APLICACIÓN DE CRITERIO DE NYQUIST

Trace el diagrama polar y aplique el criterio de Nyquist a la siguiente función de lazo abierto:

$$G_{(P)}H_{(P)} = \frac{2P+5}{4P^4+5P^3+6P^2+20P+10}$$

PASO 1: Determinar el punto de inicio de la curva que representa el diagrama polar. Para ello evaluamos $G_{(P)}\ H_{(P)}$ para $P \to 0$ o lo que es lo mismo $G_{(j\omega)}\ H_{(j\omega)}$ para $\omega \to 0$.

$$G_{(p)}H_{(p)}\Big|_{p\to 0} = \frac{5}{10} = 0,5 \cdot \underline{\big|0°}$$

PASO 2: Determinar el punto final de la curva que representa el diagrama polar. . Para ello evaluamos $G_{(P)}\ H_{(P)}$ para $P \to \infty$ o lo que es lo mismo $G_{(j\omega)}\ H_{(j\omega)}$ para $\omega \to \infty$.

$$F_{(p)}\Big|_{p\to\infty} = \frac{1}{p^3}\Big|_{P\to\infty} = \frac{1}{(\rho\cdot e^{j\theta})^3}\Big|_{P\to\infty} =$$

$$\frac{1}{(\rho^3\cdot e^{j3\theta})}\Big|_{P\to\infty} = \big|0\big|\cdot e^{-j3\cdot\theta} = \big|0\big|\cdot\underline{\big|-3\cdot\theta} =$$

$$= \big|0\big|\cdot\underline{\big|-270°}$$

PASO 3: Realizar el cambio de P por $j\omega$ en la función de transferencia:

$$\mathbf{P \Rightarrow jw}$$

$$\mathbf{G_{(P)}\ H_{(P)} \Rightarrow G_{(jw)}\ H_{(jw)}}$$

$$G_{(P)}H_{(P)} = \frac{2P+5}{4P^4+5P^3+6P^2+20P+10}$$

$$P \to jw$$

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{2jw+5}{4(jw)^4+5(jw)^3+6(jw)^2+20(jw)+10}$$

Ordenando

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{5+j2w}{(4w^4-6w^2+10)+j(20w-5w^3)}$$

PASO 4: Operar la función de transferencia $G_{(j\omega)}H_{(j\omega)}$ de forma tal de separar en parte real y parte imaginaria:

$$\mathbf{G_{(jw)}\ H_{(jw)} = Re|_w + j\ Im|_w}$$

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{5 + j2w}{(4w^4 - 6w^2 + 10) + j(20w - 5w^3)}\ x\ \frac{(4w^4 - 6w^2 + 10) - j(20w - 5w^3)}{(4w^4 - 6w^2 + 10) - j(20w - 5w^3)}$$

$$G_{(jw)}H_{(jw)} = \frac{10w^4 + 10w^2 + 50}{(4w^4 - 6w^2 + 10)^2 + (20w - 5w^3)^2} + j\frac{8w^5 + 13w^3 - 80w}{(4w^4 - 6w^2 + 10)^2 + (20w - 5w^3)^2}$$

PASO 5: Obtener el valor de ω que anula la parte real de $G_{(j\omega)}H_{(j\omega)}$, para determinar en el paso siguiente si existen cortes sobre el eje imaginario.

$$\mathbf{Re|_w = 0}$$

$$\mathrm{Re}\left\{_{G_{(jw)}H_{(jw)}} = 0 = \frac{10w^4 + 10w^2 + 50}{(4w^4 - 6w^2 + 10)^2 + (20w - 5w^3)^2}\right.$$

$$10w^4 + 10w^2 + 50 = 0$$

Aplicando MATLAB obtenemos:

```
>> roots([10,0,10,0,50])

ans =

   -9.316834165905795e-001 +1.169629851170829e+000i
   -9.316834165905795e-001 -1.169629851170829e+000i
    9.316834165905787e-001 +1.169629851170829e+000i
    9.316834165905787e-001 -1.169629851170829e+000i
```

Vemos que no existe ningún valor real de ω que haga cero la parte real.

PASO 6: Reemplazar en la parte imaginaria el valor de ω que hace cero la parte real, mediante este procedimiento, se determinarán los cortes al eje imaginario.

