UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

INGENIERÍA DE CONTROL

PRACTICA N˚8

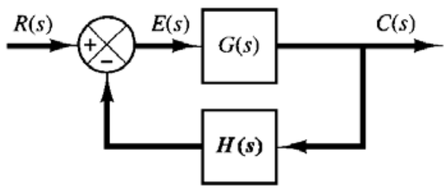
ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL POR LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÌCES

OBJETIVO

Hacer uso del comando *rltool* de *matlab* para analizar un sistema de control por lugar geométrico de las raíces.

INTRODUCCIÓN

La característica dinámica de la respuesta transitoria de los sistemas de control de lazo cerrado, está estrechamente ligada a la ubicación de los polos de lazo cerrado (raíces de la ecuación característica).
El diagrama de bloques en forma general de un sistema de control es:



La función de transferencia de lazo cerrado de este sistema de control sería:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Al término del denominador se le llama ecuación característica y las raíces de esta ecuación característica (polos de lazo cerrado) son las que tienen información sobre el comportamiento de la respuesta transitoria del sistema

$$1+G(s)H(s)=0$$

Si el sistema tiene una ganancia variable, la ubicación de los polos de lazo cerrado depende del valor de la ganancia elegida.
Si la ganancia de la función $G(s)H(s)$ la hacemos variar, tenemos diferentes ecuaciones características y por lo tanto diferentes raíces.
W.R. Evans desarrolló un método simple para hallar las raíces de la ecuación característica, este método es denominado *método del lugar de las raíces.* Este método consiste en graficar todas las raíces de la ecuación característica al variar la ganancia de cero hasta infinito.
El método del lugar de las raíces permite hallar los polos de lazo cerrado (raíces de la ecuación característica), partiendo de los polos y ceros de lazo abierto $G(s)H(s)$ tomando la ganancia como parámetro.
La idea básica del método consiste en encontrar los valores de *s* que hacen que la función de transferencia de lazo abierto sea.

$$G(s)H(s)=-1$$

Si existe un punto en el plano *s* que satisfaga las siguientes condiciones, ese punto es una raíz de la ecuación característica o polo de lazo cerrado.

Condición de ángulo:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^{\circ}\ (2n+1) \quad n = 0,1,2,3......$$

Condición de magnitud:

$$|G(s)H(s)| = 1$$

Al diseñar un sistema de control lineal, este método resulta muy útil, pues indica la forma en que hay que modificar la posición de los polos y ceros de lazo abierto para que la respuesta cumpla con las especificaciones de comportamiento de sistema.

Utilizaremos el comando ***rltool*** para graficar el lugar de las raíces.
El comando *rltool* (*P,K*) abre una interfase gráfica del usuario GUI para analizar y diseñar por el lugar de las raíces, inicializando la interfase con el modelo de la planta *P* y el modelo del compensador *K,* en formato *cero-polo-ganancia.* Si *P* y/o *K* no son dados, estos son inicializados en forma unitaria.

El comando *zpk,* crea o convierte un modelo en formato *cero-polo-ganancia*.
Este comando tiene el formato

$$P = zpk(z, p, k)$$

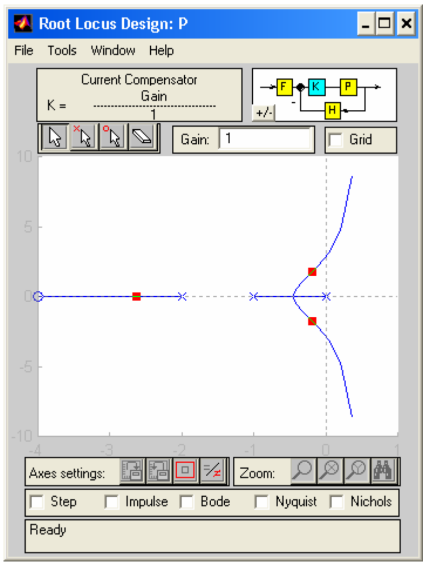
Donde:
z son los ceros
p son los polos
k es la ganancia
Ejemplo: crear el siguiente modelo

$$P = \frac{2(s+4)K}{s(s+1)(s+2)}$$

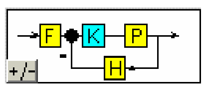
Esta función tiene un cero en -4, tiene 3 polos en 0, -1 y -2, y una ganancia de 2.

$$P = zpk\left([-4],[0\ -1-2],2\right)$$

Ejecutamos el comando ***rltool(P)*** para obtener el lugar de las raíces.

