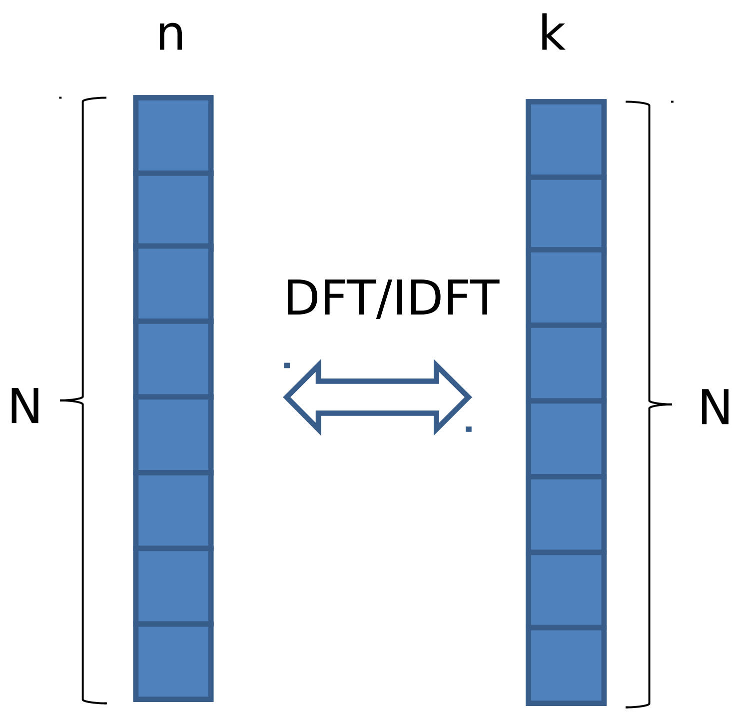
TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER
FFT

Ing. Federico Paredes

Transformada Discreta de Fourier



Transformación lineal que mapea una señal compleja x_n en una señal compleja X_k de acuerdo a la siguiente ecuación.

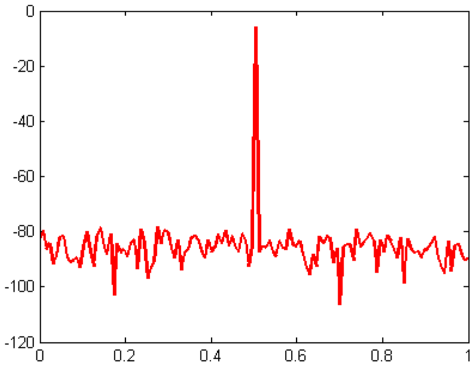
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{i2\pi}{N}kn} \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

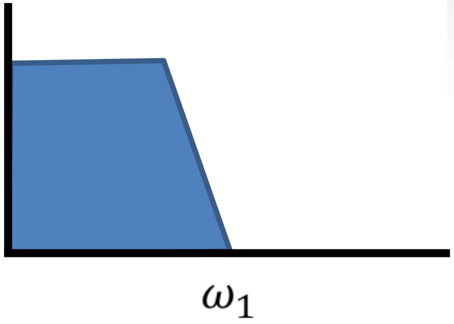
Y de manera inversa

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{i2\pi}{N}kn} \qquad n = 0,1,\dots,N-1$$

Algunas Aplicaciones

- Análisis Espectral
- Compresión de datos
- Filtrado
- Correlación cruzada





Obtención de la DFT

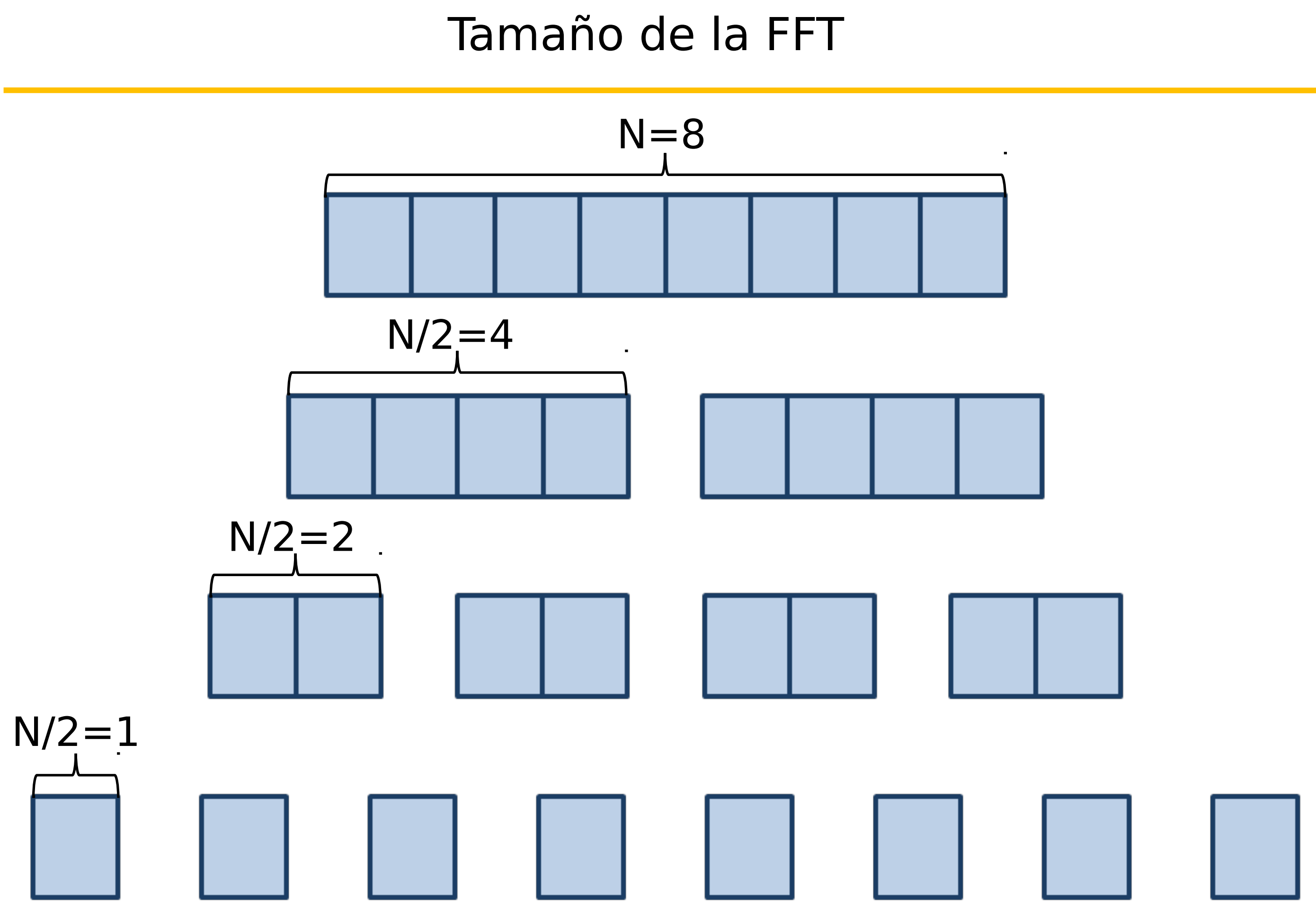
Cálculo de la DFT

La DFT se puede obtener correlacionando las N exponenciales complejas.
Esto requiere N^2 sumas y N^2 multiplicaciones.

