ÁLGEBRA DE BOOLE

Técnicas Digitales I

Luis Eduardo Toledo

ÁLGEBRA DE BOOLE

- Se conoce con ese nombre en honor a George Boole, matemático inglés quien en 1854 publicó un libro donde se presentaba la teoría matemática de la lógica.

- Se utiliza para describir la interconexión de compuertas digitales y para transformar diagramas de circuitos en expresiones algebraicas.

ÁLGEBRA DE BOOLE: DEFINICIÓN

- Un álgebra de Boole es toda clase o conjunto de elementos que pueden tomar dos valores perfectamente diferenciados, que se suelen asignar a los números 0 y 1 de un código binario.

- Dichos elementos están relacionados mediante las operaciones binarias denominadas suma lógica (+), producto lógico (.) y complementación o inversión (/) y cumplen con los siguientes postulados:

POSTULADOS

a) Ambas operaciones son conmutativas, es decir si a y b son elementos del álgebra se verifica:

$$a+b = b+a$$

$$a.b = b.a$$

b) Posee dos elementos neutros, el 0 y el 1, que cumplen la propiedad de identidad con respecto a cada una de las operaciones suma lógica y producto lógico:

$$0+a=a$$

$$1.a=a$$

POSTULADOS

c) Cada operación es distributiva con respecto a la otra:

$$a.(b+c) = a.b+a.c$$

$$a+b.c = (a+b).(a+c)$$

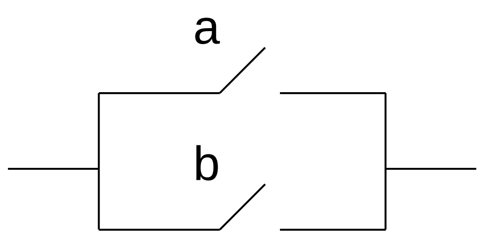
d) Para cada elemento "a" del álgebra existe un elemento "/a" (se lo llama a negado) tal que:

$$a + /a = 1$$

$$a \,.\, /a = 0$$

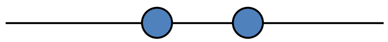
EJEMPLO CON LLAVES

a . b conexión serie
Producto lógico



a + b conexión paralela
Suma lógica

“0” circuito abierto



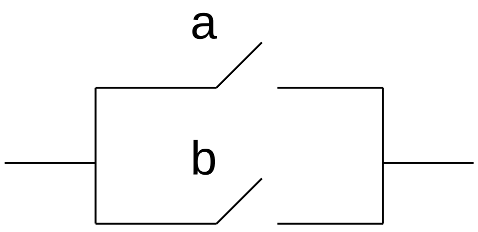
“1” corto circuito

POSTULADOS CON LLAVES

a) Ambas operaciones son conmutativas, es decir si a y b son elementos del álgebra se verifica:

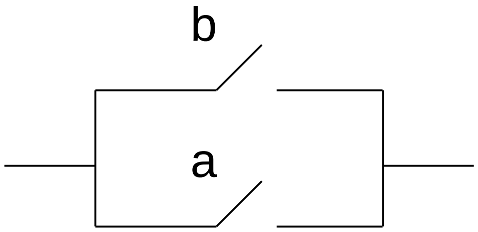
$$a+b = b+a$$

$$a.b = b.a$$



a+b

≡



b+a

a.b

≡

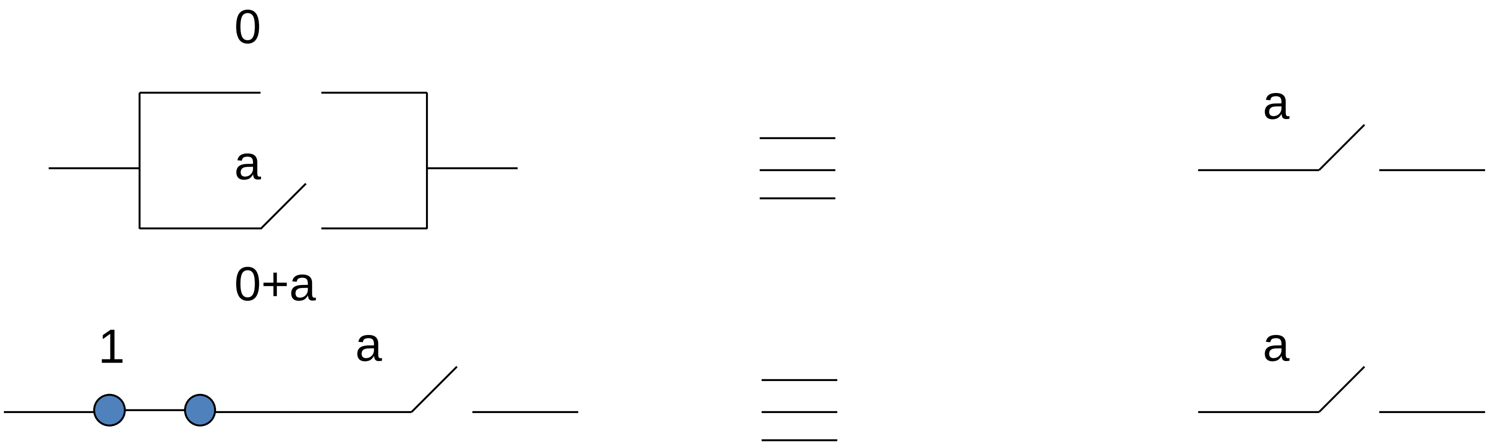
b.a

POSTULADOS CON LLAVES

b) Posee dos elementos neutros, el 0 y el 1, que cumplen la propiedad de identidad con respecto a cada una de las operaciones suma lógica y producto lógico:

$$0+a=a$$

$$1.a=a$$

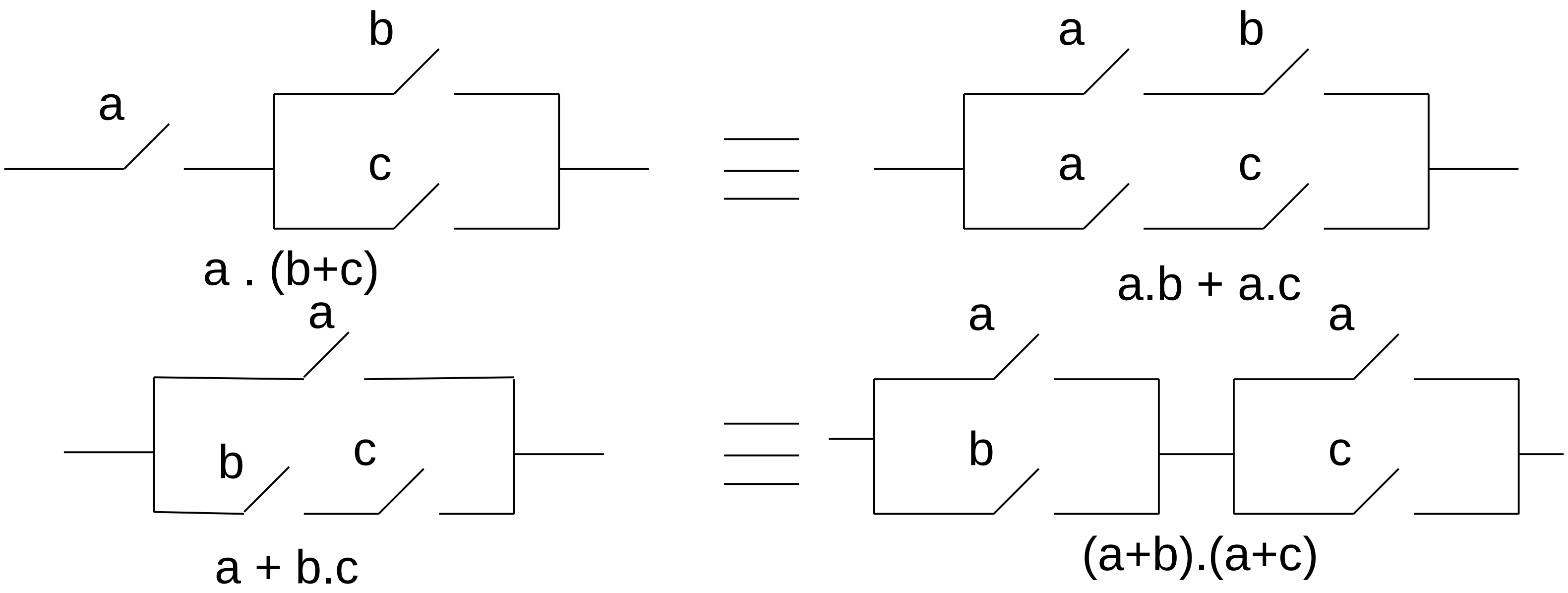


POSTULADOS CON LLAVES

c) Cada operación es distributiva con respecto a la otra:

$$a.(b+c) = a.b+a.c$$

$$a+b.c = (a+b).(a+c)$$

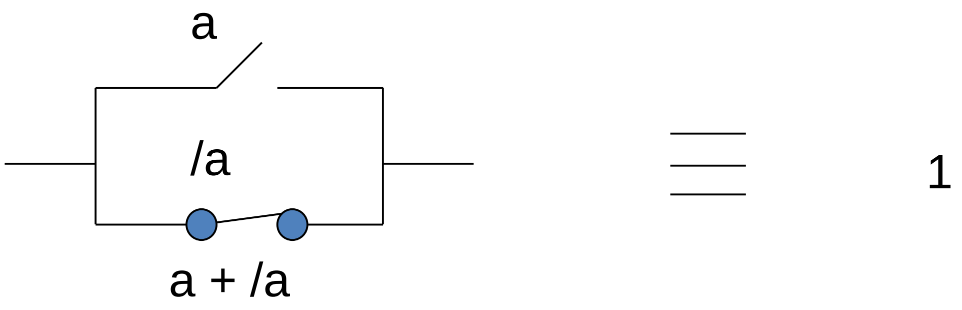


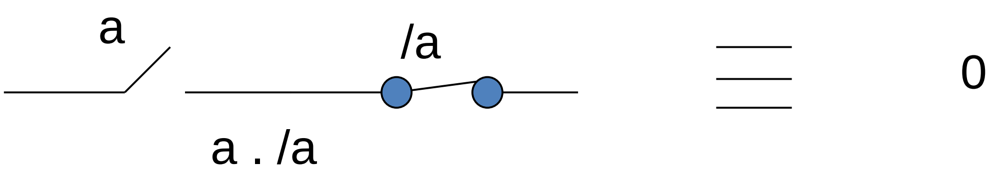
POSTULADOS CON LLAVES

d) Para cada elemento a del álgebra existe un elemento /a (a negado) tal que:

$$a + /a = 1$$

$$a \cdot /a = 0$$





LÓGICA Y COMPUERTAS

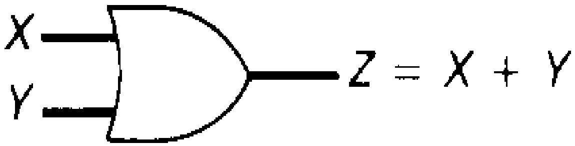
Los posibles valores binarios de la operación OR lógica son los siguientes:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 1$



Compuerta OR

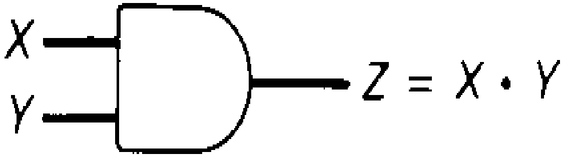
de la operación AND lógica:

$0 . 0 = 0$

$0 . 1 = 0$

$1 . 0 = 0$

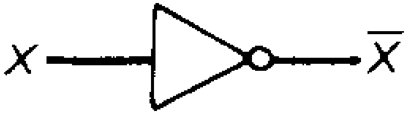
$1 . 1 = 1$



Compuerta AND

de la operación NOT

x = 1 /x=0 y viceversa.



Compuerta NOT o inversor

LÓGICA Y TABLA DE VERDAD

Una tabla de verdad es una disposición de las combinaciones de las variables binarias que muestra la relación entre los valores que pueden tomar las variables y el resultado de la operación.

Tablas de verdad de las tres operaciones lógicas

AND			OR			NOT	
X	Y	$X \cdot Y$	X	Y	$X + Y$	X	$\bar{X}$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

TEOREMAS

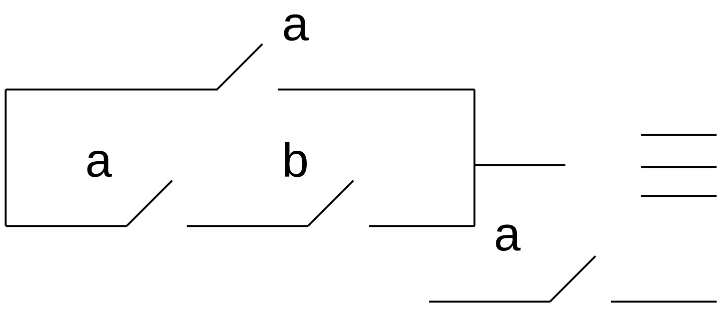
1) Principio de dualidad.

Dada una igualdad, si se cambia suma lógica (+) por producto lógico (.), producto lógico por suma lógica, ceros por unos y unos por ceros, la igualdad permanece válida.

Se demuestra por la simetría de los postulados!!

2) Ley de Absorción

$a + a \cdot b = a$



TEOREMAS

3) Teorema del consenso

$x.y + /x.z + y.z = x.y + /x.z$

Se demuestra que el tercer término es redundante y se puede eliminar.

$$
\begin{aligned}
x.y + /x.z + y.z &= x.y + /x.z + y.z\ (x+/x) \\
&= x.y + /x.z + x.y.z + /x.y.z \\
&= x.y + x.y.z + /x.z + /x.y.z \\
&= x.y\ (1+z) + /x.z\ (1+y) \\
&= x.y + /x.z
\end{aligned}
$$

TEOREMAS

4) Teorema de De Morgan

/(x+y) = /x . /y

/(x.y) = /x + /y

Tablas de verdad para verificar el teorema de DeMorgan

A.	X	Y	X + Y	$\overline{(X + Y)}$
	0	0	0	1
	0	1	1	0
	1	0	1	0
	1	1	1	0

B.	X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
	0	0	1	1	1
	0	1	1	0	0
	1	0	0	1	0
	1	1	0	0	0