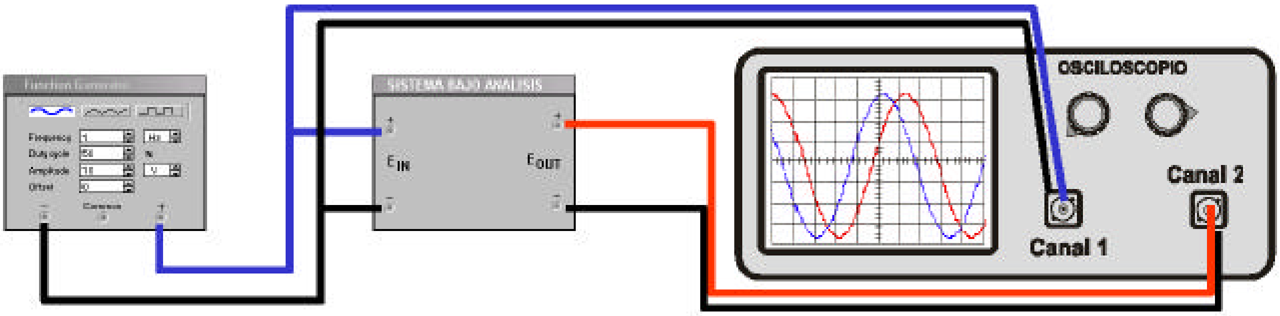
RESPUESTA EN FRECUENCIA

Se entiende por respuesta en frecuencia, la respuesta en estado de régimen permanente de un sistema ante una excitación de entrada senoidal.
Debido a que los sistemas que estudiaremos son lineales, si los mismos son excitados con una señal de entrada senoidal , la respuesta de la señal de salida también será senoidal y de la misma frecuencia.
Supongamos un sistema al que se excita su entrada, mediante un generador con forma de onda senoidal y se mide su respuesta de salida mediante un osciloscopio.



La señal de entrada provista por el generador, tendrá las siguientes características:

$$E_{IN} = E_{IN} \text{ sen } (\omega t)$$

donde : E_{IN} = Valor pico o cresta de la señal de entrada en [Volts] = constante
ω = Pulsación angular en [rad/seg] = variable entre cero e infinito

La señal de salida medida en el osciloscopio, tendrá las siguientes características:

$$E_{OUT} = E_{OUT} \text{ sen } (\omega t \pm \theta)$$

donde : E_{OUT} = Valor pico o cresta de la señal de salida en [Volts].
ω = Pulsación angular en [rad/seg] idéntica a la de la señal de entrada.
θ = Angulo de desfasaje entre la señal de entrada y la de salida en [º].

Podemos sintetizar diciendo que para cualquier sistema lineal discreto *estable* , la respuesta en el estado estacionario a una entrada sinusoidal, es una señal sinusoidal de la misma frecuencia con un cierto ángulo de desfasaje positivo o negativo dependiendo de las características del sistema.

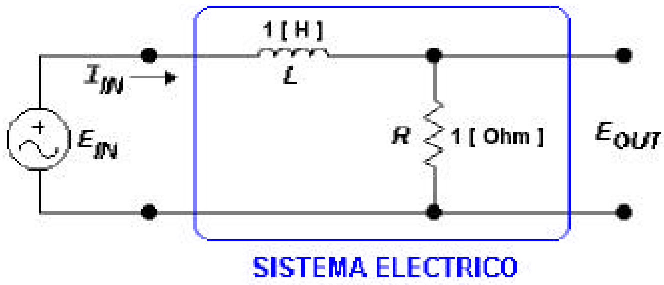
FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Llamamos función de transferencia a la relación entre la respuesta de salida y la señal o excitación de entrada de un sistema.

Si nuestro sistema es un circuito eléctrico podemos definir la función de transferencia como el cociente entre la tensión de salida y la tensión de entrada, cuando a esta última se le varía la frecuencia entre cero e infinito, mientras que su amplitud se mantiene constante.

