

## Tema 2. Circuitos resistivos y teoremas

1. Introducción.....	1
2. Fuentes independientes.....	2
2.1. Fuente de tensión.....	2
2.2. Fuente independiente de intensidad.....	2
3. Resistencias. ....	4
3.1. Asociación de resistencias .....	5
Resistencias en serie .....	5
Resistencias en paralelo.....	6
3.2. Divisor de tensión e intensidad.....	6
4. Fuentes de dependientes y lineales.....	8
5. Algunos teoremas de circuitos.....	9
5.1. Transformación de fuentes .....	9
5.2. Equivalentes Thévenin y Norton .....	11
Cálculo de $V_{th}$ .....	11
Cálculo de $R_{th}$ .....	11
5.3. Teorema de superposición .....	15

### 1. Introducción

En el tema anterior se presentaron las magnitudes principales de un circuito, es decir, la tensión y la intensidad. Además, se dijo que estas magnitudes suelen ser las incógnitas en cualquier problema de teoría de circuitos.

A partir de estos conceptos vimos que, utilizando las Leyes de Kirchhoff y las ecuaciones de los dispositivos, se puede plantear un sistema de ecuaciones para calcular la tensión y la intensidad en cada uno de los elementos del circuito.

En este tema definiremos una serie de elementos de circuitos. Por otro lado, utilizando estos elementos veremos algunos ejemplos de resolución de circuitos.

Por último, se presentarán una serie de teoremas de circuitos útiles para simplificar la resolución de algunos problemas.

## 2. Fuentes independientes

Entre los elementos más importantes de un circuito se encuentran las fuentes independientes de tensión e intensidad. Su importancia radica en que generalmente son las que entregan a todo el circuito la energía suficientes para funcionar, por lo que todo circuito posee al menos una fuente independiente.

### 2.1. Fuente de tensión

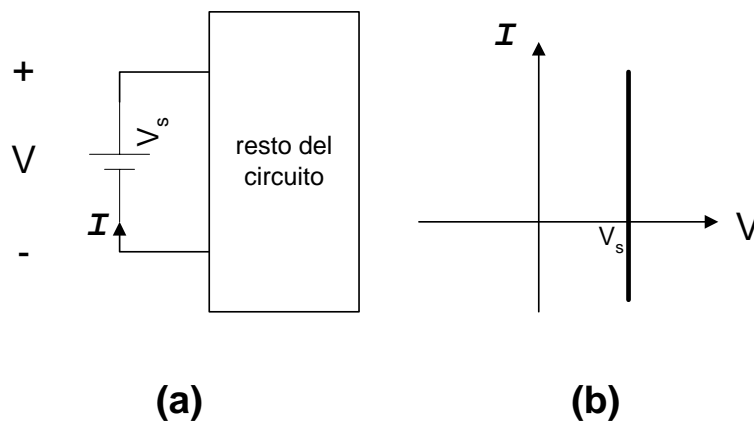
Una *fente independiente de tensión* es un elemento que proporciona una tensión específica independientemente de la intensidad que pase por ella.

En la figura 1a podemos ver el símbolo de una *fente independiente de tensión*. Matemáticamente una fuente de tensión sólo fijará la tensión que cae en ella, es decir:

$$V = V_s$$

$V_s$ : Valor de la fuente de tensión.

En la figura 1b se representa gráficamente el funcionamiento de una fuente de tensión. La gráfica relaciona la tensión y la intensidad del elemento, y se puede ver que la tensión es siempre  $V_s$  independientemente del valor de la intensidad.



**Figura 1.** (a) Fuente independiente de tensión de valor  $V_s$ . (b) Característica I-V.

En general una fuente independiente de tensión puede ser positiva o negativa, y puede ser constante o variable con el tiempo.

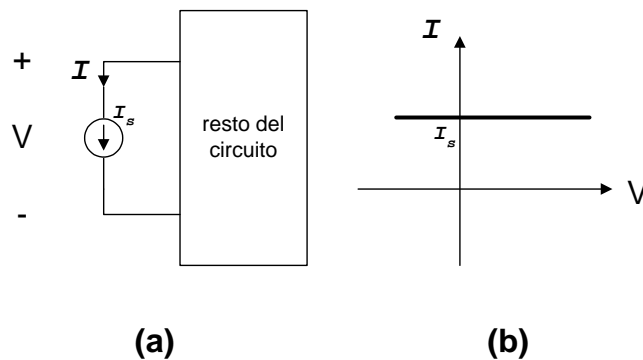
### 2.2. Fuente independiente de intensidad

Una *fente independiente de intensidad* es un elemento que proporciona una intensidad específica completamente independiente a la tensión entre sus nodos.

El símbolo de una fuente de intensidad puede verse en la figura 2a y en la figura 2b se representa su característica I-V. La ley que rige el comportamiento de una fuente independiente de intensidad es la siguiente:

$$I = I_s$$

$I_s$ : Valor de la fuente independiente de intensidad.



