2008

# Electrotecnia I

## Teoría de circuitos

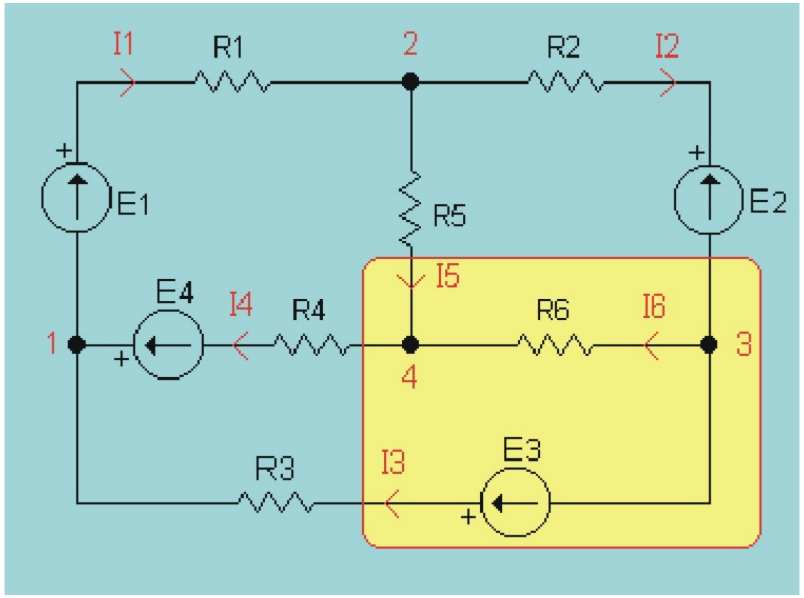
- KIRCHOFF
- METODO DE MALLAS
- PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN
- METODO DE POTENCIALES DE NUDOS
- PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD
- TEOREMA DE COMPENSACIÓN
- TRANSFORMACIONES LINEALES
- TEOREMA DE ALTERACIÓN
- TEOREMA DEL DIPOLO ACTIVO
- TEOREMA DE MILLMAN

Profesor: Ing. Mateo Rodríguez Volta – Jefe de Trabajos Prácticos: Ing. Julio C. Cocco

# Kirchoff

$$\sum I = 0$$
$$\sum E = \sum R \cdot I$$

m ➔ Ramas
n ➔ Nudos




Problemas:

- Dada la configuración y elementos; hallar *I, U, P.*
- Dados *I, U;* hallar configuración y elementos

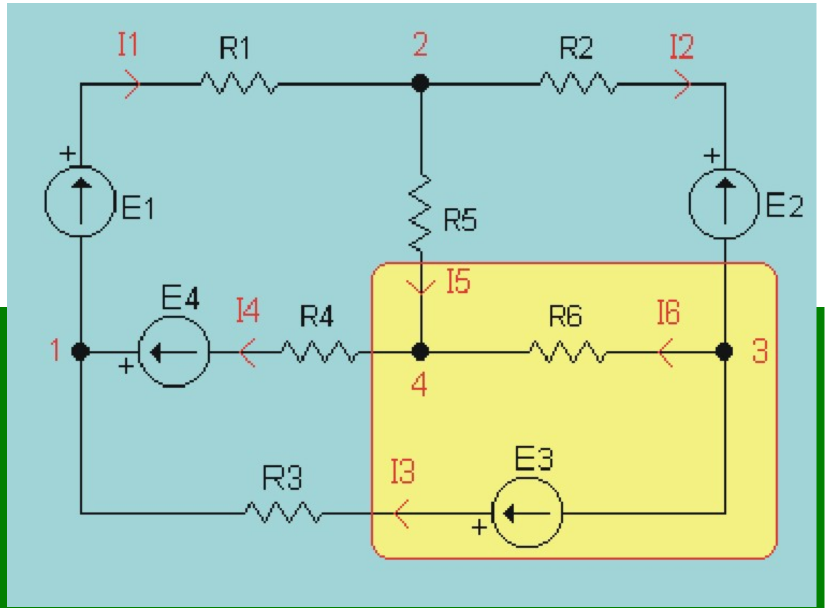
Como no puede producirse acumulación de cargas eléctricas en un nudo, ni en cualquier área cerrada del circuito ➔ aplicando la primera ley de K. a la superficie (en amarillo)

$$-I_5 - I_2 + I_4 + I_3 = 0$$

- Adoptar el sentido de *I*
- Formar ecuaciones de nudos por 1ª Ley de K.
- Aplicar la ley de OHM en las “n” ramas.
- Plantear (m – n + 1) ecuaciones independientes.

Ecuaciones de Nudos:
Nudo 1: $I_1 - I_3 - I_4 = 0$
Nudo 2: $I_2 + I_5 - I_1 = 0$
Nudo 3: $I_6 - I_2 + I_3 = 0$
Nudo 4: $I_4 - I_5 - I_6 = 0$

La sumatoria de las “n” ecuaciones de nudos resulta cero ➔ (n -1) ecuaciones independientes




Ecuaciones de ramas, aplicando ley de OHM:

1- Rama 1-2: $e_1 - e_2 = R_1I_1 - E_1 = U_{12}$

2- Rama 4-1: $e_4 - e_1 = R_4I_4 - E_4 = U_{41}$

3- Rama 3-1: $e_3 - e_1 = R_3I_3 - E_3 = U_{31}$

4- Rama 2-3: $e_2 - e_3 = R_2I_2 + E_2 = U_{23}$

5- Rama 2-4: $e_2 - e_4 = R_5I_5 = U_{24}$

6- Rama 3-4: $e_3 - e_4 = R_6I_6 = U_{34}$

Nº de incógnitas (m + n)

Se puede tomar el potencial "e" de uno de los nudos como 0 (cero).

Si de las "m" ecuaciones eliminamos (n – 1) potenciales desconocidos tendremos (m – n +1) ecuaciones que vinculan las "E" y "R" ➔ Ecuaciones basadas en la segunda ley de K.

