Guia 3. Transitorio

1. Calcular y graficar la respuesta $v_C(t)$ para $t > 0$ de la figura 1, si estuvo conectado a la fuente por un tiempo suficientemente grande como para considerar extinguido el régimen transitorio.

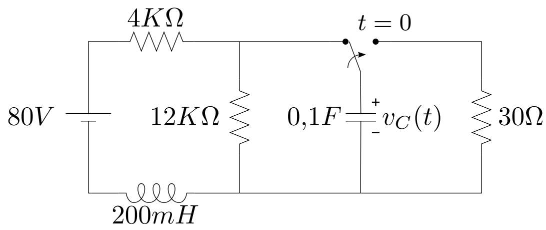


Figura 1: Respuesta natural de $v_C(t) \forall t > 0$.

2. Hallar la respuesta $i_\mathrm{L}(t)$ del circuito de la figura 2 para $t > 0$.

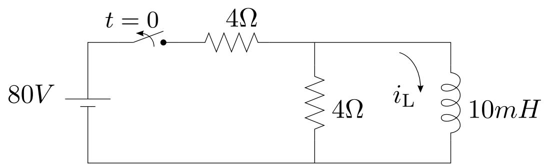


Figura 2: Hallar $i_\mathrm{L}(t)$ para $t > 0$.

3. Calcular y graficar la respuesta $i_L(t)$ para $t > 0$ del circuito de la figura 3, si estuvo conectado a la fuente por un tiempo suficientemente grande como para considerar extinguido el régimen transitorio.

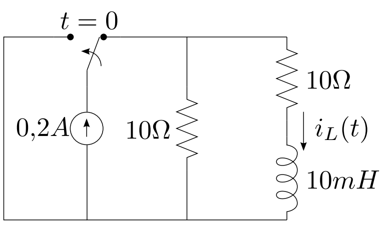
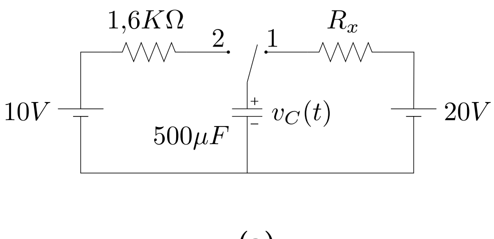


Figura 3: Respuesta natural de $i_L(t) \forall t > 0$.

4. En el circuito de la figura 4a se conecta el capacitor a la fuente de $20V$ en $t = 0$ (posición 1), cuando la carga del capacitor llega a $15V$ se cambia el interruptor conectando la fuente de $10V$ (posición 2). Siendo la respuesta de la tensión del capacitor $v_C(t)$ la del gráfico de la figura 4b, calcular el tiempo $t = t'$ del cambio de interruptor, y la resistencia R_x del circuito.

5. Hallar la respuesta $i_L(t)$ del circuito de la figura 5 si $i_L(0) = 3A$.



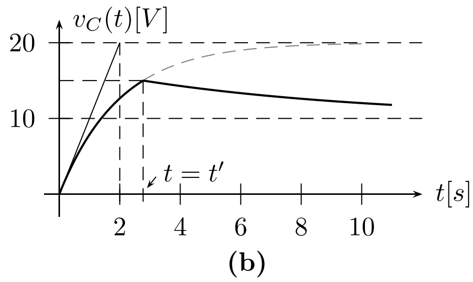


Figura 4: Calcular el tiempo $t = t'$ en el que conmuta el circuito.

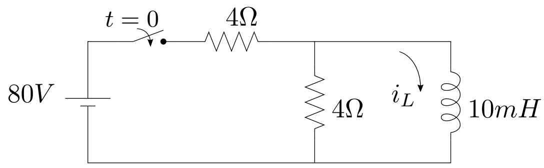


Figura 5: Hallar $i_L(t)$ para $t > 0$.

6. El capacitor de la figura 6 tiene una carga inicial de $q_0 = 800 \times 10^{-6}C$ con la polaridad indicada. Hallar la respuesta completa de la tensión del capacitor, y la evolución de las cargas con el tiempo.

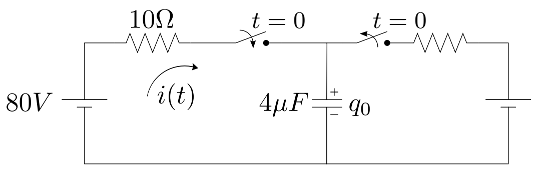


Figura 6: Respuesta completa de la tensión en el capacitor.

7. Encontrar y graficar la tensión y corriente en la resistencia de carga del circuito de la figura 7 para todo $t > 0$.

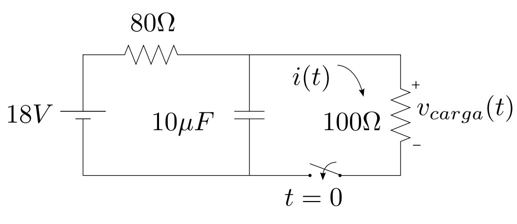


Figura 7: Encontrar y graficar la tensión y corriente en R.

8. Calcular la respuesta de la tensión del capacitor $v_C(t) \forall t > 0$ del circuito de la figura 6 aplicando en teorema de superposición y comparar el resultado con el ejercicio 4.

