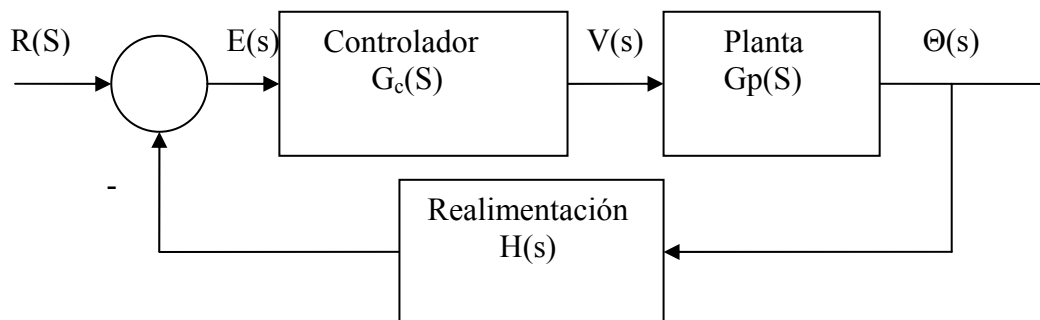


## COMPENSACION UTILIZANDO EL LUGAR DE RAICES

Un sistema de control de posición en lazo cerrado, tiene una representación como la que se da en la Figura 1.

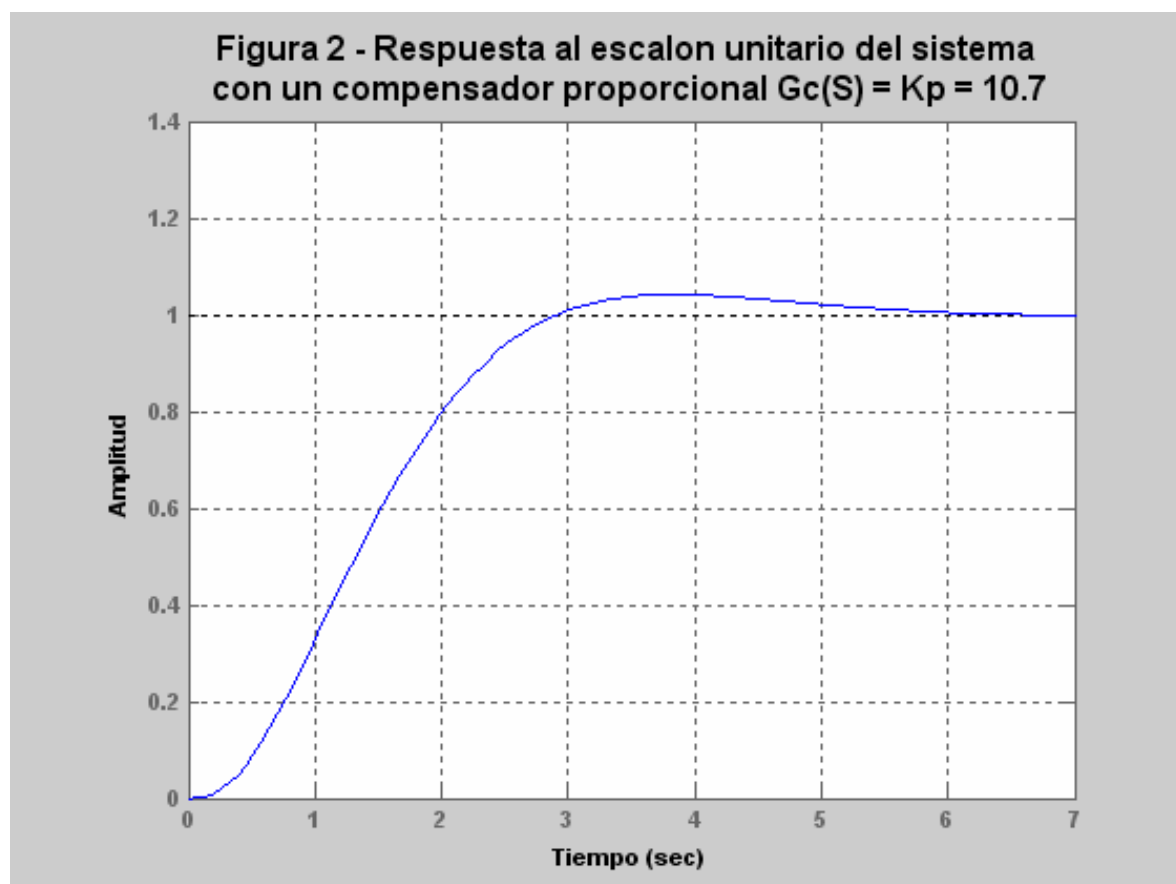
Inicialmente el sistema tiene un controlador proporcional  $G_c(S) = K_p$ . La función de transferencia  $G_p(S)$  de la planta está dada por

$$G_p(S) = \frac{1}{S^3 + 9S^2 + 14S} = \frac{1}{(S+2)(S+7)S} \quad \text{y la realimentación } H(S) \text{ es unitaria}$$



**Figura 1 – Sistema de lazo cerrado de control de posición**

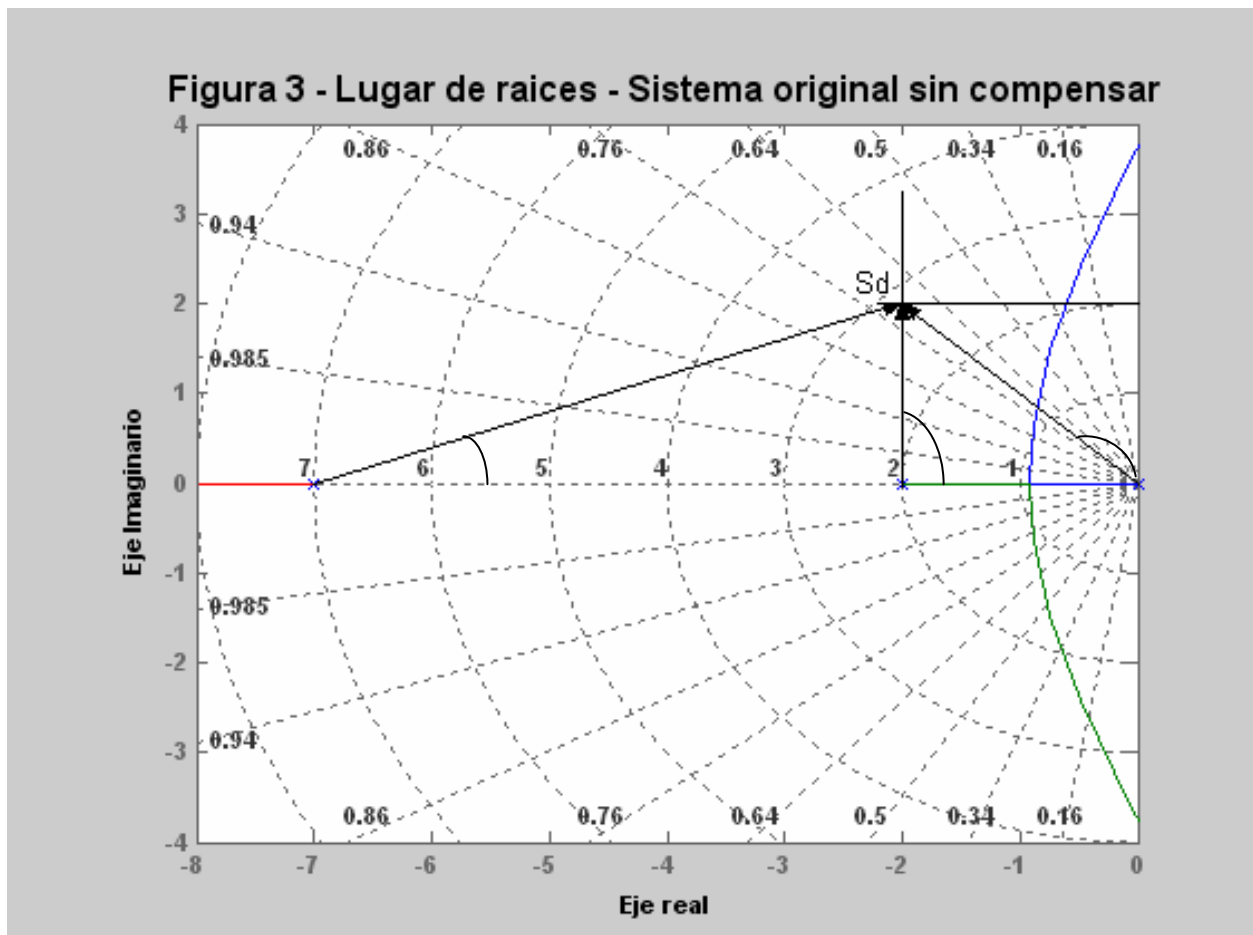
En la Figura 2 se presenta la respuesta a un escalón unitario del sistema con un control proporcional para lograr un  $\zeta = 0.707$ .



**Tarea :** Se pide realizar la compensación para lograr un sistema que presente una respuesta con polos complejos conjugados dominantes que posean una relación de coeficientes de amortiguamiento  $\zeta=0.707$  y una frecuencia angular natural no amortiguada  $\omega_n = \sqrt{8}$

### CASO 1 – Utilización de una red de adelanto cero-polo.

En la Figura 3, se presenta el diagrama del Lugar de Raíces del sistema original.