**Figura 2.** (a) Fuente independiente de intensidad de valor  $I_s$ . (b) Característica I-V.

**Ejemplo 1.** Determinar la tensión entre los nodos A y B del circuito de la figura 3a.

Por la ley de tensiones de Kirchhoff podemos escribir:

$$V_2 - V_1 - V_{AB} = 0 \rightarrow V_{AB} = V_2 - V_1 = 1V$$

Este ejemplo muestra que dos fuentes de tensión en serie son equivalentes a una sola fuente de tensión de valor la suma de ambas.

**Determinar la intensidad  $I_3$  en el circuito de la figura 3a.**

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 2mA$$

Podemos ver que dos fuentes de intensidad conectadas en paralelo se comportan como una sola fuente de valor la suma de ambas.

**Comprobar que no es posible conectar dos fuentes ideales en configuraciones como las de la figura 3b.**

Aplicando la Ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo A se obtiene:

$$I_1 = I_2; \text{ ; } 3mA = 2mA !!$$

Notar que dos fuentes de intensidad ideales pueden estar en serie sólo si tienen el mismo valor. Y en ese caso podemos directamente sustituir una de las fuentes del circuito por un cortocircuito sin alterar el funcionamiento.

Con las fuentes de tensión en paralelo ocurre lo mismo. Por la segunda ley de Kirchhoff obtenemos:

$$V_1 = V_2; \quad ; \quad 2V = 5V !!$$

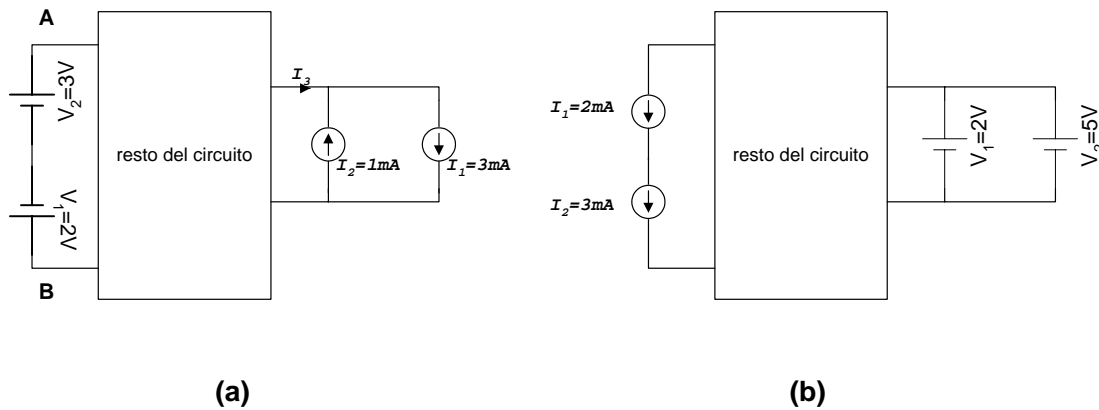


Figura 3. Circuito del ejemplo 1.

### 3. Resistencias.

En la figura 4a se ve el símbolo de una resistencia. La ecuación que rige el comportamiento de una resistencia se conoce como la ley de Ohm y se escribe:

$$v = i \cdot R$$

$$i = \frac{v}{R}$$

$v, i$ : Tensión e intensidad en la resistencia, utilizando las referencias de la figura 4a.

$R$ : Valor de la resistencia medido en Ohmios ( $\Omega$ )

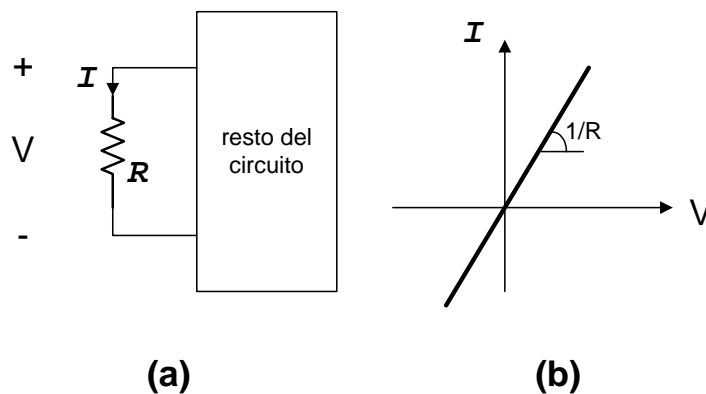


Figura 4. (a) Símbolo de una resistencia de valor  $R$ . (b) Característica I-V.

