Soluciones. 2do parcial 5R1/5R2 27-10-15.

1) Determinar por Nyquist la estabilidad del siguiente sistema: $G(s)H(s) = 0{,}5 \dfrac{s+2}{s(s-1)}$. 3,3. 1

Análisis de BF:

$$\lim_{s\to 0} 0{,}5 \frac{s+2}{s(s-1)} = \lim_{s\to 0} 0{,}5 \frac{2}{s(-1)} = \lim_{s\to 0} \frac{-1}{s.} \quad \text{con } s=j\omega$$

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{-1}{j\omega} \rightarrow \boxed{j\infty}$$

Análisis de AF:

$$\lim_{s\to\infty} 0{,}5 \frac{s+2}{s(s-1)} = \lim_{s\to\infty} 0{,}5 \frac{\cancel{s}^{1}}{s.\cancel{s}_{1}} = \lim_{s\to\infty} \frac{0{,}5}{s} \quad \text{con } s=j\omega.$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{0{,}5}{j\omega} \rightarrow \boxed{-j0}$$

Corte a los ejes: $G(s)H(s) = 0{,}5 \dfrac{s+2}{s^2-s.}$ con $s=j\omega$.

$$G(j\omega)H(j\omega) = 0{,}5 \frac{2+j\omega}{-\omega^2-j\omega} = 0{,}5 \frac{(2+j\omega)(-\omega^2+j\omega)}{\omega^4+\omega^2}$$

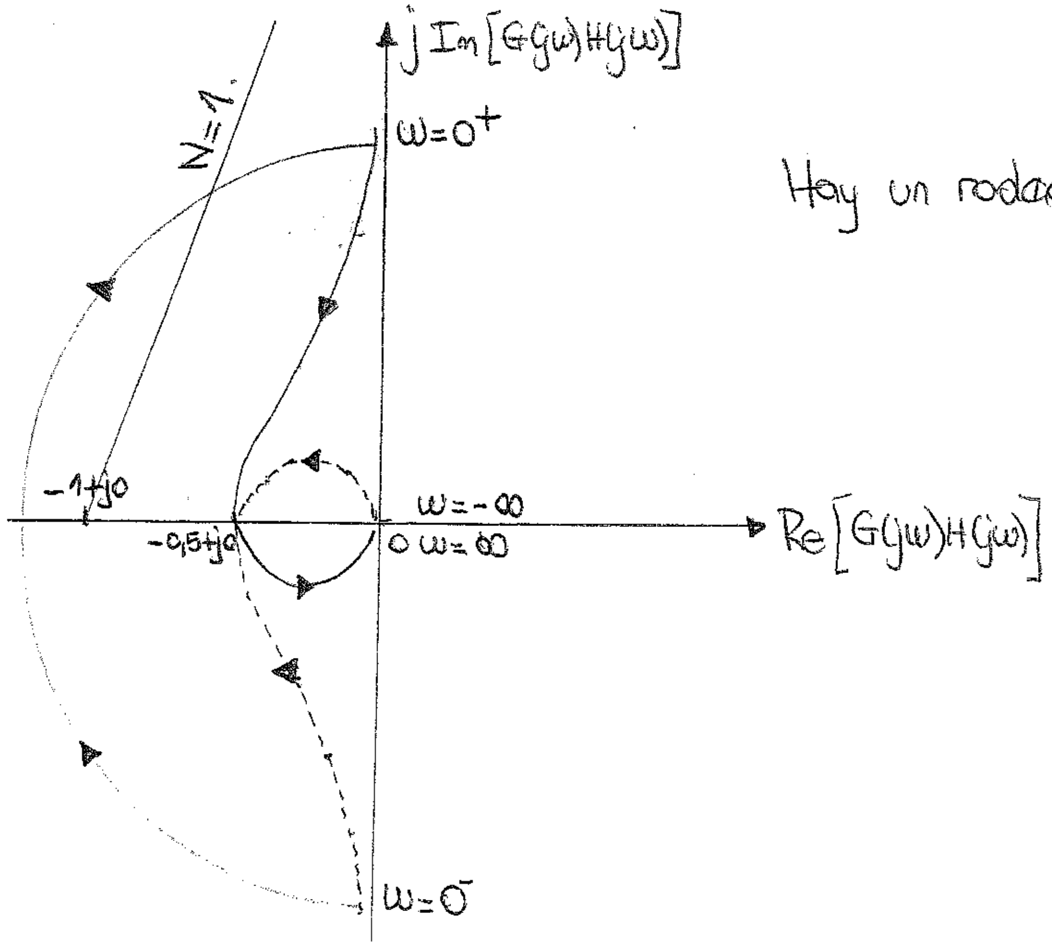
$$G(j\omega)H(j\omega) = 0{,}5 \frac{-2\omega^2+j2\omega-j\omega^3-\omega^2}{\omega^4+\omega^2} = \left[\frac{-3\omega^2+j(2\omega-\omega^3)}{\omega^4+\omega^2}\right] 0{,}5.$$

