta es la representación en variable de estado usando la expresión obtenida por programación directa

- 22 min • Las variables de estado nos dan una idea de la constitución interna del sistema. (representación interna)  
• Los  $F_T$  son expresiones de relaciones externas de lo que sucede en el interior de la "caja negra", sin tener en cuenta cómo está conformado el sistema en su interior.

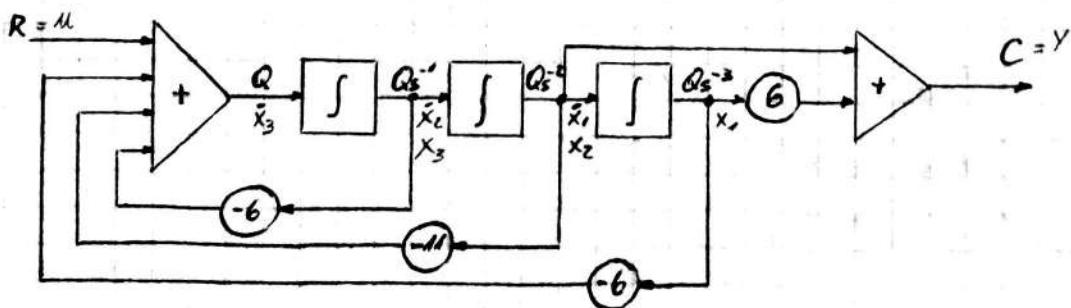
23 min Por ejemplo, tomamos la anterior  $F_T$  y la multiplicamos y dividimos por un polinomio  $Q(s)$ :

$$\frac{C}{R} = \frac{s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}} \cdot \frac{Q}{Q}$$

tenemos que:

$$C(s) = Q s^{-2} + 6 Q s^{-3}$$

$$R(s) = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3} \rightarrow Q = R - 6Qs^{-1} - 11Qs^{-2} - 6Qs^{-3}$$



27 min

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

matriz de Frobenius

Forma Canónica Controlable (FCC) o  
Forma de las Variables de Fase

27:40 min

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$D=0$

28 min

- Como vemos la  $F_T$  del sistema es la misma, pero internamente los componentes están distribuidos de otra manera

28:35 min

- En la FCC, la diagonal superior a la diagonal principal son todos "1", y en la última fila quedan todos los coeficientes de la  $F_T$  cambiados de signo, y entonces también por  $x_1$ , la salida se tiene sus coeficientes.

30 min

- Si cambiamos las variables de estados por otras (indicadas en azul) en el diagrama

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Forma Canónica Observable (FCO)

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$D=0$

- Las matrices A de la FCC y la FCO son Transpuestas entre sí, al igual que la B y C.

- Si expandimos en fracciones simples a la  $F_T$ , obtenemos términos en paralelo:

$$C = \frac{A}{s+s_1} \cdot R + \frac{B}{s+s_2} \cdot R + \frac{C}{s+s_3} \cdot R$$

estos términos son sistemas de 1º orden, integradores redundantes, puestos en cascada.

- La Traza del sistema, es la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz A. Y esa traza es igual a la suma de los autovalores del sistema.

- Supongamos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

38:45 min

transformación lineal  $\rightarrow x = Pz$  si  $\exists P^{-1} \cdot |P| \neq 0 \cdot |P^{-1}| \neq 0$   
así cierto

Reemplazando:

$$\begin{cases} \tilde{P}\tilde{z} = APz + BU \\ y = CPz + DU \end{cases}$$
$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \tilde{z} = \tilde{P}^{-1}APz + \tilde{P}^{-1}BU \\ y = C\tilde{P}z + DU \end{cases}$$

44min

- si se encuentra una matriz  $\tilde{P}$ , puedo transformar el sistema en otro sistema con otras variables de estado (transf de coordenadas)

44min CUANDO se resolvía la ecuación homogénea:  $\ddot{x} = Ax = \lambda x$

sin excitación  $t=0 \rightarrow \ddot{x}=0 \rightarrow x=0$

$$\begin{array}{c} \square \\ \diagup \quad \diagdown \\ \ddot{x} = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{array} \quad t=0$$

45min ¿habrá algún conjunto de números de valores constantes que multiplicados por  $x$  nos dé la solución?

$$Ax = \lambda x$$

$$|\lambda I - A| x = 0 \quad \text{como } x \neq 0 \therefore |\lambda I - A| = 0$$

si eso es solución,  $\lambda$  son los autovalores (valores propios, valores característicos, eigenvalores). Son números que definen la dinámica del sistema, caracterizan el sistema.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -11 & -6 \end{vmatrix} = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 6 = 0$$
$$|\lambda I - A| = 0$$

46min

47min Si comparamos la ecuación en función de  $\lambda$  con la ecuación del Den de la  $F_T$ , tienen la misma forma y los mismos coeficientes

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \Rightarrow \text{Ec. Característica}$$

47min entonces los valores que satisfacen la ecuación característica  $|\lambda I - A| = 0$  son los autovalores del sistema que se corresponden con los polos de la  $F_T$  del sistema. En lazo cerrado,  $|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow 1 + G(s)H(s) = 0$ .

48min Los autovalores caracterizan completamente un sistema y además, informan sobre la estabilidad de ese sistema, si todos los autovalores tienen parte Real negativa el sistema es estable.

49min ¿que sucede ante una transformación lineal? los autovalores se los encuentra como:

$$|\lambda I - P^{-1}AP| = 0$$

asociado a cada matriz  $A$ , existe una cantidad de números (autovalores) que hacen que la ecuación sea cero.

50:45min. ante la matriz transformada, los autovalores siguen siendo los mismos? si lo pensamos físicamente, ante un sistema, si los autovalores nos dan la dinámica del sistema, al cambiar las variables de estado, los  $\lambda$  siguen siendo los mismos, sin importar el marco de referencia del sistema.

51:20min Demostración:

$$|\lambda I - P^{-1}AP| = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{hay trans. lineal} \Rightarrow |P| \neq 0 \quad \exists P^{-1} \quad |P^{-1}| \neq 0$$

$$P^{-1}P = I$$

$$|P'| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = 0$$

$\neq 0 \quad = 0 \quad \neq 0$

Invariancia de los autovalores ante una transformación lineal.

53:30min El hecho de haber cambiado la forma de obtener las variables de estado, los autovalores siguen siendo los mismos.

54min Como los  $\lambda$  son los polos de la  $F_T$ , para el ejemplo:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ , en cualquiera de esos valores, el  $D_{\text{en}}$  se anula  $\therefore$  dichos  $\lambda$  son autovalores.

Como la traza es la suma de la diagonal principal de la matriz, será la suma de los autovalores. (comprobación del cálculo de los  $\lambda$ )

### Sistema con Estados Desacoplados

Si pudiésemos lograr que  $P^{-1}AP$  fuese una matriz diagonal, se obtiene un sistema con estados desacoplados.

56:30min Supongamos al sistema en FCC, la matriz  $P$  que diagonaliza al sistema y los autovalores son reales y distintos, como el caso del ejemplo, la matriz  $P$  será:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

en general  $\Rightarrow P =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

matriz de Vandermonde

si y sólo si  $\rightarrow \lambda_i$  Re y distintos

Siendo  $P'$ :

$$1b:4min \quad P' = \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & 0,5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad \text{con calculadora}$$

$$\text{con } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{FCC}$$

$$C = [6 \ 1 \ 0]$$

$$D = 0$$

1b:6min El sistema transformado es:  $\begin{cases} \dot{z} = P'^{-1}APz + P'^{-1}Bu \\ y = CPz + Du \end{cases}$

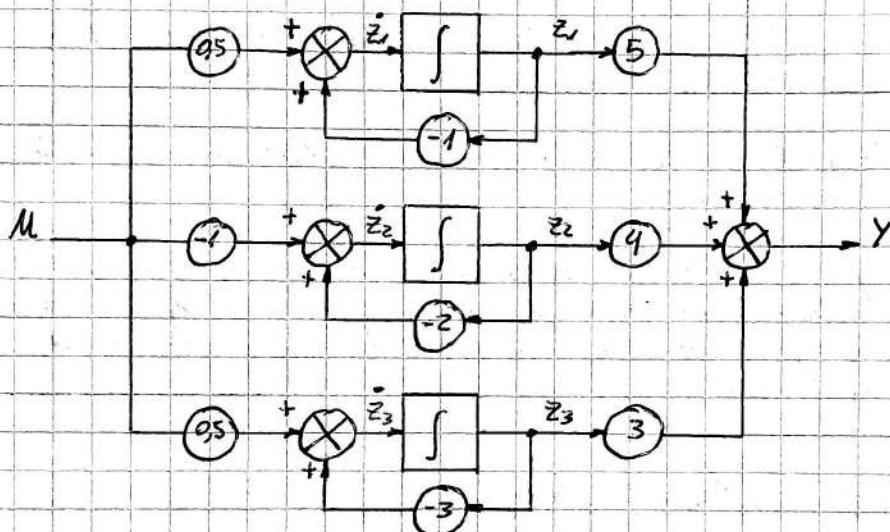
En matrices:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \cdot M$$

$P^{-1}AP$        $P^{-1}B$

$$y = [5 \quad 4 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

1h8min Representado en diagrama de sistema:



1h9min al quedar los 3 sistemas en paralelo, las variables de estado  $z_1, z_2, z_3$ , no se ven afectadas entre sí, ya que están desacoplados los estados permitiendo ajustar parámetros sin influir en los demás.

1h10min el equivalente de la diagonalización es hacer expansión en fracciones simples

$$\frac{C}{R} = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+3)}$$

$$\begin{aligned} A &= 5/2 \\ B &= -4 \\ C &= 3/2 \end{aligned}$$

1h15min  $C = \frac{5}{2} \frac{1}{(s+1)} \cdot R - 4 \frac{1}{(s+2)} \cdot R + \frac{3}{2} \frac{1}{(s+3)} \cdot R$

5/10/16

Matriz de Transición de Estados:  $\rightarrow$  es condicionar la Ec. de Estados

S sea:  $\dot{x} = Ax(t)$  la solución propuesta es:  $x = e^{At}$   
 $\dot{x} = A \cdot e^{At}$

Entonces, la solución provista para  $x(t)$ , es de la forma:

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0) \quad x(0) \Rightarrow C.I.$$

2:40min Si esa es la solución para un sistema de una variable, en variable de estados tenemos  $n$  ecuaciones en una dimensión, por lo tanto:

$$\dot{x} = Ax \quad \text{solución propuesta: } x = e^{At} \cdot x(0)$$

3) Si:  $\dot{x} = Ax \rightarrow$  Homogénea (sin excitación)

$$\dot{x} \leftarrow sX(s) - x(0) = Ax(s)$$

$$sX(s) - Ax(s) = x(0)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}}_{\Phi(s)} x(0)$$

5:10min Siendo  $X(t)$ :

$$X(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \cdot x(0) \rightarrow \text{si ésta es la solución, } L^{-1}\{\} = e^{At}$$

Con lo que la Matriz de Transición de Estados es:

$$MTE = \Phi(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = L^{-1}\{\Phi(s)\}$$

6:45min

Si ahora tenemos un sistema completo, con excitación:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad A \text{ y } B \text{ matrices de coeficientes}$$

$$\dot{x} \leftarrow sX(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + Bu(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} \cdot x(0)}_{\text{sol. homogénea}} + (sI - A)^{-1} B u(s) = \Phi(s) \cdot x(0) + \Phi(s) \cdot B u(s)$$

7min

Siendo  $X(t)$ :

$$X(t) = \Phi(t) \cdot x(0) + \int_{t=0}^{t=t} \Phi(t-\tau) \cdot B u(\tau) d\tau \rightarrow \text{solución general de ecuación de estado con C.I. } \neq 0 \text{ y con excitación}$$

NOTA

Debemos hallar la MTE, que tiene la forma  $e^{At}$  y como todo exponencial cumple con todas las propiedades, excepto la conmutativa.

10 min ¿Por qué se llama MTE? porque si se conocen todos los estados en un punto de todas las variables, podemos conocerlos en cualquier otro haciendo dicha transformación usando la MTE.

¿Por qué va entre 0 y t? porque se utilizan, normalmente, señales causales en sistemas causales.

12 min Ejemplo: se tiene el vector  $X(t)$  que es la solución  
No entendí qué quiso explicar?

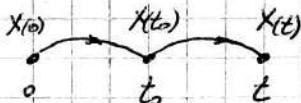
$$\phi(t) \quad X_0$$

$$X(t) = \phi(t-t_0) \cdot X(t_0)$$

$$X(t_0) = \phi(t_0-0) \cdot X(0)$$

$$X(t) = \phi(t-t_0) \cdot X(t_0)$$

$$X(t) = \phi(t-t_0) \cdot \phi(t_0-0) \cdot X(0)$$



15-15 min Ejemplo: se tiene el siguiente sistema, hallar la MTE.

$$\frac{C}{R} = \frac{10}{s^2 + 7s + 10} = \frac{10}{(s+2)(s+5)}$$

Para hallarla, primero es plantear alguna forma de la matriz de variables de estado; por ejemplo en FCC:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

FCC

$$y = [10 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad D=0$$

18 min Determinamos  $\phi(s)$ :  $\phi(s) = (sI - A)^{-1}$

$$s \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10 & s+7 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+7}{(s+2)(s+5)} & \frac{1}{(s+2)(s+5)} \\ \frac{-10}{(s+2)(s+5)} & \frac{s}{(s+2)(s+5)} \end{bmatrix} = L\{e^{At}\}$$

Siendo  $\phi(t) = L^{-1}\{\phi(s)\}$ : por expansión en fracciones simples cada elemento de  $\phi_{12}$

$$\begin{aligned} \text{cofatores} &= \begin{bmatrix} s+7 & -10 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ \text{Transp. cofac.} &= \begin{bmatrix} s+7 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix} \\ |(sI - A)| &= s(s+7) + 10 = s^2 + 7s + 10 = (s+2)(s+5) \end{aligned}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Transp. cofact.}}{|(sI - A)|}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} - \frac{2}{3}s & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s \\ -\frac{10}{3} + \frac{10}{3}s & \frac{-2}{3} + \frac{5}{3}s \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{z \rightarrow t \text{ min}} \Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} & \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ -\frac{10}{3}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-5t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-5t} \end{bmatrix} = e^{At}$$

26min Es de notar, que en el Plano S, se tienen dos polos uno en -2 y otro en -5, que generan en el dominio t, términos de la forma  $e^{at}$ . Esto  $\Phi(t)$  le corresponde a la matriz de variables de estado determinada.

27min ¿Qué sucede si lo llevamos a la forma canónica diagonalizada?

$$\tilde{z} = P^{-1}APz + P^{-1}B$$

$$y = CPz + DU$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 5/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

comprobación:  $P \cdot P^{-1} = I$

(7)

las matrices de variables de estado quedan:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} u$$

$\dot{z}_1 = -2z_1 + 0z_2 + \frac{1}{3}u$   
 $\dot{z}_2 = 0z_1 - 5z_2 - \frac{1}{3}u$

31:20min

$$y = \begin{bmatrix} 10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Diagonalizada.

$$y = 10z_1 + 10z_2$$

32min Hacemos el diagrama de simulación: de FCC

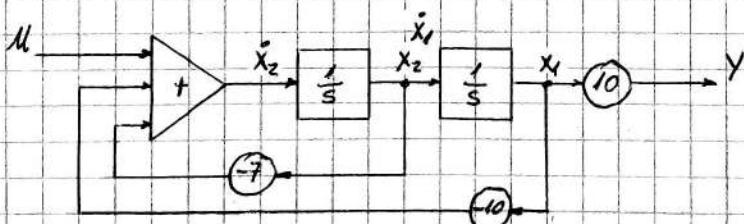
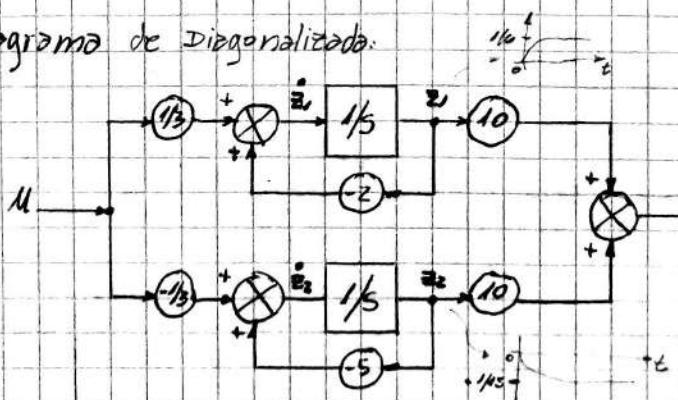


Diagrama de Diagonalizada:



34:30min Siendo la MTE de la Forma Canónica Diagonalizada,  $\Phi_s = (sI - A)^{-1}$ :

NOTA

$$S \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A(\text{diag}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (SI-A) & 0 \\ s+2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{cofac} = \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$(SI-A)^{-1} = \frac{\text{Transp.}}{|SI-A|}$

$$|SI-A| = (s+2)(s+5) - 0$$

35.40 min

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+5)} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

• Hay una gran diferencia en los  $\phi(s)$  (o  $\phi(t)$ ) utilizando un sistema diagonalizado o un sistema canónico controlable. → es más fácil por diagonalizado

37 min Ejemplo: hallar  $y(t)$  cuando  $U(t)$  es un escalón unitario con C.I. = 0.

Tenemos que la solución es:

$$z(t) = \int_0^t \Phi(t-z) B U(z) dz$$

$$z(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-z)} & 0 \\ 0 & e^{-5(t-z)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \cdot dz$$

valor del escalón

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{3} e^{-2(t-z)} \\ -\frac{1}{3} e^{-5(t-z)} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} e^{-2t} \cdot \frac{e^{2z}}{2} \Big|_0^t \\ -\frac{1}{3} e^{-5t} \cdot \frac{e^{5z}}{5} \Big|_0^t \end{bmatrix}$$

Quedando como respuestas de  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$ :

$$z_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-2t} ; \quad z_2(t) = -\frac{1}{15} + \frac{1}{15} e^{-5t}$$

estas formas de ondas se ven en el diagrama de diagonalizado en los puntos  $Z_1$  y  $Z_2$  respectivamente

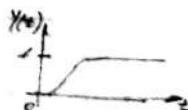
La respuesta total  $y(t)$ :

45 min  $y(t) = 10 \cdot z_1(t) + 10 \cdot z_2(t) = 1 - \frac{5}{3} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^{-5t}$

46 min Para comprobar si estamos en lo correcto, tomamos el sistema original  $\frac{C}{R} = \frac{10}{s^2 + 7s + 10}$ , y a la entrada le aplicamos un  $U(t)$ .  $\therefore R = \frac{1}{s}$

$$C = \frac{10}{(s^2 + 7s + 10)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{10}{(s+2)(s+5)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5}$$

$$C = \frac{1}{s} - \frac{s/3}{s+2} + \frac{10/15}{s+5} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C(t) = Y(t) = 1 - \frac{5}{3} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^{-5t}$$

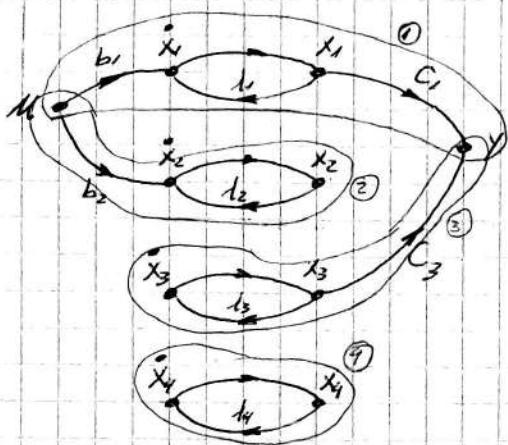


53 min Proyección: en Simolink, presentó 3 sistemas: 1-FCC, 1-FC diagonalizada y 1-Diag. en serie, y comparó: sus 3 soluciones (iguales) y sus variables de estados (diferentes entre cada uno de los diagramas).

### 1b Controlabilidad de Estado y Observabilidad de Estado.

- **Controlabilidad de Estado:** decimos que un estado es controlable cuando mediante la acción del vector de control, se lo puede modificar en un tiempo finito.
- **Observabilidad de Estado:** decimos que un estado es observable si desde la salida es posible determinar un cambio en un tiempo finito.

Ejemplos:



①: Estado Controlable y observable

②: Estado Controlable pero no Observable

③: Estado no Controlable pero si Observable

④: Estado no Controlable y no Observable

G1

1b4min Para poder determinarlos existen unas matrices:

$$\text{Matriz de Controlabilidad} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \rightarrow [n \times n]$$

$$\text{Matriz de Observabilidad} = [C^T \ A^TC^T \ A^{2T}C^T \ \dots \ A^{(n-1)T}C^T]$$

transpuesta

Rango de matriz:  $n$  filas linealmente independientes

1b6:32min \* Si el rango de la Matriz Controlabilidad es  $n$  se dice que el sistema es de Estado Totalmente Controlable.

\* Si el rango de la Matriz Observabilidad es  $n$  se dice que el sistema es de Estado Totalmente Observable.

1b7min • Una de las maneras de mirar la controlabilidad del estado es hacer diagonalización y ver en la matriz  $B$  si hay algún elemento que se hace cero ese estado no se puede controlar. De la misma manera en la matriz  $C$ , si hay algún elemento que vale cero, ese estado es no observable.

12/10/16

### Concepto de Dualidad.

Si tenemos los sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \rightarrow \text{cont. } |B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B| \\ y = Cx + Du & \rightarrow \text{obs. } |C^T \ A^TC^T \ A^{2T}C^T \ \dots \ A^{(n-1)T}C^T| \\ \dot{z} = A^Tz + C^Tu & \rightarrow \text{cont. } |C^T \ A^TC^T \ A^{2T}C^T \ \dots \ A^{(n-1)T}C^T| \\ y = B^Tz + D^Tu & \rightarrow \text{obs. } |B^T \ AB^T \ A^2B^T \ \dots \ A^{n-1}B^T| \end{cases}$$

NOTA

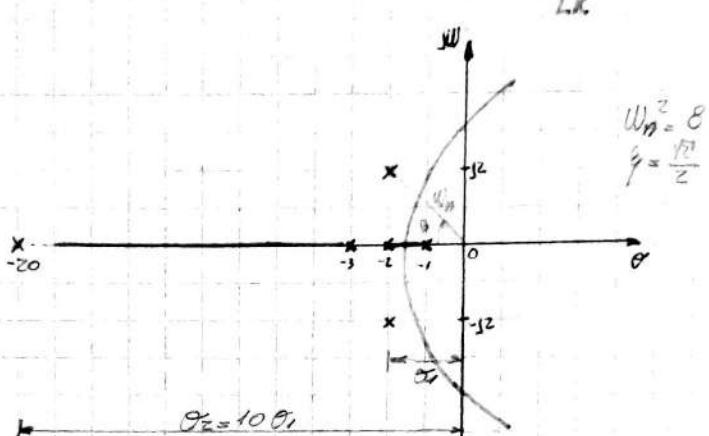
Así, si tenemos un sistema que es controlable y observable, es posible obtener otro sistema mediante una transformación lineal (conserva sus autovalores), podemos obtener las matrices de controlabilidad y de observabilidad mediante la Transpuesta de las matrices de coeficientes del primero.

• Sistema Dual - criterio de Kalmann (el de los filtros)

12min Modificación de los sistemas de control usando variables de estados.

Supongamos tener un sistema con 3 polos (y el siguiente LR); se desea tener polos complejos conjugados dominantes en  $-2 \pm j2$ .

$$12\text{min} \quad \frac{C}{R} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$



10:20am "Qué se hace? se debe agregar "algo" al sistema para que los puntos sean LR, por ejemplo un compensador en adelanto.

11min; ¡Importante! siempre buscamos que las respuestas de los sistemas se parezcan a un sistema de 2º orden, ya que conocemos a g, w\_n, w\_d, t\_p, etc.

11:35m En variables de estado usaremos ubicación de polos (pole placement) o Redimensionamiento del Vector de Estado, el cual ubicaremos tantos polos como el orden que se tenga de ecuación diferencial o el sistema en juego.

Para este ejemplo, nuestro orden es 3, por lo tanto ubicaremos 3 polos en  $-2 \pm j2$  y  $-20$

Se pretende fijar cada uno de los polos de la F<sub>T</sub> en Lazo Cerrado en la posición que deseamos

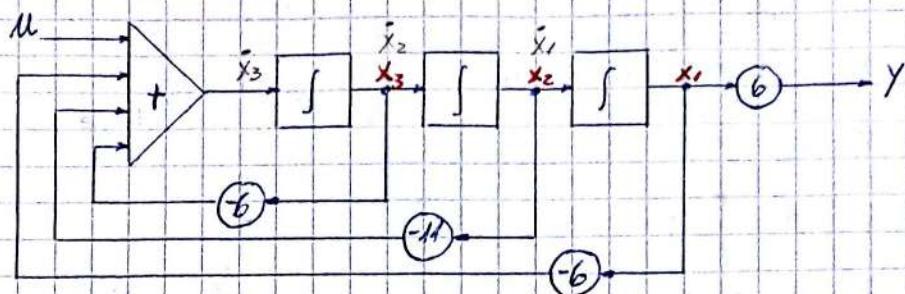
Por qué  $-20$ ? ya que es la 10ma parte de la parte Real  $-2 \pm j2$ , así la influencia del polo en  $-20$  es mucho menor a la de  $-2 \pm j2$ , y el sistema se comportará como uno de 2º orden.

15:25m Si al sistema lo planteamos como variables de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{FCC}$$

$$y = [6 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

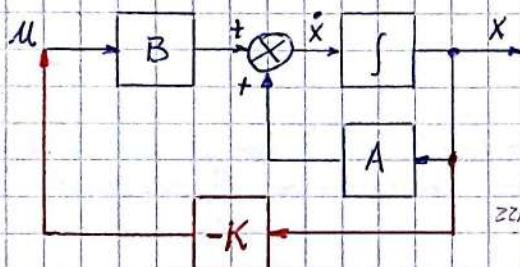
16:35min En diagrama de bloques:



18min El método de ubicación de polos utiliza la realimentación del vector de estados, en este caso el vector formado por  $x_1, x_2$  y  $x_3$ .  
En general:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{con } u = -Kx \quad \text{proponemos una realimentación que use el vector estado, con una matriz } K \text{ que tiene la misma orden que } n^{\circ} \text{ de estados que tienen}$$

20min Así:



- Realimentaremos todos los estados a la entrada.

$$22min \dot{x} = Ax + B(-Kx) = \underbrace{(A - BK)}_{\bar{A}} x$$

- Siendo la matriz  $(A - BK)$  la que contendrá los polos deseados

### Método de Sustitución Directa

26:10min Para que se puedan ubicar los polos donde se desee, para que cumpla con las especificaciones de diseño, se deben cumplir:

1) que el sistema sea de estado totalmente controlable  $\rightarrow \text{el Rango}[B|AB|A^2B] = n$

28min 2) el vector  $u$  no debe tener limitaciones — puede tomar cualquier valor

3) todos los estados deben ser medibles (observables)  $\rightarrow$  en caso de no serlo, se usa un observador o estimador

29:45min Primero determinaremos que el sistema cumple o no:

$$\text{Rango } |B \ AB \ A^2B| = n \quad \text{— si se cumple, sist. tot. controlable}$$

• Al tener expresado el sistema en FCC, el sistema ya es totalmente controlable, sino habrá que determinarlo.

31:35min Para determinar los autovalores de la ecuación característica original:

$$|sI - A| = 0$$

38min Pero para el sistema modificado es:  $|sI - A + BK| = 0$

38min Realizamos la operación:

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{SI}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$$

$|B, K|$  es de orden  $3 \times 3$   
 $[3 \times 3] [1 \times 3]$

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ s - 1 & 0 \\ 0 & s - 1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A + BK \\ s - 1 & 0 \\ 0 & s - 1 \\ 6 + K_1 & 11 + K_2 & s + 6 + K_3 \end{bmatrix}$$

Este método funciona bien hasta orden  $3 \times 3$

39min Entonces la Ec. Característica del sistema modificado (lo deseado) es:

$$|sI - A + BK| = 0$$

$$s^3 + (6 + K_3)s^2 + 6 + K_1 + (11 + K_2)s = 0$$

$$s^3 + (6 + K_3)s^2 + (11 + K_2)s + 6 + K_1 = 0 \quad \text{(I)}$$

Cuanto vale lo deseado? eso es en la posición de los polos  $-2 \pm j2$  y  $-20$  en base a ellos, obtenemos la ecuación característica de lazo cerrado como:

43min  $(s+20)(s+2-j2)(s+2+j2)$  44.40min  $\rightarrow (s^2 + 2j2s + 40s + 400) = 0$  con  $j = \frac{\sqrt{-1}}{2}$  y  $40 = 8$   
 $(s+20)(s^2 + 4s + 8) = 0$

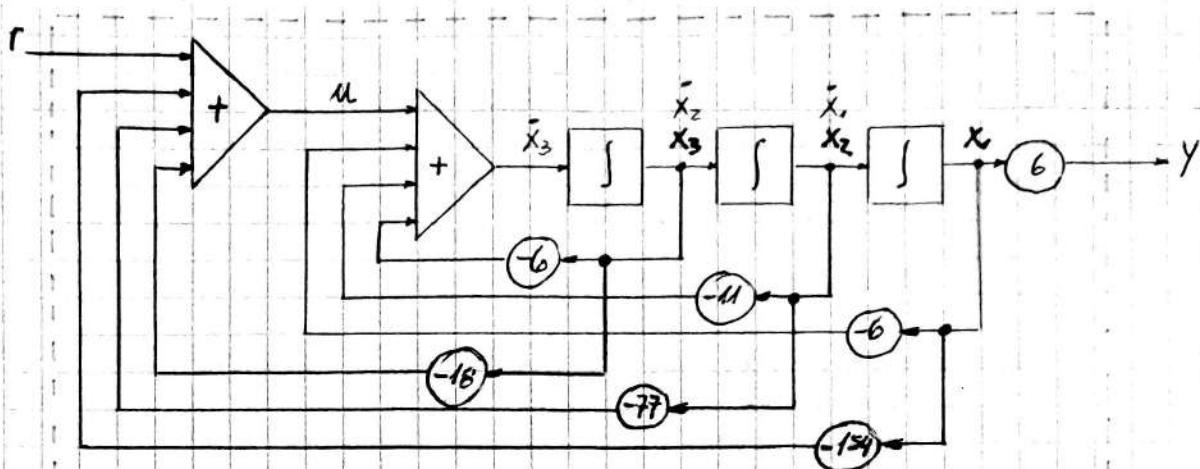
46.20min  $s^3 + 24s^2 + 88s + 160 = 0 \quad \text{(II)} \rightarrow \text{Ec. característica deseada}$

47.20min Por lo tanto (I) y (II) deben ser iguales, para ser iguales cada término a de ser iguales entre sí:

$$\left. \begin{array}{l} 24 = 6 + K_3 \\ 88 = 11 + K_2 \\ 160 = 6 + K_1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} K_3 = 18 \\ K_2 = 77 \\ K_1 = 154 \end{array} \right\}$$

son todos los valores de la matriz  $K$

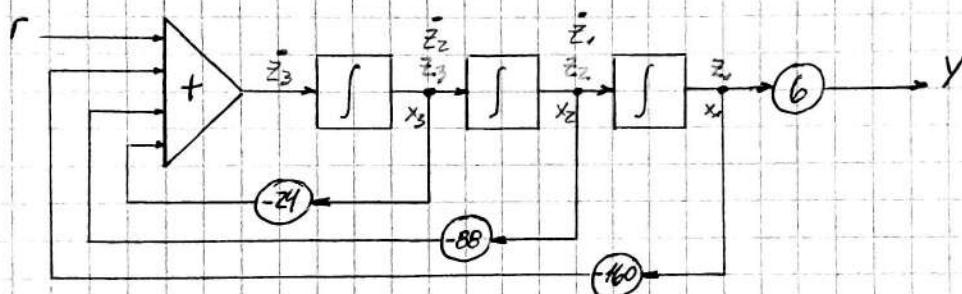
Con estos valores de  $K$  debemos realimentar el sistema.  
Para ello planteamos un nuevo diagrama de bloques.



Sistema Modificado

53min Ahora la entrada es  $r$ ; si  $r=0$ , pasa a ser un sistema regulador a retroceso nulo.

