UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL – FACULTAD REGIONAL CÓRDOBA
INGENIERÍA ELECTRÓNICA – PRIMER EXAMEN PARCIAL – 5R1
SISTEMAS DE CONTROL

Nota: El examen debe realizarse en hojas tamaño A4 con tinta indeleble. La presentación, ortografía e inteligibilidad de lo escrito, podrán modificar la calificación final hasta en un 10%. Durante la realización del examen no está permitido el uso de teléfonos celulares.

Tema 1 (3,5 puntos)

Considere el sistema de control de posición angular que se muestra en la Figura 1. Un servomotor de CC controlado por inducido, alimentado por un amplificador de ganancia Av, mueve una carga con momento de inercia J_L. L es la inductancia de inducido y R la resistencia. El par desarrollado por el motor es T. El momento de inercia del motor es J_M. Los desplazamientos angulares del rotor del motor y del elemento de carga son respectivamente Θ_m y Θ. La relación entre los engranajes es $n = \frac{\theta}{\theta_m}$. La constante de fuerza contraelectromotriz es K_b [V/r/s] y la constante de par motor es K_T [Nm/A]. La posición angular Θ de la salida se mide con un sensor de posición con constante K_Θ [V/r]. Se pide:

a) Obtener la función de transferencia $\Theta(s)/V_\Theta(s)$
b) Realizar el diagrama de bloques del sistema, explicitando la función de transferencia de cada uno de los elementos que lo conforman.

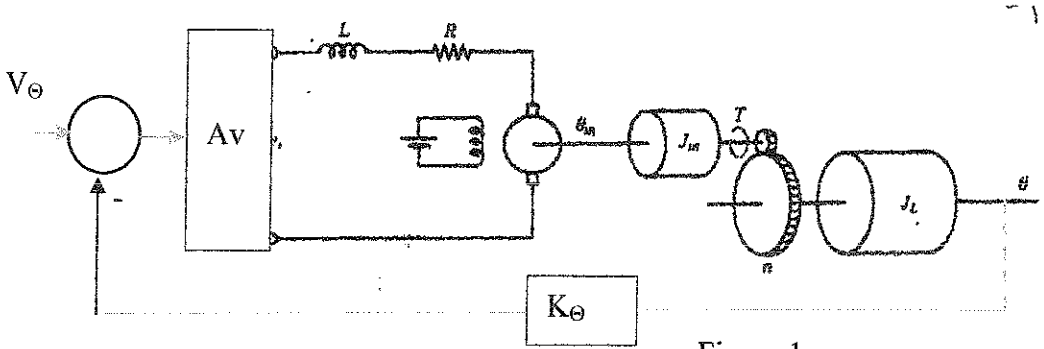


Figura 1

Tema 2 (1,5 puntos)

Considere un sistema de control con realimentación unitaria con función de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

Determina la función de transferencia de lazo abierto G(s). Luego demuestre que el error en estado estacionario en la respuesta a rampa unitaria puede obtenerse mediante:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{a - K}{b}$$

Tema 3 (1,5 puntos)

Un sistema de control de lazo cerrado con realimentación negativa unitaria, tal como el del Diagrama 1, posee un lugar geométrico de las raíces tal como el que se da en la Figura 2, para $0<K<\infty$.

