SIMPLIFICACIÓN

El proceso de simplificación de funciones lógicas consiste en pasar de una expresión algebraica a otra equivalente con el menor número posible de términos (sumas o productos) y con el menor numero de variables c/u.

Los métodos utilizados para la minimización de funciones Booleanas son: El *algebraico*, para lo cual se utilizan los postulados y teoremas del álgebra de Boole y el método gráfico de *Karnaugh*.

En general, el mapa de Karnaugh se considera como la forma gráfica de una tabla de verdad, o como una extensión del diagrama de Venn

METODO ALGEBRAICO

Las propiedades más utilizadas para la simplificación son

· Distributiva:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$a + a' = 1$$

$$a \cdot a' = 0$$

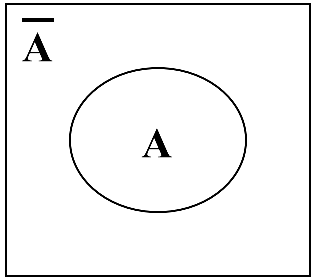
· Ley de absorción:

$$a + (a \cdot b) = a$$

$$a \cdot (a+b) = a$$

· Teoremas de De Morgan

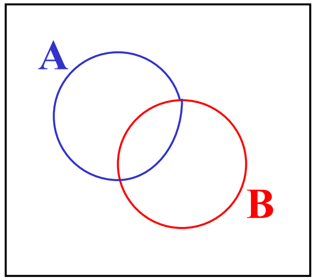
DIAGRAMA DE KARNAUGH



$\bar{A}$	A

$\bar{A}$	A
0	1

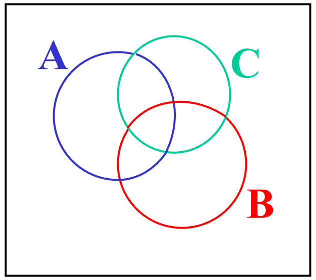
A: 0	1



$\bar{A}\ \bar{B}$	$\bar{A}\ B$
$A\ \bar{B}$	$A\ B$

0 0	0 1
1 0	1 1

A \ B	0	1
0		
1		

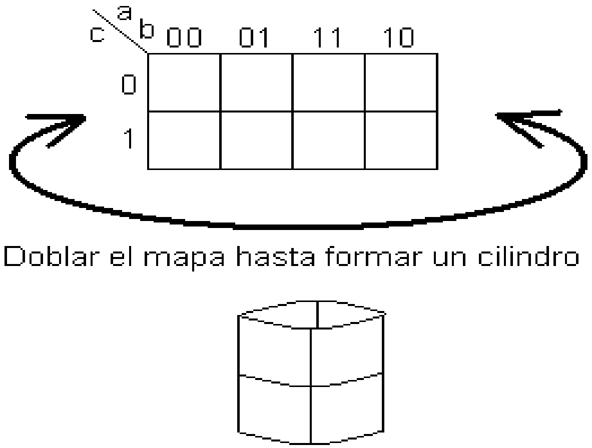


$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
$AB\bar{C}$	ABC
$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

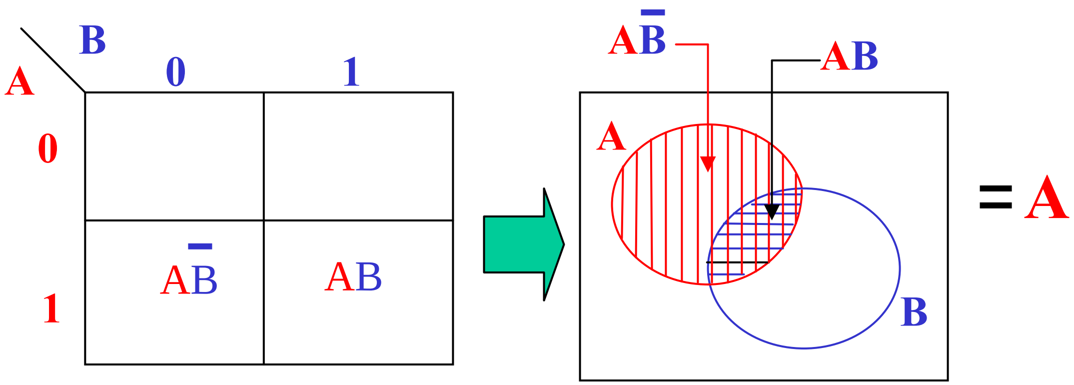
	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	000	001
$\bar{A}B$	010	011
AB	110	111
$A\bar{B}$	100	101

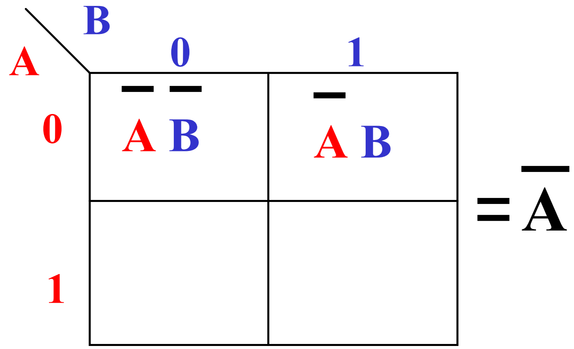
AB \ C	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

