ENTENDIENDO LOS OBSERVADORES DE ESTADO

INTRODUCCIÓN

En el área de los sistemas de control, muchas veces es complicado conocer (observar - medir) el valor de uno o algunos de los estados de un sistema lineal. Cuando ésta es la situación, pueden utilizarse los denominados ***observadores de estado***, que no son otra cosa que algoritmos de control que permiten realizar ***estimaciones*** del valor del vector de estado del sistema original. Estas ***estimaciones*** u ***observaciones*** pueden ser luego empleadas (entre otras cosas) para reemplazar los valores reales de los estados del sistema y obtener la matriz de realimentación del vector de estado que permita asignar los polos de lazo cerrado del sistema en las posiciones deseadas.

TIPOS:

Existen 2 tipos de observadores: observadores de estado de orden completo, y observadores de estado de orden reducido u orden mínimo.

- Los observadores de estado (en adelante tan solo se usará la designación observadores) de orden completo, son aquellos utilizados para observar o estimar TODOS los estados de un sistema.

- Los observadores de orden Reducido, son aquellos utilizados para observar o estimar solamente uno o algunos estados de un sistema.

OBSERVADOR DE ORDEN COMPLETO

Dado un sistema de control, de entrada única y salida única, tal como el que se muestra en la **Figura 1,** representado por las ecuaciones dinámicas (Ecuación de estado y ecuación de salida) siguientes

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (Ecuación\ de\ estado) \qquad (1)$$

$$y = Cx + Du \quad (Ecuación\ de\ salida) \qquad (2)$$

donde:

x	Vector de estado (n x 1)
u	Variable de control
y	Variable de salida
A	Matriz (n x n)
B	Matriz (n x 1)
C	Matriz (1 x n)
D	Matriz (escalar)

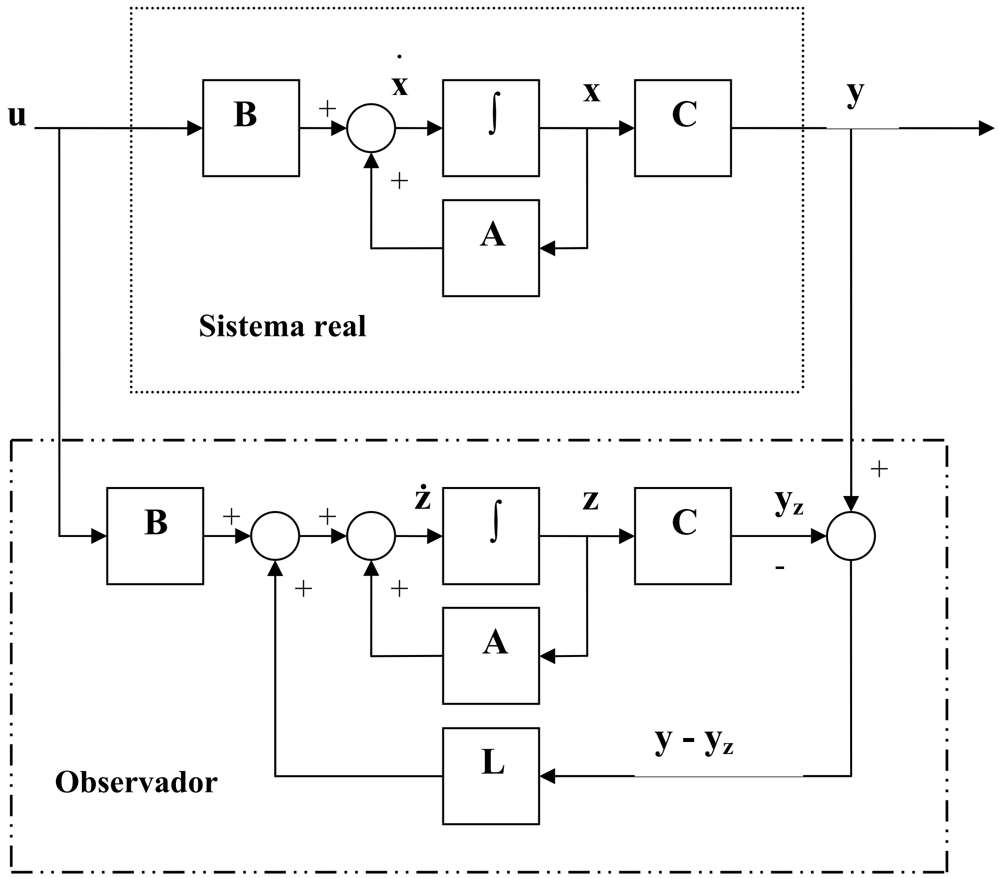


Figura 1

Se pueden estimar los estados del sistema original, mediante la utilización de un observador de estado, que se caracteriza con la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A\ z + B\ u + L\ (y - y_z)} \qquad [3]$$

$$\mathbf{y_z = C\ z} \qquad [4]$$

donde:

L	Vector de ganancias que permite la observación de estados (1 x n)
z	Vector de estados estimados
$\mathbf{y_z}$	Salida estimada

Es importante destacar que las matrices **A, B, C, D** son las mismas definidas tanto para el sistema real como para el sistema observador. En el desarrollo que sigue, se considera que la matriz **D** es cero.

Se designa como error de observación al término diferencia entre los estados originales y los estados estimados **e** = **(x – z)**, Al término diferencia entre la salida original y la salida estimada afectada por el factor L, $\mathbf{L(y - y_z)}$ se lo denomina factor de corrección.