FFT – Fast Fourier Transform

El algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier permite reducir de manera significativa la cantidad de operaciones necesarias para calcular la DFT.

Divide y Conquistarás



Cálculos Necesarios

N^2= **64**

2x(N/2)^2= **32**

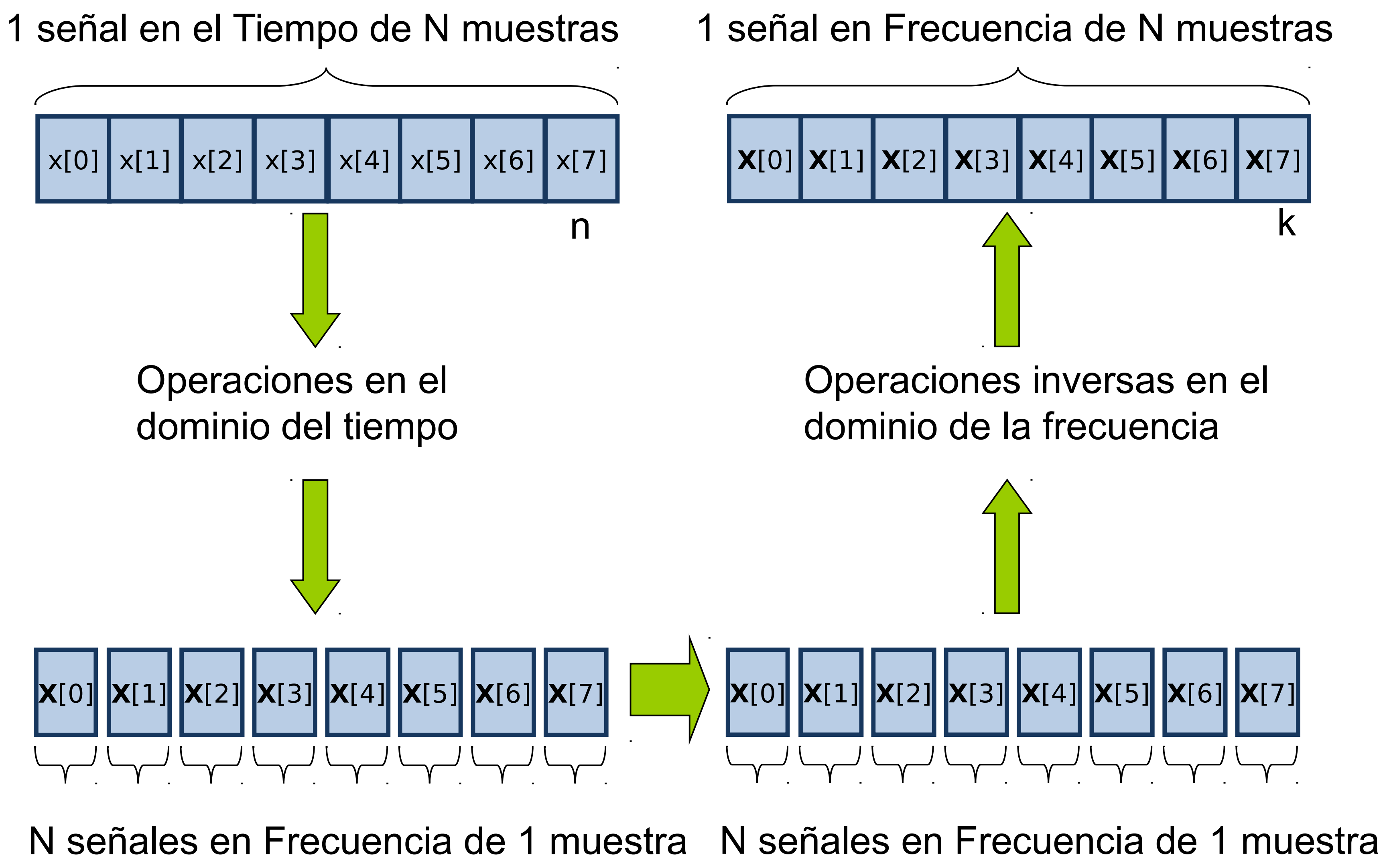
4x(N/4)^2= **16**

8x(N/8)^2= **8**

Objetivo del Algoritmo

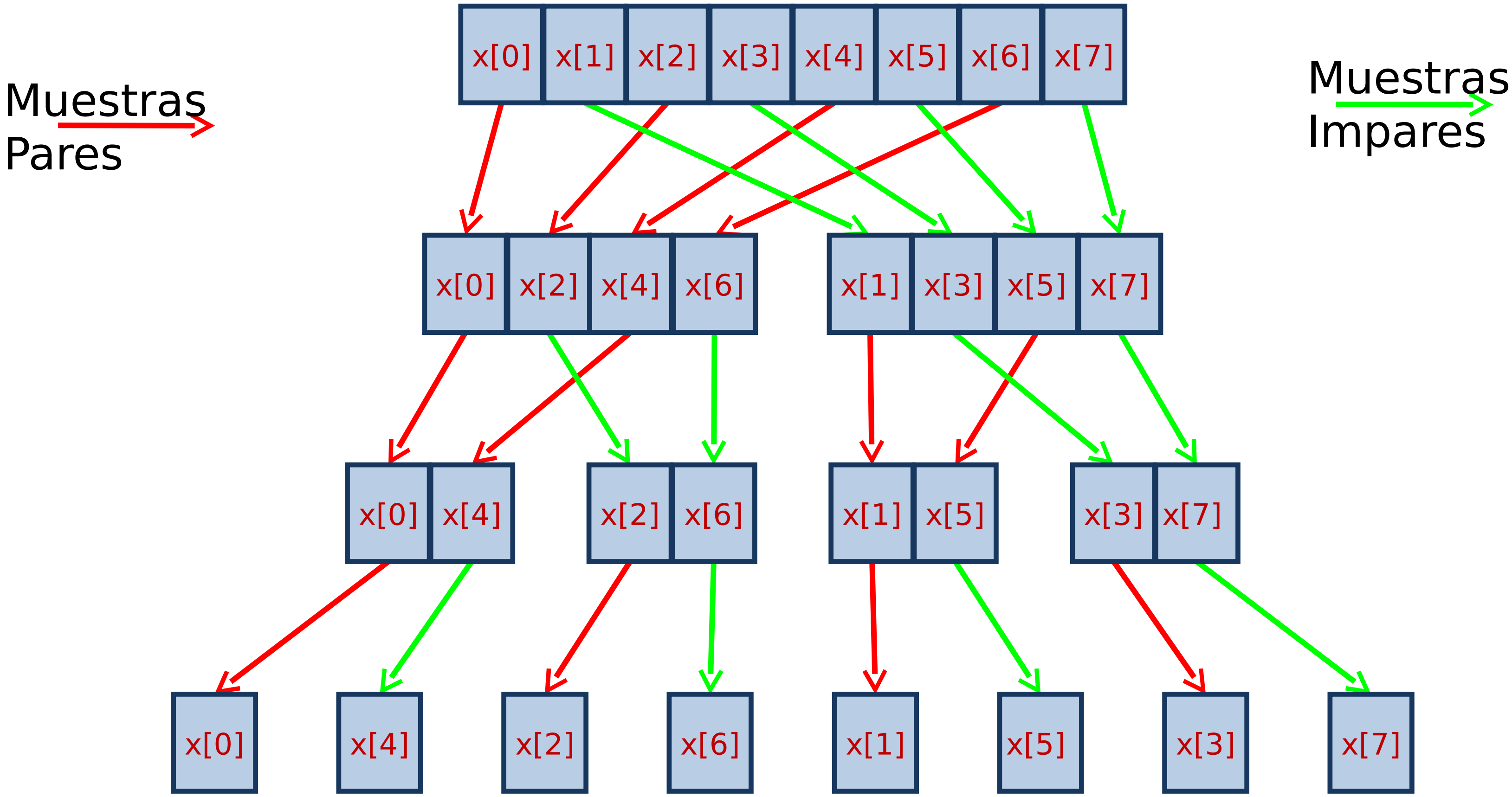
- Correlacionar una única muestra con una exponencial compleja de una muestra e índice cero, nos devuelve la misma muestra.
  Por ende -> **La DFT de una señal de una sola muestra es la misma muestra.**
- El método de división permite obtener N transformadas de una muestra a partir de un señal de N muestras.