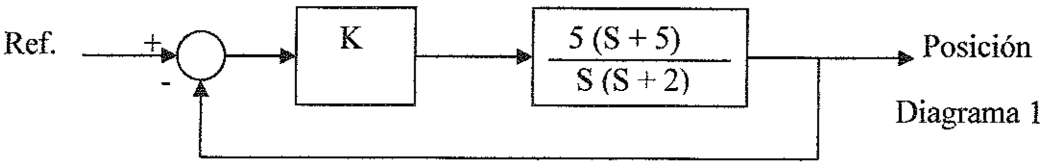


Diagrama 1

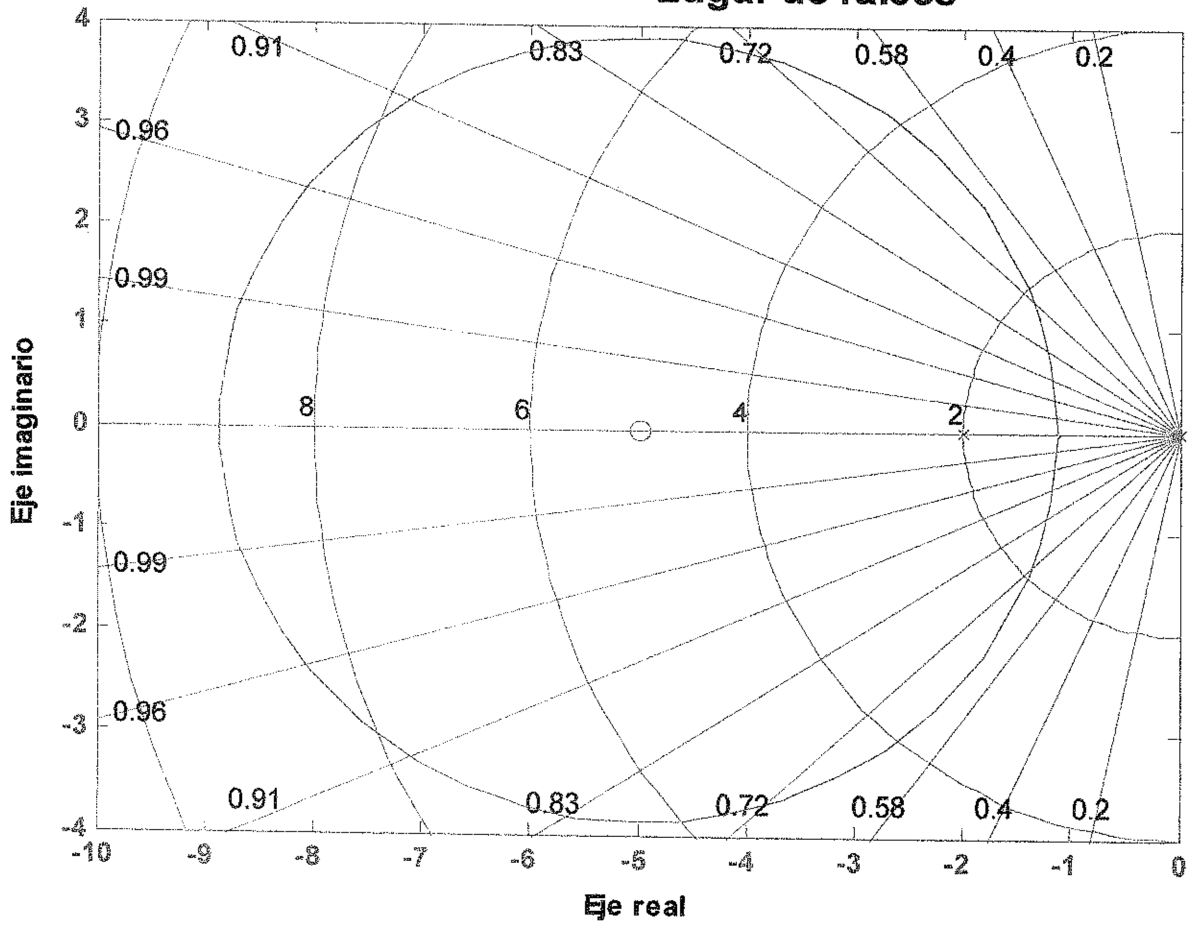
Se pide:

Determinar la ganancia K necesaria para que el sistema presente polos complejos conjugados con una relación de coeficientes de amortiguamiento $\zeta = 0.72$ y la mayor frecuencia angular natural no amortiguada ω_n posible.

Tema 4 (3,5 puntos)

a) ¿Qué significan y como se definen el margen de fase y el margen de ganancia en el análisis de respuesta en frecuencia de los sistemas lineales?
b) ¿Cómo se determina el coeficiente de error en estado estacionario para una entrada rampa unitaria de un sistema tipo 1 en el diagrama de Bode de respuesta en frecuencia?
c) Cuando se excita un sistema LIT con una señal x(t) se obtiene una salida con transformada de Laplace Y(S).
¿Cuál es la salida Y(s), si la entrada es $x(t-t_o)$ (Señal corrida en el tiempo t_o segundos?
d) En un sistema de segundo orden, para que rango de valores de ζ (relación de coeficientes de amortiguamiento) se produce una relación de ganancia > 1 en el análisis de respuesta en frecuencia? ¿Cuál es la frecuencia de resonancia?

FIGURA 2 - Lugar de raices -



Soluciones 1er parcial 5R1. 27-06-17.