De la **Figura 1**, se pueden obtener las ecuaciones que permiten calcular el error de observación, diferencia entre los estados reales (vector **x**) y los estados observados o estimados (vector **z**).

$$\dot{x} - \dot{z} = (Ax + Bu) - (Az + Bu + L(y - y_z)) \qquad (5)$$
$$\dot{x} - \dot{z} = Ax - Az - L(y - y_z) \qquad (6)$$
$$\dot{x} - \dot{z} = A(x - z) - L(Cx - Cz) \qquad (7)$$
$$\dot{x} - \dot{z} = A(x - z) - LC(x - z) \qquad (8)$$
$$\dot{x} - \dot{z} = (A - LC)(x - z) \qquad (9)$$

Dado que el error de observación esta definido como la diferencia entre el estado real y el estado estimado, entonces se tendrá:

$$e = x - z \qquad (10)$$
$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{z} \qquad (11)$$
$$\dot{e} = (A - LC) \cdot e \qquad (12)$$

A partir de esta expresión se puede conocer el comportamiento dinámico y la estabilidad del sistema. Si la matriz |A-LC| es estable, entonces el observador hará bien su trabajo, y dada cualquier condición inicial, el sistema tenderá a un error nulo cuando a medida que transcurre el tiempo.

La elección de valores adecuados para el vector de observabilidad L, permitirá que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y lo suficientemente rápido para tender al valor de cero.

La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica del error se determina mediante los autovalores de la matriz |A-LC|, dados por el polinomio característico

$$| sI - A + LC | = 0. \qquad (13)$$

Existe una condición necesaria, la cual consiste en que el sistema obtenido sea estable y completamente controlable y observable.

<u>Ejemplo:</u>

Dado un sistema expresado mediante la siguiente representación en el espacio de estado,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (14)$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

se pretende obtener un observador de estado de orden completo, que permita estimar los valores de los estados del sistema original.

Respuesta

Dado que el sistema es de orden 2, se propone un observador de estados de orden completo de orden 2, y se lo define mediante la siguiente expresión:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

El polinomio característico del sistema observador estará dado por:

$$[sI - A + LC] = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}[0 \quad 1] \quad (16)$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & L_1 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 2 + L_1 \\ -1 & s + 4 + L_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[sI - A + LC] = s(s + 4 + L_2) + (2 + L_1) \quad (19)$$

$$[sI - A + LC] = s^2 + (4 + L_2)s + (2 + L_1) \quad (20)$$

Para que en un sistema de segundo orden, las raíces sean con parte real negativa, el polinomio debe ser completo en S y todos sus términos del mismo signo, razón por la cual se deberán elegir los valores de L_1 y de L_2 tal que

$$L_1 > -2$$

$$L_2 > -4$$

Si se toman esos valores para L_1 y de L_2 , se asegurará la estabilidad asintótica del observador. Pero dado que hay infinitos pares de valores de L_1 y L_2 que cumplen esa condición, se deberá elegir una que produzca una respuesta adecuada en velocidad y estabilidad relativa del observador.

Si se desea que el comportamiento del error del sistema funcione adecuadamente, se deben ubicar los polos de tal manera que sean bastante mas rápidos (5 a 10 veces mayor que la parte real de los polos dominantes del sistema original) y con una adecuada estabilidad relativa, (que tiene que ver con la relación de coeficientes de amortiguamiento $0.5 < \zeta < 1$).

Para ello se deben determinar los valores de los polos de lazo cerrado (autovalores) del sistema original, que en el caso del ejemplo que se trata se determinan considerando de (21)

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & 2 \\ -1 & s+4 \end{vmatrix} \qquad (21)$$

El determinante esta dado por el producto s (s + 4) + 2 =0 ; $s^2 + 4s + 2 = 0$ con lo que se obtienen los autovalores de la matriz A, ubicados en -2 – 1,41 j y en -2 + 1.41 j.
Una elección adecuada podría ser que los polos del observador se ubiquen en s = - 20 + 20 j y en -20 – 20 j. (Parte real 10 veces mas a la izquierda que los polos del sistema original, con un decaimiento que tiene la forma e^{-20t} y una relación de coeficientes de amortiguamiento ζ = 0,707 (β=45°).
Para cumplir con esta condiciones el polinomio característico deseado para el observador será :

$$s^2 + 40\,s + 800 \qquad (22)$$

y por lo tanto los valores de L_1 y de L_2 se obtienen de la ecuación

$$s^2 + (4 + L_2)\,s + 2 + L_1 = s^2 + 40\,s + 800 \qquad (23)$$

por inspección, igualando términos del mismo orden queda

$$4 + L_2 = 40 \;\rightarrow\; L_2 = 36 \qquad (24)$$

$$2 + L_1 = 800 \rightarrow\; L_1 = 798 \qquad (25)$$

Ahora bien, para entender como se forma el observador de estados completo, es conveniente realizar la presentación del sistema en variables de estado. La ecuación de estado del sistema observador esta dada por

$$\mathbf{\dot{z} = (A - LC)\,z + B\,u + L(y - y_z)} \qquad (26)$$

A partir de esta expresión se puede conocer el comportamiento dinámico y la estabilidad del sistema, si la matriz |A-LC| es estable, entonces el observador hará bien su trabajo, y dada cualquier condición inicial, el sistema tenderá a un error cero.

La elección de valores adecuados para el vector de observabilidad L, permitirá que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y lo suficientemente rápido para tender a un valor de cero.

La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica del error se determina mediante los autovalores de la matriz |A-LC|,, expresados en (26.1)

Ecuación Característica |sI-A+LC|.=0 (26.1)

Existe una condición necesaria, la cual consiste en que el sistema obtenido sea estable y completamente controlable y observable.