57:40min Si agrupamos los bloques sumadores en uno sólo, obtenemos:



1h Determinemos la  $F_T$  del sistema modificado

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -88 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [6 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$F_T = \frac{C}{R} = \frac{6}{s^3 + 24s^2 + 88s + 160}$$

1h3min Como se observa la  $F_T$  del sistema modificado es distinta a la  $F_T$  del sistema original. Por lo que, el cerrar el bucle de realimentación tiene sus pros y sus contras.

1h3:30min ¿Qué sucede si  $r$  es un  $H(s)$ ?

$R = \frac{1}{s}$  evaluaremos para ambos  $F_T$

$C = F_T \cdot R \Rightarrow$  aplicando T.V.F

original:  $C(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 12s + 28} \cdot \frac{1}{s} = 1$

16min modificado:  $C(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{6}{s^3 + 24s^2 + 88s + 160} \cdot \frac{1}{s} = 0,0375$

→ presenta error en estado estacionario

19/10/16 PDF "Asignación de polos mediante realimentación del vector de estado?"

4min  $M = -K \cdot X$

realimentación propuesta

recordando que:  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$        $\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x \\ y = Cx + Du \end{cases}$

7min Se propone un polinomio deseado, con polos en  $s_1, s_2, \dots, s_n$ ; y en el nuevo sistema, dichos polos son los polos (o raíces) de la Ecu. Característica:

$(sI - A + BK) = 0$

9min Ejemplo 1, pag 2 PDF

$$\left[ \begin{array}{c|cc|c} & sI & A & B \\ \hline s & & s & - \\ & s & & \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|cc|c} & & & K \\ & & & \end{array} \right] = (s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)$$

Cuando el grado de las matrices son elevados ( $> 3$ ) se emplean otros métodos.

17min • Método de Ackerman:

Establece que la matriz  $K$  se puede obtener como:

$K = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot \text{Cont}^{-1} \cdot \phi(A)$

18min la matriz  $\phi(A)$  es la matriz que en el polinomio caract  $s \rightarrow A$ :

ejemplo:  $s^3 + 2s^2 + bs + c = 0 \rightarrow A^3 + 2A^2 + bA +$

Siendo  $A$  (matriz) es solución de la ecuación caract

23min • Método por Matriz de Transformación:

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$       siendo  $X = T \cdot Z$   
transformación

$\begin{cases} T \cdot \dot{Z} = ATZ + Buz \\ y = CTZ + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{Z} = T^{-1}ATZ + T^{-1}Bu \\ y = CTZ + Du \end{cases}$

25:50min  $T = I$

10min Códigos en MatLab:

eig(A)

con = ctrb(A,B)

obs = obsv(A,C)

rank(con)

rank(obs)

Kd = acker(A, B, pd) → polos deseados  
place(A, B, pd)

→ matriz de coeficientes de la Ecu. Característica puestos en forma triangular superior izquierda

27min Con la matriz  $T$ , se pasa al sistema a la FCC.

Ejemplo:  $\frac{6}{s^3 + 6s^2 + 12s + 28}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \dot{z}_1 & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} & z_1 \\ \hline \dot{z}_2 & z_2 & 0 \\ \hline \dot{z}_3 & z_3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} + \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} u \quad \text{FCC}$$

$|T| \neq 0 \therefore \exists T^{-1}$

$C = F_T \cdot R \Rightarrow$  aplicando T.V.F

$$\text{original: } C(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 12s + 28} \cdot \frac{1}{s} = 1$$

$$11:5min \text{ modificado: } C(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{6}{s^3 + 24s^2 + 88s + 160} \cdot \frac{1}{s} = 0,0375 \rightarrow$$

→ presenta error en estado estacionario

19/10/16 PDF "Asignación de polos mediante realimentación del vector de estado":

$$4min \quad U = -K \cdot X \\ \text{realimentación propuesto}$$

$$\text{recordando que: } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + du \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x \\ y = Cx + du \end{cases}$$

7min Se propone un polinomio deseado, con polos en  $s_1, s_2, \dots$  sistema, dichos polos son los polos (o raíces) de la Ecu.

$$(sI - A + BK) = 0$$

7min "Ejemplo 1, pag 2 PDF"

$$\begin{array}{c|ccc} & s & & \\ \hline & s & - & \\ & s & & + \\ & s & & \end{array}$$

Cuando el grado de las matrices son elevados ( $> 3$ ) se

17min • Método de Ackerman:

Establece que la matriz  $K$  se puede obtener como:

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot \text{Cont}^{-1} \cdot \phi(A)$$

18min la matriz  $\phi(A)$  es la matriz que en el polinomio característico se combierte a  $s \rightarrow A$ :

$$\text{ejemplo: } s^3 + 2s^2 + bs + c = 0 \rightarrow A^3 + 2A^2 + bA + cI = \phi(A)$$

Siendo  $A$  (matriz) es solución de la ecuación característica (Teorema de Cayley-Hamilton)

23min • Método por Matriz de Transformación:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + du \end{cases}$$

siendo  $X = T \cdot z$

Transformación

25:50min → matriz de controlabilidad

$$T = M \cdot w$$

matriz de coeficientes de la Ecu. Característica puestos en forma triangular superior izquierda

27min Con la matriz  $T$ , se pasa al sistema a la FCC.

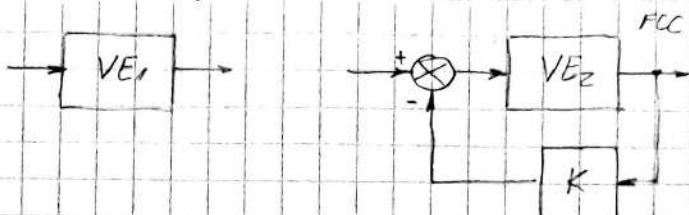
$$\text{Ejemplo: } \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 12s + 28}$$

$$|T| \neq 0 \therefore \exists T^{-1}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|c} \dot{z}_1 & 0 & 1 & 0 & z_1 & 0 \\ \dot{z}_2 & 0 & 0 & 1 & z_2 & 0 \\ \dot{z}_3 & -2 & -2 & -2 & z_3 & 1 \\ \hline & -6 & -12 & -28 & & \end{array} \quad \text{FCC}$$

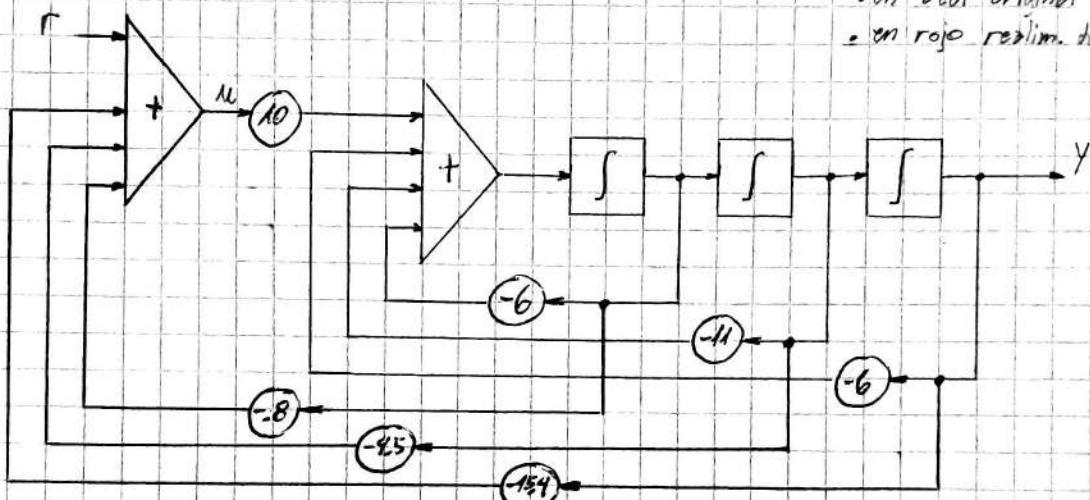
31min

Un sistema original tiene una serie de variables de estado  $VE_1$ , el sistema transformado tiene otras variables de estado  $VE_2$ ; si a este último sistema se lo realimenta con un  $K$  encontrado en la FCC, en el primero no va a funcionar, para ello se hace  $K = R \cdot T^{-1}$ .



36min En el sistema se tiene que:

- en azul original
- en rojo realim. de vector de estado



41min Así como está, el sistema presenta un error en estado estacionario ante una entrada escalón.

41min Asignación de polos para lograr  $E_{ss}=0$  ante entrada  $\mu(t)$ , cuando la planta posee un integrador. (mucha en el PDF)

“Es cómo asignar polos de tal forma que el  $E_{ss}$  sea nulo ante una entrada escalón. Nuestro sistema tiene un integrador (Tipo 1)”

43:40min Vemos si el sistema cumple con:

- Sistema es de estados totalmente controlable.
- Posibilidad de medir todos los estados
- Determinar cuánto vale la matriz  $K$  de realimentación.

44:30min Dibujo

Una de las ganancias ( $K_1$ ) se coloca en la rama directa, las demás ganancias ( $K_2, K_3, \dots, K_n$ ) van en realimentación, así, uno solo le corresponde a la variable de salida ( $y$ ). Se hace coincidir la salida con una variable de estado, se realimenta a la entrada (se compara con la entrada) y el resultado se multiplica por el  $K_x$  que le corresponde a dicha variable de estado.

12min Ante una entrada escalón, el sistema se expresa:

$$\dot{\bar{x}} = Ax + Bu = (A - BK)x + BK_r r$$

Para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\dot{\bar{x}}(\infty) = (A - BK)x(\infty) + BK_r r(\infty) \quad r(\infty) = u(\infty) = 1 \Rightarrow \text{che}$$

Si se hace la diferencia:

$$\underbrace{\dot{\bar{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(\infty)}_{\dot{e}(t)} = \underbrace{(A - BK)[x(t) - x(\infty)]}_{e(t) \rightarrow \text{error}}$$

$$\dot{e}(t) = (A - BK)e(t)$$

58min Si nosotros hacemos que los polos de  $A - BK$  (osea  $sI - A + BK$ ) sean cero y estén todos en el SPI, para  $t \rightarrow \infty$  el  $e_{ss} = 0$ .

53min Que sucede si el sistema no tiene integrador ( $\text{tip} = 0$ ) y deseamos un  $e_{ss} = 0$  ante una entrada escalón? Simple, se le debe agregar un integrador, con lo cual si el sistema era de  $n$  variables de estado, al agregar el integrador se tendrán  $n+1$  variables de estado.

58min Dibuj.

58min El sistema es:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = cx$$

siendo  $u = -Kx + K_r \dot{q}$   
 $\dot{q} = r - y = r - cx \rightarrow$  nuevo var. estado

59min La  $F_T$  de la planta es:

$$G_P(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B$$

11min Siendo para  $r = u(t)$ , las ec. de estado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Tomando para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{y}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ y(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

11min En dónde los errores son:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ y(t) - y(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{[u(t) - u(\infty)]}_{\text{metto}}$$

11min Así:

$$\dot{e} = \hat{A} \cdot e + \hat{B} u$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo:  $u_e = -K \cdot e$  donde:  $K = [K_1 \quad -K_1]$

11:08min Siempre que se hace la realimentación mediante el vector de estado, lo que se pretende es ubicar polos donde necesitamos para que su respuesta sea muy parecida a un sistema de 2º orden. Los polos a agregar deberán estar por lo menos a 5 veces menos (ideal a 10 veces) de los polos dominantes, de tal forma de corregir al sistema pero no modificar la forma de su respuesta.

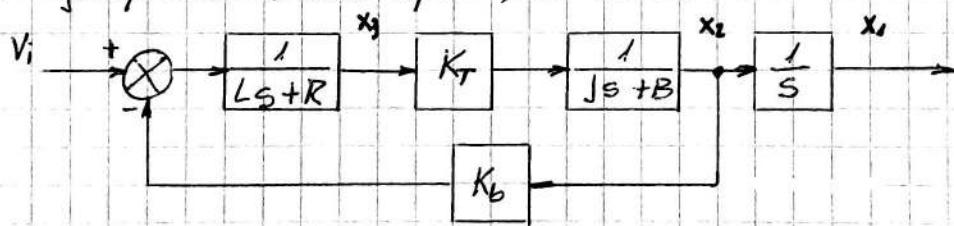
26/10/16

2 min 30 seg 3 min 50 seg c: ¿Cómo es el cálculo de la matriz  $K$ , y qué característica tiene? se calcula de la misma manera siempre y cuando hubiese un integrador presente en el sistema; lo que no debía hacerse es perder el efecto de integración. De alguna forma, a la variable de salida se realimenta en forma unitaria a la entrada y la ganancia correspondiente a esa variable se pone en la ramo directa. (perdido al comp. de adelanto con ganancia en la realimentación)

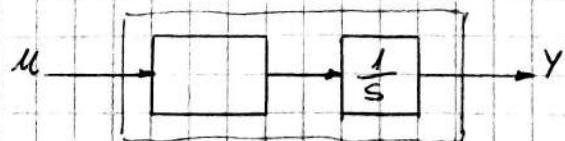
5min En general:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

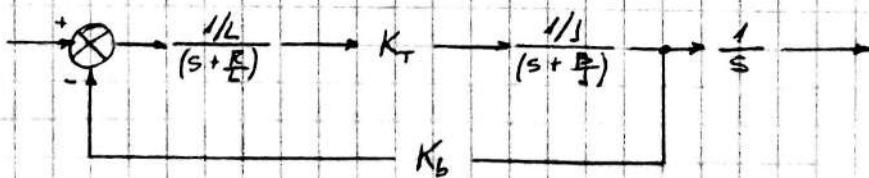
5:35min Por ejemplo un sistema Tipo 1, un motor:



se transformaría en un sistema:



7:45min Si deseamos realimentar, se realimentan todos los estados

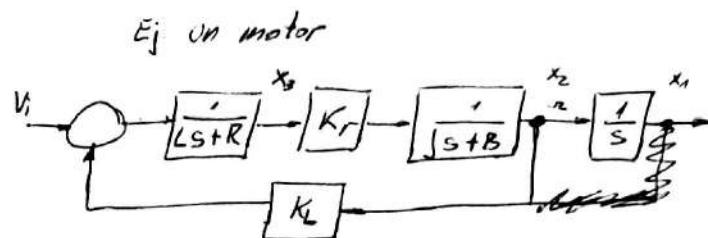


Puesto en diagrama de simulación.

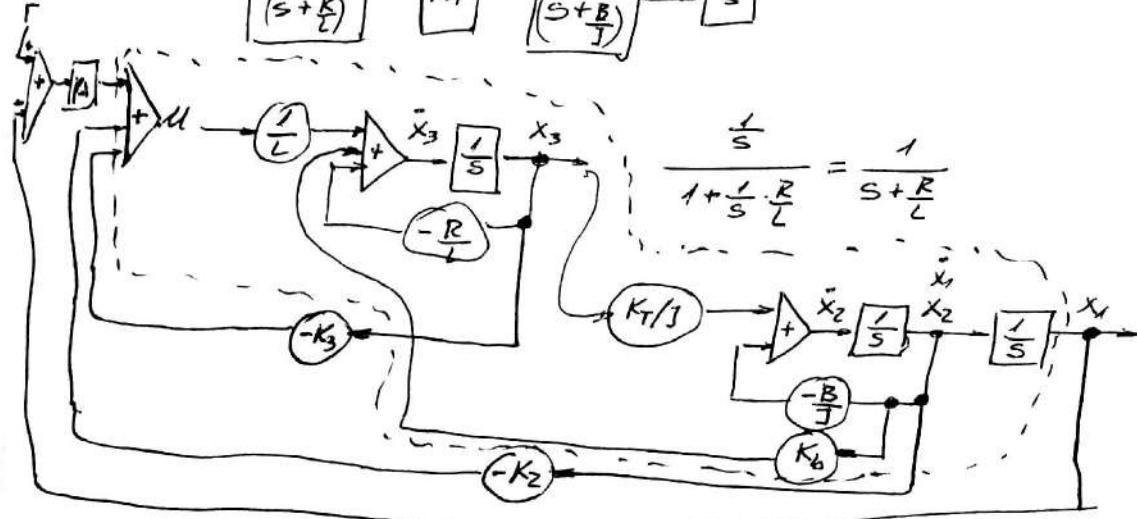
26/10/16

control.

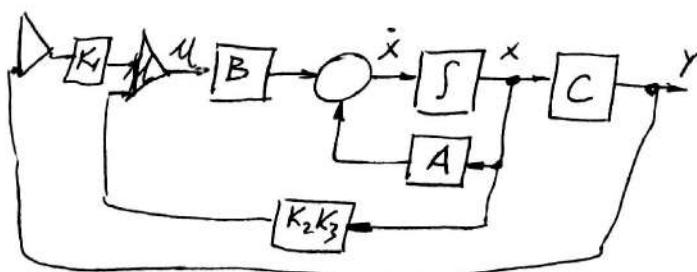
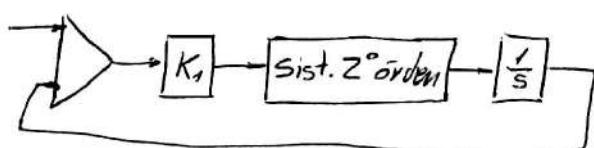
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



$$\rightarrow \frac{1/L}{(s+B)} \rightarrow K_T \rightarrow \frac{1/J}{(s+B)} \rightarrow \frac{1/s}{J}$$



$$\frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{R}{L}} = \frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$



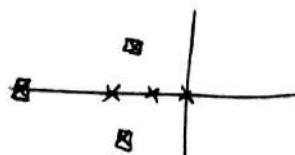
$$K \cdot K^T \quad T \text{ M.W}$$

3 Polos

$$SI - A + BK = 0$$

$$P_1, P_2, P_3$$

Ubicación de polos



$$A(s) = [0 \ 0 \ 1] [const] s^3 = K$$

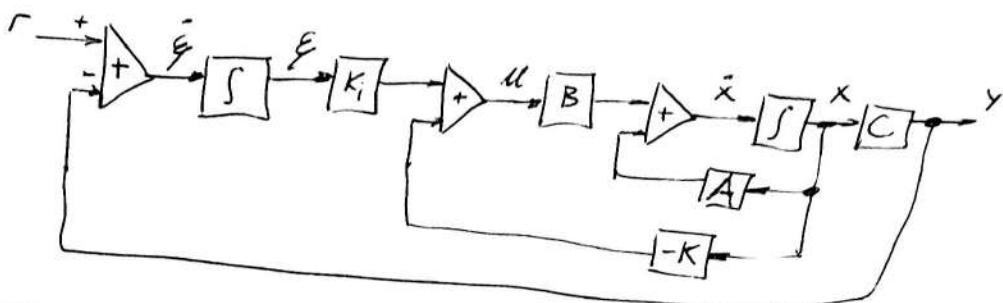
$$A^3 + a_1 A^2 + a_2 A + a_3 I$$

$$K = [k_{1-2}, k_{2-2}, k_{1-3}]$$

$|SI - A| = 0$  Ec. Coract. Original

$$M = -KX \quad (SI - A + BK) = 0 \quad \text{Ec. Coract. deseado}$$

34 min PDF.



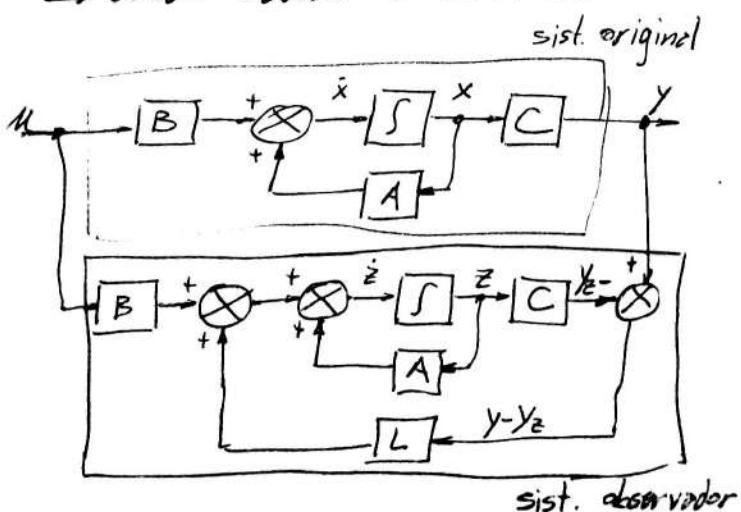
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{Malla 1 a } F_T$$

$$[y(t)] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

2/11/16 4:40 PDF entendiendo los observadores de estado =

2 Tipos → orden completo

↳ orden reducido o orden mínimo



$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + L(y - y_e) \\ y_e = Cz \end{cases}$$

22 min Ejemplo.

15 min

57 min

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \Rightarrow X(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$y = Cx + Du \quad (sI - A)X(s) = B \cdot U(s) \quad \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} B \cdot U(s)$$

$$y = \underbrace{[C(sI - A)^{-1} B + D]}_{\text{matriz de transferencia}} U(s)$$

9/11/16

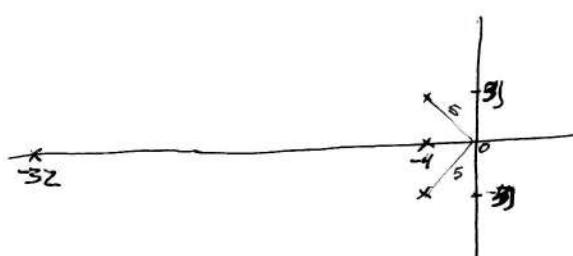
31/min

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & -10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} M$$

$$\frac{1}{s(s+3)(s+7)} \rightarrow s^3 + 10s^2 + 21s = 0$$

$$\alpha_1 = -10 \quad \alpha_2 = -7 \quad \alpha_3 = -3$$

$$Y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$



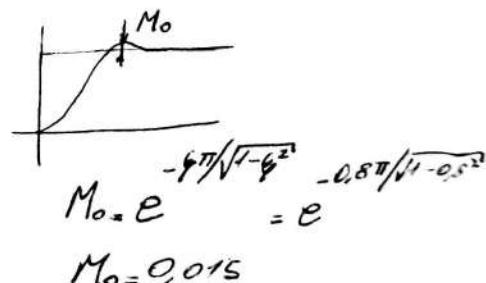
$$(s+3z)(s^2 + 8s + 25)$$

$$s^3 + 8s^2 + 25s + 32s^2 + 256s + 800$$

$$s^3 + 40s^2 + 281s + 800$$

$$K = [x_1 - \alpha_3 \quad x_2 - \alpha_2 \quad x_3 - \alpha_1]$$

$$K = [800 - 0 \quad 281 - 21 \quad 40 - 10] = [800 \quad 260 \quad 30]$$



# SINTONIA CLASICA DE CONTROLADORES METODO DE ZIEGLER-NICHOLS

## Primer método de Ziegler-Nichols

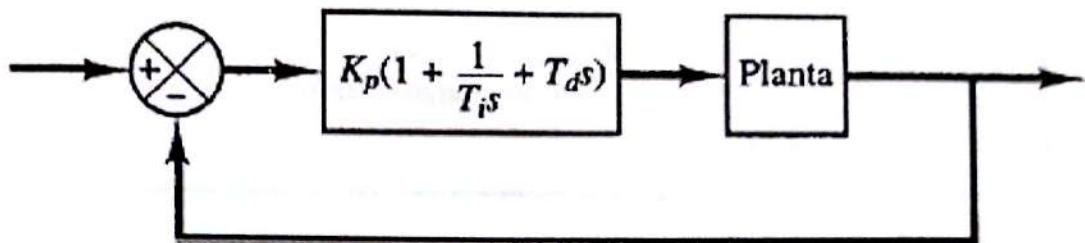


Figura 1

Sistema compensado con un controlador PID

El método **pretende** obtener una respuesta similar a la de un sistema de 2do orden con un sobrepaso no mayor al 25%.

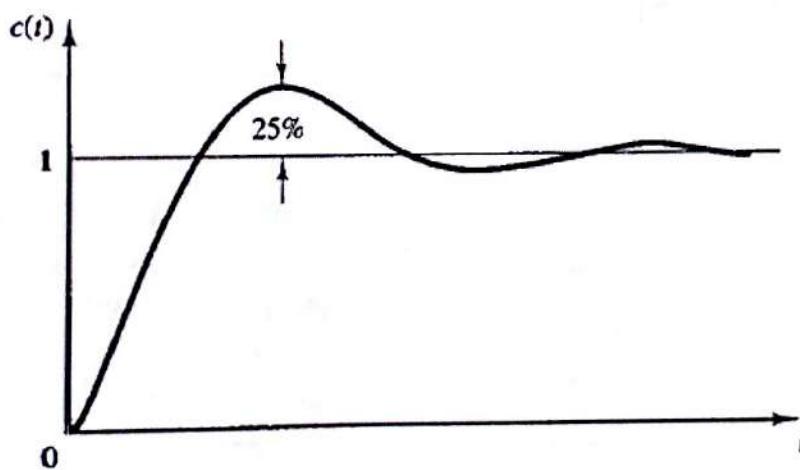


Figura 2

Si la respuesta en lazo abierto de la planta (sin integradores) tiene la forma de la figura 3

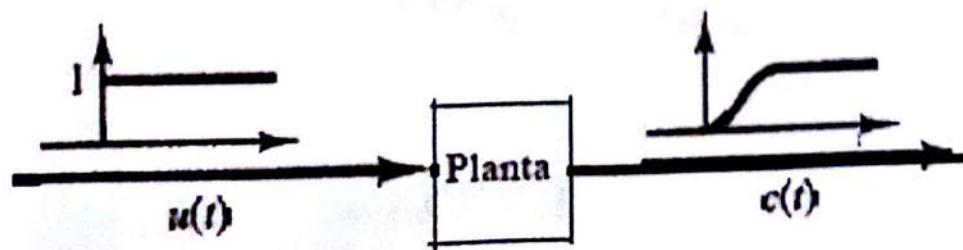
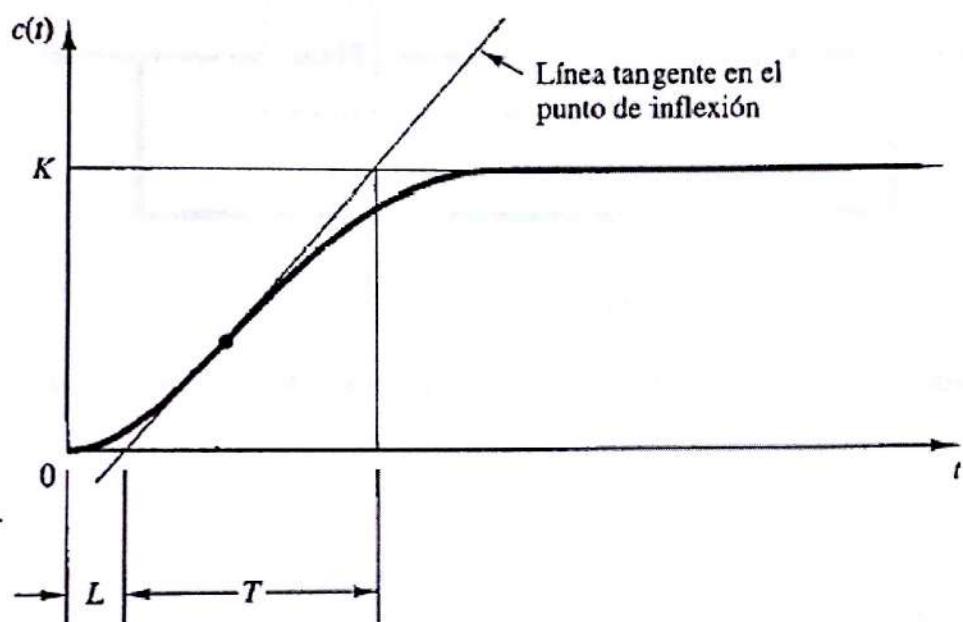


Figura 3

(forma sigmoidal), se puede aproximar mediante un sistema de primer orden y un retardo

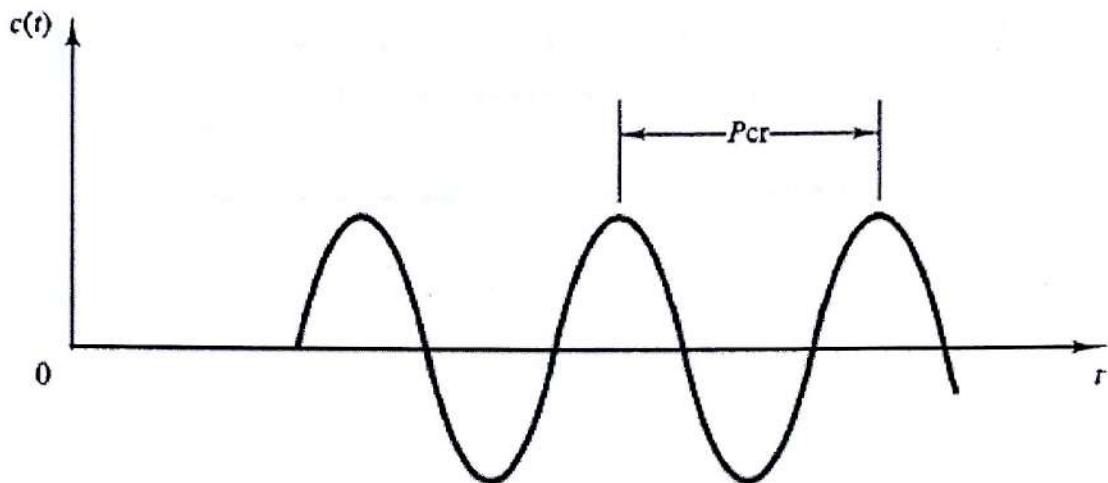
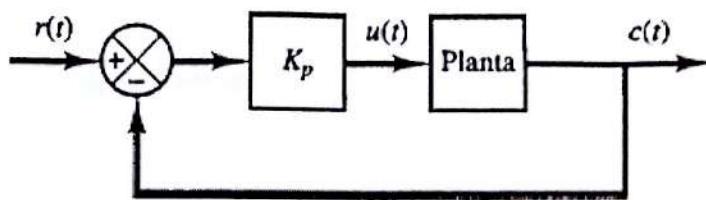
$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$



Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{L}$	$\infty$	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

## Segundo método



Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

$$\begin{aligned}
 G_r(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
 &= 0.6K_{cr} \left( 1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125 P_{cr} s \right) \\
 &= 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left( s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s}
 \end{aligned}$$

**COMPENSACION UTILIZANDO EL LUGAR DE RAICES**

Un sistema de control de posición en lazo cerrado, tiene una representación como la que se da en la Figura 1.