9. Encontrar $i(t) \forall t > 0$ según se indica en el circuito de la figura 8.

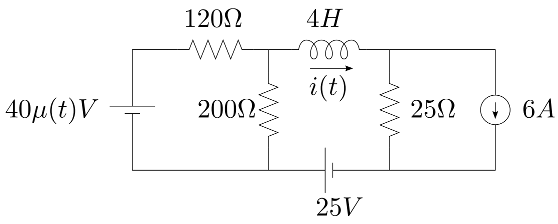
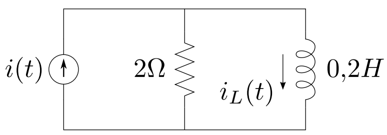
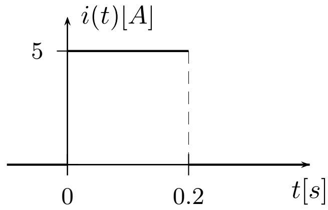


Figura 8: Encontrar $i(t)$ para $t > 0$.

10. Encontrar la respuesta total del circuito de la figura 9a.



(a)



(b)

Figura 9: (a) Circuito RL paralelo excitado por (b) una función pulso.

11. Utilizando capacitores, resistencias, una fuente de $12V$, un pulsador y un comparador de tensión como el de la figura 10, diseñar un temporizador para luz de pasillo de $10s$ de duración. La salida del comparador es

$$v_{out} = \begin{cases} 12V & \text{si } v_1(t) > v_2(t) \\ 0V & \text{si } v_1(t) < v_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

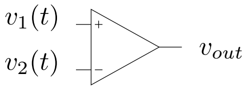


Figura 10: Temporizador para luz de pasillo.

12. En el circuito de la figura 11 el capacitor C_1 tiene una carga inicial $Q_1 = q_{C_1}(0) = 300 \times 10^{-6}\,C$ según la polaridad indicada. Si se cierra el interruptor en $t = 0$, utilizando las referencias señaladas en el circuito se pide encontrar:

a. la corriente $i(t)$

b. las tensiones $v_{C_1}(t)$, $v_R(t)$ y $v_{C_2}(t)$

c. graficar las tres tensiones en un mismo sistema de ejes

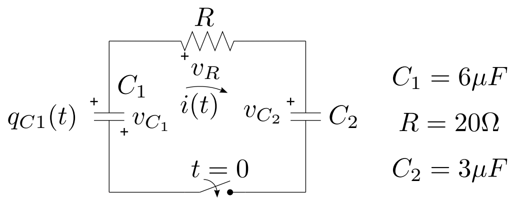


Figura 11: Evolución de la tensión natural en un par de capacitores.

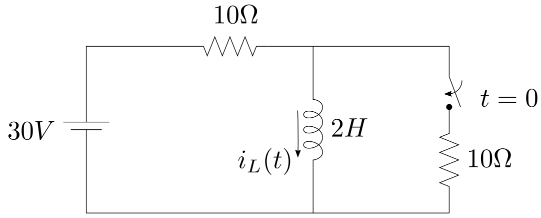


Figura 12: Respuesta completa de corriente en RL serie.

13. En el circuito de la figura 12, encontrar y graficar la corriente $i_L(t)$ para todo $t > 0$.

14. Seleccione un valor de L tal que el voltaje del solenoide supere los $20V$, y la magnitud de la corriente del inductor esté por encima de los $500mA$ durante los primeros $25ms$. Calcular además la energía almacenada en la bobina en el momento que se abre el interruptor (figura 13).

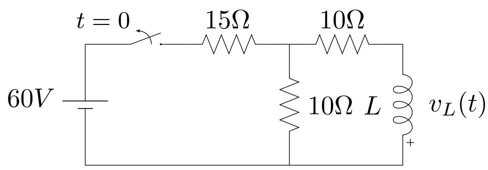


Figura 13: Calcular el valor de L.

15. Hallar para $t > 0$ la $i(t)$ mostrada en la figura 14.

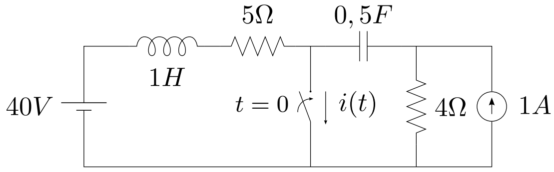
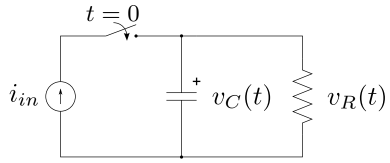


Figura 14: Encontrar $i(t)$ para $t > 0$.

16. El circuito de la fig. 15 se conecta en $t = 0$, encontrar la respuesta $v_C(t)$ para $t > 0$.



$i_{in} = 10\,\text{sen}(2\pi 50\,t)$

$C = 10000\mu F$

$R = 20\Omega$

Figura 15: Encontrar $v_C(t)$ para $t > 0$.

17. Hallar, utilizando el método de superposición, la corriente $i_L(t)$ y la tensión $v_C(t)$ del circuito de la figura 16 para $t > 0$.

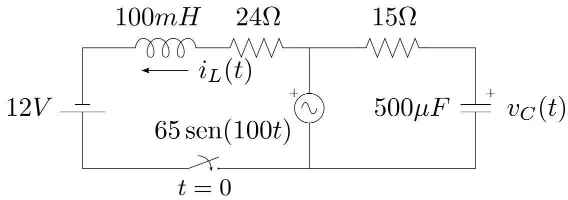


Figura 16: Encontrar $i_L(t)$ y $v_C(t)$ para $t > 0$.

18. Determinar la tensión del capacitor $v_C(t)$ y la corriente $i(t)$ del circuito de la figura 17 para todo $t > 0$ si el interruptor se conecta a la posición 1 en $t = 0$ y se pasa a la posición 2 en $t = 1s$.