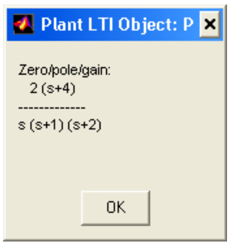


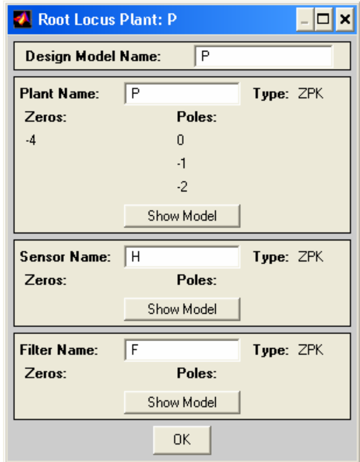
Este comando analiza un sistema de control retroalimentado como se muestra en la siguiente figura.
Donde:
P es la función de transferencia de la planta.
H es la función de transferencia de retroalimentación
K es la función de transferencia del compensador o controlador
F es la función de transferencia que está en cascada con el lazo cerrado.



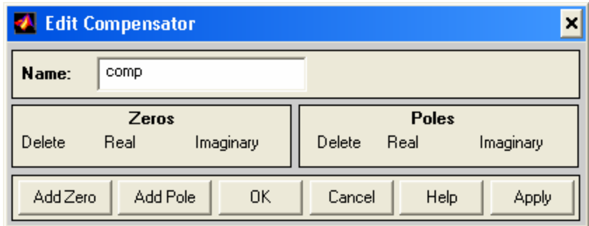
Podemos tener retroalimentación negativa o positiva dando un clic con el mouse en **+/-**.

Al darle un clic en cualquiera de los bloques *P*, *H* o *F* nos mostrará la siguiente ventana dándonos el nombre de la variable de *matlab* que está asociada con el modelo, además nos da la función de transferencia de cada bloque **P**, **H**, o **F**, dando un clic en *show model.* Para la planta *P* tenemos.

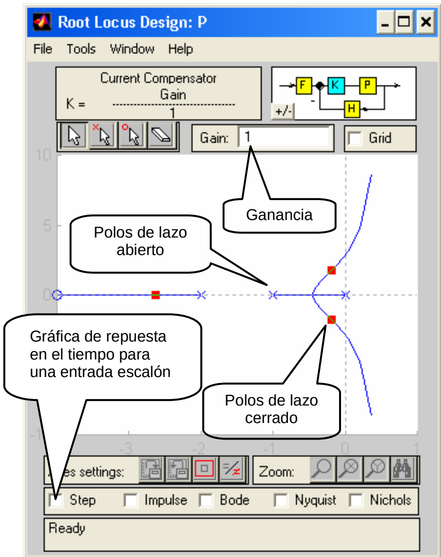




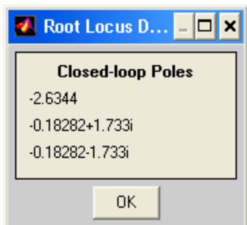
Dando un clic en el bloque del compensador **K** nos abre una ventana como se muestra.
En la cual podemos agregar polos y/o ceros, reales o complejos dando un clic en Add Pole o Add Zero.