Para que los polos de lazo cerrado cumplan lo solicitado deben ubicarse en  $S_D = -2 \pm 2j$ . Del lugar de raíces puede observarse que para ello, el punto  $S_D$  debe cumplir la condición de ángulo. En ese punto, la contribución angular de los polos en 0, -2 y -7 contribuyen con:

Argumento del Polo en el origen $S = 0$	=	-135,00
Argumento del Polo en $S = -2$	=	- 90,00
Argumento del Polo en $S = -7 \arctg 2/5$	=	- 21,80
Total		-246,80

Para que el punto  $S_D$  sea lugar de raíces, debe cumplir que  $\text{Arg}[G_p(S)] = \pm 180(2k+1)$  para lo cual el compensador deberá proveer un adelanto de 66,8 grados. Utilizando el método de la bisectriz para determinar la ubicación del cero y el polo de la red, se determina que el cero del compensador se ubica en  $S = -1.65$  (Provee +99.9° en el punto  $S_D$ ) y el polo del compensador se ubica en  $S = -5.08$  (Provee -33° en el punto  $S_D$ ).

## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

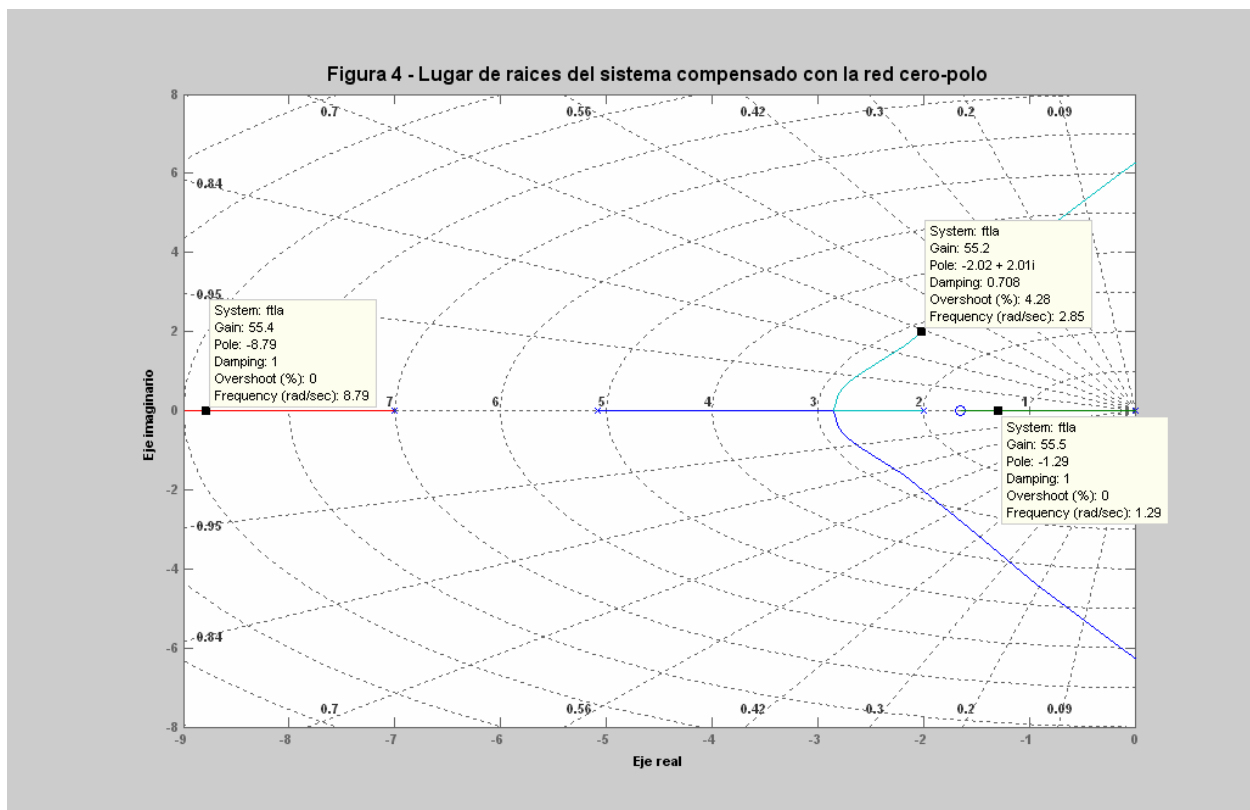
El K necesario para ubicarse en el punto de diseño Sd. es 55.3

$$K = \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s + z_i|} \quad n \geq m \quad n = \text{número de polos} ; m = \text{número de ceros}$$

El compensador de adelanto con la red cero-polo queda conformado de la siguiente forma

$$G_{lc}(S) = \frac{55.3 (S + 1.65)}{(S + 5.079)}$$

El lugar de raíces del sistema compensado se muestra en la Figura 4.



La función de transferencia de lazo cerrado (FTLC1) del sistema compensado con el compensador  $G_{lc}(S)$  está dada por

$$FTLC1 = \frac{55.3 (S + 1.65)}{(S + 8.786) (S + 1.293) (S^2 + 4.001 S + 8.034)}$$

Puede observarse que se modificó la forma geométrica del lugar de raíces y que aparece un polo de lazo cerrado en -1.293 con lo que la acción de los polos complejos conjugados puede no ser dominante y la respuesta se vea enlentecida por este polo, debido además a que no se encuentra lo suficientemente cerca del cero de lazo cerrado en -1.265, como para que la contribución del polo se vea reducida.

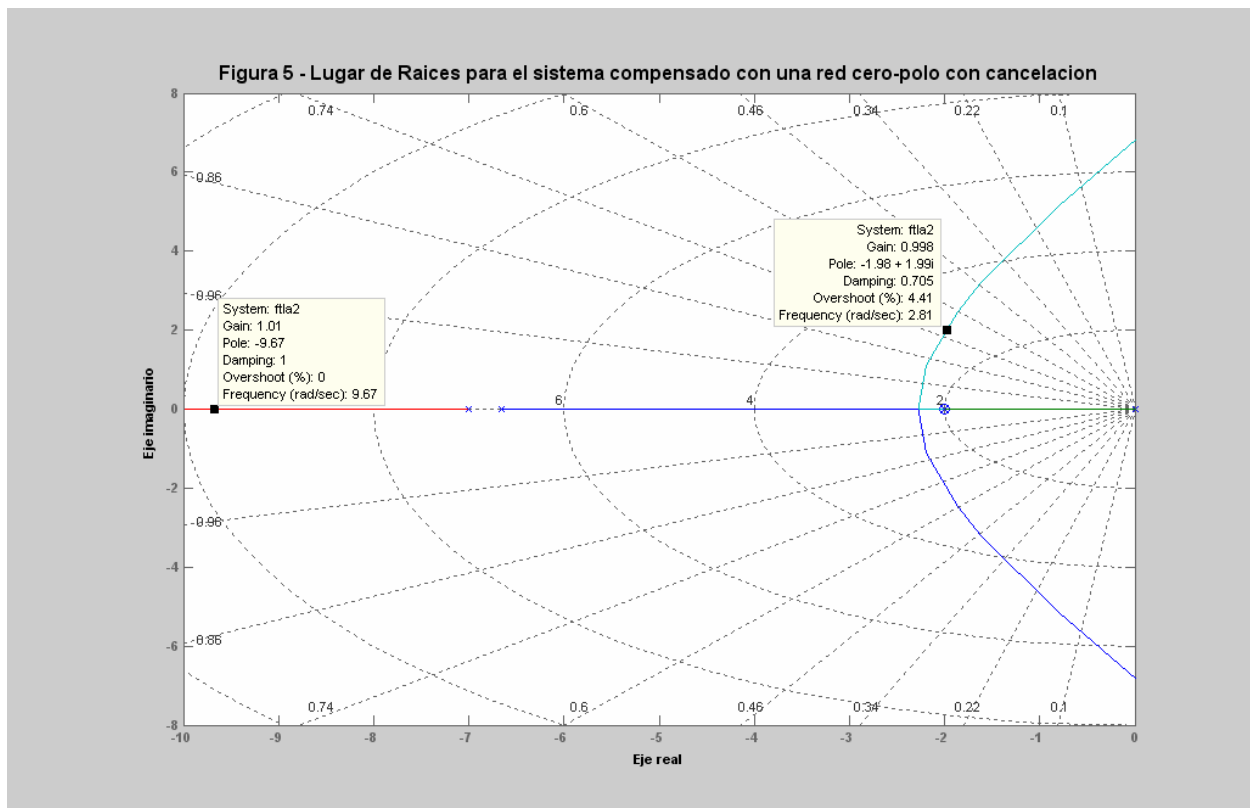
**CASO 2 – Utilización de una red de adelanto cero-polo alternativa.**

Dado que el compensador debe proveer  $67^\circ$  de adelanto, existen innumerables combinaciones para las ubicaciones del cero y el polo que proveen ese valor. Como alternativa de realización de un compensador con una red de adelanto cero-polo, puede proponerse, en el caso que se trata, la cancelación del polo de la planta en  $S = -2$  con el cero del compensador. (Recordar que los procedimientos de cancelación pueden realizarse ÚNICAMENTE en el semiplano izquierdo – Valores negativos de la parte real de los polos).

En el punto de diseño  $S_d$ , el cero ubicado en  $S = -2$ , contribuye con  $+90^\circ$ , por lo que el polo deberá ubicarse de tal manera que provea  $-23^\circ$ , para que la red cero-polo contribuya con los  $67^\circ$  necesarios. En esas condiciones el polo debe ubicarse en  $S = -6.6$ . La ganancia necesaria para que el punto  $S_d$  sea un polo de lazo cerrado, es  $K = 77,2$  .-

La función de transferencia del compensador queda entonces dada por

$$G_2c(S) = \frac{77.24 (S + 2)}{(S + 6.6)}$$



La función de transferencia de lazo cerrado del sistema compensado con la red cero polo dada por  $G_2c(S)$  queda

$$FTLC2 = \frac{77.24}{(S + 9.66)(S^2 + 3.998S + 7.994)}$$

Como se ve, con la cancelación (ideal) quedan tres polos de lazo cerrado, dos complejos conjugados en  $S = -2 \pm 2j$  y un polo en  $S = -9.66$  (aproximadamente 5 veces el valor de la parte real de los polos complejos) por lo que puede esperarse que se comporten como polos dominantes.