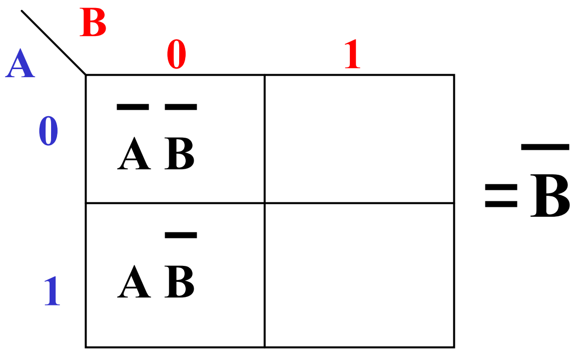
EN LOS MAPAS DE KARNAUGH LAS CELDAS DE LO BORDES SON ADYACENTES, CON LO CUAL EL MAPA SE PUEDE *DOBLAR* COMO SIGUE

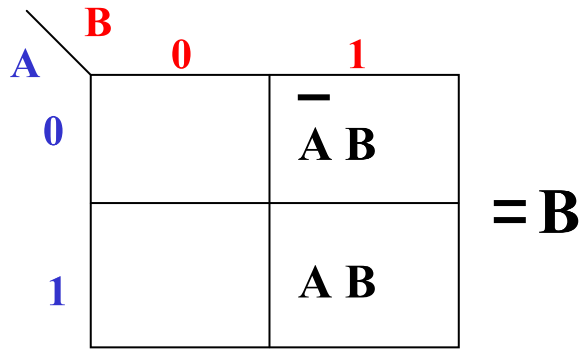


CAMPOS DE ACCION – DOS VARIABLES

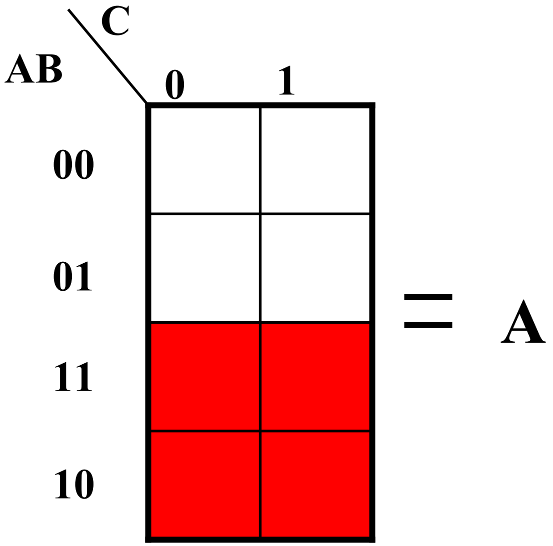


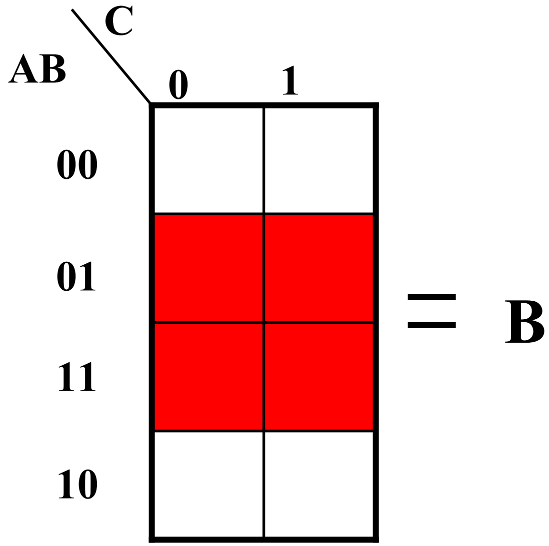


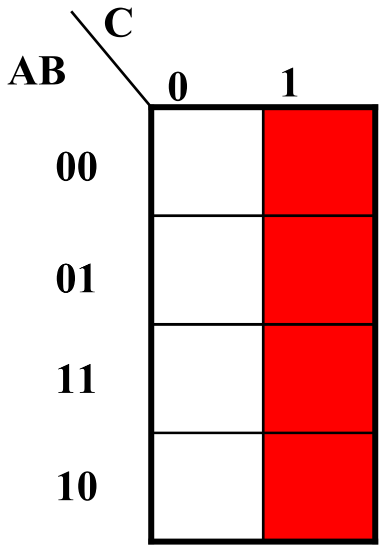




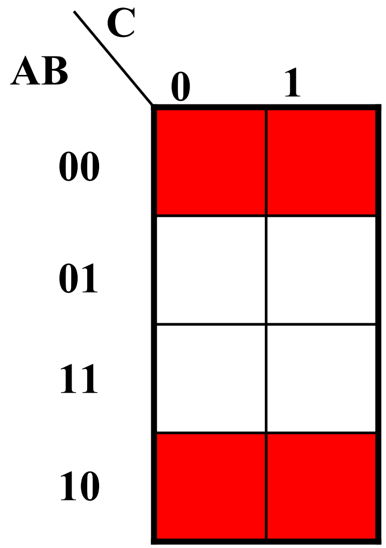
CAMPOS DE ACCION – TRES VARIABLES





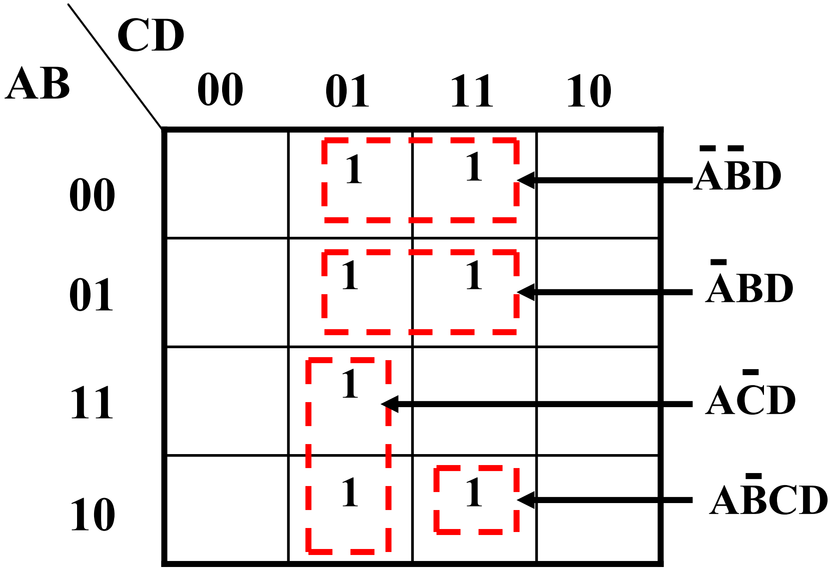


$= C$

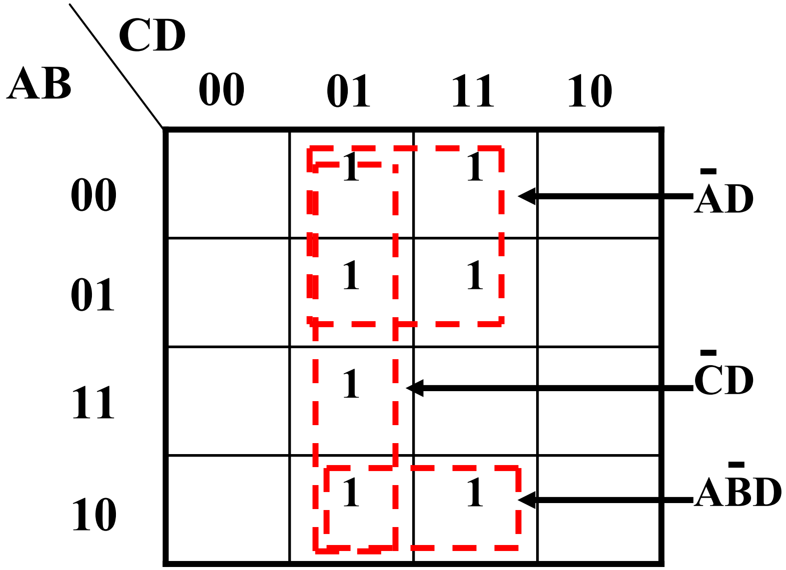


$= \bar{B}$

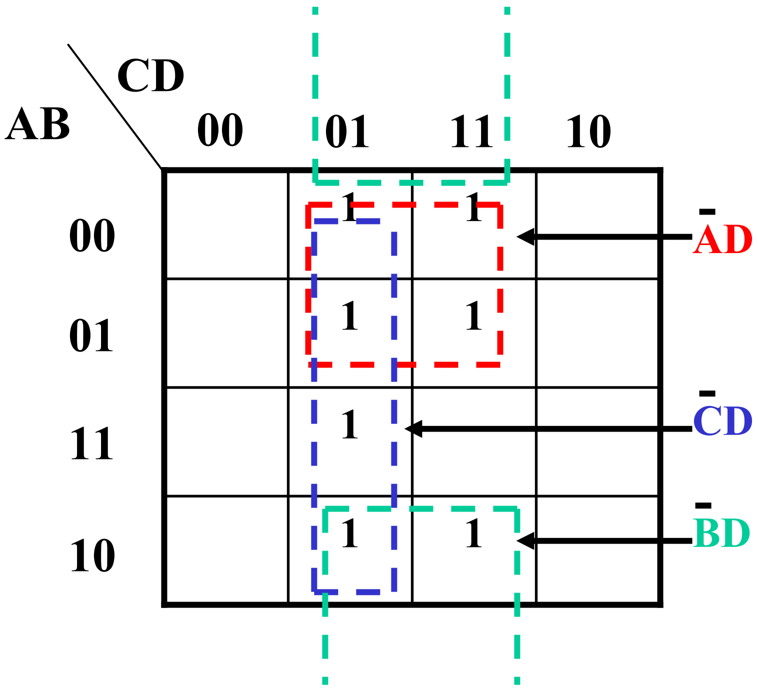
CAMPOS DE ACCION – CUATRO VARIABLES - $f = \Sigma\ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$



$f = \bar{A}\bar{B}D + \bar{A}BD + A\bar{C}D + A\bar{B}CD$



$f = \bar{A}D + \bar{C}D + A\bar{B}D$



$f = \bar{A}D + \bar{C}D + \bar{B}D$

METODO GENERAL

AGRUPAR EN CONJUNTOS DE 1, 2, 4 , 8, etc CELDAS BUSCANDO EL MENOR NUMERO POSIBLE DE AGRUPAMIENTOS, CON EL MAYOR NUMERO DE CELDAS

Terminología para la simplificación:

A continuación definiremos algunos términos comúnmente utilizados en los procesos de simplificación de funciones lógicas.