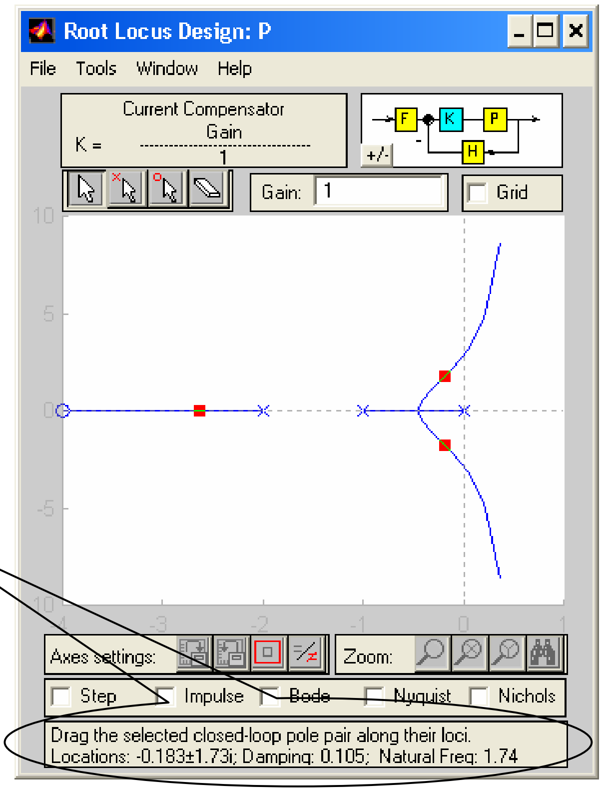


Al ejecutar el comando ***rltool(P)*** nos mostrará el lugar de las raíces de la función *P*. En ella nos indicará con una cruz la ubicación de los polos de lazo abierto, y con un cuadro la ubicación de los polos de lazo cerrado, que corresponde a la ganancia especificada en *Gain*, estos polos de lazo cerrado se pueden mover utilizando el mouse y correspondería a otro valor de ganancia, también podemos darle un valor de ganancia en *Gain* y nos mostrará la ubicación de los polos de lazo cerrado para esa ganancia.



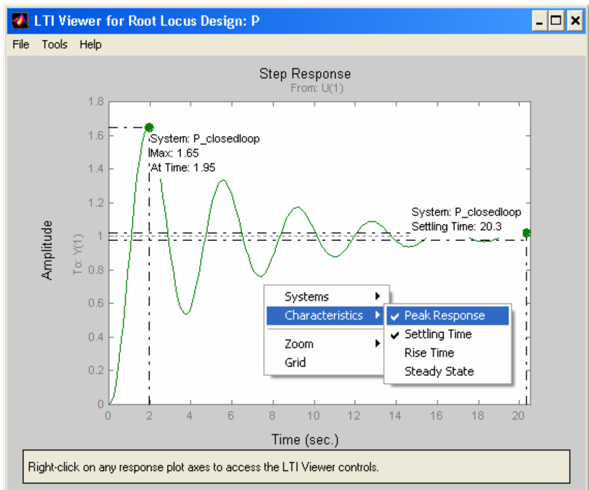
Para conocer los valores exactos de los polos de lazo cerrado, nos dirigimos a *tools* en la barra de menu y seleccionamos *List Closed-loop Poles*.





Dándole un clic con el botón izquierdo del Mouse sobre cualquier polo de lazo cerrado de la gráfica, procurando no modificar la ganancia, podemos tener información adicional en la parte de debajo de la gráfica, sobre la ubicación de los polos de lazo cerrado, relación de amortiguamiento o frecuencia natural no amortiguada.

Ganancia: $K = 1$
Polos de lazo cerrado: $-1.83 \pm 1.73i$
Relación de amortiguamiento: $\zeta = 0.105$
Frecuencia natural no amortiguada: $\omega_n = 1.74$

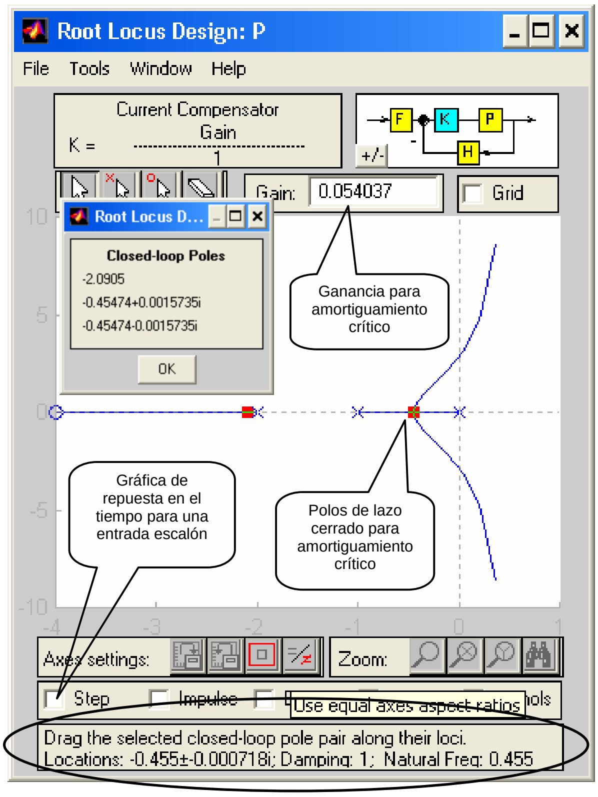


Para obtener las características de la respuesta en el tiempo del sistema de control, se presiona el botón derecho del Mouse sobre la gráfica, escogemos *Characteristic*, luego escogemos *Peak Response, Settling Time, Rise Time o Steady State.*
Con el *Peak Response* obtenemos el máximo sobreimpulso y el tiempo pico, con el *Settling Time* obtenemos el tiempo de asentamiento, con *Rise Time* obtenemos el tiempo de crecimiento, con *Steady State* obtenemos el valor de la magnitud en el cual se estabiliza el sistema.