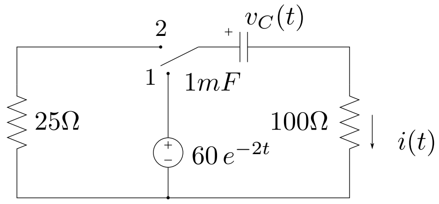
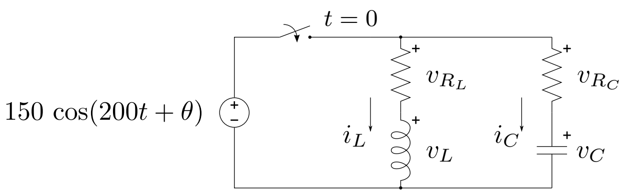


Figura 17: Circuito RC con fuente exponencial.

19. Encontrar la respuesta completa de tensión de cada componente del circuito de la figura 18. En $t = 0$ el ángulo de fase de la alimentación es $\theta = 30°$.



$R_L = 22\Omega$

$R_C = 22\Omega$

$C = 0,1\mu F$

$L = 100mH$

Figura 18: Encontrar las tensiones de cada elemento para $t > 0$.

20. Del circuito de la figura 19 determinar para $t = 0^+$ los valores $v_C(0^+)$, $v_L(0^+)$, $i_C(0^+)$ e $i_L(0^+)$ según las referencias que se indican en el circuito. En $t = 0$ el ángulo de fase de la alimentación es $\theta = 60°$.

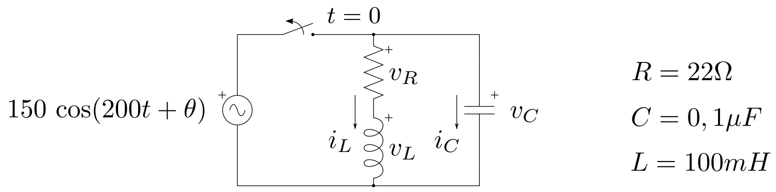


Figura 19: Hallar los valores iniciales de tensión y corriente.

21. Calcular la tensión del capacitor del circuito de la figura 20 en el dominio del tiempo aplicando superposición.

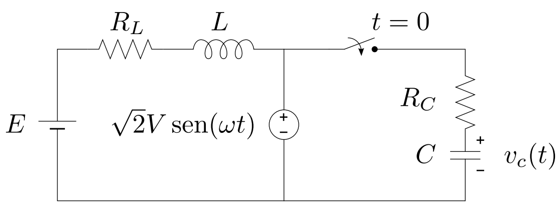


Figura 20: Respuesta completa por superposición.

22. Para el circuito de la figura 21 se pide:

- Encontrar la corriente $i_L(t)$ para $t > 0$.
- Calcular el valor eficaz del régimen permanente de esta corriente.

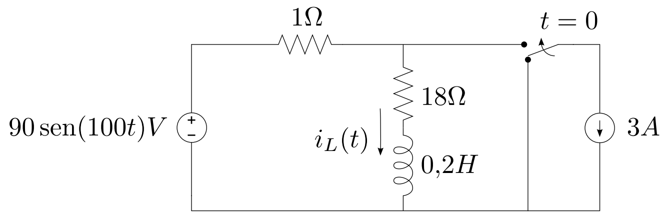


Figura 21: Corriente en el inductor.

23. Encontrar la respuesta completa de tensión en el capacitor y corriente en el inductor para $t > 0$ del circuito de la figura 22, e indicar el tipo de amortiguamiento del sistema.

24. En un circuito como el de la figura 23 con dos elementos que almacenan energía, se conoce como resistencia crítica R_c al valor resistivo para el cuál la respues-

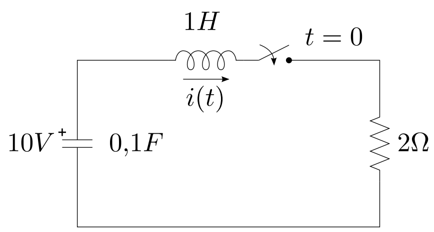


Figura 22: Cálculo de la respuesta natural.

ta del circuito es críticamente amortiguada. Encontrar dicho valor crítico de resistencia para que $v_C(t)$ en el siguiente circuito sea críticamente amortiguada.

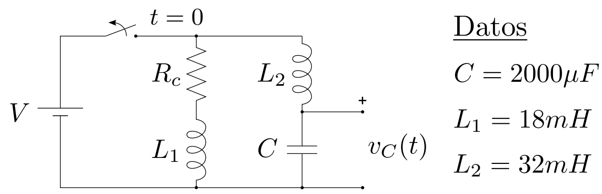


Figura 23: Resistencia crítica.

25. Se encuentra que las ecuaciones de equilibrio de un circuito de 2° orden son

$$v(t) + 8i(t) + 2\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad ; \quad i(t) = \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

de donde la respuesta general de corriente es $i(t) = A\,e^{-t} + B\,e^{-3t}$. Si $i(0) = 1A$ y $v(0) = 10V$, hallar las constantes A y B.

26. Determinar la tensión del capacitor de la figura 24 para $t > 0$ si al abrir el interruptor en $t = 0$ el ángulo de fase de la alimentación es $\theta = 60°$.

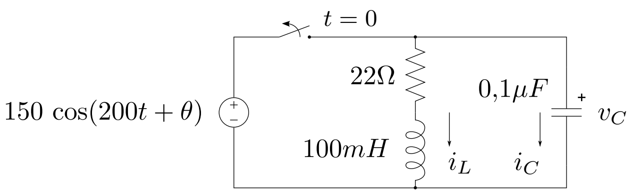


Figura 24: Hallar la tensión del capacitor.

27. Encontrar la corriente $i_L(t)$ y la tensión $v_C(t)$ del circuito de la fig. 25 para todo $t > 0$ según las referencias.

