Problemas 5.

1) Una señal compuesta con 4 frecuencias de: $f_1 = 1KHz$, $f_2 = 1{,}5\,KHz$, $f_3 = 2{,}5\,KHz$, $f_4 = 2{,}75\,KHz$. Es muestreada con $f_s = 10KHz$.

$f_4 - f_3 = 0{,}25KHz$

el Δf mínimo entre cada componente es de: $\Delta f = 0{,}25\,KHz$.

el mínimo de muestras L a capturar para resolver las 4 frecuencias es:

$$L \geq \frac{f_s}{\Delta f} \quad \therefore \quad L \geq \frac{10KHz}{0{,}25KHz} = 40 \text{ [muestras]}$$ ← como mínimo

Como el lóbulo principal (o ancho) de la ventana de Hamming es dos veces el ancho de la ventana rectangular, se debe:

$$L \geq C\frac{f_s}{\Delta f} \quad \text{donde } C = 2 \quad \therefore \quad L \geq 80 \text{ [muestras]}$$

C → rectangular $C = 1$
→ Hamming $C = 2$
→ Blackman $C = 3$

2) $f_0 = 10KHz$, se muestrea con $f_s = 80KHz$ y $L = 64$ muestras para calcular la DFT de 64 puntos (N).

$L = N$. $\quad K = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

$$f_0 = k_0\frac{f_s}{N} \quad \therefore \quad K_0 = \frac{f_0 N}{f_s} = \frac{10KHz \cdot 64 \text{ puntos}}{80KHz} = 8 \text{ [posición]}$$

por ser una señal sinusoidal el espectro exhibe 2 picos en frecuencia "+" y "−", entonces, el 2° pico está en la posición −8 o en:

$$N - K_0 = 64 - 8 = 56 \text{ [posición]}$$

3) Se toman L muestras en 10ms a una $f_s = 10KHz$. La señal tiene $f_1 = 1KHz$, $f_2 = 2KHz$ y f_3 entre $f_1 < f_3 < f_2$.

$$L = f_s \cdot T_L = 10KHz \cdot 10ms = 100 \text{ [muestras]}$$

$$L = \frac{f_s}{\Delta f} \quad \therefore \quad \Delta f = \frac{f_s}{100} = \frac{10KHz}{100} = 100\,Hz$$

$$f_3 = f_1 + \Delta f = 1KHz + 100Hz = 1100\,Hz$$

$$f_3 = f_2 - \Delta f = 2KHz - 100Hz = 1900\,Hz$$

Para ventana Hamming:

$$L = C\frac{f_s}{\Delta f} \quad \therefore \quad \Delta f = C\frac{f_s}{L} = 2 \cdot \frac{10KHz}{100Hz} = 200\,Hz$$

$$f_3 = f_1 + \Delta f = 1KHz + 200Hz = 1200\,Hz$$

$$f_3 = f_2 - \Delta f = 2KHz - 200Hz = 1800\,Hz$$

4) Una señal $f_0 = 5KHz$, es muestreada con $f_s = 40KHz$ y $L = 128$ muestras son adquiridas para calcular la DFT de $N = 128$ puntos.

La duración del tiempo de muestras es: $T_L = \frac{N}{f_s} = \frac{128 \text{ muestras}}{40KHz} = \underline{3,2 \text{ mseg}}$

el índice/s que se espera un pico de frecuencias es:

$k = \frac{f_0 \cdot N}{f_s} = \frac{5KHz \cdot 128 \text{ muestras}}{40KHz} = 16$ [posición]

la frecuencia negativa es -16 y en: $N - k = 128 - 16 = 112$ [posición]

5) Una señal con $\Delta f = 20Hz$ se muestrea con $f_s = 8KHz$.

a) el número mínimo de muestras a capturar es: $L \geq \frac{f_s}{\Delta f} = \frac{8KHz}{20Hz} = 400$ [muestras]

b) el tiempo en el que las muestras es: $T_L = \frac{N}{f_s} = \frac{L}{f_s} = \frac{400 \text{ muestras}}{8KHz} = \underline{50 \text{ mseg}}$

c) como la FFT son potencias de 2: $N \geq L$ el valor mínimo es **512 puntos**.