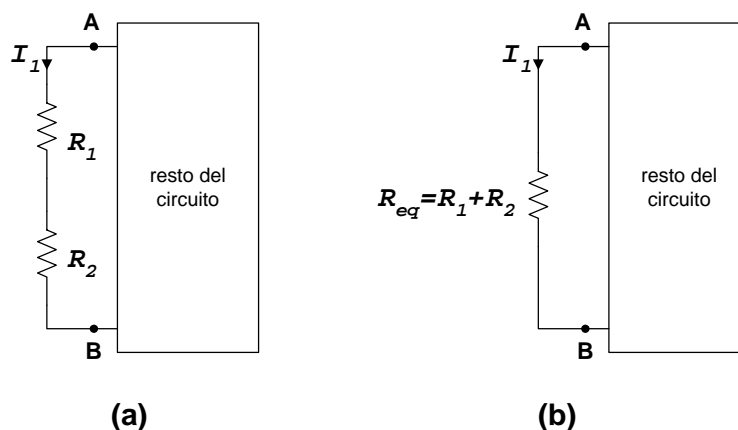
Como se puede ver en la figura 4b, la tensión en una resistencia es directamente proporcional a la intensidad que pasa por ella. En la figura 4a se definen las polaridades correctas de tensión e intensidad que se han considerado en la definición matemática. Notar que la intensidad va del signo + al – de la referencia de tensión.

El valor de  $R$  puede variar entre cero e infinito, llamándose a los casos particulares de  $R=0$  *cortocircuito* y  $R=\infty$  *circuito abierto*.

### 3.1. Asociación de resistencias

En un circuito práctico suelen aparecer resistencia en serie o paralelo con mucha frecuencia. Cuando esto ocurre es posible combinarlas de forma que varias resistencias se sustituyan por una sola, simplificando de esta forma el circuito.

#### Resistencias en serie



**Figura 5.** (a) Circuito con dos resistencias en serie. (b) Circuito equivalente combinando las resistencias

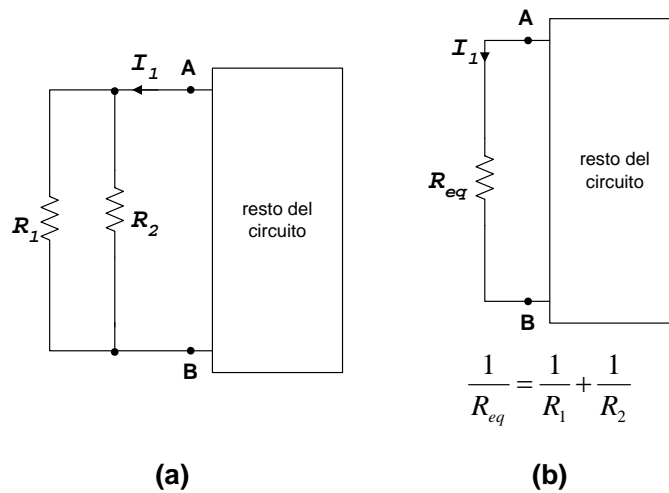
En la figura 5a las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  están en serie. Por ambas resistencias circula la misma intensidad ( $I_1$ ), de forma que:

$$\frac{V_{AB}}{I_1} = R_1 + R_2 = R_{eq}$$

De esta ecuación deducimos que ambas resistencias se comportan como una sola de valor la suma de ambas (figura 5b).

En general, el valor de la resistencia equivalente de cualquier número de resistencias conectadas en serie es la suma de los valores de cada una de ellas.

## Resistencias en paralelo



**Figura 6.** (a) Circuito con dos resistencias en paralelo. (b) Circuito equivalente combinando las resistencias

En la figura 6a se pueden ver dos resistencias en paralelo. Aplicando la Ley de tensiones de Kirchhoff obtenemos:

$$\frac{I_1}{V_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

De forma general, la resistencia equivalente de N resistencias conectadas en paralelo vale:

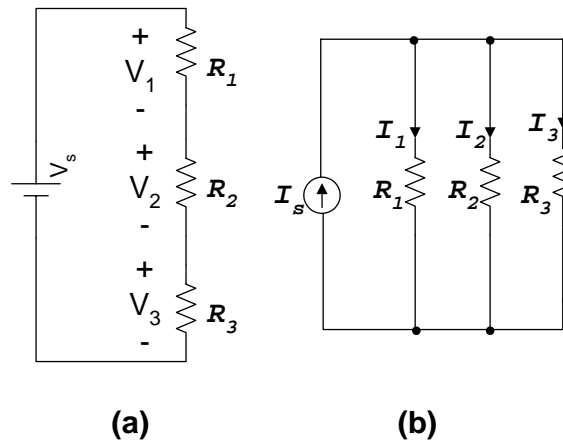
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

### 3.2. Divisor de tensión e intensidad

Si analizamos un circuito compuesto por varias resistencias en serie como el de la figura 7a, podemos comprobar que las tensiones entre los terminales de cada resistencia cumplen las siguientes ecuaciones:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_{eq}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} V_s \quad V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} V_s \quad V_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} V_s$$

Se puede comprobar que la tensión de la fuente se ha dividido entre las diferentes resistencias, de forma que, cuanto mayor sea la resistencia más elevada es su caída de tensión. Por este motivo, al circuito formado por varias resistencias en serie se le suele llamar *divisor de tensión*.



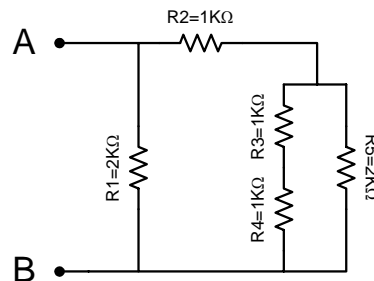
**Figura 7.** (a) Divisor de tensión. (b) Divisor de intensidad.