### **CASO 3 – Utilización de un controlador Proporcional Derivativo [PD o P+D]**

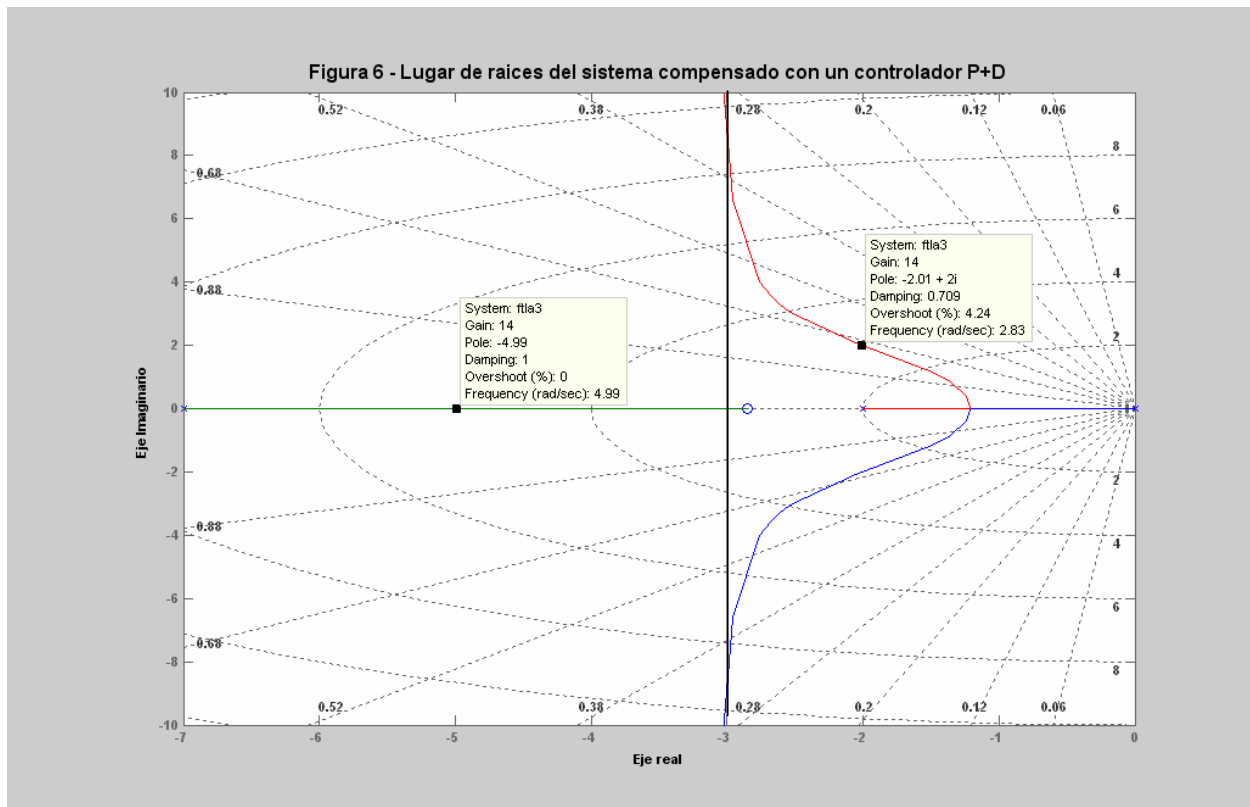
La función de transferencia de un controlador proporcional derivativo esta dada por

$G3c(S) = K_p(T_d S + 1)$  con  $K_p$  = Ganancia proporcional y  $T_d$  = tiempo derivativo.

Puesto en la forma de polo y cero queda  $G3c(S) = K_p.T_d(S + 1/T_d)$  lo que ubica un cero en  $S = -1/T_d$ . Ese cero debe proveer los  $67^\circ$  de adelanto necesarios para que el punto  $S_d$  sea lugar de raíces. En estas condiciones, el cero debe ubicarse en  $S = -2.85$ .- La ganancia necesaria esta dada por  $K = K_p \cdot T_d = 14$ .

$$G3c(S) = 14 (S + 2.85)$$

En la Figura 6 se da el diagrama del Lugar de raíces del sistema compensado.



La función de transferencia de lazo cerrado en estas condiciones, esta dada por

$$FTLC3 = \frac{14 (S + 2.85)}{(S + 4.99) (S^2 + 4.00 S + 7.99)} = \frac{14 (S + 2.85)}{S^3 + 8.99 S^2 + 27.95 S + 39.9}$$

Los polos se ubican en  $S = -4.99$  y los polos complejos conjugados en  $S = -1.998 \pm 1.998 j$ . Puede verse que aparece un cero de lazo cerrado debido al compensador, lo que probablemente produzca dinámica de numerador y un sobrepasamiento mayor que el esperado para una entrada escalón unitario.

**CASO 4 – Utilización de realimentación de posición y velocidad con Amplificación en la rama directa.**

En los tres casos anteriores de compensación, se ha utilizado una realimentación negativa unitaria. En esta ocasión, se procederá de manera de generar un cero en la función  $H(S)$  realimentando posición y velocidad y se proveerá la ganancia necesaria en la rama directa para que el error en estado estacionario ante una entrada escalón unitaria continúe siendo cero. Es decir, preservar una función que tenga una realimentación unitaria y sea tipo 1. En las Figuras 7, 8 y 9, se pone de manifiesto lo expresado.

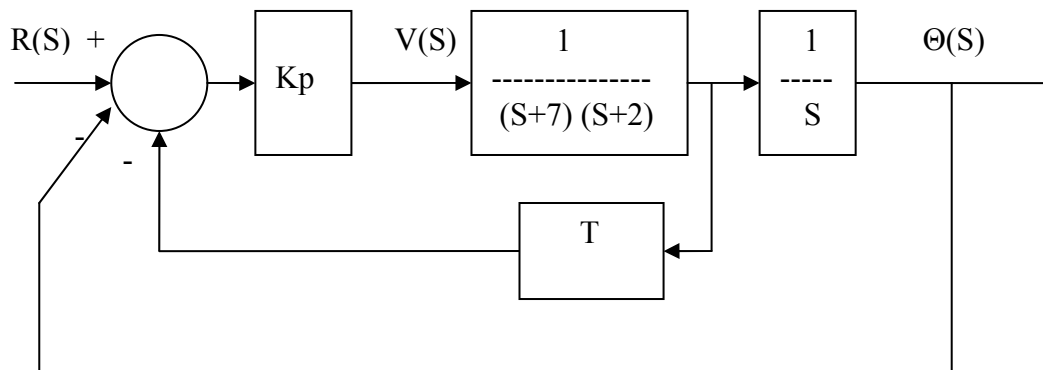


Figura 7 – Control en la realimentación

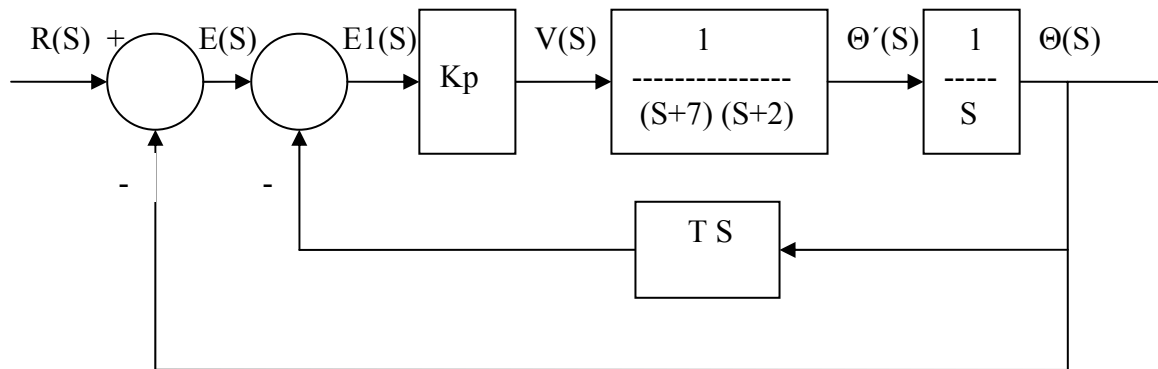
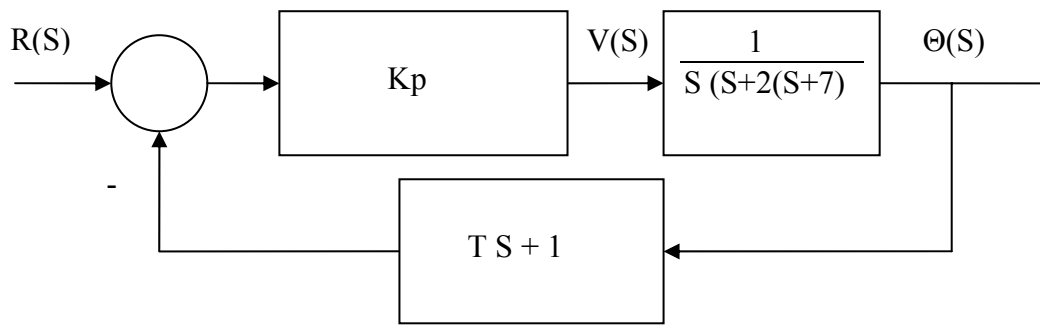