Implicante:
Conjunto de unos en un mapa de Karnaugh que representa un termino producto de variables. Se denomina implicante porque cuando este termino toma el valor 1, *implica* que también la función toma el valor 1. Un mintérmino solo es un implicante.

Implicante Primo:
Implicante que no está incluido completamente dentro de otro implicante. No puede combinarse con otro implicante para eliminar un literal.

IMPLICANTES PRIMOS

Ejemplo: Simplificar la función:

$$f = \bar{A}\,\bar{B}\,C\,D + \bar{A}\,B\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,B\,C\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,C\,D + A\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D}$$

FUNCION

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11	1	1		
10		1	1	1

IMPLICANTES PRIMOS

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11	1	1		
10		1	1	1

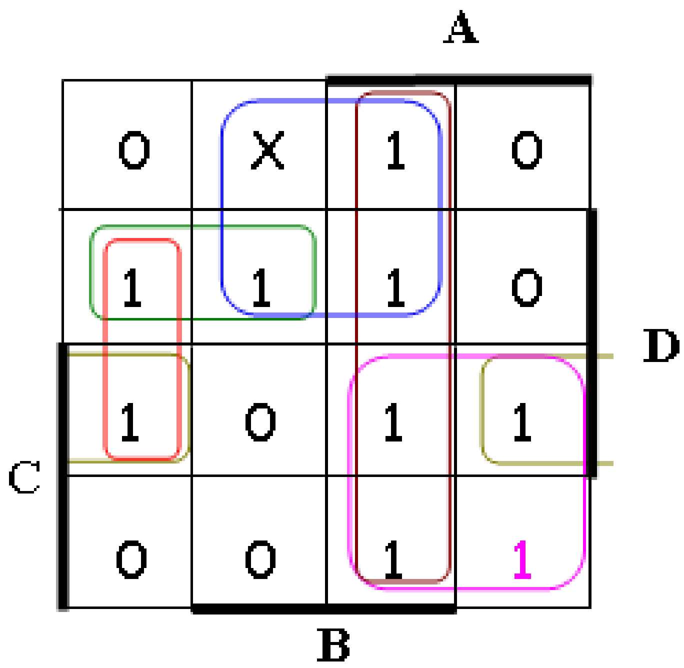
IMPLICANTES PRIMOS ESENCIALES

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11	1	1		
10		1	1	1

FUNCION MINIMIZADA

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01		1	1	
11	1	1		
10		1	1	1

De los 6 implicantes primos, sólo AC es esencial. ya que contiene al mintérmino: AB'CD' que no es cubierto por ningún otro implicante primo.

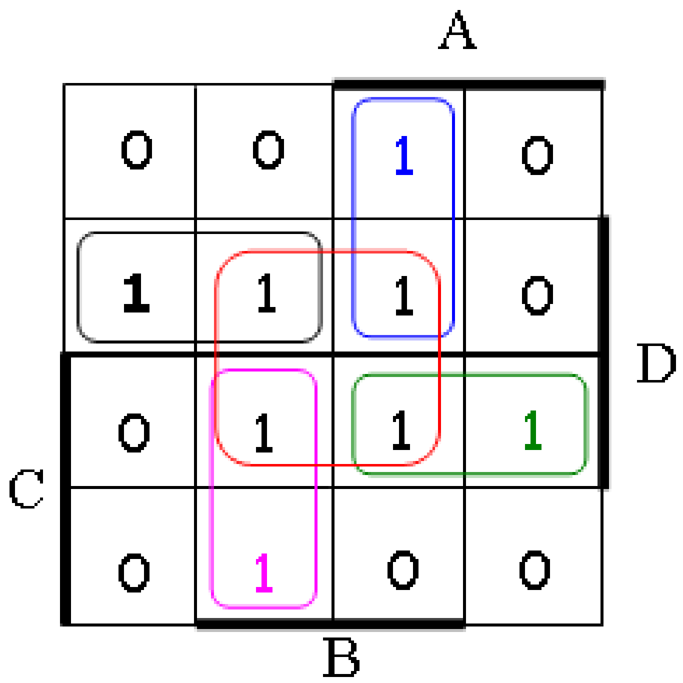


Puede comprobarse que se logra una mínima cobertura de la función con:

AC + BC' + A'B'D

Ejemplo: Para una función de 4 variables se tienen los siguientes implicantes primos:

BD, ABC', ACD, A'BC, A'C'D



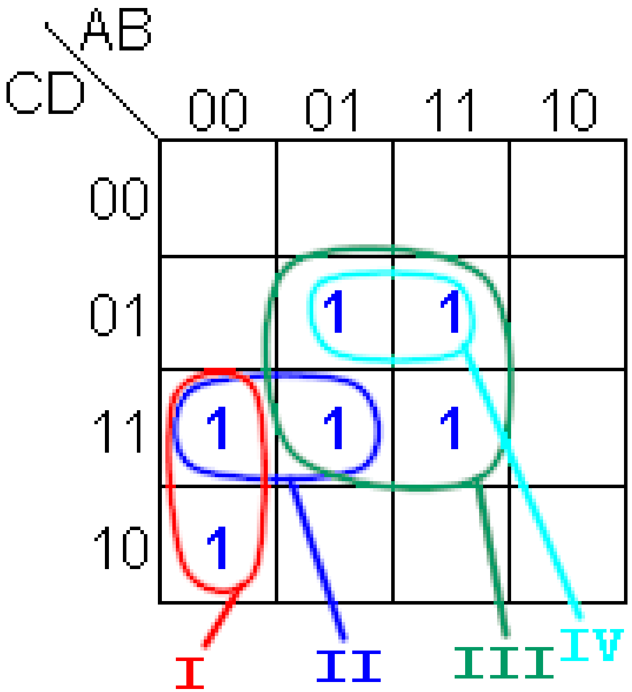
Sólo BD es no esencial.

La función mínima debe contener los esenciales, y con éstos se logra cubrir completamente a la función:

f = ABC' + ACD + A'BC + A'C'D

Implicante Primo Esencial:

Implicante primo que contiene uno o mas mintérminos que no están incluidos en cualquier otro implicante primo.



En el siguiente mapa de Karnaugh:

Los términos I II y III son implicantes primos

El termino IV no es implicante primo

Los términos I y III son implicantes primos esenciales

El termino II no es un implicante primo esenciales

La función se obtiene con los términos I y III

EJEMPLOS

IMPLICANTES NO ESENCIALES

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	
01	1	1	1	
11		1	1	1
10		1		

$$f = BD + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}CD + ABC + A\bar{C}D$$

A B C D							
0 1 0 1	$f =$	1 +	1 +	0 +	0 +	0	= 1
0 1 1 1	$f =$	1 +	0 +	1 +	0 +	0	= 1
1 1 0 1	$f =$	1 +	0 +	0 +	0 +	1	= 1
1 1 1 1	$f =$	1 +	0 +	0 +	1 +	0	= 1

CONDICIONES NO IMPORTA NO SUCEDE

mi	A B C	f
m0	0 0 0	X
m1	0 0 1	0
m2	0 1 0	1
m3	0 1 1	1
m4	1 0 0	0
m5	1 0 1	0
m6	1 1 0	X
m7	1 1 1	1

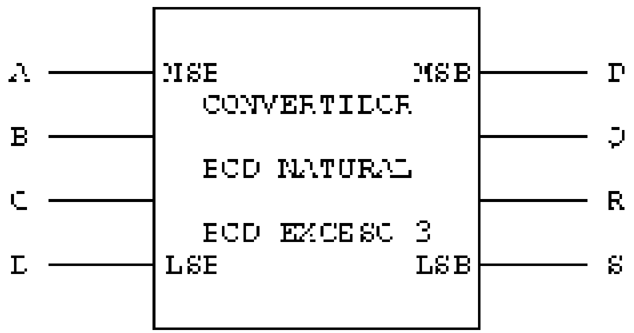
AB \ C	0	1
00	X=0	0
01	1	1
11	X=1	1
10	0	0

B

Condiciones “no importa”

- Ejemplo: conversor BCD natural a BCD exceso 3

A	B	C	D	P	Q	R	S
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	X	X	X	X
1	0	1	1	X	X	X	X
1	1	0	0	X	X	X	X
1	1	0	1	X	X	X	X
1	1	1	0	X	X	X	X
1	1	1	1	X	X	X	X



P

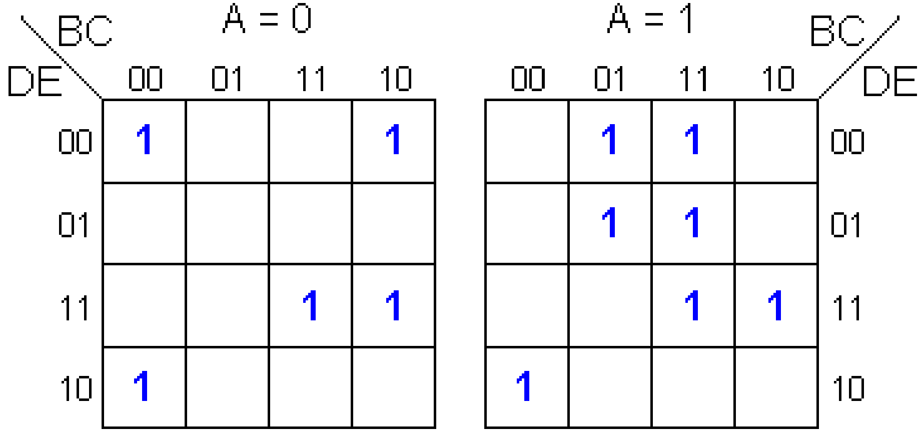
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