28. Calcular $v_C(t)$ para $t > 0$ según la referencia indicada en el circuito de la figura 26.

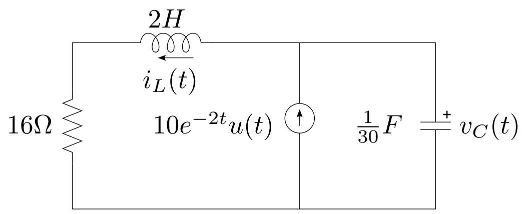


Figura 25: Circuito *RLC* con fuente de corriente.

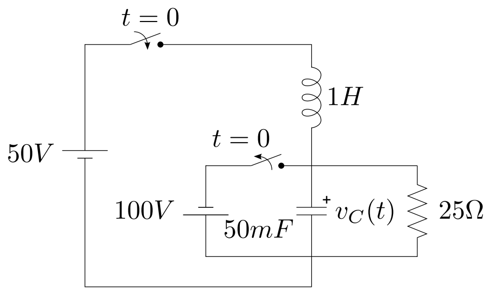


Figura 26: Circuito *RLC* con excitación constante.

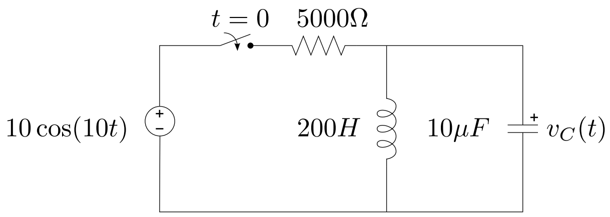


Figura 27: Circuito *RLC* excitado con señal sinusoidal.

29. Encontrar la respuesta completa de la tensión $v_C(t)$ para $t > 0$ del circuito de la figura 27 operando en el dominio del tiempo.

30. La respuesta natural para $t > 0$ del circuito de la figura 28 es $i_n = Ae^{-t}+Be^{-2t}$

a. determinar la respuesta completa $i(t) = i_n(t) + i_f(t)$ para $t > 0$

b. particularizar.

31. Para el circuito de la figura 29 encontrar $v_o(t)$ para $t > 0$. Resolver en el dominio del tiempo.

32. En el circuito de la figura 30 se pide:

a. calcular la tensión del capacitor $v_C(t)$ para $t > 0$.

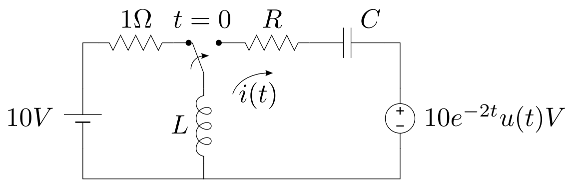


Figura 28: *RLC* en régimen transitorio.

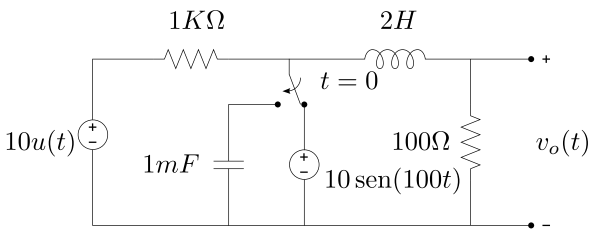


Figura 29: Régimen transitorio en *RLC*

b. deducir del circuito cuál es el valor de la tensión del capacitor $v_c(t)$ para $t = 0$ y para $t \to \infty$, verificando que se cumple con estos valores en la expresión de $v_C(t)$ obtenida antes.

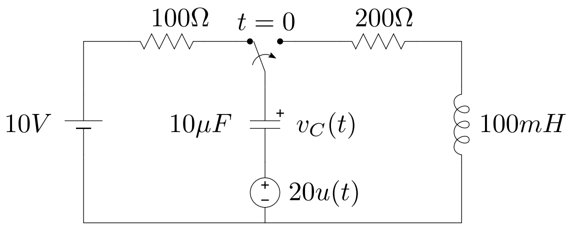


Figura 30: Circuito con respuesta transitoria

33. Para el circuito de la figura 31 se pide encontrar $i_L(t) \forall t > 0$.

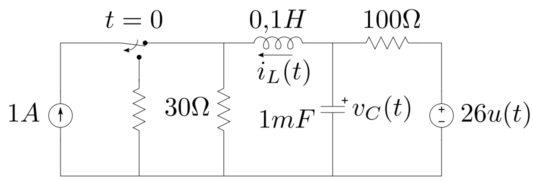


Figura 31: *RLC* en régimen transitorio.

34. Encontrar la tensión $v_C(t)$ para $t > 0$ del circuito de la figura 32. Calcular la solución numérica con $V = 100V$, $I = 5A$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 100\Omega$, $L = 0{,}5H$ y $C = 0{,}001F$.

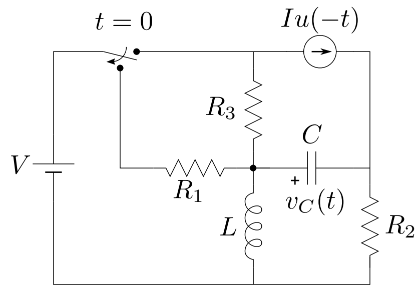


Figura 32: Cálculo de la tensión del capacitor $v_C(t)$ para $t > 0$.