Inicialmente el sistema tiene un controlador proporcional  $G_c(S) = K_p$ . La función de transferencia  $G_p(S)$  de la planta está dada por

$$G_p(S) = \frac{1}{S^3 + 9S^2 + 14S} = \frac{1}{(S+2)(S+7)S}$$

y la realimentación  $H(S)$  es unitaria

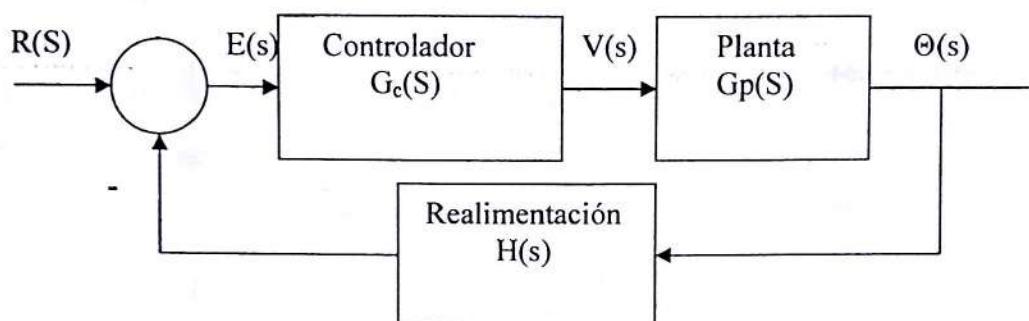
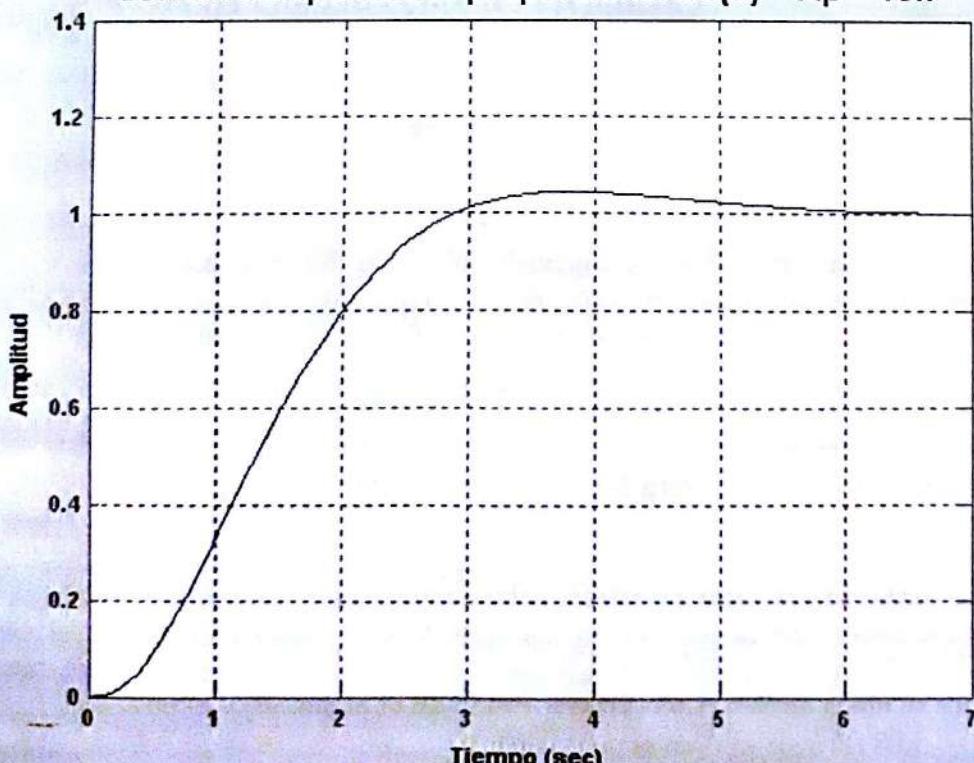


Figura 1 – Sistema de lazo cerrado de control de posición

En la Figura 2 se presenta la respuesta a un escalón unitario del sistema con un control proporcional para lograr un  $\zeta = 0.707$ .

Figura 2 - Respuesta al escalon unitario del sistema con un compensador proporcional  $G_c(S) = K_p = 10.7$



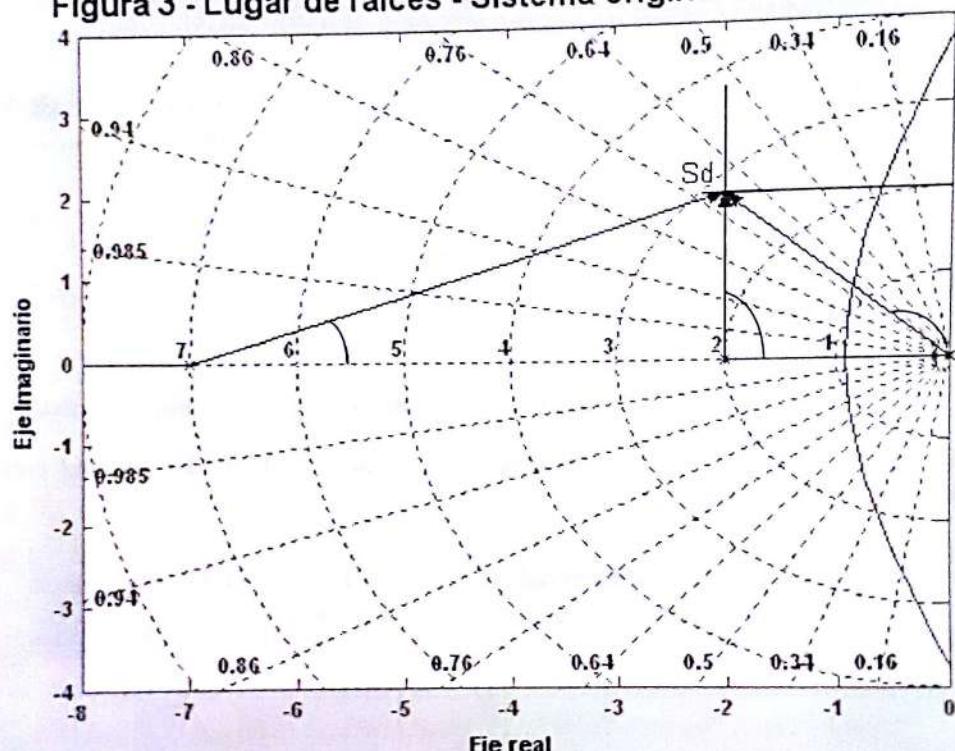
## Compensación utilizando Lugar de Raíces -

Tarea: Se pide realizar la compensación para lograr un sistema que presente una respuesta con polos complejos conjugados dominantes que posean una relación de coeficientes de amortiguamiento  $\zeta=0.707$  y una frecuencia angular natural no amortiguada  $\omega_n = \sqrt{8}$

### CASO 1 – Utilización de una red de adelanto cero-polo.

En la Figura 3. se presenta el diagrama del Lugar de Raíces del sistema original.

Figura 3 - Lugar de raíces - Sistema original sin compensar



18min  
Para que los polos de lazo cerrado cumplan lo solicitado deben ubicarse en  $S_D = -2 \pm 2j$ . Del lugar de raíces puede observarse que para ello, el punto Sd debe cumplir la condición de ángulo. En ese punto, la contribución angular de los polos en 0, -2 y -7 contribuyen con:

$$\begin{array}{lll} \text{Argumento del Polo en el origen } S = 0 & = & -135,00 \\ \text{Argumento del Polo en } S = -2 & = & -90,00 \\ \text{Argumento del Polo en } S = -7 \text{ arctg } 2/5 & = & -21,80 \\ \text{Total} & = & -246,80 \end{array} \quad \text{condición de ángulo}$$

19min  
20min  
21min  
22min  
Para que el punto Sd sea lugar de raíces, debe cumplir que  $\text{Arg}[G_p(S)] = \pm 180(2k+1)$  para lo cual el compensador deberá proveer un adelanto de 66,8 grados. Utilizando el método de la bisectriz para determinar la ubicación del cero y el polo de la red, se determina que el cero del compensador se ubica en  $S = -1.65$  (Provee  $+99.9^\circ$  en el punto Sd) y el polo del compensador se ubica en  $S = -5.08$  (Provee  $-33^\circ$  en el punto Sd).

## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

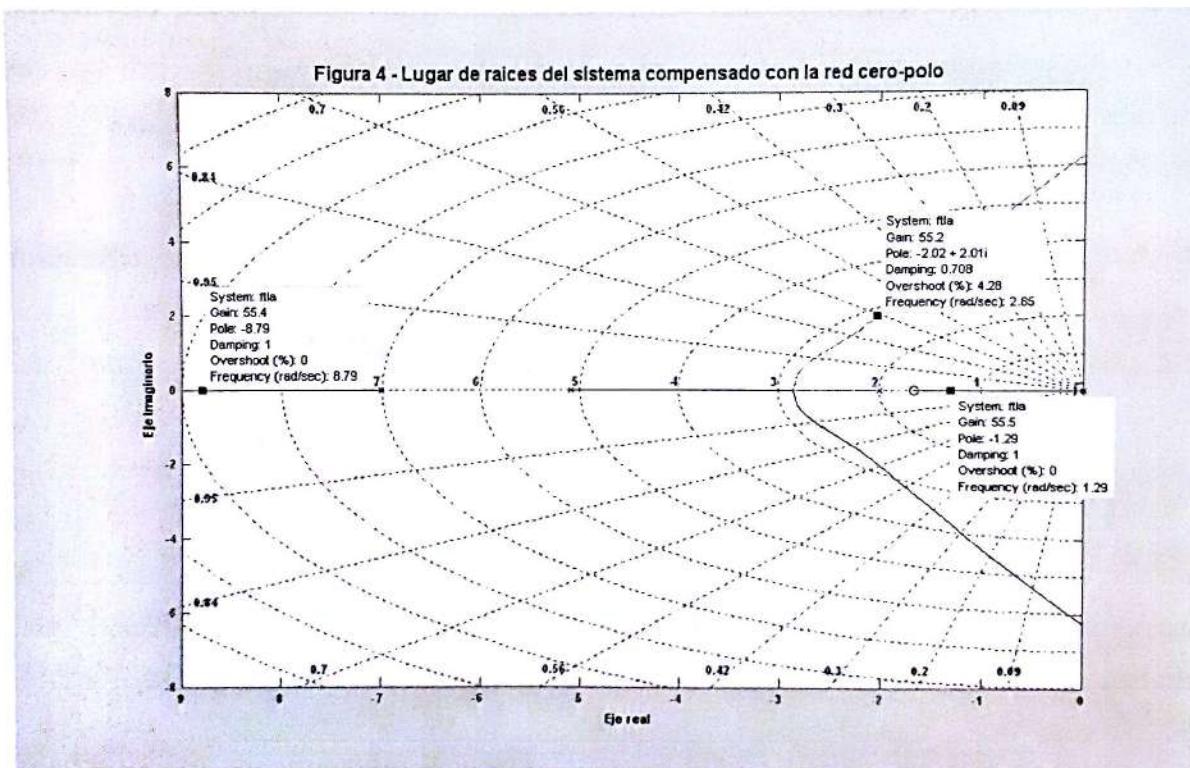
El K necesario para ubicarse en el punto de diseño Sd. es 55.3

$$K = \left| \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s + z_i|} \right| \quad n \geq m \quad n = \text{número de polos} ; m = \text{número de ceros}$$

El compensador de adelanto con la red cero-polo queda conformado de la siguiente forma

$$G_{1c}(S) = \frac{55.3 (S + 1.65)}{(S + 5.079)}$$

El lugar de raíces del sistema compensado se muestra en la Figura 4.



La función de transferencia de lazo cerrado (FTLC1) del sistema compensado con el compensador  $G_{1c}(S)$  está dada por

$$FTLC1 = \frac{55.3 (S + 1.65)}{(S + 8.786)(S + 1.293)(S^2 + 4.001 S + 8.034)}$$

Puede observarse que se modificó la forma geométrica del lugar de raíces y que aparece un polo de lazo cerrado en -1.293 con lo que la acción de los polos complejos conjugados puede no ser dominante y la respuesta se vea enlentecida por este polo, debido además a que no se encuentra lo suficientemente cerca del cero de lazo cerrado en -1.265, como para que la contribución del polo se vea reducida.

## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

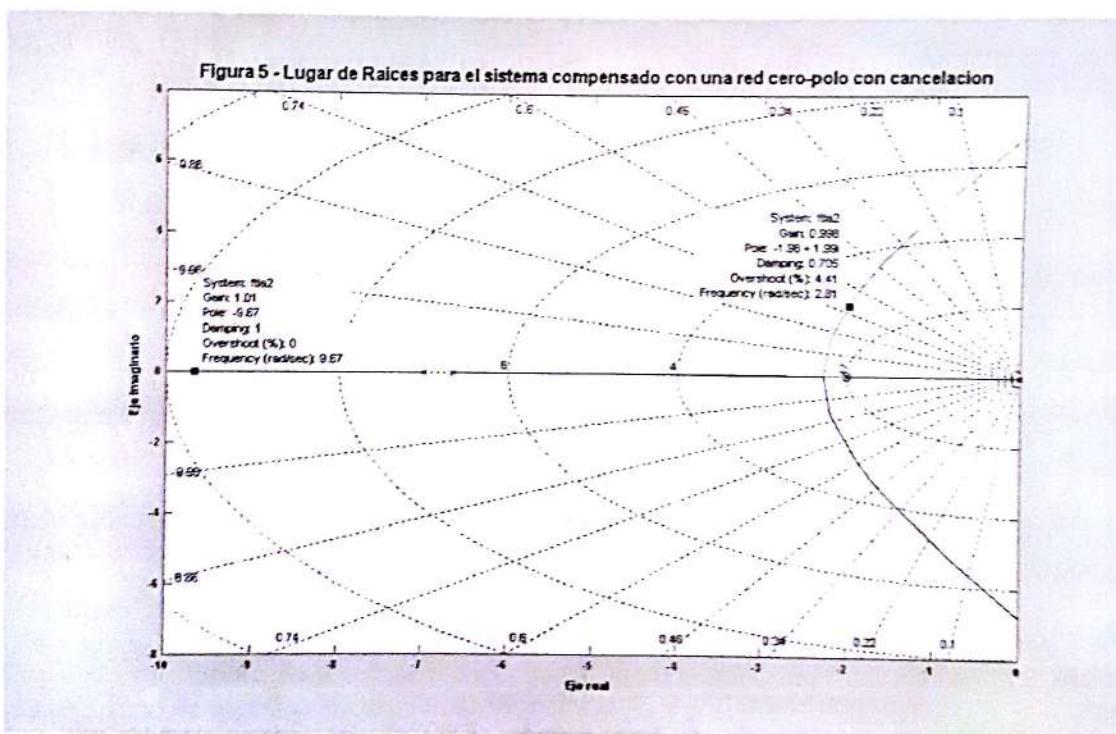
### CASO 2 – Utilización de una red de adelanto cero-polo alternativa.

Dado que el compensador debe proveer  $67^\circ$  de adelanto, existen innumerables combinaciones para las ubicaciones del cero y el polo que proveen ese valor. Como alternativa de realización de un compensador con una red de adelanto cero-polo, puede proponerse, en el caso que se trata, la cancelación del polo de la planta en  $S = -2$  con el cero del compensador. (Recordar que los procedimientos de cancelación pueden realizarse UNICAMENTE en el semiplano izquierdo – Valores negativos de la parte real de los polos).

En el punto de diseño  $S_d$ , el cero ubicado en  $S = -2$ , contribuye con  $+90^\circ$ , por lo que el polo deberá ubicarse de tal manera que provea  $-23^\circ$ , para que la red cero-polo contribuya con los  $67^\circ$  necesarios. En esas condiciones el polo debe ubicarse en  $S = -6.6$ . La ganancia necesaria para que el punto  $S_d$  sea un polo de lazo cerrado, es  $K = 77.2$ .

La función de transferencia del compensador queda entonces dada por

$$G_{2c}(S) = \frac{77.24 (S + 2)}{(S + 6.6)}$$



La función de transferencia de lazo cerrado del sistema compensado con la red cero polo dada por  $G_{2c}(S)$  queda

$$FTLC_2 = \frac{77.24}{(S + 9.66)(S^2 + 3.998S + 7.994)}$$

Como se ve, con la cancelación (ideal) quedan tres polos de lazo cerrado, dos complejos conjugados en  $S = -2 \pm 2j$  y un polo en  $S = -9.66$  (aproximadamente 5 veces el valor de la parte real de los polos complejos) por lo que puede esperarse que se comporten como polos dominantes.

## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

### 36 min CASO 3 – Utilización de un controlador Proporcional Derivativo [PD o P+D]

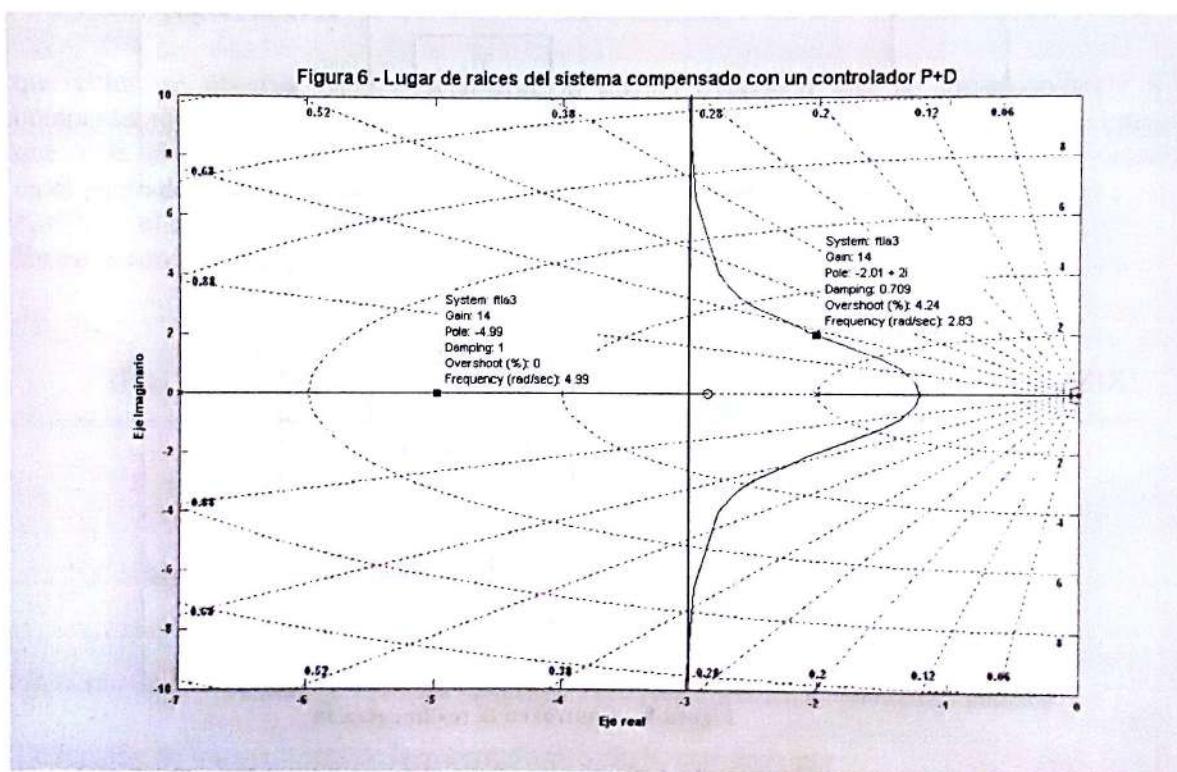
La función de transferencia de un controlador proporcional derivativo esta dada por

$$G_{3c}(S) = K_p(T_d S + 1) \text{ con } K_p = \text{Ganancia proporcional} \text{ y } T_d = \text{tiempo derivativo.}$$

Puesto en la forma de polo y cero queda  $G_{3c}(S) = K_p \cdot T_d(S + 1/T_d)$  lo que ubica un cero en  $S = -1/T_d$ . Ese cero debe proveer los  $67^\circ$  de adelanto necesarios para que el punto  $S_d$  sea lugar de raíces. En estas condiciones, el cero debe ubicarse en  $S = -2.85$ . La ganancia necesaria esta dada por  $K = K_p \cdot T_d = 14$ .

$$G_{3c}(S) = 14 (S + 2.85)$$

En la Figura 6 se da el diagrama del Lugar de raíces del sistema compensado.



La función de transferencia de lazo cerrado en estas condiciones, esta dada por

$$FTLC3 = \frac{14 (S + 2.85)}{(S + 4.99)(S^2 + 4.00S + 7.99)} = \frac{14 (S + 2.85)}{S^3 + 8.99S^2 + 27.95S + 39.9}$$

Los polos se ubican en  $S = -4.99$  y los polos complejos conjugados en  $S = -1.998 \pm 1.998j$ . Puede verse que aparece un cero de lazo cerrado debido al compensador, lo que probablemente produzca dinámica de numerador y un sobrepasamiento mayor que el esperado para una entrada escalón unitario.

## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

42min

### CASO 4 – Utilización de realimentación de posición y velocidad con Amplificación en la rama directa.

En los tres casos anteriores de compensación, se ha utilizado una realimentación negativa unitaria. En esta ocasión, se procederá de manera de generar un cero en la función  $H(S)$  realimentando posición y velocidad y se proveerá la ganancia necesaria en la rama directa para que el error en estado estacionario ante una entrada escalón unitaria continúe siendo cero. Es decir, preservar una función que tenga una realimentación unitaria y sea tipo 1. En las Figuras 7, 8 y 9, se pone de manifiesto lo expresado.

sistema de Tipo 1, un integrador

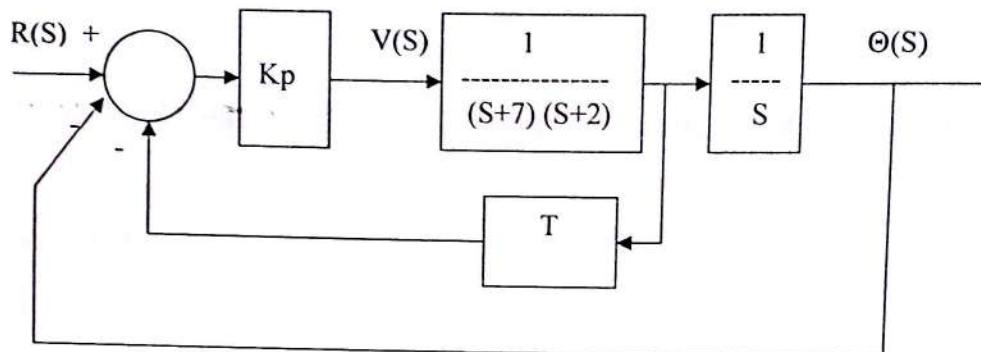


Figura 7 – Control en la realimentación

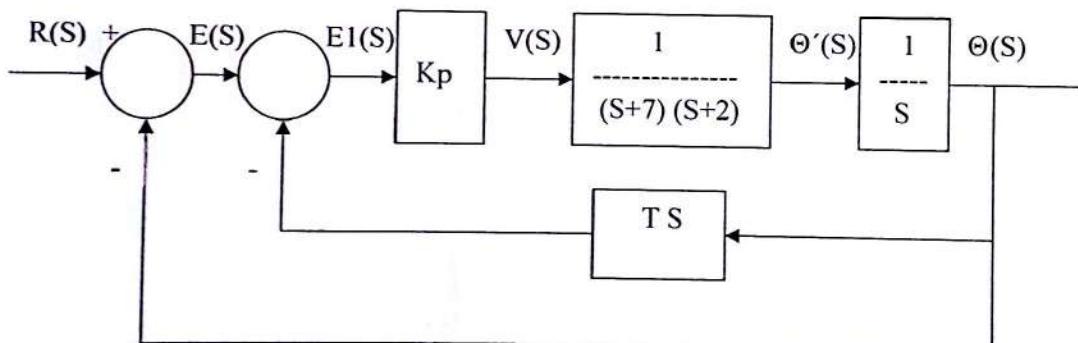


Figura 8 – Control en la realimentación

## Compensación utilizando Lugar de Raíces -

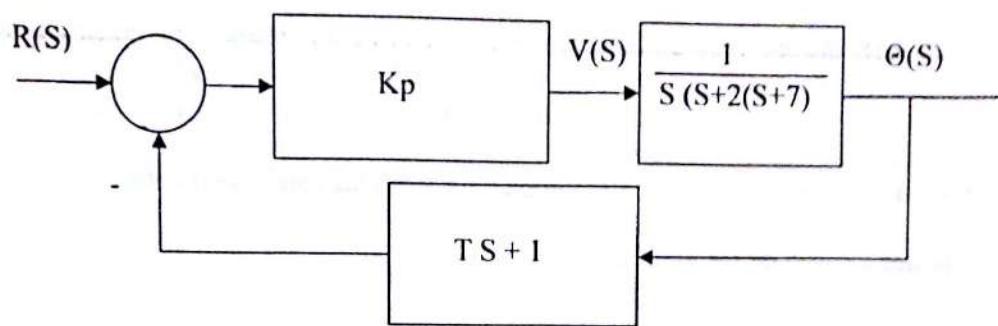


Figura 9 – Control en la realimentación

La función de transferencia de lazo abierto FTLA =  $G_c(S)G_p(S)H(S)$  está dada por

$$FTLA = \frac{K_p \cdot (T S + 1)}{S (S+2)(S+7)}$$

que como se observa tiene exactamente la misma expresión que la correspondiente a la compensación con el controlador P+D. Por lo tanto, el lugar de raíces es exactamente el mismo que se da en la Figura 6, siendo la ubicación del cero y el valor de K necesario para posicionarse en el punto de diseño  $S_d$  exactamente los mismos valores que los encontrado para el P+D :  $K = 14$  y el cero se ubica en  $S = -2.85$ .

En estas condiciones quedan los valores de  $K_p=14 * 2.85 = 39.9$  y  $T = 0.35$

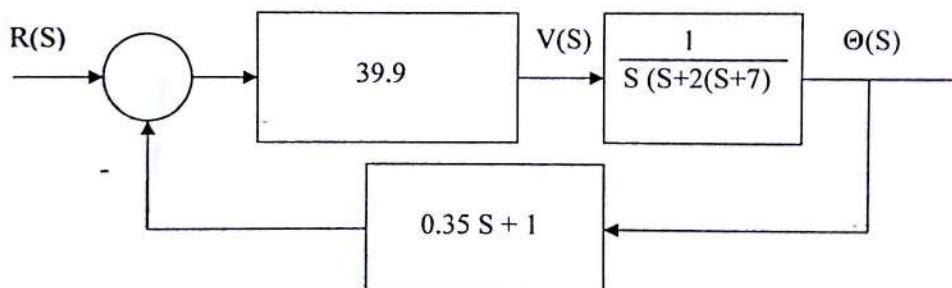


Figura 10 – Sistema compensado con realimentación de velocidad y posición

La función de transferencia de lazo cerrado  $\Theta(S)/R(S)$  está dada por

$$\frac{\Theta(S)}{R(S)} = \frac{39.9}{S^3 + 9 S^2 + 27.96 S + 39.9}$$

*no presenta ceros en el Numerador, con lo que, las respuestas temporales serán diferentes, pero Lugar de Raíces iguales*

Puede observarse que con este tipo de acción se provee el amortiguamiento necesario para lograr la relación de coeficientes de amortiguamiento  $\zeta$  y el  $\omega_n$  solicitados y no se genera un cero en el numerador, como en el caso del P+D.

Los polos de lazo cerrado se encuentran, uno sobre el eje real ubicado en  $S_1 = -5.077$  y los dos polos complejos conjugados en  $S = -1.996 \pm 1.996 j$

## Compensación utilizando Lugar de Raíces -

50 min

Las respuestas temporales para una entrada escalón unitario, del sistema original con el control proporcional solamente y del sistema con las cuatro compensaciones realizadas con el objeto de mejorar la respuesta transitoria, se da en las Figuras 11, 12, 13 y 14 a los efectos de comparar su comportamiento en función de los diferentes parámetros. En la figura 15, se da la respuesta de la salida a la función impulso unitario.

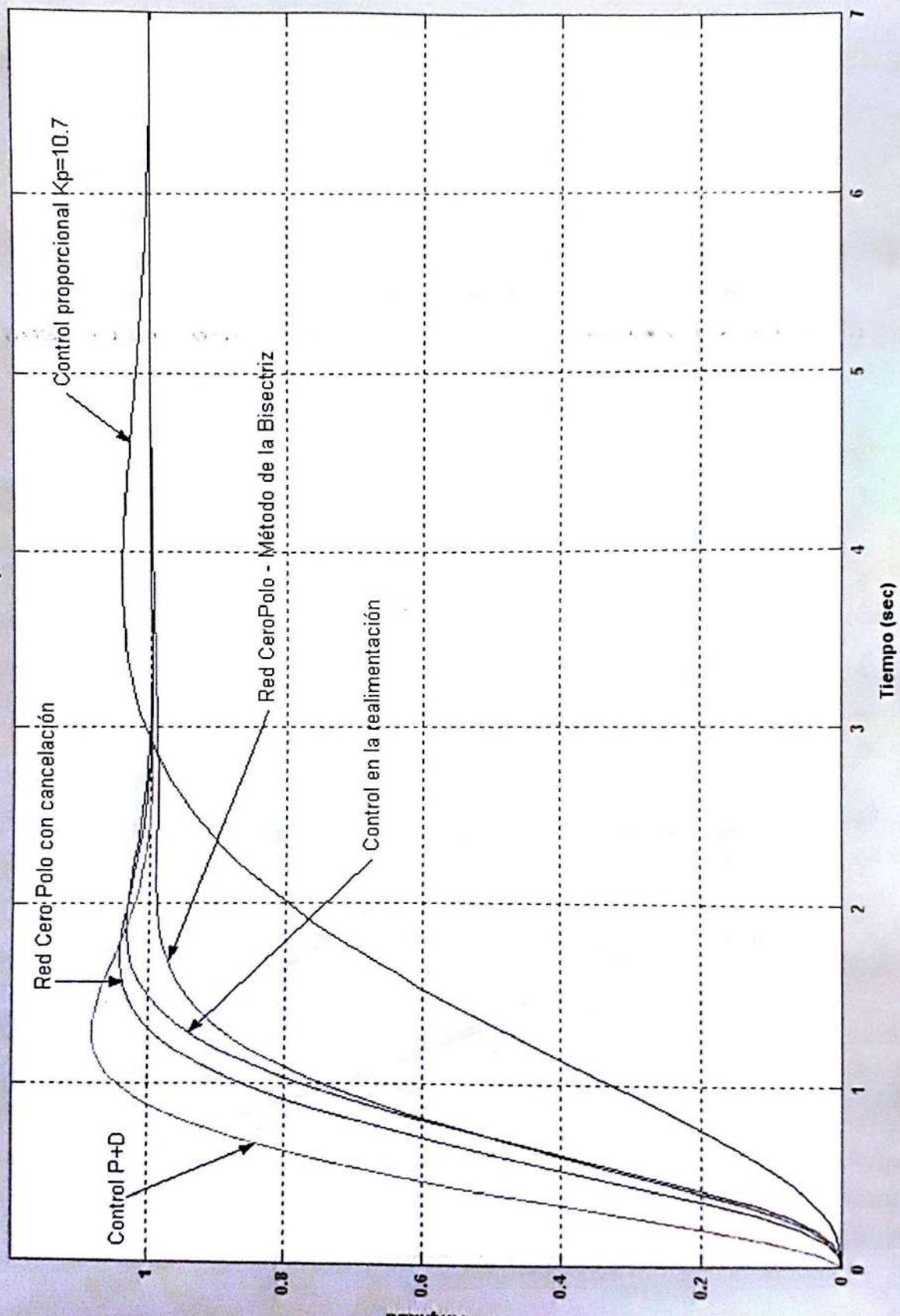
En la Figura 16 se da la respuesta a la rampa para todas las configuraciones.

Conclusiones a cargo de los alumnos.

