Problemas 2° parcial - Técnicas Digitales III

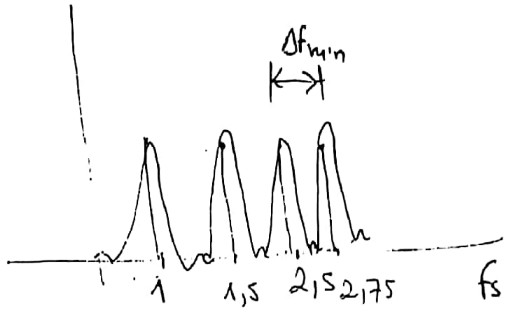
Capitulo 5.10

$$f_d = \frac{2f}{f_s}$$

1) $f_1 = 1\,KHz$ $\quad f_3 = 2{,}5\,KHz$ $\quad f_s = 10\,KHz$

$f_2 = 1{,}5\,KHz$ $\quad f_4 = 2{,}75\,KHz$

Mínimo número de muestras:



Orfanidis

$$L \geq \frac{f_s}{\Delta f}$$

$$\Delta f_{min} = 2{,}75\,KHz - 2{,}5\,KHz$$

$$L = \frac{10\,KHz}{0{,}25\,KHz} = 40$$

$$\boxed{L \geq 40}$$

como pide el mínimo se puede hacer $\boxed{L = 40}$.

Preguntar a Moreno

$$\Delta f_d = \frac{2 f_s}{L} \quad \therefore \quad L = \frac{2 f_s}{\Delta f_d}$$

$$L = \frac{2 \cdot \cancel{\ldots}}{\cancel{\ldots}\;(0{,}55 - 0{,}5)} = \cancel{\ldots}$$

$$\boxed{L = 40}$$

Para otras ventanas ≠ rectangular

$$\Delta f \geq c \cdot \frac{f_s}{L}$$

donde c es una constante.

en el caso de Hamming $c \cong 2$

por ello $\boxed{L = 80}$

2) $f_0 = 10\ KHz$ $f_s = 80KHz$ $N = 64$

$$K = N \frac{f_0}{f_s} = N \cdot f_d$$

K ↑ posición de la bin

$$K = 64 \cdot \frac{10KHz}{80KHz} = 8$$

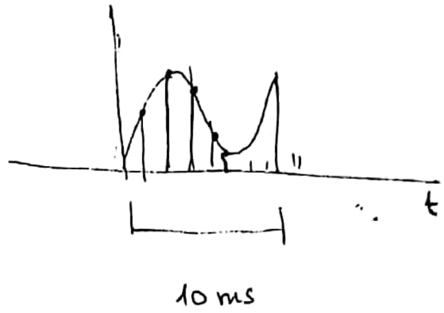
$\boxed{K = 8}$. Va existir un bin c/ pico frecuencia

3) $T = 10\ ms$ $f_s = 10\ KHz$

$f_1 = 1KHz$ $f_2 = 2KHz$ $f_1 < f_3 < f_2$

¿Cual es la cercanía de f_3 c/ respecto a f_1 y f_2 para que muestre 3 picos?

$\Delta f = \frac{1}{T_L}$ donde $T_L = L \cdot T$



No $\left\{ \cancel{\Delta f = \frac{1}{L \cdot T} \quad L = \frac{1}{T \cdot \Delta f}} \right.$

$f_s = N \cdot T^{-1} \therefore N = f_s \cdot T$ Reemplazar N por L

$N = 10\,KHz \cdot 10\,ms$

$\boxed{N = 100}$

$N \cancel{\Delta f} \geq \frac{f_s}{\Delta f} \therefore \frac{\Delta f}{f_s} \geq \frac{1}{N}$ $\quad \Delta f \geq \frac{f_s}{N}$

$\Delta f = \frac{10\,KHz}{100}$

$\boxed{\Delta f = 100\,Hz}$

Para que haya 3 lóbulos debe estar f3 como máximo a 100 Hz de cada señal.

Para ventana Hamming

$\Delta f \geq c \cdot \frac{f_s}{L}$

$\Delta f > 2 \cdot 100\,Hz$.

$\boxed{\Delta f \geq 200\,Hz}$

4) $f_1 = 5KHz.$ $f_s = 40\ KHz$ $N = 128$ $L = 128$

Duración adquirida?