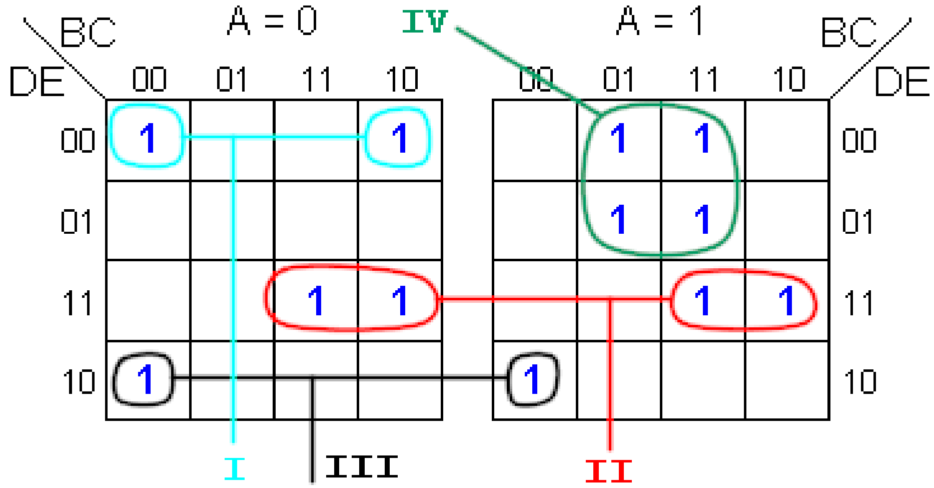
$$P = A + B \cdot C + B \cdot D$$

Minimización en mapas de Karnaugh de 5 variables

Simplificar la función = $\sum m(0,2,8,11,15,18,20,21,27,28,29,31)$

Se coloca un 1 en los minterminos





La función quedará $f=\bar{A}\bar{C}\bar{D}\bar{E}+BDE+\bar{B}\bar{C}D\bar{E}+AC\bar{D}$

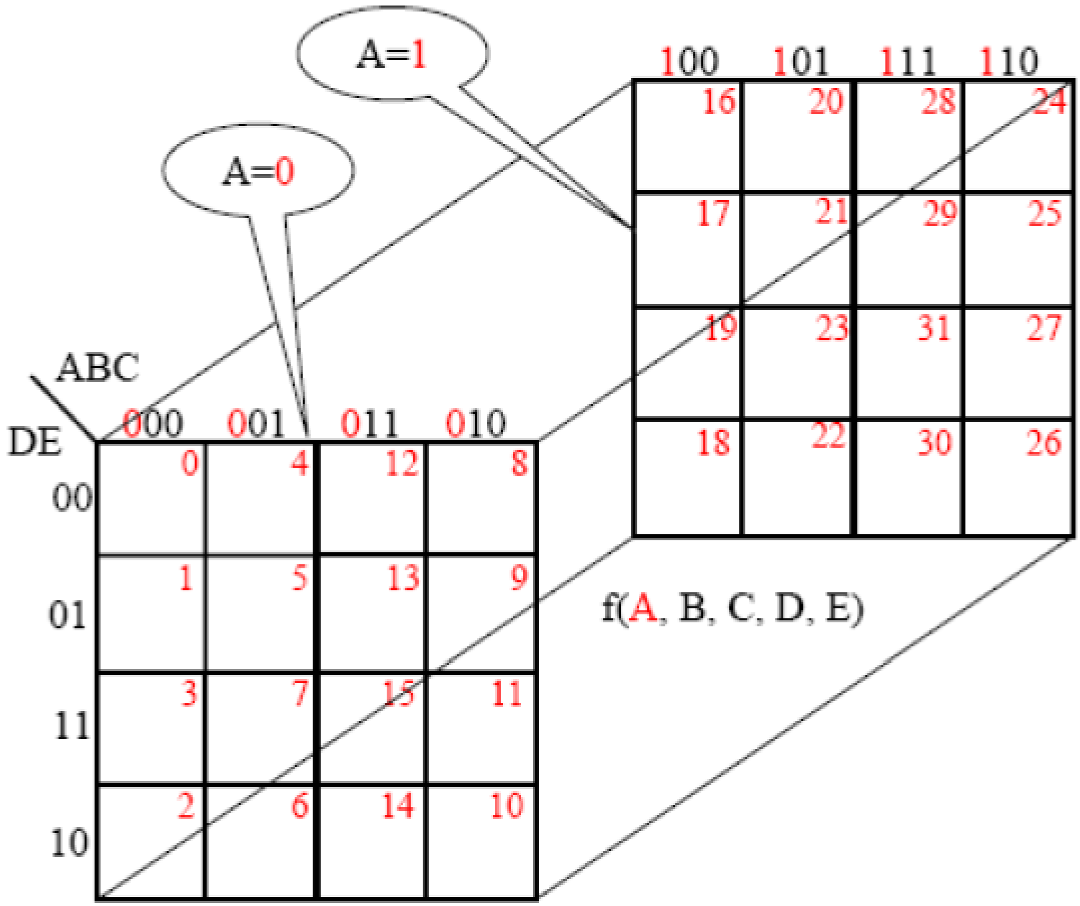
Representación

- Nótese que el mapa de 5 variables se obtiene a partir de dos mapas para n = 4.
- A uno se le antecede un cero en la codificación de las columnas y al otro un 1.
- El mapa de Karnaugh de 5 variables f(A,B,C,D,E):