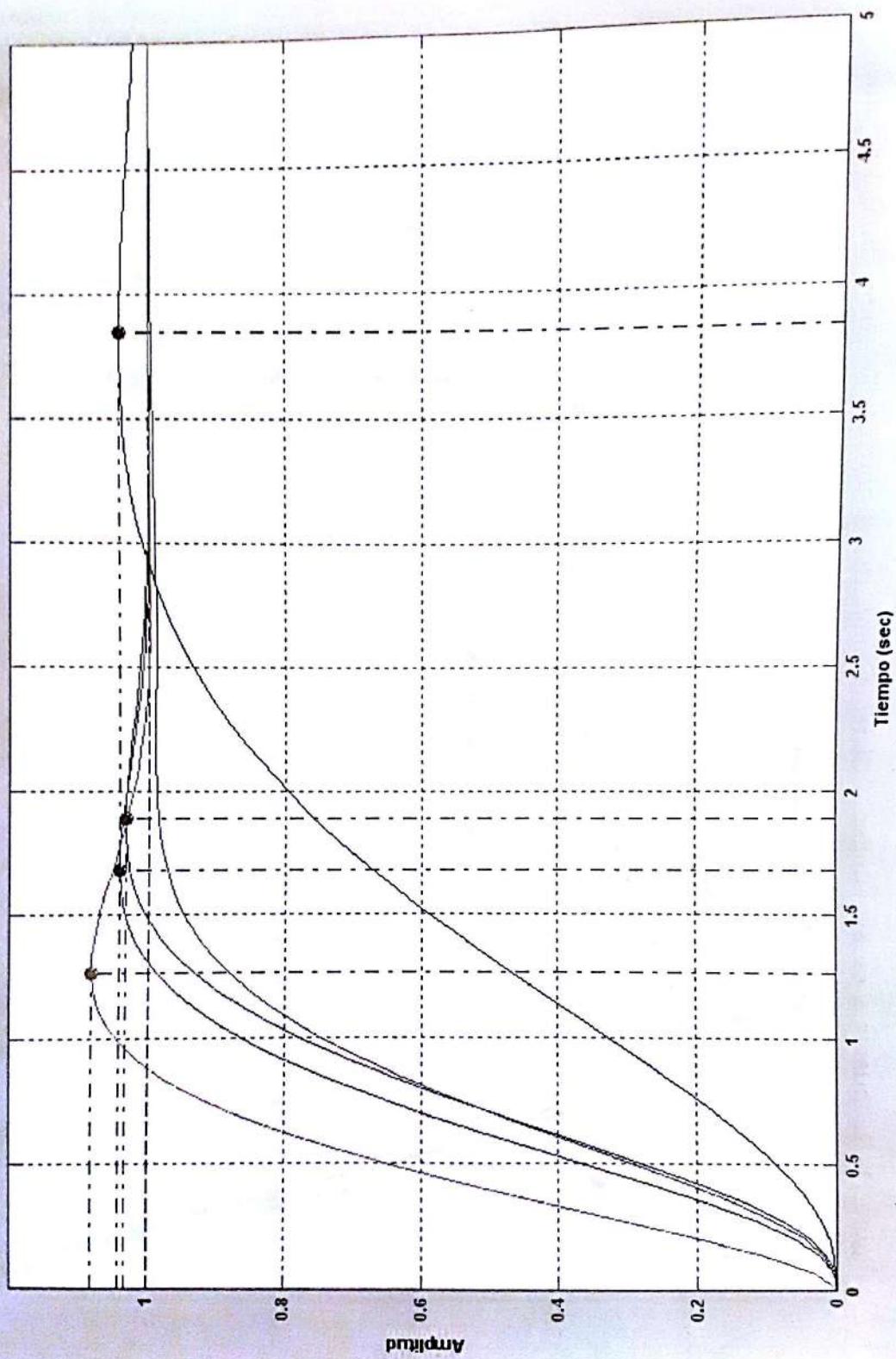
Desde las gráficas:

- El P+D es el más rápido de todos, así como también el que tiene más sobreimpulso
- Red de cancelación cero-polo, es el 2º más rápido
- Control en realimentación, es el 3º más rápido y el sobreimpulso es muy similar al sistema original.
- Por Bisectriz, es el más lento pero no tiene sobreimpulso; se comporta como un sistema críticamente amortiguado

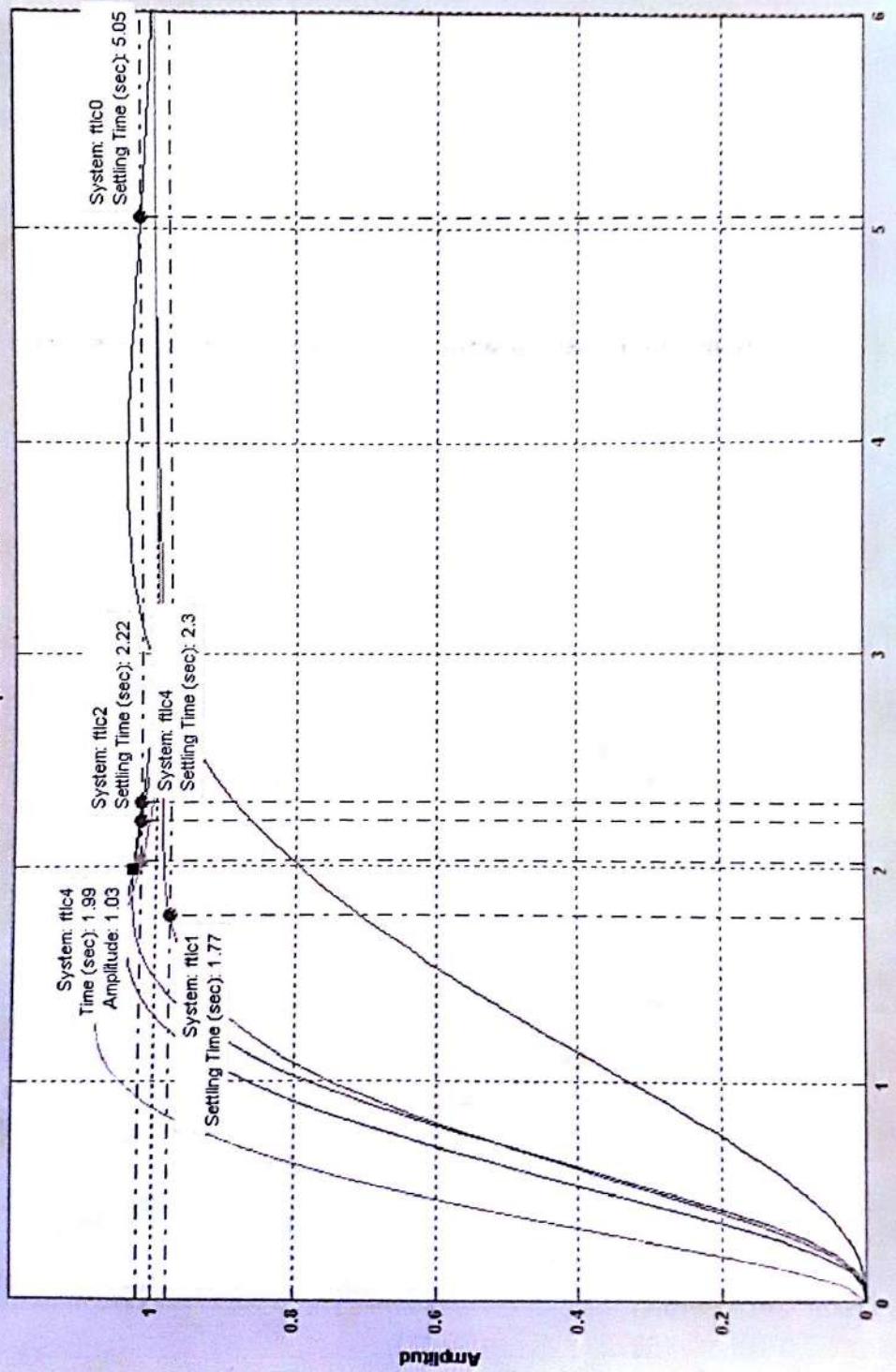
**Figura 11- Respuesta al escalón unitario - Sistema compensado con las diferentes configuraciones**



**Figura 12- Respuesta al escalón unitario - Sistema compensado con las diferentes configuraciones  
Indicación tiempo de primer sobreimpulso  $t_p$**

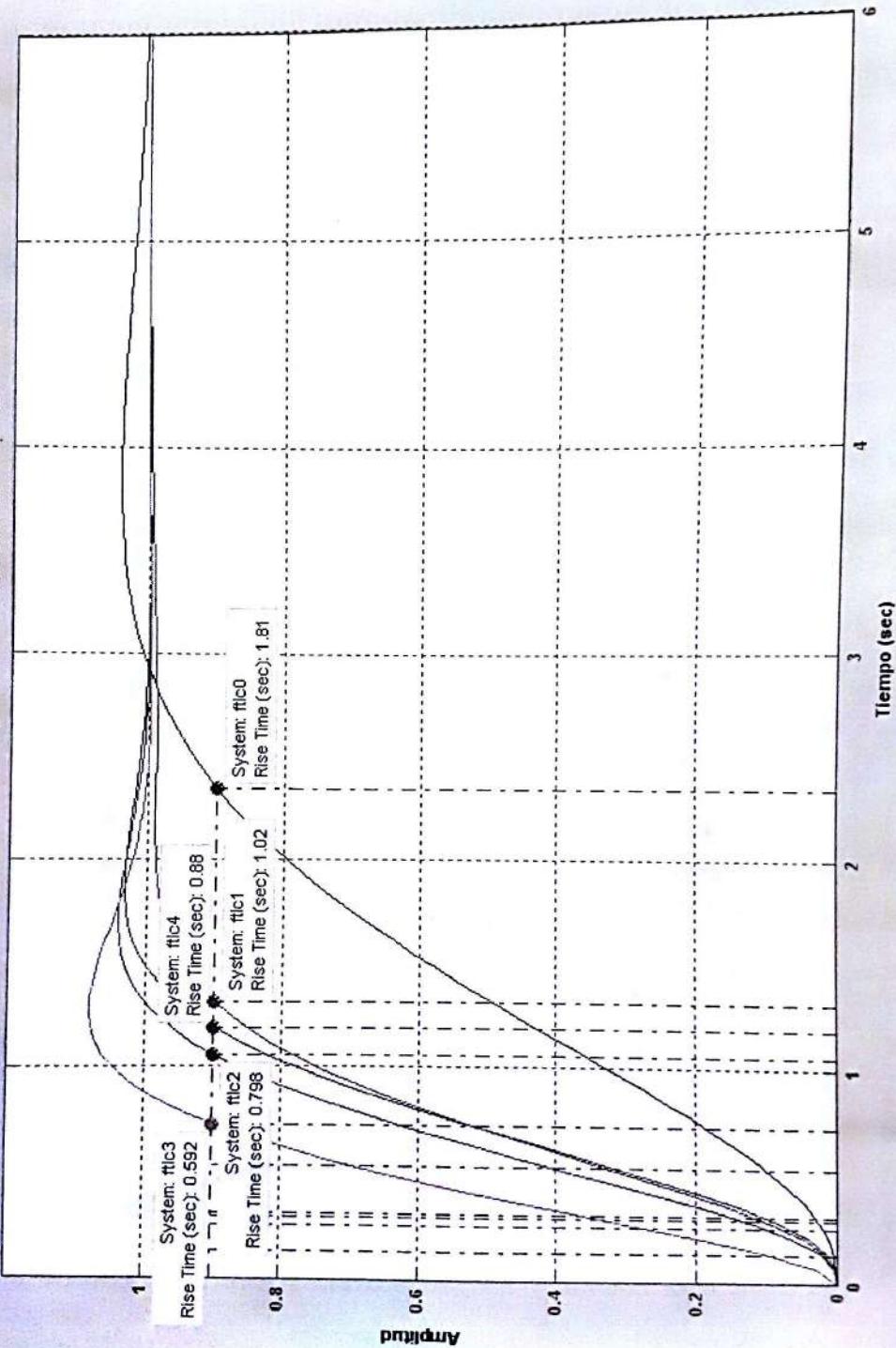


**Figura 13- Respuesta al escalón unitario - Sistema compensado con las diferentes configuraciones  
Indicación tiempo de establecimiento**



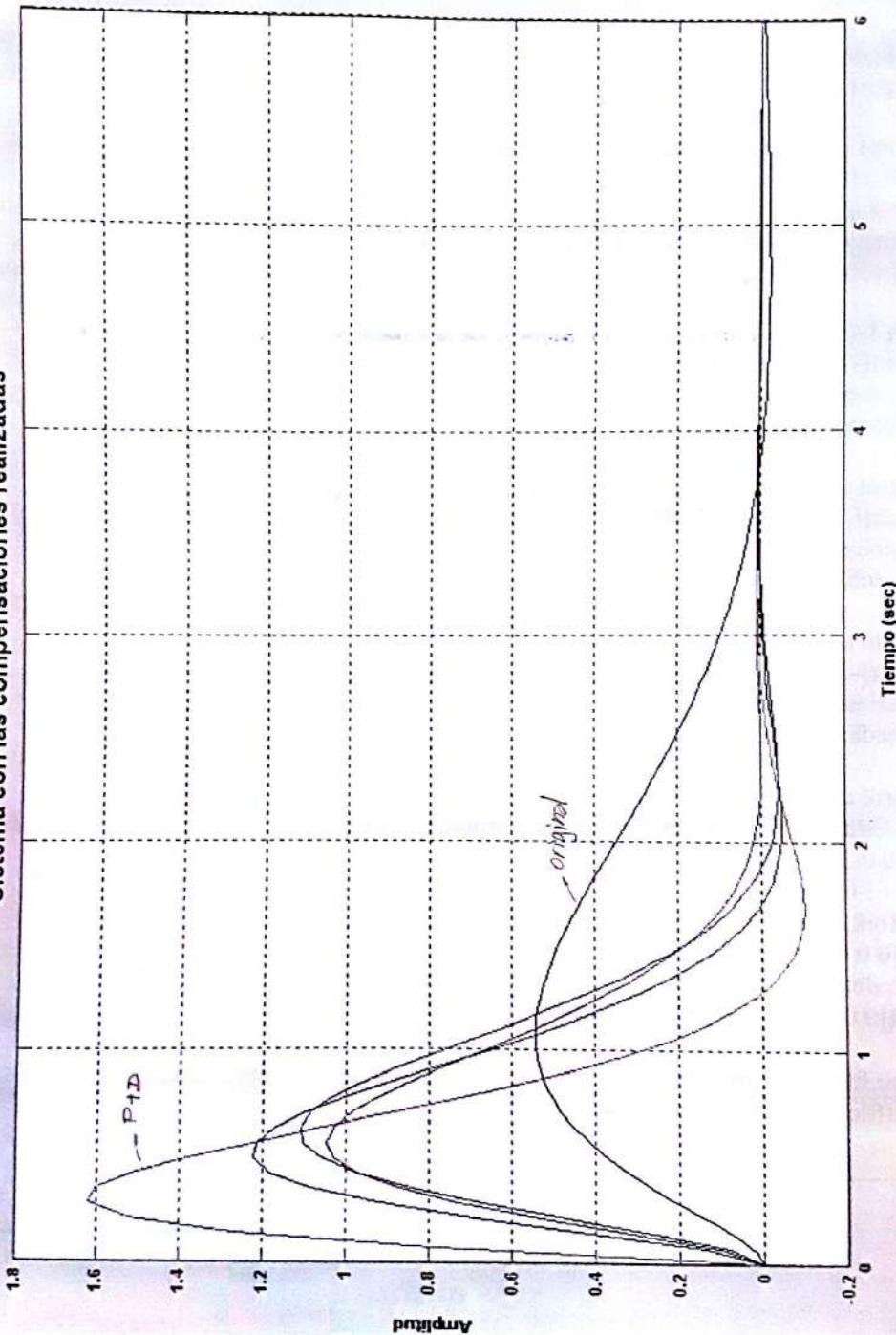
Compensación utilizando Lugar de Raíces –

**Figura 14 - Respuesta al escalón unitario - Sistema compensado con las diferentes configuraciones  
Indicacion tiempo de crecimiento 10 - 90 %**



Compensación utilizando Lugar de Raíces –  $\Sigma \mathcal{E}_{min}$

Figura 15 - Respuesta al impulso unitario -  
Sistema con las compensaciones realizadas



## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

Ordenes en MatLab para realizar los gráficos presentados en la compensación de adelanto

```
% Generación de FT original y su lugar de raíces K=1 , H(S)=1
ni=[0 0 0 1];
di=[1 9 14 0];
gpi=tf(ni,di)
rlocus(gpi)

% Control proporcional para tener un  $\zeta = 0.707$ 
nikp=[0 0 0 10.7]
gpikp=tf(nikp,di)
% Sistema original con ganancia proporcional 10.7
ftlc0=feedback(gpikp,1)

% Caso 1 - Controlador cero polo - Método de la Bisectriz -
gcc=zpk([-1.65],[-5.079],[55.3])
ftla=series(gpi,gcc)
ftlc1=feedback(ftla,1)

% Control con cancelación de polo con el cero del controlador
gc2= zpk([-2],[-6.66],[77.24])
ftla2=series(gpi,gc2)
ftlc2=feedback(ftla2,1)

% Control con P+D
gpd=zpk([-2.85],[],[14])
ftla3=series(gpi,gpd)
ftlc3=feedback(ftla3,1)

% Control con realimentación de velocidad.
% gpik Esta es la función de transferencia original con Kp=39.9
nik=[0 0 0 39.9];
dik=[1 9 14 0];
gpik=tf(nik,dik)
gr = tf([0 0 0.35 1],[0 0 0 1])
ftlc4=feedback(gpik,gr)
ftlc4=tf([0 0 0 39.9],[1 9 27.96 39.9])

step(ftlc0,ftlc1,ftlc2,ftlc3,ftlc4)
impulse(ftlc0,ftlc1,ftlc2,ftlc3,ftlc4)
```

SEGUNDA PARTE

17/8/16

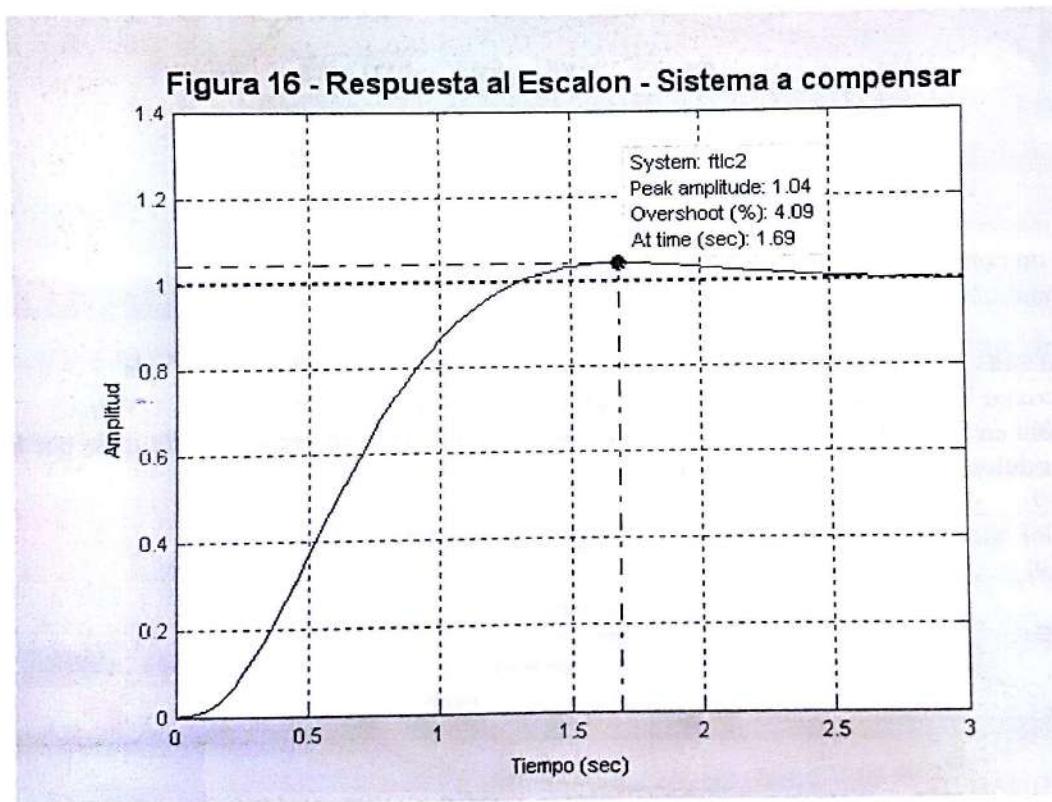
8 min

- . A los efectos de mejorar la especificación en el régimen estacionario, se pide que el sistema tenga una respuesta transitoria como la especificada originalmente:

*Polos complejos conjugados dominantes que posean una relación de coeficientes de amortiguamiento  $\zeta=0.707$  y una frecuencia angular natural no amortiguada  $\omega_n = \sqrt{8}$*

y un error en estado estacionario a)  $e_{ss} \leq 0.1$  y b)  $e_{ss} = 0$  (nulo) ante una entrada rampa. Al especificar de esta manera, necesariamente se debe incrementar el tipo de sistema, y pasar de un sistema Tipo I a un sistema Tipo 2 (dos integradores), por lo que se propone utilizar a) un controlador en atraso y b) un controlador PI en cascada con el PD. El compensador cero-polo de atraso para mejorar el comportamiento en estado estacionario, no permite eliminar el error para una entrada rampa.

El sistema compensado con cancelación, tiene una respuesta al escalón dada en la Figura 16



$$77.24 (S + 2)$$

$$G_{cad} = \frac{77.24 (S + 2)}{(S + 6.66)} \quad \text{Compensador de adelanto con cancelación de polo.}$$

10min

sistema Tipo 1

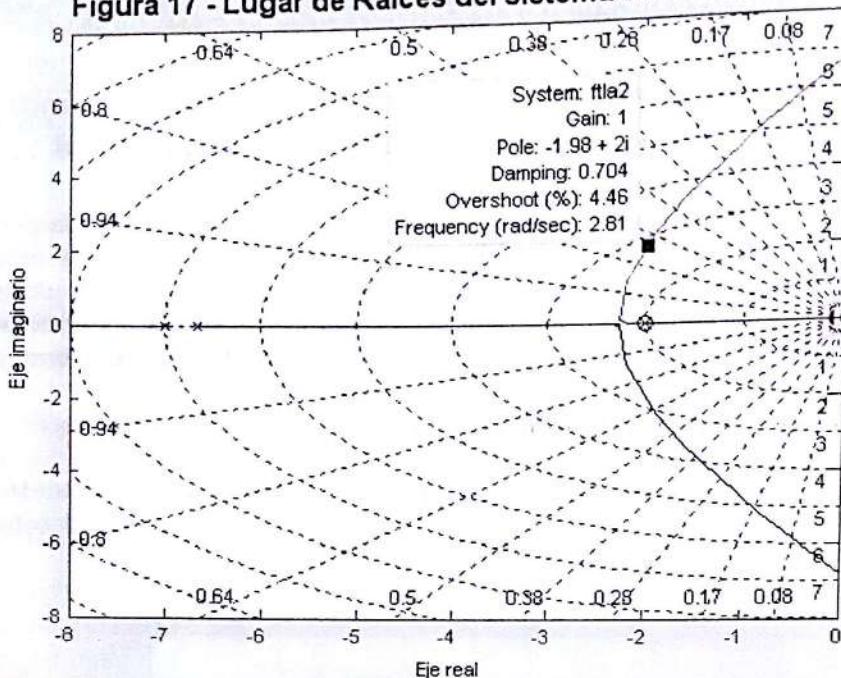
$$77.24 (s+2)$$

$$G_{cad}G_p(S) = \frac{77.24 (s+2)}{s (s+6.66) (s+7) (s+2)}$$

## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

Para compensar en estado estacionario, se utilizará una red polo-cero.

**Figura 17 - Lugar de Raíces del sistema sin compensar**



Utilizaremos un compensador de atraso de la forma

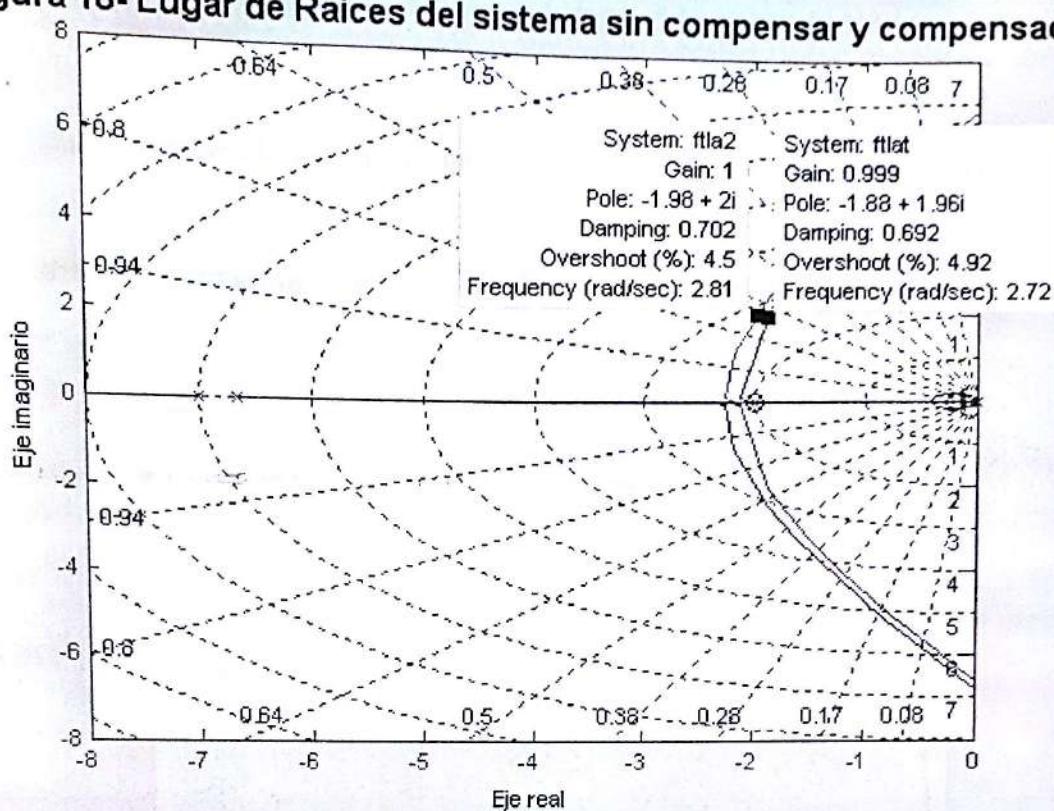
$$\beta = 6 \quad (\text{es para obtener el } K_v \text{ necesario de 10}) \quad e_{ss} = 0.1 \quad K_v = 10$$

$$G_{\text{atraso}} = K (S + 1/T) / (\beta(S+1/\beta T))$$

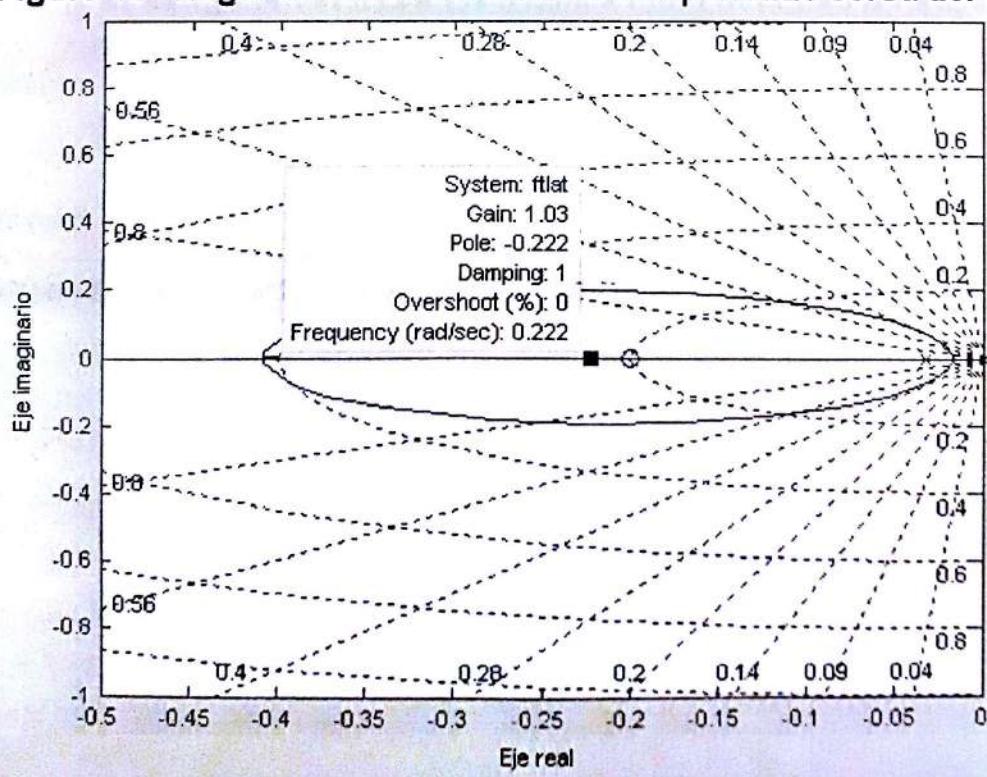
23min Se ubica el cero en la 1/10 parte de la parte real del polo complejo conjugado deseado.  $1/T = 0.2$   
El polo se ubica en  $S = 0.033 = (1/\beta T)$ . El  $K$  necesario para ubicarse en ese lugar está dado por la relación de modulos en el punto deseado.  $K_t = 80.28$

26min El compensador queda de la forma  $G_{\text{atraso}} = 1.04 (S+0.2)/(S+0.033)$

**Figura 18- Lugar de Raíces del sistema sin compensar y compensado**



**Figura 19 - Lugar de raíces del sistema compensado cerca del origen**



## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

3.5min

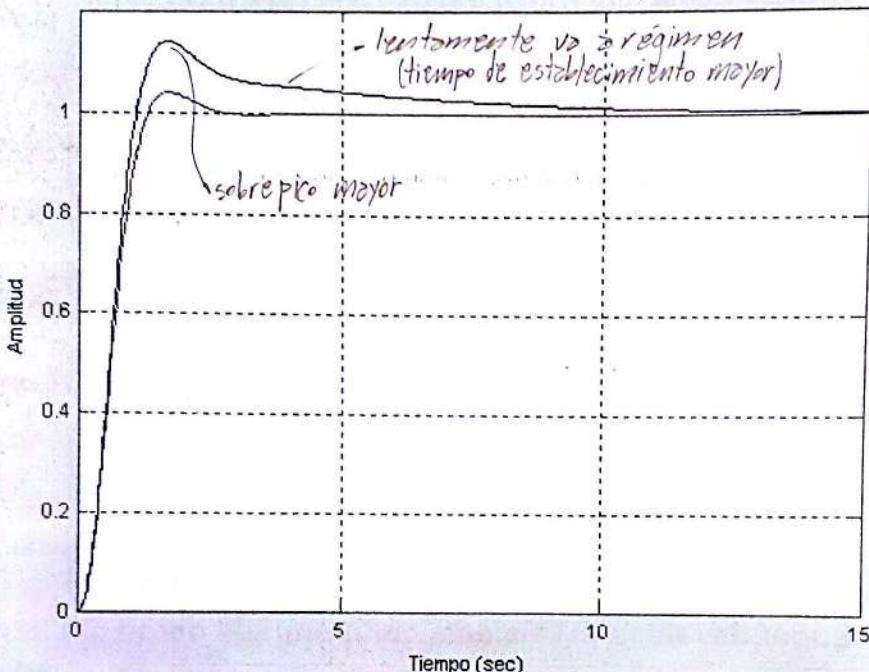
La función de transferencia total, con el compensador de adelanto y de atraso, queda

$$80.3296 (s+2) (s+0.2)$$

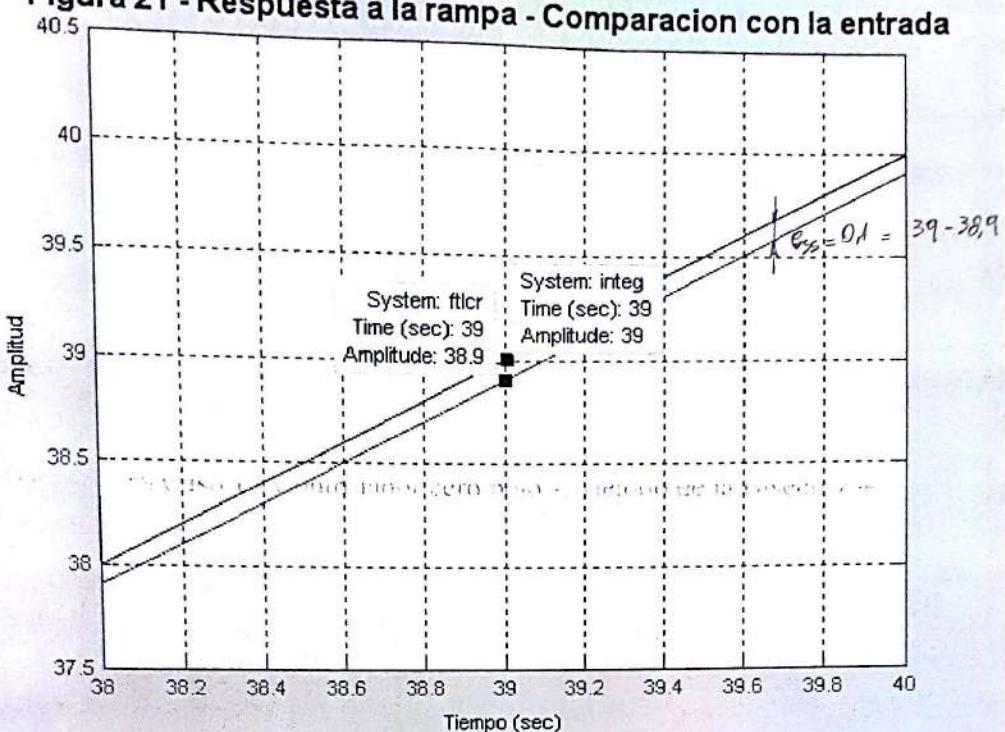
$$FTLC = \frac{80.3296 (s+2) (s+0.2)}{(s+9.689) (s+2) (s+0.223) (s^2 + 3.781s + 7.435)}$$