- La tarea principal del algoritmo FFT es la de ensamblar N transformadas de una muestra en una sola transformada de N muestras.
- Para ello, se debe aplicar el equivalente en frecuencia, de la inversa de la operación aplicada en el tiempo para descomponer la señal.
- Si el método de división se elige correctamente, **las operaciones necesarias se simplifican**.

Objetivo del Algoritmo



Bit Reverse Ordering

Consiste en separar muestras pares e impares sucesivamente.

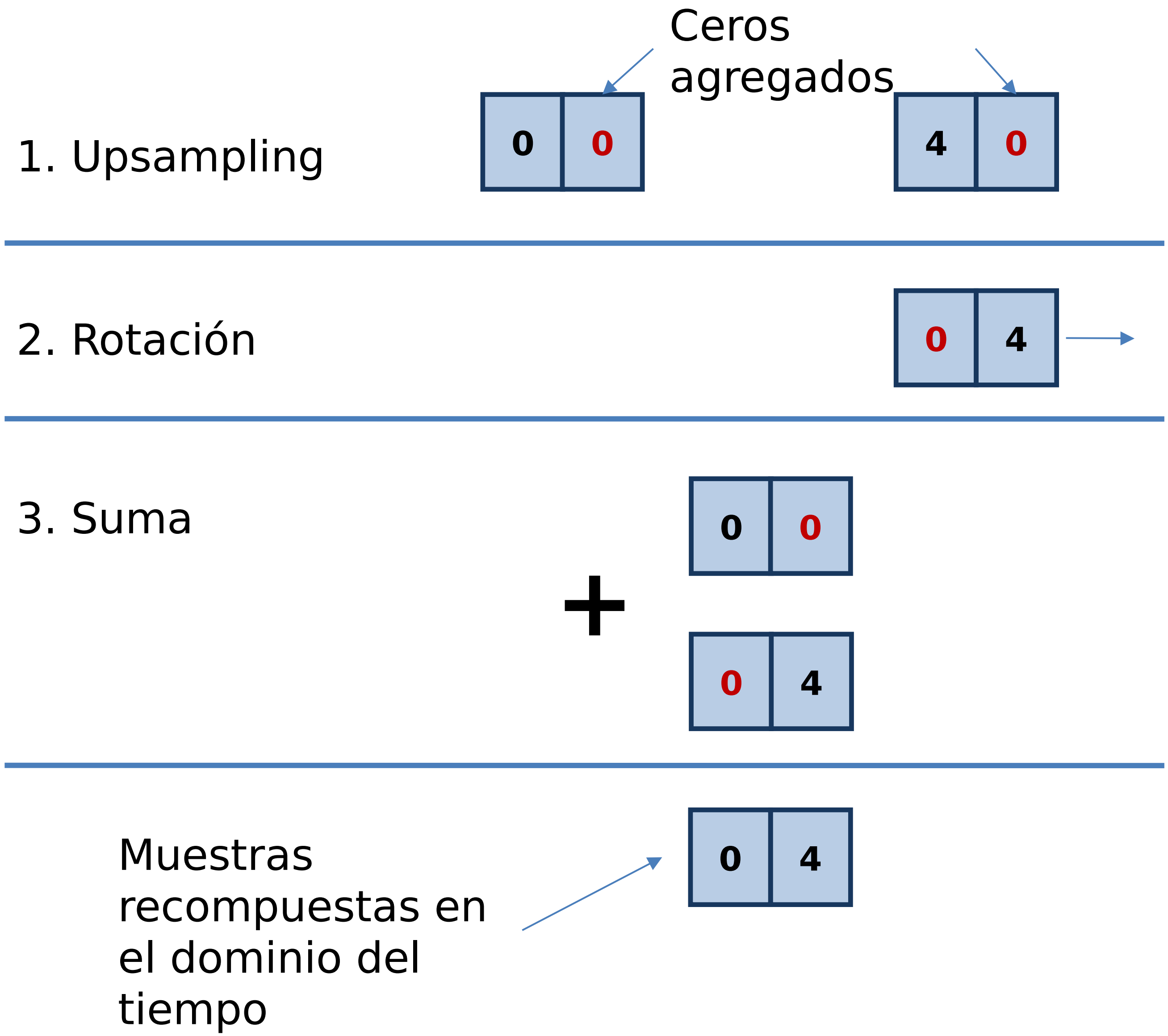


Bit Reverse Ordering

Obtención del ordenamiento propuesto

Posición original	**Posición en binario**	**Bits reflejados**	**Posición resultante**
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