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

Representación

- Otra forma de representación



PROBLEMAS RESUELTOS

FUNCIONES NO TOTALMENTE DEFINIDAS

Problema 1

a) **Simplificar por el método de Karnaugh la siguiente expresión:**

$$S = \overline{c} \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + b \cdot c \cdot d$$

b) **Dibujar un circuito que realice dicha función con puertas lógicas**

(Selectividad andaluza)

a. Obtenemos la expresión canónica y realizamos el mapa de Karnaugh para cuatro variables

$$S = \overline{c} \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + b \cdot c \cdot d$$

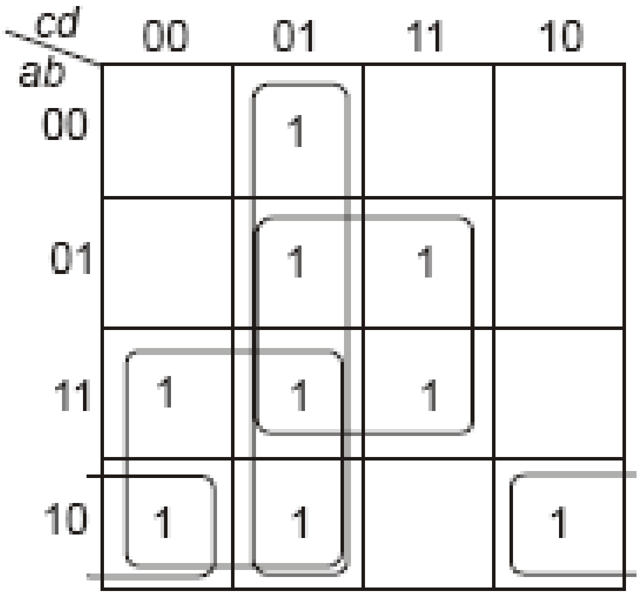
$$S = \overline{c} \cdot d \cdot (a + \overline{a}) \cdot (b + \overline{b}) + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + b \cdot c \cdot d \cdot (a + \overline{a})$$

$$S = a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d + + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} +$$

$$+ a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d + + a \cdot b \cdot c \cdot d$$

$$S = a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot d + + a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} +$$

$$+ a \cdot b \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + \overline{a} \cdot b \cdot c \cdot d + + a \cdot b \cdot c \cdot d$$



b. La función simplificada es

$$\boxed{S = \overline{c} \cdot d + a \cdot \overline{c} + b \cdot d + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{d}}$$

Dada la siguiente función:

$$S = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b$$

a) Obtenga su forma canónica como suma de productos lógicos.

b) Obtenga su expresión más significativa.

a. Obtenemos su función canónica como suma de productos

$$S = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b$$

$$S = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \left(c + \overline{c}\right) + \overline{a} \cdot \overline{c} \cdot \left(b + \overline{b}\right) + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot \left(c + \overline{c}\right)$$

$$S = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c}$$

$$S = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot c$$

b. Situamos los términos de la función sobre la cuadrícula para tres variables y simplificamos la función por Karnaugh

a \ bc	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1			

La función obtenida es

$$\boxed{S = \overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{c}}$$

Problema 6

Un motor eléctrico puede girar en ambos sentidos por medio de dos contactores: *"D"* para el giro a derecha y *"I"* para el giro a izquierda. Estos dos contactores son comandados por dos pulsadores de giro *"d"* (derecha) e *"i"* (izquierda) y un interruptor de selección *"L"* de acuerdo con las siguientes condiciones:

- Si sólo se pulsa uno de los dos botones de giro, el motor gira en el sentido correspondiente.
- Si se pulsan los dos botones de giro simultáneamente, el sentido de giro depende del estado del interruptor *"L"* de forma que,
  - Si *"L"* está activado, el motor gira a la derecha.
  - Si *"L"* está en reposo, el motor gira a la izquierda.

Establecer :

a) La tabla de verdad.

b) Las funciones lógicas *D* e *I* y simplificarlas.

c) Su circuito lógico mediante puertas.