La respuesta al escalón y la rampa, se dan en las Figura 20 y Figura 21 respectivamente

Figura 20 - Respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensación



**Figura 21 - Respuesta a la rampa - Comparacion con la entrada**



*47min*

Caso 2 – Error en estado estacionario NULO – Se usa un compensado PI o P+I

De la Forma  $K_p[1 + 1/(T_i S)]$

$$\text{Glazocom} = \frac{78.7848 (s+0.2) (s+2)}{s^2 (s+6.66) (s+7) (s+2)}$$

$$\frac{78.7848 (s+2) (s+0.2)}{(s+9.661) (s+2) (s+0.229) (s^2 + 3.77s + 7.123)}$$

Figura 22 - Lugar de raíces con el compensador PI

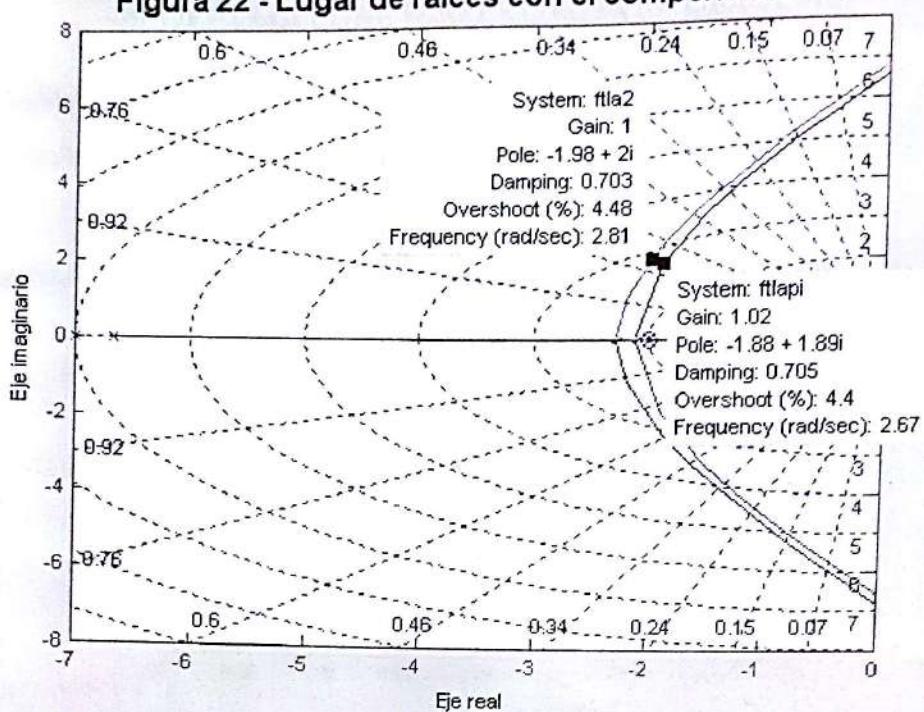


Figura 23 - Respuesta a un escalón sin compensar, Atraso y PI

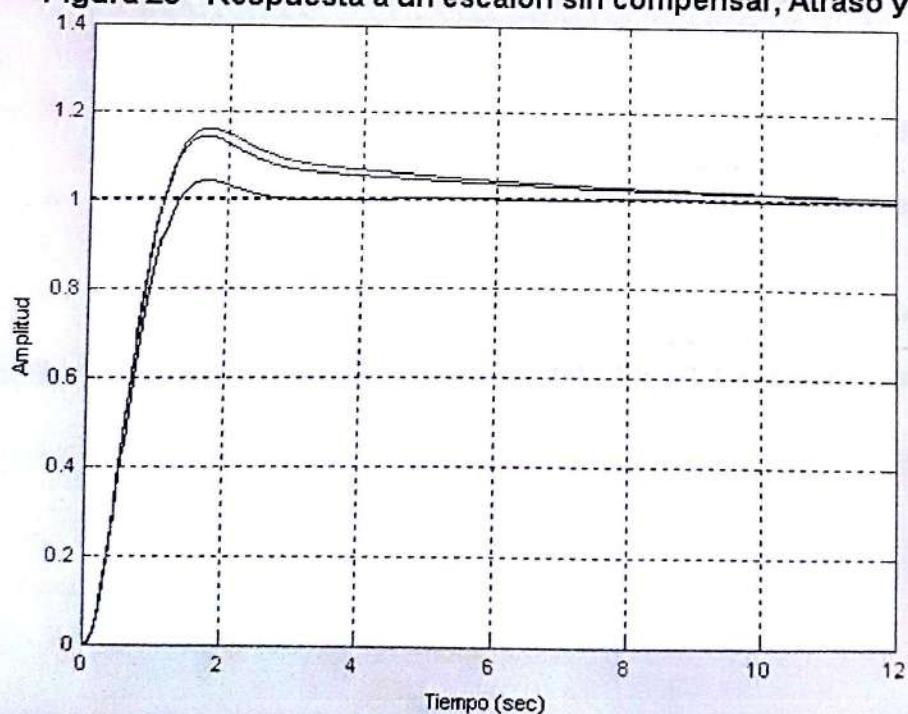
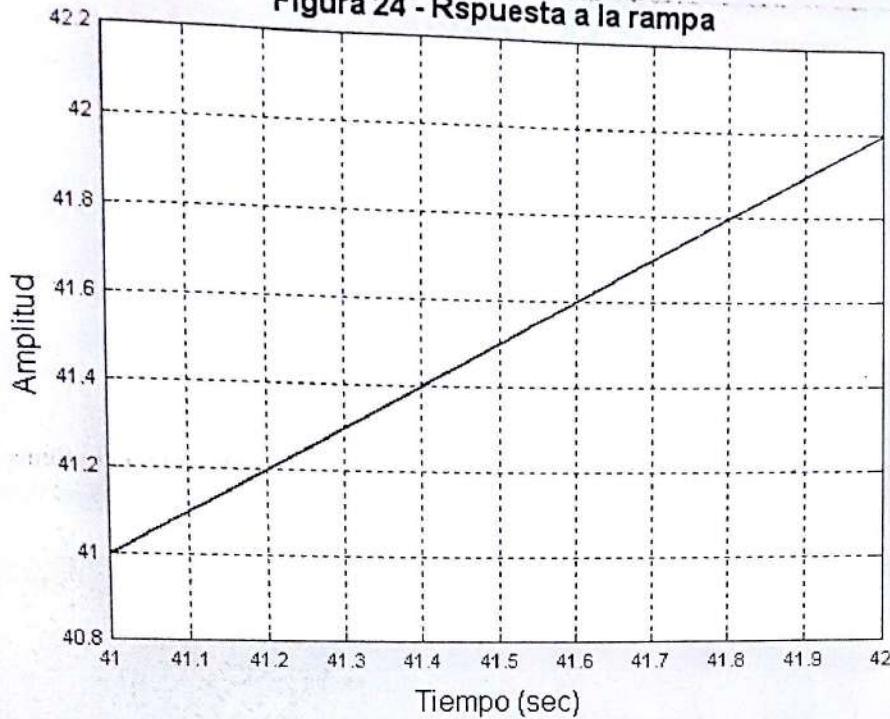


Figura 24 - Respuesta a la rampa



## Relación de dominios en lazo abierto y lazo cerrado

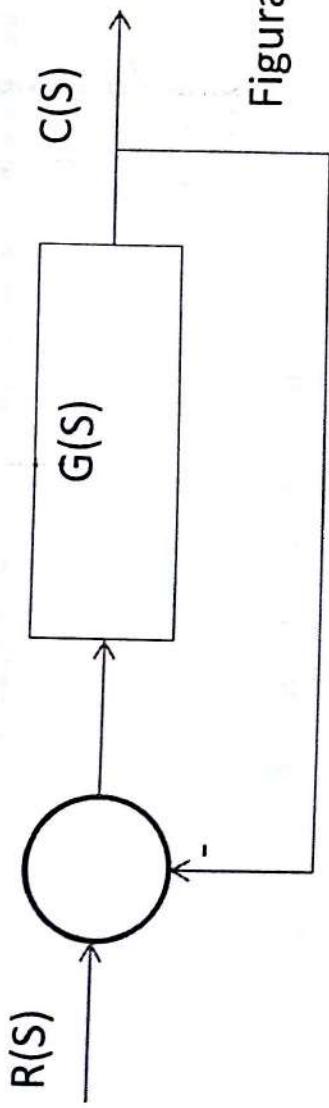


Figura 1

Se realiza el análisis del sistema de control con realimentación negativa unitaria, dado por la función de transferencia de lazo abierto (1), para diferentes ganancias y su representación en el lugar de raíces y en el dominio de frecuencia (Bode y Nyquist) y su correlación en lazo cerrado (2) para diferentes ganancias.  $K = 20, 55, 200$  y  $560$

$$G(S) = \frac{K}{S(S+4)(S+10)} \quad (1) \quad FTLA$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K}{S^3 + 14S^2 + 40S + K} \quad (2) \quad FTL_C$$

## Análisis de estabilidad – Criterio de Routh Hurwitz

Ecuación característica  $S^3 + 14S^2 + 40S + K$

$$\begin{array}{ccc} S^3 & 1 & 40 \\ S^2 & 14 & K \\ S^1 & \frac{14*40-K}{14} & \\ S^0 & K & \end{array}$$

Rango estable       $0 < K < 560$

La función de transferencia de lazo abierto  $G(S)$  corresponde a un sistema tipo 1, o sea que tiene un integrador y el coeficiente de error en estado estacionario para una entrada rampa será

$$K_V = \lim_{S \rightarrow 0} G(S) = \frac{K}{40}$$

y el error  $e_{ss} = \frac{1}{K_V}$

Para  $K=20, 55, 200$  y  $560$  el error en estado estacionario correspondiente será  $2, 0, 727, 0,2$  y  $0.071$ , que se corresponden con diferentes respuestas transitorias, que pueden o no ser adecuadas.

**Figura 2 - Lugar de raíces con Ganancias K= 20, 55, 200 y 560**

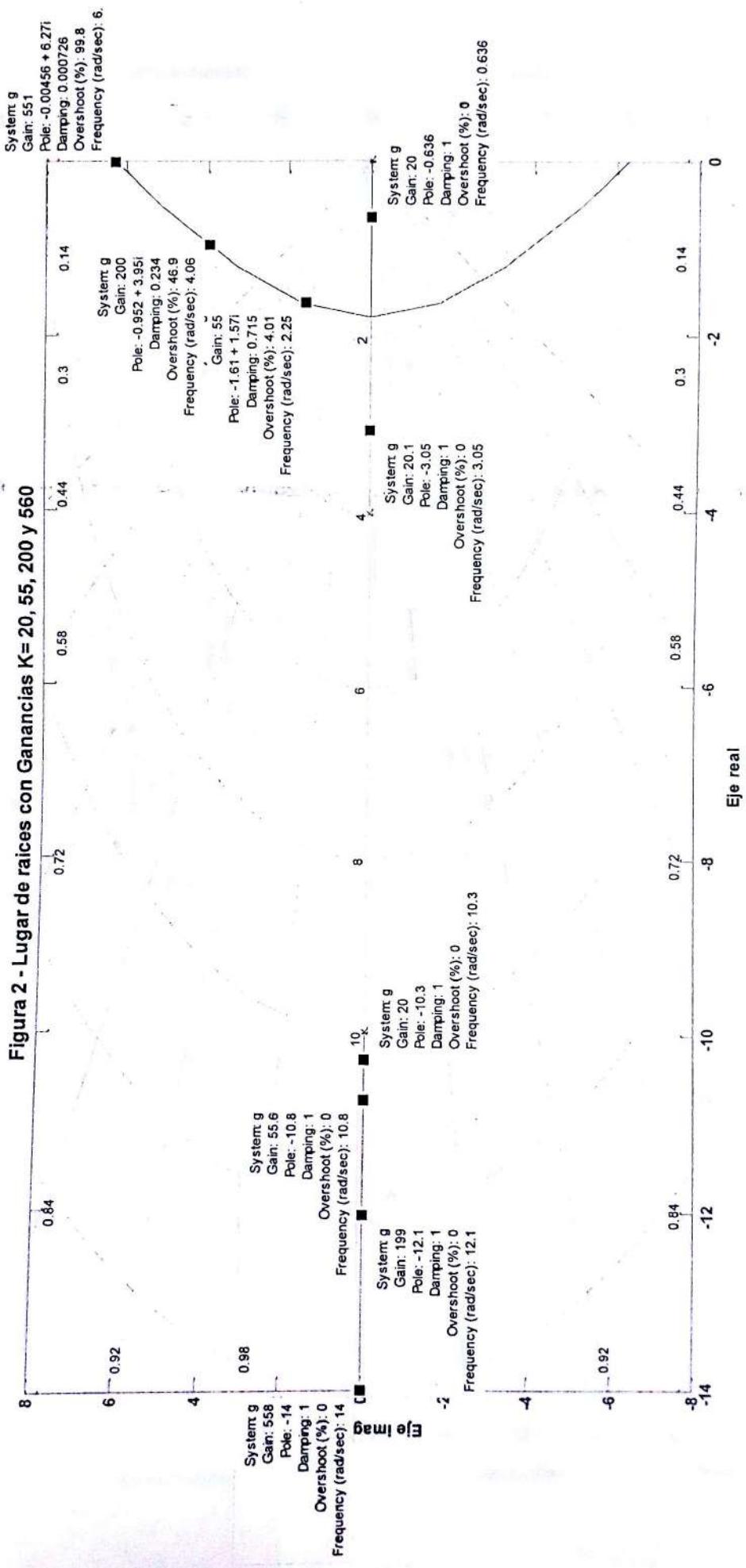
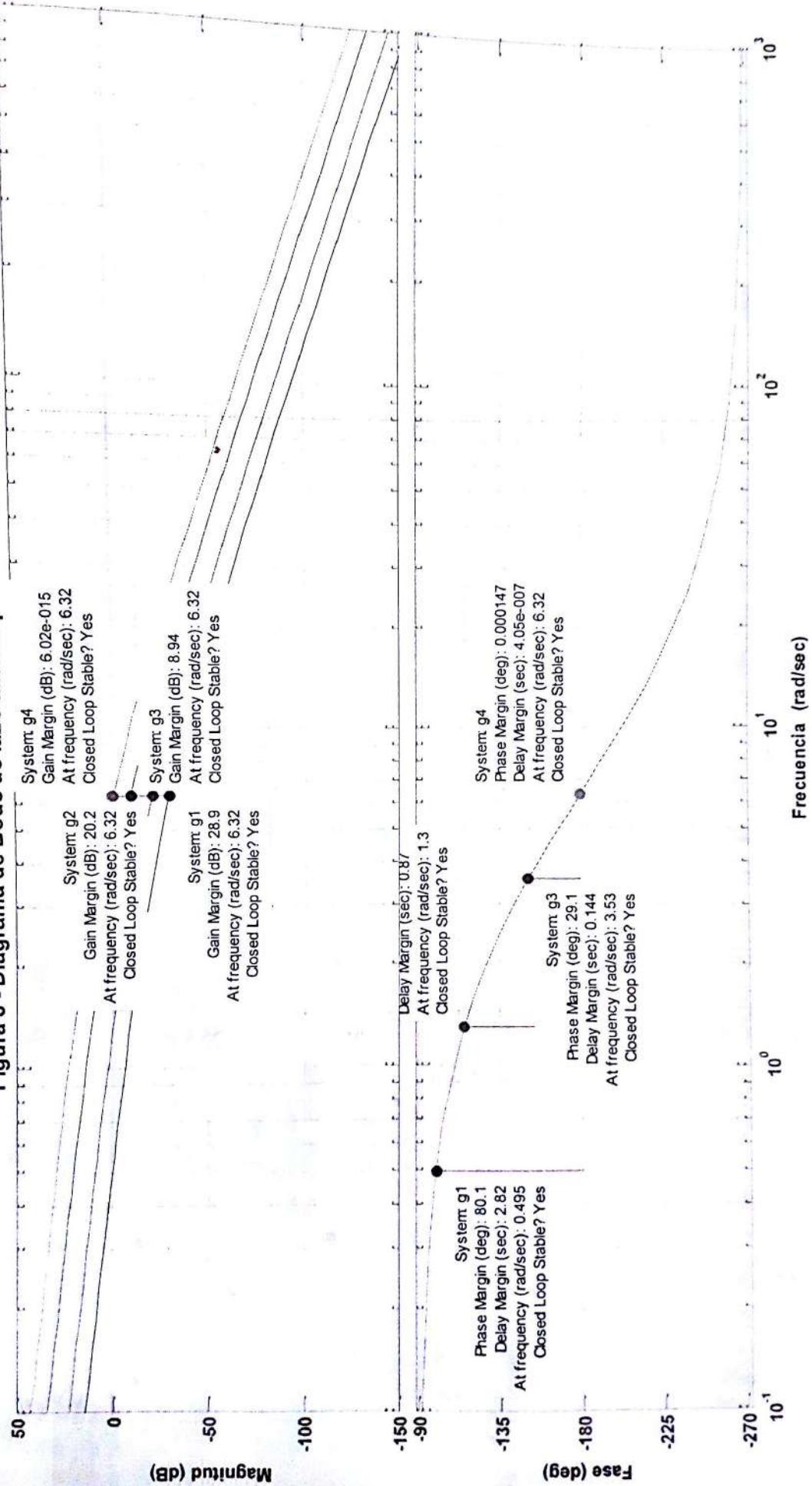


Figura 3 - Diagrama de Bode de lazo abierto para K=20, 55, 200 y 560



**Figura 3a - Diagrama de Bode de lazo abierto para  $K=20, 55, 200$  y  $560$**   
**Mostrar margen de fase, margen de ganancia y coeficiente de error**

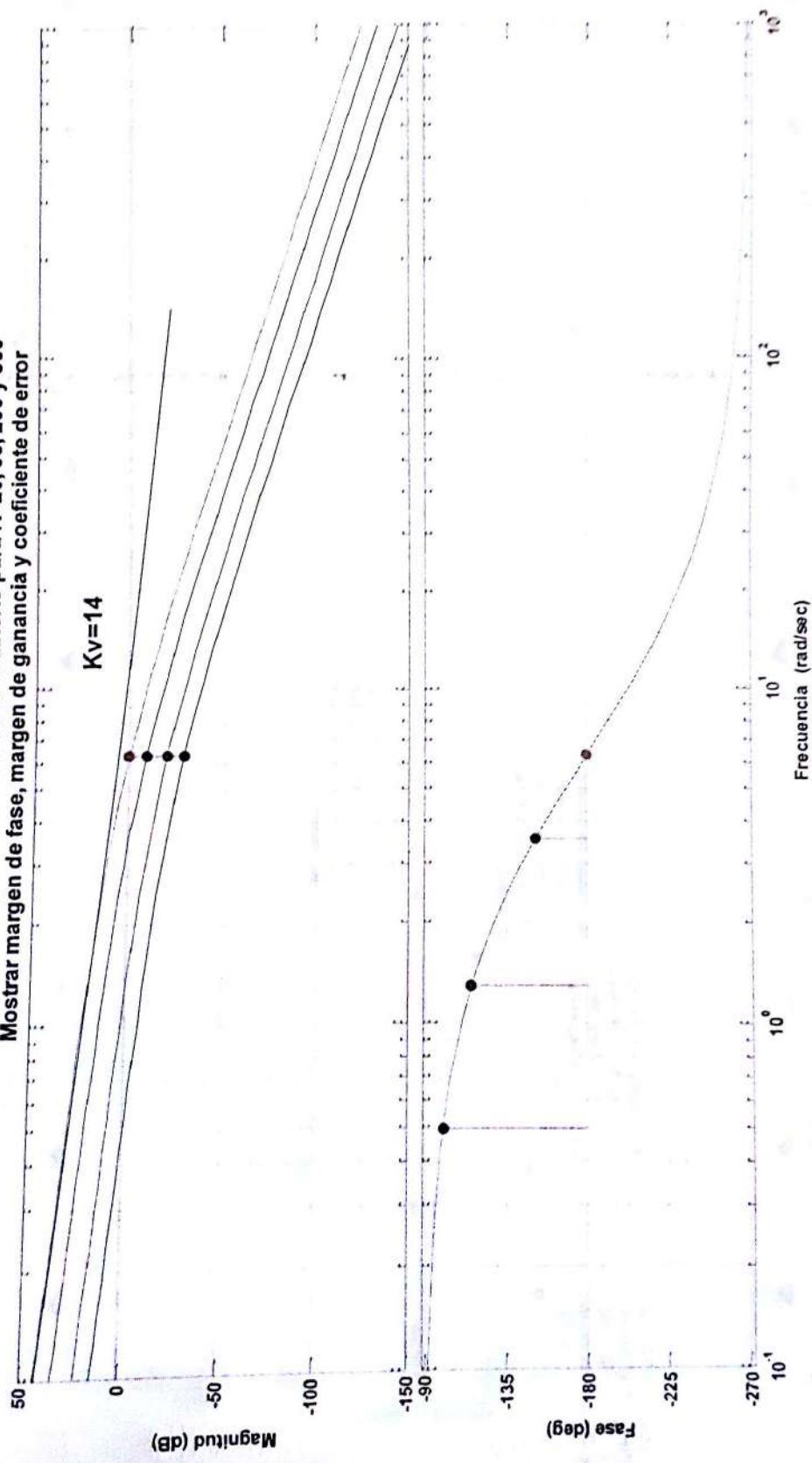
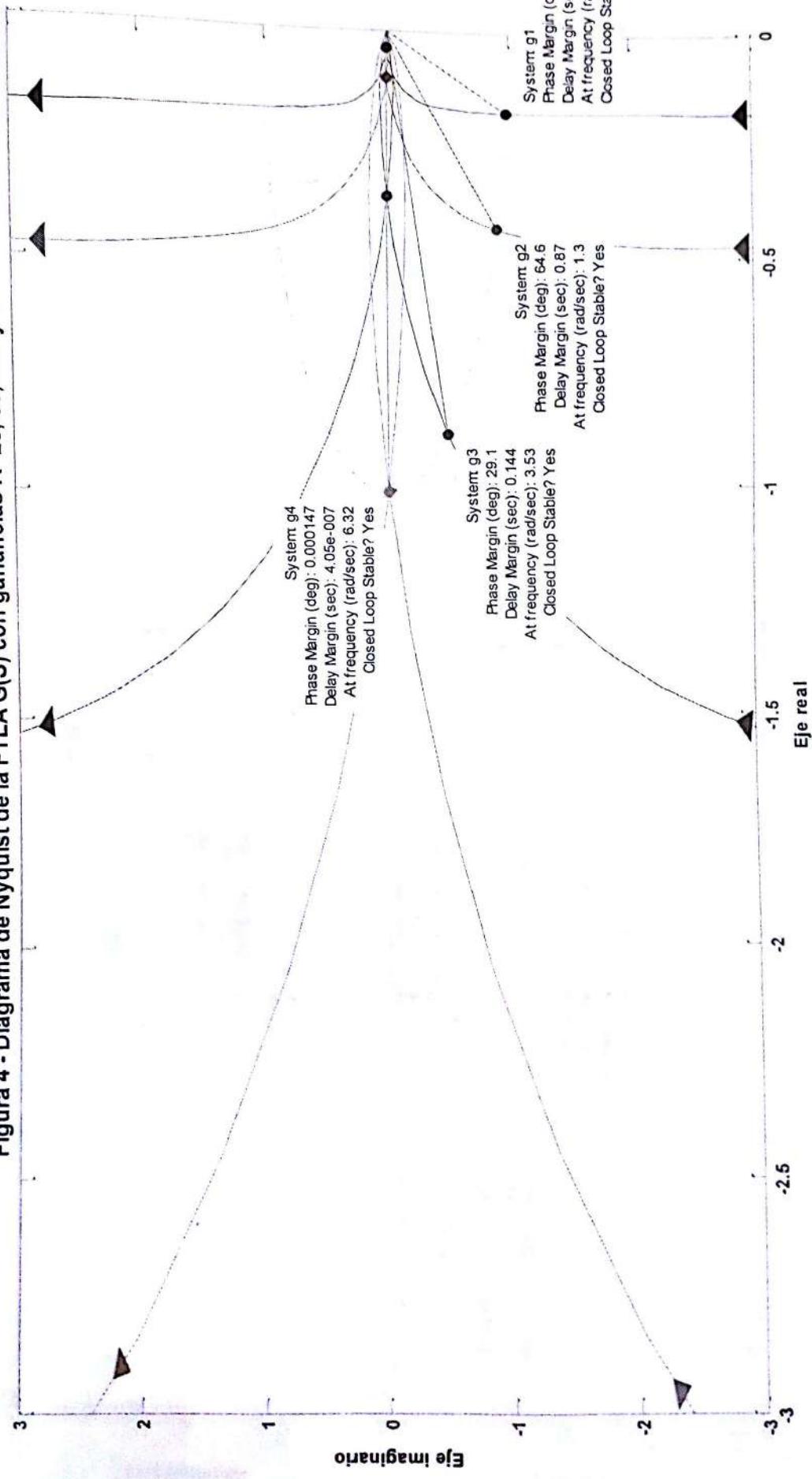
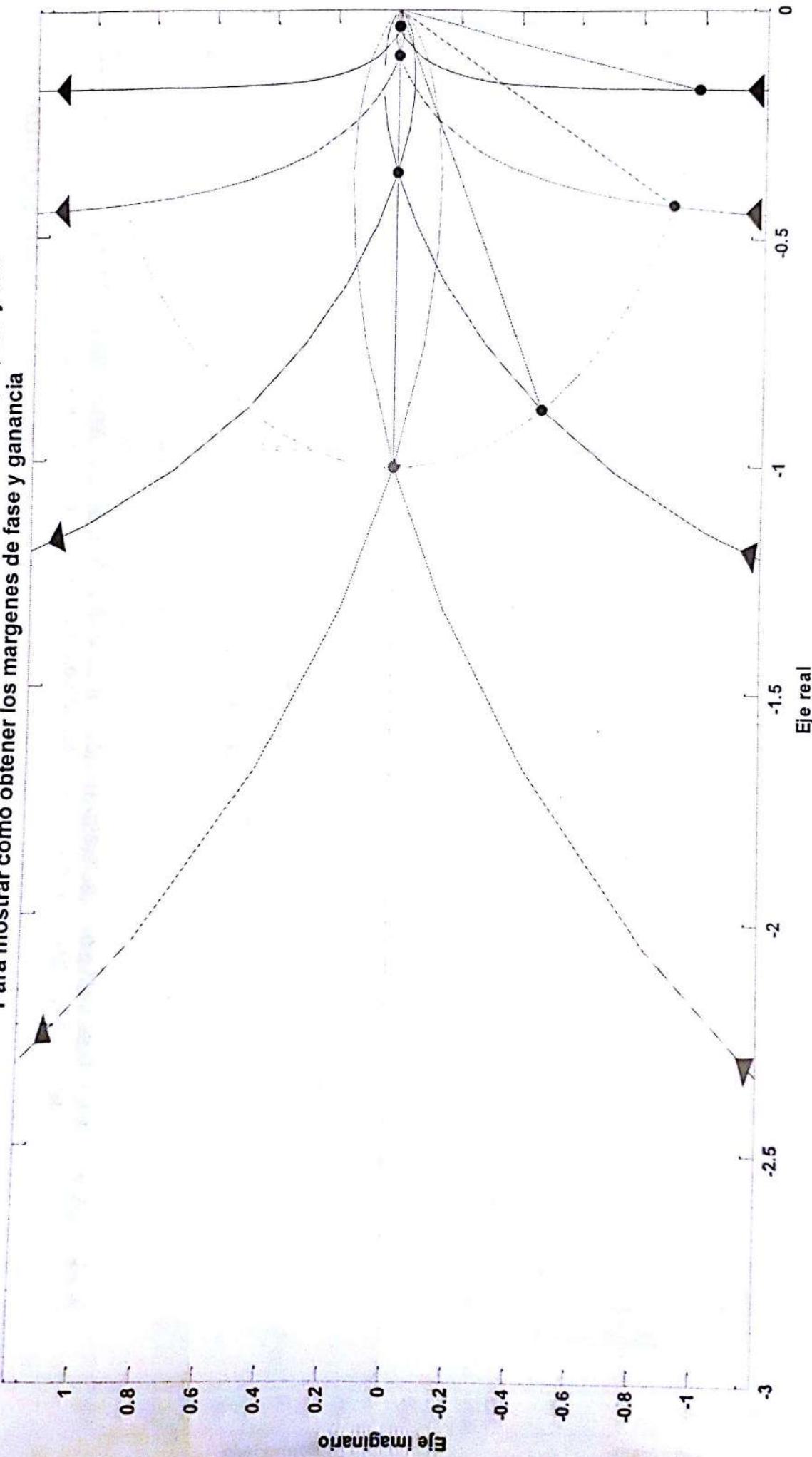


Figura 4 - Diagrama de Nyquist de la FTLA G(S) con ganancias K=20, 55, 200 y 560



**Figura 4a - Diagrama de Nyquist de la FTLA  $G(S)$  con ganancias  $K=20, 55, 200$  y  $560$**   
Para mostrar como obtener los margenes de fase y ganancia



Como se correlacionan los gráficos del sistema de lazo abierto con los gráficos en lazo cerrado y con la respuesta temporal esperada para los diferentes valores de K

Figura 5 - Ubicación de los polos de lazo cerrado para  $K=20, 55, 200$  y  $560$   
[-10.3 -3.05 -0.636] [-10.8 -1.61+1.57\*j] [-12.1 -0.952-3.95\*j] [-0.952+3.95\*j] [6.32\*j] -6.32\*j] -14.0]