Tema 1: Desarrollaremos bloque a bloque el controlador de posición angular. (1)

(a) Reflexión carga al eje del motor: la potencia en ambos ejes es igual: $T_m(t)\cdot\dot{\theta}_m(t) = T_L(t)\,\dot{\theta}(t)$.

como $n = \dfrac{\theta(t)}{\theta_m(t)}$ tendremos: $T_m(t)\,\dfrac{\cancel{\dot\theta(t)}}{n} = T_L(t)\,\cancel{\dot\theta(t)}$

$$\boxed{T_L(t) = \frac{T_m(t)}{n}}$$

$\theta(t) = n\,\theta_m(t)$, derivando respecto a "t"

$\dot\theta(t) = n\,\dot\theta_m(t)$; $\boxed{\ddot\theta(t) = n\,\ddot\theta_m(t)}$

El par en el eje de la carga es:

$$T_L(t) = J_L\,\ddot\theta(t)$$

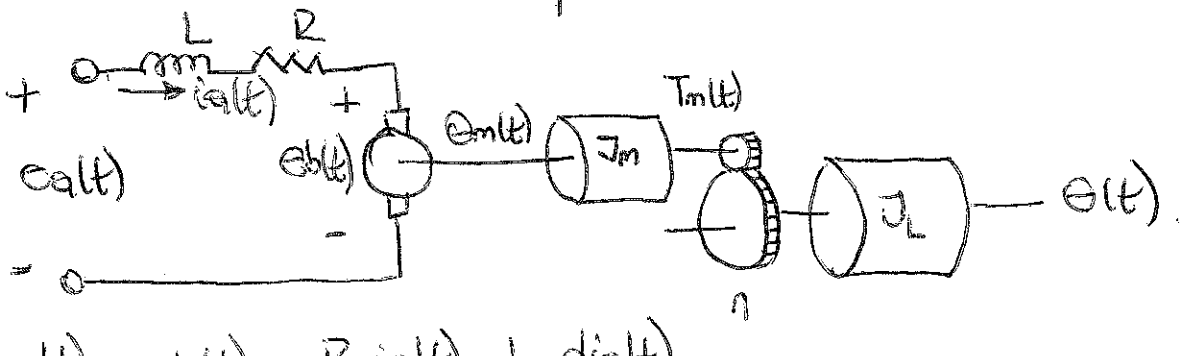
reemplazando

$$\frac{T_m(t)}{n} = J_L\, n\,\ddot\theta_m(t)$$

$$T_m(t) = n^2 J_L\,\ddot\theta_m(t).$$

dado que $T_m(t)$ y $\ddot\theta_m(t)$ son parámetros en el eje del motor $n^2 J_L$ representa la reflexión de la carga al eje del motor. Con esto el momento de inercia del motor será: $\boxed{J_m + n^2 J_L}$

(b) Motor de C.C. controlado por armadura:



$$e_a(t) - e_b(t) = R\,i_a(t) + L\,\frac{di_a(t)}{dt}.$$

Aplicando Laplace:

$$E_a(s) - E_b(s) = (R + Ls)\, I_a(s).$$

$$\frac{I_a(s)}{E_a(s) - E_b(s)} = \frac{1/L}{s + R/L} \quad [\Omega^{-1}]$$

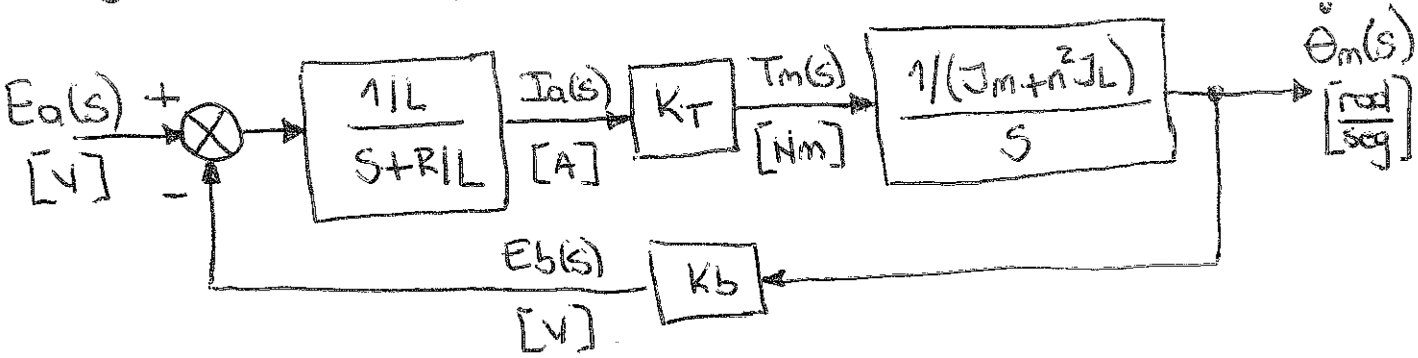
$$T_m(t) = K_T\, i_a(t) \;\therefore\; \frac{T_m(s)}{I_a(s)} = K_T \left[\frac{Nm}{A}\right]$$