Para valores finitos de ω solo se anula la parte imaginaria:

$$2\cancel{\omega}-\omega^{\cancel{3}2}=0 \ ; \ 2-\omega^2=0 \ ; \ \omega^2=2 \ ; \ \omega = 1{,}41 \frac{rad}{seg}.$$

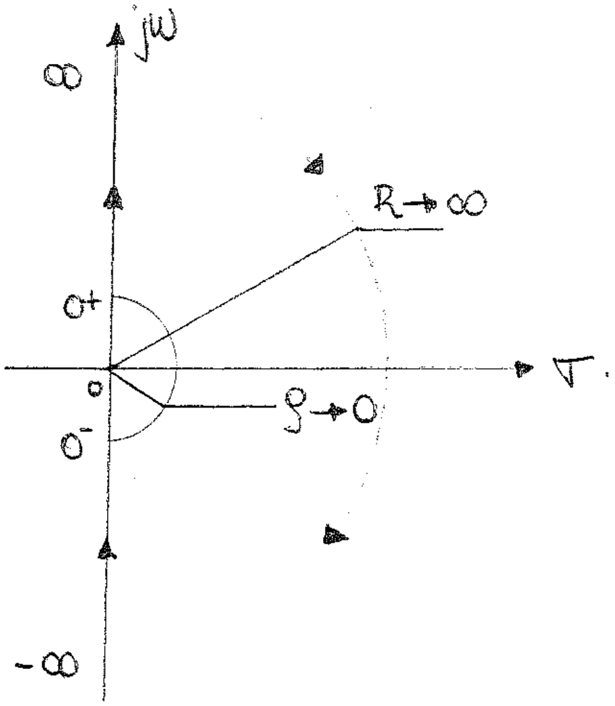
$$G(j1{,}41)H(j1{,}41) = \frac{-\cancel{6}^{1}}{\cancel{6}_{1}} \cdot 0{,}5 = \boxed{-0{,}5+j0}$$

El diagrama polar es:



Hay un rodeo horario N=1.

Como tiene un polo al origen usamos el contorno modificado de Nyquist.



Análisis de BF. con $s = \rho e^{j\theta}$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{-1}{\rho e^{j\theta}} \to \infty\, e^{j(\pi-\theta)}$$

En plano $G(j\omega)H(j\omega)$ se va al cierre por segundo y tercer cuadrante.

$N = 1 = Z - P.$

$Z = 1 + P$ con $P = 1$ por polo LA en $+1$.

$$\boxed{Z = 1 + 1 = 2 \quad \text{INESTABLE}}$$

Soluciones 2do parcial 5R1/5R2

2) Compensar por avance de fase al sistema del ejercicio anterior para $K_v = -3$ y $M\phi = 40°$. 3,4

Elegimos un compensador: $G_c(s) = K_c \dfrac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$ con $\alpha < 1$.

$$G_c(s) = K_c \frac{1}{\cancel{T}_1} \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \alpha \cancel{T}^1 = \alpha K_c \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

Vamos al cálculo de K:

$$K_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s} K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} 0{,}5 \frac{s+2}{\cancel{s}(s-1)} = K \cdot 0{,}5 \cdot \frac{2}{(-1)} = K(-1) = -3.$$

$$K = \frac{-3}{-1} = \boxed{3 = K}$$

Con esto $G_1(s)$ es:

$$G_1(s) = 3 \cdot 0{,}5 \frac{s+2}{s(s-1)} = 1{,}5 \frac{s+2}{s(s-1)} = 1{,}5 \frac{2}{(-1)} \frac{0{,}5s+1}{s(-s+1)}$$

$$G_1(s) = \frac{3}{(-1)} \frac{0{,}5s+1}{s(-s+1)} \quad \text{con } s = j\omega$$

$$G_1(j\omega) = \frac{3}{(-1)} \cdot \frac{1 + j0{,}5\omega}{(j\omega)(1 - j\omega)}$$