Sumando las ecuaciones 1, 2 y 5, tenemos:

$(1+2+5) = e_1 - e_2 + e_4 - e_1 + e_2 - e_4 = R_1I_1 - E_1 + R_4I_4 - E_4 + R_5I_5$; Operando tendremos:

$E_1 + E_4 = R_1I_1 + R_4I_4 + R_5I_5$

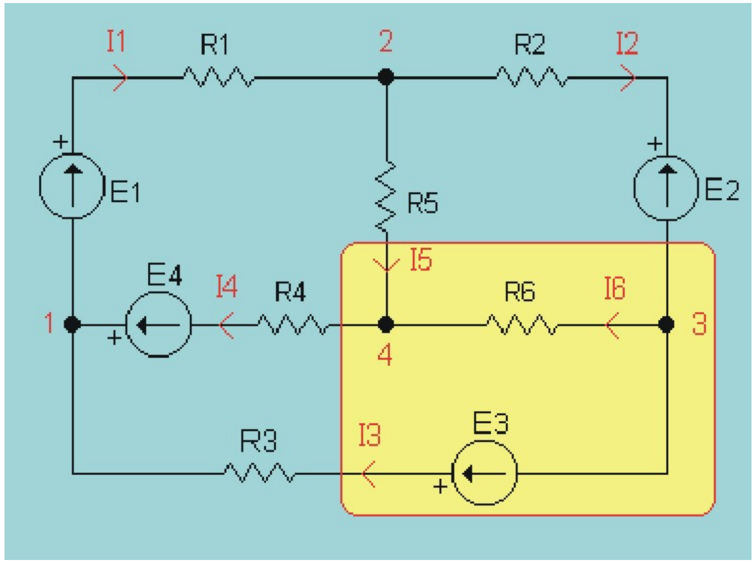
Aplicando la 2ª de K. Al circuito cerrado (1, 2, 4, 1) y recorriendo la malla en el sentido horario obtendremos la misma ecuación.

AHORA: Aplicando la 2ª de K. Al circuito cerrado (2, 3, 4, 2) y recorriendo la malla en el sentido horario obtendremos la próxima ecuación:

$$-E_2 = R_2I_2 + R_6I_6 - R_5I_5$$

ADEMAS: Aplicando la 2ª de K. Al circuito cerrado (1, 4, 3, 1) tendremos:

$$-E_4 + E_3 = -R_4I_4 - R_6I_6 + R_3I_3$$




Nos quedan 3 ecuaciones con 6 incógnitas
Eliminaremos 3 incógnitas operando con las ecuaciones de la primera ley de K.

$R_1I_1 + R_4(I_1-I_3) + R_5(I_1-I_2) = E_1 + E_4$

$R_2I_2 + R_6(I_2-I_3) - R_5(I_1-I_2) = -E_2$

$-R_4(I_3-I_1) - R_6(I_2-I_3) + R_3I_3 = -E_4 + E_3$

Agrupando y operando tendremos:

$I_1(R_1+R_4+R_5) - I_2R_5 - I_3R_6 = E_1 + E_4$

$-I_1R_5 + I_2(R_2 + R_5 + R_6) - I_3R_6 = -E_2$

$-I_1R_4 - I_2R_6 + I_3(R_4 + R_5 + R_6) = E_3 - E_4$

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Aplicando la ley de conservación de la energía:
Pot. Generada = Pot. Consumida
Entonces:

$$\sum_{h=1}^{h=m} E_h \cdot I_h = \sum_{h=1}^{h=m} R_h \cdot I_h^2$$

# Método de las corrientes de mallas

Solución simultanea de (m-n+1) de las ecuaciones planteadas por las leyes de KIRCHOFF.

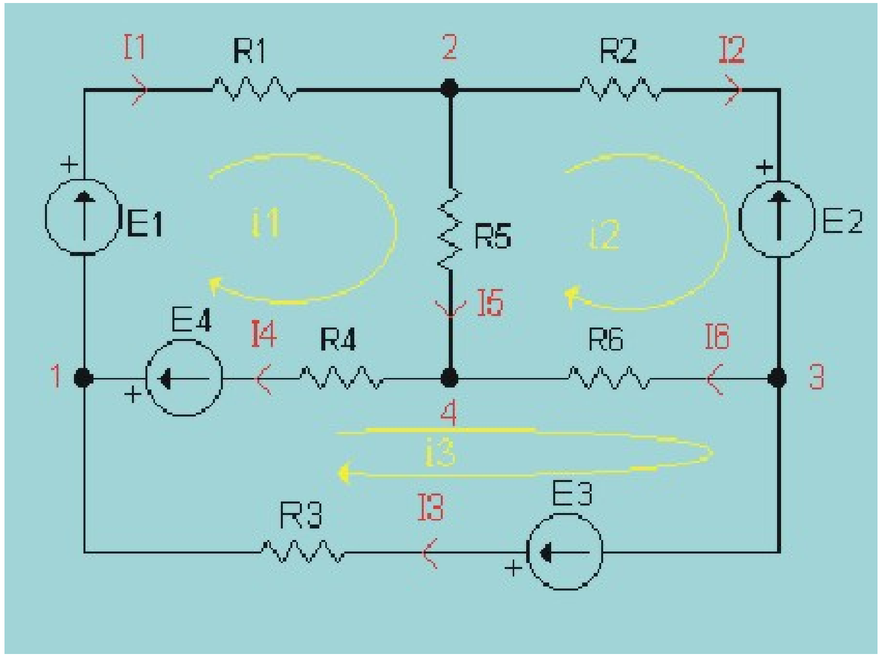
$I_1\,(R_1 + R_4 + R_5) - I_2\,R_5 - I_3\,R_6 = E_1 + E_4$
$-\,I_1\,R_5 + I_2\,(\,R_2 + R_5 + R_6) - I_3\,R_6 = -\,E_2$
$-\,I_1\,R_4 - I_2\,R_6 + I_3\,(\,R_4 + R_5 + R_6) = E_3 - E_4$

Generalizando resulta:

$I_1\,R_{11} - I_2\,R_{12} - I_3\,R_{13} = E_{11}$
$-\,I_1\,R_{21} + I_2\,R_{22} - I_3\,R_{23} = E_{22}$
$-\,I_1\,R_{31} - I_2\,R_{32} + I_3\,R_{33} = E_{33}$

En forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$




Las corrientes $I_1$, $I_2$ e $I_3$ resultan ser las corrientes de las ramas independientes, vale decir de las ramas que no son compartidas con otra malla.
Estas corrientes las consideramos como cerrándose dentro de una sola malla y las denominaremos:

INTENSIDADES DE MALLA

➔ $i_1$, $i_2$ e $i_3$

# Solución para un esquema de k circuitos

$$I_1R_{11} + I_2R_{12} + \ldots + I_hR_{1h} + \ldots + I_kR_{1k} = E_1$$
$$I_1R_{21} + I_2R_{22} + \ldots + I_hR_{2h} + \ldots + I_kR_{2k} = E_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_1R_{h1} + I_2R_{h2} + \ldots + I_hR_{hh} + \ldots + I_kR_{hk} = E_h$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_1R_{k1} + I_2R_{k2} + \ldots + I_hR_{kh} + \ldots + I_kR_{kk} = E_k$$

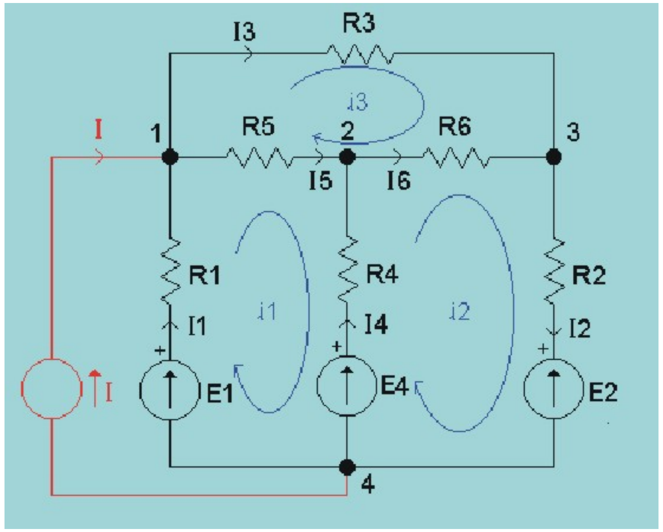
Donde:
$R_{hh}$: Resistencia propia del circuito "h"
$R_{hk}$: Resistencia compartida entre los circuitos "h y k"
$E_1$ ... $E_k$: sumatoria de fem´s de cada malla

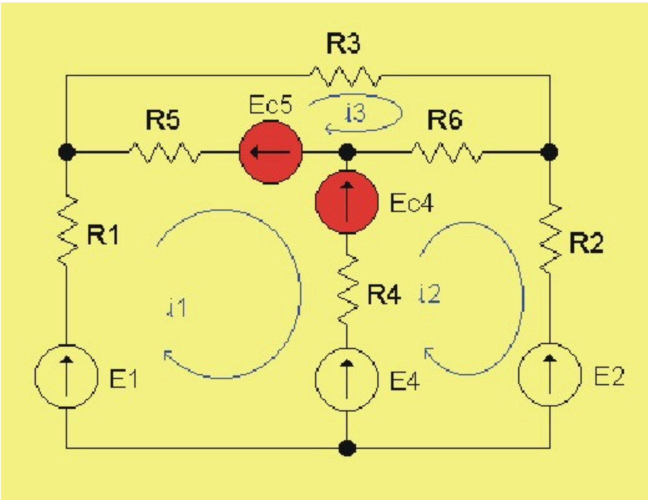
El sistema de ecuaciones se resuelve por determinantes de la siguiente forma:

$$I_h = E_1\frac{A_{1h}}{D} + E_2\frac{A_{2h}}{D} + \ldots + E_h\frac{A_{hh}}{D} + \ldots$$

Siendo:
D: Determinante de los coeficientes
$A_{1h}$, $A_{2h}$, ...: el adjunto o complemento algebraico del determinante "D"
Ejemplo:
$A_{qh}$: se obtiene suprimiendo la fila "q" y la columna "h" y multiplicando el determinante obtenido por $(-1)^{q+h}$

# Mallas con fuentes de corriente




☑ Planteamos por 2ª de K las ecuaciones en las mallas 1, 2 y 3.

$$R_1I_1 + R_5I_5 - R_4I_4 = E_1 - E_4$$
$$R_4I_4 + R_6I_6 + R_2I_2 = E_4 - E_2$$
$$R_3I_3 - R_6I_6 - R_5I_5 = 0$$

☑ Planteamos por 1ª de K las ecuaciones

Nudo 1: $I_5 = I_1 + I - I_3$

Nudo 4: $I_4 = I_2 - I_1 - I$

Nudo 3: $I_6 = I_2 - I_3$

$$R_1I_1 + R_5(I_1 + I - I_3) - R_4(I_2 - I_1 - I) = E_1 - E_4$$
$$R_4(I_2 - I_1 - I) + R_6(I_2 - I_3) + R_2I_2 = E_4 - E_2$$
$$R_3I_3 - R_6(I_2 - I_3) - R_5(I_1 + I - I_3) = 0$$

Operando y llamando: $E_{C4} = R_4 I$; $E_{C5} = R_5 I$

$$I_1(R_1+R_5+R_4) - I_2R_4 - I_3R_5 = E_1 - E_4 - E_{C4} - E_{C5}$$
$$-I_1R_4 + I_2(R_2+R_4+R_6) - I_3R_6 = E_4 - E_2 - E_{C4}$$
$$-I_1R_5 - I_2R_6 + I_3(R_3+R_5+R_6) = E_{C5}$$

A estas ecuaciones les corresponde el esquema equivalente donde se ha reemplazado la fuente "I" por las fuentes equivalentes $E_{C4}$ y $E_{C5}$ de fem´s.