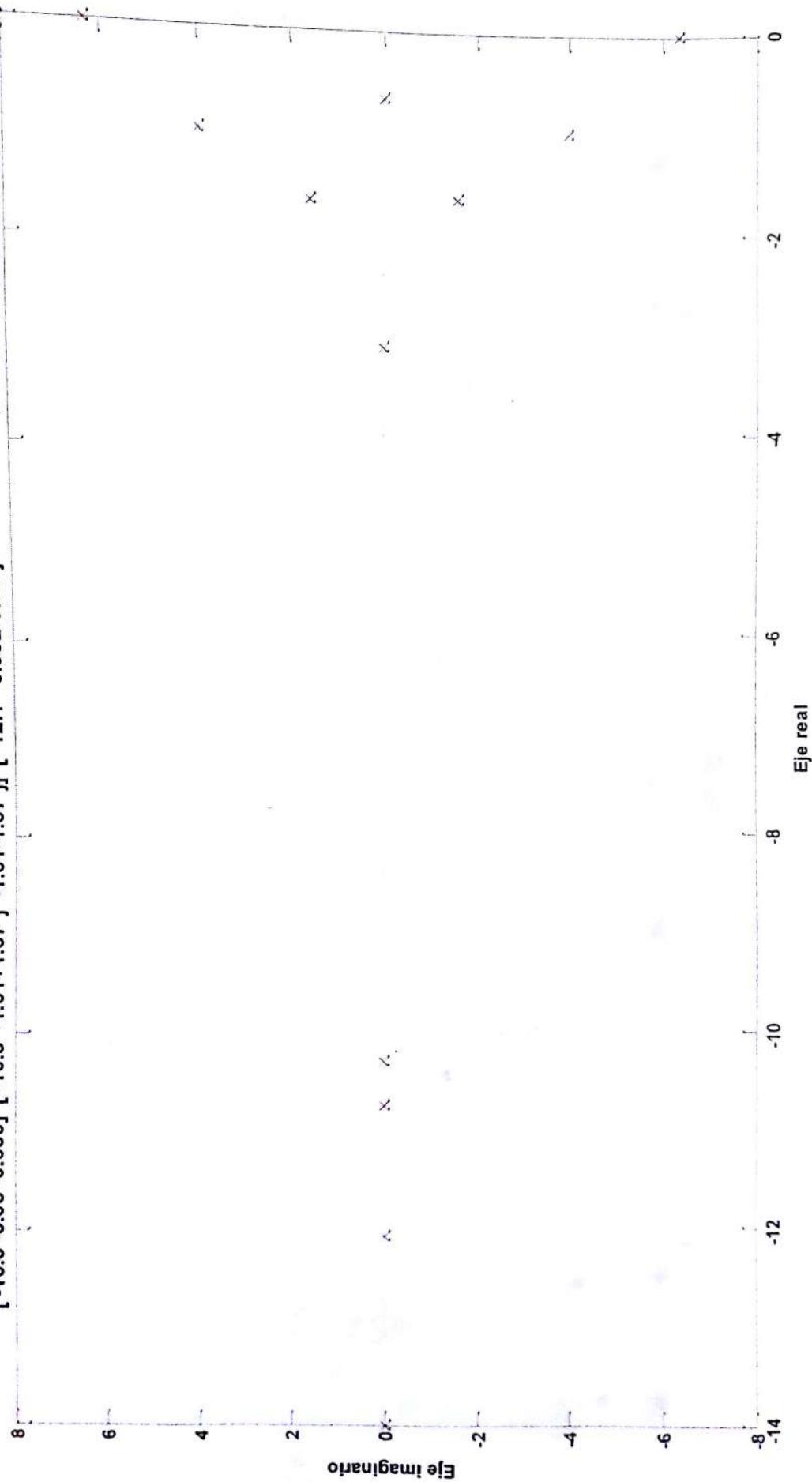
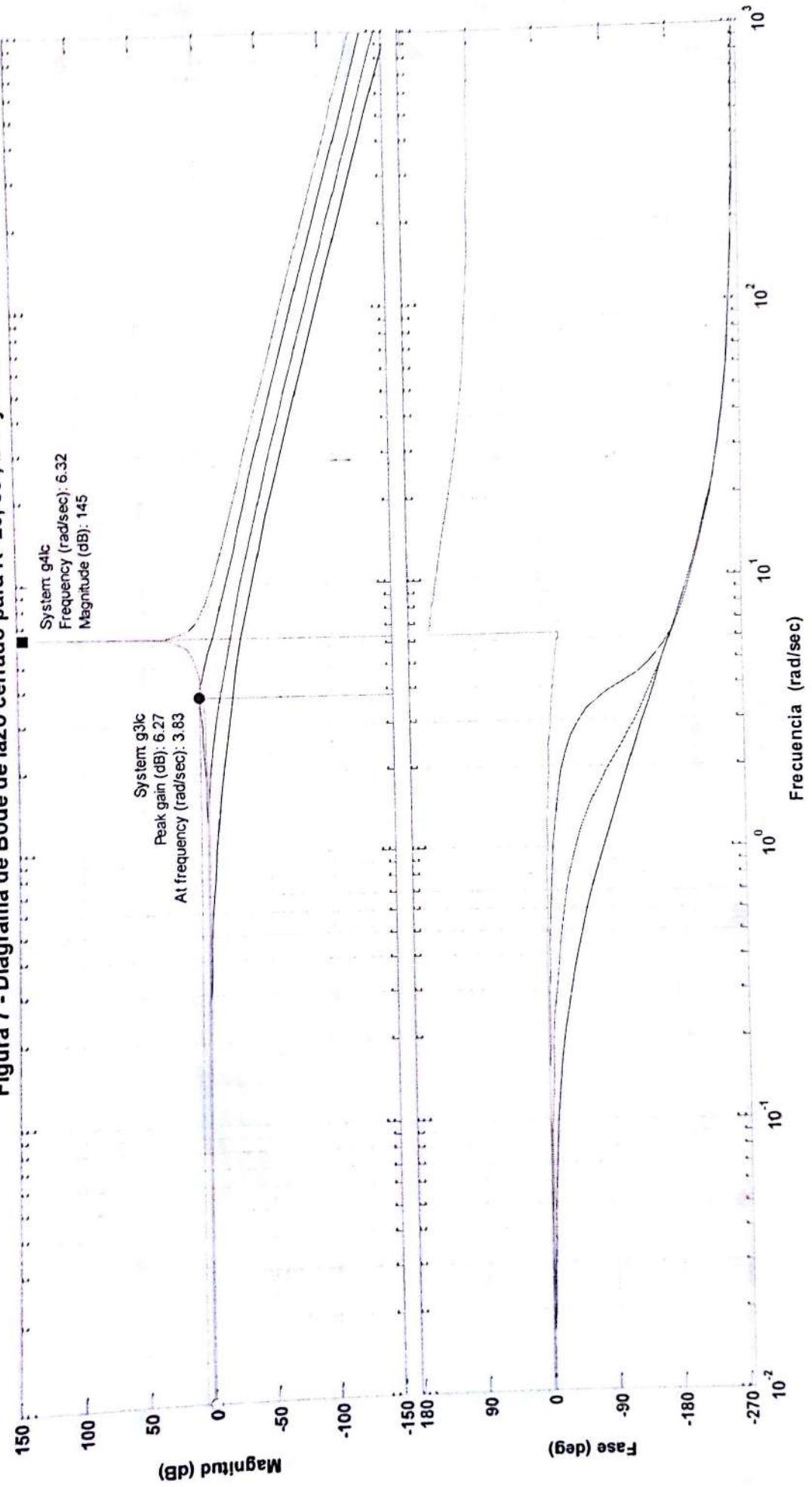
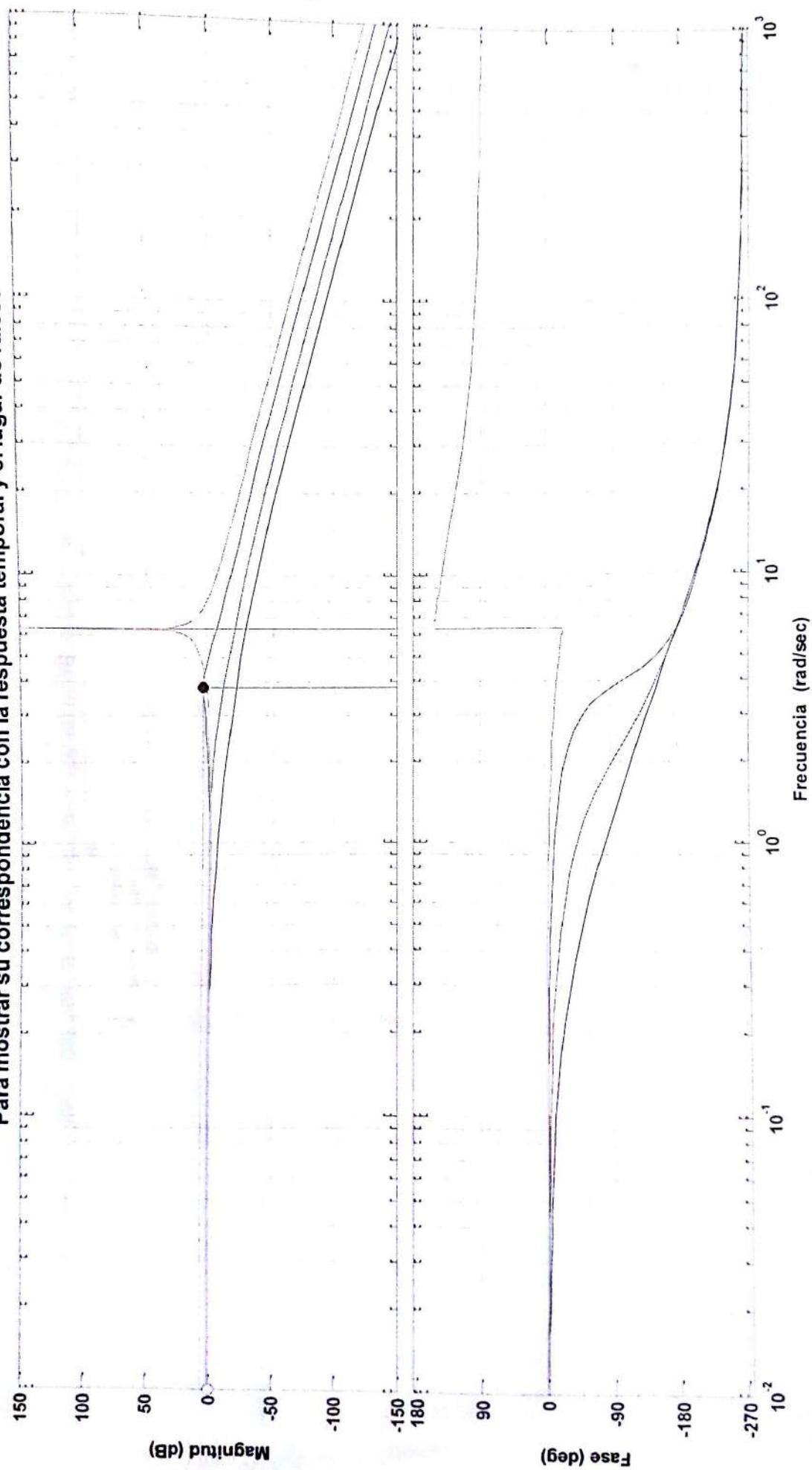


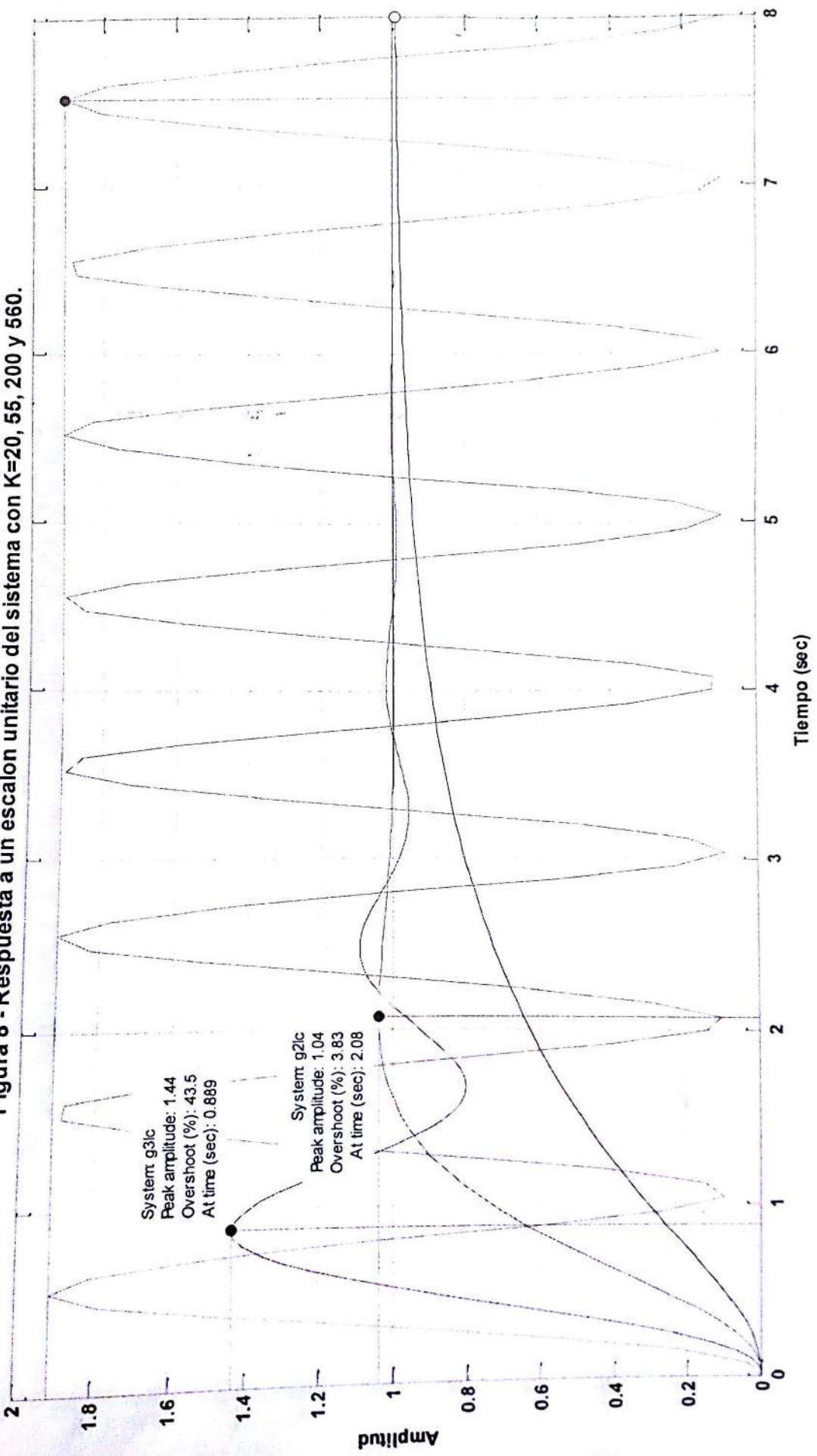
Figura 7 - Diagrama de Bode de lazo cerrado para K=20, 55 , 200 y 560.



**Figura 7a - Diagrama de Bode de lazo cerrado para K=20, 55, 200 y 560.**  
**Para mostrar su correspondencia con la respuesta temporal y el lugar de raíces**

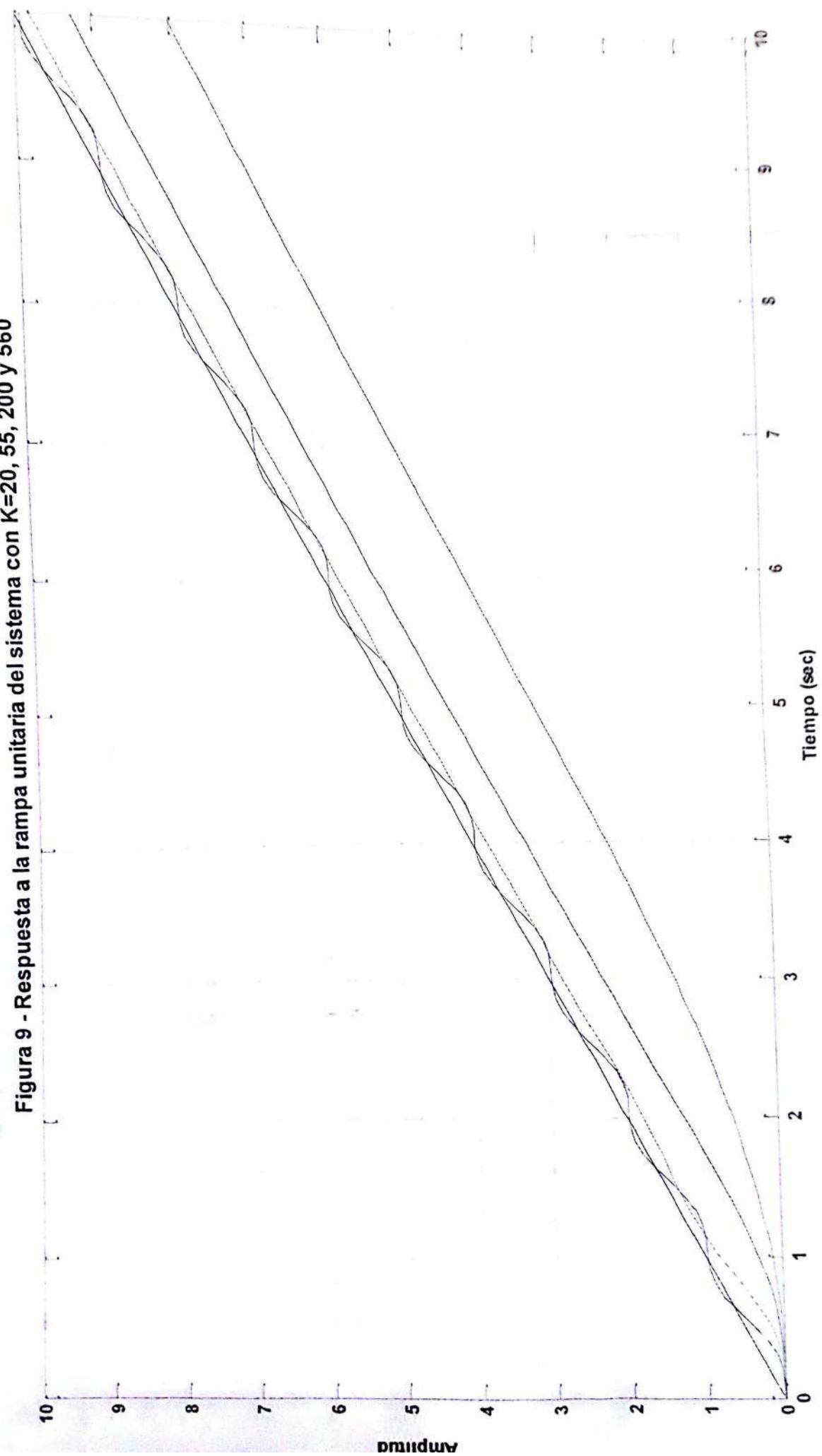


**Figura 8 - Respuesta a un escalón unitario del sistema con  $K=20, 55, 200$  y  $560$ .**



Corroborar los errores en estado estacionario para las diferentes K

Figura 9 - Respuesta a la rampa unitaria del sistema con  $K=20, 55, 200$  y  $560$



**Figura 10 - Respuesta a la rampa unitaria del sistema con  $K=560$  (oscilador)**  
**Para mostrar que al incrementar  $K$  para disminuir el error el sistema se hace inestable**

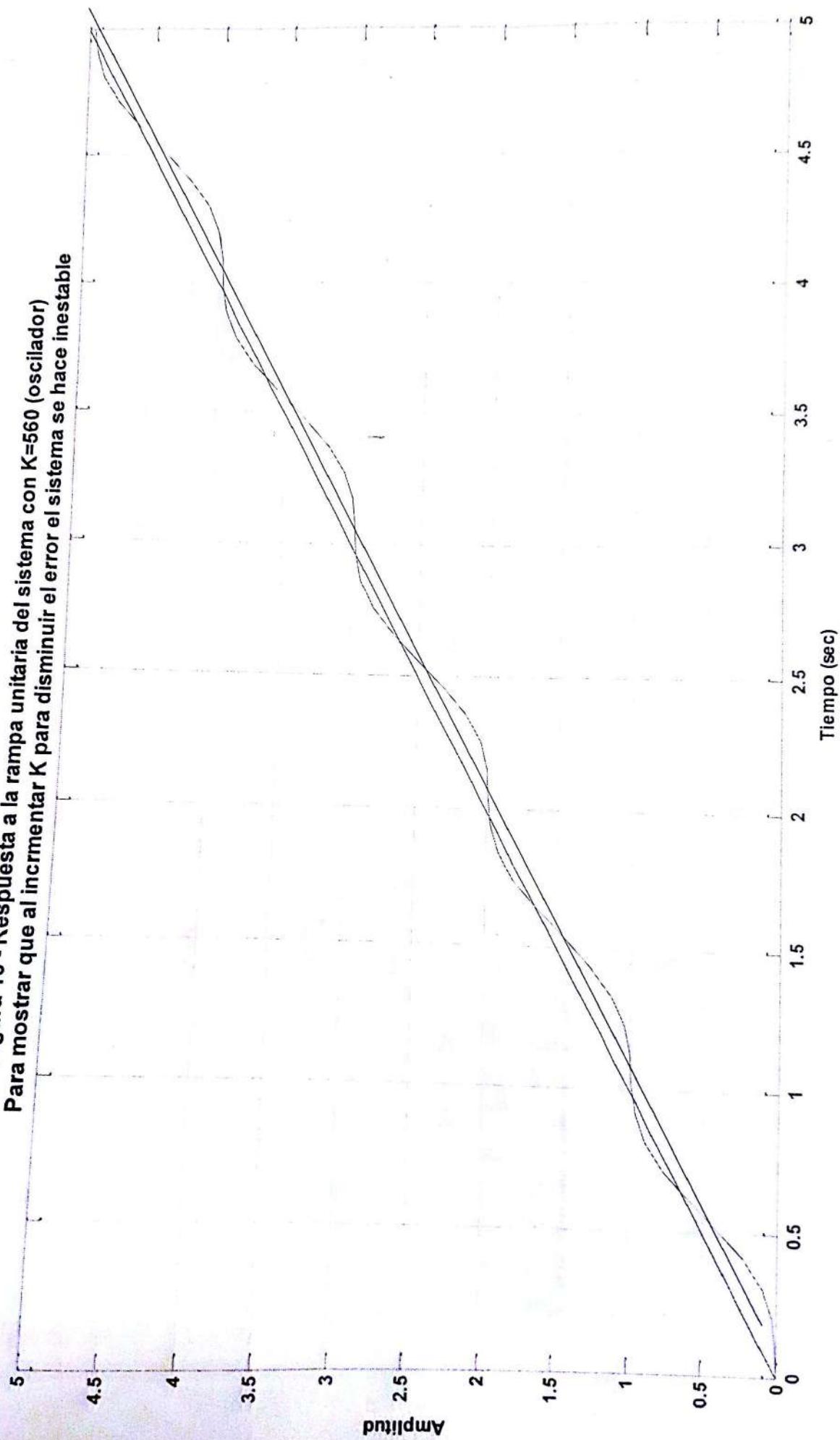


Figura 3a - Diagrama de Bode de lazo abierto para  $K=20, 55, 200$  y  $560$

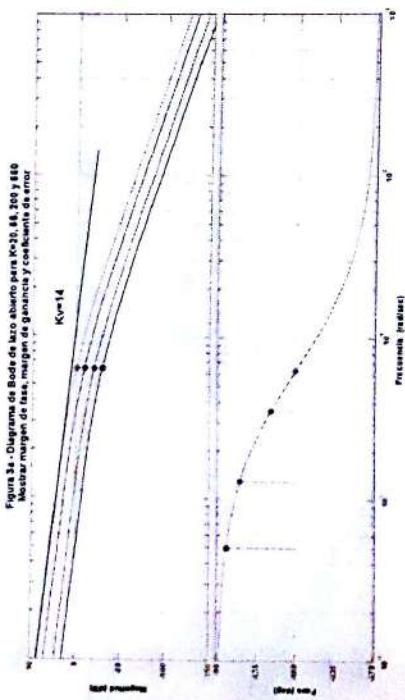


Figura 3b - Diagrama de Nyquist de la LTIA QES con ganancias  $K=20, 55, 200$  y  $560$

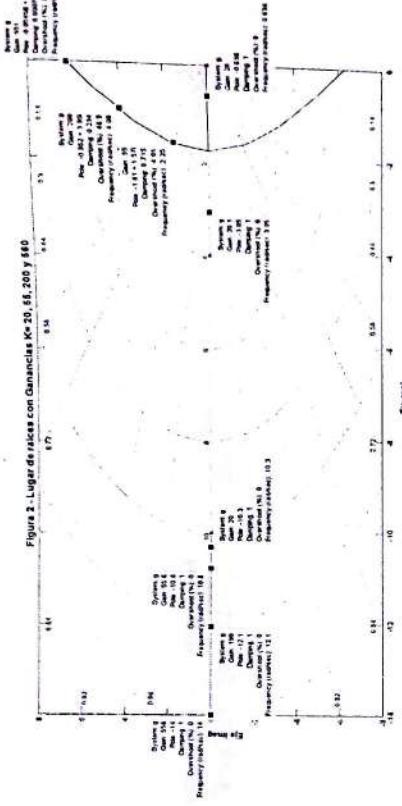
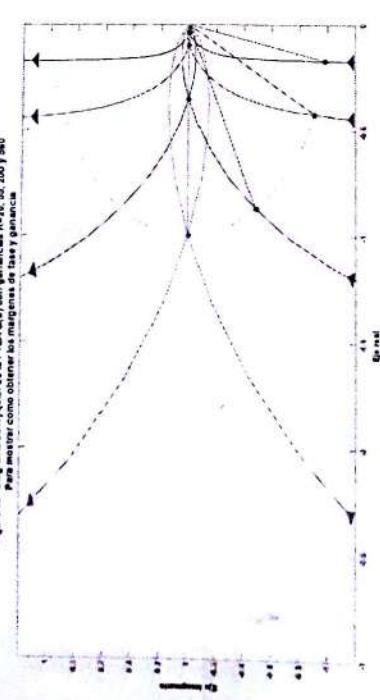


Figura 2 - Lugar de raíces con Ganancias  $K=20, 55, 200$  y  $560$

Figura 3 - Respuesta a un escalon unitario del sistema con  $K=20, 55, 200$  y  $560$ .

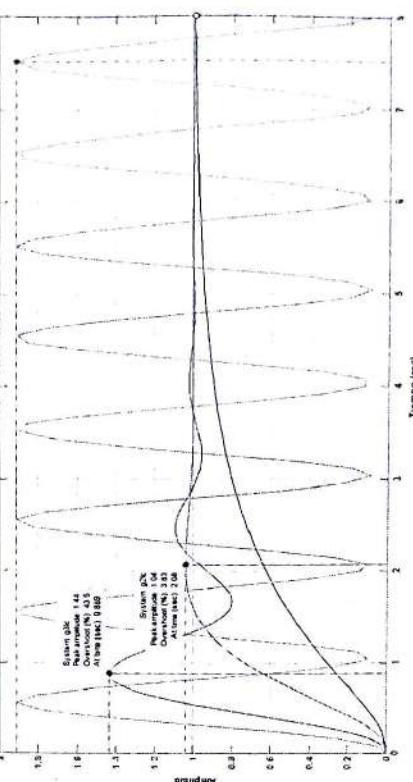


Figura 4 - Respuesta a la rampa unitaria del sistema con  $K=20, 55, 200$  y  $560$ .

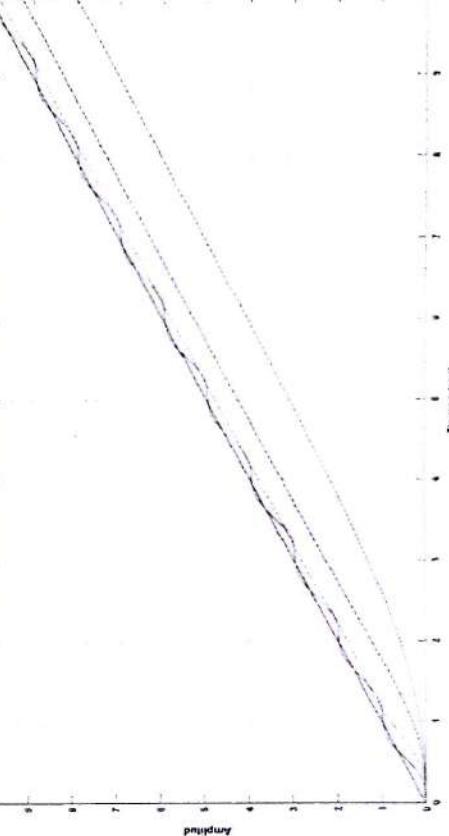
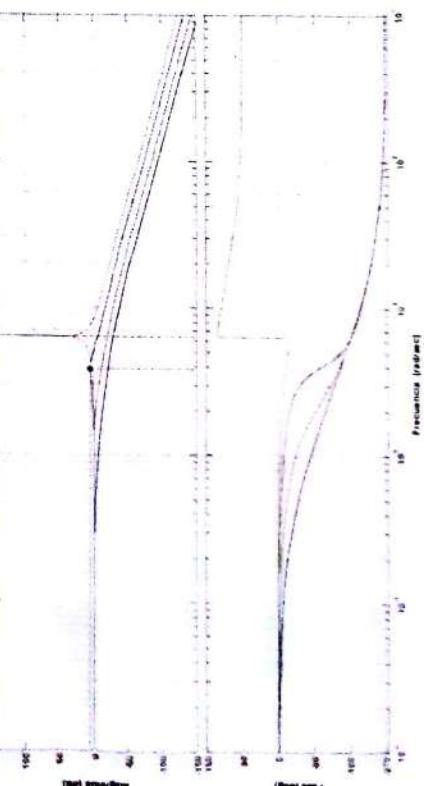


Figura 5 - Diagrama de Bode de lazo cerrado para  $K=20, 55, 200$  y  $560$ . Para notar su correspondencia con la respuesta temporal y el lugar de raíces.



## ENTENDIENDO LOS OBSERVADORES DE ESTADO

### INTRODUCCIÓN

En el área de los sistemas de control, muchas veces es complicado conocer (observar - medir) el valor de uno o algunos de los estados de un sistema lineal. Cuando ésta es la situación, pueden utilizarse los denominados *observadores de estado*, que no son otra cosa que algoritmos de control que permiten realizar *estimaciones* del valor del vector de estado del sistema original. Estas *estimaciones* u *observaciones* pueden ser luego empleadas (entre otras cosas) para reemplazar los valores reales de los estados del sistema y obtener la matriz de realimentación del vector de estado que permita asignar los polos de lazo cerrado del sistema en las posiciones deseadas.

### TIPOS:

Existen 2 tipos de observadores: observadores de estado de orden completo, y observadores de estado de orden reducido u orden mínimo.

- Los observadores de estado (en adelante tan solo se usará la designación observadores) de orden completo, son aquellos utilizados para observar o estimar TODOS los estados de un sistema.
- Los observadores de orden Reducido, son aquellos utilizados para observar o estimar solamente uno o algunos estados de un sistema.

### OBSERVADOR DE ORDEN COMPLETO

Dado un sistema de control, de entrada única y salida única, tal como el que se muestra en la **Figura 1**, representado por las ecuaciones dinámicas (Ecuación de estado y ecuación de salida) siguientes

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{Ecuación de estado}) \quad (1)$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{Ecuación de salida}) \quad (2)$$

donde:

$x$	Vector de estado ( $n \times 1$ )
$u$	Variable de control
$y$	Variable de salida
$A$	Matriz ( $n \times n$ )
$B$	Matriz ( $n \times 1$ )
$C$	Matriz ( $1 \times n$ )
$D$	Matriz (escalar)

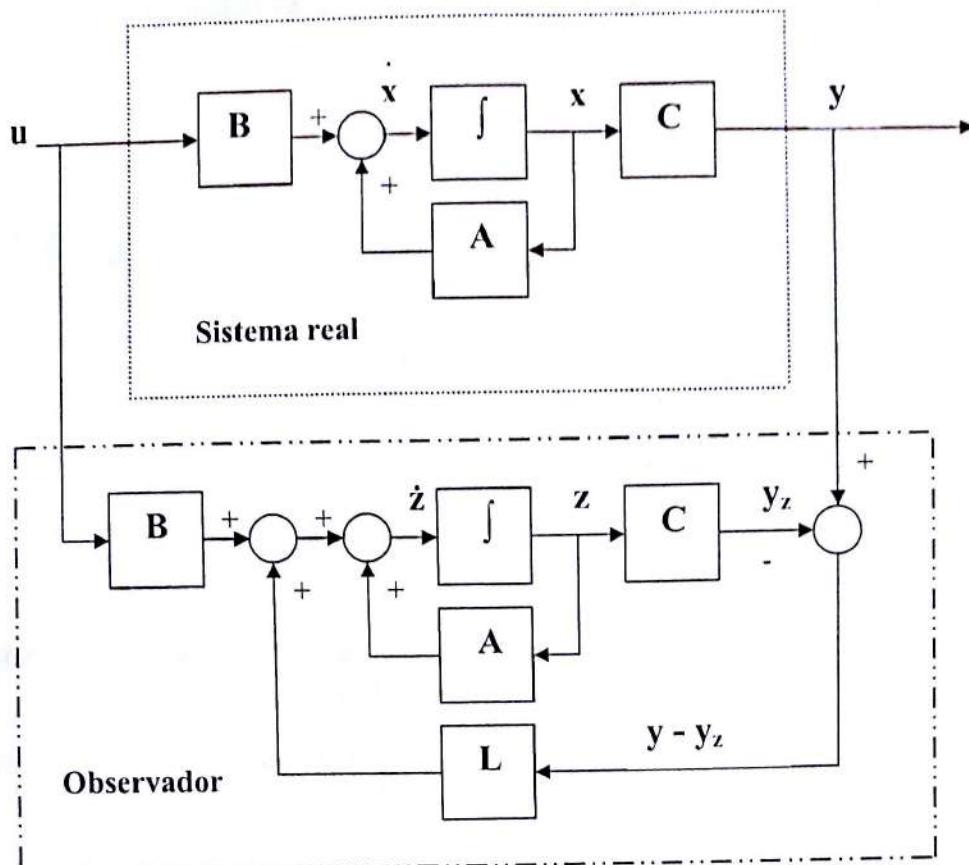


Figura 1

Se pueden estimar los estados del sistema original, mediante la utilización de un observador de estado, que se caracteriza con la siguiente expresión:

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - y_z) \quad [3]$$

$$y_z = Cz \quad [4]$$

donde:

**L** Vector de ganancias que permite la observación de estados ( $1 \times n$ )

**z** Vector de estados estimados

**y<sub>z</sub>** Salida estimada

Es importante destacar que las matrices **A**, **B**, **C**, **D** son las mismas definidas tanto para el sistema real como para el sistema observador. En el desarrollo que sigue, se considera que la matriz **D** es cero.