Soluciones

Ejercicio 1 Planteo

La figura 33a muestra el circuito de la figura 1 para $t > 0$. Según las referencias indicadas la LKV queda

$$v_C(t) - v_R(t) = 0, \tag{2}$$

y la relación tensión-corriente para la resistencia y el capacitor

$$v_R(t) = -Ri_C(t) \tag{3}$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

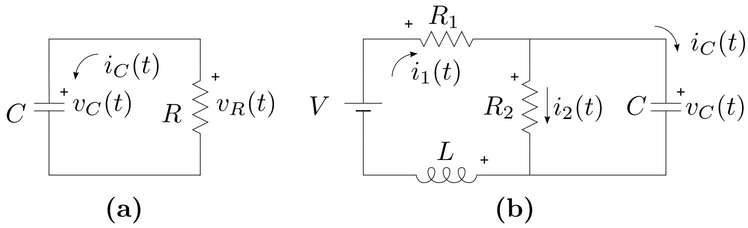


Figura 33: Circuitos para el planteo de la respuesta $v_C(t)$.

Luego, reemplazando (3) y (4) en (2), la ecuación diferencial que describe la respuesta de la tensión del capacitor $v_C(t)$ queda

$$\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v_C(t) = 0 \tag{5}$$

donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo. (5) es una ecuación diferencial de primer orden homogénea, cuya solución general es

$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau}[V], \tag{6}$$

que describe la respuesta natural de la tensión del capacitor para $t > 0$. Para particularizar la solución general dada en (6) es necesario conocer las condiciones iniciales del circuito, o sea, para este caso la tensión del capacitor en $t = 0$, $v_C(0)$.

Para el cálculo de la condición inicial del capacitor se analiza el circuito para $t < 0$ de la figura 33b. Aplicando LKV y LKI, y observando que el circuito se encuentra en régimen permanente (es decir que $i_C = 0$ y $v_L = 0$) se tiene

$$\begin{aligned} V - v_{R_1} - v_{R_2} - \cancel{v_L} &= 0 \\ v_{R_2} - v_C &= 0 \\ i_1 - i_2 - \cancel{i_C} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Luego, utilizando las relaciones tensión-corriente en las resistencias $v_{R_1} = R_1 i_1$ y $v_{R_2} = R_2 i_2$, las ecuaciones dadas en (7) queda

$$\begin{aligned} V - R_1 i_1 - R_2 i_2 &= 0 \\ R_2 i_2 - v_C &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $i_1 = i_2$, la tensión del capacitor en $t = 0$ es

$$v_C(0) = V \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{8}$$

Resolución numérica

La constante de tiempo es $\tau = 3s$, por lo que la solución natural general queda

$$v_C(t) = Ae^{-t/3}[V].$$

Luego, la condición inicial del capacitor es

$$v_C(0) = 80V \frac{12K\Omega}{4K\Omega + 12K\Omega} = 60V.$$

Finalmente, la solución particular de la tensión del capacitor es

$$v_C(t) = 60e^{-t/3}[V].$$

Ejercicio 3 Planteo

La respuesta i_L para $t > 0$ está dada por la ODE que resulta de aplicar LKV a la malla RL (figura 34b). Suponiendo todas caídas de tensión según el sentido de circulación de la corriente, la ecuación de malla será

$$v_{R10} + v_{R10} + v_L = 0 \tag{9}$$

$$R_{eq} i_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{R_{eq}}{L} i_L + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{11}$$

donde $R_{eq} = 20\Omega$. Luego la solución general será

$$i_L = Ae^{-\frac{R_{eq}}{L}t} \tag{12}$$

Para particularizar esta respuesta general se debe encontrar A. Para esto, analizamos el circuito en el entorno $0^- < t < 0^+$ donde se sabe por condición de continuidad de la corriente en el inductor que

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \tag{13}$$

En $t = 0^-$ la fuente de corriente se encuentra aún conectada al circuito como se muestra la figura 34a, siguiendo las referencias de corriente de la figura la ecuación de nudo queda

$$i_F = i_R + i_L \Rightarrow i_L = i_F \frac{R10}{R10 + R10} = \frac{i_F}{2} \tag{14}$$

debido a que el inductor se encuentra completamente cargado comportandose como un corto circuito. Finalmente la corriente particularizada será

$$i_L = \frac{i_F}{2} e^{-\frac{R_{eq}}{L} t} \tag{15}$$

Resolución numérica

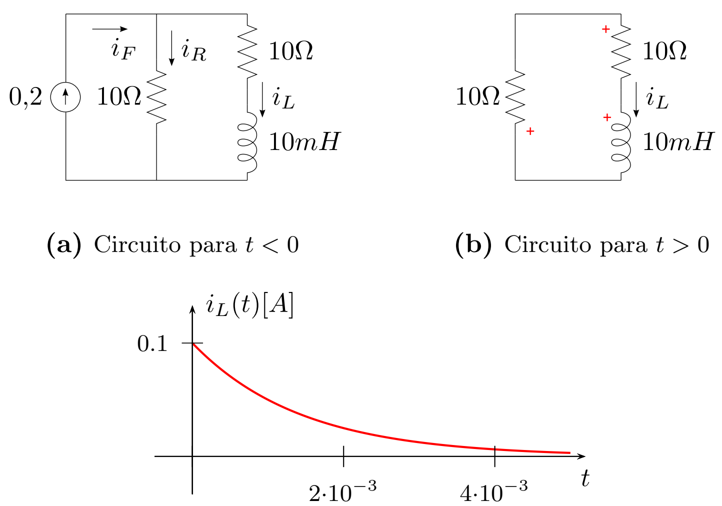
La constante de tiempo τ vale

$$\tau = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{20} = 500 \cdot 10^{-6} [s] \tag{16}$$

y la respuesta particularizada es

$$i_L = 0{,}1 e^{-2000t} [A] \tag{17}$$

En la figura 34c se muestra la gráfica de i_L.