Figura 8 – Control en la realimentación



**Figura 9 – Control en la realimentación**

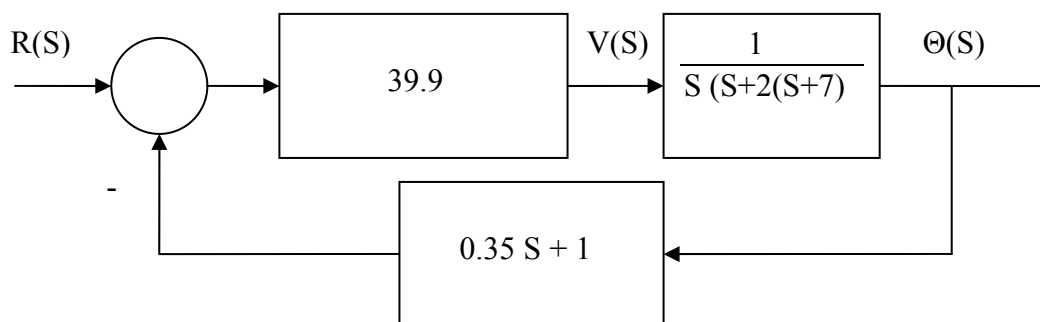
La función de transferencia de lazo abierto  $FTLA = G_c(S)G_p(S)H(S)$  está dada por

$$FTLA = \frac{K_p \cdot (T S + 1)}{S (S+2) (S+7)}$$

que como se observa tiene exactamente la misma expresión que la correspondiente a la compensación con el controlador P+D. Por lo tanto, el lugar de raíces es exactamente el mismo que se da en la Figura 6, siendo la ubicación del cero y el valor de K necesario para posicionarse en el punto de diseño  $S_d$  exactamente los mismos valores que los encontrados para el P+D :

$K = 14$  y el cero se ubica en  $S = -2.85$ .

En estas condiciones quedan los valores de  $K_p = 14 * 2.85 = 39.9$  y  $T = 0.35$



**Figura 10 – Sistema compensado con realimentación de velocidad y posición**

La función de transferencia de lazo cerrado  $\Theta(S)/R(S)$  está dada por

$$\frac{\Theta(S)}{R(S)} = \frac{39.9}{S^3 + 9 S^2 + 27.96 S + 39.9}$$

Puede observarse que con este tipo de acción se provee el amortiguamiento necesario para lograr la relación de coeficientes de amortiguamiento  $\zeta$  y el  $\omega_n$  solicitados y no se genera un cero en el numerador, como en el caso del P+D.

Los polos de lazo cerrado se encuentran, uno sobre el eje real ubicado en  $S_1 = -5.077$  y los dos polos complejos conjugados en  $S = -1.996 \pm 1.996 j$

## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

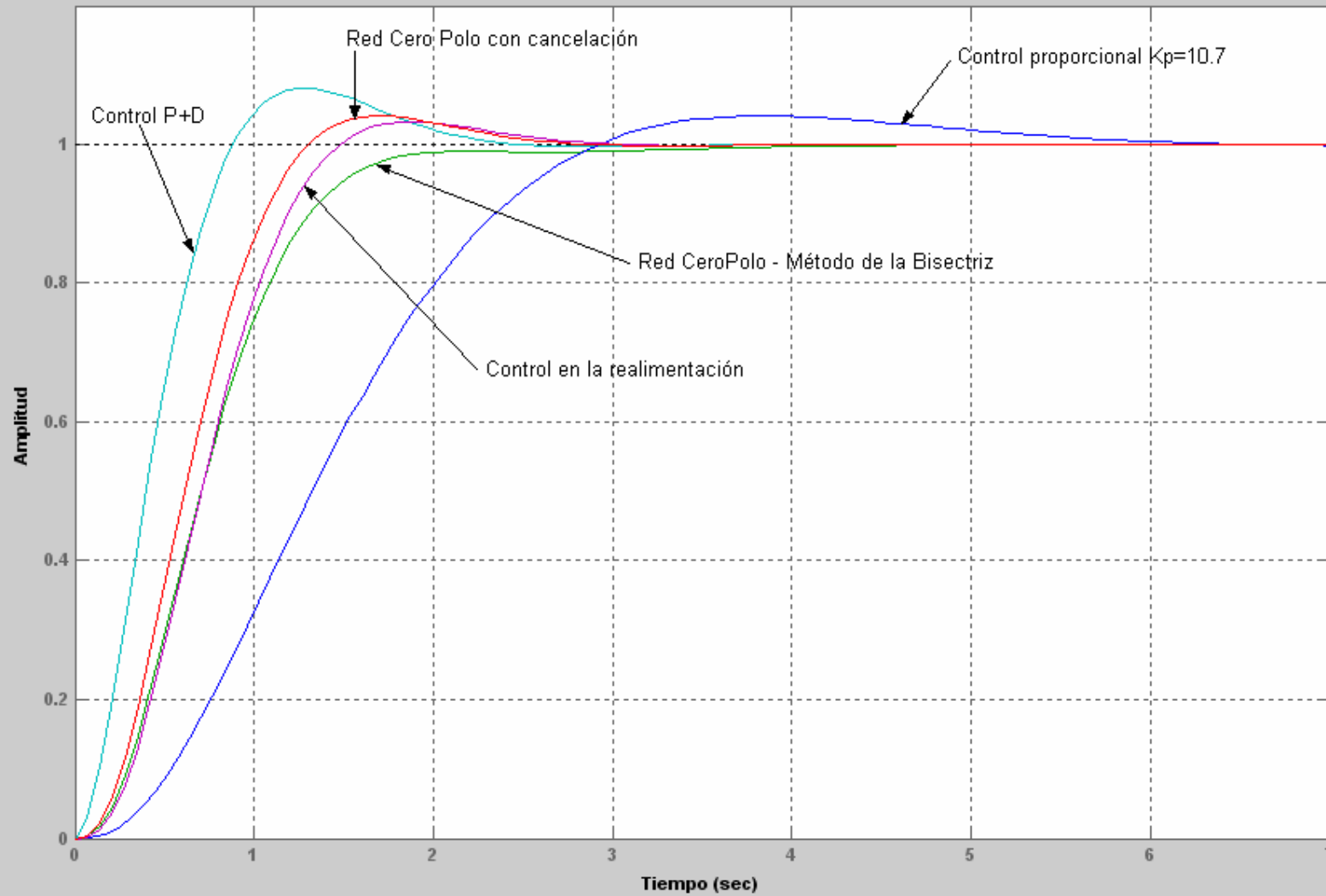
Las respuestas temporales para una entrada escalón unitario, del sistema original con el control proporcional solamente y del sistema con las cuatro compensaciones realizadas con el objeto de mejorar la respuesta transitoria, se da en las Figuras 11, 12, 13 y 14 a los efectos de comparar su comportamiento en función de los diferentes parámetros. En la figura 15, se da la respuesta de la salida a la función impulso unitario.

En la Figura 16 se da la respuesta a la rampa para todas las configuraciones.

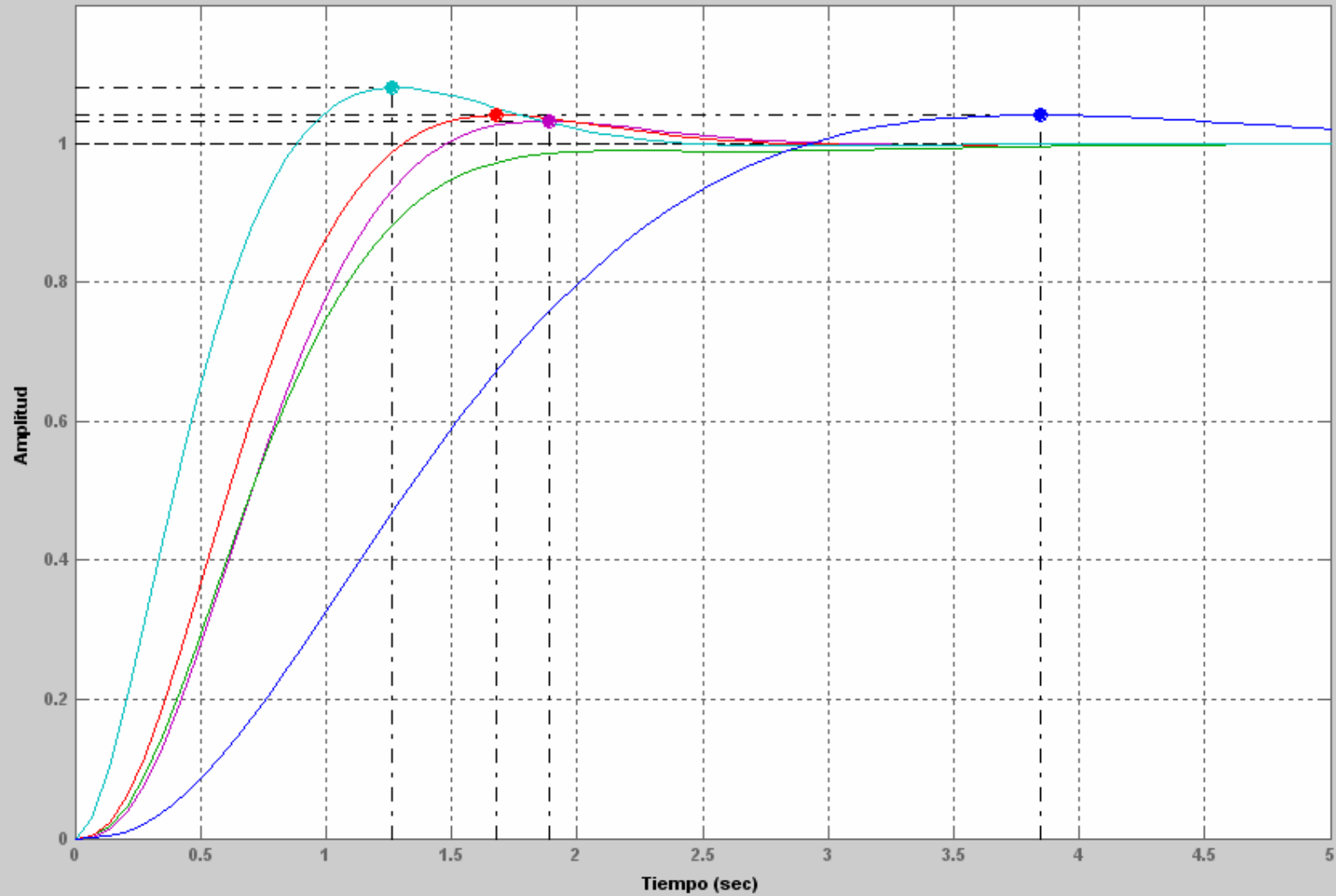
Conclusiones a cargo de los alumnos.