# Principio de Superposición

$$I_h = E_1\frac{A_{1h}}{D} + E_2\frac{A_{2h}}{D} + \ldots + E_h\frac{A_{hh}}{D} + \ldots$$

$$I_1 R_{11} - I_2 R_{12} - I_3 R_{13} = E_1$$
$$- I_1 R_{21} + I_2 R_{22} - I_3 R_{23} = E_2$$
$$- I_1 R_{31} - I_2 R_{32} + I_3 R_{33} = E_3$$

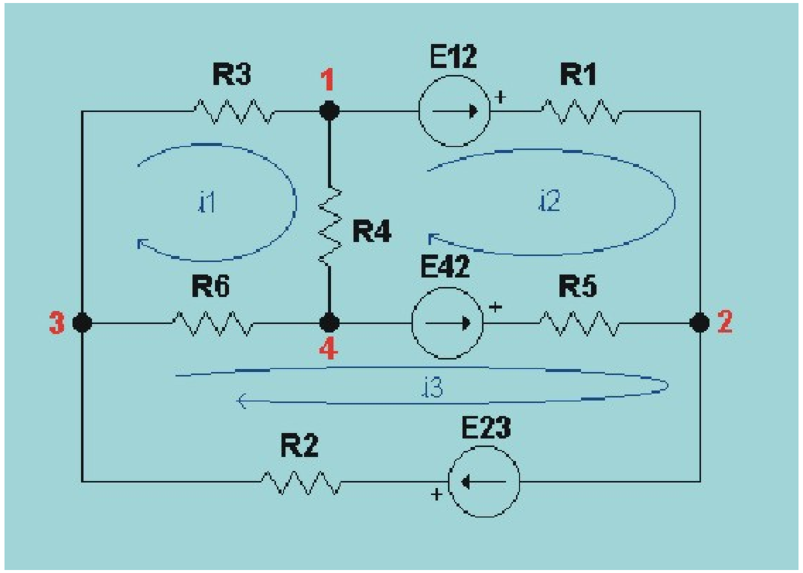
$$I_1 = E_1\frac{A_{11}}{D} + E_2\frac{A_{21}}{D} + E_3\frac{A_{31}}{D} = E_2\frac{A_{21}}{D} + E_3\frac{A_{31}}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix};\ A_{21} = \begin{vmatrix} -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix};\ A_{31} = \begin{vmatrix} -R_{12} & -R_{13} \\ R_{22} & -R_{23} \end{vmatrix}$$

$R_{11} = R_3 + R_4 + R_6;\ R_{12} = R_{21} = R_4$
$R_{22} = R_1 + R_4 + R_5;\ R_{13} = R_{31} = R_6$
$R_{33} = R_2 + R_5 + R_6;\ R_{23} = R_{32} = R_5$
$E_1 = 0;\ E_2 = E_{12} - E_{42};\ E_3 = E_{42} + E_{23}$

$$I_1 = (E_{12} - E_{42})\frac{A_{21}}{D} + (E_{42} + E_{23})\frac{A_{31}}{D}$$

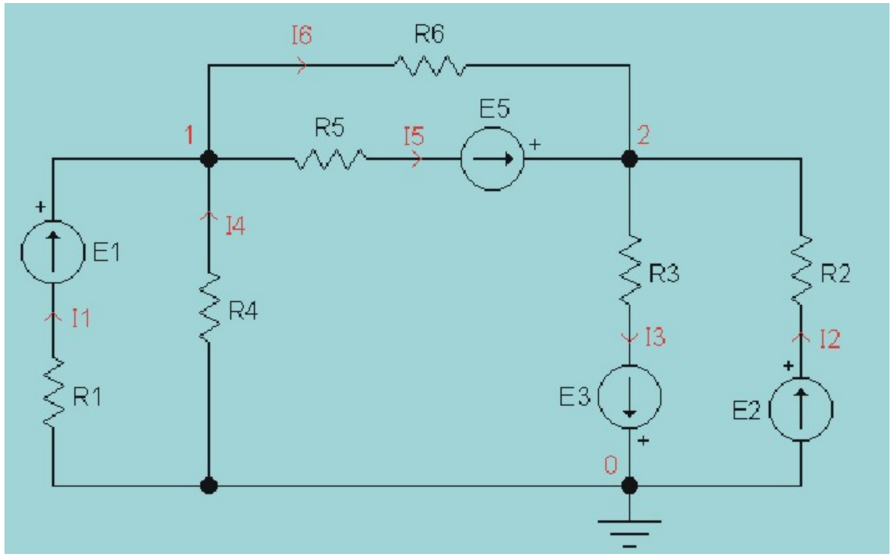
$$I_1 = E_{12}\frac{A_{21}}{D} + E_{42}\left(\frac{A_{31} - A_{21}}{D}\right) + E_{23}\frac{A_{31}}{D}$$




Donde cada fem $E_h$ es la sumatoria Algebraica de las fem´s de la respectiva malla.
Si se reemplazan las fem´s de malla por las fem´s de rama y reagrupamos los términos, la expresión resultante será la Sumatoria algebraica de las corrientes originadas por por cada una de las fem´s del esquema por separado.

# Método de los Potenciales de Nudos

- Se basa en la 1ª ley de K y la Ley de OHM.
- Se adopta un Nudo donde e = 0




☑ Adoptamos el nudo "0" como masa, donde: e = 0

☑ Por primera ley de K.