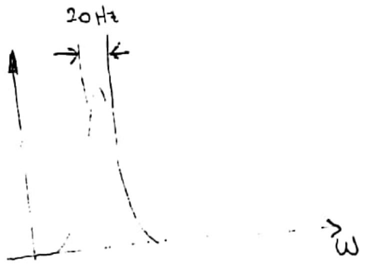
$$f_s = \frac{L}{T} \therefore \quad T = \frac{L}{f_s} = \frac{128}{40KHz} = \boxed{3{,}2ms}$$

En K se observa

$$K = N \cdot \frac{f}{f_s} = 16 \checkmark$$

En el bin 16 se encuentra el lóbulo principal.

5) $f_1 = 20\ Hz.$ $f_s = 8KHz$



$f_1 = \Delta f$

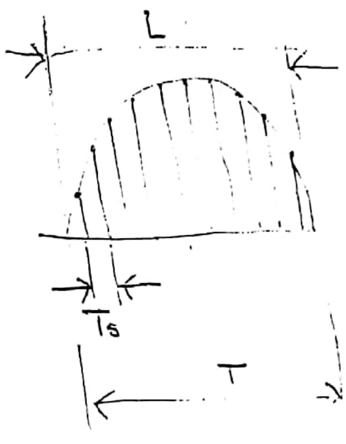
$$\Delta f \geq \frac{f_s}{L} \therefore \quad L \geq \frac{f_s}{\Delta f}$$

$$L \geq \frac{8KHz}{20\ Hz}.$$

$$\boxed{L \geq 400}$$

Para que entre en L la resolución debe ser de como mínimo 20 Hz

$$\cancel{\Delta f = \frac{1}{T \cdot L} \quad T = \frac{1}{\Delta f \cdot L} = \frac{1}{20Hz \cdot 400}}$$



$$T_s = \frac{1}{f_s}$$

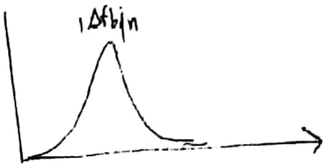
$$T = L \cdot T_s \Rightarrow$$

$$T_s = \frac{T}{L}$$

$$\frac{T}{L} = \frac{1}{f_s} \therefore$$

$$\boxed{T = \frac{L}{f_s}}$$

$$T = \frac{400}{8k} = \boxed{50\,ms}$$



PREGUNTAR SOBRE ESTA PARTE

$\cancel{N = f_s \cdot T}$

$\cancel{N = 8kHz \cdot 50\,ms}$

$\cancel{\boxed{N = 400}}$

$\boxed{N \geq L}$

$$\left\{ \Delta f_{bin} = \frac{f_s}{N} \quad \therefore \quad N = \frac{f_s}{\Delta f_{bin}} \right.$$

$$N = \frac{8kHz}{20Hz} = 400$$

Como es una FFT una potencia de 2. $N = 512$ (valor cercano) 2^{10}

Dimensión

6) Reducción módulo N: Particionar un vector X en N subvectores y sumarlos.

pág 90 Orfanidis

$$X = \begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \end{array}$$
$$X = [1, 2, -2, 3, 4, -2, -1, 1]^T$$

Para $N = 4$. → Tengo que tomar subvectores de dimensión N

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

El vector queda en longitud = 4

Para $N=3$ → tengo que tomar sub-vectores de dimensión $N=3$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

El vector queda longitud = 3.

Se le agrega cero cuando la muestra no existe.

7) Costo computacional:

DFT = 128 puntos N y 1024 muestras L

- DFT directa
- FFT directa
- DFT reducción modulo N
- FFT reducción módulo N.

PREGUNTAR

DSP GUIDE p. 251/664 (PDF)

K_{DFT} : cte proporcionalidad

- DFT = Tiempo ejecusión $= K_{DFT} N^2$ N : nº puntos de la DFT.

DFT $= (128)^2 = K_{DFT} . 16384$ → puede que esta sea c/ reducción

FFT : Tiempo ejecución $= K_{FFT} . N \log_2 N$

$= K_{FFT} . 896$

8)

DFT de 4 puntos de la señal de 8 muestras.