De la gráfica obtenemos lo siguiente:

Máximo sobreimpulso: $M_p = 65\%$
Tiempo pico: $t_p = 1.95$
Tiempo de asentamiento: $t_s = 20.3$
Magnitud de estabilización: $c(\infty) = 1$

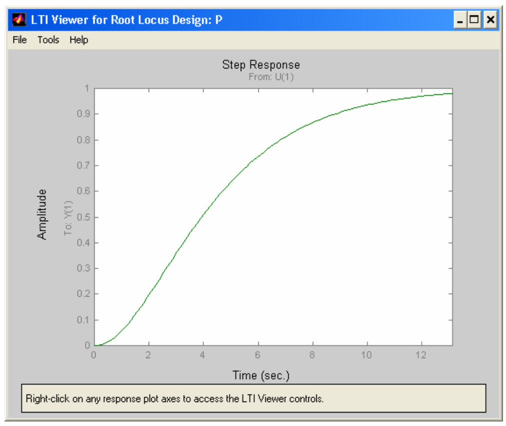
Respuesta críticamente amortiguada $\zeta = 1$



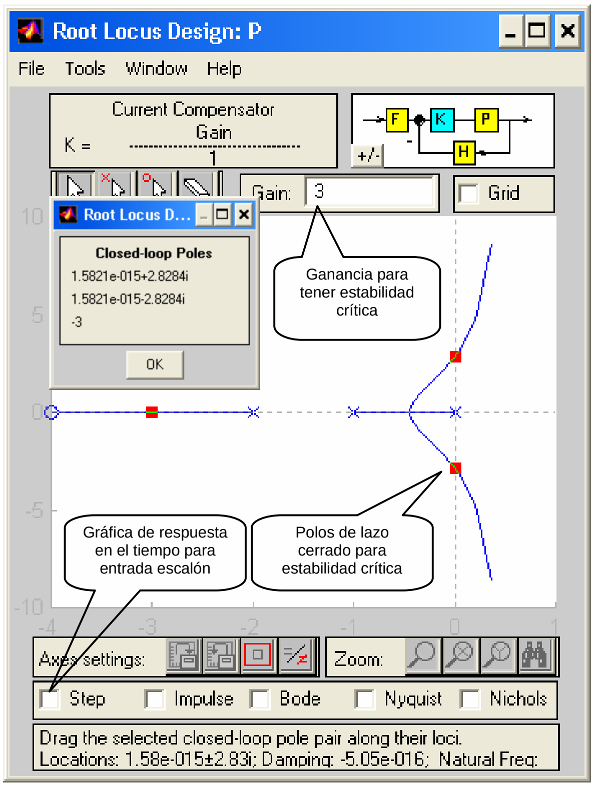
Podemos obtener el valor de la ganancia **K** y la ubicación de los polos de lazo cerrado para tener un comportamiento de amortiguamiento crítico en su respuesta. Con el cursor ubicamos las raíces de lazo cerrado antes de que estas dejen el eje real.

Ganancia: $K = 0.054037$
Polos de lazo cerrado: $-0.455 \pm 0.000718i$
Relación de amortiguamiento: $\zeta = 1$
Frecuencia natural no amortiguada: $\omega_n = 0.455$

La respuesta en el tiempo a una entrada escalón unitario sería para la ganancia $K = 0.054037$

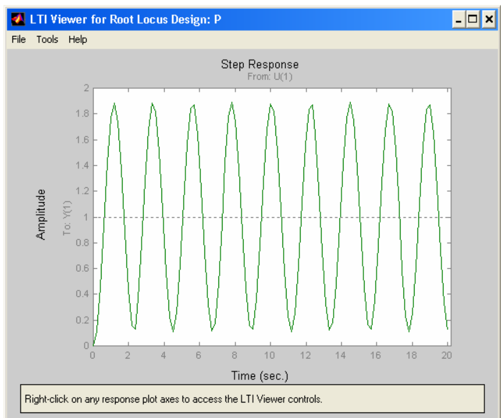


Respuesta sin amortiguamiento $\zeta = 0$



Para obtener el valor de la ganancia K y la ubicación de las raíces para tener estabilidad crítica. Con el mouse ubicamos los polos de lazo cerrado cuando estos se encuentren sobre el eje imaginario.

