UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

LABORATORIO DE INGENIERÍA DE CONTROL

PRACTICA N° 6

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

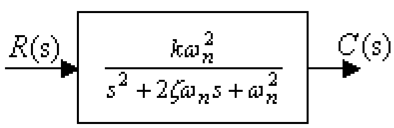
OBJETIVO

Hacer uso de los comandos de *matlab* y *simulink* para analizar un sistema de control de segundo orden.

INTRODUCCION

Las características de respuesta transitoria tales como tiempo de subida, tiempo pico, máximo sobreimpulso, tiempo de asentamiento y error en estado estacionario se pueden determinar a partir de la respuesta a un cambio en su entrada.

Considere el sistema de segundo orden de la figura



$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

donde k es la ganancia del sistema, ω_n es la frecuencia natural no amortiguada y ζ es la relación de amortiguamiento.
Las raíces del denominador, polos de $G(s)$, están dados por

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

Puede observarse que la naturaleza de las raíces depende del valor de ζ, es decir

- Si $\zeta>1$, se dice que el sistema es ***sobreamortiguado*** y las raíces son reales y diferentes y están dadas por

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

- Si $\zeta=1$, se dice que el sistema es ***críticamente amortiguado*** y las raíces son reales e iguales y están dadas por

$$s_{1,2}=-\omega_n$$

- Si $0<\zeta<1$, se dice que el sistema es ***subamortiguado*** y las raíces son complejas conjugadas, y están dadas por

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-\sigma \pm j\omega_d$$

donde $\sigma=\zeta\omega_n$ es el factor de atenuación y $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ es la frecuencia natural amortiguada

- Si $\zeta > 0$, se dice que el sistema es ***sin amortiguamiento*** y las raíces son imaginarias y están dadas por

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

La respuesta en el tiempo para una entrada escalón unitario $R(s) = 1/s$ sería

$$C(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace para cada caso, quedaría:

- *Caso sobreamortiguado:* $C(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)$

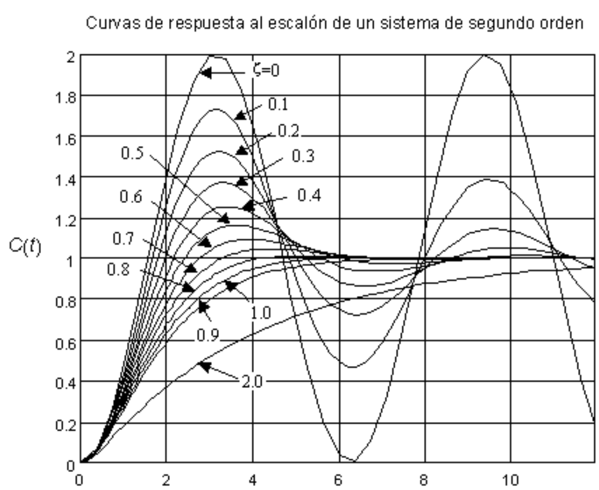
  donde $s_1 = \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ y $s_2 = \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

- *Caso críticamente amortiguado:* $C(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$

- *Caso subamortiguado:* $C(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[Cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} Sen(\omega_d t)\right]$

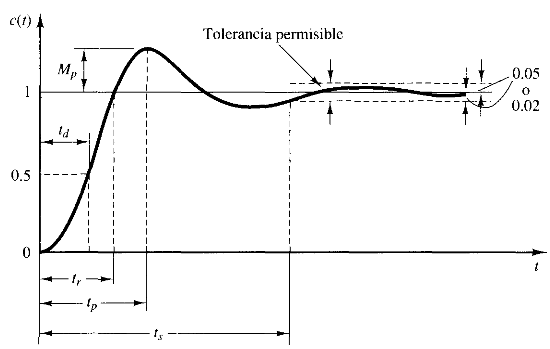
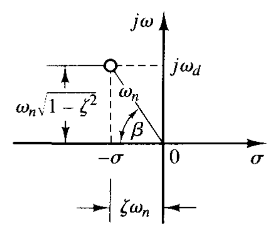
- *Caso sin amortiguamiento:* $C(t) = 1 - Cos\,\omega_n t$

La respuesta de los sistemas de segundo orden a una entrada escalón unitario se muestra en la siguiente figura



Especificaciones de Respuesta Transitoria

Las especificaciones de respuesta transitoria se definen para sistemas de segundo orden subamortiguados para una entrada escalón y son:

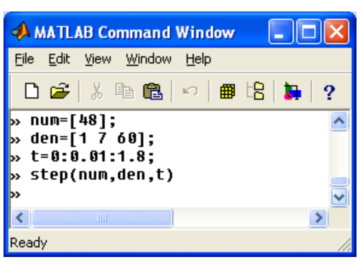
Tiempo de elevación o crecimiento, t_r :	$t_r = \dfrac{\pi - \beta}{\omega_d}$
Tiempo pico, t_p :	$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$
Máximo sobrepaso porcentual, $\%M_p$:	$\%M_p = \dfrac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100$ $\%M_p = 100\, e^{\left(-\pi\zeta / \sqrt{1-\zeta^2}\right)}$
Tiempo de asentamiento, t_s :	$t_s = 4\tau = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$
	 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $\zeta = \cos\beta$

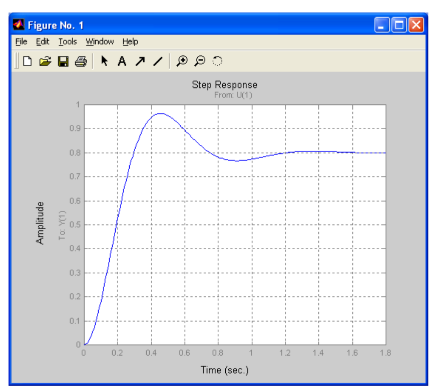
Ejemplo

Obtenga la respuesta en el tiempo a una entrada escalón unitario con el comando *step* para el sistema que se muestra. Grafique para un tiempo de 0 a 1.8.