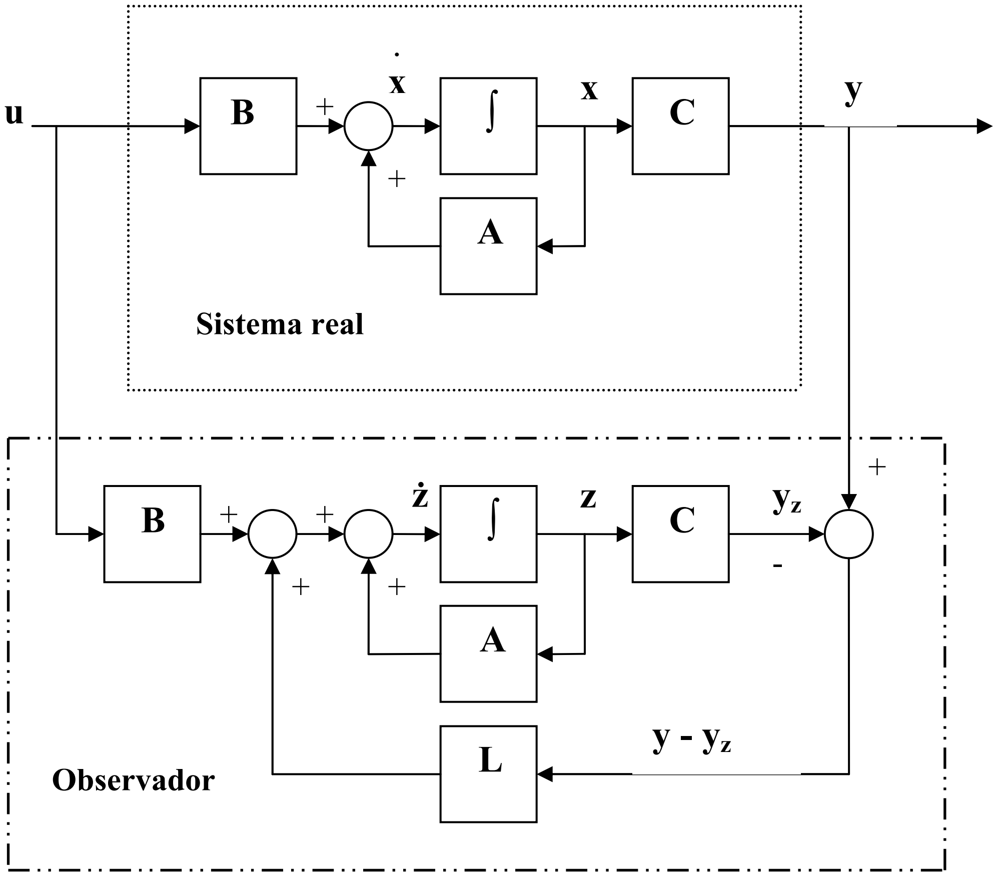
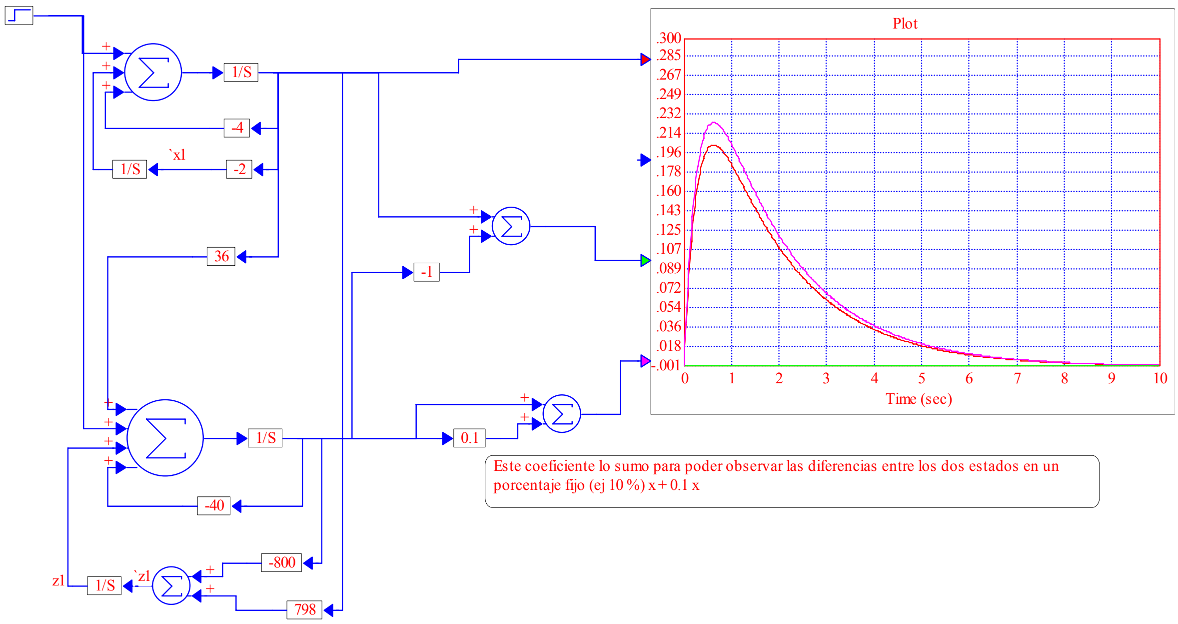


Figura 1

Para ver lo que significa, se realiza una simulación donde se ponen de manifiesto las realimentaciones para ver como se manifiesta su funcionamiento.



DISEÑO DE OBSERVADORES DE ORDEN COMPLETO

a) METODO DE DISEÑO POR IGUALACION DE COEFICIENTES.

Analizando la respuesta del ejemplo anterior se puede observar que los valores que toman L_1 y L_2 están condicionados por las raíces del polinomio, las cuales a su vez están condicionadas por las características con que se desea cuente el sistema, por tanto se pueden elegir raíces de tal modo de poder controlar la respuesta del sistema en lazo cerrado.

Por lo tanto se pueden asumir valores para dichas raíces, a los que se denominaran como μ_1 y μ_2 de modo tal que el polinomio tenga una respuesta estable. Luego por simple equivalencia de términos se puede hallar el valor de las incógnitas.

<u>Ejemplo:</u>

Dado el polinomio característico del ejemplo anterior: $s^2+(4+L_2)s+(2+L_1)$, encontrar el valor de L_1 y L_2 si se quiere que los polos deseados del sistema se ubiquen en -4 y -3.