Por otro lado, en el caso de varias resistencias en paralelo (figura 7b), la intensidad que circula por cada resistencia sigue la siguiente expresión:

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1} I_s ; \quad I_2 = \frac{R_{eq}}{R_2} I_s ; \quad I_3 = \frac{R_{eq}}{R_3} I_s$$

Se puede ver que la intensidad se divide entre las distintas resistencias de forma inversamente proporcional a su valor. A este circuito se le denomina *divisor de intensidad*.

**Ejemplo 2.** Determinar la resistencia equivalente del circuito de la figura 8 entre los nodos A y B.



**Figura 8.** Circuito del ejemplo 2.

Seguiremos los siguientes pasos:

1. Combinamos las dos resistencias en serie  $R_3$  y  $R_4$ :  $R_6 = R_3 + R_4 = 2K\Omega$ . (Figura 9a).
2. Combinamos las dos resistencias en paralelo  $R_5$  y  $R_6$ :  $R_7 = R_5 \parallel R_6 = 1K\Omega$ . (Figura 9b).
3. Combinamos las dos resistencias en serie  $R_7$  y  $R_2$ :  $R_8 = R_7 + R_2 = 2K\Omega$ . (Figura 9c).
4. Combinamos las dos resistencias en paralelo  $R_8$  y  $R_1$ :  $R_{eq} = R_8 \parallel R_1 = 1K\Omega$ .

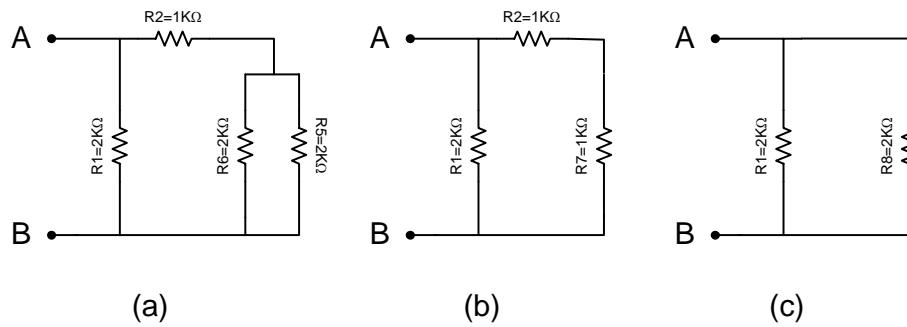


Figura 9. Resolución del ejemplo 2.

**Ejercicio.** Calcular la resistencia equivalente entre los nodos A y B del circuito de la figura 10.

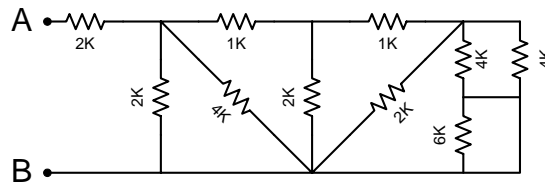


Figura 10. Ejercicio.

**Solución:**  $2.8K\Omega$

## 4. Fuentes dependientes y lineales

Una *fente dependiente* es un elemento que proporciona un valor de tensión o intensidad controlado por medio de otra tensión o intensidad existente en el circuito.

Existen cuatro tipos representados en la figura 11. Siendo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  y  $\sigma$  constantes.

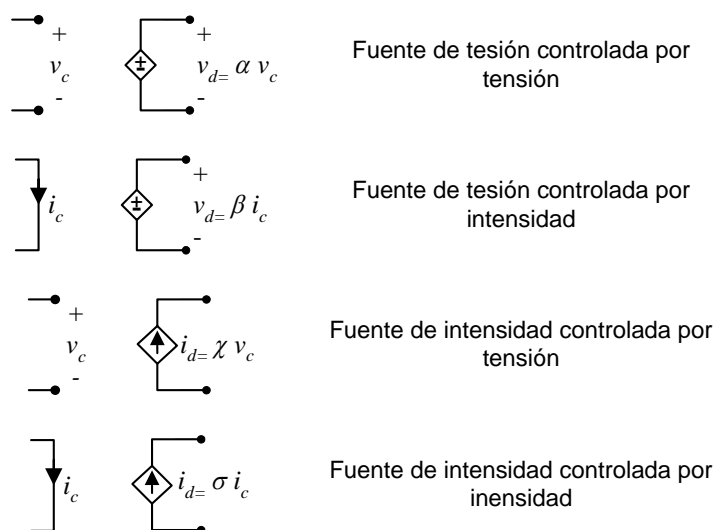
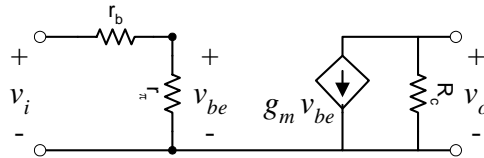


Figura 11. Tipos de fuentes dependientes de intensidad.