$$T_m(t) = (J_m + n^2 J_L)\, \ddot{\theta}_m(t) \; ; \; T_m(s) = (J_m + n^2 J_L)\, s^2\, \theta_m(s).$$

$$\frac{\theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1/(J_m + n^2 J_L)}{s^2} \; ; \; \frac{\dot{\theta}_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1/(J_m + n^2 J_L)}{s}$$

$$e_b(t) = K_b\, \dot{\theta}_m(t) \; ; \; \frac{E_b(s)}{\dot{\theta}_m(s)} = K_b$$

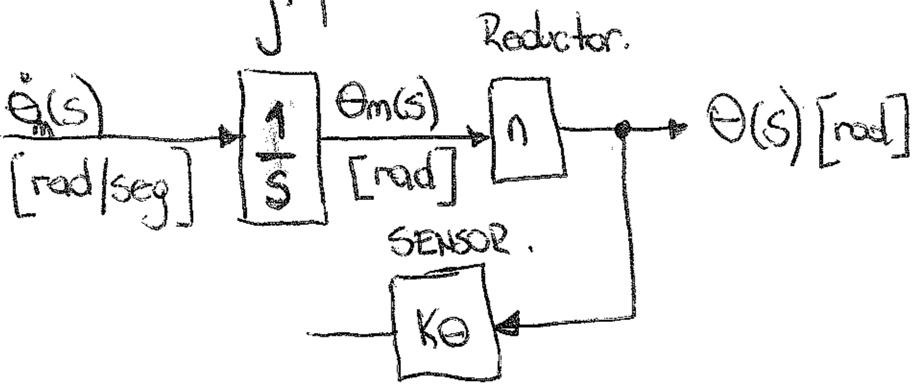
El diagrama en bloques del motor:



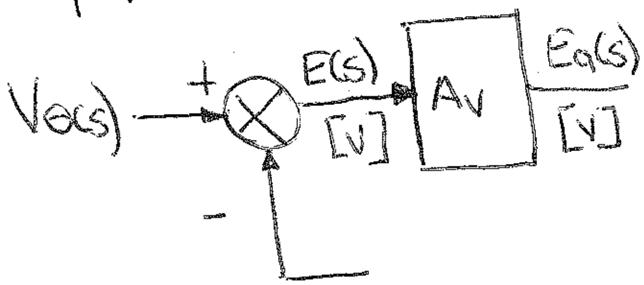
$$\frac{\dot{\theta}_m(s)}{E_a(s)} = \frac{\dfrac{K_T}{(J_m + n^2 J_L) L} \dfrac{1}{s(s + R/L)}}{1 + \dfrac{K_T K_b}{(J_m + n^2 J_L) L} \cdot \dfrac{1}{s(s + R/L)}}$$

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_T}{(J_m + n^2 J_L) L} \; \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{K_T K_b}{(J_m + n^2 J_L) L}} \left[\frac{rad}{V \cdot seg}\right].}$$