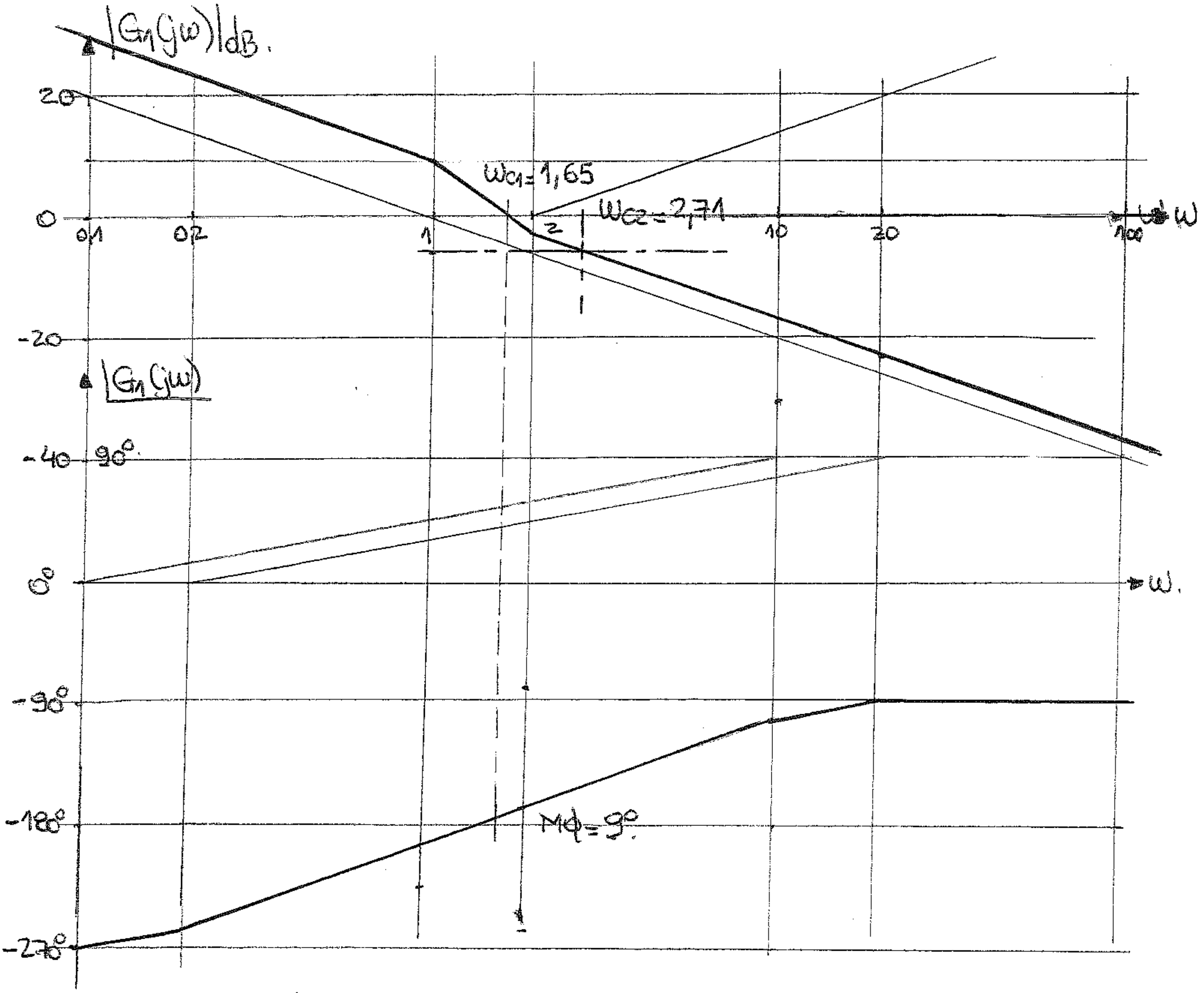
$$|G_1(j\omega)| = \frac{3}{1} \frac{\sqrt{1 + (0{,}5\omega)^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$|G_1(j\omega)|_{dB} = 9{,}54 + 10\log(1 + 0{,}25\omega^2) - 20\log\omega - 10\log(1+\omega^2).$$