En la teoría de la asignatura se utilizará la Física de Semiconductores para obtener una serie de modelos de diferentes dispositivos electrónicos, como transistores, MOS, etc. Las fuentes dependientes serán muy útiles para definir estos modelos.

**Ejemplo 3.** Calcular  $v_o/v_i$  en el circuito de la figura 12.



**Figura 12.** Circuito del ejemplo 3.

Dado que la resistencia  $R_c$  está en serie con la fuente dependiente, la intensidad que circula por  $R_c$  es  $g_m v_{be}$ . Por tanto la tensión  $v_o$  vendrá dada por:

$$v_o = -g_m v_{be} R_c$$

Las resistencias  $r_b$  y  $r_\pi$  forman un divisor de tensión, por tanto:

$$v_{be} = \frac{r_\pi}{r_\pi + r_b} v_i$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$\frac{v_o}{v_i} = -g_m R_c \frac{r_\pi}{r_\pi + r_b}$$

## 5. Algunos teoremas de circuitos

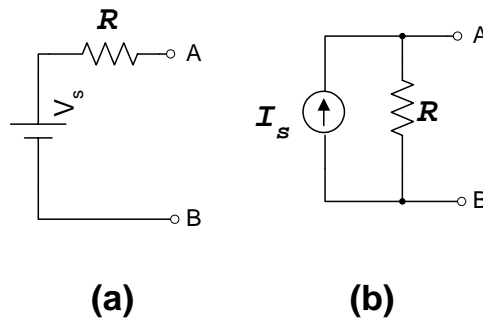
Hasta ahora hemos visto que, utilizando las Leyes de Kirchhoff y las relaciones entre tensión e intensidad que imponen los elementos, se pueden plantear las ecuaciones necesarias para resolver cualquier circuito. Sin embargo, los circuitos electrónicos pueden ser muy complejos, de forma que la aplicación directa de las Leyes de Kirchhoff sea muy tediosa.

En este apartado veremos una serie de teoremas de circuitos que se utilizan para simplificar los circuitos antes de abordar su resolución.

### 5.1. Transformación de fuentes

Para simplificar un circuito es posible transformar una fuente de tensión en serie con una resistencia en una de intensidad en paralelo con una resistencia, y viceversa

(ver figura 13). Esta transformación garantiza que ambos circuitos son equivalentes, es decir, tienen idéntico comportamiento visto desde los terminales A y B.

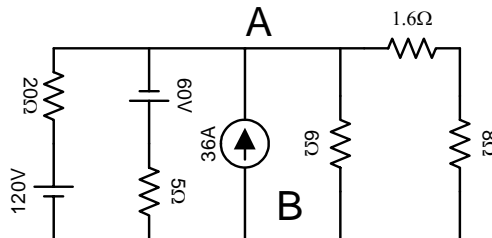


**Figura 13.** (a) Fuente de tensión en serie con resistencia. (b) Circuito equivalente si se cumple  $I_s = \frac{V_s}{R}$ .

Para que los circuitos de la figura 13a y 13b sean equivalentes debe cumplirse:

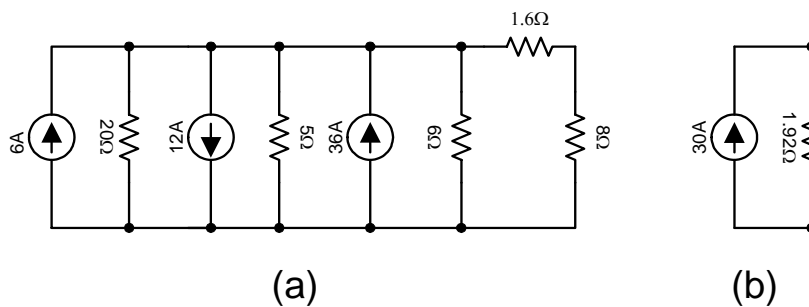
$$V_s = I_s R$$

**Ejemplo 4.** Calcular la tensión entre los nodos A y B, simplificando previamente el circuito utilizando transformación de fuentes.



**Figura 14.** Circuito del ejemplo 4.

Realizando la transformación de fuentes en las dos fuentes de tensión se obtiene el circuito de la figura 15a. Si combinamos todas las resistencias en paralelo y las fuentes de intensidad obtenemos el circuito de la figura 15b. Finalmente  $V_{AB} = 30 \cdot 1.92 = 57.6V$

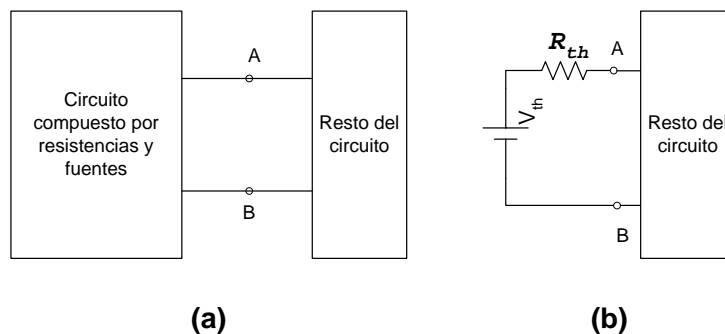


**Figura 15.** Solución del ejemplo 4.

## 5.2. Equivalentes Thévenin y Norton

El teorema de Thévenin establece que un circuito compuesto por resistencias y fuentes dependientes (y lineales) y fuentes independientes puede reemplazarse por un circuito equivalente consistente en una fuente de tensión  $V_{th}$  y una resistencia  $R_{th}$ .