<u>Solución.</u>

Las raíces del polinomio son $\mu_1 = -4$ y $\mu_2 = -3$

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2) = (s+4)(s+3) = s^2 + 7s + 12$$

Luego por equivalencia $|sI - A + LC| = s^2 + 7s + 12$

Es decir, $s^2 + (4 + L_2)s + (2 + L_1) = s^2 + 7s + 12$

$$\text{donde} \begin{cases} s^2 = s^2 \\ (4 + L_2)s = 7s \rightarrow L_2 = 3 \\ (2 + L_1) = 12 \rightarrow L_1 = 10 \end{cases}$$

Se puede generalizar la metodología seguida anteriormente, de la siguiente manera:

Si se tiene que $[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \dots \quad \mu_n]$ son los autovalores deseados para la matriz del observador $|A-LC|$, estos conforman el polinomio característico:

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)\dots(s-\mu_n)$$

Este polinomio se iguala al polinomio característico original $|sI-A+LC|$, creándose una equivalencia entre términos:

$$|sI-A+LC| = (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)\dots(s-\mu_n)$$

Resolviendo la equivalencia se podrá encontrar el valor del vector L.

NOTA: Este método está restringido a sistemas de hasta 3^{er} orden. **El sistema debe estar expresado en la forma canónica observable.**

Es aconsejable que los polos del observador sean de 5 a 10 veces mayores (más negativos) que los polos del controlador por realimentación de estados, pero sin salirse de la región de estabilidad dada por el lugar geométrico de las raíces. La elección de los polos deseados van a determinar las características de la respuesta obtenida, por lo que puede existir un conjunto infinito de vectores L como solución, de las cuales solo un limitado número de soluciones cumplen con las necesidades requeridas para el sistema (como por ejemplo: sobreimpulso, velocidad de respuesta, etc. del sistema estimado), por lo que se aconseja probar, mediante simulación, la respuesta del sistema a diferentes valores de polos escogidos.

b). METODO DE DISEÑO POR LA FORMULA DE ACKERMAN

La formula de Ackerman aplicada al diseño de observadores de estado, esta dada por:

$$L = \Phi(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

En donde $\Phi(A)$ es equivalente a $\Phi(s)$, que es el polinomio característico deseado, pero en vez de la "s" se coloca la matriz "A". (Recordar que la matriz A es solución de su ecuación característica). Teorema de Sylvester.

<u>Ejemplo:</u>

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -3+j y -3-j

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

<u>Solución.</u>

Si $\phi(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2) = (s+3-j)(s+3+j) = s^2 + 6s + 10$

por lo tanto $\phi(A) = A^2 + 6A + 10I$

$$L = (A^2 + 6A + 10I)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\right) \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$L = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

c). METODO DE DISEÑO COMPLETO

1°) Determinar la controlabilidad y la observabilidad del sistema

Controlabilidad: $Wc = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

Observabilidad: $\mathbf{Wo} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C^T} & \mathbf{A^{T^1}C^T} & \mathbf{A^{T^2}C^T} & \mathbf{\dots} & \mathbf{A^{T^{n-1}}C^T} \end{bmatrix}$

2°) Calcular el polinomio característico original |sI-A|, el cual está dado por :

$$|sI-A| = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

3°) Es conveniente trabajar con las ecuaciones de estado en su forma canónica observable, si no se encuentra en esta forma, se debe determinar una matriz de transformación para llevarla a esta forma, la cual se define como:

$$Q = (W \times Wo)^{-1}$$

En donde Wo es la matriz de observabilidad, y W se define como:

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo a_1, a_2, … a_{n-2}, a_{n-3}, los coeficientes del polinomio característico original |sI-A|.

4°) Determinar el polinomio característico deseado a partir de $(s-\mu_1)$ $(s-\mu_2)$ $(s-\mu_3)$ … $(s-\mu_n)$, donde μ_i es un polo deseado, obteniéndose:

$$s^n + b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_{n-1}s + b_n$$

5°) Finalmente el vector L se encuentra a partir de la siguiente expresión: (*)

$$L = Q \times \begin{bmatrix} b_n - a_n \\ b_{n-1} - a_{n-1} \\ b_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -5, -2+j y -2-j

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Solución.

1°)

Controlabilidad

$$Wc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

rank(Wc) = 3
det(Wc) = -1
$\therefore$ El sistema es controlable

Observabilidad

$$Wo = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rank(Wo) = 3
det(Wo) = 1
$\therefore$ El sistema es observable

2°)

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = s(s^2 + 2s + 1) + 2$$

$$[sI - A] = s^3 + 2s^2 + s + 2 \qquad \equiv \qquad s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2$$

3°) Q = (W x Wo)$^{-1}$

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \times Wo = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4°)

$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$

$= (s + 5)(s + 2 + j)(s + 2 - j)$

$= (s + 5)(s^2 + 4s + 5)$

$= s^3 + 9s^2 + 25s + 25 \qquad \equiv \qquad s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3$

$$\Rightarrow b_1 = 9 \quad b_2 = 25 \quad b_3 = 25$$

5°)

$$L = Q \times \begin{bmatrix} b_3 - a_3 \\ b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 23 \\ 24 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

d). DISEÑO MEDIANTE SOFTWARE DE APLICACIÓN

Se puede hacer uso de software específico , para lo cual se emplea el comando `acker` o el comando `place`.

Dado el sistema $\begin{matrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Dx \end{matrix}$, y un vector de polos deseados: $P = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_n]$

Se puede obtener un observador de estados utilizando:

```
L = place (A',B',P')'
L = acker (A',B',P')'
```

o también

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -2, -1+j y -1-j

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Solución.

```
>> A =  [0 1 0; 0 0 1; -3 -2 -1];
>> C =  [2 0 0];
>> P  = [-2 -1+j -1-j];

>> L  =  acker(A',C',P)'
L =
    1.5000
    0.5000
   -3.0000

>> L  =  place(A',C',P)'
L =
    1.5000
    0.5000
   -3.0000
```

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L aplicando los 4 métodos antes descritos, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -2, -3+0.5j y -3-0.5j