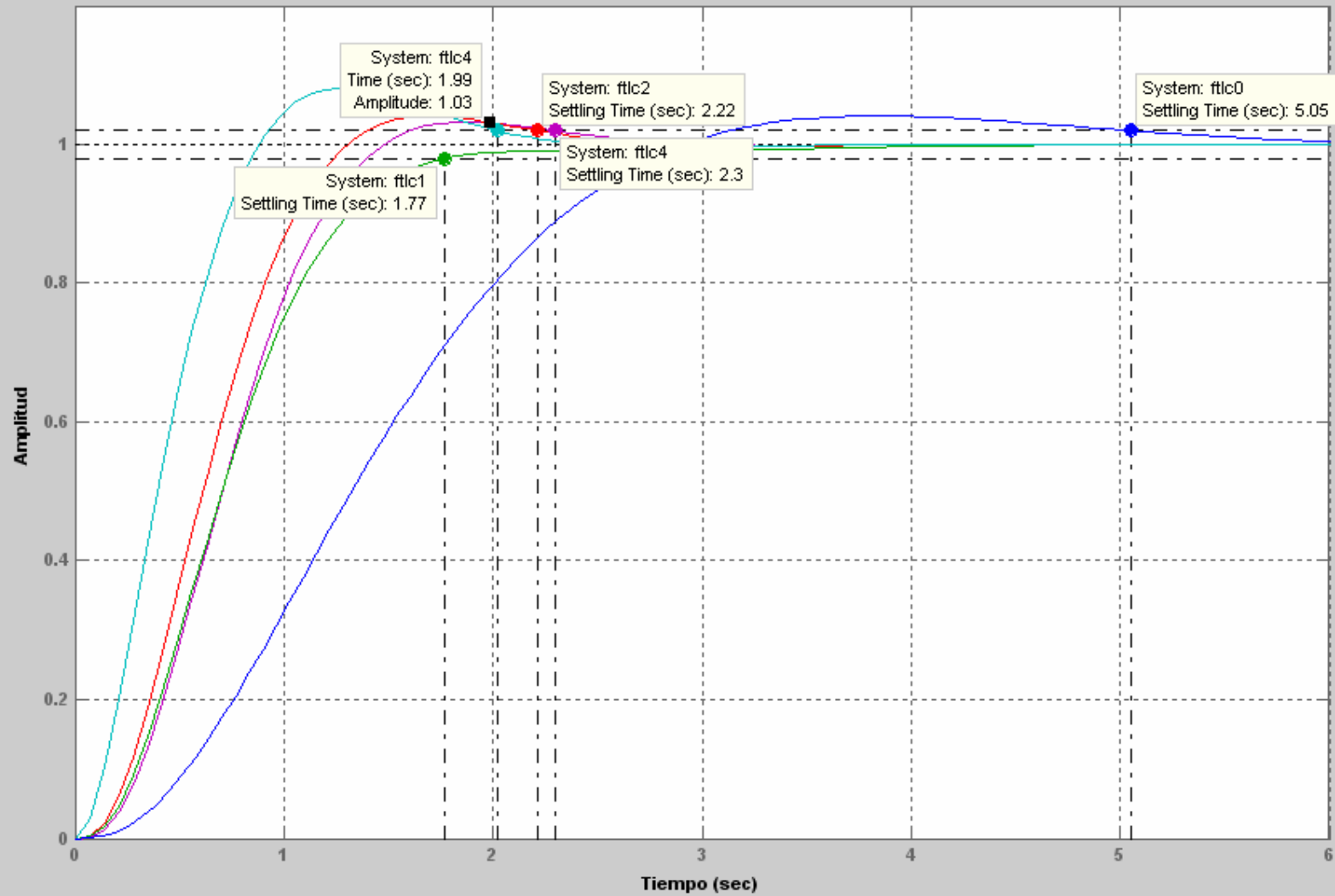
**Figura 11- Respuesta al escalon unitario - Sistema compensado con las diferentes configuraciones**



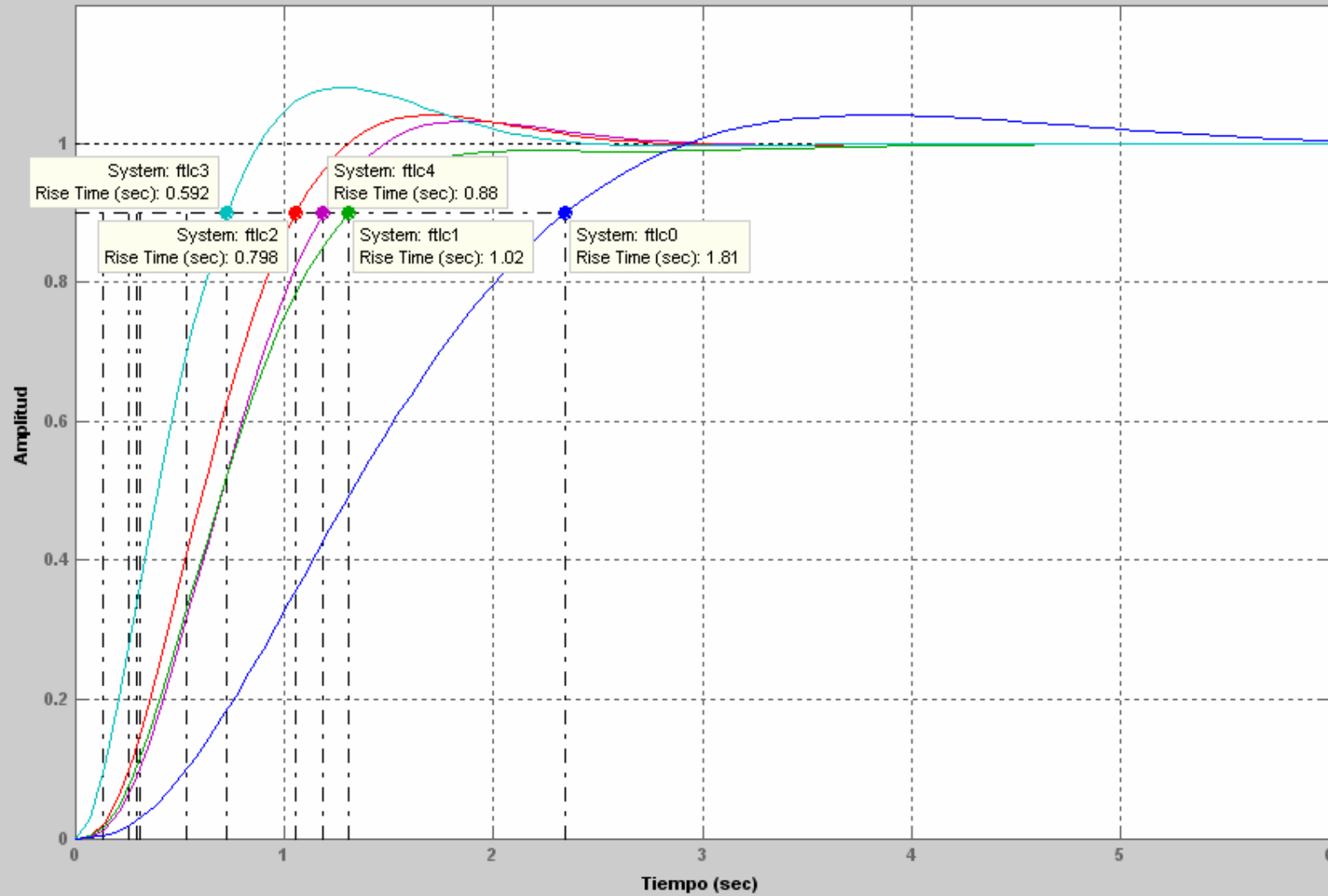
**Figura 12- Respuesta al escalon unitario - Sistema compensado con las diferentes configuraciones**  
**Indicacion tiempo de primer sobreimpulso  $t_p$**