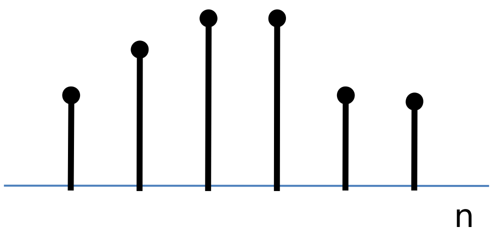
Reconstrucción de la señal en el domino del tiempo

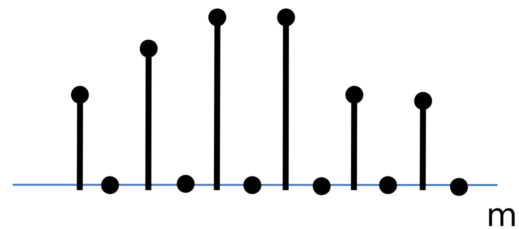


Reconstrucción de la señal en el domino de la frecuencia

Propiedades de la transformada de Fourier: **Upsampling**

Tiempo

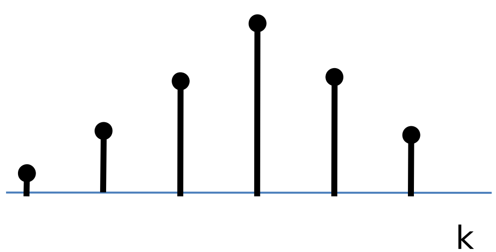


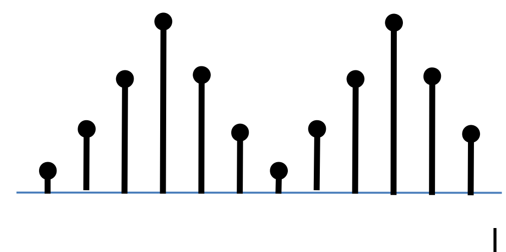


$$x[n]$$

$$y[m] = \begin{cases} x[n] & \text{si} \quad m = Ln \\ 0 & \text{si} \quad m \neq Ln \end{cases}$$

Frecuencia





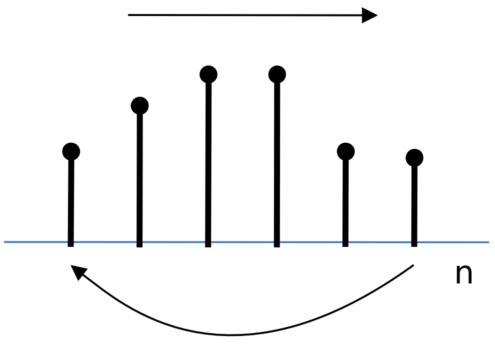
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

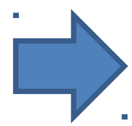
$$Y[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i}{N} ln} \qquad l = 0, \ldots, LN-1$$

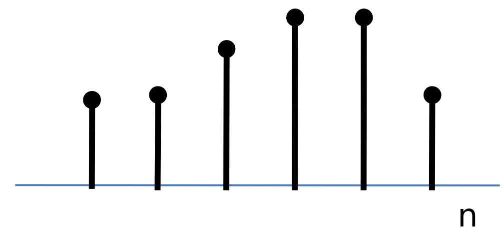
Reconstrucción de la señal en el domino de la frecuencia