(a) Circuito para $t < 0$

(b) Circuito para $t > 0$

(c) Gráfica de la corriente i_L

Figura 34: Respuesta de un circuito RL para $t > 0$

Ejercicio 4 Solución

$$t' = 2{,}77s, \quad R_x = 4K\Omega$$

Ejercicio 5 Solución

$$i_L(t) = 20 - 17e^{-200t}[A]$$

Ejercicio 10 Planteo

Teniendo en cuenta las referencias elegidas para tensiones y corriente, se plantea la LKV obteniendose

$$v_{C_1}(t) + v_R(t) + v_{C_2}(t) = 0 \tag{18}$$

por ser todas caídas de tensión. Las tensiones en cada capacitor puede expresarse tambien en términos de la corriente de malla $i(t)$, puesto que

$$v_{C_1} = \frac{1}{C_1}\int i(t)\mathrm{d}t$$
$$v_{C_2} = \frac{1}{C_2}\int i(t)\mathrm{d}t$$

llevando a (18) y poniendo la tensión en R tambien en función de $i(t)$ queda

$$\frac{1}{C_1}\int i(t)\mathrm{d}t + R\,i(t) + \frac{1}{C_2}\int i(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{19}$$

La (19) es una ecuación integro-diferencial, que para resolverla se debe derivar ambos miembros respecto a t

$$\frac{1}{C_1}i(t) + R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_2}i(t) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i(t) = 0 \tag{20}$$

el factor $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ se puede reemplazar por un único factor $\frac{1}{C}$ donde

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{21}$$

entonces (20) queda

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{RC} = 0 \tag{22}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver separando variables. Multiplicando ambos miembros de (22) por dt, dividiendo por $i(t)$ y luego despejando

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{i(t)}\left(\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{i(t)}{RC}\right)&=0\\ \frac{\mathrm{d}i(t)}{i(t)}+\frac{i(t)}{RC}\mathrm{d}t&=0\\ \frac{\mathrm{d}i(t)}{i(t)}&=-\frac{1}{RC}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

integrando ambos miembros

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{i(t)}\,\mathrm{d}i(t)&=-\int\frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t\\ \ln i(t)+K_a&=-\frac{1}{RC}\,t+K_b\\ \ln i(t)&=-\frac{1}{RC}\,t+K_c \qquad (23)\end{aligned}$$

donde la constante $K_c=K_b-K_a$ agrupa ambas constantes de integración. La (23), por definición de logaritmo, puede ponerse

$$\begin{aligned}i(t)&=e^{-\frac{1}{RC}\,t+K_c}=e^{-\frac{1}{RC}\,t}e^{K_c}\\ i(t)&=e^{-\frac{1}{RC}\,t}K_0 \qquad (24)\end{aligned}$$

Esta es la solución general de la respuesta $i(t)$ buscada, como se ve es independiente de las cargas iniciales de los capacitores. La constante K_0 permite particularizar la respuesta a cada caso, puesto que en $t=0$ se ve que $i(0)=K_0$.

En este caso particular, analizando en $t=0$ la (18)

$$v_{C_1}(0)+v_R(0)+v_{C_2}(0)=0$$

como $v_{C_2}(0)=0$, entonces la corriente inicial será

$$\begin{aligned}v_{C_1}(0)=-v_R(0)&=-i(0)\,R\\ i(0)&=\frac{-v_{C_1}(0)}{R}\end{aligned}$$

La tensión inicial en el capacitor C_1 esta dada por su carga inicial, $v_{C_1}(0)=\frac{-Q_1}{C_1}$. El signo negativo se debe a que la polaridad de la carga inicial es opuesta a la referencia de tensión v_{C_1}. Entonces

$$\begin{aligned}i(0)&=\frac{-\left(\frac{-Q_1}{C_1}\right)}{R}\\ i(0)&=\frac{Q_1}{RC_1}\end{aligned}$$

que es la constante K_0 para este caso particular. Reemplazando finalmente en (24) se obtiene la $i(t)$ particular buscada

$$\begin{aligned} i(t) &= i(0)\, e^{-\frac{1}{RC}\,t} \\ i(t) &= \frac{Q_1}{RC_1}\, e^{-\frac{1}{RC}\,t} \end{aligned}$$

Las caídas de tensión en cada elemento pueden obtenerse de (18), donde

$$\begin{aligned} v_{C_1}(t) &= \frac{1}{C_1}\int \frac{Q_1}{RC_1}\, e^{-\frac{1}{RC}\,t}\,\mathrm{d}t \\ v_{C_1}(t) &= \frac{1}{C_1}\left(-RC\frac{Q_1}{RC_1}\, e^{-\frac{1}{RC}\,t}\right) + K_1 \end{aligned} \tag{25}$$

y

$$\begin{aligned} v_{C_2}(t) &= \frac{1}{C_2}\int \frac{Q_1}{RC_1}\, e^{-\frac{1}{RC}\,t}\,\mathrm{d}t \\ v_{C_2}(t) &= \frac{1}{C_2}\left(-RC\frac{Q_1}{RC_1}\, e^{-\frac{1}{RC}\,t}\right) + K_2 \end{aligned} \tag{26}$$

Para encontrar K_1 y K_2 se hace $t = 0$, donde $v_{C_1}(0) = \frac{-Q_1}{C_1}$ y $v_{C_2} = 0$

$$\begin{aligned} v_{C_1}(0) &= \frac{1}{C_1}\left(\frac{-Q_1C}{C_1}\right) + K_1 = \frac{-Q_1}{C_1} \\ K_1 &= \frac{1}{C_1}\left(\frac{Q_1C}{C_1}\right) - \frac{Q_1}{C_1} \qquad (27) \\ v_{C_2}(0) &= \frac{1}{C_2}\left(\frac{-Q_1C}{C_1}\right) + K_2 = 0 \\ K_2 &= \frac{1}{C_2}\left(\frac{Q_1C}{C_1}\right) \qquad (28) \end{aligned}$$

