# Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio o algoritmo de Routh-Hurwitz es un procedimiento de aplicación directa, que permite determinar si un polinomio dado, tiene raices a parte real positiva. Permite evaluar la estabilidad absoluta de un sistema analógico, determinando el número de polos de lazo cerrado que caen en el semiplano derecho, sin calcular las raíces de la ecuación característica. Este procedimiento también indica el número de raíces que estan sobre el eje imaginario jw; es uno de los métodos más usados para determinar si un polinomio es Hurwitz o no, basandose en sus coeficientes. Decimos que un polinomio es Hurtwitz si tiene sus coeficientes $A_i \rightarrow$ positivos y reales (condición necesaria pero no suficiente) y además tiene todas sus raíces con parte real negativa ( condición suficiente).
El algoritmo de Routh-Hurwitz es muy útil, sobre todo para polinomios de grado elevado.
El procedimiento consiste en lo siguiente:

1. Ordenar la ecuación característica de la función de transferencia bajo estudio, de la siguiente forma:

$$A_0 S^n + A_1 S^{n-1} + A_3 S^{n-2} + \cdots + A_{n-1} S + A_n = 0 \qquad donde\ A_n \neq 0$$

2. Verificar que todos los coeficientes de la ecuación tienen el mismo signo y ninguno de los coeficientes es igual a cero (condición necesaria pero no suficiente); de lo contrario, existe al menos una raíz que es imaginaria o tiene parte real positiva y el polinomio no es Hurwitz.

3. Elaborar la siguiente tabla :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S^n$ | $A_0$ | $A_2$ | $A_4$ | . | . |
| $S^{n-1}$ | $A_1$ | $A_3$ | $A_5$ | . | . |
| $S^{n-2}$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | . | . |
| $S^{n-3}$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . |
| $S^1$ | $D_1$ | . | . | . | . |
| $S^0$ | $F_1$ | . | . | . | . |

Donde :

$$B_1 = \frac{A_1 * A_2 - A_0 * A_3}{A_1} \qquad B_2 = \frac{A_1 * A_4 - A_0 * A_5}{A_1} \qquad B_3 = \frac{A_1 * A_6 - A_0 * A_7}{A_1}$$

$$C_1 = \frac{B_1 * A_3 - A_1 * B_2}{B_1} \qquad C_2 = \frac{B_1 * A_5 - A_1 * B_3}{B_1}$$

Continuar de esta manera hasta encontrar el último coeficiente.
El arreglo anterior se conoce como tabulación de Routh o arreglo de Routh. La columna de eses ($S^n$ ) en el lado izquierdo se utiliza para propósitos de identificación.
La columna de referencia mantiene el rastro de los cálculos, y el último renglón de la tabulacion de Routh debe ser siempre el renglón de $S^0$ , cuyo valor será el de la constante del polinomio.

Como referencia debe recordarse que el último valor de las filas pares, es el coeficiente de $S^0$ es decir el valor de la constante del polinomio bajo estudio.
Una vez que la tabulación de Routh se ha completado, el último paso es aplicar el criterio, el cual establese que: "***El número de cambios de signos en los elementos de la primera columna es igual al número de las raíces con partes reales positivas o en el semiplano derecho del plano s, del polinomio bajo estudio***".
Por tanto, un polinomio será de Hurwitz si tiene todos sus coeficentes y elementos de la primera columna de la tabulación de Routh, positivos.

EJEMPLO :

Dado el siguiente polinomio aplicar el criterio de Routh-Hurtwitz y determinar la cantidad de raices a parte real positiva.

$$P^8 + 8\,P^7 + 7\,P^6 + 6\,P^5 + 3\,P^4 + 4\,P^3 + 3\,P^2 + 2\,P + 1 = 0$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P^8$ | 1 | 7 | 3 | 3 | 1 |
| $P^7$ | 8 | 6 | 4 | 2 | |
| $P^6$ | 6,25 | 2,5 | 2,75 | 1 | |
| $P^5$ | 2,8 | 0,48 | 0,72 | | |
| $P^4$ | 1,428 | 1,142 | 1 | | |
| $P^3$ | -1,76 | -1,24 | | | |
| $P^2$ | 0,136 | 1 | | | |
| $P^1$ | 11,666 | | | | |
| $P^0$ | 1 | | | | |