Propiedades de la transformada de Fourier: **Rotación**

Tiempo

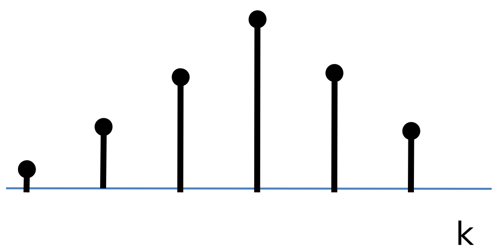


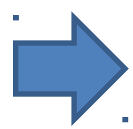


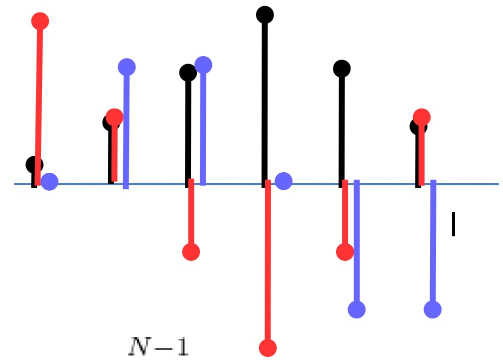


$$x[n]$$

Frecuencia



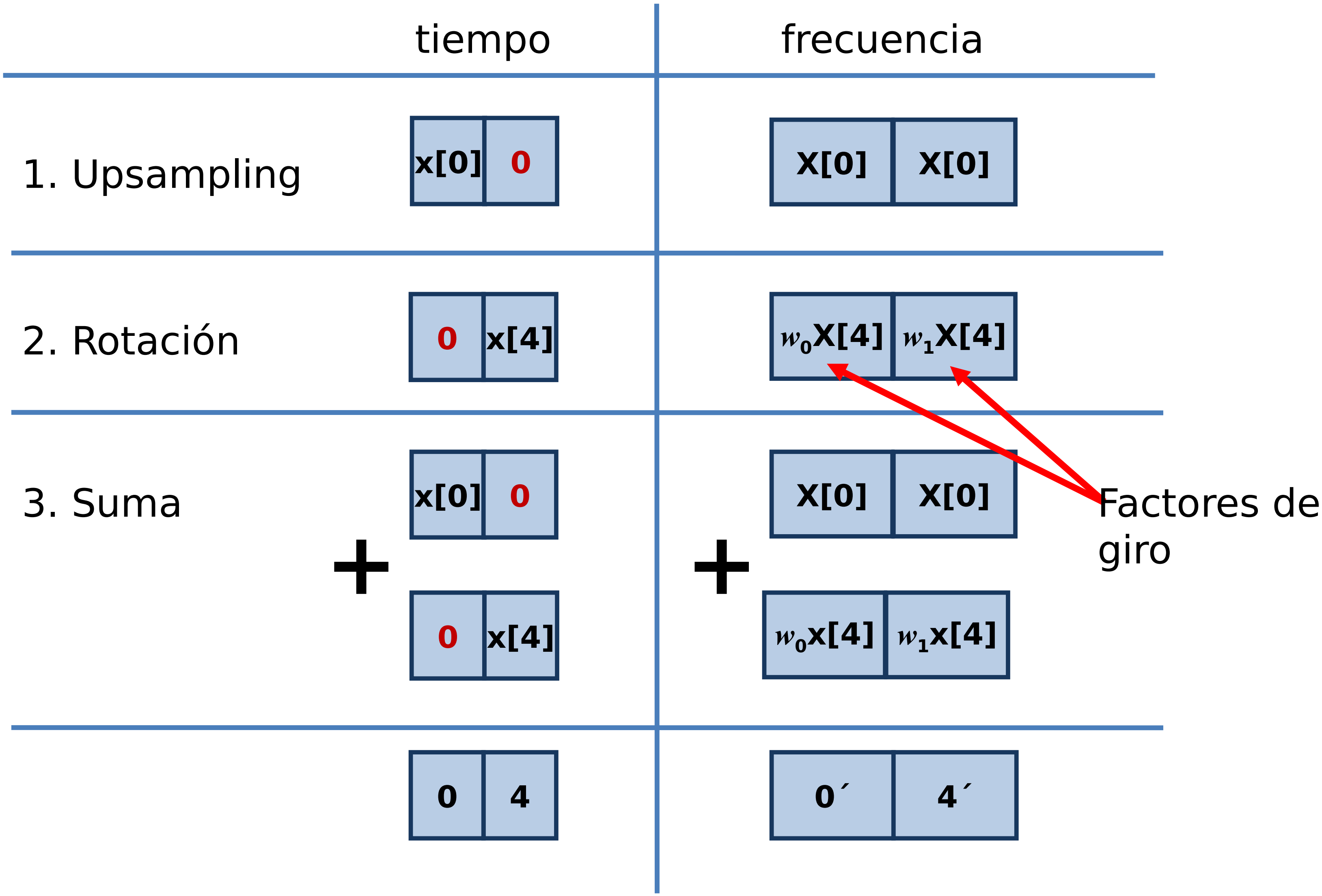




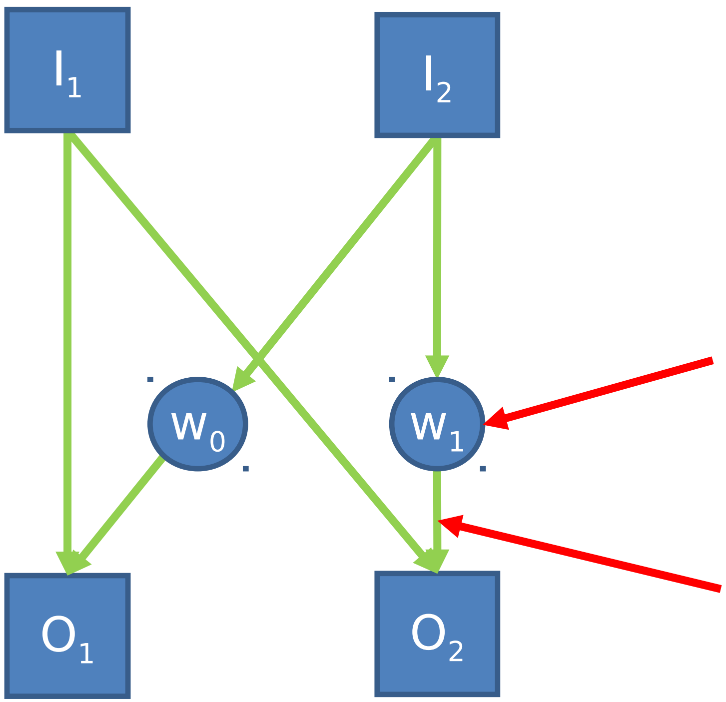
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

$$Y[l] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i}{N} ln} e^{-\frac{2\pi i}{N} lm}$$

Reconstrucción de la señal en el domino de la frecuencia



El Bloque Base: Butterfly



Las operaciones necesarias para unir dos transformadas de una muestra en una transformada de dos muestras se pueden resumir con un bloque llamado *Butterfly.*

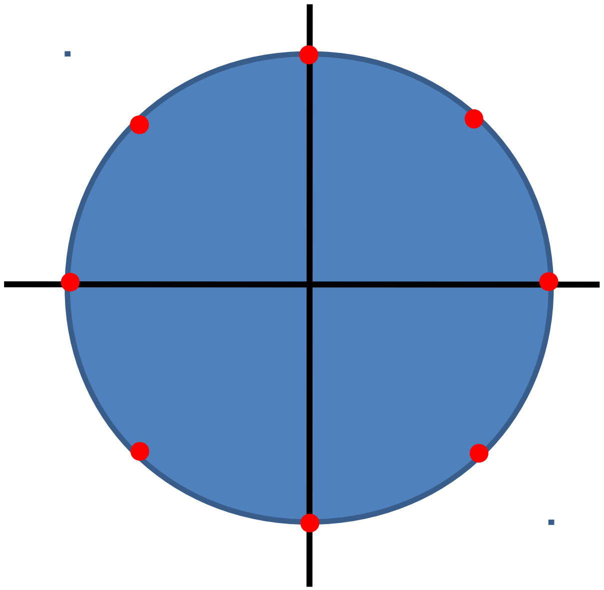
• Los círculos representan las **multiplicaciones** por el **factor de giro**

• Los puntos de unión de las flechas representan **sumas**.

Factores de giro (Twiddle factors)