Por último, la caída de tensión en R es

$$v_R(t) = R\,i(t) = \frac{Q_1}{C_1}\, e^{-\frac{1}{RC}\,t} \tag{29}$$

Resolución numérica

Recordando que $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ se calcula primero el τ del sistema

$$\tau = RC = 20\,\frac{6\times10^{-6}\,3\times10^{-6}}{6\times10^{-6}+3\times10^{-6}} = 40\times10^{-6}$$

Reemplazando ahora en (25) por los datos numéricos

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{300\times10^{-6j}}{20\cdot 6\times10^{-6}}\,e^{-2{,}5\times10^{4}t} \\ i(t) &= 2{,}5\,e^{-2{,}5\times10^{4}t} \end{aligned} \tag{30}$$

Luego las constantes K_1 y K_2 de las tensiones (ecuaciones (27) y (28))

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{6\times10^{-6}}\left(\frac{300\times10^{-6}\cdot 2\times10^{-6}}{6\times10^{-6}}\right)-\frac{300\times10^{-6j}}{6\times10^{-6}} \\ K_1 &= -33{,}333 \\ K_2 &= \frac{1}{3\times10^{-6}}\left(\frac{300\times10^{-6}\cdot 2\times10^{-6}}{6\times10^{-6}}\right) \\ K_2 &= 33{,}333 \end{aligned}$$

con estas constantes se obtienen las caídas de tensión v_{C_1} y v_{C_2} (ecuaciones (25) y (26))

$$\begin{aligned} v_{C_1}(t) &= \frac{1}{6\times10^{-6}}\left(-40\times10^{-6}\frac{300\times10^{-6}}{20\cdot 6\times10^{-6}}\,e^{-2{,}5\times10^{4}t}\right)-33{,}333 \\ v_{C_1}(t) &= -16{,}667\,e^{-2{,}5\times10^{4}t}-33{,}333 && (31) \\ v_{C_2}(t) &= \frac{1}{3\times10^{-6}}\left(-40\times10^{-6}\frac{300\times10^{-6}}{20\cdot 6\times10^{-6}}\,e^{-2{,}5\times10^{4}t}\right)+16,667 \\ v_{C_2}(t) &= -33{,}333\,e^{-2{,}5\times10^{4}t}+33{,}333 && (32) \end{aligned}$$

y finalmente la caída en R (ecuación (29))

$$\begin{aligned} v_R(t) &= \frac{300\times10^{-6}}{6\times10^{-6}}\,e^{-2{,}5\times10^{4}t} \\ v_R(t) &= 50\,e^{-2{,}5\times10^{4}t} \end{aligned} \tag{33}$$

En la fig. 35 se grafican las tres tensiones dadas por (31), (32) y (33) y la corriente (30)

Ejercicio 22 Planteo

El circuito dado en la figura 22 para $t>0$ se muestra en la figura 36. Aplicando la LKV de la malla dadas las referencias indicadas, se tiene

$$v_C(t)-v_L(t)-v_R(t)=0. \tag{34}$$

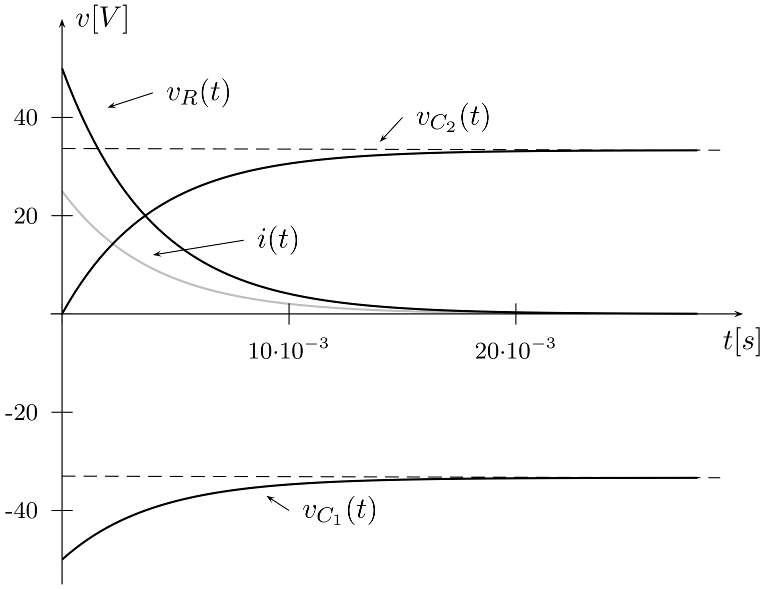


Figura 35: Caídas de tensión en cada elemento y corriente total del ejercicio 5.

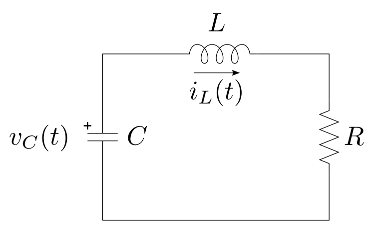


Figura 36: Circuito para $t > 0$ para el cálculo de la respuesta natural.

Además, las relaciones entre la corriente y las diferentes caídas de tensiones en los elementos son

$$v_R(t) = Ri_L(t) \tag{35}$$

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{36}$$

$$i_L(t) = -C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{37}$$

Reemplazando (35) y (36) en (34), se tiene

$$v_C(t) - L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} - Ri_L(t) = 0. \tag{38}$$

(38) junto a (37) forman el sistema de ecuaciones diferenciasles de primer orden a resolver, o sistema "acoplado", cuyas incógnitas son $i_L(t)$ y $v_C(t)$.