(Selectividad andaluza)

a. Realizamos la tabla de verdad contemplando las dos salidas

d	*i*	*L*	*D*	*I*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

b. De las funciones deducidas de la tabla, situamos sus términos sobre las cuadrículas correspondientes de tres variables y las simplificamos por Karnaugh

a. Realizamos la tabla de verdad contemplando las dos salidas

d	*i*	*L*	*D*	*I*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

b. De las funciones deducidas de la tabla, situamos sus términos sobre las cuadrículas correspondientes de tres variables y las simplificamos por Karnaugh

$$D = d \cdot \bar{i} \cdot \bar{L} + d \cdot \bar{i} \cdot L + d \cdot i \cdot L$$

d \ *iL*	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	

$$D = d \cdot \bar{i} + d \cdot L$$

$$\boxed{D = d \cdot \left(\bar{i} + L\right)}$$

$$I = \bar{d} \cdot i \cdot \bar{L} + \bar{d} \cdot i \cdot L + d \cdot i \cdot \bar{L}$$

d \ *iL*	00	01	11	10
0			1	1
1				1

$$I = \bar{d} \cdot i + i \cdot \bar{L}$$

$$\boxed{I = i \cdot \left(\bar{d} + \bar{L}\right)}$$

Un motor es controlado mediante tres pulsadores A, B y C.

Diseñe su circuito de control mediante puertas lógicas que cumpla las siguientes condiciones de funcionamiento:

- **Si** se pulsan los tres pulsadores el motor se activa.
- **Si** se pulsan dos pulsadores cualesquiera, el motor se activa pero se enciende una lámpara adicional como señal de emergencia.
- **Si** sólo se pulsa un pulsador, el motor no se excita, pero se enciende la lámpara indicadora de emergencia.
- **Si** no se pulsa ningún interruptor, ni el motor ni la lámpara se activan.

(Selectividad andaluza septiembre-97)

Obtenemos la tabla de verdad para las dos salidas, según las especificaciones, y expresamos sus funciones canónicas

A	*B*	*C*	*M*	*L*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

A	B	C	M	L
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

$$M = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

$$L = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Por el método tabular obtenemos sus funciones simplificadas

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

$$M = B \cdot C + A \cdot C + A \cdot B$$

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

$$L = \overline{A} \cdot C + A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C}$$

Un sistema electrónico de alarma está constituido por cuatro detectores a, b, c y d. La alarma debe dispararse cuando se activen tres o cuatro detectores. Si se activan sólo dos detectores su disparo es indiferente. La alarma nunca debe dispararse si se activa un solo detector o ninguno. Por último y por razones de seguridad, se deberá activar si a = 0, b = 0, c = 0 y d = 1. Diseñe un circuito de control para esta alarma con el menor número posible de puertas lógicas.

(Propuesto Andalucía 96/97)

Realizamos la tabla de verdad basándonos en las condiciones iniciales

a	*b*	*c*	*d*	*S*
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	X
0	1	0	0	0
0	1	0	1	X
0	1	1	0	X
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	1
1	1	0	0	X
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

ab \ cd	00	01	11	10
00		1	X	
01		X	1	X
11	X	1	1	1
10		X	1	X

$$S = d + a \cdot b$$

Un proceso de fabricación es controlado por cuatro sensores A, B, C y D, de forma que sus salidas son "0" o "1", según estén desactivados o activados respectivamente. El proceso deberá detenerse cuando está activado el sensor A o cuando lo estén dos sensores cualesquiera. Se pide:

a) Realice la tabla de verdad.

b) Simplifique la función por el método de Karnaugh.

c) Represente el esquema del circuito con puertas lógicas.

(Selectividad andaluza septiembre-99)

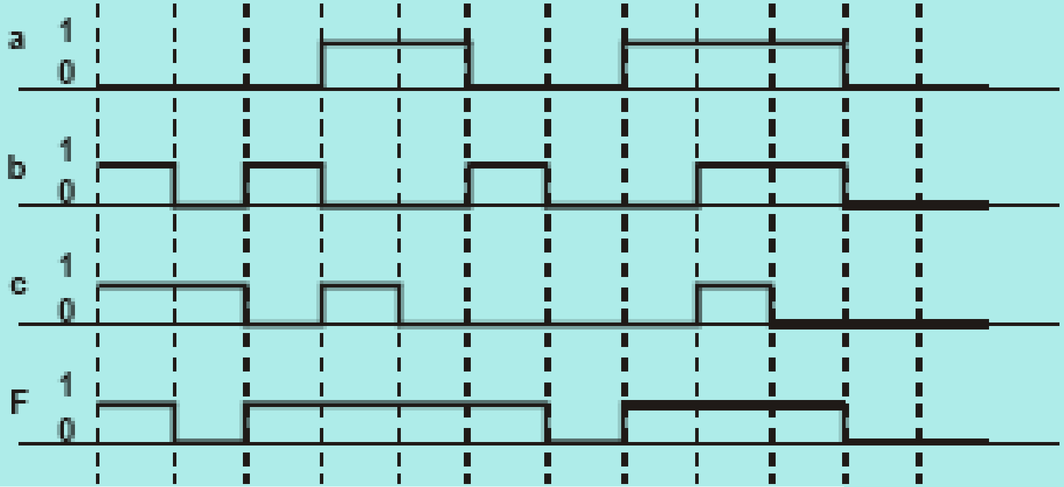
a. Realizamos primeramente su tabla de verdad

a	*b*	*c*	*d*	*S*
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1			
11				
10				

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

Partiendo del cronograma de la figura, diseñe un circuito lógico que lo cumpla, con el menor número posible de puertas lógicas.



Realizamos primeramente su tabla de verdad

a	*b*	*c*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1