Nudo 1: $-I_1 + I_6 + I_5 - I_4 = 0$

Nudo 2: $-I_6 - I_5 + I_3 - I_2 = 0$

☑Por ley de OHM, en las ramas

$e_1 = e_0 - I_1R_1 + E_1$ y operando resulta:

$I_1 = (E_1 - e_1)\, g_1$

Ídem para las otras ramas:

$I_2 = (E_2 - e_2)\, g_2$

$I_3 = (e_2 + E_3)\, g_3$

$I_4 = -\, e_1\, g_1$

$I_5 = (e_1 - e_2 + E_5)\, g_5$

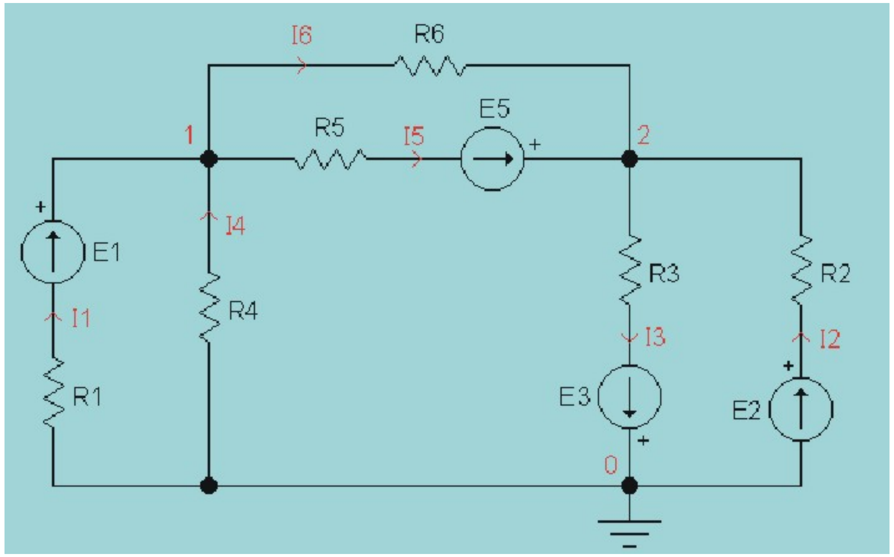
$I_6 = (e_1 - e_2)\, g_6$

☑ Reemplazando ahora en las ecuaciones de Nudos y operando tendremos:

$$e_1(g_1 + g_4 + g_5 + g_6) - e_2\,(g_5 + g_6) = E_1g_1 - E_5g_5$$
$$-\,e_1(g_6 + g_5) + e_2\,(g_2 + g_3 + g_5 + g_6) = E_5g_5 - E_3g_3 + E_2g_2$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Las fuentes de corriente se incorporan en el segundo miembro. El signo será positivo en la ecuación para las fuentes de corriente cuyo sentido concurre al nudo considerado. Generalizando:




$$e_1 g_{11} - e_2 g_{12} = \sum_1 E \cdot g + \sum_1 j$$

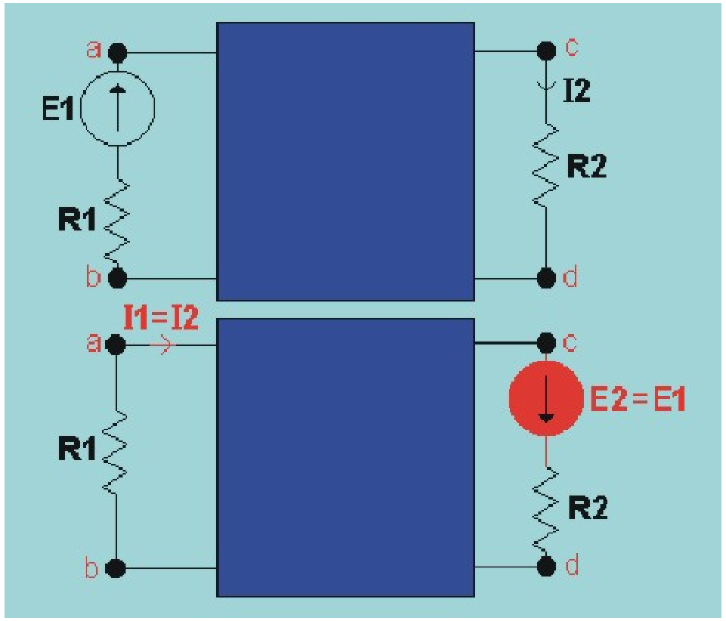
$$-e_1 g_{12} + e_2 g_{22} = \sum_2 E \cdot g + \sum_2 j$$

Serán conductancias propias del nudo $g_{11}$ y $g_{22}$ y, $g_{12}$ las conductancias compartidas entre nudos

$$U_{12} = e_1 - e_2 = \frac{E_5 g_5}{g_5 + g_6} = \frac{\sum_{h=1}^{h=m} E_h \cdot g_h}{\sum_{h=1}^{h=m} g_h}$$

- El numerador resulta: la suma algebraica de, los productos de las fem´s por las conductancias correspondientes, entre los nudos considerados.
- El denominador resulta: la suma de todas conductancias conectadas entre los nudos considerados.

# Principio de Reciprocidad




Consideremos todas las fem´s del circuito iguales a cero excepto $E_1$.
La intensidad en la rama c-d "$I_2$" resulta:

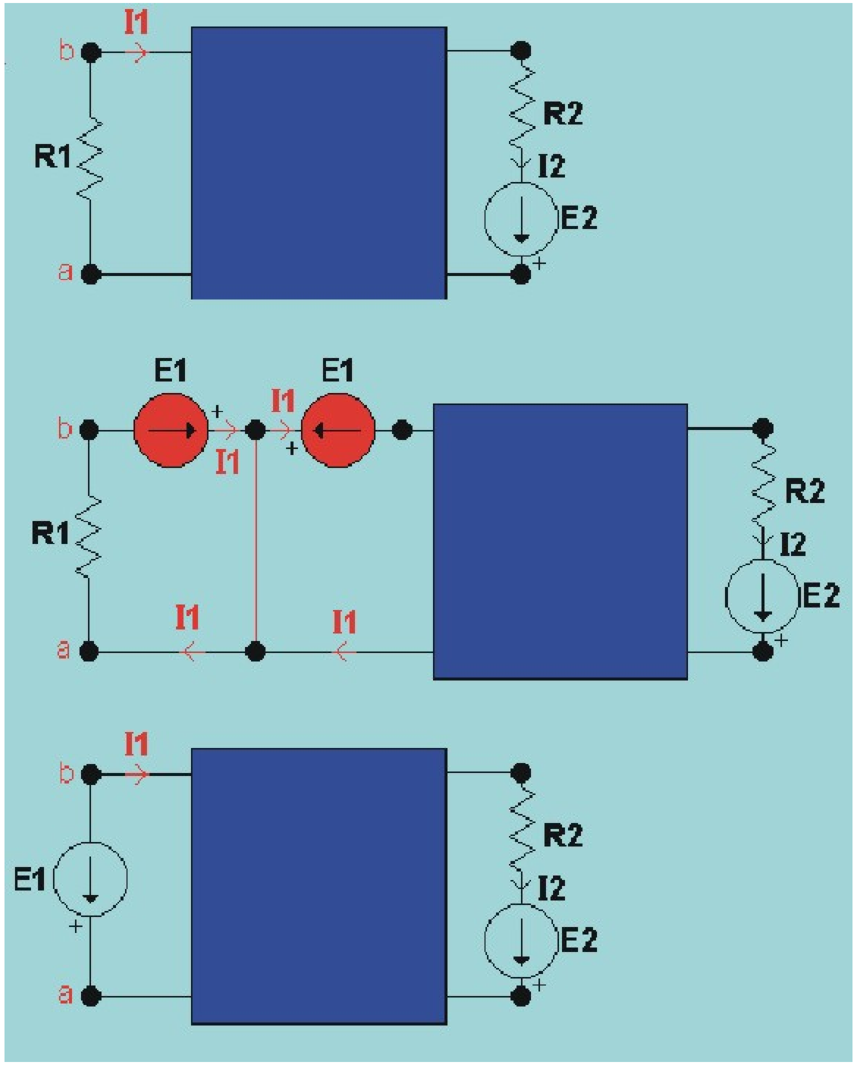
$$I_2 = E_1 \frac{A_{12}}{D}$$

La intensidad en la rama a-b "$I_1$" del circuito debido a la fem $E_2$ es:

$$I_1 = E_2 \frac{A_{21}}{D}$$

$A_{12}$ → se suprime la fila *"1"* y la columna *"2"* multiplicando $(-1)^{1+2}$
$A_{21}$ → se suprime la fila *"2"* y la columna *"1"* multiplicando $(-1)^{2+1}$
Dado que las resistencias comunes son iguales entre si: $R_{12} = R_{21}$ → $A_{21} = A_{12}$
Y siendo: $E_1 = E_2 \rightarrow I_2 = I_1$

# Teorema de Compensación




Intercalando en el circuito las dos fuentes $E_1$ en oposición e iguales a $U_1 = I_1 R_1$, éste resultará sin cambios en cuanto a su comportamiento, dado que la diferencia de potencial entre las dos fuentes incorporadas resulta ser cero. De igual forma y recorriendo el circuito en sentido horario desde el nudo "a" encontraremos:

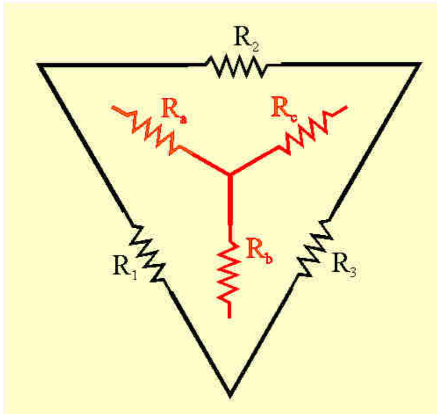
$$- I_1 R_1 + E_1 = 0$$

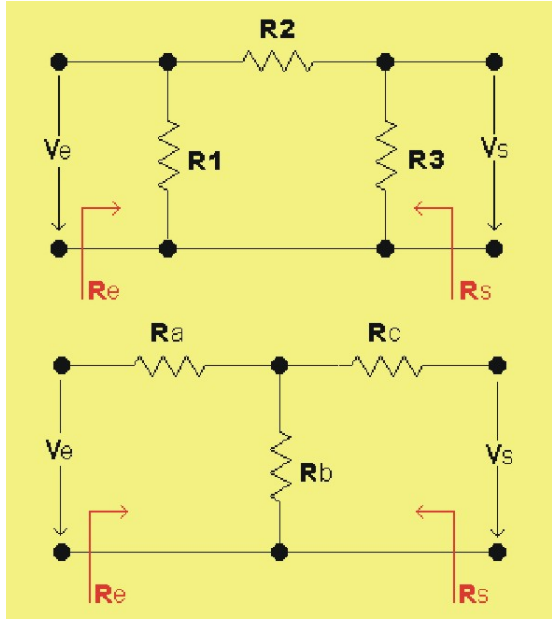
De esta forma en cualquier circuito podremos eliminar una resistencia y reemplazarla por una fuente de fem de igual valor que la caída de tensión que existía en la resistencia suprimida.

# Transformaciones lineales

## Conversión estrella-triángulo (T a Π) y viceversa

Definamos:
Resistencia de entrada $R_e$ y, Resistencia de salida $R_s$ de un cuadripolo será la determinada en el circuito con la salida o la entrada, respectivamente cortocircuitada.
Llamaremos Resistencia de transferencia $R_T$ a la relación entre $V_e$ e $I_s$ con la salida en cortocircuito.




**En el circuito Delta, Triángulo ó Π**

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad R_s = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}; \quad R_T = \frac{V_e}{I_s} = R_2$$

**En el circuito estrella ó T**

$$R_e = R_a + \frac{R_b R_c}{R_b + R_c} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b + R_c} = \frac{\mathbf{R}}{R_b + R_c}$$

$$\mathbf{R} = R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a$$

$$R_e = R_c + \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a + R_b} = \frac{\mathbf{R}}{R_a + R_b}$$

$$R_T = \frac{V_e}{I_s} = \frac{\mathbf{R}}{R_b}; \quad I_e = \frac{V_e}{R_e} = \frac{V_e}{\frac{\mathbf{R}}{R_b + R_c}}; \quad I_s = I_e \frac{R_b}{R_b + R_c}$$

$$I_s = \frac{V_e}{\frac{\mathbf{R}}{R_b + R_c}} \frac{R_b}{R_b + R_c} = V_e \frac{R_b}{\mathbf{R}} \Rightarrow R_T = \frac{V_e}{I_s} = \frac{\mathbf{R}}{R_b}$$

## Pasaje de estrella a triángulo

Si los cuadripolos son equivalentes deberán ser :