Dado que no existe ningún valor real de ω que haga cero la parte real no hay corte sobre el eje imaginario.

PASO 7: Obtener el valor de ω que anula la parte imaginaria de $G_{(j\omega)}H_{(j\omega)}$, para determinar en el paso siguiente si existen cortes sobre el eje real.

$$\mathbf{Im|_w = 0}$$

$$\mathrm{Im}\left\{_{G_{(jw)}H_{(jw)}}\right. = 0 = j\,\frac{8w^5 + 13w^3 - 80w}{(4w^4 - 6w^2 + 10)^2 + (20w - 5w^3)^2}$$

$$8w^5 + 13w^3 - 80w = 0$$

Aplicando MATLAB obtenemos:

```
>> roots([8,0,13,0,-80])

ans =

    1.566042614890234e+000
    4.440892098500626e-016 +2.019279443675946e+000i
    4.440892098500626e-016 -2.019279443675946e+000i
   -1.566042614890235e+000
```

Vemos que la parte imaginaria se hace cero para ω = ± 1,56604261

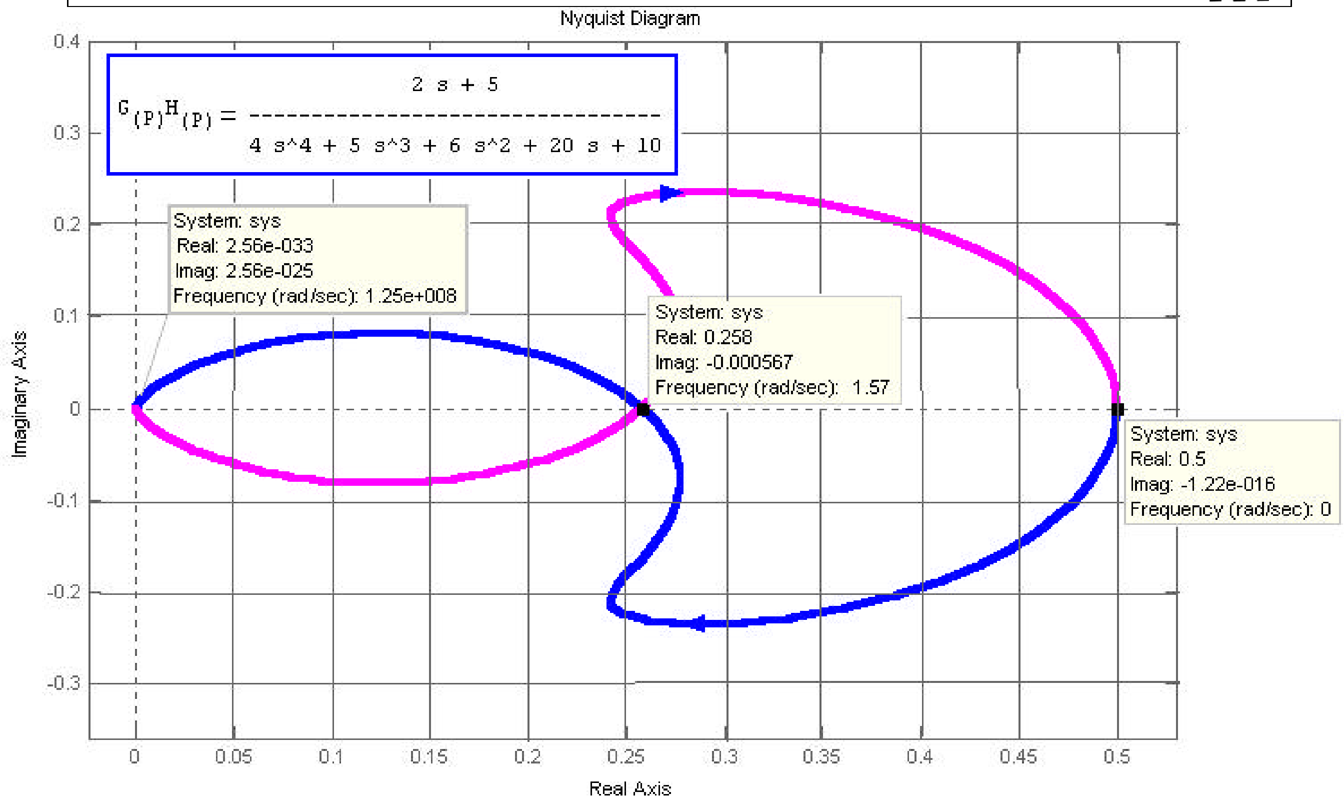
<u>PASO 8:</u> Reemplazar en la parte real, el valor de ω que hace cero la parte imaginaria, mediante este procedimiento, se determinarán los cortes al eje real.
Evaluamos solamente ***<u>el valor</u>* *<u>positivo</u>*** de ω obtenida en el paso anterior, (ω = +1,5660426) en la parte real de la función de transferencia, y obtendremos de este modo el valor de corte sobre el eje real. El valor de corte al eje real debido a la frecuencia negativa (ω = -1,56604261), aparecerá en forma automática cuando, en el PASO 9 se trace el espejo de la curva para las frecuencias negativas.