A partir del sistema de ecuaciones diferencias de primer orden ((37) y (38)) se puede plantear la ecuación diferencial de segundo orden en términos de $v_C(t)$ o bien $i_L(t)$. La ecuación diferencial en términos de la tensión del capacitor se obtiene de reemplazar (37) en (38), y queda

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}v_C(t) = 0. \tag{39}$$

La ecuación diferencial en términos de la corriente del inductor se obtiene de despejar $v_C(t)$ de (38) y reemplazarlo en (37), y queda

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_L(t) = 0. \tag{40}$$

(39) y (40) son ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneas, con iguales coeficientes, como es de esperar.

Resolviendo la tensión del capacitor a partir de (39) la corriente del inductor se puede calcular de (37). O bien, resolviendo la corriente del inductor de (40) la tensión del capacitor se puede calcular de (38).

La solución homogénea general de (39) es

$$v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} [V], \tag{41}$$

donde s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación características dada por

$$s^2 + ps + q = 0, \tag{42}$$

con $p = R/L$ y $q = 1/LC$. En (41) los coeficientes A_1 y A_2 determinan la solución particular de la tensión del capacitor y se calculan a partir de la condición inicial de la tensión del capacitor y corriente del inductor.

Dada la tensión del capacitor a $t = 0$, valuando la solución dada en (41), se tiene

$$A_1 + A_2 = v_C(0), \quad \text{con} \quad v_C(0) = v_C(0^-) = v_C(0^+), \tag{43}$$

lo cual fija el valor de tensión del capacitor a comienzo del régimen transitorio. Luego, la corriente del inductor determina la derivada de la tensión del capacitor en dicho punto. De (37) valuada en $t = 0$ se tiene

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -\frac{i_L(0)}{C}, \quad \text{con} \quad i_L(0) = i_L(0^-) = i_L(0^+). \tag{44}$$

De (44) y (41) se tiene

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2 = i_L(0). \tag{45}$$

Por último, conociendo las condiciones iniciales de ambos elementos, se obtiene A_1 y A_2 a partir de (43) y (45).

Resolución numérica

Dados los valores de R, L y C, la ecuación característica de (42) es

$$s^2 + 2s + 10 = 0, \tag{46}$$

cuyas raíces son $s_{1,2} = -1 \pm j3$, por lo que la respuesta es subamortiguada. Luego, la solución general de la ecuación diferencial (39) dada en (41) es

$$v_C(t) = A_1 e^{(-1+j3)t} + A_2 e^{(-1-j3)t}, \tag{47}$$

o bien

$$v_C(t) = e^{-t} \left(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t \right), \tag{48}$$

que es la respuesta natural.

Para obtener la solución particular se utilizan los valores de las condiciones iniciales $v_C(0) = 10V$ y $i_L(t) = 0A$. Las condiciones ajustan tanto la magnitud como la derivada de (48) para $t = 0$. Valuando (48) en $t = 0$ se tiene que $B_1 = 10$, y

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -10 + 3B_2 = 0, \tag{49}$$

por lo que $B_2 = \frac{10}{3}$. Por lo tanto, la respuesta natural de la tensión del capacitor particular es

$$v_C(t) = e^{-t} \left(10 \cos 3t + \frac{10}{3} \operatorname{sen} 3t \right) [V]. \tag{50}$$

Y la corriente del inductor, usando (37), es

$$i_L(t) = -\frac{10}{3} e^{-t} \operatorname{sen}(3t) [A]. \tag{51}$$

En las soluciones dadas por (50) y (51) se verifican las condiciones iniciales.

Ejercicio 23 Planteo

Para $t > 0$ la suma de las tensiones en la malla es

$$\begin{aligned} v_C(t) + v_{L_1}(t) + v_{R_c}(t) + v_{L_2}(t) &= 0 \\ v_C(t) + L_1 \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R_c\, i(t) + L_2 \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned} \tag{52}$$

la corriente en la malla $i(t)$ con respecto a la tensión en el capacitor es

$$i(t) = C \frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} \tag{53}$$

de donde

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{54}$$

reemplazando la (53) y la (54) en (52) nos queda solo en función de $v_C(t)$

$$\begin{aligned} v_C(t) + (L_1 + L_2)\, C\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + R_c\, C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R_c}{(L_1 + L_2)}\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(L_1 + L_2)\, C}\, v_C(t) &= 0 \end{aligned}$$

la ecuación característica de esta ec. dif. es de la forma

$$s^2 + p\, s + q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad s_{1-2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4\, q}}{2}$$

Para una respuesta criticamente amortiguada el discriminante de esta última ecuación debe ser cero, entonces debe ser

$$\begin{aligned} p^2 &= 4\, q \\ \left[\frac{R_c}{(L_1 + L_2)}\right]^2 &= 4\,\frac{1}{(L_1 + L_2)\, C} \\ R_c^2 &= 4\,\frac{L_1 + L_2}{C} \end{aligned}$$

Resolución numérica

Reempalzando los valores de capacidad e inductancias según los datos

$$R_c^2 = 4\,\frac{18 \times 10^{-3} + 32 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} = 100$$

de donde finalmente

$$R_c = 10\Omega$$

Ejercicio 26 Solución

$$\begin{aligned} i_L(t) &= 25e^{-5t} - 75e^{-3t} + 50e^{-2t}[A] \\ v_C(t) &= 300e^{-5t} - 900e^{-3t} + 600e^{-2t}[V] \end{aligned}$$