Función de transferencia = Tensión de salida |
Tensión de entrada | 0 < w < ¥

Como ejemplo veamos el siguiente circuito:



Escribiendo las expresiones en forma transformada tendremos :

$$E_{IN(P)} = I_{IN(P)} \bullet (LP + R) \qquad \text{y} \qquad E_{OUT(P)} = I_{IN(P)} \bullet (R)$$

Por lo que la función de transferencia en forma transformada será :

$$F_{(P)} = \left.\frac{E_{OUT(P)}}{E_{IN(P)}}\right|_{0<P<\infty} = \left.\frac{I_{IN(P)} \bullet (R)}{I_{IN(P)} \bullet (LP + R)}\right|_{0<P<\infty} = \left.\frac{(R)}{(LP + R)}\right|_{0<P<\infty} =$$

$$F_{(P)} = \left.\frac{Numerador_{(P)}}{Denominador_{(P)}}\right|_{0<P<\infty}$$

Si el sistema está excitado por una forma de onda senoidal o cosenoidal como se indicó al principio, podemos cambiar la variable de Laplace P por jω, entonces tendremos :

$$F_{(jw)} = \left.\frac{Numerador_{(jw)}}{Denominador_{(jw)}}\right|_{0<w<\infty}$$

Para cada uno de los valores de ω (recordemos que 0 < ω < ∞), el cociente entre numerador y denominador nos dará un número complejo, por lo que podemos escribir que:

$$F_{(jw)} = \mathrm{Re}_{F_{(jw)}} + j\,\mathrm{Im}_{F_{(jw)}}\Big|_{0<w<\infty}$$

Si para cada valor de ω, la función de transferencia es un número complejo expresado en coordenadas rectangulares con una parte real y una parte imaginaria, también podremos expresar ese valor en coordenadas polares, mediante un módulo $|F_{(j\omega)}|$ y un ángulo θ.

$$F_{(jw)} = \mathrm{Re}_{F_{(jw)}} + j\,\mathrm{Im}_{F_{(jw)}}\Big|_{0<w<\infty} = \lfloor F_{(jw)} \rfloor \bullet e^{jq}\Big|_{0<w<\infty}$$

Donde :

$$\lfloor F_{(jw)} \rfloor_{0<w<\infty} = \sqrt{\mathrm{Re}_{F_{(jw)}}{}^{2} + \mathrm{Im}_{F_{(jw)}}{}^{2}}\Big|_{0<w<\infty}$$

Y

$$q\Big|_{0<w<\infty} = tg^{-1}\,\frac{\mathrm{Im}_{F_{(jw)}}}{\mathrm{Re}_{F_{(jw)}}}\Bigg|_{0<w<\infty}$$

El valor de la función de transferencia para cada valor de ω se puede graficar en el plano complejo y da lugar a lo que se llama diagrama polar.
Siguiendo con el circuito del ejemplo, llegamos a lo siguiente :

$$F_{(P)} = \frac{(R)}{(LP+R)}\Bigg|_{0<P<\infty} = \frac{\left(R/L\right)}{\left(P+\dfrac{R}{L}\right)}\Bigg|_{0<P<\infty} = \frac{t}{(P+t)}\Bigg|_{0<P<\infty}$$

Si cambiamos P → j ω y separamos en parte real y parte imaginaria, multiplicando el numerador y denominador por el conjugado del denominador de $F_{(j\omega)}$ tendremos :

$$F_{(jw)} = \frac{t}{(jw+t)}\Bigg|_{0<P<\infty} = \frac{t}{(t+jw)} \bullet \frac{t-jw}{t-jw}\Bigg|_{0<P<\infty} = \frac{t^{2}}{\left(t^{2}+w^{2}\right)} - j\,\frac{tw}{\left(t^{2}+w^{2}\right)}\Bigg|_{0<P<\infty}$$