Ecuación: $e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$

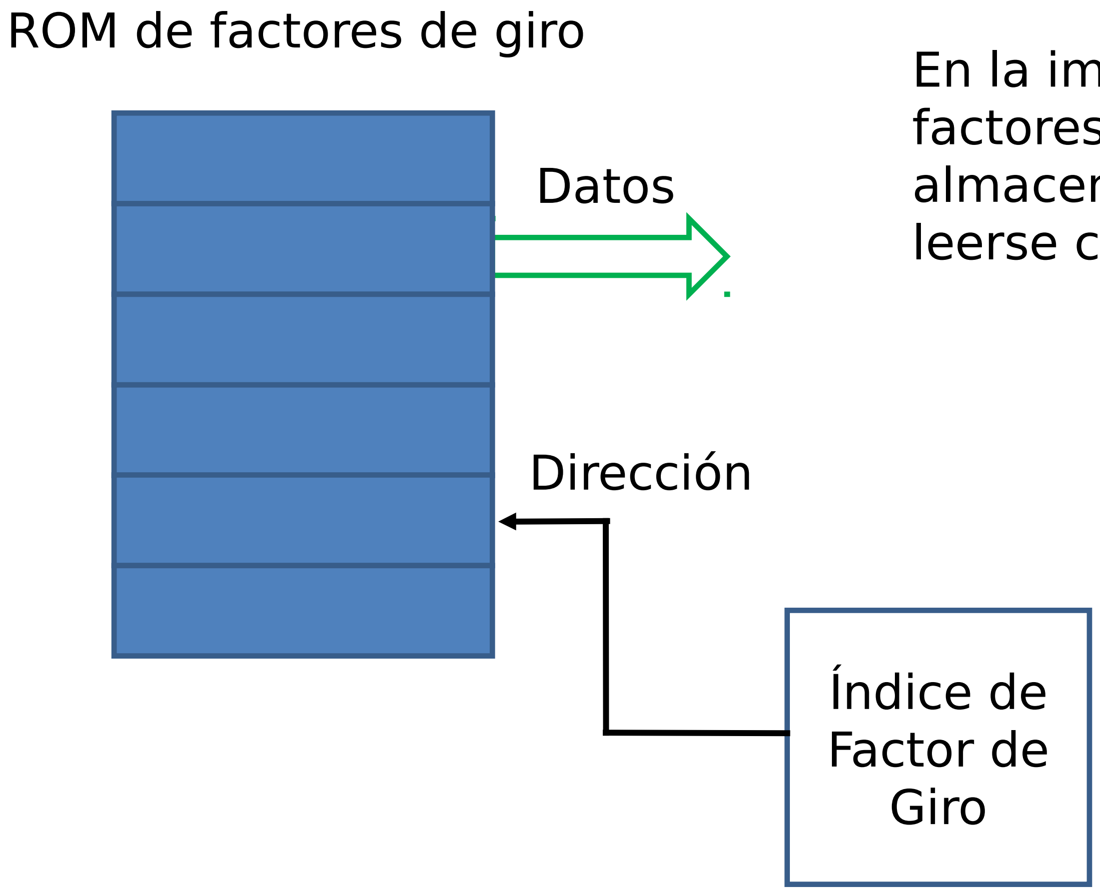
N: Cantidad de muestras
m: desplazamiento
k: índice de muestras



Índice	Factor	Real	Imag
0	$e^{-j\frac{\pi}{4}0}$	1	0
1	$e^{-j\frac{\pi}{4}1}$	0.707	-0.707
2	$e^{-j\frac{\pi}{4}2}$	0	-1
3	$e^{-j\frac{\pi}{4}3}$	-0.707	-0.707
4	$e^{-j\frac{\pi}{4}4}$	-1	0
5	$e^{-j\frac{\pi}{4}5}$	-0.707	0.707
6	$e^{-j\frac{\pi}{4}6}$	0	1
7	$e^{-j\frac{\pi}{4}7}$	0.707	0.707

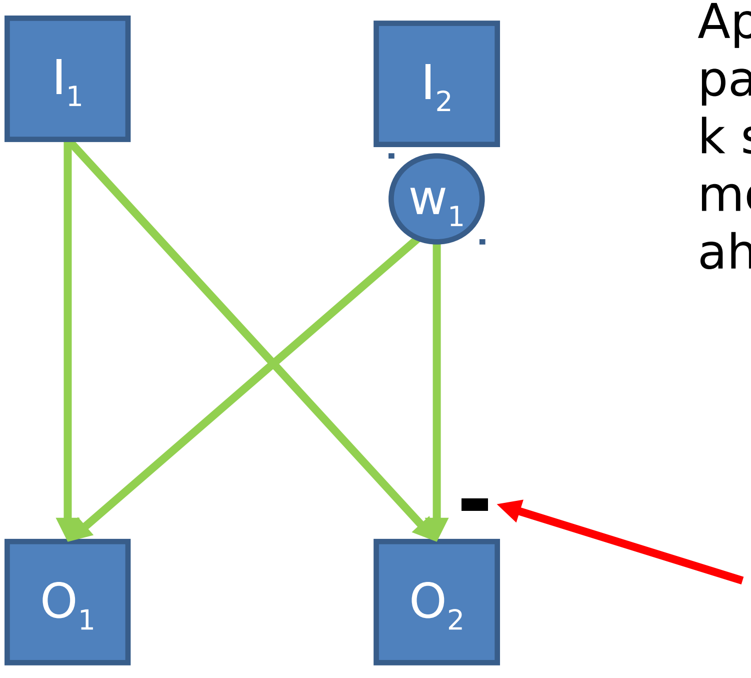
Igual a la mitad anterior con el signo cambiado

Factores de giro (Twiddle factors)



En la implementación, estos factores pueden almacenarse en una tabla y leerse con un índice