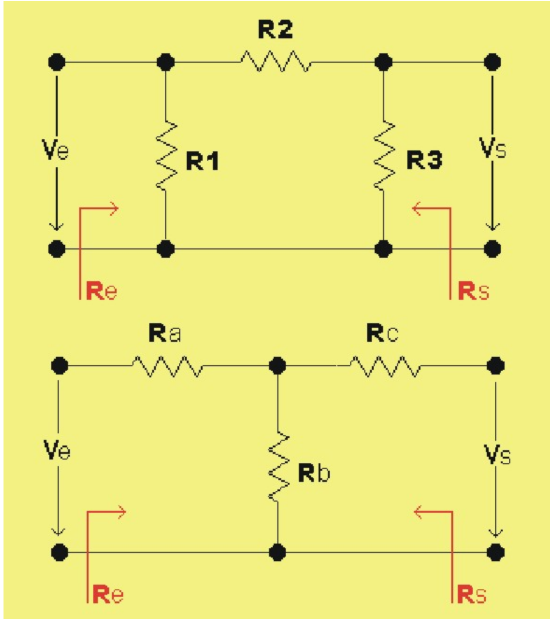
$R_e\Delta = R_e\mathrm{T}; \quad R_s\Delta = R_s\mathrm{T} \quad y \quad R_T\Delta = R_T\mathrm{T};$ entonces :

$$R_T = \frac{V_e}{I_s} = \frac{\mathbf{R}}{R_b} = R_2 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_b}$$

Luego, conocidos los datos del circuito en estrella obtendremos $R_2$ aplicando la última expresión. Ahora, reemplazando :

$R_2 = \frac{\mathbf{R}}{R_b}$; en las ecuaciones de $R_e$ y $R_s$ (circuito en triángulo), se obtiene :

$$R_1 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_c} = \frac{\mathbf{R}}{R_c} \quad y \quad R_3 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_a} = \frac{\mathbf{R}}{R_a}$$




## Pasaje de triángulo a estrella

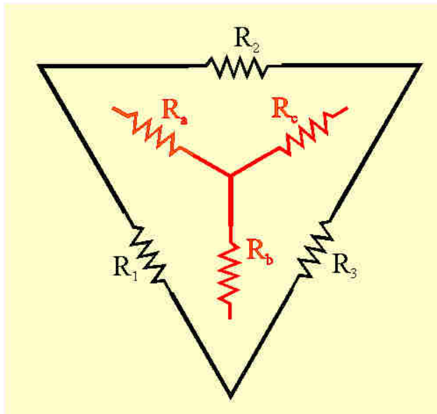
Para obtener la estrella equivalente conocido el triángulo, efectuemos la siguiente operación :

$$\frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{\frac{\mathbf{R}}{R_a} + \frac{\mathbf{R}}{R_b} + \frac{\mathbf{R}}{R_c}} = \frac{1}{\mathbf{R}\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}\right)} =$$

$$\frac{1}{\mathbf{R}\left(\frac{R_bR_c + R_aR_c + R_aR_b}{R_aR_bR_c}\right)} = \frac{1}{\mathbf{R}\left(\frac{\mathbf{R}}{R_aR_bR_c}\right)} = \frac{R_aR_bR_c}{\mathbf{R}^2}; \quad \text{ahora :}$$

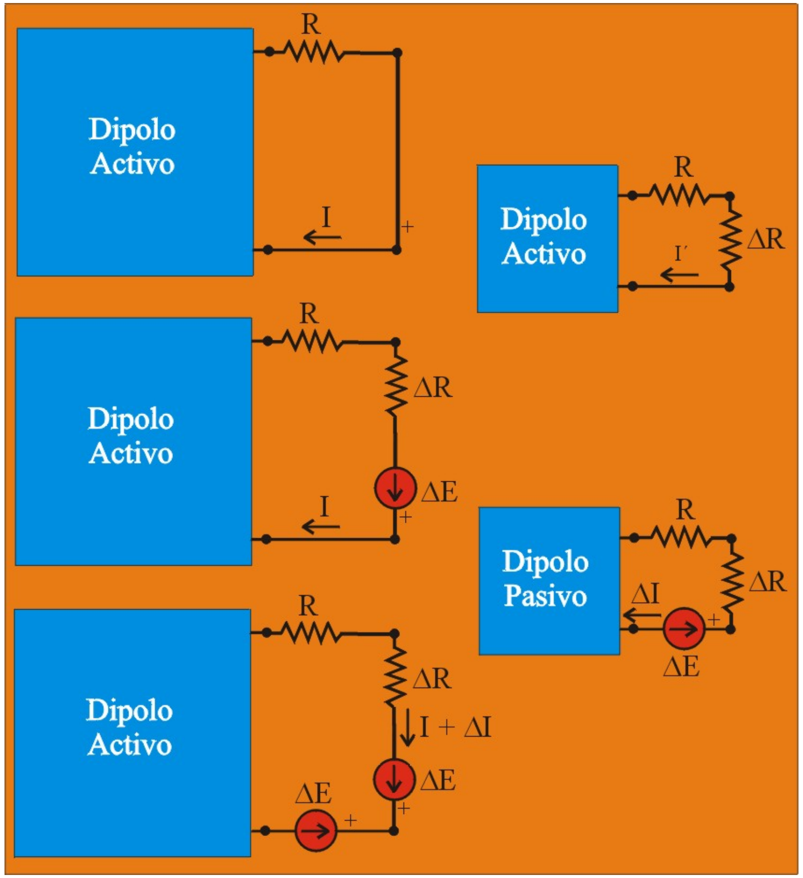
$$\frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot R_1 \cdot R_2 = \frac{R_aR_bR_c}{\mathbf{R}^2} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R_c} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R_b}; \quad \text{Luego :}$$

$$R_a = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_b = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_c = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$



# Teorema de Alteración (Compensación)

- Se modifica la resistencia de la rama en $\Delta R$
- Se introduce un ajuste $\Delta E$ de manera tal de mantener la corriente en el valor $I$
- Si se añade otra fuente $\Delta E$ en oposición la corriente resultará:




$$I' = I + \Delta I; \quad \text{Si}: \quad R' = R + \Delta R + R_P$$

$R_P$ : Resistencia de la red pasiva

$$\Delta I = -\frac{\Delta E}{R'}$$

- ► Determinemos por superposición $\Delta I$, que se produce en la rama debido a $\Delta E$ actuando sola.
- ► Las dos fuentes se pueden eliminar (iguales y opuestas).
- ► Todos los incrementos de $I$ y por tanto de tensión, debido a la adición de $\Delta R$, pueden calcularse resolviendo el esquema del Dipolo Pasivo.