$$F_{(jw)} = \mathrm{Re} - j\,\mathrm{Im}\Big|_{0<P<\infty}$$

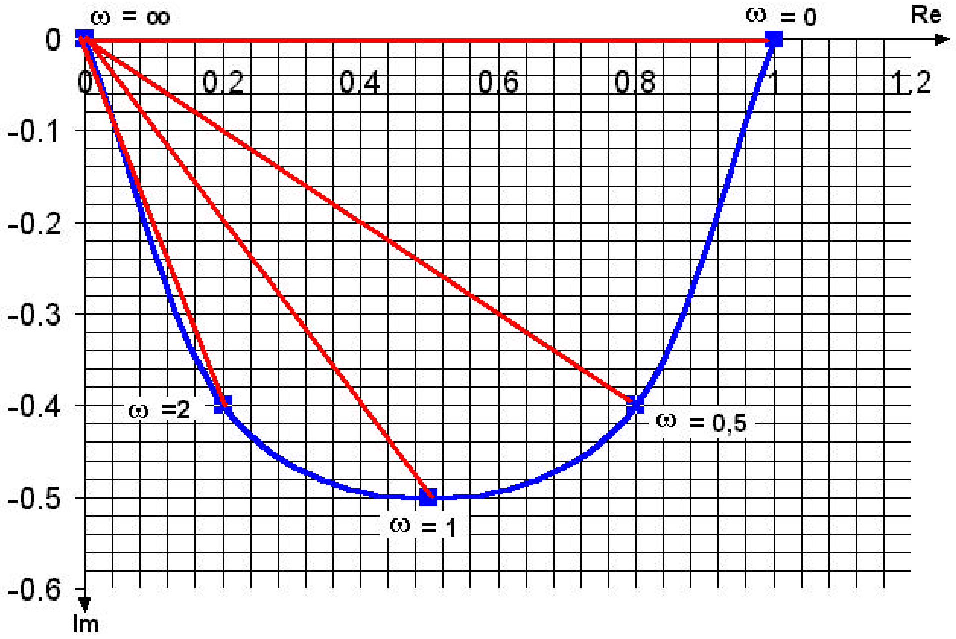
Si hacemos una tabla en la que damos valores a ω y obtenemos parte real y parte imaginaria o módulo y ángulo podremos trazar el diagrama polar de la función de transferencia que representa el circuito dado anteriormente.
Para el circuito indicado tendremos :

$$F_{(jw)} = \frac{t^{2}}{\left(t^{2}+w^{2}\right)} - j\,\frac{tw}{\left(t^{2}+w^{2}\right)}\Bigg|_{0<P<\infty} \qquad t = \frac{R}{L} = \frac{1[\Omega]}{1[H]} = 1$$

$$\therefore F_{(jw)} = \frac{1}{\left(1+w^{2}\right)} - j\,\frac{w}{\left(1+w^{2}\right)}\Bigg|_{0<P<\infty}$$

Haremos una tabla en la que tomaremos algunos valores de ω y con ellos trazaremos el diagrama polar :

ω	Re	Im	Módulo	Angulo
0	1	0	1	0
0.5	0.8	-0.4	0.89442719	-26.5650512
1	0.5	-0.5	0.70710678	-45
2	0.2	-0.4	0.4472136	-63.4349488
∞	0	0	0	-90



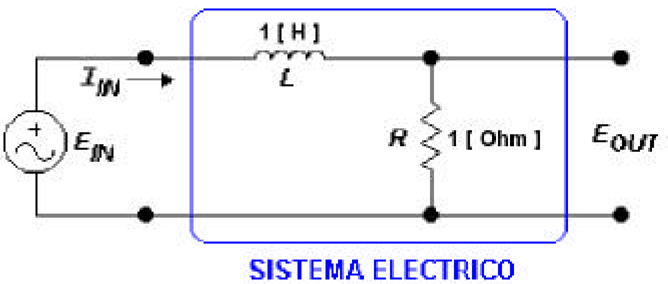


Tabla y Diagrama polar del circuito RL propuesto.