Ganancia: $K = 3$
Polos de lazo cerrado: $0 \pm 2.83i$
Relación de amortiguamiento: $\zeta = 0$
Frecuencia natural no amortiguada: $\omega_n = 2.83$

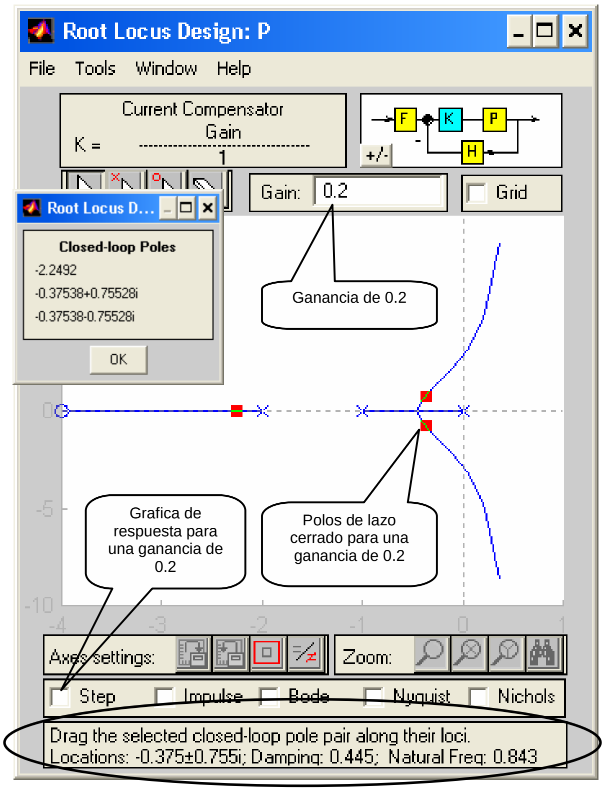


La respuesta en el tiempo a una entrada escalón unitario para la ganancia $K = 3$

Para obtener las características de respuesta del sistema de lazo cerrado para una ganancia $K = 0.2$

Ponemos en Ganancia (Gain) 0.2

Polos de lazo cerrado: $-0.375 \pm 0.755i$
Relación de amortiguamiento: $\zeta = 0.445$
Frecuencia natural no amortiguada: $\omega_n = 0.843$



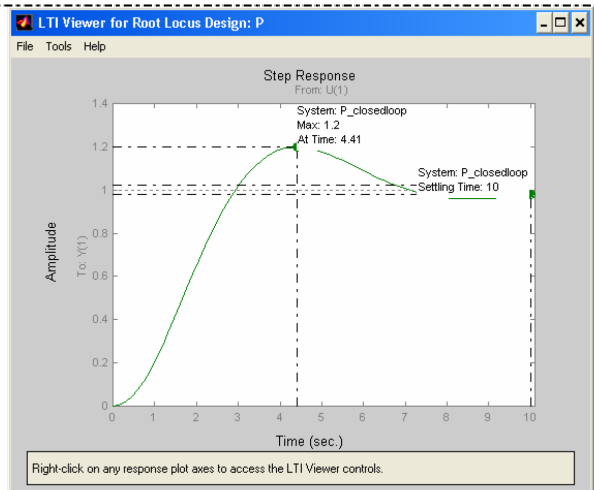
La respuesta en el tiempo a una entrada escalón unitario para la ganancia 0.2.

De la gráfica obtenemos las siguientes caracteristicas:

Máximo sobrepaso $\%M_p = 20\%$

Tiempo pico $t_p = 4.41\ seg$

Tiempo de estabilización $t_s = 10\ seg$



REPORTE

Para el siguiente sistema de lazo abierto determine lo siguiente.

$$G(S)=\frac{1}{s(s+3)(s+6)}$$

1. Trazar el lugar geométrico de las raíces.
2. Obtener la ganancia, los polos de lazo cerrado y la respuesta en el tiempo para una entrada escalón unitario para tener una respuesta críticamente amortiguada.
3. Obtener la ganancia, los polos de lazo cerrado y la respuesta en el tiempo para una entrada escalón unitario para tener una respuesta sin amortiguamiento.
4. Obtener las características de respuesta (polos de lazo cerrado, ζ, ω_n, $\%M_p$, t_p, t_s, $c(\infty)$) y la respuesta en el tiempo para una entrada escalón unitario para una ganancia $K=35$.
5. Obtener las características de respuesta (polos de lazo cerrado, ζ, ω_n, $\%M_p$, t_p, t_s, $c(\infty)$) y la respuesta en el tiempo para una entrada escalón unitario para una ganancia $K=22$.
6. Conclusiones