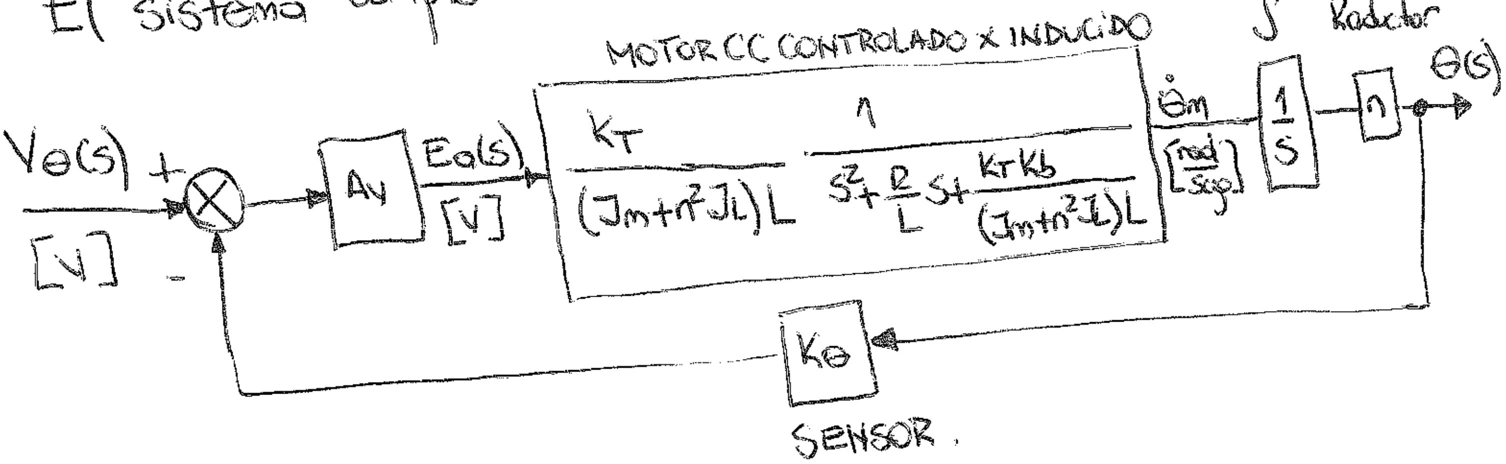
(c) Sensor de posición:



(d) Amplificador:



El sistema completo es:



$$\frac{\theta(s)}{V_\theta(s)} = \frac{\dfrac{n A_V K_T}{(J_m+n^2J_L)L} \; \dfrac{1}{S\left[S^2+R/L\,S+(K_T K_b)/(J_m+n^2J_L)L\right]}}{1+\dfrac{n A_V K_T K_\theta}{(J_m+n^2J_L)L} \; \dfrac{1}{S\left[S^2+R/L \cdot S+(K_T K_b)/(J_m+n^2J_L)L\right]}}$$

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{V_\theta(s)} = \frac{n A_V K_T}{(J_m+n^2J_L)L} \; \frac{1}{S^3+\frac{R}{L}S^2+\frac{K_T K_b}{(J_m+n^2J_L)L}S+\frac{n A_V K_T K_\theta}{(J_m+n^2J_L)L}} \left[\frac{rad}{V}\right]}$$

Tema 2 :

Dado que el sistema es de realimentación unitaria $H(s)=1$.

con lo que:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks+b}{s^2+as+b} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$s^2\,G(s) + as\,G(s) + \cancel{bG(s)} = (Ks+b)(1+G(s)) = Ks\,G(s) + \cancel{bG(s)} + Ks + b$$

$$s^2\,G(s) + (a-K)s\,G(s) = Ks+b.$$

$$G(s) = \frac{Ks+b}{s^2+(a-K)s} = \boxed{\frac{Ks+b}{s\,[s+(a-K)]} = G(s)}$$

$$K_V = \lim_{s\to 0} s\,G(s)\,H(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{Ks+b}{\cancel{s}\,[s+(a-K)]} = \frac{b}{a-K}.$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_V} = \boxed{\frac{a-K}{b} = e_{ss}}$$

Tema 3 :

De acuerdo al diagrama del L.R. hay dos puntos del diagrama con $\zeta = 0{,}72$. Estos puntos son A y B el con mayor ω_n es según se ve es el B. Por ello determinaremos la K para ese punto. De la ecuación característica tenemos:

$$K\,\frac{5(s+5)}{s(s+2)} + 1 = 0\,; \quad K = -\frac{s(s+2)}{5(s+5)}$$

Si tomamos los módulos:

$$K = \frac{|s|\,|s+2|}{5\,|s+5|} = \frac{5{,}35 \cdot 4{,}14}{5 \cdot 3{,}87} = \boxed{1{,}14 = K}$$

Coordenadas punto B:

$(-3,86 + j3,7)$

$|S| = 5,35$

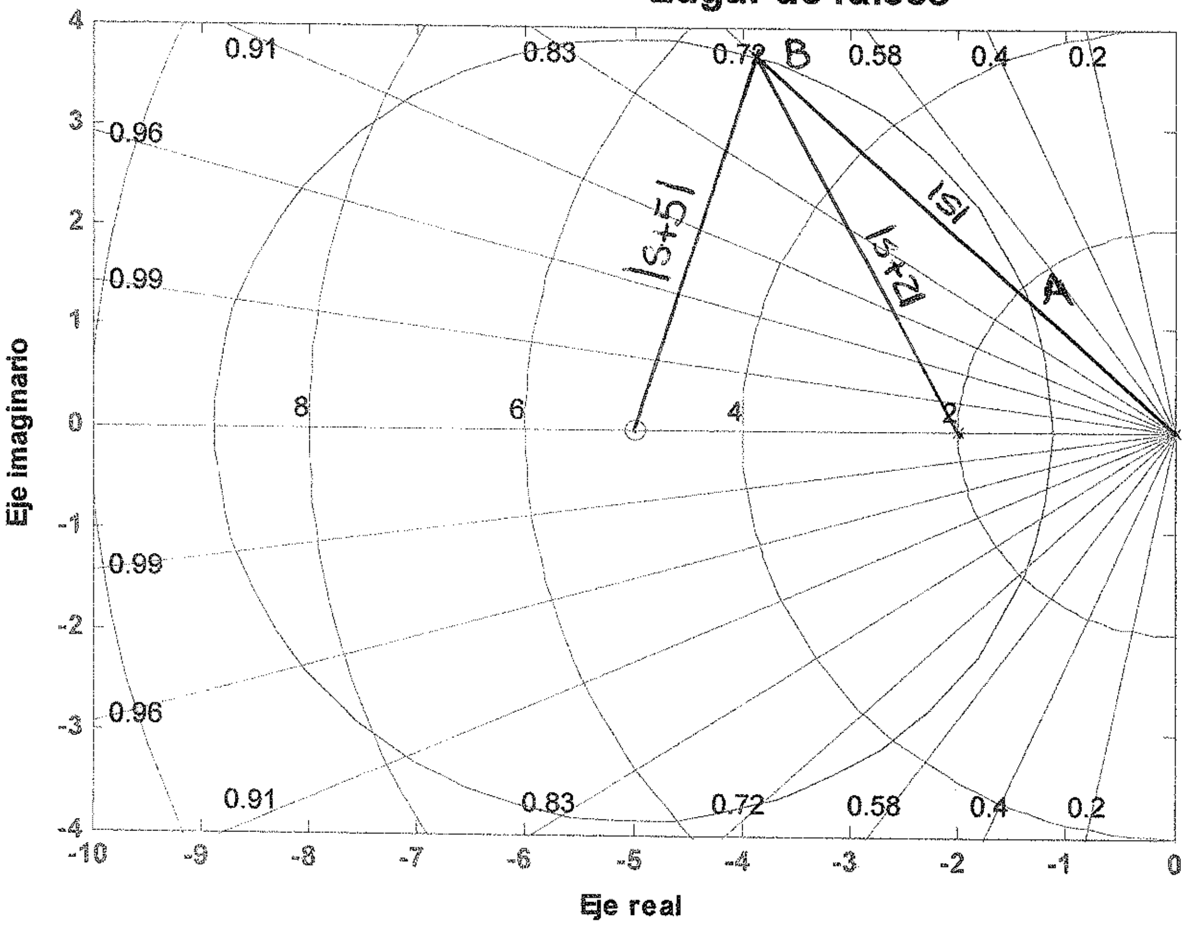
$|S+2| = 4,14$

$|S+5| = 3,87$

Escala eje σ: $2 = 2,85$ cm

Escala eje $j\omega$: $4 = 5,4$ cm

FIGURA 2 - Lugar de raices -



5

Tema 4:

9) Ambos son conceptos de estabilidad relativa que indican la proximidad de los sistemas a la inestabilidad. Para el caso del margen de fase es el retardo de fase a agregar en la fcia. de ganancia crítica para llevar al sistema al borde de la inestabilidad. En donde la ganancia crítica es unitaria y el margen de fase γ: $\gamma = 180° + \phi$.