Con los valores calculados de módulo y ángulo de la función de transferencia $F_{(P)}$ o $F_{(j\omega)}$ podemos lograr otro gráfico, el que recibe el nombre de diagramas de Bode o gráfico semilogaritmico.

Para ello representaremos por separado el módulo y el ángulo de la función de transferencia propuesta, en función de la variable ω, pero empleando un plano semilogarítmico, es decir la amplitud de módulo o de fase en escala lineal y la pulsación ω en escala logarítmica en base 10.

La otra diferencia que aparece es que el valor de módulo en lugar de graficarse con su valor original, se grafica en otra unidad llamada decibeles (dB).
Para ello al valor de módulo original, se le saca el logaritmo en base 10 y se lo multiplica por 20, es decir :

$$\left\| F_{(jw)} \right\|_{dB} = 20 \bullet \log_{10} \left\| F_{(jw)} \right\|_{Lineal}$$

La fase por su lado la fase se gafica para cada frecuencia, con el mismo valor que se obtuvo al hacer el diagrama polar.
Para el circuito del ejemplo el diagrama de Bode de módulo y fase será tal como el de la siguiente figura. En la misma se han resaltado los valores calculados en la tabla de la página anterior.

ω	Módulo Lin.	Módulo dB	Angulo
0	1	0	0
0.5	0.89442719	- 0,9691 dB	-26.5650512
1	0.70710678	-3,0103 dB	-45
2	0.4472136	- 6,9897 dB	-63.4349488
10	**0,099503**	**- 20 dB**	**- 84,289407**
100	**0,0099995**	**- 40 dB**	-90
∞	0	- ∞ dB	**- 89,42706**