$\ldots 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots$

- si se ponen más puntos, mayor resolución pero aumenta el cálculo
- si se ponen menos puntos se pierde resolución

6) Determinar la reducción módulo-4 y módulo-3 del vector de $L = 8$ muestras.

$x = [1, 2, -2, 3, 4, -2, -1, 1]$

- Módulo-4: se divide el vector x en segmentos de 4 muestras

$x = [1, 2, -2, 3 \,|\, 4, -2, -1, 1]$

$\bar{x} = [1, 2, -2, 3] + [4, -2, -1, 1] = [5, 0, -3, 4]$

matriz $\bar{A}_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$ $\quad W_N^{kn} = W_4$

$k = 0 \sim N-1 = 0, 1, 2, 3$

$n = 0 \sim N-1 = 0, 1, 2, 3$

- Módulo-3: se divide el vector x en segmentos de 3 muestras

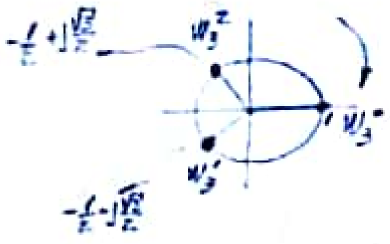
$x = [1, 2, -2 \,|\, 3, 4, -2 \,|\, -1, 1, 0]$ se completa con ceros

$\bar{x} = [1, 2, -2] + [3, 4, -2] + [-1, 1, 0] = [3, 7, -4]$

matriz $\bar{A}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ $\quad W_N^{kn} = W_3$

$k = 0 \sim N-1 = 0, 1, 2$

$n = 0 \sim N-1 = 0, 1, 2$



Scanned by CamScanner

• **Módulo - 4:**

$$\underset{4\times1}{X} = \underset{4\times4}{\bar{A}} \cdot \underset{4\times1}{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8+j4 \\ -2 \\ 8-j4 \end{bmatrix}$$

• **Módulo - 3:**

$$\underset{3\times1}{X} = \underset{3\times3}{\bar{A}} \cdot \underset{3\times1}{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ \frac{3}{2}-j\frac{11\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2}+j\frac{11\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

7) Comparar el costo de computar una DFT de $N=128$ puntos de una señal de $L=1024$ muestras usando:
- DFT directa
- FFT directa
- DFT reducción módulo-N
- FFT reducción módulo-N

• DFT directa: $L \cdot N = 1024 \cdot 128 = 131072$ [operaciones]

• FFT directa: $\frac{1}{2} L \log_2(L) = \frac{1}{2} \cdot 1024 \cdot \log_2(1024) = 5120$ [operaciones]

• DFT reducción módulo-N: $M = \frac{L}{N} = \frac{1024}{128} = 8$

$M \cdot N + (M-1) \cdot N = 1024 \cdot 128 + (8-1) \cdot 128 = 17280$ [operaciones]

• FFT reducción módulo-N: $M = \frac{L}{N} = \frac{1024}{128} = 8$

$\frac{1}{2} N \log_2(N) + (M-1) \cdot N = \frac{1}{2} \cdot 128 \cdot \log_2 128 + (8-1) \cdot 128 = 1344$ [operaciones]

8) Calcular la DFT de $N=4$ puntos de una señal de $L=8$ muestras, en forma directa y por reducción módulo-4.

$x = [1, 2, -2, 3, 4, -2, -1, 1]$ $\Rightarrow$ $\bar{x} = [5, 0, -3, 4]$

• **Forma directa:** $\underset{4\times1}{X} = \underset{4\times8}{A} \cdot \underset{8\times1}{x}$ $\quad W_N^{kn} = W_4^{kn}$ $\quad k = 0 \sim (N-1) = 0 \sim 3$, $n = 0 \sim (L-1) = 0 \sim 7$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8+j4 \\ -2 \\ 8-j4 \end{bmatrix}$$

• Módulo - 4:

$$\underset{4\times1}{X} = \underset{4\times4}{\bar{A}} \cdot \underset{4\times1}{\bar{x}}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8+j4 \\ -2 \\ 8-j4 \end{bmatrix}$$

* se obtiene igual resultado

9) Calcular la IDFT del espectro de N=4 muestras, de $X = [6,\ 8+j4,\ -2,\ 8-j4]$

siendo en el tiempo: $x = IDFT(X) = \frac{1}{N}\left(DFT(X^*)\right)^*$

1°. $X^* = [6,\ 8-j4,\ -2,\ 8+j4]$

2°_ se hace la DFT.

$$A \cdot X^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8-j4 \\ -2 \\ 8+j4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

3°_ se hace el conjugado: $[20,\ 0,\ -12,\ 16]$

4°_ se divide por N=4: $x = [5,\ 0,\ -3,\ 4]$ → es el valor de $\bar{x}$ del ejercicio 8.