El objetivo del teorema de Thévenin es reducir una parte de un circuito a sólo dos elementos, de forma que sea más sencilla su resolución. La forma de aplicar el teorema para simplificar circuitos puede verse en la figura 16.



**Figura 16.** Sustitución de un circuito de dos terminales por su equivalente Thévenin. (a) Circuito original. (b) Circuito simplificado utilizando el teorema de Thévenin.

Para poder aplicar el teorema de Thévenin necesitaremos calcular el valor de la tensión  $V_{th}$  (*Tensión Thévenin*) y la resistencia  $R_{th}$  (*Resistencia Thévenin*).

### Cálculo de $V_{th}$

Aislamos la parte del circuito que se pretende sustituir por su equivalente Thévenin del resto del circuito. A continuación calculamos la tensión entre los terminales A y B cuando están en circuito abierto, obteniendo  $V_{AB}$  (figura 17a).

La tensión Thévenin vale:

$$V_{th} = V_{AB}$$

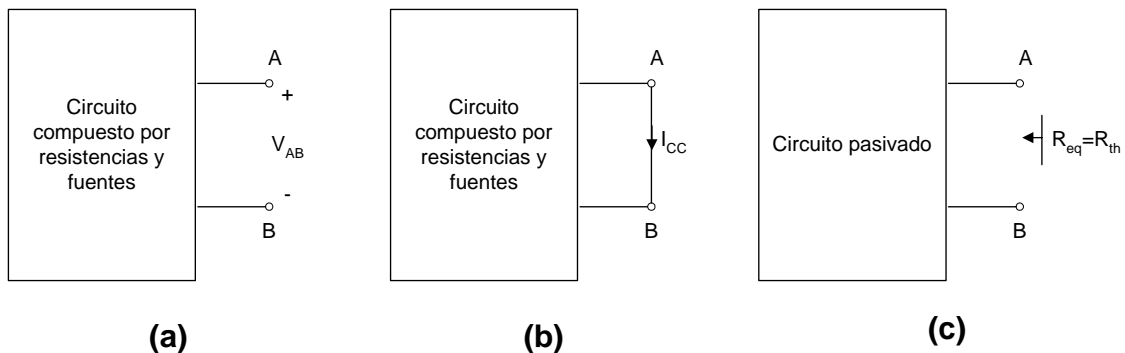
### Cálculo de $R_{th}$

Existen dos métodos para calcular la resistencia Thévenin:

- a. Se calcula la intensidad  $I_{CC}$  cuando los terminales A y B están en cortocircuito (figura 17b). Una vez obtenida, la resistencia Thévenin vale:

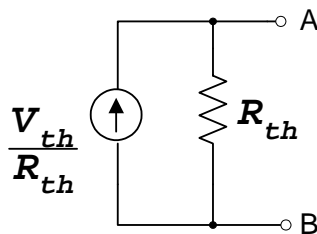
$$R_{th} = \frac{V_{AB}}{I_{CC}}$$

- b. Se pasiva el circuito, es decir, se anulan todas las fuentes independientes de tensión e intensidad. Para ello se sustituyen todas las fuentes de tensión por cortocircuitos y las fuentes de intensidad por circuitos abiertos. La resistencia Thévenin es igual a la resistencia equivalente entre los terminales A y B del circuito pasivado (figura 17c). Normalmente este método requiere menos tiempo que el anterior, sin embargo sólo es aplicable cuando el circuito posea fuentes independientes y resistencias (no fuentes dependientes).



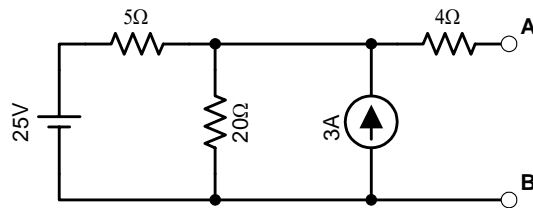
**Figura 17.** Cálculo de la tensión y resistencia Thévenin. (a) Tensión de circuito abierto. (b) Intensidad de cortocircuito. (c) Resistencia equivalente del circuito pasivado.

El equivalente Norton no es más que una transformación de fuentes aplicada al equivalente Thévenin. Es decir, sustituimos la fuente de tensión con la resistencia por una fuente de intensidad en paralelo con una resistencia, como puede verse en la figura 18.