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

<u>Solución.</u>

a) DISEÑO UTILIZANDO EL METODO COMPLETO

Controlabilidad

$$Wc = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

rank(Wc) = 3
det(Wc) = 16
$\therefore$ El sistema es controlable

Observabilidad

$$Wo = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

rank(Wo) = 3
det(Wo) = -1
$\therefore$ El sistema es observable

Polinomio característico original

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 \\ -1 & s & 1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = s(s^2 + 2s + 1) + 4$$

$$[sI - A] = s^3 + 2s^2 + s + 4 \qquad \equiv \qquad s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 4$$

Q = (W x Wo)$^{-1}$

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \times Wo = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$
$= (s + 2)(s + 3 + 0.5j)(s + 3 - 0.5j)$
$= (s + 2)(s^2 + 6s + 9.25)$
$= s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5 \qquad \equiv \qquad s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3$
$\Rightarrow b_1 = 8 \quad b_2 = 21.25 \quad b_3 = 18.5$

Vector Observador

$$L = Q \times \begin{bmatrix} b_3 - a_3 \\ b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b). METODO DE DISEÑO POR IGUALACION DE COEFICIENTES

$$[sI - A + LC] = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 \\ -1 & s & 1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 + L_1 \\ -1 & s & 1 + L_2 \\ 0 & -1 & s + 2 + L_3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = s(s^2 + sL_3 + 2s + 1 + L_2) + (4 + L_1)$$

$$[sI - A + LC] = s^3 + (2 + L_3)s^2 + (1 + L_2)s + (4 + L_1)$$

Polinomio deseado

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) = (s + 2)(s + 3 + 0.5j)(s + 3 - 0.5j) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$$

Luego por equivalencia $s^3 + (L_3)s2 + (1 + L_2)s + (4 + L_1) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$

donde $\begin{cases} (2+L_3)s2 = 8s^2 \rightarrow L_3 = 6 \\ (1 + L_2)s = 21.25s \rightarrow L_2 = 20.25 \\ (4 + L_1) = 18.5 \rightarrow L_1 = 14.5 \end{cases}$

c). METODO DE DISEÑO POR LA FORMULA DE ACKERMAN

Si $\phi(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s - \mu_3) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$

por lo tanto $\phi(A) = A^3 + 8A^2 + 21.25A + 18.5I$

$$L = (A^3 + 8A^2 + 21.25A + 18.5I)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^3 + 8\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^2 + 21.25\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + 18.51\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$L = \begin{bmatrix} 14.5 & -24 & -33 \\ 20.25 & 8.5 & 32.25 \\ 6 & 8.25 & -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix}$$

d). USANDO MATLAB

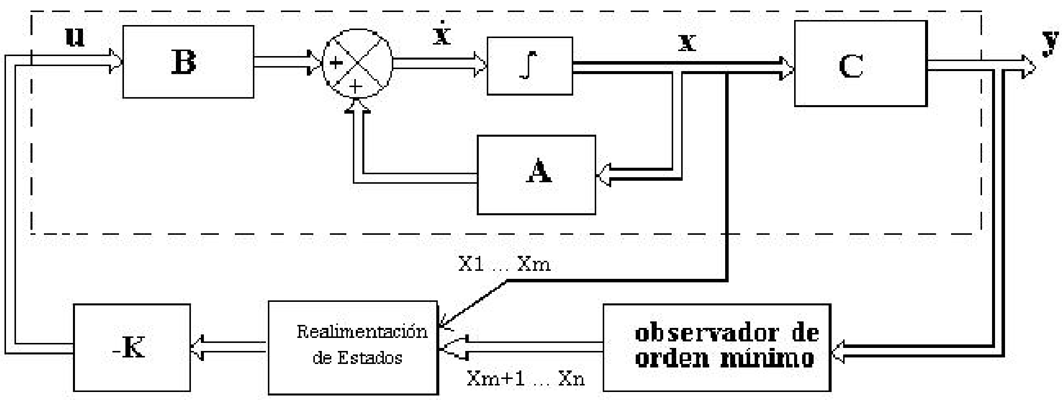
```
>> A  =  [0 0 -4; 1 0 -1; 0 1 -2];
>> C  =  [0 0 1];
>> P  =  [-2 -3+0.5j -3-0.5j];

>> L  =  acker(A',C',P)'
L =
   14.5000
   20.2500
    6.0000

>> L  =  place(A',C',P)'
L =
   14.5000
```

20.2500
6.0000

OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO

En la práctica no todas las variables necesitan ser observadas, habrá algunas que se podrán medir directamente y con buena precisión, por tanto no será necesario un observador que estime todos los estados, sino más bien solo algunos de ellos.

Si se cuenta con un vector de estados X de dimensión (n x 1) del cual *m* estados pueden ser medibles, se tendrá que el orden del observador será (n-m x 1).



El vector X puede ser dividido en 2 vectores:

- Xa que corresponde a los estados medidos, de orden (m x 1)
- Xb que corresponde a los estados observados, de orden (n-m x 1)

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \\ X_{m+1} \\ X_{m+2} \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$X_1 \ldots X_m$ → Estados conocidos o medibles

$X_{m+1} \ldots X_n$ → Estados no conocidos que requieren ser observados

Obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}a \\ \dot{X}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aaa & Aab \\ Aba & Abb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xa \\ Xb \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ba \\ Bb \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} Ca & Cb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xa \\ Xb \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de las sub-matrices son:

Aaa	→	m x m
Aab	→	m x n-m
Aba	→	n-m x m
Abb	→	n-m x n-m
Ba	→	m x 1
Bb	→	n-m x 1
Ca	→	1 x m
Cb	→	1 x n-m

El sistema queda reducido a la siguiente expresión:

$$\dot{X}a = Aaa \cdot Xa + Aab \cdot Xb + Ba \cdot u$$
$$\dot{X}b = Aba \cdot Xa + Abb \cdot Xb + Bb \cdot u$$

DISEÑO DE OBSERVADORES DE ORDEN REDUCIDO

En el diseño de observadores de orden completo, el sistema se representa por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Dx$$

En cambio para el diseño de observadores de orden reducido el sistema es descrito por

la Ecuación de Estado: $\dot{X}b = Aba \cdot Xa + Abb \cdot Xb + Bb \cdot u$
y por la Ecuación de Salida: $\dot{X}a - Aaa \cdot Xa - Ba \cdot u = Aab \cdot Xb$

