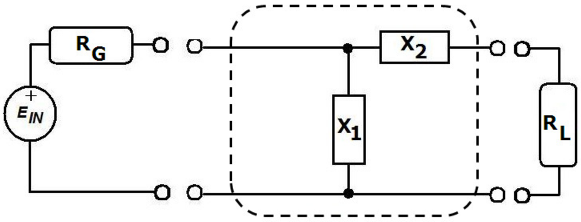
ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIA BASADA EN EL CONCEPTO DE TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Para transferir la máxima potencia entre un generador y una carga, si las mismas son de diferentes valores, puede intercalarse entre ellas un cuadripolo adaptador de impedancias. Se estudió como realizar este cuadripolo basados en el concepto de las impedancias imágenes de entrada y de salida (Z_{IM1} y Z_{IM2} respectivamente) y de la funcion de propagación correspondiente.
En este caso desarrollaremos el cuadripolo propuesto basados en el teorema de máxima transferencia de potencia.
Supondremos una impedancia del generador y de la carga, ambos resistivos puros.
El cuadripolo propuesto debe cumplir con los siguientes requerimientos :

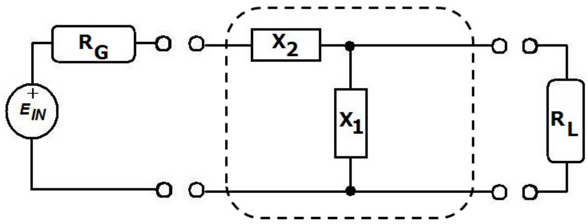
a) Debe ser reactivo puro, dado que el objetivo es que se produzca la máxima transferencia de potencia.

b) Las impedancias imágenes del cuadripolo propuesto deben coincidir con las conjugadas de las impedancias del generador y de la carga.

Se propone un cuadripolo en configuración en “L”, en donde se conectará una reactancia en paralelo con la mayor de las impedancias, con el fin de disminuirla y se conectará otra reactancia en serie con la menor de las impedancias, con el propósito de aumentarla.
La siguiente figura muestra los circuitos propuestos si $R_G > R_L$ o si $R_G < R_L$:

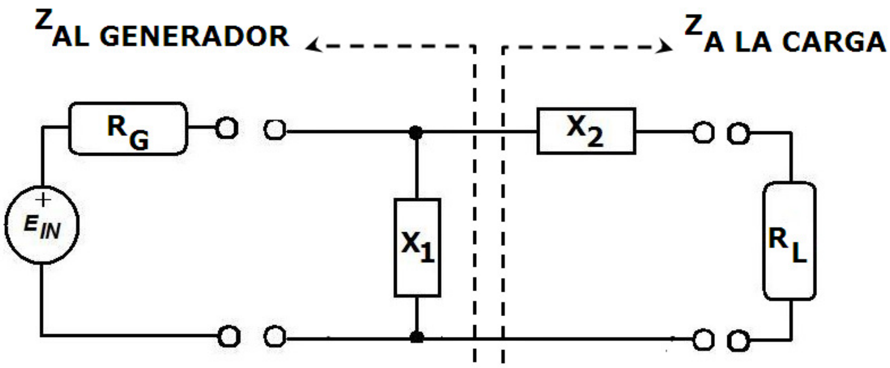


$R_G > R_L$



$R_G < R_L$

Deduciremos las expresiones para el primer circuito suponiendo que $R_G > R_L$.



$R_G > R_L$

Para cumplir con el Teorema de máxima transferencia de potencia, la Impedancia hacia el generador y hacia la carga deben ser complejas conjugadas una de la otra.

$$Z_{HACIA\ EL\ GENERADOR} = R_G // jX_1$$

$$Z_{HACIA\ LA\ CARGA} = R_L + jX_2$$

Operando la primera expresión tenemos :

$$Z_{HACIA\ EL\ GENERADOR} = \frac{R_G * jX_1}{R_G + jX_1}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador y separamos en parte real y parte imaginaria :

$$Z_{HACIA\ EL\ GENERADOR} = \frac{R_G * jX_1}{R_G + jX_1} * \frac{R_G - jX_1}{R_G - jX_1} = \frac{R_G * X_1^2}{R_G^2 + X_1^2} + j\frac{R_G^2 * X_1}{R_G^2 + X_1^2}$$

$$Z_{HACIA\ LA\ CARGA} = R_L + jX_2$$

Igualamos las partes reales e imaginarias de las impedancias hacia el generador y hacia la carga y despejamos las incognitas (X_1 y X_2).