Se designa como error de observación al término diferencia entre los estados originales y los estados estimados  $e = (x - z)$ . Al término diferencia entre la salida original y la salida estimada afectada por el factor **L**,  $L(y - y_z)$  se lo denomina factor de corrección.

De la **Figura 1**, se pueden obtener las ecuaciones que permiten calcular el error de observación, diferencia entre los estados reales (vector  $\mathbf{x}$ ) y los estados observados o estimados (vector  $\mathbf{z}$ ).

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) - (\mathbf{Az} + \mathbf{Bu} + \mathbf{L}(y - y_s)) \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{Az} - \mathbf{L}(y - y_s) \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{L}(\mathbf{Cx} - \mathbf{Cz}) \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{LC}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (9)$$

Dado que el error de observación esta definido como la diferencia entre el estado real y el estado estimado, entonces se tendrá:

$$e = \mathbf{x} - \mathbf{z} \quad (10)$$

$$\dot{e} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} \quad (11)$$

$$\dot{e} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \cdot e \quad (12)$$

A partir de esta expresión se puede conocer el comportamiento dinámico y la estabilidad del sistema. Si la matriz  $|\mathbf{A}-\mathbf{LC}|$  es estable, entonces el observador hará bien su trabajo, y dada cualquier condición inicial, el sistema tenderá a un error nulo cuando a medida que transcurre el tiempo.

La elección de valores adecuados para el vector de observabilidad  $\mathbf{L}$ , permitirá que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y lo suficientemente rápido para tender al valor de cero.

La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica del error se determina mediante los autovalores de la matriz  $|\mathbf{A}-\mathbf{LC}|$ , dados por el polinomio característico

$$|sI - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = 0. \quad (13)$$

Existe una condición necesaria, la cual consiste en que el sistema obtenido sea estable y completamente controlable y observable.

### Ejemplo:

Dado un sistema expresado mediante la siguiente representación en el espacio de estado,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u & (14) \\ \mathbf{y} &= [0 \ 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

se pretende obtener un observador de estado de orden completo, que permita estimar los valores de los estados del sistema original.

Respuesta

Dado que el sistema es de orden 2, se propone un observador de estados de orden completo de orden 2, y se lo define mediante la siguiente expresión:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

El polinomio característico del sistema observador estará dado por:

$$[sI - A + LC] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & L_1 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 2 + L_1 \\ -1 & s + 4 + L_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[sI - A + LC] = s(s + 4 + L_2) + (2 + L_1) \quad (19)$$

$$[sI - A + LC] = s^2 + (4 + L_2)s + (2 + L_1) \quad (20)$$

Para que en un sistema de segundo orden, las raíces sean con parte real negativa, el polinomio debe ser completo en S y todos sus términos del mismo signo, razón por la cual se deberán elegir los valores de  $L_1$  y de  $L_2$  tal que

$$L_1 > -2$$

$$L_2 > -4$$

Si se toman esos valores para  $L_1$  y de  $L_2$ , se asegurará la estabilidad asintótica del observador. Pero dado que hay infinitos pares de valores de  $L_1$  y  $L_2$  que cumplen esa condición, se deberá elegir una que produzca una respuesta adecuada en velocidad y estabilidad relativa del observador.

Si se desea que el comportamiento del error del sistema funcione adecuadamente, se deben ubicar los polos de tal manera que sean bastante más rápidos (5 a 10 veces mayor que la parte real de los polos dominantes del sistema original) y con una adecuada estabilidad relativa, (que tiene que ver con la relación de coeficientes de amortiguamiento  $0.5 < \zeta < 1$ ).

Para ello se deben determinar los valores de los polos de lazo cerrado (autovalores) del sistema original, que en el caso del ejemplo que se trata se determinan considerando de (21)

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

El determinante esta dado por el producto  $s(s + 4) + 2 = 0$ ;  $s^2 + 4s + 2 = 0$  con lo que se obtienen los autovalores de la matriz A, ubicados en  $-2 - 1,41j$  y en  $-2 + 1,41j$ .

Una elección adecuada podría ser que los polos del observador se ubiquen en

$s = -20 + 20j$  y en  $-20 - 20j$ . (Parte real 10 veces mas a la izquierda que los polos del sistema original, con un decaimiento que tiene la forma  $e^{-20t}$  y una relación de coeficientes de amortiguamiento  $\zeta = 0,707$  ( $\beta = 45^\circ$ ).

Para cumplir con estas condiciones el polinomio característico deseado para el observador será :

$$s^2 + 40s + 800 \quad (22)$$

y por lo tanto los valores de  $L_1$  y de  $L_2$  se obtienen de la ecuación

$$s^2 + (4 + L_2)s + 2 + L_1 = s^2 + 40s + 800 \quad (23)$$

por inspección, igualando términos del mismo orden queda

$$4 + L_2 = 40 \rightarrow L_2 = 36 \quad (24)$$

$$2 + L_1 = 800 \rightarrow L_1 = 798 \quad (25)$$

Ahora bien, para entender como se forma el observador de estados completo, es conveniente realizar la presentación del sistema en variables de estado. La ecuación de estado del sistema observador esta dada por

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_z) \quad (26)$$

A partir de esta expresión se puede conocer el comportamiento dinámico y la estabilidad del sistema, si la matriz  $|\mathbf{A}-\mathbf{LC}|$  es estable, entonces el observador hará bien su trabajo, y dada cualquier condición inicial, el sistema tenderá a un error cero.

La elección de valores adecuados para el vector de observabilidad L, permitirá que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y lo suficientemente rápido para tender a un valor de cero.

La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica del error se determina mediante los autovalores de la matriz  $|\mathbf{A}-\mathbf{LC}|$ , expresados en (26.1)

$$\text{Ecuación Característica } |sI - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = 0 \quad (26.1)$$

Existe una condición necesaria, la cual consiste en que el sistema obtenido sea estable y completamente controlable y observable.

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & 2 \\ -1 & s+4 \end{vmatrix} \quad (21)$$

El determinante esta dado por el producto  $s(s + 4) + 2 = 0$ ;  $s^2 + 4s + 2 = 0$  con lo que se obtienen los autovalores de la matriz A, ubicados en  $-2 - 1,41j$  y en  $-2 + 1,41j$ .

Una elección adecuada podría ser que los polos del observador se ubiquen en

$s = -20 + 20j$  y en  $-20 - 20j$ . (Parte real 10 veces mas a la izquierda que los polos del sistema original, con un decaimiento que tiene la forma  $e^{-20t}$  y una relación de coeficientes de amortiguamiento  $\zeta = 0,707$  ( $\beta = 45^\circ$ ).

Para cumplir con estas condiciones el polinomio característico deseado para el observador será :

$$s^2 + 40s + 800 \quad (22)$$

y por lo tanto los valores de  $L_1$  y de  $L_2$  se obtienen de la ecuación

$$s^2 + (4 + L_2)s + 2 + L_1 = s^2 + 40s + 800 \quad (23)$$

por inspección, igualando términos del mismo orden queda

$$4 + L_2 = 40 \rightarrow L_2 = 36 \quad (24)$$

$$2 + L_1 = 800 \rightarrow L_1 = 798 \quad (25)$$

Ahora bien, para entender como se forma el observador de estados completo, es conveniente realizar la presentación del sistema en variables de estado. La ecuación de estado del sistema observador esta dada por

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_z) \quad (26)$$

A partir de esta expresión se puede conocer el comportamiento dinámico y la estabilidad del sistema, si la matriz  $|\mathbf{A}-\mathbf{LC}|$  es estable, entonces el observador hará bien su trabajo, y dada cualquier condición inicial, el sistema tenderá a un error cero.

La elección de valores adecuados para el vector de observabilidad L, permitirá que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y lo suficientemente rápido para tender a un valor de cero.

La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica del error se determina mediante los autovalores de la matriz  $|\mathbf{A}-\mathbf{LC}|$ , expresados en (26.1)

$$\text{Ecuación Característica } |sI - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = 0 \quad (26.1)$$

Existe una condición necesaria, la cual consiste en que el sistema obtenido sea estable y completamente controlable y observable.

## DISEÑO DE OBSERVADORES DE ORDEN COMPLETO

### a) METODO DE DISEÑO POR IGUALACION DE COEFICIENTES.

Analizando la respuesta del ejemplo anterior se puede observar que los valores que toman  $L_1$  y  $L_2$  están condicionados por las raíces del polinomio, las cuales a su vez están condicionadas por las características con que se desea cuente el sistema, por tanto se pueden elegir raíces de tal modo de poder controlar la respuesta del sistema en lazo cerrado.

Por lo tanto se pueden asumir valores para dichas raíces, a los que se denominaran como  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de modo tal que el polinomio tenga una respuesta estable. Luego por simple equivalencia de términos se puede hallar el valor de las incógnitas.

#### Ejemplo:

Dado el polinomio característico del ejemplo anterior:  $s^2 + (4+L_2)s + (2+L_1)$ , encontrar el valor de  $L_1$  y  $L_2$  si se quiere que los polos deseados del sistema se ubiquen en -4 y -3.

#### Solución.

Las raíces del polinomio son  $\mu_1 = -4$  y  $\mu_2 = -3$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 4)(s + 3) = s^2 + 7s + 12$$

Luego por equivalencia  $|sI - A + LC| = s^2 + 7s + 12$

Es decir,  $s^2 + (4 + L_2)s + (2 + L_1) = s^2 + 7s + 12$

donde 
$$\begin{cases} s^2 = s^2 \\ (4 + L_2)s = 7s \rightarrow L_2 = 3 \\ (2 + L_1) = 12 \rightarrow L_1 = 10 \end{cases}$$

Se puede generalizar la metodología seguida anteriormente, de la siguiente manera:

Si se tiene que  $[\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n]$  son los autovalores deseados para la matriz del observador  $|A-LC|$ , estos conforman el polinomio característico:

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)\dots(s-\mu_n)$$

Este polinomio se iguala al polinomio característico original  $|sI-A+LC|$ , creándose una equivalencia entre términos:

$$|sI-A+LC| = (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)\dots(s-\mu_n)$$

Resolviendo la equivalencia se podrá encontrar el valor del vector L.

**NOTA:** Este método está restringido a sistemas de hasta 3<sup>er</sup> orden. **El sistema debe estar expresado en la forma canónica observable.**

Es aconsejable que los polos del observador sean de 5 a 10 veces mayores (más negativos) que los polos del controlador por realimentación de estados, pero sin salirse de la región de estabilidad dada por el lugar geométrico de las raíces. La elección de los polos deseados van a determinar las características de la respuesta obtenida, por lo que puede existir un conjunto infinito de vectores L como solución, de las cuales solo un limitado número de soluciones cumplen con las necesidades requeridas para el sistema (como por ejemplo: sobreimpulso, velocidad de respuesta, etc. del sistema estimado), por lo que se aconseja probar, mediante simulación, la respuesta del sistema a diferentes valores de polos escogidos.

### b). METODO DE DISEÑO POR LA FORMULA DE ACKERMAN

La formula de Ackerman aplicada al diseño de observadores de estado, esta dada por:

$$L = \Phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

En donde  $\Phi(A)$  es equivalente a  $\Phi(s)$ , que es el polinomio característico deseado, pero en vez de la "s" se coloca la matriz "A". (Recordar que la matriz A es solución de su ecuación característica). Teorema de Sylvester.

#### Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en  $-3+j$  y  $-3-j$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

#### Solución.

$$\text{Si } \phi(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2) = (s+3-j)(s+3+j) = s^2 + 6s + 10$$

$$\text{por lo tanto } \phi(A) = A^2 + 6A + 10I$$

$$\begin{aligned}
 L &= (A^2 + 6A + 10I) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 L &= \left( \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \right) \times \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
 L &= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 L &= \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### c). METODO DE DISEÑO COMPLETO

1º) Determinar la controlabilidad y la observabilidad del sistema

$$\text{Controlabilidad: } W_C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$\text{Observabilidad: } W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [C^T \ A^T C^T \ A^{T^2} C^T \ \dots \ A^{T^{n-1}} C^T]$$

2º) Calcular el polinomio característico original  $|sI-A|$ , el cual está dado por :

$$|sI-A| = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

3º) Es conveniente trabajar con las ecuaciones de estado en su forma canónica observable, si no se encuentra en esta forma, se debe determinar una matriz de transformación para llevarla a esta forma, la cual se define como:

$$Q = (W \times W_O)^{-1}$$

En donde  $W_O$  es la matriz de observabilidad, y  $W$  se define como:

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-3}$ , los coeficientes del polinomio característico original  $|sI-A|$ .

4º) Determinar el polinomio característico deseado a partir de  $(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)\dots(s-\mu_n)$ , donde  $\mu_i$  es un polo deseado, obteniéndose:

$$s^n + b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_{n-1}s + b_n$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

**Solución.**

Nuevo orden para el sistema observado:  $3 - 1 \rightarrow i = 2$

Nuevas matrices del sistema:

$$\begin{array}{lcl} D & \rightarrow & A_{aa} \\ C & \rightarrow & A_{ab} \\ B & \rightarrow & A_{ba} \\ A & \rightarrow & A_{bb} \end{array}$$

$$A_{aa} = [0] \quad A_{ab} = [1 \ 0] \quad A_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

**a). METODO COMPLETO**

Controlabilidad

$$W_{cr} = [Aba \ AbB \ ABB] = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_c) = 2$$

$$\det(W_c) = -36$$

∴ El sistema es controlable

Observabilidad

$$W_{or} = \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab} \cdot A_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_o) = 2$$

$$\det(W_o) = 1$$

∴ El sistema es observable

Polinomio característico original

$$[sI - A] \equiv [sI - Abb] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$[sI - Abb] = s^2 + 6s + 11 \equiv s^2 + a_1s + a_2$$

$$\Rightarrow a_1 = 6 \quad a_2 = 11$$

$$Q = (W \times W_o)^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [sI - A] &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 1 & s+2 \end{bmatrix} \\
 [sI - A] &= s(s^2 + 2s + 1) + 2 \\
 [sI - A] &= s^3 + 2s^2 + s + 2 \quad \equiv \quad s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \\
 \Rightarrow a_1 &= 2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \\
 3^\circ) \quad Q &= (W \times W_o)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 W \times W_o &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4^\circ) \quad (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \\
 &= (s + 5)(s + 2 + j)(s + 2 - j) \\
 &= (s + 5)(s^2 + 4s + 5) \\
 &= s^3 + 9s^2 + 25s + 25 \quad \equiv \quad s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3 \\
 \Rightarrow b_1 &= 9 \quad b_2 = 25 \quad b_3 = 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5^\circ) \quad L &= Q \times \begin{bmatrix} b_3 - a_3 \\ b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 23 \\ 24 \\ 7 \end{bmatrix} \\
 L &= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

#### d). DISEÑO MEDIANTE SOFTWARE DE APLICACIÓN

Se puede hacer uso de software específico, para lo cual se emplea el comando **acker** o el comando **place**.

Dado el sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Dx$ , y un vector de polos deseados:  $P = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n]$

Se puede obtener un observador de estados utilizando:

$L = \text{place}(A', B', P)'$  o también  
 $L = \text{acker}(A', B', P)$

**Ejemplo:**

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados  $L$ , si se quiere que los polos deseados se ubiquen en  $-2$ ,  $-1+j$  y  $-1-j$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [2 \ 0 \ 0]x$$

Solución.

```
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -3 -2 -1];
>> C = [2 0 0];
>> P = [-2 -1+j -1-j];
```

```
>> L = acker(A',C',P)'
```

```
L =
1.5000
0.5000
-3.0000
```

```
>> L = place(A',C',P)'
```

```
L =
1.5000
0.5000
-3.0000
```

**Ejemplo:**

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados  $L$ , aplicando los 4 métodos antes descritos, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en  $-2$ ,  $-3+0.5j$  y  $-3-0.5j$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

Solución.

## a) DISEÑO UTILIZANDO EL METODO COMPLETO

Controlabilidad

$$W_C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_C) = 3$$

$$\det(W_C) = 16$$

∴ El sistema es controlable

Observabilidad

$$W_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_O) = 3$$

$$\det(W_O) = -1$$

∴ El sistema es observable

Polinomio característico original

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 \\ -1 & s & 1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = s(s^2 + 2s + 1) + 4$$

$$[sI - A] = s^3 + 2s^2 + s + 4 \quad \equiv \quad s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 4$$

$$Q = (W \times W_O)^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \times W_O = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$$\begin{aligned} & (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \\ &= (s + 2)(s + 3 + 0.5j)(s + 3 - 0.5j) \\ &= (s + 2)(s^2 + 6s + 9.25) \\ &= s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5 \quad \equiv \quad s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3 \\ &\Rightarrow b_1 = 8 \quad b_2 = 21.25 \quad b_3 = 18.5 \end{aligned}$$

Vector Observador

$$\begin{aligned} L = Q \times \begin{bmatrix} b_3 - a_3 \\ b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix} \\ L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### b). METODO DE DISEÑO POR IGUALACION DE COEFICIENTES

$$[sI - A + LC] = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 \\ -1 & s & 1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 + L_1 \\ -1 & s & 1 + L_2 \\ 0 & -1 & s + 2 + L_3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = s(s^2 + sL_3 + 2s + 1 + L_2) + (4 + L_1)$$

$$[sI - A + LC] = s^3 + (2 + L_3)s^2 + (1 + L_2)s + (4 + L_1)$$

Polinomio deseado

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) = (s + 2)(s + 3 + 0.5j)(s + 3 - 0.5j) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$$

Luego por equivalencia  $s^3 + (L_3)s^2 + (1 + L_2)s + (4 + L_1) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$

donde  $\begin{cases} (2+L_3)s^2 = 8s^2 \rightarrow L_3 = 6 \\ (1 + L_2)s = 21.25s \rightarrow L_2 = 20.25 \\ (4 + L_1) = 18.5 \rightarrow L_1 = 14.5 \end{cases}$

### c). METODO DE DISEÑO POR LA FORMULA DE ACKERMAN

$$\text{Si } \phi(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$$

$$\text{por lo tanto } \phi(A) = A^3 + 8A^2 + 21.25A + 18.5I$$

$$\begin{aligned} L &= (A^3 + 8A^2 + 21.25A + 18.5I) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^3 + 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^2 + 21.25 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + 18.5I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} 14.5 & -24 & -33 \\ 20.25 & 8.5 & 32.25 \\ 6 & 8.25 & -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### d). USANDO MATLAB

```
>> A = [0 0 -4; 1 0 -1; 0 1 -2];
>> C = [0 0 1];
>> P = [-2 -3+0.5j -3-0.5j];
```

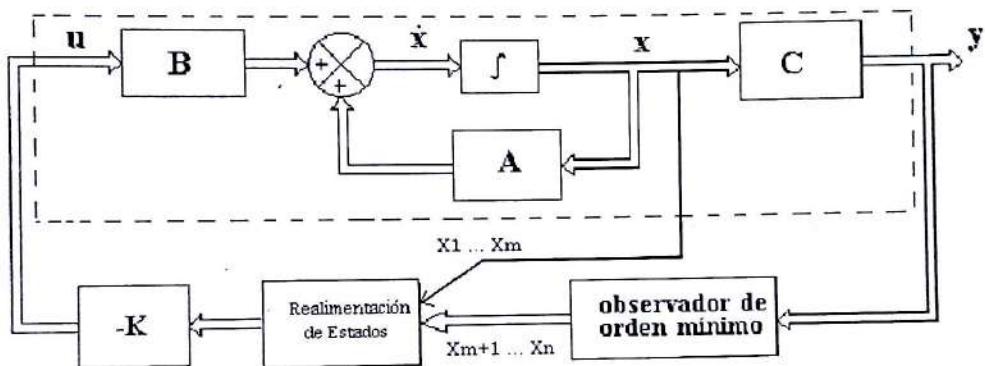
```
>> L = acker(A',C',P)'
L =
14.5000
20.2500
6.0000
```

```
>> L = place(A',C',P)'
L =
14.5000
```

## OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO

En la práctica no todas las variables necesitan ser observadas, habrá algunas que se podrán medir directamente y con buena precisión, por tanto no será necesario un observador que estime todos los estados, sino más bien solo algunos de ellos.

Si se cuenta con un vector de estados  $X$  de dimensión  $(n \times 1)$  del cual  $m$  estados pueden ser medibles, se tendrá que el orden del observador será  $(n-m \times 1)$ .



El vector  $X$  puede ser dividido en 2 vectores:

- $X_a$  que corresponde a los estados medidos, de orden  $(m \times 1)$
- $X_b$  que corresponde a los estados observados, de orden  $(n-m \times 1)$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \\ X_{m+1} \\ X_{m+2} \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$X_1 \dots X_m \rightarrow$  Estados conocidos o medibles  
 $X_{m+1} \dots X_n \rightarrow$  Estados no conocidos que requieren ser observados

Obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_a \\ \dot{X}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} C_a & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de las sub-matrices son:

Aaa	$\rightarrow$	m x m
Aab	$\rightarrow$	m x n-m
Aba	$\rightarrow$	n-m x m
Abb	$\rightarrow$	n-m x n-m
Ba	$\rightarrow$	m x 1
Bb	$\rightarrow$	n-m x 1
Ca	$\rightarrow$	1 x m
Cb	$\rightarrow$	1 x n-m

El sistema queda reducido a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\dot{X}_a &= A_{aa} \cdot X_a + A_{ab} \cdot X_b + B_a \cdot u \\ \dot{X}_b &= A_{ba} \cdot X_a + A_{bb} \cdot X_b + B_b \cdot u\end{aligned}$$

### DISEÑO DE OBSERVADORES DE ORDEN REDUCIDO

En el diseño de observadores de orden completo, el sistema se representa por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Dx$$

En cambio para el diseño de observadores de orden reducido el sistema es descrito por

la Ecuación de Estado:  $\dot{X}_b = A_{ba} \cdot X_a + A_{bb} \cdot X_b + B_b \cdot u$

y por la Ecuación de Salida:  $\dot{X}_a - A_{aa} \cdot X_a - B_a \cdot u = A_{ab} \cdot X_b$

De estos 2 sistemas se pueden establecer una serie de equivalencias:

Observador Orden Completo	Observador Orden Reducido
$\bar{X}$	$\bar{X}_b$
A	$A_{ab}$
$B \cdot u$	$A_{ba} \cdot X_a + B_b \cdot u$
Y	$\dot{X}_a - A_{aa} \cdot X_a - B_a \cdot u$
$\bar{Y}$	$A_{ab} \cdot \bar{X}_b$
C	$A_{ab}$

Cabe mencionar que se busca encontrar un vector de observadores L, de orden (n-m x 1)

En el diseño de observadores de orden completo se determinó la siguiente ecuación:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(y - \bar{y})$$

La cual puede llevarse a su correspondiente equivalencia para el caso de observadores de orden reducido, obteniéndose la siguiente representación:<sup>(\*)</sup>

$$\dot{\bar{X}}b = (Abb - L \cdot Aab) \cdot \bar{X}b + Aba \cdot Xa + Bb \cdot u + L \cdot (Xa - Aaa \cdot Xa - Ba \cdot u)$$

y la Ecuación del Error esta dada por:  $\dot{e} = (Abb - L \cdot Aab) \cdot e$

La Ecuación Característica para el observador es la siguiente:

$$|sI - Abb + L \cdot Aab| = s^i + a_1 s^{i-1} + a_2 s^{i-2} + \dots + a_{i-1} s + a_i = 0$$

donde i equivale al orden de L, es decir (n-m)

## METODOLOGÍA DE DISEÑO

Se pueden aplicar los mismos métodos usados para hallar los observadores de orden completo, pero se debe hacer variación la cual consiste en reemplazar los índices: en vez de considerar el índice "n", se debe considerar el índice "i". Por ejemplo si un sistema es de orden 4 y tiene UN estado medible, entonces  $m=1$ , y por tanto el sistema observado será de orden 3 ( $n - m = 4 - 1 = 3 = i$ ).

El otro cambio que hay que hacer es realizar una equivalencia entre las matrices, dada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} Aaa & \rightarrow & D \\ Aab & \rightarrow & C \\ Aba & \rightarrow & B \\ Abb & \rightarrow & A \end{array}$$

Lo que resta por hacer, es aplicar la misma metodología que para los observadores de orden completo, considerando el nuevo orden del sistema (i) y las nuevas matrices del sistema (Abb, Aba, Aab, Aaa).

### Ejemplo:

Para el siguiente sistema, suponga que el estado  $X_1$  se puede medir con precisión, diseñe el observador de orden reducido L aplicando los 4 métodos antes descritos, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en  $-3+0.5j$  y  $-3-0.5j$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

Solución.

Nuevo orden para el sistema observado:  $3 - 1 \Rightarrow i = 2$

Nuevas matrices del sistema:

$$\begin{array}{lcl} D & \rightarrow & A_{aa} \\ C & \rightarrow & A_{ab} \\ B & \rightarrow & A_{ba} \\ A & \rightarrow & A_{bb} \end{array}$$

$$A_{aa} = [0] \quad A_{ab} = [1 \ 0] \quad A_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

**a). METODO COMPLETO**

Controlabilidad

$$W_{cr} = [A_{ba} \ A_{bb} \cdot A_{ba}] = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_c) = 2$$

$$\det(W_c) = -36$$

$\therefore$  El sistema es controlable

Observabilidad

$$W_{or} = \begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab} \cdot A_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_o) = 2$$

$$\det(W_o) = 1$$

$\therefore$  El sistema es observable

Polinomio característico original

$$[sI - A] \equiv [sI - A_{bb}] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A_{bb}] = s^2 + 6s + 11 \equiv s^2 + a_1s + a_2$$

$$\Rightarrow a_1 = 6 \quad a_2 = 11$$

$$Q = (W \times W_o)^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \times W_{or} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)$$

$$= (s + 2 + 3.4641j)(s + 2 - 3.4641j)$$

$$= s^2 + 4s + 16 \quad \equiv \quad s^2 + b_1s + b_2$$

$$\Rightarrow b_1 = 4 \quad b_2 = 16$$

Vector Observador

$$L = Q \times \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

### b). METODO POR IGUALACION DE COEFICIENTES

$$[sI - A + LC] \equiv [sI - Abb + L \cdot Aab] = (s - \mu_1)(s - \mu_2)$$

$$[sI - Abb + L \cdot Aab] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0]$$

$$[sI - Abb + L \cdot Aab] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} [0 \quad 1]$$

$$[sI - Abb + L \cdot Aab] = \begin{bmatrix} s + L_1 & -1 \\ 11 + L_2 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$[sI - Abb + L \cdot Aab] = (s + L_1)(s + 6) + (11 + L_2)$$

$$[sI - Abb + L \cdot Aab] = s^2 + (6 + L_1)s + (11 + L_2)$$

Polinomio deseado

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 4s + 16$$

Luego por equivalencia

$$6 + L_1 = 4 \quad \rightarrow \quad L_1 = -2$$

$$6 L_1 + 11 + L_2 = 16 \quad \rightarrow \quad L_2 = 17$$

### c). METODO POR FORMULA DE ACKERMAN

$$\text{Si } \phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 4s + 16$$

por lo tanto  $\phi(A) = \phi(Abb) = Abb^2 + 4Abb + 16I$

$$\begin{aligned} L &= (Abb^2 + 4Abb + 16I) \cdot [W_{or}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 22 & 17 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### d). USANDO PROGRAMAS DE APLICACION

```
>> Aaa = [0];
>> Aab = [1 0];
>> Aba = [0; -6];
>> Abb = [0 1; -11 -6];
>> P = [-2 + 3.4641j -2-3.4641j];

>> L = acker(Abb', Aab', P)'
L =
    -2
    17

>> L = place(Abb', Aab', P)'
L =
    -2
    17
```

### OBSERVADOR PARA SISTEMAS MIMO

Hasta el momento se ha visto el diseño de observadores para sistemas SISO (single input, single output), es decir, sistemas que tienen una entrada y una salida. A continuación se presenta el diseño de observadores para el caso de sistemas con varias entradas y varias salidas, denominados sistemas MIMO (multiple input, multiple output).

Un sistema MIMO puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B[u] \\ y &= [C]x + D[u]\end{aligned}$$

donde:

- $x$  Vector de estado ( $n \times 1$ )
- $u$  Señal de control ( $r \times 1$ )
- $y$  Señal de salida ( $q \times 1$ )
- $A$  Matriz ( $n \times n$ )
- $B$  Matriz ( $n \times r$ )
- $C$  Matriz ( $q \times n$ )
- $D$  Matriz ( $q \times r$ )
- $n$  Es el orden del sistema (numero de estados)
- $r$  Es el número de entradas
- $q$  Es el número de salidas

En el diseño de observadores, se ha podido comprobar que el número de entradas que tenga el sistema, no afectará el diseño del observador, puesto que estos datos no intervienen en los cálculos.

En cambio, el número de salidas con que cuente el sistema si afecta el diseño del observador. En este caso se aplica el Principio de Separabilidad Lineal, el cual consiste en separar las salidas y trabajarlas como si fueran provenientes de sistemas distintos.

**Ejemplo:**

Si se tiene la siguiente matriz C (matriz de salidas)  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Esta se podrá descomponer bajo el Principio de Separabilidad Lineal, en dos sub-matrices:  $C_1 = [1 \ 2 \ 3]$  y  $C_2 = [4 \ 5 \ 6]$

Para cada una de estas nuevas matrices se requerirá un observador independiente:  $L_1$  y  $L_2$ , cuyo orden será de ( $n \times 1$ ), en este caso será de ( $3 \times 1$ ) c/u. Así mismo cada observador requiere de “polos deseados”, los cuales pueden ser independientes o también comunes, siempre que cumplan con dar estabilidad al sistema y dependiendo de las condiciones de respuesta que se deseé obtener al estimar cada salida.