De estos 2 sistemas se pueden establecer una serie de equivalencias:

Observador Orden Completo	Observador Orden Reducido
$\overline{X}$	$\overline{X}b$
A	Aab
$B \cdot u$	$Aba \cdot Xa + Bb \cdot u$
Y	$\dot{X}a - Aaa \cdot Xa - Ba \cdot u$
$\overline{Y}$	$Aab \cdot \overline{X}b$
C	Aab

Cabe mencionar que se busca encontrar un vector de observadores L, de orden (n-m x 1)

En el diseño de observadores de orden completo se determino la siguiente ecuación:

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + Bu + L(y - \overline{y})$$

La cual puede llevarse a su correspondiente equivalencia para el caso de observadores de orden reducido, obteniéndose la siguiente representación: (*)

$$\dot{\overline{X}}b = (Abb - L \cdot Aab) \cdot \overline{X}b + Aba \cdot Xa + Bb \cdot u + L \cdot (\dot{X}a - Aaa \cdot Xa - Ba \cdot u)$$

y la Ecuación del Error esta dada por: $\dot{e} = (Abb - L \cdot Aab) \cdot e$

La Ecuación Característica para el observador es la siguiente:

$$|sI - Abb + L.Aab| = s^i + a_1 s^{i-1} + a_2 s^{i-2} + \ldots + a_{i-1}s + a_i = 0$$

donde i equivale al orden de L, es decir (n-m)

METODOLOGÍA DE DISEÑO

Se pueden aplicar los mismos métodos usados para hallar los observadores de orden completo, pero se debe hacer variación la cual consiste en reemplazar los índices: en vez de considerar el índice "n", se debe considerar el índice "i". Por ejemplo si un sistema es de orden 4 y tiene **UN** estado medible, entonces **m=1**, y por tanto el sistema observado será de orden 3 (n – m = 4 – 1 = 3 = i).

El otro cambio que hay que hacer es realizar una equivalencia entre las matrices, dada de la siguiente manera:

Aaa	→	D
Aab	→	C
Aba	→	B
Abb	→	A

Lo que resta por hacer, es aplicar la misma metodología que para los observadores de orden completo, considerando el nuevo orden del sistema (i) y las nuevas matrices del sistema (Abb, Aba, Aab, Aaa).

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, suponga que el estado X1 se puede medir con precisión, diseñe el observador de orden reducido L aplicando los 4 métodos antes descritos, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -3+0.5j y -3-0.5j

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Solución.

Nuevo orden para el sistema observado: 3 – 1 → i = 2

Nuevas matrices del sistema:

D → Aaa
C → Aab
B → Aba
A → Abb

$$Aaa = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad Aab = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Aba = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad Abb = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

a). METODO COMPLETO

Controlabilidad

$$Wcr = \begin{bmatrix} Aba & Abb \cdot Aba \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

rank(Wc) = 2
det(Wc) = -36
$\therefore$ El sistema es controlable

Observabilidad

$$Wor = \begin{bmatrix} Aab \\ Aab \cdot Abb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rank(Wo) = 2
det(Wo) = 1
$\therefore$ El sistema es observable

Polinomio característico original

$$\begin{bmatrix} sI - A \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} sI - Abb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} sI - Abb \end{bmatrix} = s^2 + 6s + 11 \qquad \equiv \qquad s^2 + a_1 s + a_2$$

$$\Rightarrow a_1 = 6 \quad a_2 = 11$$

Q = (W x Wo)$^{-1}$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \times Wor = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$(s - \mu_1)(s - \mu_2)$

$= (s + 2 + 3.4641j)(s + 2 - 3.4641j)$

$= s^2 + 4s + 16 \quad \equiv \quad s^2 + b_1 s + b_2$

$\Rightarrow b_1 = 4 \quad b_2 = 16$

Vector Observador

$$L = Q \times \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

b). METODO POR IGUALACION DE COEFICIENTES

$$\left[sI - A + LC\right] \equiv [sI - Abb + L \cdot Aab] = (s - \mu_1)(s - \mu_2)$$

$$\left[sI - Abb + L \cdot Aab\right] = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[sI - Abb + L \cdot Aab\right] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[sI - Abb + L \cdot Aab\right] = \begin{bmatrix} s + L_1 & -1 \\ 11 + L_2 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$\left[sI - Abb + L \cdot Aab\right] = (s + L_1)(s + 6) + (11 + L_2)$$

$$\left[sI - Abb + L \cdot Aab\right] = s^2 + (6 + L_1)s + (11 + L_2)$$

Polinomio deseado

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 4s + 16$$

Luego por equivalencia

$6 + L_1 = 4 \quad \rightarrow \quad L_1 = -2$

$6 L_1 + 11 + L_2 = 16 \quad \rightarrow \quad L_2 = 17$

c). METODO POR FORMULA DE ACKERMAN

Si $\phi(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2) = s^2 + 4s + 16$

por lo tanto $\phi(A) \equiv \phi(Abb) = Abb^2 + 4Abb + 16I$

$$L = (Abb^2 + 4Abb + 16I)\cdot[Wor]^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$L = \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\-11 & -6\end{bmatrix}^2 + 4\begin{bmatrix}0 & 1\\-11 & -6\end{bmatrix} + 16\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix}5 & -2\\22 & 17\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\17\end{bmatrix}$$

d). USANDO PRGRAMAS DE APLICACION

```
>> Aaa  =  [0];
>> Aab  =  [1  0];
>> Aba  =  [0; -6];
>> Abb  =  [0  1; -11 -6];
>> P  =  [-2 + 3.4641j  -2-3.4641j];

>> L  =  acker(Abb', Aab',P)'
L =
   -2
   17

>> L  =  place(Abb', Aab',P)'
L =
   -2
   17
```

OBSERVADOR PARA SISTEMAS MIMO

Hasta el momento se ha visto el diseño de observadores para sistemas SISO (single input, single output), es decir, sistemas que tienen una entrada y una salida. A continuación se presenta el diseño de observadores para el caso de sistemas con varias entradas y varias salidas, denominados sistemas MIMO (multiple input, multiple output).