**Figura 18.** Equivalente Norton.

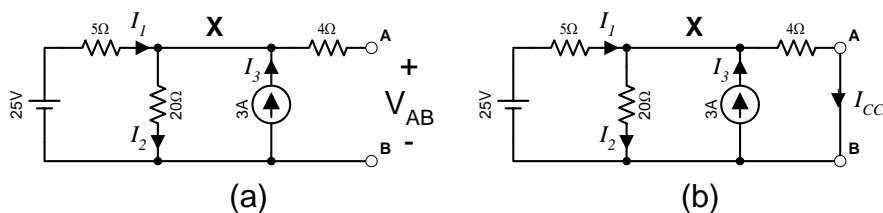
**Ejemplo 5.** Obtener los equivalentes Thévenin y Norton del circuito de la figura 19 respecto a los terminales A y B.



**Figura 19.** Circuito del ejemplo 5.

Para calcular  $V_{th}$  resolveremos el circuito con los terminales A y B en circuito abierto (figura 20a). Asignamos las referencias de tensión e intensidad en la figura 20a y planteamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo X:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow \frac{25 - V_X}{5} - \frac{V_X}{20} + 3 = 0 \Rightarrow V_X = 32V$$



**Figura 20.** Resolución del ejemplo 5. (a) Tensión de circuito abierto. (b) Intensidad de cortocircuito.

Como no circula intensidad por la resistencia de  $4\Omega$ , la caída de tensión en la misma es nula, por tanto:

$$V_{AB} = V_X = 32V$$

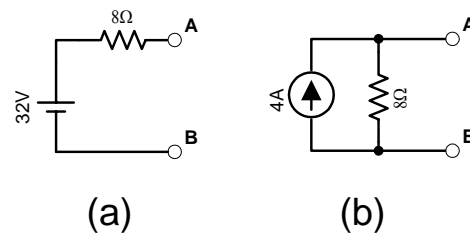
Para obtener la resistencia Thévenin utilizaremos el primero de los métodos explicados anteriormente, es decir, calcularemos la intensidad de cortocircuito. Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo X del circuito de la figura 20b se obtiene:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_{CC} = 0 \Rightarrow \frac{25 - V_X}{5} - \frac{V_X}{20} + 3 - \frac{V_X}{4} = 0 \Rightarrow V_X = 16V$$

Por tanto, la intensidad de cortocircuito vale:

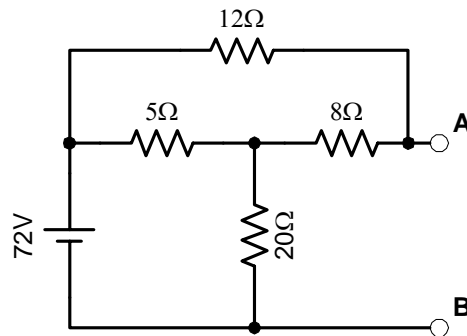
$$I_{CC} = \frac{V_X}{4} = 4A$$

Finalmente la tensión Thévenin vale  $V_{th} = V_{AB} = 32V$  y la resistencia  $R_{th} = V_{AB} / I_{CC} = 8\Omega$ . Quedando los equivalentes Thévenin y Norton como puede verse en la figura 21.



**Figura 21.** Solución del ejemplo 5. (a) Equivalente Thévenin.  
(b) Equivalente Norton.

**Ejemplo 6.** Obtener el equivalente Thévenin del circuito de la figura 22 entre A y B.



**Figura 22.** Circuito del ejemplo 6.

Para calcular  $V_{th}$  planteamos las leyes de Kirchhoff en los bucles indicados en la figura 23a y el nodo X:

$$\begin{aligned} -72 + 5I_2 + 20I_4 &= 0 \\ -5I_2 + 12I_3 + 8I_4 &= 0 \\ I_3 + I_2 - I_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

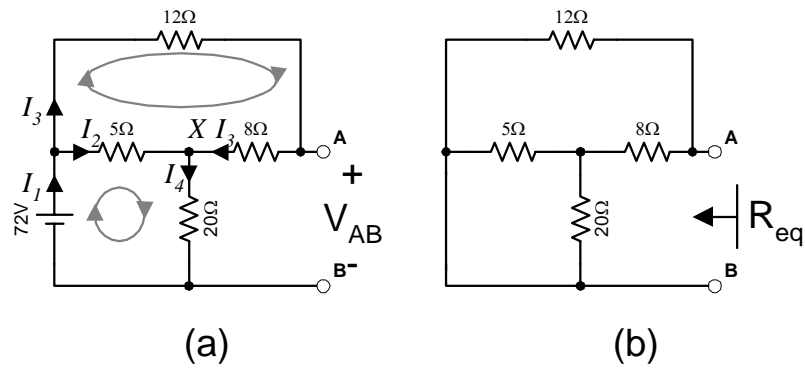
$$I_2 = 2.4A, \quad I_3 = 0.6A \quad \text{y} \quad I_4 = 3A.$$

La tensión de circuito abierto vale:

$$V_{AB} = V_{th} = 8I_3 + 20I_4 = 64.8V$$

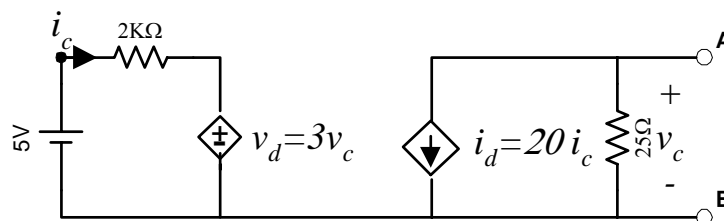
Para obtener la resistencia Thévenin utilizaremos el segundo método explicado, es decir, calcularemos la resistencia equivalente del circuito pasivado de la figura 23b. La fuente independiente se ha sustituido por un cortocircuito.