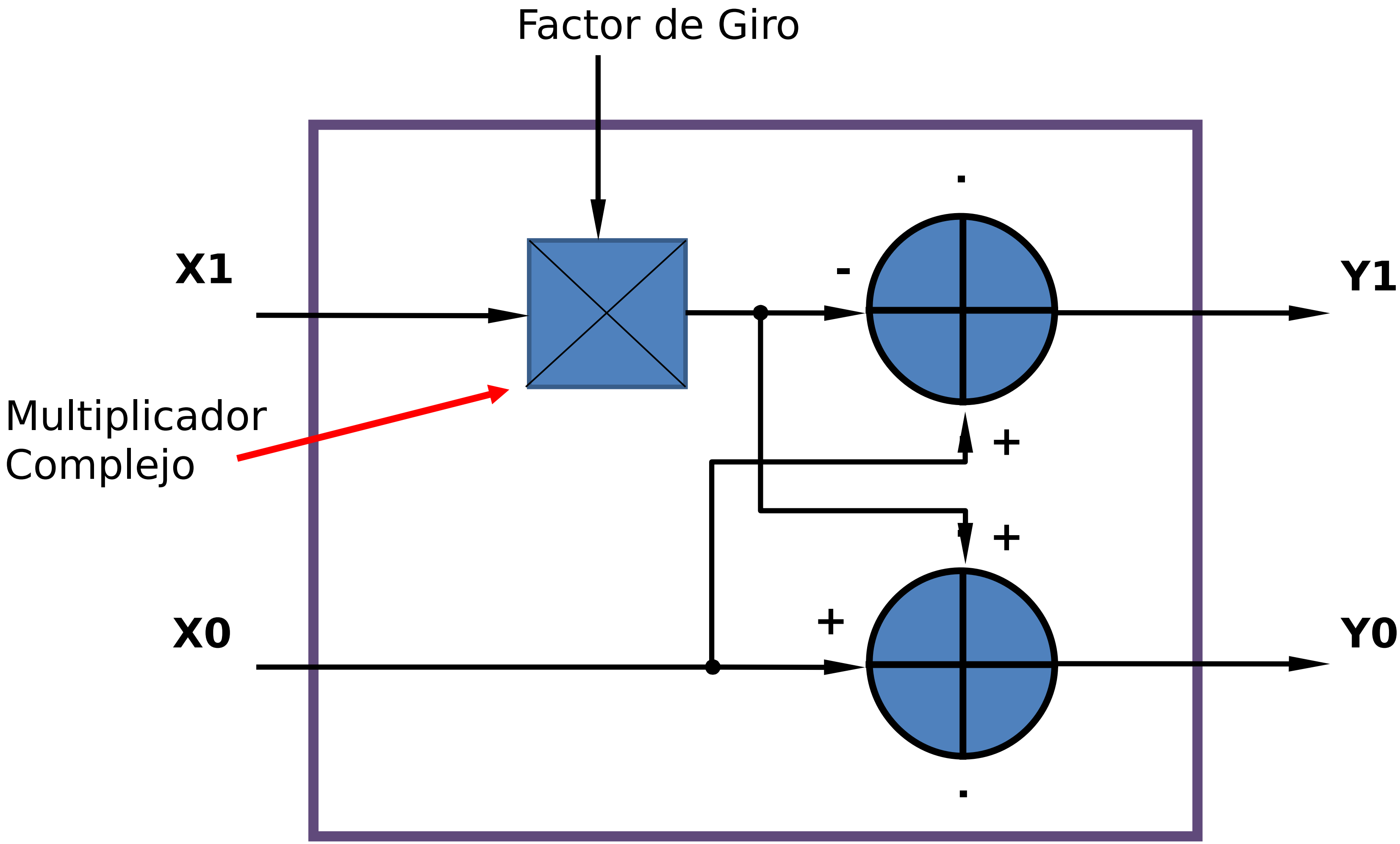
Butterfly simplificada



Aprovechando el cambio de signo para factores de giro cuyo indice k sea mayor a N/2, podemos modificar la butterfly original para ahorrarnos una multiplicación

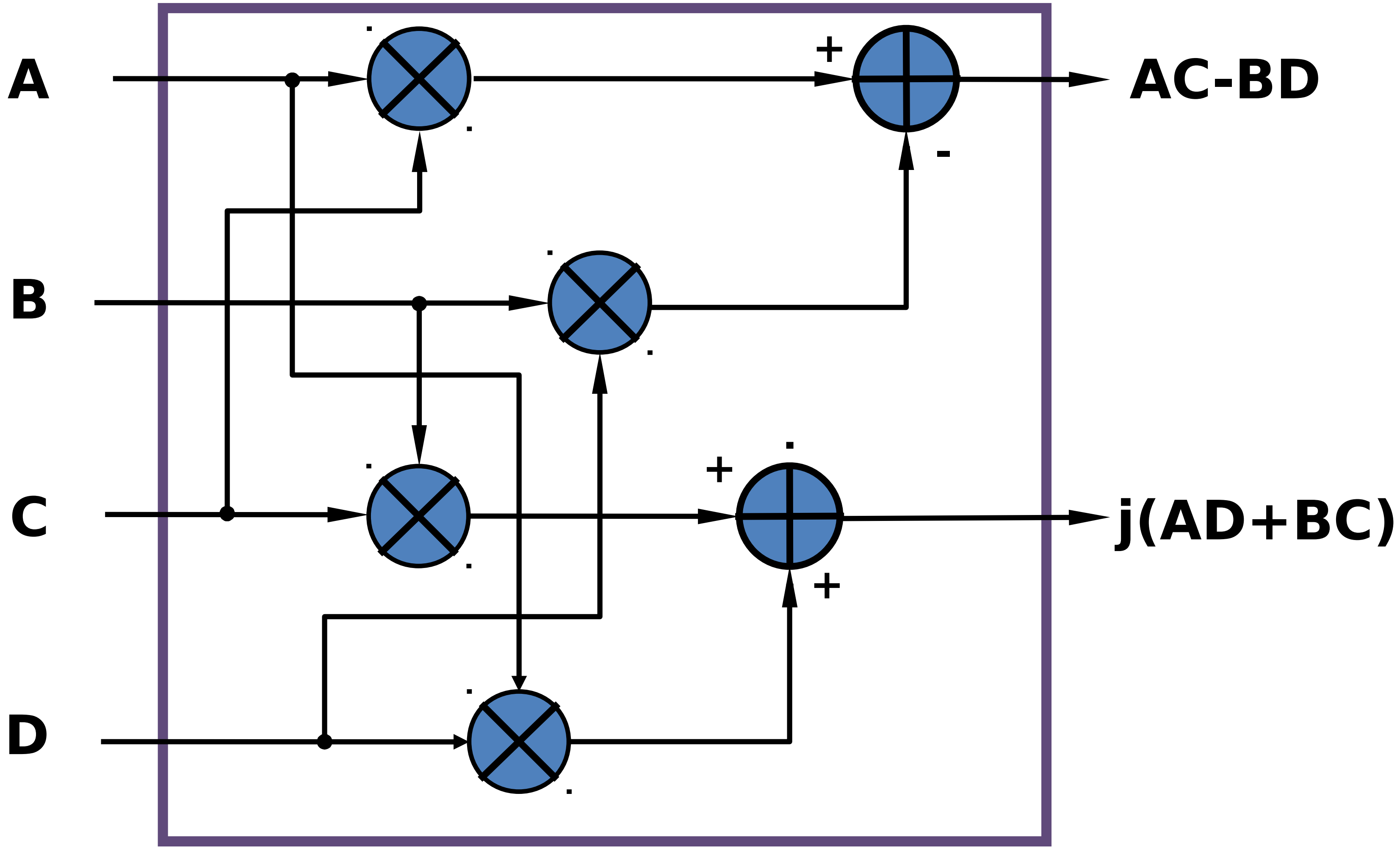
Utilizo la propiedad de cambio de signo reemplazando una suma por una resta