$$R_L = \frac{R_G * X_1^2}{R_G^2 + X_1^2} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \pm R_G * \sqrt[2]{\frac{R_L}{R_G - R_L}}$$

Recordemos que las partes imaginarias deben se conjugadas entre si.

$$-jX_2 = j\frac{R_G^2 * X_1}{R_G^2 + X_1^2}$$

Reemplazando el valor de X_1 encontrado en párrafos anteriores tenemos :

$$-X_2 = \frac{R_G^2 * X_1}{R_G^2 + X_1^2} = \frac{R_G^2\left(R_G * \sqrt[2]{\frac{R_L}{R_G - R_L}}\right)}{R_G^2 + \left(R_G * \sqrt[2]{\frac{R_L}{R_G - R_L}}\right)^2}$$

$$-X_2 = \frac{R_G^2\left(R_G * \sqrt[2]{\frac{R_L}{R_G - R_L}}\right)}{R_G^2 + R_G^2 * \frac{R_L}{R_G - R_L}} = \frac{\cancel{R_G^2} * R_G * \sqrt[2]{\frac{R_L}{R_G - R_L}}}{\frac{\cancel{R_G^2} * R_G - \cancel{R_G^2 * R_L} + \cancel{R_G^2 * R_L}}{R_G - R_L}}$$

$$-X_2 = (R_G - R_L) * \sqrt[2]{\frac{R_L}{R_G - R_L}} = \sqrt[2]{\frac{R_L}{\cancel{R_G - R_L}} * (R_G - R_L)^{\cancel{2}}}$$

Finalmente :

$$-X_2 = \sqrt[2]{R_L * (R_G - R_L)}$$

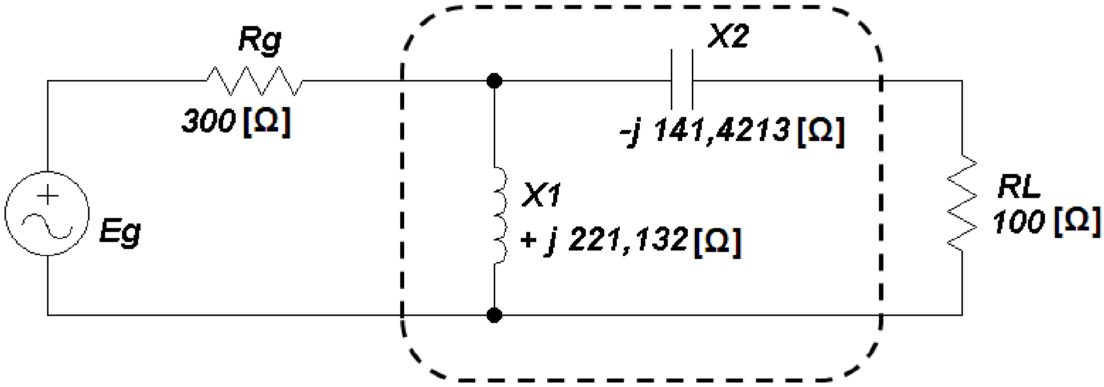
Recordar que si X_1 es un inductor, X_2 será un capacitor y viceversa.

<u>EJEMPLO :</u> Se tiene un generador con una impedancia de 300 Ω y una carga con una impedancia de 100 Ω. Determinar los valores de los componentes de un cuadripolo puramente reactivo en “L” para adaptar estas impedancias.

$$X_1 = \pm R_G * \sqrt[2]{\frac{R_L}{R_G - R_L}} = 300 * \sqrt[2]{\frac{100}{300 - 100}} = 212{,}132\ [\Omega]$$

$$-X_2 = \sqrt[2]{R_L * (R_G - R_L)^2} = \sqrt[2]{100 * (300 - 100)^2} = -141{,}4213[\Omega]$$

El circuito resultante nos queda :



Como comprobación calculamos las impedancias imágenes de entrada y de salida del cuadripolo propuesto:

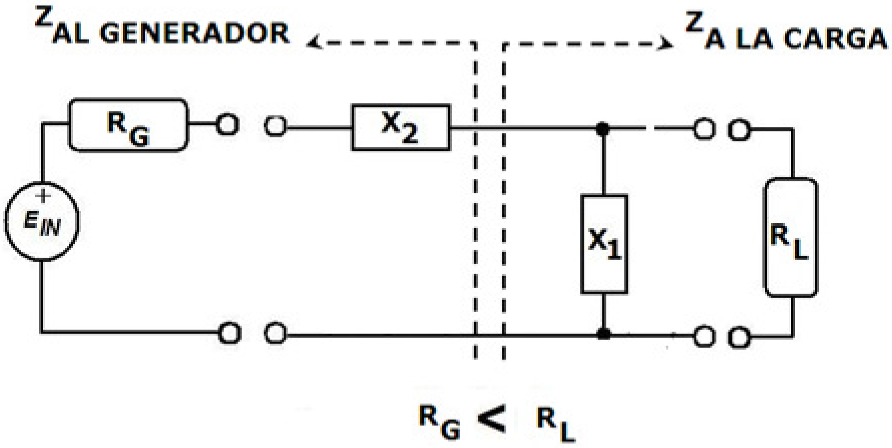
$$Z_{IM1} = \sqrt[2]{Z_{INOC} * Z_{INSH}} = \sqrt[2]{jX_1 * \left(\frac{jX_1 * (-jX_2)}{jX_1 - jX_2}\right)} = \sqrt[2]{j221{,}132 * \left(\frac{j221{,}132 * (-j141{,}4213)}{j221{,}132 - j141{,}4213}\right)}$$

Z_{IM1} = 300 [Ω]

$$Z_{IM2} = \sqrt[2]{Z_{OUTOC} * Z_{OUTSH}} = \sqrt[2]{(-jX_2 + jX_1) * (-jX_2)} = \sqrt[2]{(-j141{,}421 + j221{,}132) * (-j141{,}421)}$$

Z_{IM2} = 100 [Ω]

A continuación, deduciremos las expresiones para el caso en que $R_G < R_L$.



Para cumplir con el Teorema de máxima transferencia de potencia, la Impedancia hacia el generador y hacia la carga deben ser complejas conjugadas una de la otra.

$$Z_{HACIA\ LA\ CARGA} = jX_1 // R_L$$

$$Z_{HACIA\ EL\ GENERADOR} = R_G + jX_2$$

Operando la primera expresión tenemos :

$$Z_{HACIA\ LA\ CARGA} = \frac{R_L * jX_1}{R_L + jX_1}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador y separamos en parte real y parte imaginaria :

$$Z_{HACIA\ LA\ CARGA} = \frac{R_L * jX_1}{R_L + jX_1} * \frac{R_L - jX_1}{R_L - jX_1} = \frac{R_L * X_1^2}{R_L^2 + X_1^2} + j\frac{R_L^2 * X_1}{R_L^2 + X_1^2}$$

$$Z_{HACIA\ EL\ GENERADOR} = R_G + jX_2$$

Igualamos las partes reales e imaginarias de las impedancias hacia el generador y hacia la carga y despejamos las incognitas (X_1 Y X_2).

$$R_G = \frac{R_L * X_1^2}{R_L^2 + X_1^2} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \pm R_L * \sqrt[2]{\frac{R_G}{R_L - R_G}}$$

Recordemos que las partes imaginarias deben se conjugadas entre si.

$$-jX_2 = j\frac{R_L^2 * X_1}{R_L^2 + X_1^2}$$

Reemplazando el valor de X_1 encontrado en párrafos anteriores tenemos :

$$-X_2 = j\,\frac{{R_L}^2 * X_1}{{R_L}^2 + {X_1}^2} = \frac{{R_L}^2\left(R_L * \sqrt[2]{\frac{R_G}{R_L - R_G}}\right)}{{R_L}^2 + \left(R_L * \sqrt[2]{\frac{R_G}{R_L - R_G}}\right)^2}$$

$$-X_2 = \frac{{R_L}^2\left(R_L * \sqrt[2]{\frac{R_G}{R_L - R_G}}\right)}{{R_L}^2 + {R_L}^2 * \frac{R_G}{R_L - R_G}} = \frac{\cancel{{R_L}^2} * R_L * \sqrt[2]{\frac{R_G}{R_L - R_G}}}{\frac{\cancel{{R_L}^2} * R_L - R_G{}^2 * R_L + R_L{}^2 * R_G}{R_G - R_L}}$$

$$-X_2 = (R_L - R_G) * \sqrt[2]{\frac{R_G}{R_L - R_G}} = \sqrt[2]{\frac{R_G}{\cancel{R_L - R_G}} * (R_L - R_G)^{\cancel{2}}}$$