**Ejemplo:** Para el siguiente sistema, determinar la matriz de observadores de estados  $L$ , si se quiere que los polos deseados se ubiquen en  $-1$  y  $-2$  para la primera salida, y  $-1-j$  y  $-1+j$  para la segunda salida.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

**Solución:**

$$C_1 = [1 \ 0] \quad C_2 = [0 \ 1]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix} \quad L = [L_1 \quad L_2] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

METODO COMPLETO  
Controlabilidad

Observabilidad

Observadores de estado

$$W_C = [B \quad A \cdot B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_C) = 2$$

$$\det(W_C) = -1$$

∴ El sistema es controlable

$$W_{O_1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_O) = 2$$

$$\det(W_O) = 1$$

∴ El sistema es observable

$$W_{O_2} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(W_O) = 2 ; \det(W_O) = 5$$

∴ El sistema es observable

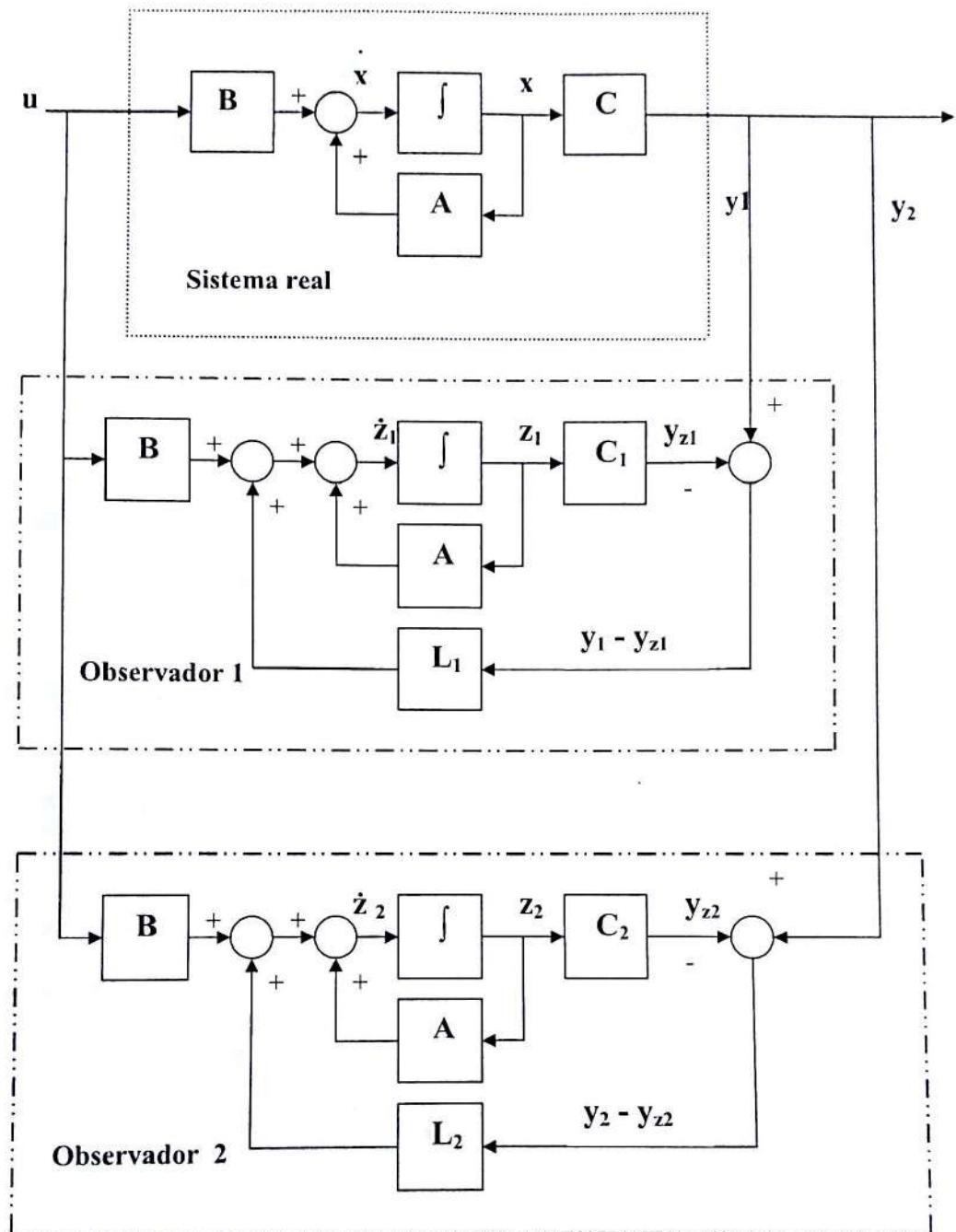


Figura 2

Polinomio característico original

$$\begin{aligned} [sI - A] &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+5 \end{bmatrix} \\ [sI - A] &= s^2 + 5s + 5 \quad \equiv \quad s^2 + a_1s + a_2 \\ &\Rightarrow a_1 = 5 \quad a_2 = 5 \end{aligned}$$

DISEÑO DEL PRIMER OBSERVADOR ( $L_1$ )

$$\begin{aligned} Q &= (W \times W_{O_1})^{-1} \\ W &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ W \times W_{O_1} &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Polinomio característico deseado

$$\begin{aligned} (s - \mu_1)(s - \mu_2) &= (s + 1)(s + 2) \\ &= s^2 + 3s + 2 \quad \equiv \quad s^2 + b_1s + b_2 \\ &\Rightarrow b_1 = 3 \quad b_2 = 2 \end{aligned}$$

Vector Observador

$$\begin{aligned} L_1 &= Q \times \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ L_1 &= \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

DISEÑO DEL SEGUNDO OBSERVADOR ( $L_2$ )

$$\begin{aligned} Q &= (W \times W_{O_2})^{-1} \\ W &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ W \times W_{O_2} &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Polinomio característico deseado

$$\begin{aligned} (s - \mu_1)(s - \mu_2) &= (s + 1+j)(s + 1-j) \end{aligned}$$

$$= s^2 + 4s + 5 \equiv s^2 + b_1 s + b_2$$

$$\Rightarrow b_1 = 2 \quad b_2 = 2$$

Vector Observador

$$L_2 = Q \times \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0.6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Se puede obtener los mismos resultados usando Matlab:

```
>> A = [0 1; -5 -5];
>> B = [0; 1];
>> C = [1 0; 0 1];
>> C1 = C(1,:);
>> C2 = C(2,:);
>> P1 = [-1 -2];
>> P2 = [-1+j -1-j]

>> L1 = acker(A',C1',P1)'
L1 =
    -2.0000
     7.0000

>> L2 = acker(A',C2',P2)'
L2 =
    0.6000
   -3.0000

>> L = [L1 L2];
L =
    -2.0000    0.6000
     7.0000   -3.0000
```

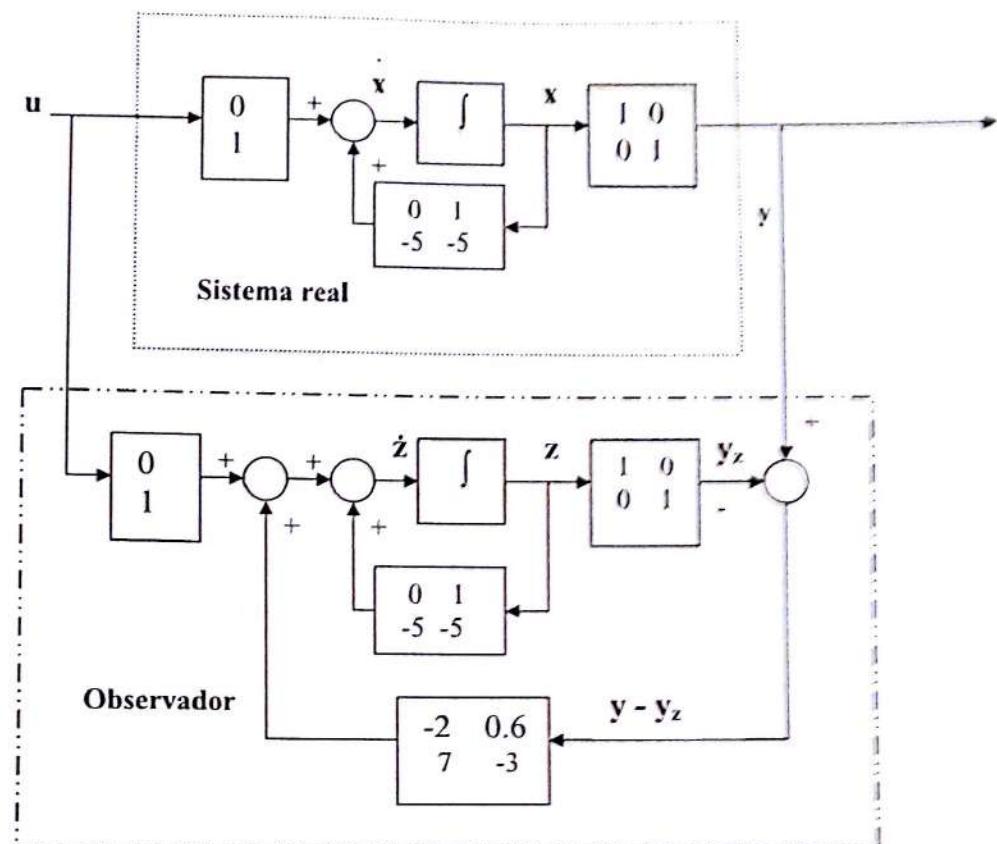
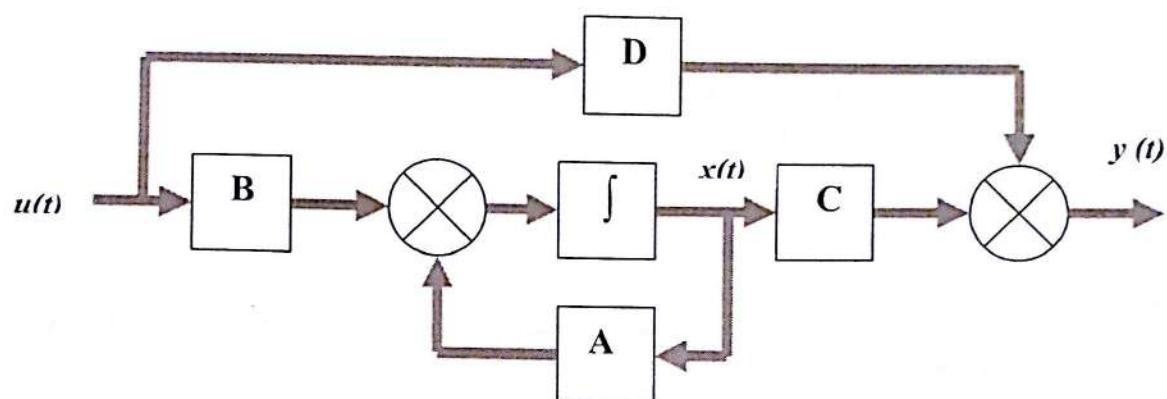


Figura 3

## ASIGNACION DE POLOS MEDIANTE REALIMENTACION DEL VECTOR DE ESTADO

$$\frac{C}{R} = \frac{8}{S^3 + 6S^2 + 10S + 8} = \frac{8}{(S+1+J)(S+1-J)(S+4)}$$

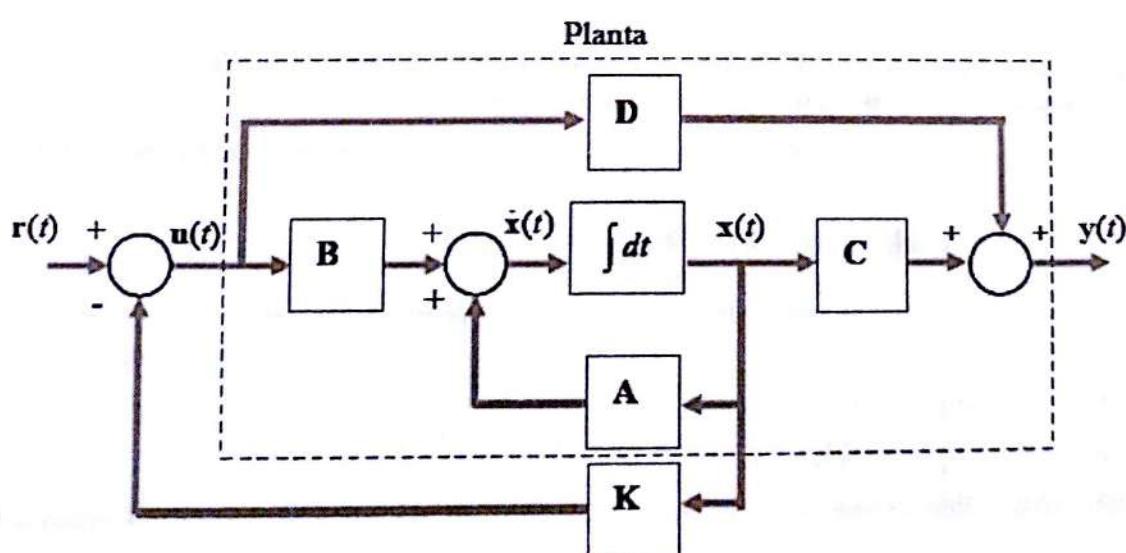
Se tiene una planta, y la representación mediante Variables de estado esta dada por



$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

Se propone realizar una asignación de polos mediante realimentación del vector de estado de la forma  $u(t) = -K\dot{x}(t)$ , modificándose el diagrama de bloques a la forma siguiente:



donde

- $x(t)$  = vector de estado de dimensión n
- $u(t)$  = vector de control de dimensión r
- $y(t)$  = vector de salida de dimensión m
- $A$  = matriz de coeficientes de estado [n,n]
- $B$  = matriz de coeficientes de excitación [n , r]
- $C$  = matriz de coeficientes de salida [m , r]
- $D$  = matriz de coeficientes relación directa entrada-salida [m, r]

Vector de realimentación de estado

$$u(t) = -Kx(t) = -\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$|sI - A + BK| = (s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n) = 0$$

Siendo los  $p_i$  los polos deseados

#### Ejemplo 1 :

Un sistema de control tiene una planta dada por

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0)x(t) + 0u(t)$$

Obtener la matriz de ganancia necesaria K para ubicar los polos en lazo cerrado en  $s_1 = -2 + j2\sqrt{3}$ ,  $s_2 = -2 - j2\sqrt{3}$  y  $s_3 = -10$ .

En primer lugar se ha de comprobar si el sistema es completamente controlable, para ello el rango de la matriz de controlabilidad  $M_c = (B \ AB \ A^2B)$  ha de ser 3. En efecto,

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -60 \\ 10 & -60 & 250 \end{pmatrix}$$

y su rango es 3.

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2 \ k_3) = (s+2-j2\sqrt{3})(s+2+j2\sqrt{3})(s+10)$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6+10k_3 & 11+10k_2 & s+6+10k_1 \end{vmatrix} = s^3 + 14s^2 + 56s + 160$$

luego,

$$s^3 + (6+10k_3)s^2 + (11+10k_2)s + 6+10k_1 = s^3 + 14s^2 + 56s + 160$$

Igualando coeficientes,

$$6+10k_3 = 14, \quad 11+10k_2 = 56, \quad 6+10k_1 = 160$$

con lo cual,

$$k_3 = 0,8 \quad k_2 = 4,5 \quad k_1 = 15,4$$

Por tanto, la matriz de ganancia de realimentación de estado vale

$$K = (15,4 \quad 4,5 \quad 0,8)$$

$$K = [154 \quad 45 \quad 8] T^{-1}$$

$$15.4000 \quad 4.5000 \quad 0.8000$$

J.E.Ackerman presentó en 1972 la fórmula para el cálculo de la matriz de ganancia K. Esa fórmula conocida como fórmula de Ackerman, está dada por

$$K = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)^{-1} \Theta(A)$$

donde la matriz  $\Theta(A)$  se determina de la siguiente manera:  
Si los polos de lazo cerrado deseados se sitúan en  $s=p_1, s=p_2, s=p_3, \dots, s=p_n$ , la ecuación característica deseada será:

$$(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

Calculados los coeficientes  $\alpha_i$ , se tiene que  $\Theta(A)$  está dado por

$$\Theta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I$$

Este algoritmo se basa en el teorema de Cayley Hamilton que establece que toda matriz es solución de su propia ecuación característica.

Ejemplo 2 resuelto utilizando la fórmula de Ackerman - (Mismos valores del ejemplo 1)

Se encontró que

$$\alpha_1 = 14, \alpha_2 = 56 \text{ y } \alpha_3 = 160.$$

por lo tanto

$$\Theta(A) = A^3 + 14A^2 + 56A + 160I$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}^3 + 14 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}^2 + 56 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} + 160 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 154 & 45 & 8 \\ -40 & 66 & -3 \\ 18 & -15 & 84 \end{pmatrix}$$

se obtuvo que la matriz de controlabilidad era

$$M_c = (B \ AB \ A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -60 \\ 10 & -60 & 250 \end{pmatrix}$$

### Aplicación en Matlab

ACKER Pole placement gain selection using Ackermann's formula.

K = acker (A,B,P) calculates the feedback gain matrix K such that the single input system

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

with a feedback law of  $u = -Kx$  has closed loop poles at the values specified in vector P, i.e.,  $P = \text{eig}(A - B*K)$ . En el caso del ejemplo,

$$P = [-2-2*\sqrt{3}j \ -2+2*\sqrt{3}j \ -10]; \text{ (Polos deseados)}$$

Note: This algorithm uses Ackermann's formula. This method is NOT numerically reliable and starts to break down rapidly for problems of order greater than 10, or for weakly controllable systems. A warning message is printed if the nonzero closed-loop poles are greater than 10% from the desired locations specified in P.

$$A = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; -6 \ -11 \ -6];$$

$$B = [0; 0; 10];$$

```

C=[ 1 0 0 ];
D=[ 0 ];
P=[-2-2*sqrt(3)*j -2+2*sqrt(3)*j -10];
K= acker(A , B, P);
K

```

$K = [ K_1 \ K_2 \ K_3 ] = [ 15.4000 \ 4.5000 \ 0.8000 ]$  Que son los mismos valores encontrados usando la fórmula de Ackerman.

Otro forma de calcular la matriz K, es la siguiente:

Se define una matriz de transformación T, para pasar a la forma Canónica Controlable

$$T = M W$$

en donde M es la matriz de controlabilidad

$$M = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$W = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

en donde las  $a_i$  son los coeficientes del polinomio característico

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Se elige un vector de transformación  $x=TX$  para pasar a la forma canónica de variables de fase o forma canónica controlable. De tal forma que la matriz, queda

$$T^{-1}AT = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{vmatrix} \text{Frobenius}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con los polos seleccionados (asignación de polos que cumplen con las especificaciones),  $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots \nu_n$ , la ecuación característica se escribe

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

definamos

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{KT} = [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1]$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATX} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}\mathbf{x}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = |\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{T}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| = 0$$

Remitiéndonos a lo establecido

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}|$$

$$= |\mathbf{SI} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1]|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & \dots & 0 \\ 0 & s & \dots & 0 \\ & & & \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \dots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix}$$

$$= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0$$

Igualando los coeficientes de igual potencia en s, se obtiene

$$\begin{aligned} a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\ a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

$$a_n + \delta_n = \alpha_n$$

Despejando las  $\delta_i$  en las ecuaciones anteriores y sustituyéndolas en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} K &= \hat{K}T^{-1} = [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \dots \ \delta_1] T^{-1} \\ &= [\alpha_n - a_n \ | \ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \ | \ \dots \ | \ \alpha_2 - a_2 \ | \ \alpha_1 - a_1] T^{-1} \end{aligned}$$

En nuestro caso, y dado que el sistema no está en la forma canónica controlable; y tenemos que

$$\text{Ec. Característica original} = S^3 + a_1 S^2 + a_2 S + a_3 = S^3 + 6 S^2 + 11 S + 6$$

$$\text{Ec. Característica deseada} \quad S^3 + \alpha_1 S^2 + \alpha_2 S + \alpha_3 = S^3 + 14 S^2 + 56 S + 160$$

$$\text{Por lo tanto la matriz } K = [\alpha_3 \cdot a_3 \ | \ \alpha_2 \cdot a_2 \ | \ \alpha_1 \cdot a_1] T^{-1} = [160-6 \ 56-11 \ 14-6] T^{-1}$$

$$\begin{matrix} K = [154 \ 45 \ 8] T^{-1} \\ 15.4000 \ 4.5000 \ 0.8000 \end{matrix}$$

En nuestro caso  $T^{-1}$  es

Otro comando que se puede usar en matlab de la misma manera que Acker, es Place

PLACE Pole placement technique

**K = PLACE(A,B,P)** computes a state-feedback matrix K such that  
 the eigenvalues of  $A - B^*K$  are those specified in vector P.  
 No eigenvalue should have a multiplicity greater than the  
 number of inputs.

[K,PREC,MESSAGE] = PLACE(A,B,P) returns PREC, an estimate of how closely the eigenvalues of A-B\*K match the specified locations P (PREC measures the number of accurate decimal digits in the actual closed-loop poles). If some nonzero closed-loop pole is more than 10% off from the desired location, MESSAGE contains a warning message.

### ASIGNACION DE POLOS PARA LOGRAR ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO NULO ANTE UNA ENTRADA ESCALON UNITARIO, CUANDO LA PLANTA POSEE UN INTEGRADOR.

En este caso, la matriz de realimentación que aparece en el diagrama esta dada por

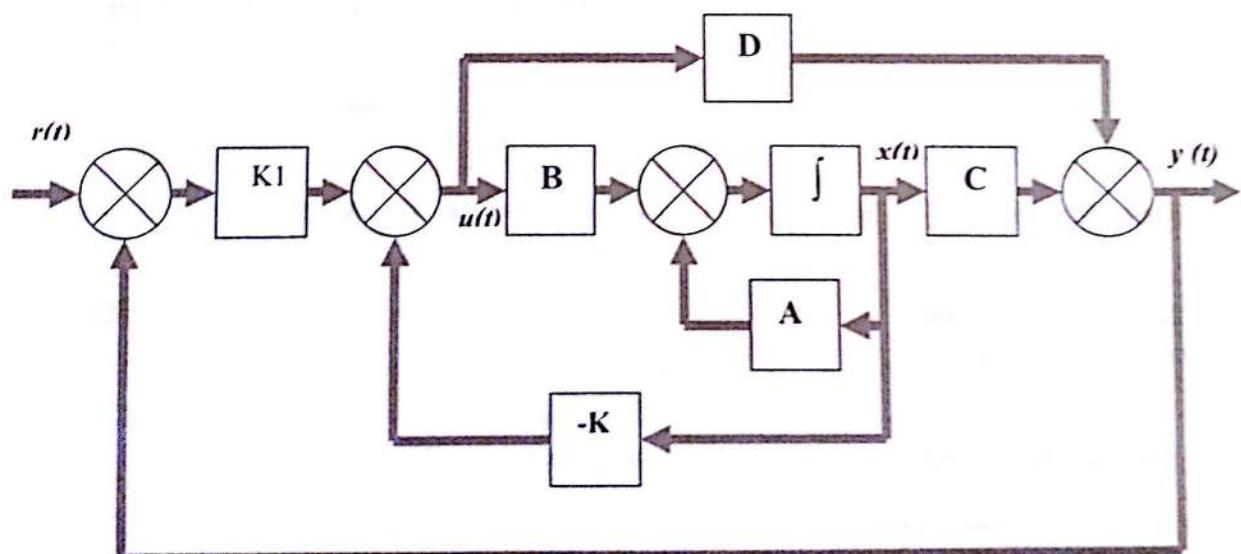
$$K = [0 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ \dots \ K_n]$$

Donde el coeficiente  $K_1$  de la matriz  $K$  es igual a cero, es decir que no se realimenta el estado  $X_1$ , sino que lo que se hace es que mediante la elección adecuada del conjunto de variables de estado, se elige que la salida sea igual a la variable de estado deseada, en nuestro caso  $y(t) = X_1$  y la realimentación a través del vector  $u$  se hace

$$u = -[0 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ \dots \ K_n] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + K_1(r - x_1)$$

$$u = -Kx + K_1r$$

$$\text{donde } K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4 \ \dots \ K_n]$$



Si la señal de entrada de referencia es una función escalón se aplica en  $t=0$ . Para  $t>0$  la dinámica del sistema se expresa como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bk}_1r$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{Bk}_1r(\infty)$$

Considerando que  $r(t)$  es una entrada escalón, tenemos  $r(\infty) = r(t) = r(\text{constante})$  para  $t > 0$ .

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)]$$

Defina

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{e}(t)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}$$

El diseño del sistema de seguimiento de tipo 1 se convierte aquí en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable tal que  $\mathbf{e}(t)$  tienda a cero, dada cualquier condición inicial  $\mathbf{e}(0)$ . Si el sistema definido mediante la ecuación (12-89) es de estado completamente controlable, entonces, especificando los valores característicos deseados  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  para la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ , la matriz  $\mathbf{K}$  se determina mediante la **técnica** de ubicación de polos  $p$

Los valores en estado estable de  $\mathbf{x}(t)$  y  $u(t)$  se encuentran del modo siguiente: en estado estable ( $t = \infty$ ), a partir de la ecuación (12-92), tenemos que,

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{Bk}_1r$$

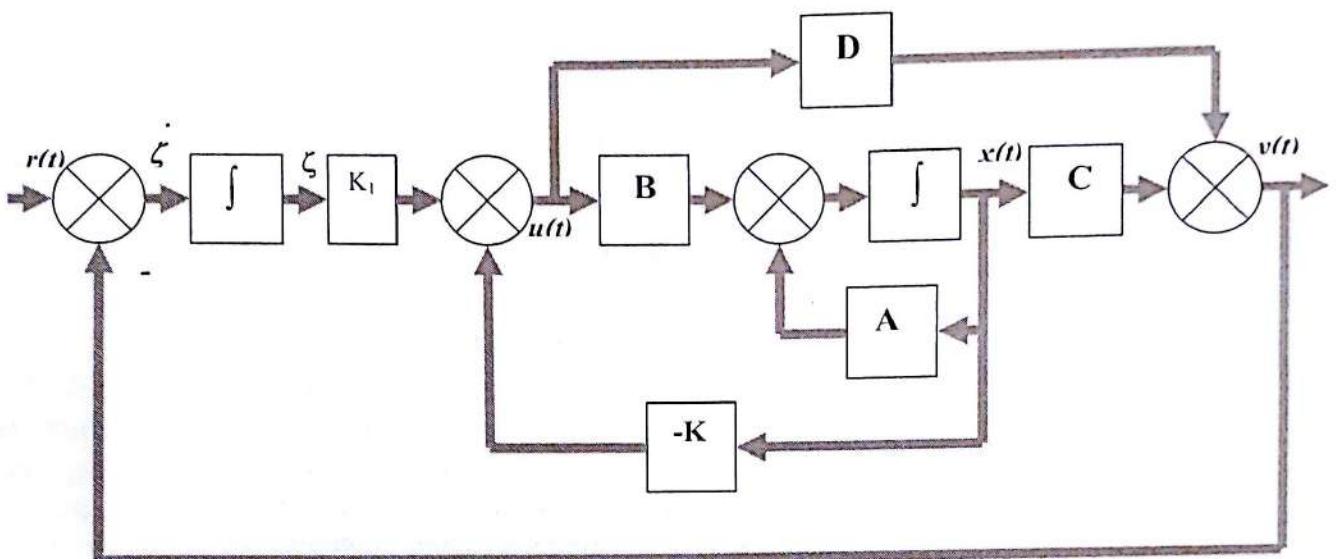
Dado que todos los valores característicos deseados de  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  están en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , existe la inversa de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ . En consecuencia,  $\mathbf{x}(\infty)$  se determina como

$$\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{Bk}_1r$$

Asimismo,  $u(\infty)$  se obtiene como

$$u(\infty) = -\mathbf{Kx}(\infty) + k_1r = 0$$

ASIGNACION DE POLOS PARA LOGRAR ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO NULO  
ANTE UNA ENTRADA ESCALON UNITARIO, CUANDO LA PLANTA NO POSEE UN  
INTEGRADOR.



A partir del diagrama de bloques, con  $D = 0$ , se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

$$u = -\mathbf{Kx} + k_I \xi$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{Cx}$$

en donde  $\mathbf{x}$  = vector de estado de la planta (vector de dim

$u$  = señal de control (escalar)

$y$  = señal de salida (escalar)

$\xi$  = salida del integrador (variable de estado del

$r$  = señal de entrada de referencia (función esca

$\mathbf{A}$  = matriz de coeficientes constantes de  $n \times n$

$\mathbf{B}$  = matriz de coeficientes constantes de  $n \times 1$

$\mathbf{C}$  = matriz de coeficientes constantes de  $1 \times n$

La función de transferencia de la planta se obtiene mediante

$$G_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

La entrada de referencia (función escalón) se aplica en  $t=0$ . En este caso, para  $t>0$  la dinámica del sistema se describe mediante la siguiente representación. (Se supone que la función de transferencia  $G_p(S)$  no tiene un cero en el origen)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Diseñaremos un sistema asintóticamente estable, tal que  $\mathbf{x}(\infty), \xi(\infty)$  y  $u(\infty)$  tiendan a valores constantes, respectivamente. Así, en un estado estable  $\xi(t) = 0$  y obtenemos  $y(\infty) = r$ .

Observe que, en estado estable, tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Considerando que  $r(t)$  es una entrada escalón unitario, se tiene que  $r(\infty) = r(t) = 1$  (Constante) para  $t>0$ . Restando el valor de  $\mathbf{x}(t)$  actual menos el valor en régimen  $t=\infty$ , se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)]$$

Defina

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t)$$

Entonces, la ecuación (12-111) se escribe como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

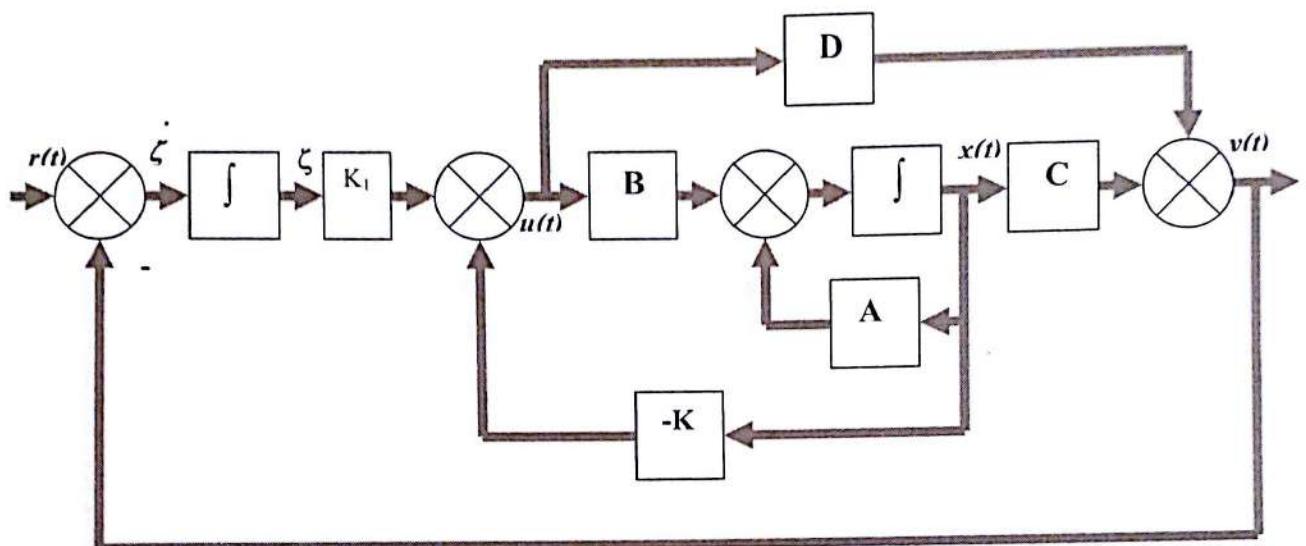
en donde

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + k_I\xi_e(t)$$

Defina un nuevo vector de error  $e(t)$  ( $n+1$ -ésimo de orden mediante

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = (n+1)\text{-vector}$$

ASIGNACION DE POLOS PARA LOGRAR ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO NULO  
ANTE UNA ENTRADA ESCALON UNITARIO, CUANDO LA PLANTA NO POSEE UN  
INTEGRADOR.



A partir del diagrama de bloques, con  $D = 0$ , se obtiene

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = cx$$

$$u = -Kx + k_I\xi$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - cx$$

en donde  $x$  = vector de estado de la planta (vector de dim

$u$  = señal de control (escalar)

$y$  = señal de salida (escalar)

$\xi$  = salida del integrador (variable de estado del

$r$  = señal de entrada de referencia (función esca

$A$  = matriz de coeficientes constantes de  $n \times n$

$B$  = matriz de coeficientes constantes de  $n \times 1$

$C$  = matriz de coeficientes constantes de  $1 \times n$

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

en donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}$$

en donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -k_L]$$

Aquí, la idea básica de diseñar el sistema de seguimiento de tipo 1 es diseñar un sistema regulador estable de  $(n + 1)$ -ésimo orden que lleve a cero el nuevo vector de error  $\mathbf{e}(t)$ , dada cualquier condición inicial  $\mathbf{e}(0)$ .

Los valores en estado estable de  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\xi(t)$  y  $u(t)$  se encuentran del modo siguiente: en estado estable ( $t = \infty$ ),

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}u(\infty)$$

$$\dot{\xi}(\infty) = 0 = r - \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty)$$

lo cual se combina en una ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ r \end{bmatrix}$$

Si la matriz  $P$ , definida mediante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

es de rango  $n + 1$ , entonces existe su inversa y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -r \end{bmatrix}$$

$$u(m) = -Kx(\infty) + k_I \xi(\infty)$$

y, por tanto

$$\xi(\infty) = \frac{1}{k_I} [u(\infty) + Kx(\infty)]$$

Si la matriz P obtenida es de rango n+1 entonces el sistema definido mediante la ecuación

$\dot{e} = \hat{A}e + Bu$ , se vuelve de estado totalmente controlable y la solución a este problema se obtiene mediante el enfoque de ubicación de polos.

La ecuación de error de estado se obtiene de

$$\dot{e} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})e$$

Si los valores característicos deseados de la matriz  $\hat{A} - \hat{B}\hat{K}$  (es decir, los polos en lazo cerrado deseados) se especifican como  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$ , entonces la matriz de ganancias de realimentación del estado K y la constante de ganancia integral  $k_I$  pueden determinarse. En el diseño actual, es necesario considerar varias matrices K diferentes (que correspondan a varios conjuntos distintos de valores característicos deseados) y realizar simulaciones en computadora para encontrar aquella que produzca el mejor desempeño general del sistema. A continuación, seleccione la mejor como la matriz K.

Como ocurre normalmente, no todas las variables de estado se pueden medir en forma directa. En ese caso, necesitamos usar un observador de estado. La figura 12-15 muestra un diagrama de bloques de un sistema de seguimiento de tipo 1 con un observador de estado.