$$\underline{/G_1(j\omega)} = \underline{/3} + \underline{/1 + j0{,}5\omega} - \underline{/-1} - \underline{/\omega} - \underline{/1 - j\omega}$$

$$\underline{/G_1(j\omega)} = 0^\circ + tg^{-1}0{,}5\omega - 180^\circ - 90^\circ - tg^{-1}(-\omega).$$

$$\underline{/G_1(j\omega)} = tg^{-1}0{,}5\omega - 270^\circ + tg^{-1}\omega$$



Para lograr los 40° de Mφ hay que agregar 31°. Agregamos 5° adicionales, el compensador será de $36^\circ = \phi_{máx}$.

$$\operatorname{sen}\phi_{máx} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \operatorname{sen}36^\circ = 0{,}59.$$

$$1-\alpha = 0{,}59 + 0{,}59\alpha \; ; \; 0{,}41 = 1{,}59\alpha \; ; \; \boxed{\alpha = 0{,}26}$$

La ganancia del polo y cero del compensador es:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 5{,}85\,dB.$$

Veamos en el gráfico la frec. a la cual $G_1(j\omega)$ tiene una atenuación de 5,85 dB. Esa frec. del gráfico es 2,71 $\frac{rad}{seg}$. Esta es la media geométrica del polo y cero del compensador: $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}.T} = 2,71 \frac{rad}{seg}$.

③

$$\frac{1}{T} = 1,38 \frac{rad}{seg}; \quad \frac{1}{\alpha T} = 5,31 \frac{rad}{seg}; \quad K = \alpha K_c.$$

Soluciones 2do parcial 5R1|5R2
27-10-15.

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{3}{0,26} = 11,54.$$

$$\boxed{G_c(s) = 11,54 \frac{s+1,38}{s+5,31}}$$

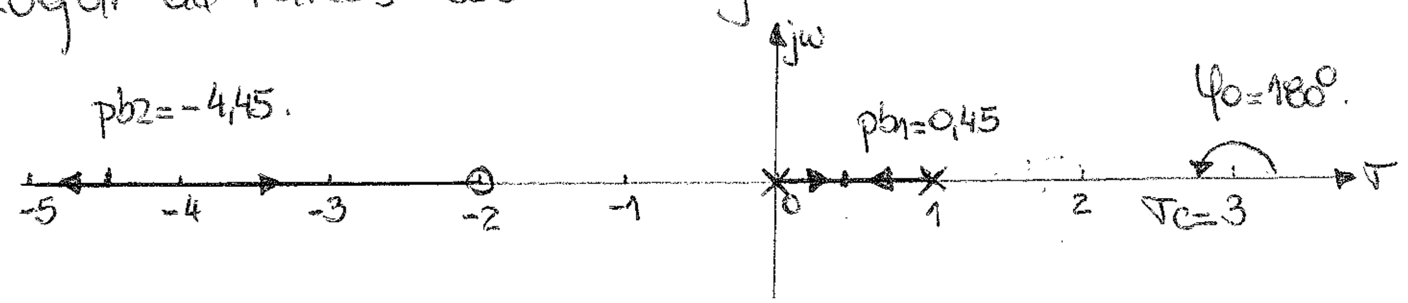
3) Ahora compensar el sistema del ejercicio 1 para 3,3.

$t_{s2\%} = 2$ seg y $K_v = -15$.

Como primera medida verificaremos el ajuste de ganancia mediante el L.R.:

$$G(s)H(s) = 0,5K \frac{s+2}{s(s-1)}$$

Lugar de raices sobre el eje real:



Hay solo una sola asintota $p - z = 2 - 1 = 1$; $K = 0$.

$$\varphi_0 = \frac{180°}{p-z}(2K+1) = 180°, \quad \sigma_c = \frac{\sum Re[p] - \sum Re[z]}{p-z}.$$

$$\sigma_c = \frac{0+1-(-2)}{2-1} = \frac{1+2}{1} = 3.$$

Punto de bifurcación:

$$1+0{,}5K\,\frac{s+2}{s(s-1)}=0\ ;\quad K=-2\,\frac{s^2-s}{s+2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s}=-2\left[\frac{(2s-1)(s+2)-(s^2-s)}{(s+2)^2}\right]=-2\left[\frac{2s^2+4s-\cancel{s}-2-s^2+\cancel{s}}{(s+2)^2}\right]=0.$$

$$-2\left[\frac{s^2+4s-2}{(s+2)^2}\right]=0\ ;\quad s^2+4s-2=0\qquad s_1=0{,}45=pb_1.$$

$$s_2=-4{,}45=pb_2.$$

Ambas raices son LR ∴ hay dos puntos de bifurcación.