Un sistema MIMO puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax + B[u]_{1\times r}$$
$$y = [C]_{q\times n}\, x + D[u]_{q\times r}$$

donde:

x	Vector de estado (n x 1)
u	Señal de control (r x 1)
y	Señal de salida (q x 1)
A	Matriz (n x n)
B	Matriz (n x r)
C	Matriz (q x n)
D	Matriz (q x r)
n	Es el orden del sistema (numero de estados)
r	Es el número de entradas
q	Es el número de salidas

En el diseño de observadores, se ha podido comprobar que el número de entradas que tenga el sistema, no afectará el diseño del observador, puesto que estos datos no intervienen en los cálculos.
En cambio, el número de salidas con que cuente el sistema si afecta el diseño del observador. En este caso se aplica el Principio de Separabilidad Lineal, el cual consiste en separar las salidas y trabajarlas como si fueran provenientes de sistemas distintos.

Ejemplo:

Si se tiene la siguiente matriz C (matriz de salidas) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Esta se podrá descomponer bajo el Principio de Separabilidad Lineal, en dos sub-matrices:
$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $C_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Para cada una de estas nuevas matrices se requerirá un observador independiente: L_1 y L_2, cuyo orden será de (n x 1), en este caso será de (3 x 1) c/u. Así mismo cada observador requiere de "polos deseados", los cuales pueden ser independientes o también comunes, siempre que cumplan con dar estabilidad al sistema y dependiendo de las condiciones de respuesta que se desee obtener al estimar cada salida.

Ejemplo: *Para el siguiente sistema, determinar la matriz de observadores de estados L, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -1 y -2 para la primera salida, y -1-j, y -1+j para la segunda salida.*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Solución:

$C_1 = [1 \ \ 0]$ $C_2 = [0 \ \ 1]$

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

METODO COMPLETO

Controlabilidad Observabilidad

$$Wc = [B \quad A \cdot B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

rank(Wc) = 2
det(Wc) = -1
$\therefore$ El sistema es controlable

$$Wo_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rank(Wo) = 2
det(Wo) = 1
$\therefore$ El sistema es observable

$$Wo_2 = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

rank(Wo) = 2 ; det(Wo) = 5
$\therefore$ El sistema es observable

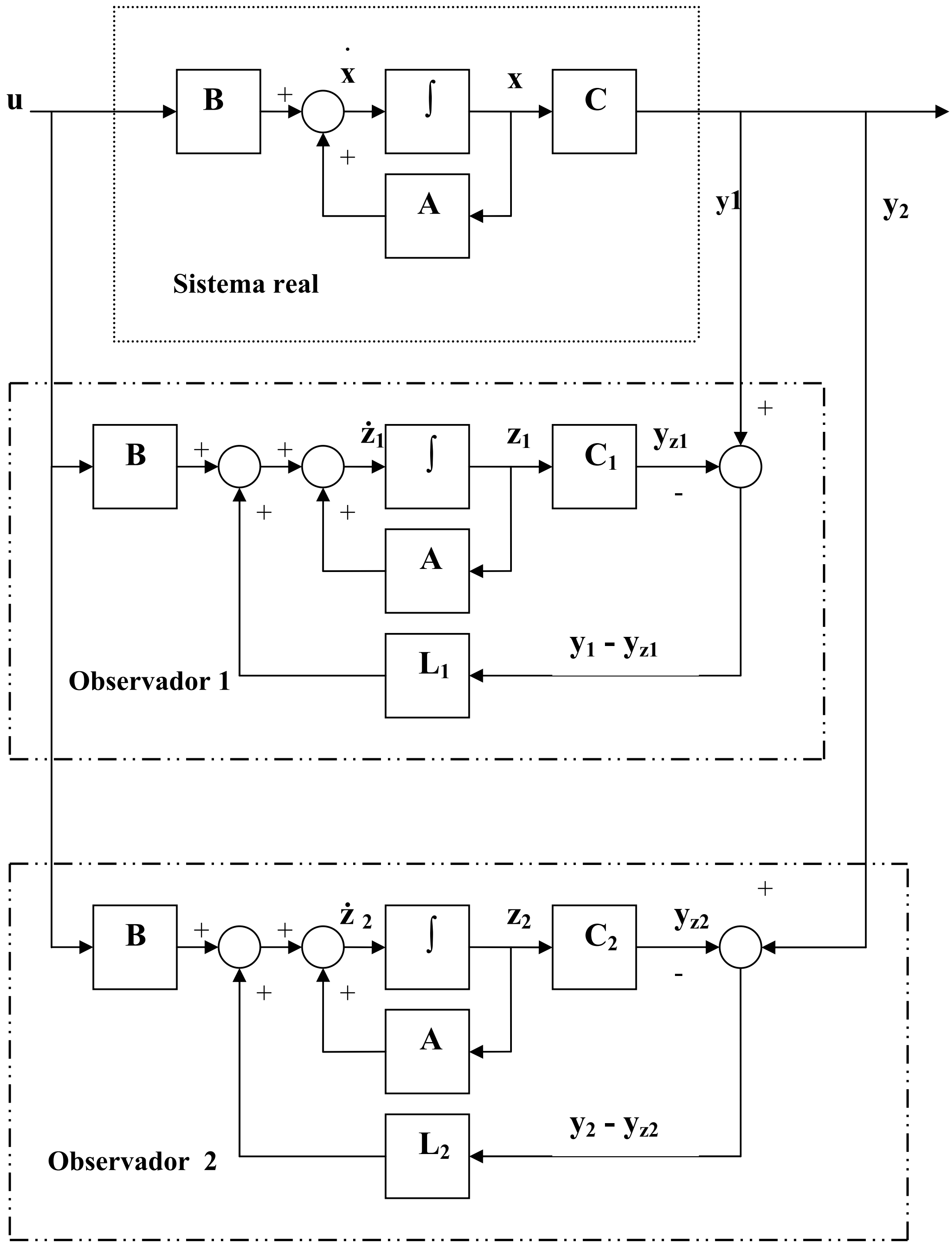

u
B
x
∫
x
C
A
y1
y2
Sistema real
B
ż1
∫
z1
C1
yz1
A
L1
y1 - yz1
Observador 1
B
ż 2
∫
z2
C2
yz2
A
L2
y2 - yz2
Observador 2