Detectamos dos cambios de signo en la primera columna, por lo tanto el polinomio tendrá dos raices a parte rel positiva. Si analizamos el polinomio propuesto mediante MATLAB®, utilizando el comando roots podemos determinar las raices.

roots([1,8,7,6,3,4,3,2,1])

| | | |
|---|---|---|
| S1 = | -7.1293 | 0.0000*i |
| S2 = | 0.5450 | 0.5843*i |
| S3 = | 0.5450 | -0.5843*i |
| S4 = | -0.1042 | 0.6793*i |
| S5 = | -0.1042 | -0.6793*i |
| S6 = | -0.6175 | 0.0000*i |
| S7 = | -0.5675 | 0.6567*i |
| S8 = | -0.5675 | -0.6567*i |

***2 raices a parte real positiva***

# CASOS ESPECIALES

Se dificulta aplicar el criterio de Routh-Hurtwitz, cuando:

1. El primer elemento de una fila es cero, tendiendo a infinito los elementos de la fila siguiente. En este caso, se reemplaza el elemento nulo por un número positivo pequeño.

EJEMPLO :

$$12\ P^5 + 6\ P^4 + 10\ P^3 + 5\ P^2 + 8\ P + 10 = 0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $P^5$ \| | 12.0000 | 10.0000 | 8.0000 | |
| $P^4$ \| | 6.0000 | 5.0000 | 10.0000 | |
| $P^3$ \| | 0.0000 | -12.0000 | | ← **Reemplazamos el valor 0.000 por 1 e-10 y continuamos** |
| $P^3$ \| | 1e-10 | -12.0000 | | |
| $P^2$ \| | 720000000004.9999 | 10.0000 | | |
| $P^1$ \| | -12.0000 | | | |
| $P^0$ \| | 10.0000 | | | |

Detectamos dos cambios de signo en la primera columna, por lo tanto el polinomio tendrá dos raices a parte rel positiva. Si analizamos el polinomio propuesto mediante MATLAB®, utilizando el comando roots podemos determinar las raices.

roots([12,6,10,5,8,10])

| | | | |
|---|---|---|---|
| S1 = | 0.5719 | 0.7875*i | ***2 raices a parte real positiva*** |
| S2 = | 0.5719 | -0.7875*i | |
| S3 = | -0.4187 | 0.9569*i | |
| S4 = | -0.4187 | -0.9569*i | |
| S5 = | -0.8064 | 0.0000*i | |

2. Los elementos de una fila completa son nulos, esto es debido a:
Pares de raíces reales equidistantes del eje imaginario o a pares de raíces complejas conjugadas, simétricas al origen.
En este caso se puede crear la llamada *Ecuación Auxiliar*, con los coeficientes de la fila superior a la fila nula; esta ecuación es de orden par y sus raíces son también de la ecuación característica. Para este caso, se reemplaza la fila nula con los coefientes de la ecuación auxiliar. Una manera de obtener la ecuación auxiliar es derivando la fila anterior y otra forma es multiplicando la fila anterior por una raiz conocida ( por ejemplo S+1) y tomar los coeficientes cuya paridad coincida con la fila que se anuló.

EJEMPLO 1:

$$\mathbf{2\,P^5 + 4\,P^4 + 8\,P^3 + 16\,P^2 + 15\,P + 30 = 0}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| P5 \| | 2.0000 | 8.0000 | 15.0000 |
| P4 \| | 4.0000 | 16.0000 | 30.0000 ← Derivamos |
| P3 \| | 0.0000 | 0.0000 | |
| P3 \| | 16.0000 | 32.0000 | |
| P2 \| | 8.0000 | 30.0000 | |
| P1 \| | -28.0000 | | |
| P0 \| | 30.0000 | | |

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(4\,P^4 + 16\,P^2 + 30\right) = \underbrace{16\,P^3 + 32\,P^1}$$