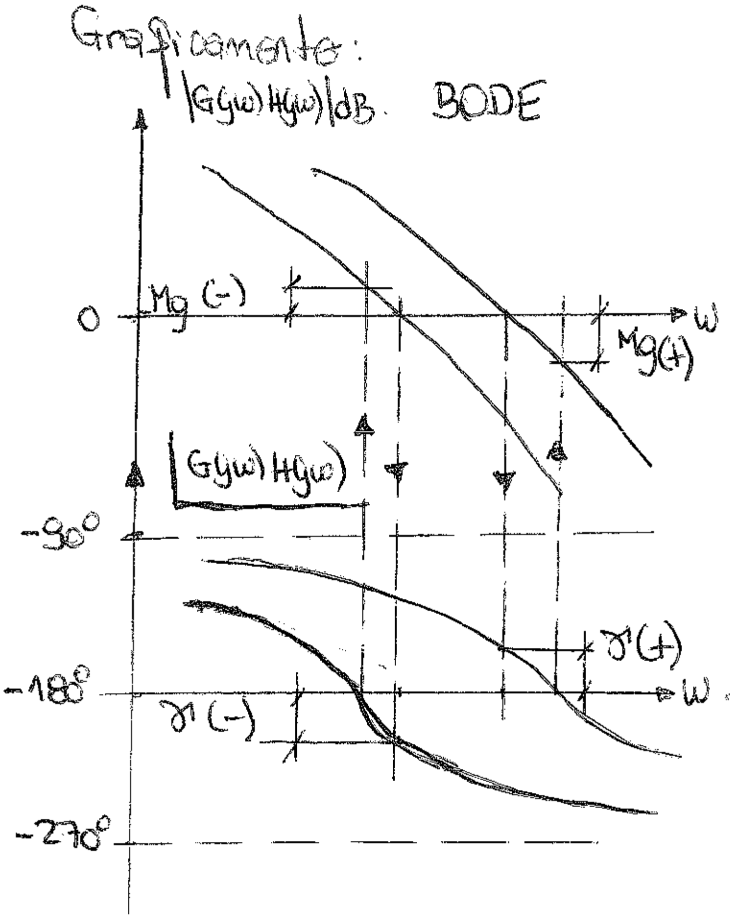
ϕ: es la fase de $G(jw)H(jw)$ a la fcia. de ganancia crítica.

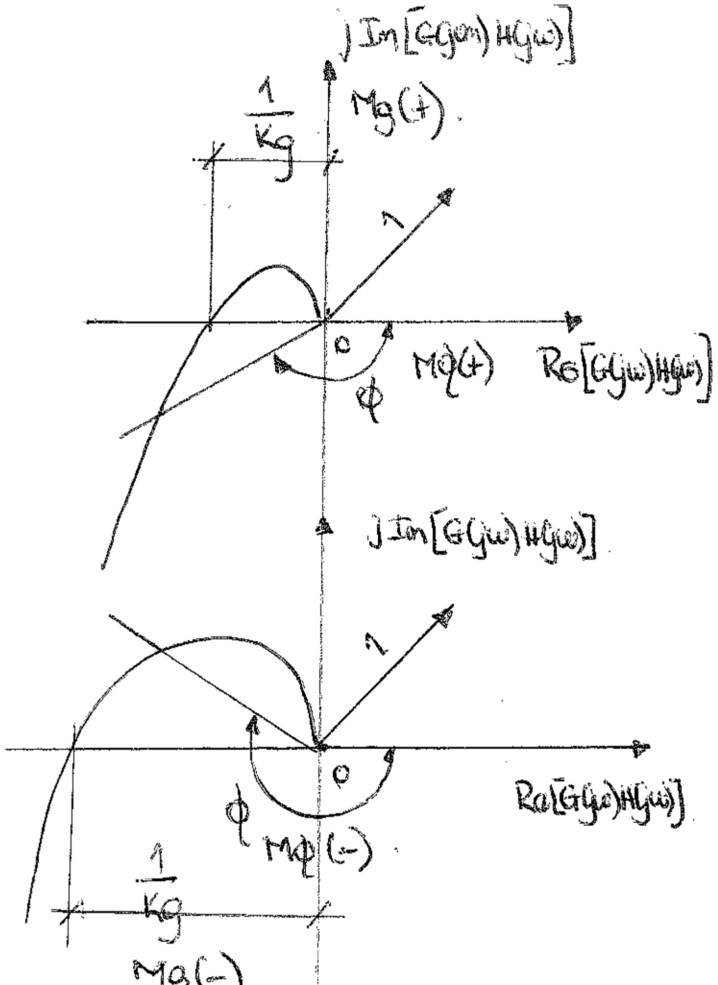
El margen de ganancia es la inversa de la ganancia $|G(jw)H(jw)|$ a la fcia. en la cual la fase es crítica de $\pm 180°$.