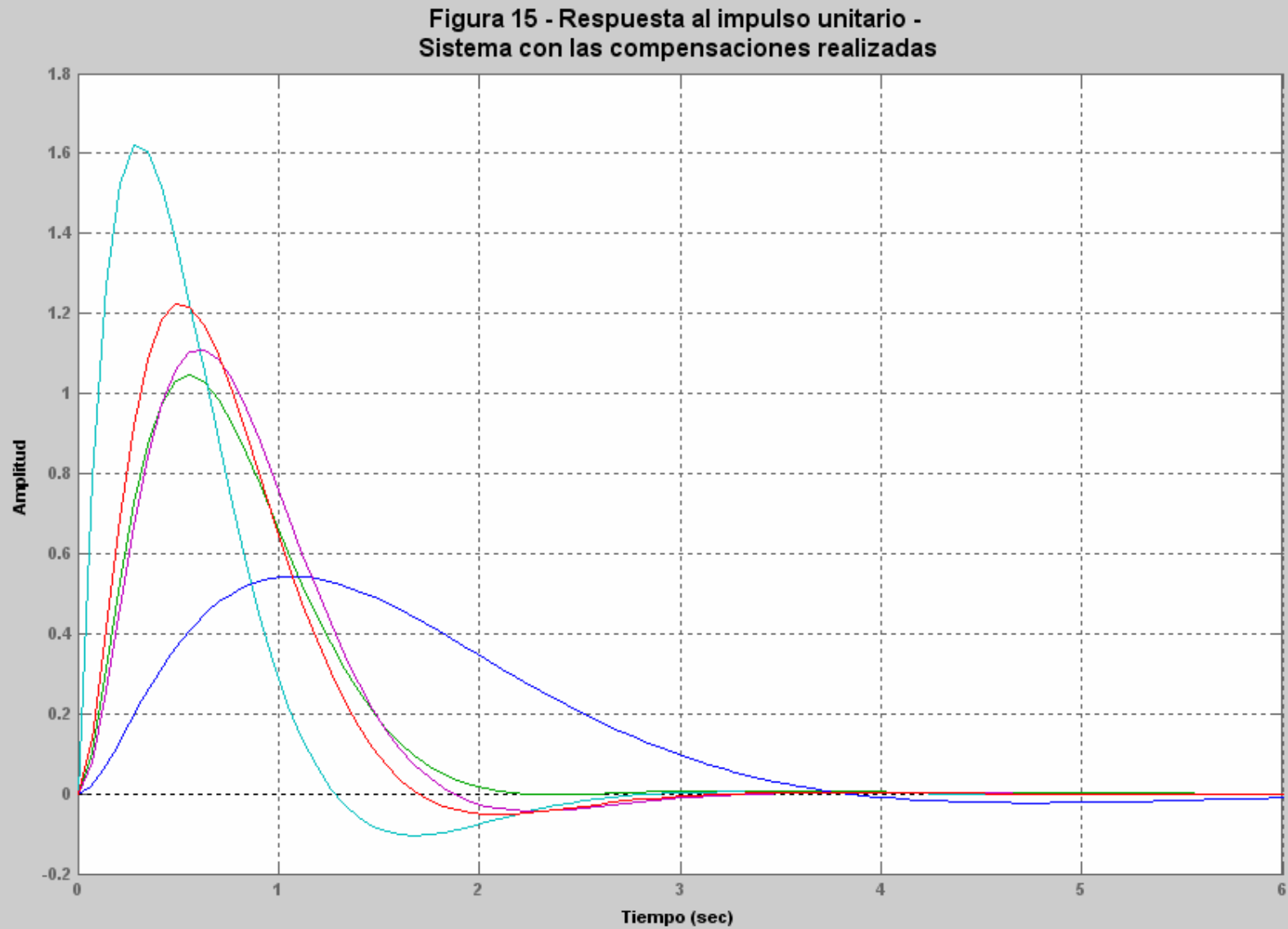


**Figura 13- Respuesta al escalon unitario - Sistema compensado con las diferentes configuraciones**  
**Indicacion tiempo de establecimiento**



**Figura 14 - Respuesta al escalon unitario - Sistema compensado con las diferentes configuraciones  
Indicacion tiempo de crecimiento 10 - 90 %**





---

```
% Generación de FT original y su lugar de raíces K=1 , H(S)=1
```

```
ni=[0 0 0 1];  
di=[1 9 14 0];  
gpi=tf(ni,di)  
rlocus(gpi)
```

```
% Control proporcional para tener un  $\zeta = 0.707$ 
```

```
nikp=[0 0 0 10.7]  
gpikp=tf(nikp,di)  
% Sistema original con ganancia proporcional 10.7  
ftlc0=feedback(gpikp,1)
```

```
% Caso 1 - Controlador cero polo - Método de la Bisectriz –
```

```
gcc=zpk([-1.65],[-5.079],[55.3])  
ftla=series(gpi,gcc)  
ftlc1=feedback(ftla,1)
```

```
% Control con cancelación de polo con el cero del controlador
```

```
gc2= zpk([-2],[-6.66],[77.24])  
ftla2=series(gpi,gc2)  
ftlc2=feedback(ftla2,1)
```

```
% Control con P+D
```

```
gpd=zpk([-2.85],[],[14])  
ftla3=series(gpi,gpd)  
ftlc3=feedback(ftla3,1)
```

```
% Control con realimentación de velocidad.
```

```
% gpik Esta es la función de transferencia original con  $K_p=39.9$ 
```

```
nik=[0 0 0 39.9];  
dik=[1 9 14 0];  
gpik=tf(nik,dik)  
gr = tf([0 0 0.35 1],[0 0 0 1])  
ftlc4=feedback(gpik,gr)  
ftlc4=tf([0 0 0 39.9],[1 9 27.96 39.9])
```

```
step(ftlc0,ftlc1,ftlc2,ftlc3,ftlc4)  
impulse(ftlc0,ftlc1,ftlc2,ftlc3,ftlc4)
```

---

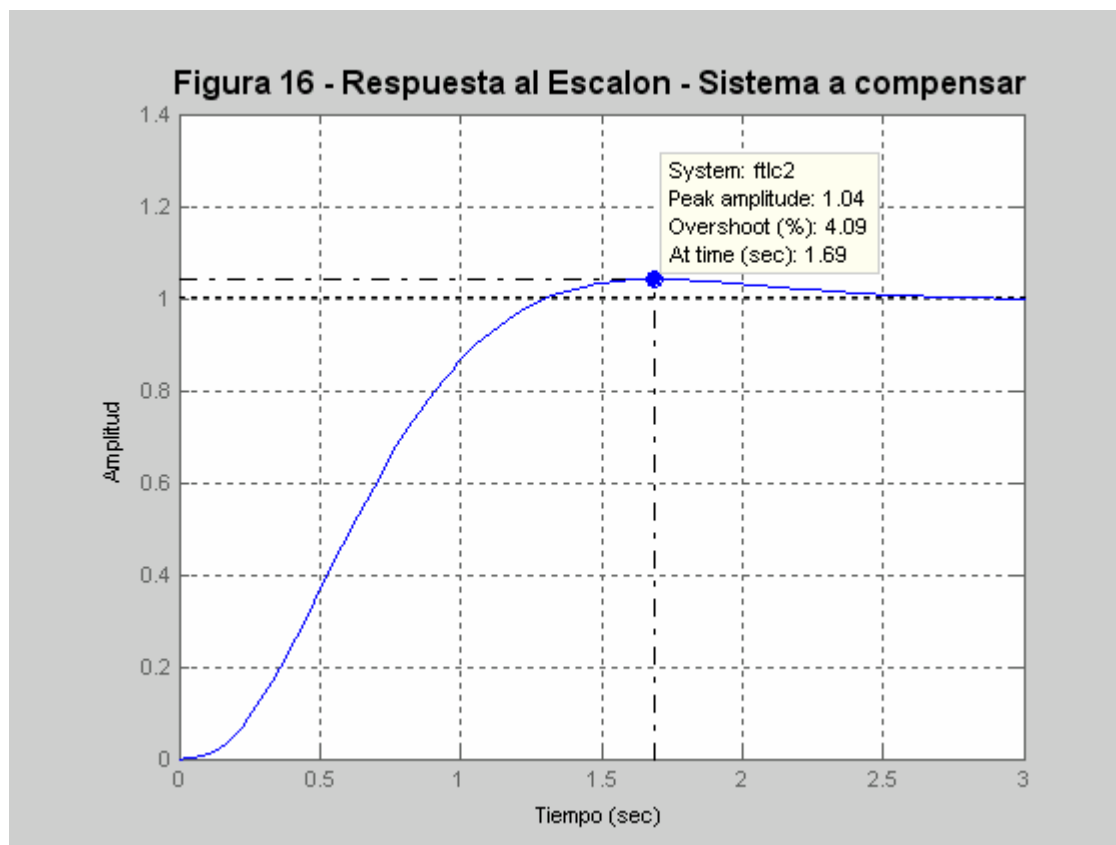
## SEGUNDA PARTE

. A los efectos de mejorar la especificación en el régimen estacionario, se pide que el sistema tenga una respuesta transitoria como la especificada originalmente:

*Polos complejos conjugados dominantes que posean una relación de coeficientes de amortiguamiento  $\zeta=0.707$  y una frecuencia angular natural no amortiguada  $\omega_n = \sqrt{8}$*

y un error en estado estacionario a)  $e_{ss} \leq 0.1$  y b)  $e_{ss} = 0$  (nulo) ante una entrada rampa. Al especificar de esta manera, necesariamente se debe incrementar el tipo de sistema, y pasar de un sistema Tipo I a un sistema Tipo 2 (dos integradores), por lo que se propone utilizar a) un controlador en atraso y b) un controlador PI en cascada con el PD. El compensador cero-polo de atraso para mejorar el comportamiento en estado estacionario, no permite eliminar el error para una entrada rampa.