Detectamos dos cambios de signo en la primera columna, por lo tanto el polinomio tendrá dos raices a parte rel positiva. Si analizamos el polinomio propuesto mediante MATLAB®, utilizando el comando roots podemos determinar las raices.

roots([2,4,8,16,15,30])

S1 = -2.0000 0.0000*i
S2 = 0.6077 1.5393*i
S3 = 0.6077 -1.5393*i
S4 = -0.6077 1.5393*i
S5 = -0.6077 -1.5393*i

***2 raices a parte real positiva***

EJEMPLO 2:

$$\mathbf{P^4 + 3\,P^3 + 3\,P^2 + 3\,P + 2 = 0}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| P4 \| | 1.0000 | 3.0000 | 2.0000 |
| P3 \| | 3.0000 | 3.0000 | |
| P2 \| | 2.0000 | 2.0000 | ← Derivamos ***d/ dP ( 2P² +2) = 4*** |
| P1 \| | 0.0000 | 0.0000 | |
| P1 \| | 4.0000 | | |
| P0 \| | 2.0000 | | |

No hay cambios de signo en la primera columna del algoritmo de Routh-Hurtwitz, por lo tanto el polinomio dado tiene 0 raices a parte real positiva. Si analizamos el polinomio propuesto mediante MATLAB®, utilizando el comando roots podemos determinar las raices.

roots([1,3,3,3,2])

S1 = -2.0000 0.0000*i
S2 = -0.0000 1.0000*i ⟺ 2 raices sobre el eje imaginario
S3 = -0.0000 -1.0000*i
S4 = -1.0000 0.0000*i

Las dos raices sobre el eje imaginario, nos indican que en este caso el sistema tendrá una oscilación permanente, estando en el límite de la estabilidad.

## COMO OPERAR CON EL ALGORITMO DE ROUTH_HURTWITZ ?

Si nuestra función de transferencia es una función de transferencia total, debemos aplicar el algoritmo de Routh-Hurtwitz tanto al denominador, como al numerador de la función $F_{(P)}$ , la diferencia en el número de raíces de ambos, será igual al número de rodeos al origen del diagrama polar de la función $F_{(P)}$ , al aplicar el criterio de Nyquist.

N° Raices del Numerador de $F_{(P)}$ - N° Raices del Denominador de $F_{(P)}$ = **Z – P** = **Rodeos al origen en el Diagrama de Nyquist de $F_{(P)}$**

Si nuestra función de transferencia es una función de lazo abierto, debemos aplicar el algoritmo de Routh-Hurtwitz tanto al denominador, como al numerador de **$G_{(P)}$ * $H_{(P)}$ + 1**, la diferencia en el número de raíces de ambos será igual al número de rodeos al punto [-1 + j0], del diagrama polar de $G_{(P)}$ * $H_{(P)}$ , al aplicar el criterio de Nyquist.

N° Raices Numerador de ($G_{(P)}$ * $H_{(P)}$ +1) - N° Raices del Denominador de ($G_{(P)}$ * $H_{(P)}$ +1) =

= **Z – P** = **Rodeos al punto [ -1 + j 0] en el diagrama de Nyquist de $G_{(P)}$ * $H_{(P)}$**

**NOTA :** la Cátedra Teoría de los Circuitos II, facilita dos programas para generar el algoritmo de Routh-Hurtwitz, uno de ellos es un “script” para correr mediante MATLAB®, el cual puede emplearse con polinomios de hasta octavo grado y genera el algoritmo, indica el número de raices a parte real positiva y la ubicación de todas las raices del polinomio. Este programa contempla todos los casos, incluyendo anulación de un valor en la primera columna y anulación de una fila completa. → **routh.m**
El otro programa es más rústico, está elaborado mediante EXCEL y genera solo la tabla del algoritmo, el alumno debe observar los cambios de signo en la primera columna y sacar sus conclusiones. En el caso de un valor nulo en la primera columna o anulación de una fila completa dará como resultado → **#¡DIV/0!** el alumno deberá operar manualmente. → **routh.xls**