La ganancia en los p.b es:

$$K(pb_1)=0{,}2.\quad ;\quad K(pb_2)=19{,}8.$$

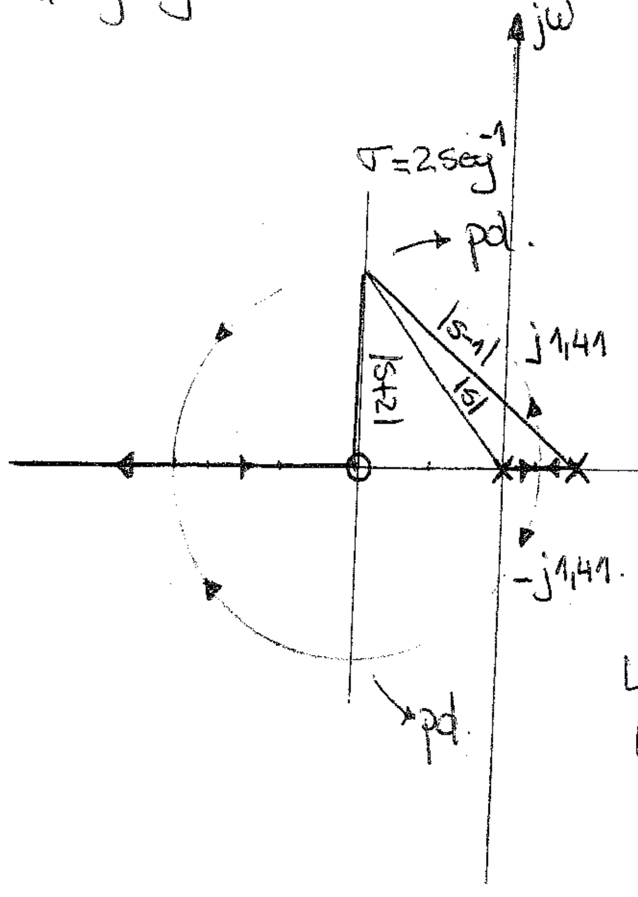
Veamos el análisis de Routh:

$$s^2-s+0{,}5Ks+K=0\ ;\quad s^2+(0{,}5K-1)s+K=0.$$

s^2	1	K
s	$0{,}5K-1$	
s^0	K.	

$$0{,}5K_c-1=0\ ;\quad 0{,}5K_c=1\ \therefore\ \boxed{K_c=2}$$

Cruce al eje $j\omega$: $s^2+2=0\ ;\ s^2=-2\ ;\ s=\sqrt{-2}=\pm j1{,}41.$



La condición de diseño:

$$ts_{2\%}=\frac{4}{\sigma}=2\ seg.$$

$$\sigma=2\ seg^{-1}.$$

Lo marcamos en el diagrama:

Punto de diseño:

$$-2\pm j2{,}45.$$

La condición de diseño corta el L.R ; puede ajustarse K:

$$K = 2\,\frac{|s|\,|s-1|}{|s+2|} = 2\,\frac{3{,}16 \cdot 3{,}87}{2{,}45} = \boxed{10 = K}$$

El sistema con la ganancia ajustada es:

$$G(s)\,H(s) = 5\,\frac{s+2}{s(s-1)}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot 5\,\frac{s+2}{\cancel{s}(s-1)} = 5 \cdot \frac{2}{(-1)} = -10$$ menor al pedido

Hay que compensar en atraso:

$$K_v = -10\,\frac{z_c}{p_c} = -15 \quad ; \quad \boxed{\frac{z_c}{p_c} = 1{,}5}$$

Del punto de diseño: $0{,}2 < z_c < 1$

elegimos $\boxed{z_c = 0{,}3}$ $\qquad p_c = \dfrac{0{,}3}{1{,}5} = \boxed{0{,}2 = p_c}$