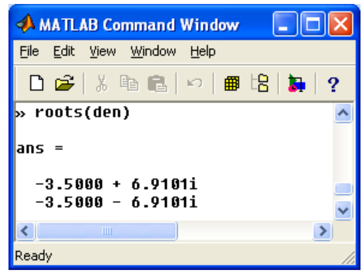
$$g = \frac{48}{s^2 + 7s + 60}$$

El procedimiento en el matlab sería





Las raíces de la ecuación característica del sistema de control son complejas conjugadas.
Por lo que la respuesta del sistema es subamortiguada. El sistema se le denomina subamortiguado.

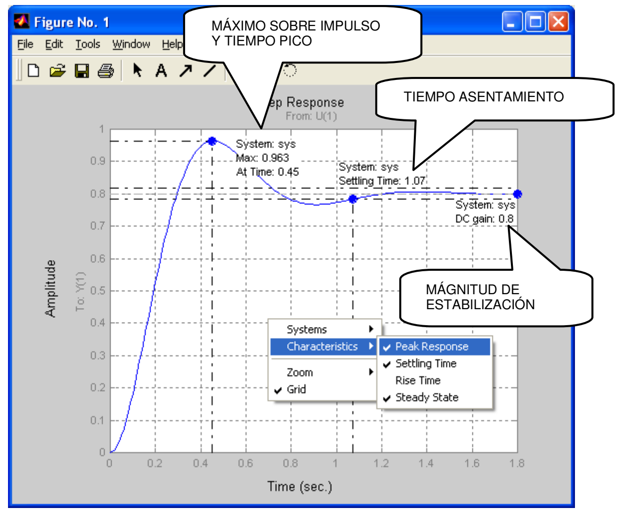


Para obtener las características de la respuesta en el tiempo del sistema de control, se presiona el botón derecho del mouse sobre la grafica, escogemos *Characteristics*, luego escogemos *Peak Response*, *Settling Time* o *Steady State*.
Con *Peak Response* obtenemos el máximo sobre impulso y el tiempo pico, con *Settling Time* obtenemos el tiempo de asentamiento, con *Steady State* obtenemos el valor de la magnitud en el cual se estabiliza.
Con el máximo sobre impulso de la gráfica obtenemos el máximo sobre impulso porcentual

$$\%M_p = \frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)}*100 = \frac{0.963-0.8}{0.8}*100 = 20.37\%$$

Y con la relación, $\%M_p = 100\, e^{\left(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}$ obtenemos la relación de amortiguamiento ζ

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{\ln(\%M_p/100)}\right)^2+1}} = 0.452$$



De la gráfica obtenemos:
Tiempo pico $t_p = 0.45$
Tiempo de asentamiento $t_s = 1.07$
Magnitud de estabilización $c(\infty) = 0.8$

REPORTE

Usando el Matlab

1. Obtenga la respuesta en el tiempo de 0 a 6 seg. a una entrada escalón unitario para cada uno de los sistemas utilizando el comando *step*, grafique las cuatro gráficas juntas y compárelas.

$g1 = \frac{13}{s^2 + 4s + 13}$	$g2 = \frac{4}{s^2 + 4s + 4}$	$g3 = \frac{9}{s^2 + 9}$	$g4 = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$

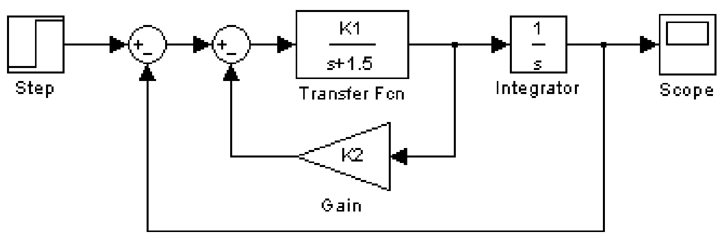
2. Obtenga las raíces del polinomio del denominador (comando *roots*) de cada sistema y diga a partir de sus raíces a que tipo de respuesta corresponde.

    a. Respuesta sobreamortiguada
    b. Respuesta críticamente amortiguada
    c. Respuesta subamortiguada
    d. Respuesta sin amortiguamiento

3. Diga cuál sistema tiene respuesta subamortiguada (oscilatoria) y determine de la gráfica el máximo sobrepaso $\%M_p$, tiempo pico t_p, tiempo asentamiento t_s y tiempo de crecimiento t_r.

Usando el simulink

4. Modele El siguiente sistema en el simulink, considere $K1 = 4$ y $K2 = 0.125$



Grafique la respuesta en el tiempo para una entrada escalón de magnitud 2 que inicie en el tiempo cero y con un tiempo de simulación de 8 seg, obtenga de la gráfica el tiempo pico t_p, el tiempo de estabilización t_s, el máximo sobrepaso $M_p\%$, y la magnitud en la cuál se estabiliza.