**Corrección de corriente**

$$\Delta I = -\frac{\Delta E}{R'} = -\frac{I \cdot \Delta R}{R'}$$

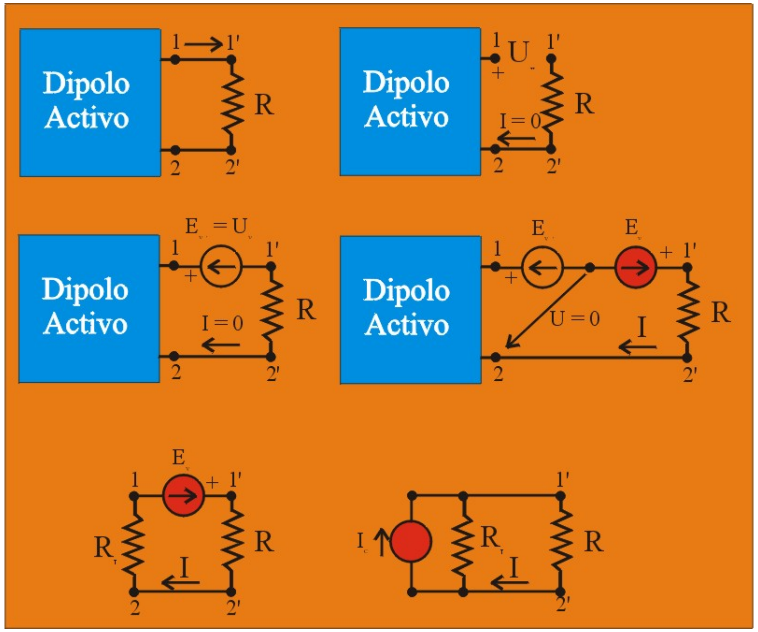
$$I' = I + \Delta I = I - \frac{I \cdot \Delta R}{R'};$$

operando :

$$I = I'\left(\frac{R_r + \Delta R}{R_r}\right); \text{ Donde}: R_r = R + R_P;$$

Resultando $R_r$ : Resistencia de la red escluyendo $\Delta R$.

# Teorema del Dipolo Activo (Teorema de Thevenin)




- Abrimos el circuito en 1-1´
- Determinamos la d.d.p. $U_V$
- Conectamos $E´_V = U_V$; $I = 0$
- Se introduce $E_V$ igual a $E´_V$ pero en sentido contrario
- Por superposición se puede hallar la $I$ en la rama, resultando:

$$I = \frac{E_V}{R + R_I}$$

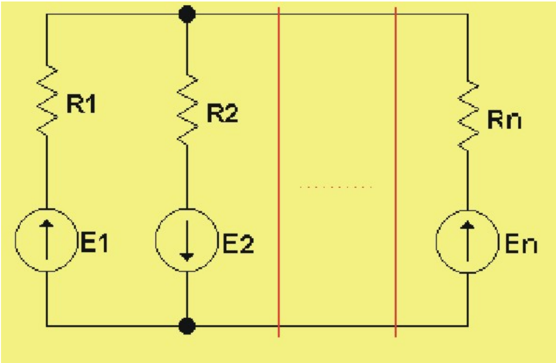
$R_I$: Resistencia interna del dipolo Habiendo pasivado las fuentes
$U_V$: tensión existente en los bornes del dipolo a circuito abierto
Para determinar el equivalente Norton haremos:

$$I_C = \frac{U_V}{R_I}$$

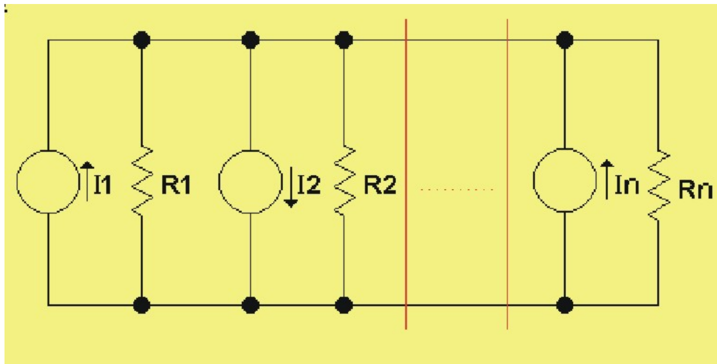
$$U_V = IR_I + IR; \quad \text{dividiendo } m.a.m \text{ por } R_I,$$

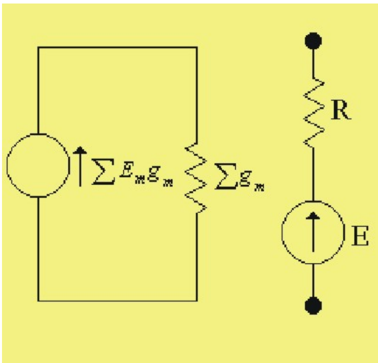
$$\text{tenemos}: \frac{U_V}{R_I} = I + I\frac{R}{R_I} \Rightarrow I_C = I + I_I$$

# Teorema de Millman




Consiste en transformar una conexión de varias ramas en paralelo que contienen fuentes de tensión y resistencias.




$$E = \frac{\sum E_m g_m}{\sum g_m}; \quad R = \frac{1}{\sum g_m}$$

$$\sum g_m = g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_m$$

$$E = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2 + \ldots\ldots + E_m g_m}{g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_m} = \frac{\sum E_m g_m + \sum j}{\sum g_m}$$