Diagrama de Bode de Módulo

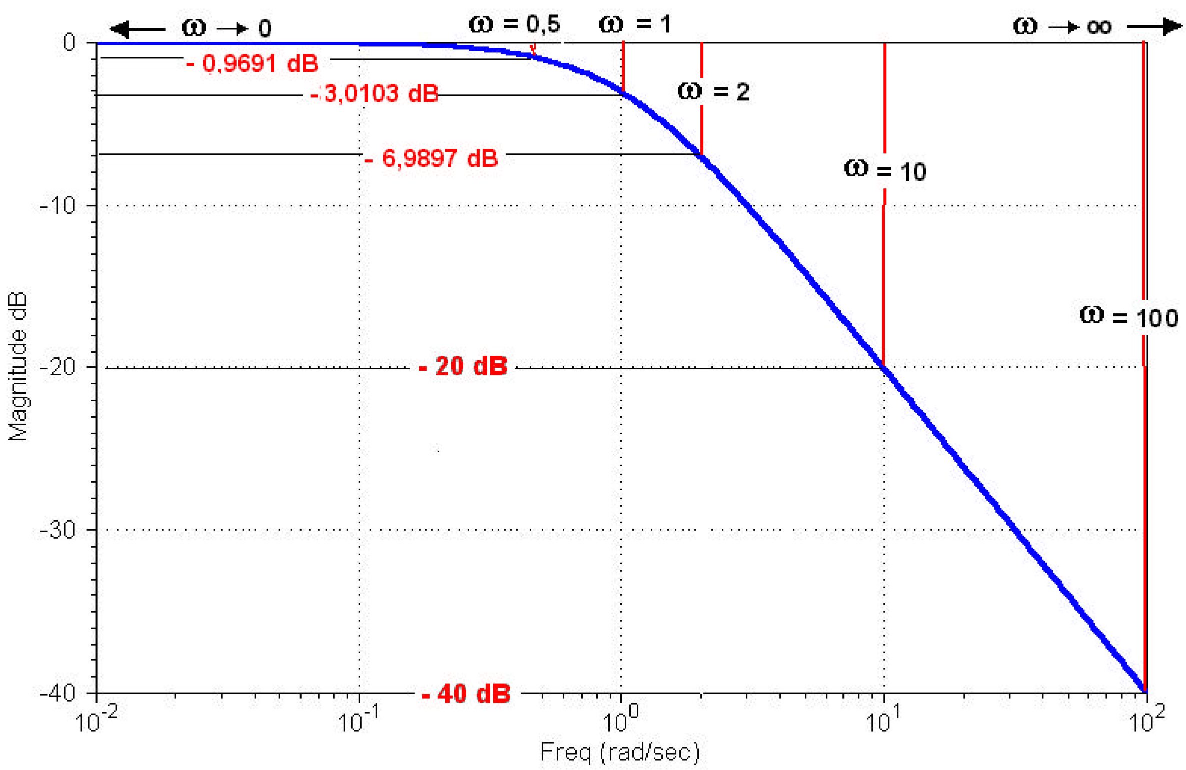
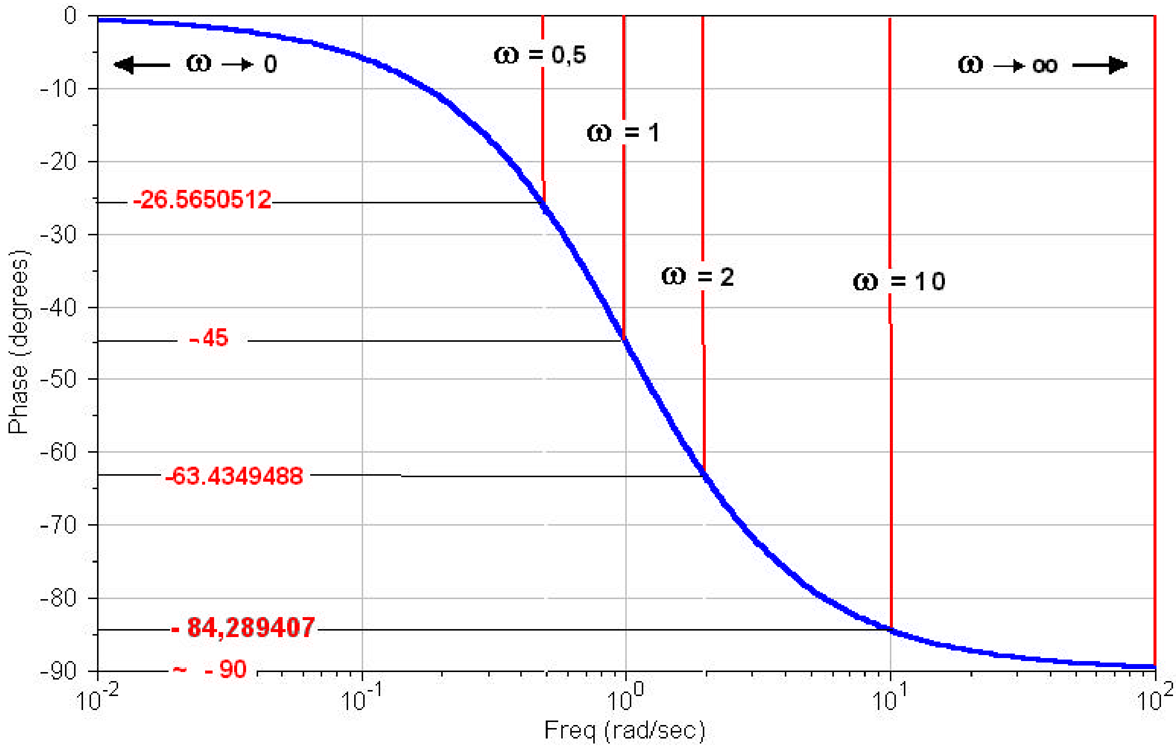


Diagrama de Bode de fase



Veremos más adelante que la aplicación de los diagramas polares será de gran utilidad cuando realicemos el estudio de estabilidad de sistemas, mediante la aplicación del criterio de Nyquist , mientras que los diagramas de Bode serán de utilidad cuando se desee graficar la respuesta en frecuencia de amplificadores, osciladores, filtros, etc