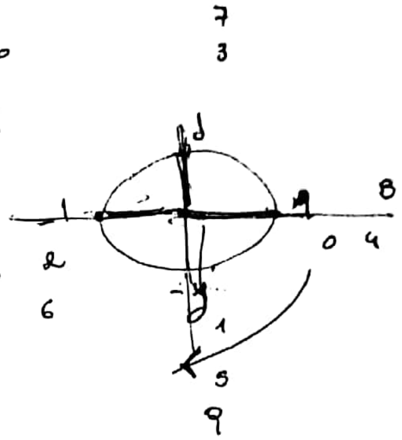
$x = [1, 2, -2, 3, 4, -2, -1, 4]$

L = 8

$$A_{N=4} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \end{bmatrix} \begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{array}$$

$$X(n) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)\, e^{-j\omega k n} \qquad \omega = \frac{2\pi}{N}$$

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 & 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 & 1 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 & 1 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} K=0 \\ K=1 \\ K=2 \\ K=3 \end{array}$$



$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \end{array}\right]$$

$$e^{-\frac{2\pi j}{4}} = -j$$

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} n=0 & n=1 & n=2 & n=3 \end{array} \\ \begin{array}{c} K=0 \\ K=1 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4×8 $\qquad$ 8×1

$X = AX =$

$$X = \begin{bmatrix} 1 + 2 - 2 + 3 + 4 - 2 - 1 + 1 \\ 1 - 2j + 2 + 3j + 4 + 2j + 1 + j \\ 1 - 2 - 2 - 3 + 4 + 2 - 1 - 1 \\ 1 + 2j + 2 - 3j + 4 - 2j + 1 - j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 + 4j \\ -2 \\ 8 - 4j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 + 4j \\ -2 \\ 8 - 4j \end{bmatrix}$$

4×1

9) b.

$$\tilde{X} = \tilde{A}\,\tilde{x}$$

Como $\tilde{X} = 1 \times 4$, $\tilde{x} = 4 \times 1$ $\Big\}$ $\tilde{A} = 4 \times 4$.

$$\tilde{A}\cdot\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0-3+4 \\ 5+0+3+4j \\ 5+0-3-4 \\ 5+0+3-4j \end{bmatrix} =$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8+4j \\ -2 \\ 8-4j \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Da igual y es más simple.}$$

Demostración de para qué sirve reducir por módulo N.

9) Calcular la IDFT

$$X = [6,\ 8+4j,\ -2,\ 8-4j].$$

$$X^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 8-4j \\ -2 \\ 8+4j \end{bmatrix} \qquad 4\cdot x^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8-4j \\ -2 \\ 8+4j \end{bmatrix}$$

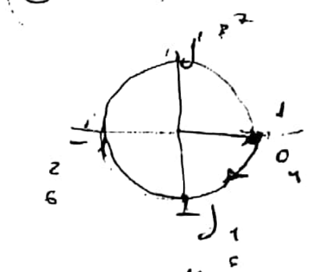
$$A \cdot x^{*} = \begin{bmatrix} 6 + 8 - \cancel{j4} - 2 + 8 + \cancel{4j} \\ 6 - \cancel{8j} - 4 + 2 + \cancel{8j} - 4 \\ 6 - 8 + \cancel{4j} - 2 - 8 - \cancel{4j} \\ 6 + \cancel{8j} + 4 + 2 - \cancel{8j} + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$x = IDFT(X) = \frac{1}{N}\left(DFT(x^{*})\right)^{*} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

10) DIFICIL DE DESARROLLAR

FFT 4 puntos de la señal de 8 muestras, usando reducción de módulo 4. [Ejemplo p. 514.]

$e^{-j\omega k n}$



$x = [1, 2, -2, 3, 4, -2, -1, 1]$

$x_0 \; [1, 2, -2, 3] + [4, -2, -1, 1] \; x_1$

$\tilde{x} = [5, 0, -3, 4]$ $\qquad \tilde{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\qquad W_N^K$

FFT:
$$\left.\begin{aligned} X(k) &= G(k) + W_N^k H(k) \\ X\left(k + \tfrac{N}{2}\right) &= G(k) - W_N^k H(k) \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1 \dots \frac{N}{2} - 1$$