Butterfly simplificada



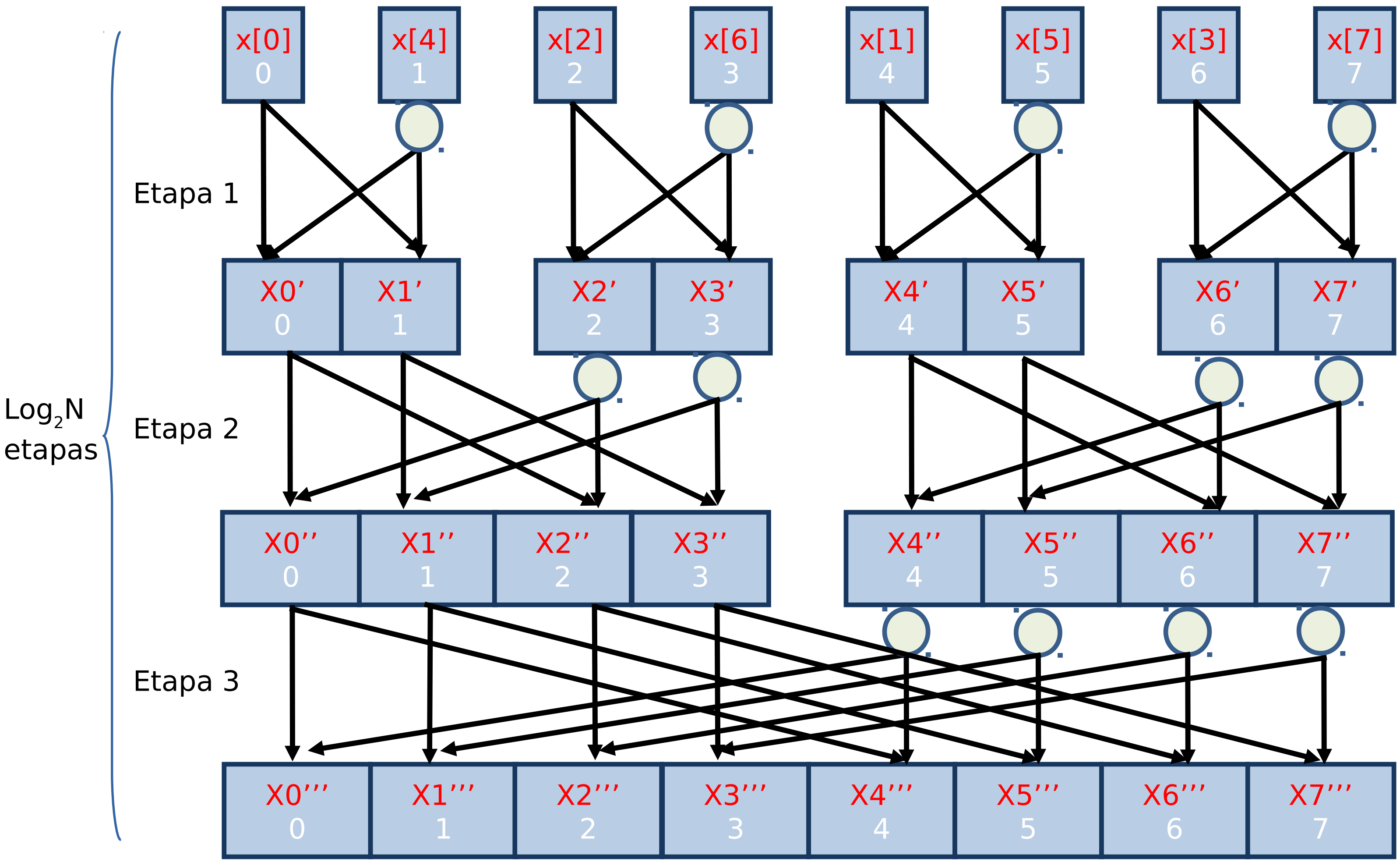
Multiplicador Complejo

Cálculo a realizar: **(A+jB) x (C+jD) = AC-BD +j(AD+BC)**



Replicación de Butterflies

La operación base se replica hasta reconstruir la señal de N muestras



Replicación de Butterflies

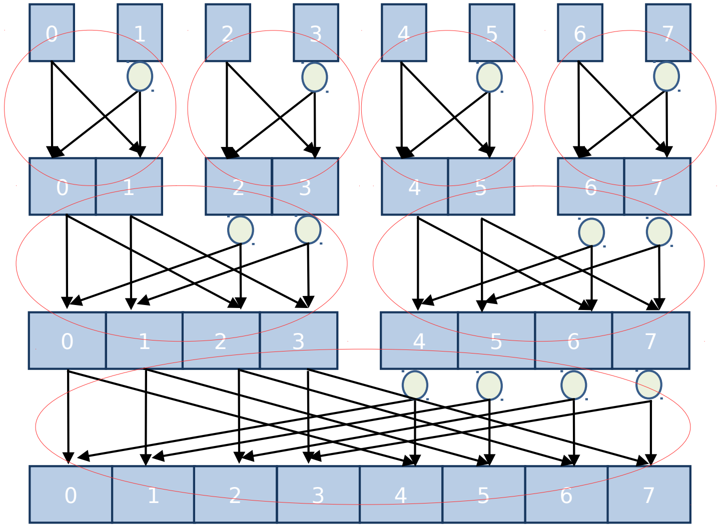
Índices por etapa y por butterfly

	Butterfly 1			Butterfly 2			Butterfly 3			Butterfly 4		
ETAPA	**X0/Y0**	**X1/Y1**	**TF**	**X0/Y0**	**X1/Y1**	**TF**	**X0/Y0**	**X1/Y1**	**TF**	**X0/Y0**	**X1/Y1**	**TF**
1	0	1	0	2	3	0	4	5	0	6	7	0
2	0	2	0	1	3	3	4	6	0	5	7	3
3	0	4	0	1	5	1	2	6	2	3	7	3

X0: Entrada X0
X1: Entrada X1
Y0: Salida Y0
Y1: Salida Y1
TF: Factor de Giro

Replicación de Butterflies

- La tarea se reducirá entonces a aplicar el bloque butterfly etapa por etapa sobre las muestras mostradas en la tabla anterior
- Se usarán N/2 butterflies
- Se necesitarán $\log_2 N$ etapas
- La replicación puede realizarse mediante bucles for anidados
- Se necesita un mínimo de dos lazos:
  - Uno para barrer las butterflies
  - Otro para recorrer las etapas
- Para poder obtener los índices de entrada/salida de cada butterly podemos identificar la existencia de *grupos de butterflies*



← 4 grupo de 1 butterfly

← 2 grupo de 2 butterflies

← 1 grupo de 4 butterflies

Replicación de Butterflies

- Dentro de cada grupo, las butterflies se numeran.
- En la primer etapa hay solo una butterfly, por lo tanto numerada como butterfly 1
- En la segunda etapa hay dos butterflies, numeradas como 1 y 2
- En la tercer etapa hay cuatro butterflies, numeradas 1, 2, 3 y 4
- La numeración se corresponde con el factor de giro a utilizar

Resumen

Los pasos para aplicar la FFT son:

1 – Calcular el vector de factores de giro (N/2) elementos
2 – Ordenar el vector de muestras con el método bit reverse
3 – Crear la función butterfly: el bloque base de la FFT
4 – Con bucles FOR anidados aplicar la butterfly etapa por etapa.
De manera que los índices de las muestras de entrada y de salida coincidan con la tabla.
Se puede tomar el mismo vector de entrada como vector de salida

Ejemplo realizado con 3 bucles FOR

```
for step=2.^(0:log2(N/2))
    for j=0:step-1
        for i=1:step*2:N-j
            [x(i+j),x(i+j+step)]=...
            mi_butterfly(x(i+j),x(i+j+step),tfv(j*(N/2)/step+1));
        end
    end
end
```