$$K_g = \frac{1}{|G(jw)H(jw)|}$$

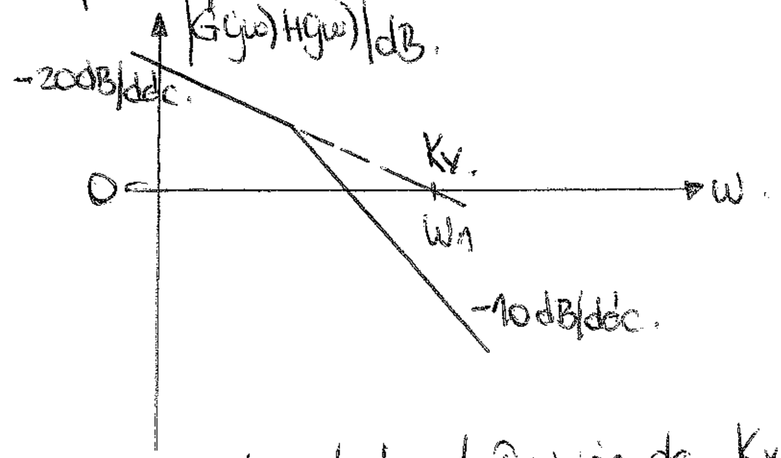
En dB $|K_g|_{dB} = -20 \log |G(jw)H(jw)|$

Graficamente:





(b) La pendiente en bajas frecuencias de un sistema tipo 1 es -20 dB/déc. En Bode el valor de K_v se determina por la prolongación de en intersección con la línea de 0 dB:



Esto es a partir de la definición de K_v:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)H(s) \quad \text{con } s = j\omega \quad K_v = \lim_{\omega\to 0} j\omega\, G(j\omega)H(j\omega).$$

entonces $\quad G(j\omega)H(j\omega) = \dfrac{K_v}{j\omega}$ para $\omega \to 0$.

$$\left|G(j\omega)H(j\omega)\right| = \frac{K_v}{\omega}. \quad \text{con } \omega = 1. \quad \left|G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=1} = K_v.$$

$$20 \log \left| G(j\omega)H(j\omega)\right|_{\omega=1} = 20 \log K_v.$$

ahora si a la fig. $\omega = \omega_1$ $\quad |G(j\omega_1)H(j\omega_1)| = 1$ (0 dB).

$$\frac{K_v}{\omega_1} = 1. \quad \text{con lo que } \boxed{K_v = \omega_1}$$

(c) Desplazamiento en el tiempo. Veamos la definición de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\,\mu(t-a)\right] = \int_0^\infty f(t-a)\,\mu(t-a)\,e^{-st}\,dt.$$

como $f(t-a)\,\mu(t-a)$ vale a partir de $t = a$, y $\mu(t-a) = 1$

(8)

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\mu(t-a)\right] = \int_a^{\infty} f(t-a)\, e^{-st}\, dt$$

operamos un cambio de variable $\lambda = t-a$. con:

$$\frac{d\lambda}{dt} = 1 \therefore dt = d\lambda, \text{ con } t = a;\ \lambda = a-a = 0.$$

la integral ahora será:

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\mu(t-a)\right] = \int_0^{\infty} f(\lambda)\, e^{-s(\lambda+a)}\, d\lambda = \int_0^{\infty} f(\lambda)\, e^{-s\lambda} e^{-as}\, d\lambda.$$

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\mu(t-a)\right] = e^{-as} \int_0^{\infty} f(\lambda)\, e^{-s\lambda}\, d\lambda \rightarrow \text{definición } F(s)$$

$$\therefore \boxed{\mathcal{L}\left[f(t-a)\mu(t-a)\right] = F(s)\, e^{-as}}$$

(d) El módulo de resonancia viene dado por la expresión:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

donde el rango para ganancia > 1 es obtenido a partir de la frecuencia de resonancia:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \ ; \quad 1-2\zeta^2 = 0.$$

para que la frecuencia sea un valor real. $\zeta \leq 0{,}707$

Es decir para $0 < \zeta \leq 0{,}707$ habrá M_r mayor a 1.