Figura 2

Polinomio característico original

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = s^2 + 5s + 5 \qquad \equiv \qquad s^2 + a_1 s + a_2$$

$$\Rightarrow a_1 = 5 \quad a_2 = 5$$

DISEÑO DEL PRIMER OBSERVADOR (L_1)

$Q = (W \text{ x } Wo_1)^{-1}$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \times Wo_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$(s - \mu_1)(s - \mu_2)$

$= (s + 1)(s + 2)$

$= s^2 + 3s + 2 \qquad \equiv \qquad s^2 + b_1 s + b_2$

$\Rightarrow b_1 = 3 \quad b_2 = 2$

Vector Observador

$$L_1 = Q \times \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

DISEÑO DEL SEGUNDO OBSERVADOR (L_2)

$Q = (W \text{ x } Wo_2)^{-1}$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \times Wo_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$(s - \mu_1)(s - \mu_2)$

$= (s + 1+j)(s + 1-j)$

$= s^2 + 4s + 5 \qquad \equiv \qquad s^2 + b_1 s + b_2$

$\Rightarrow b_1 = 2 \quad b_2 = 2$

Vector Observador

$$L_2 = Q \times \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0.6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Se puede obtener los mismos resultados usando Matlab:

```
>> A = [0  1; -5 -5];
>> B = [0; 1];
>> C = [1  0; 0  1];
>> C1  = C(1,:);
>> C2  = C(2,:);
>> P1  =  [-1  -2] ;
>> P2  =  [-1+j   -1-j]

>> L1  =  acker(A',C1',P1)'
L1 =
   -2.0000
    7.0000

>> L2  =  acker(A',C2',P2)'
L2 =
    0.6000
   -3.0000

>> L = [L1  L2];
L =
   -2.0000    0.6000
    7.0000   -3.0000
```

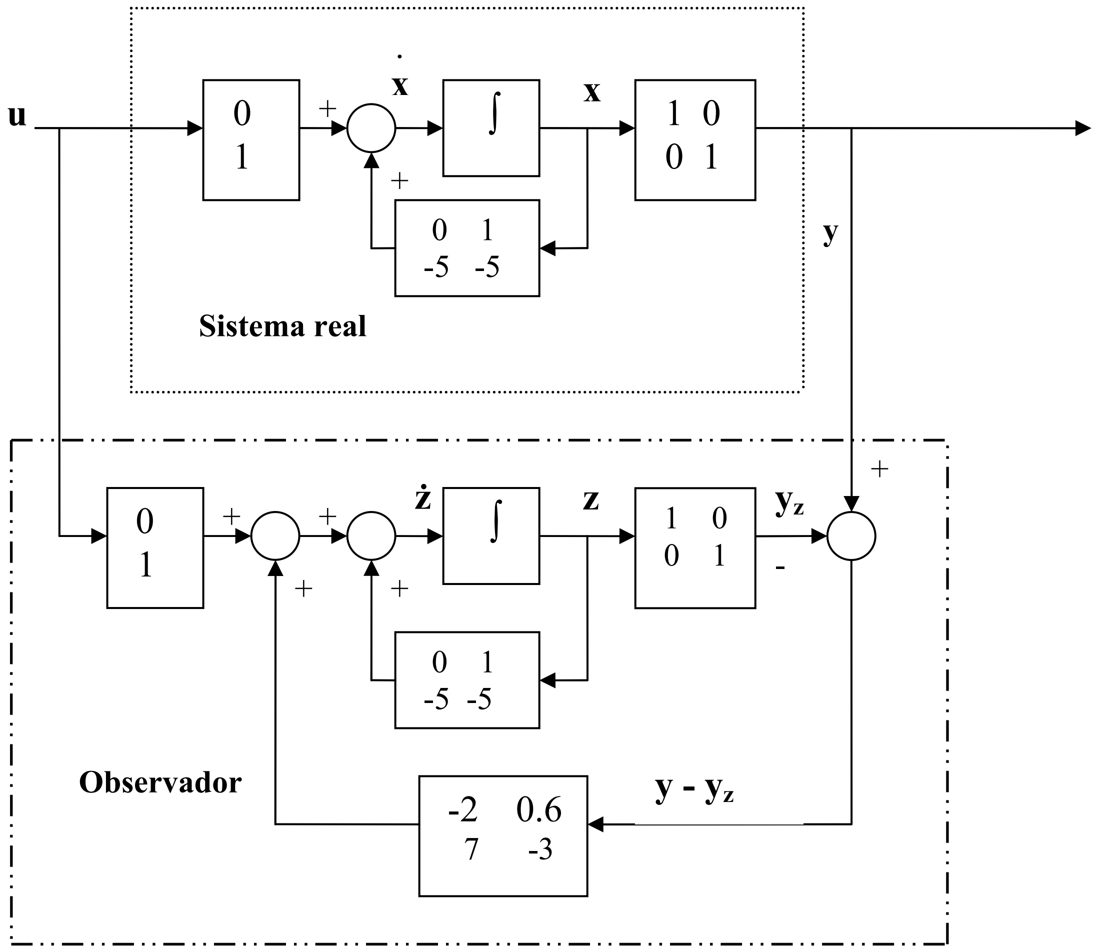

u
0
1
+
ẋ
∫
x
1 0
0 1
+
0 1
-5 -5
y
Sistema real
+
0
1
+
+
ż
∫
z
1 0
0 1
yz
+
+
-
0 1
-5 -5
Observador
-2 0.6
7 -3
y - yz

Figura 3