$$\mathbf{Re}|_{\mathbf{w®\,Im=0}} = \mathbf{Número}$$

$$\mathrm{Re}\left\{_{G_{(jw)}H_{(jw)}|w=1,56604261}\right. = \left.\frac{10w^4 + 10w^2 + 50}{(4w^4 - 6w^2 + 10)^2 + (20w - 5w^3)^2}\right|_{w=1,5660426} = 0,2584$$

Se determinó de este modo que el diagrama cortará al eje real en el valor **0,2584**, cuando la frecuencia ω tome el valor +1,56604.

<u>PASO 9:</u> Con los datos obtenidos en los PASOS 1 (Inicio del diagrama), 2 (Final del diagrama), 6 (corte al eje Imaginario) y 8 (corte al eje Real), trazar la curva que representa la función de transferencia para las variaciones de las frecuencias positivas (ω^+), para ello comenzamos trazando desde ω = 0 hasta llegar a ω = ∞. Ver Figura obtenida mediante MATLAB.



Se observa que no hay rodeos a –1+j0. No se sabe si el sistema es estable o no por criterio de Nyquist. Debemos aplicar Routh-Hurwitz al numerador y denominador de $G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} + 1$.

$$G_{(P)}H_{(P)} + 1 = \frac{2P+5}{4P^4+5P^3+6P^2+20P+10} + 1 =$$

$$G_{(P)}H_{(P)} + 1 = \frac{4P^4+5P^3+6P^2+22P+15}{4P^4+5P^3+6P^2+20P+10}$$

Aplicando programa ROUTH.M en MATLAB :

Numerador de $G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} + 1$.

```
*********************************************************************
    4.0000*P4 +    5.0000*P3 +    6.0000*P2 +   20.0000*P1 +   10.0000
*********************************************************************

  P4  |        4.0000        6.0000        10.0000

  P3  |        5.0000       20.0000

  P2  |      -10.0000       10.0000

  P1  |       25.0000

  P0  |       10.0000


      El polinomio dado tiene  2 raices a parte real positiva

      Las raices del polinomio dado son:

      S1 =    0.4778       1.5633*i
      S2 =    0.4778      -1.5633*i
      S3 =   -1.6326       0.0000*i
      S4 =   -0.5730       0.0000*i
```

Denominador de $G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} + 1$.

```
***********************************************************************
   4.0000*P4 +   5.0000*P3 +   6.0000*P2 +  22.0000*P1 +  15.0000
***********************************************************************

  P4  |       4.0000       6.0000      15.0000

  P3  |       5.0000      22.0000

  P2  |     -11.6000      15.0000

  P1  |      28.4655

  P0  |      15.0000

      El polinomio dado tiene  2 raices a parte real positiva

      Las raices del polinomio dado son:

      S1 =   0.5670      1.6115*i
      S2 =   0.5670     -1.6115*i
      S3 =  -1.5605      0.0000*i
      S4 =  -0.8234      0.0000*i
```

El número de raíces a parte real positiva del Numerador de $G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} + 1$ es igual a 2 por lo tanto el sistema es **INESTABLE**. Por otro lado el número de raíces a parte real positiva del denominador de $G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} + 1$ también es igual a 2 , eso explica la razón por la cual el diagrama de polar no circundaba el punto $-1 + j0$ ya que :

$$\mathbf{N = Z - P = \text{Raíces del Num}_{\,G(jw)H(jw)+1} - \text{Raíces del Den}_{\,G(jw)H(jw)+1} = 2 - 2 = 0}$$