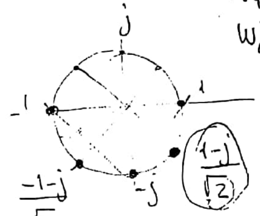
$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5-3 \\ 5+3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_4^0 \\ W_k^1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ +j4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{=}{+} \; \begin{bmatrix} 2+4 \\ 8+4j \\ 2-4 \\ 8-4j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8+4j \\ -2 \\ 8-4j \end{bmatrix}$$

11)

$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4j \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 4j \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad X^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ +4j \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ -4j \\ 4 \end{bmatrix}$



$W_4^0 \to 1$

$W_4^1 \to -j$

$\frac{1-j}{\sqrt{2}} \to \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{-1-j}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$

P. SIS
Afanidis

FFT = $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ +4j \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ -4j \\ -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 4j \\ 0 \\ -4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2-DFT}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4j \\ -4j \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 8j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ *

$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_8^0 \\ W_8^1 \\ W_8^2 \\ W_8^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \\ -8 \\ -16 \\ 8 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$

1/8

$\text{IFFT} = \frac{1}{N}\left(\text{FFT}(X^*)\right)^* = \cancel{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}} = \cancel{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

RESUMEN

FFT

X(k) G(k) G(k)

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(k) + H(k)\,W_N^k \\ G(k) + H(k)\,W_N^k \\ G(k) - HW \\ G - HW \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

H(k) W_N^k $\quad$ H(k) W_N^k

11) Con la IDFT.

~~X = [0, 8, 0, 8] haciendo reducción módulo 4.~~

~~DFT =~~

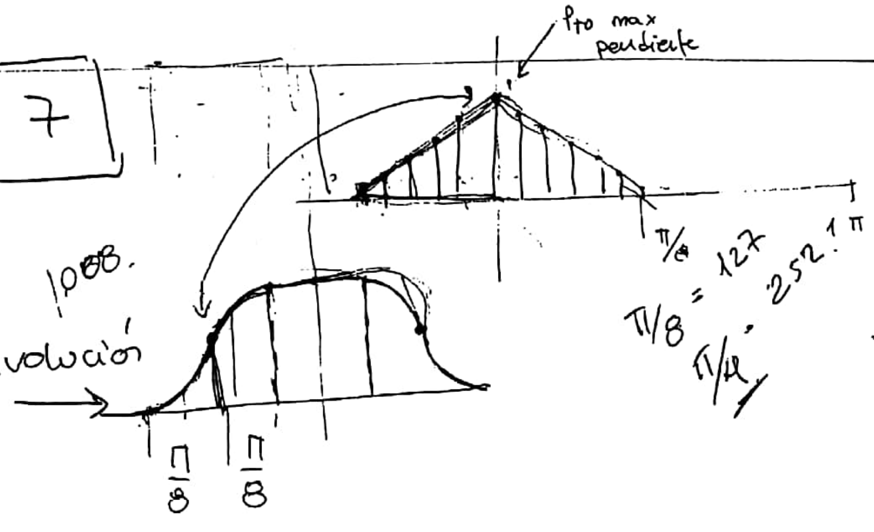
$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{DFT}:$$

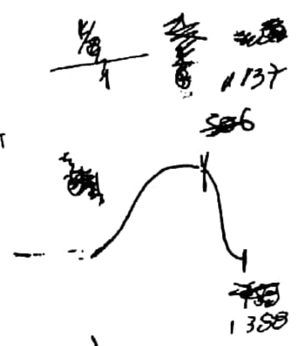
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0-2j+0-2j \\ 0-2+0+2 \\ 0+2j-0+2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4j \\ 0 \\ +4j \end{bmatrix}$$

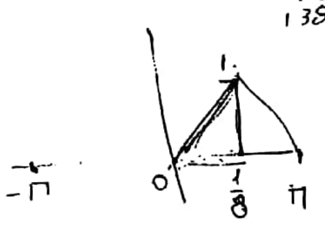
~~¿No sé?~~

Capítulo 7

1)







$m = \frac{4}{x}$

$2^8 \left(\left(\frac{1}{8}\right)^2 - 0\right) 8 \cdot x$

$4 \left(\frac{1}{64}\right) = \frac{1}{16}$

$\int_0^{1/8} 8x \, dx$

RTA = (d)

PREGUNTAR