El sistema compensado con cancelación, tiene una respuesta al escalón dada en la Figura 16

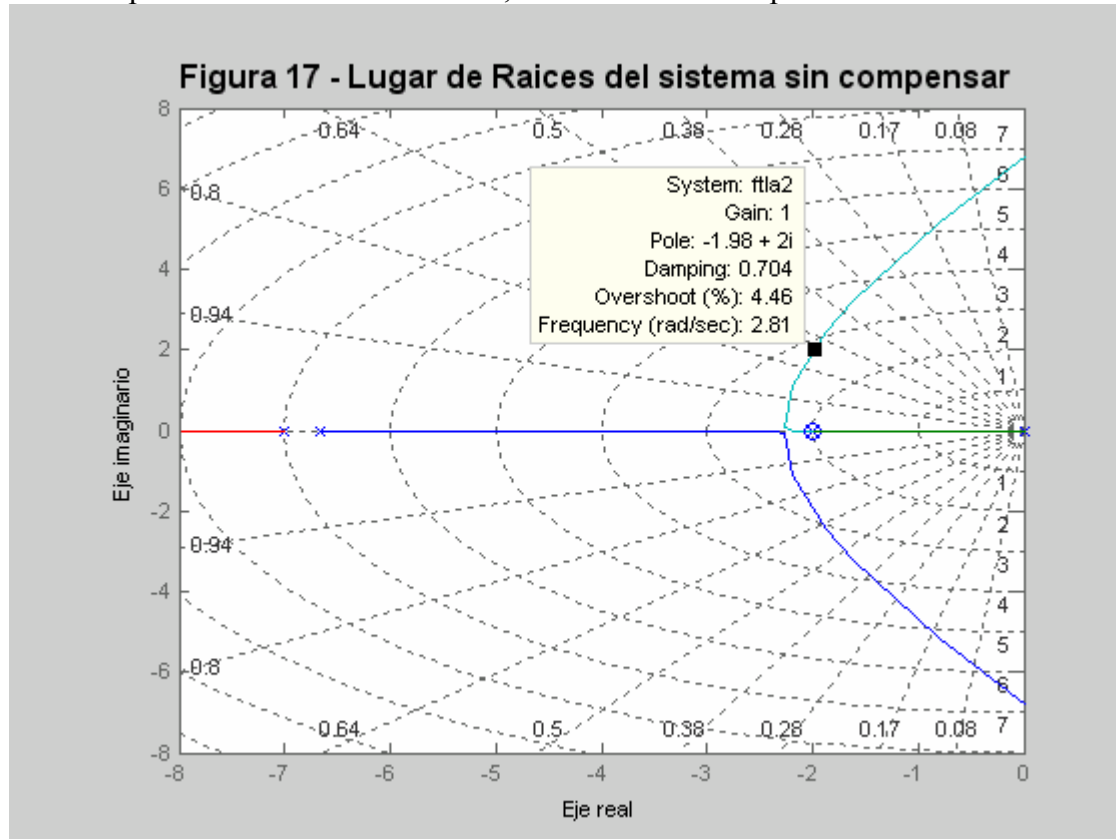


$$G_{cad} = \frac{77.24 (S + 2)}{(S + 6.66)} \quad \text{Compensador de adelanto con cancelación de polo.}$$

$$G_{cad} G_p(S) = \frac{77.24 (s+2)}{s (s+6.66) (s+7) (s+2)}$$

## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

Para compensar en estado estacionario, se utilizara una red polo-cero.



Utilizaremos un compensador de atraso de la forma

$$\beta = 6 \quad (\text{es para obtener el } K_v \text{ necesario de } 10) \quad \text{ess} = 0.1 \quad K_v = 10$$

$$G_{\text{atraso}} = K (S + 1/T) / (\beta(S + 1/\beta T))$$

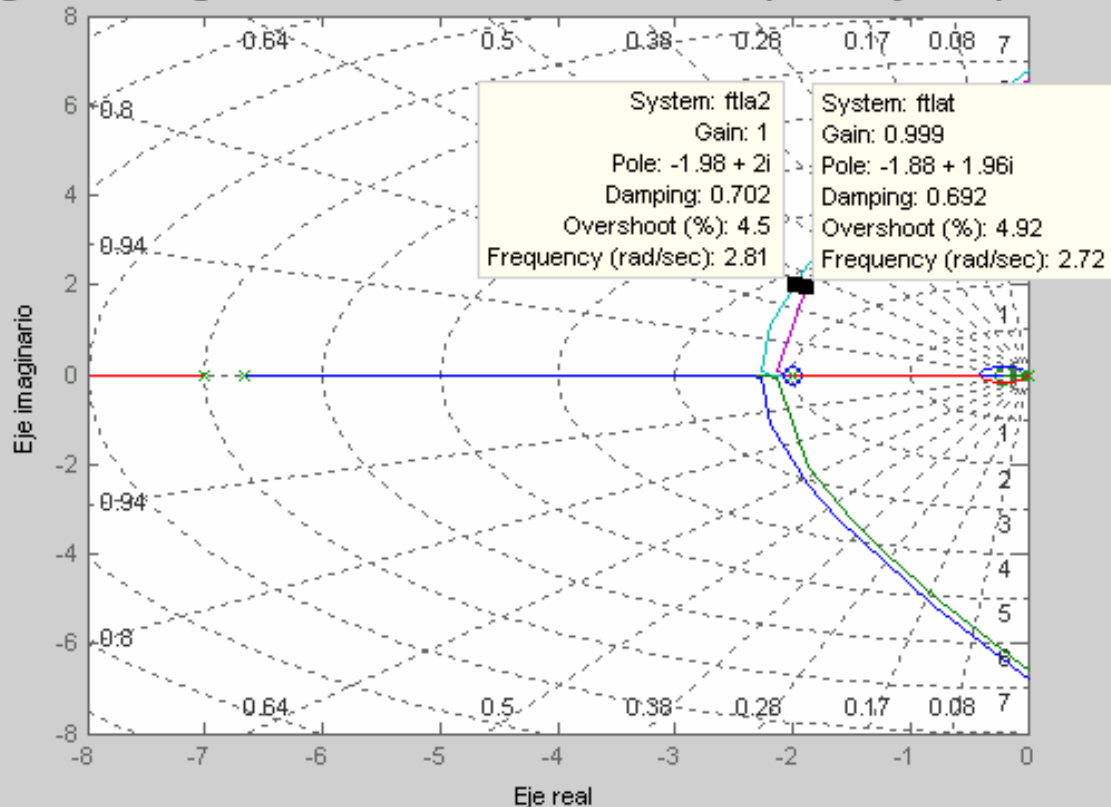
Se ubica el cero en la 1/10 parte de la parte real del polo complejo conjugado deseado.  $1/T = 0.2$

El polo se ubica en  $S = 0.033 = (1/\beta T)$ . El K necesario para ubicarse en ese lugar esta dado por la relacion de modulos en el punto deseado.  $K_t = 80.28$

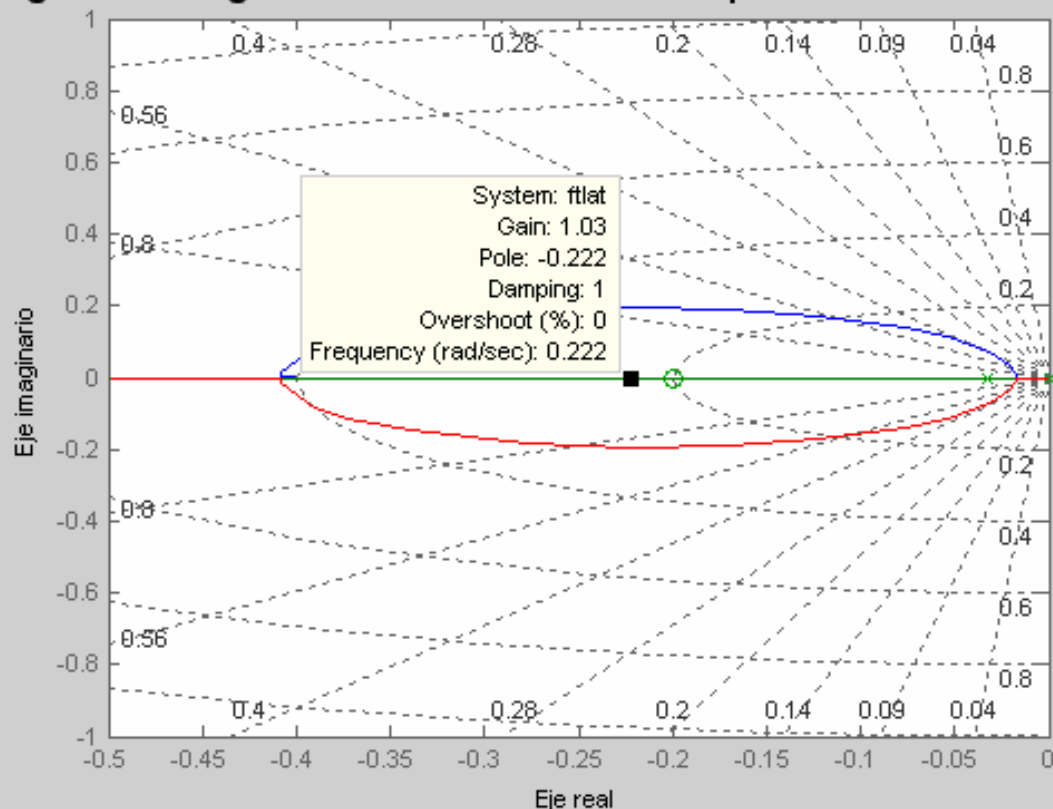
El compensador queda de la forma  $G_{\text{atraso}} = 1.04 (S + 0.2) / (S + 0.033)$