$$R_{eq} = R_{th} = (5 \parallel 20 + 8) \parallel 12 = 6\Omega$$



**Figura 23.** Resolución del ejemplo 6. (a) Cálculo de  $V_{th}$ .  
(b) Cálculo de  $R_{th}$ .

**Ejercicio:** Calcular el equivalente Thévenin del circuito de la figura 24.



**Figura 24.** Ejercicio.

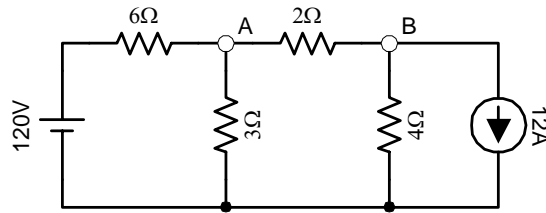
### 5.3. Teorema de superposición

El *principio de superposición* establece que en un circuito lineal, se puede determinar la respuesta total calculando la respuesta a cada fuente independiente por separado y sumando sus contribuciones.

Para aplicar el teorema de superposición seguiremos tres pasos:

- **Paso 1.-** Anular todas las fuentes independientes excepto una. Como se ha comentado anteriormente, para anular una fuente de tensión se sustituye por un cortocircuito y una de intensidad por un circuito abierto.
- **Paso 2.-** Se calcula la variable que se pretende determinar, ya sea una tensión o una intensidad, utilizando las leyes de Kirchhoff. Se vuelve al paso 1 para cada una de las fuentes independientes.
- **Paso 3.-** Se calcula la tensión o intensidad final sumando todas las contribuciones obtenidas de realizar el paso 2 para cada una de las fuentes independientes.

**Ejemplo 7.** Calcular las tensiones de los nodos A y B aplicando el teorema de superposición.



**Figura 25.** Circuito del ejemplo 7.

Seguiremos los pasos anteriores:

Paso 1.- Anulamos en primer lugar la fuente independiente de intensidad, obteniendo el circuito de la figura 26a.

Paso 2.- Calculamos las contribuciones  $V_{A1}$  y  $V_{B1}$  de la fuente de tensión. Para ello planteamos la ley de Kirchhoff en el nodo A.

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow \frac{120 - V_{A1}}{6} - \frac{V_{A1}}{3} - \frac{V_{A1}}{2 + 4} = 0 \Rightarrow V_{A1} = 30V$$

Las resistencias de 2 y 4 Ohmios forman un divisor de tensión, por tanto:

$$V_{B1} = \frac{4}{2 + 4} V_{A1} = 20V$$

Como existe otra fuente dependiente volvemos el paso 1.

Paso 1.- Anulamos la fuente de tensión. El circuito resultante se puede ver en la figura 26b.

Paso 2.- Calculamos las nuevas contribuciones a las tensiones ( $V_{A2}$  y  $V_{B2}$ ). Aplicamos la ley de Kirchhoff en los nodos A y B.

$$\begin{aligned} -\frac{V_{A2}}{6} - \frac{V_{A2}}{3} - \frac{V_{A2} - V_{B2}}{2} &= 0 \\ -\frac{V_{B2}}{4} - \frac{V_{B2} - V_{A2}}{2} - 12 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} V_{A2} &= -12V \\ V_{B2} &= -24V \end{aligned}$$

Ya hemos terminado con todas las fuentes independientes y pasamos al paso 3.

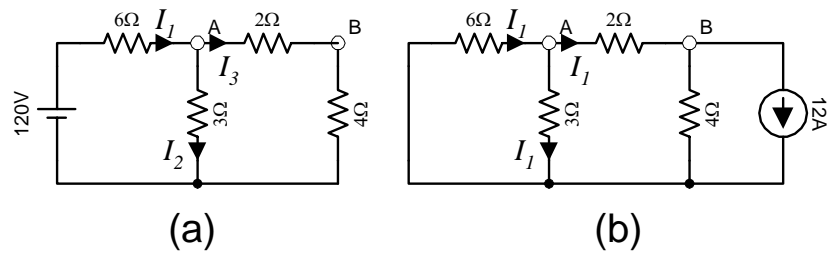
Paso 3.- Sumamos las contribuciones:

$$V_A = V_{A1} + V_{A2} = 18V$$

$$V_B = V_{B1} + V_{B2} = -4V$$



Se deja modo ejercicio comprobar que el resultado sería el mismo si no se aplican directamente las leyes de Kirchhoff sobre el circuito de la figura 25, sin usar el teorema de superposición.



**Figura 26.** Resolución del ejemplo 7. (a) Se anula la fuente de intensidad. (b) Se anula la fuente de tensión.