Finalmente :

$$-X_2 = \sqrt[2]{R_G * (R_L - R_G)}$$

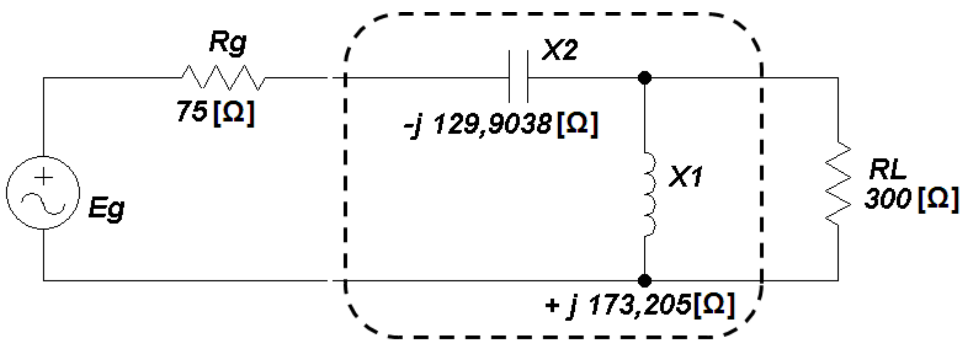
Recordar que si X_1 es un inductor, X_2 será un capacitor y viceversa.

EJEMPLO : Se tiene un generador con una impedancia de 75 Ω y una carga con una impedancia de 300 Ω. Determinar los valores de los componentes de un cuadripolo puramente reactivo en "L" para adaptar estas impedancias.

$$X_1 = \pm R_L * \sqrt[2]{\frac{R_G}{R_L - R_G}} = 300 * \sqrt[2]{\frac{75}{300 - 75}} = 173{,}205\ [\Omega]$$

$$-X_2 = \sqrt[2]{R_G * (R_L - R_G)^2} = \sqrt[2]{75 * (300 - 75)} = -129{,}9038[\Omega]$$

El circuito resultante nos queda :



Como comprobación calculamos las impedancias imágenes de entrada y de salida del cuadripolo propuesto:

$$Z_{IM1} = \sqrt[2]{Z_{INOC} * Z_{INSH}} = \sqrt[2]{(-jX_2 + jX_1) * (-jX_2)}$$

$$Z_{IM1} = \sqrt[2]{(-j129{,}9038 + j173{,}205) * (-j129{,}9038)}$$

Z_{IM1} = 75 [Ω]

$$Z_{IM2} = \sqrt[2]{Z_{OUTOC} * Z_{OUTSH}} = \sqrt[2]{jX_1 * \left(\frac{jX_1 * (-jX_2)}{jX_1 - jX_2}\right)}$$

$$Z_{IM2} = \sqrt[2]{j173{,}205 * \left(\frac{j173{,}205 * (-j129{,}9038)}{j173{,}205 - j129{,}9038}\right)}$$

Z_{IM2} = 300 [Ω]

NOTA : Recuerde que puede elegirse arbitrariamente que X1 sea un inductor o un capacitor, resultando X2 una reactancia opuesta es decir un capacitor o un inductor, ambos respectivamente.

Para calcular los valores de los inductores y de los capacitores correspondientes a cada cuadripolo adaptador de impedancia, recuerde, que Ud. está obteniendo el valor de ***reactancia***, por lo que deberá aplicar el siguiente cálculo :

$$jX_1 = j\omega L_1 \qquad \therefore \qquad L_1 = \frac{X_1}{\omega}$$

y

$$-jX_2 = \frac{1}{j\omega C_2} \qquad \therefore \qquad C_2 = \frac{1}{\omega * X_2}$$

CONCLUSIÓN:

Para el caso en que $R_G = R_L$ note que las expresiones :

$$\boxed{X_1 = \pm R_L * \sqrt[2]{\frac{R_G}{R_L - R_G}}} \quad \text{y} \quad \boxed{-X_2 = \sqrt[2]{R_G * (R_L - R_G)}}$$

Hacen que X1 sea una reactancia infinita en paralelo y X2 sea una reactancia nula en serie, quedando el cuadripolo reducido a dos conductores.

Finalmente recuerde que este tipo de cuadripolos adaptadores de impedancia dada su configuración solo serán útiles para una sola frecuencia de trabajo.