**Figura 18- Lugar de Raíces del sistema sin compensar y compensado**



**Figura 19 - Lugar de raices del sistema compensado cerca del origen**

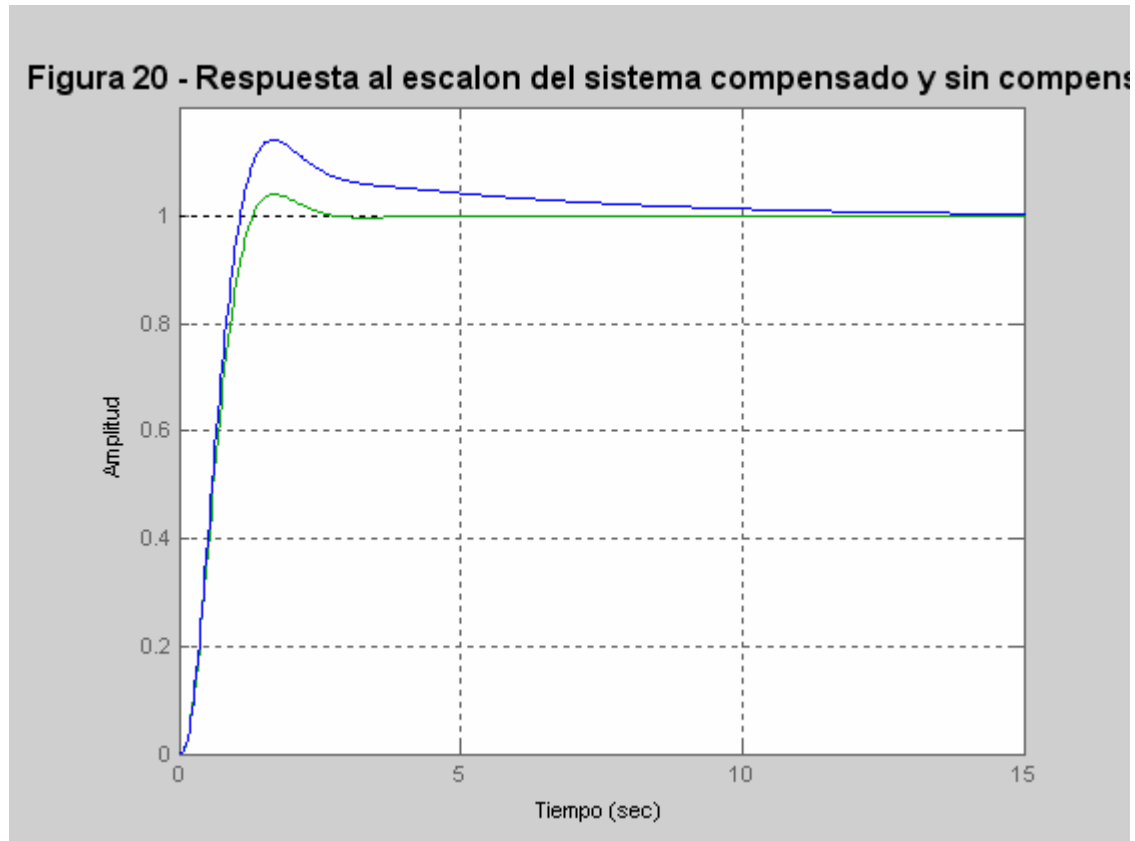


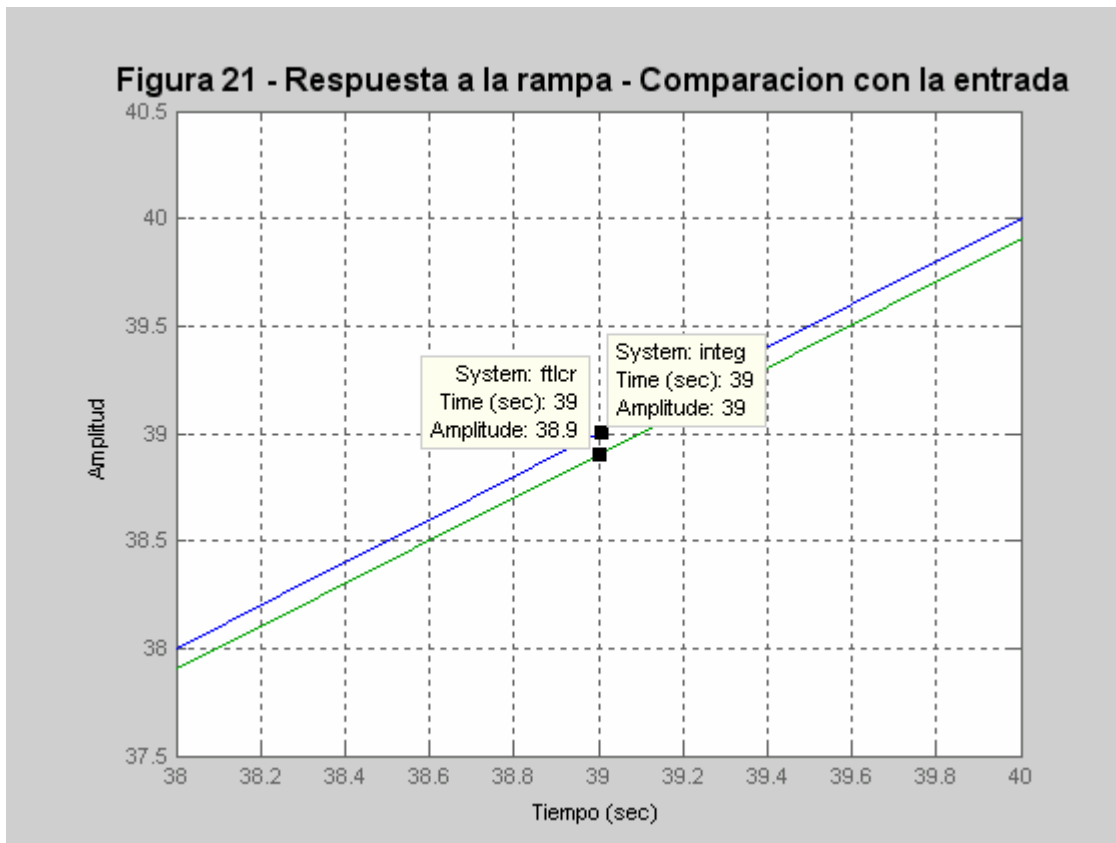
## Compensación utilizando Lugar de Raíces –

La función de transferencia total, con el compensador de adelanto y de atraso, queda

$$FTLC = \frac{80.3296 (s+2) (s+0.2)}{(s+9.689) (s+2) (s+0.223) (s^2 + 3.781s + 7.435)}$$

La respuesta al escalón y la rampa, se dan en las Figura 20 y Figura 21 respectivamente





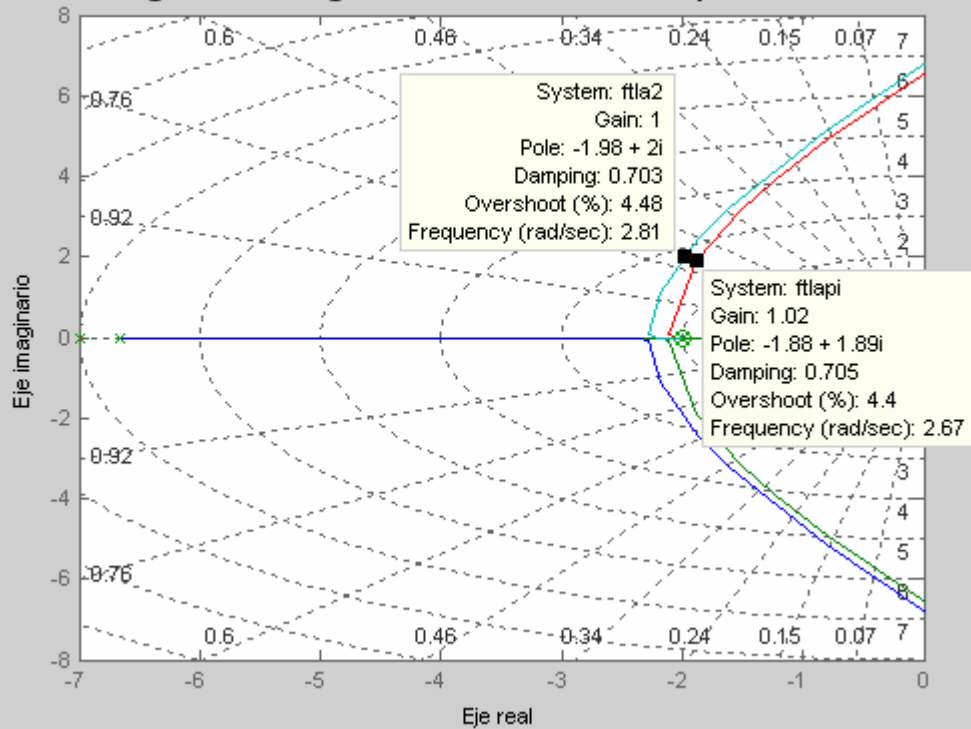
Caso 2 – Error en estado estacionario NULO – Se usa un compensado PI o P+I

De la Forma  $K_p[1 + 1/(T_i S)]$

$$\text{Glazocom} = \frac{78.7848 (s+0.2) (s+2)}{s^2 (s+6.66) (s+7) (s+2)}$$

$$\frac{78.7848 (s+2) (s+0.2)}{(s+9.661) (s+2) (s+0.229) (s^2 + 3.77s + 7.123)}$$

**Figura 22 - Lugar de raíces con el compensador PI**



**Figura 23 - Respuesta a un escalon sin compensar, Atraso y PI**