10) Calcular la FFT de N=4 puntos de la señal x de L=8 muestras usando reducción módulo-4.

$x = [1, 2, -2, 3, 4, -2, -1, 1]$ $\quad W_N^{kn} = W_4 \quad$ k=0~N-1, n=0~N-1

en dominio t

N=1
k=0, n=0
$W_1^0 = 1$

N=4
k=0~1, n=0~1
$W_4^0 = 1$
$W_4^1 = -j$

N=8
$W_8^0 = 1$
$W_8^1 = \frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}$
$W_8^2 = -j$
$W_8^3 = \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}$

11) La DFT de N = 8 puntos X, de la señal x de L = 8 puntos es:

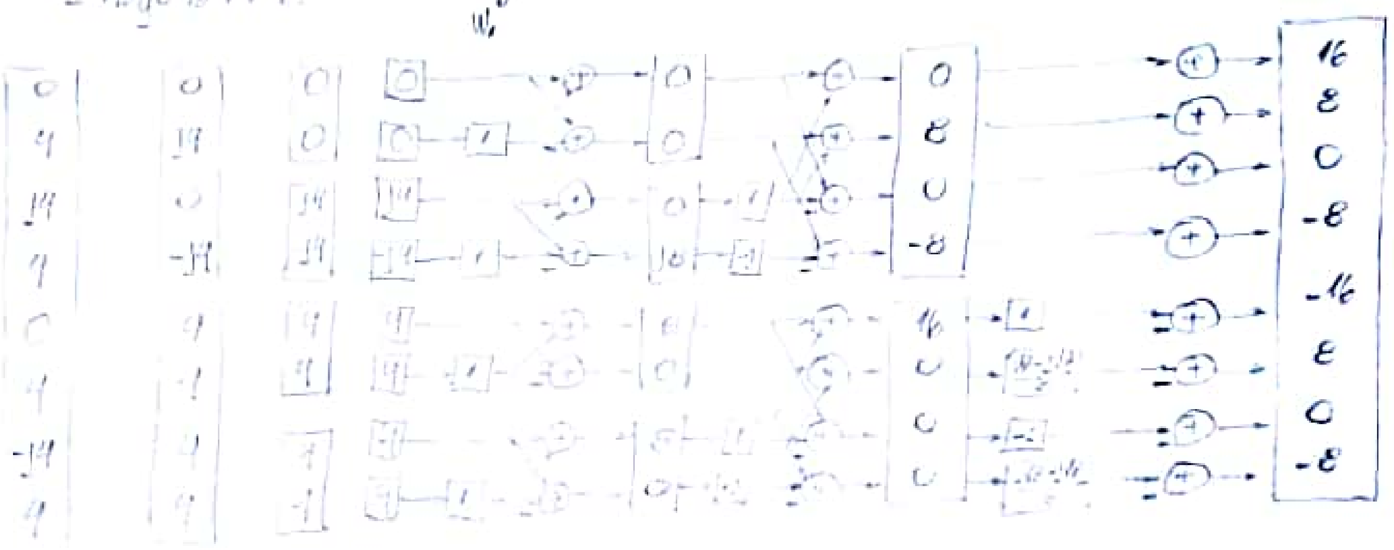
$$X = [0, 4, -j4, 4, 0, 4, j4, 4]$$

Hallar $x = IFFT(X)$.

Como la IFFT es: $IFFT = \frac{1}{N} \cdot (FFT(X^*))^*$

1º_ $X \rightarrow X^* = [0, 4, j4, 4, 0, 4, -j4, 4]$

2º_ Hago la FFT:



3º_ Se conjuga el vector obtenido, pero al ser todo real queda como está.

4º_ Se multiplica el vector por $1/N = 1/8$:

$$x = [2, 1, 0, -1, -2, 1, 0, -1]$$