TRAZADO DE DIAGRAMA POLAR Y APLICACIÓN DE CRITERIO DE NYQUIST

1. TRAZADO DE DIAGRAMA POLAR.

La función de transferencia $F_{(P)}$, tendrá el formato dado por la siguiente expresión generalizada:

$$F_{(P)} = K_{TOTAL} \bullet \frac{P^{\pm K} (A_0 \bullet P^m + A_1 \bullet P^{m-1} + A_2 \bullet P^{m-2} + \cdots + A_m)}{(B_0 \bullet P^n + B_1 \bullet P^{n-1} + B_2 \bullet P^{n-2} + \cdots + B_m)}$$

Es decir que la función de transferencia estará formada por una constante (K_{TOTAL}), multiplicada por ceros o polos al origen de grado múltiple, multiplicados por un polinomio decreciente de grado "m" y divididos por un polinomio decreciente de grado "n". Es decir:

$$F_{(P)} = KTE * \frac{CEROS_{ORIGEN} * (POLINOMIO \cdot DECRECIENTE \cdot GRADO \cdot " m")}{POLOS_{ORIGEN} * (POLINOMIO \cdot DECRECIENTE \cdot GRADO \cdot " n")}$$

Recordar que para que $F_{(P)}$ sea una función realizable, el polinomio del numerador debe ser de igual o menor grado que el polinomio del denominador.

PASO 1:

Determinar el punto de inicio de la curva que representa el diagrama polar. Para ello evaluamos $F_{(P)}$ para P que tiende a cero .

$$F_{(p)} \Big|_{p \to 0} =$$

Se pueden presentar tres casos de acuerdo a las características de la función de transferencia $F_{(P)}$:

A) La función de transferencia $F_{(P)}$ no tiene ni ceros ni polos en el origen.
B) La función de transferencia $F_{(P)}$ tiene ceros o polos en el origen y las constantes A_m y B_n de los polinomios del numerador y denominador respectivamente, son ambas positivas o ambas negativas.
C) La función de transferencia $F_{(P)}$ tiene ceros o polos en el origen y las constantes A_m y B_n de los polinomios del numerador y denominador respectivamente, son una positiva y la otra negativa o viceversa.

CASO A: Si la función de transferencia $F_{(P)}$ no tiene ni ceros ni polos en el origen, al hacer tender la variable P a cero tendremos :

$$F_{(p)} \Big|_{p \to 0} = Constante$$

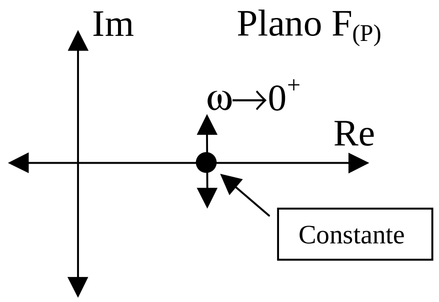
Para la función generalizada:

$$F_{(p)} \Big|_{p \to 0} = K_{TOTAL} \bullet \frac{A_m}{B_n} = Número$$

En este caso la gráfica de $F_{(P)}$ comenzará sobre el eje real, del plano de la función en un valor determinado por la constante obtenida.
Si se realiza el análisis mediante la frecuencia compleja (ω), hacemos el cambio de **p** por **jω** y obtendremos:

$$F_{(P)} \rightarrow F_{(j\omega)}$$

$$F_{(j\omega)}\big|_{\omega\rightarrow 0} = |\text{Constante}|\ |\underline{\ 0^\circ}$$



Con lo que observamos el mismo resultado, la curva comienza sobre el eje real.

CASO B-1: La función de transferencia $F_{(P)}$ tiene uno o más ceros en el origen y las constantes A_m y B_n de los polinomios del numerador y denominador respectivamente, son ambas positivas o ambas negativas. En este caso

$$F_{(P)}\big|_{P\rightarrow 0} = 0$$

Para conocer la fase, veamos el gráfico del plano de la variable P, en donde imaginamos que se hace un *"zoom"* del origen, tal como muestra la Figura 2.

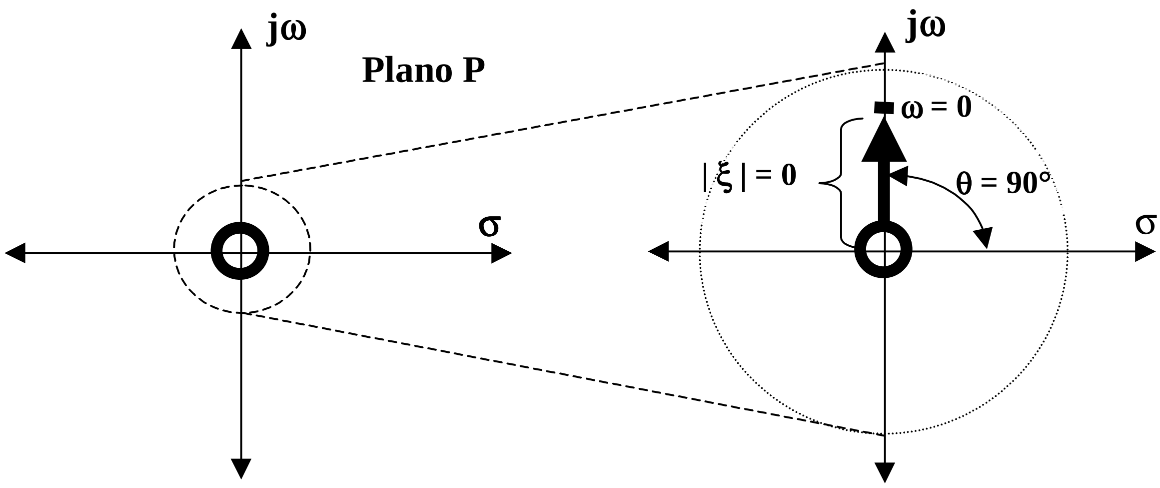


FIGURA 2. Zoom del origen, del plano de la variable "p".

Representando el o los ceros al origen en forma polar tendremos:

$$F_{(P)}\Big|_{p\rightarrow 0} = K_{TE\backslash} \bullet (\xi \bullet e^{j\theta})^K = |0| \cdot e^{j\theta K} = |0| \cdot |\underline{90^\circ \cdot K}$$

Es decir que para P→0 si existen ceros en el origen, el módulo valdrá siempre cero y la fase será de 90° multiplicados por la cantidad de ceros existentes. La Figura 3 da una idea de cómo será el inicio de la curva en el plano $F_{(p)}$, de acuerdo a la cantidad de ceros en el origen de la función de transferencia.

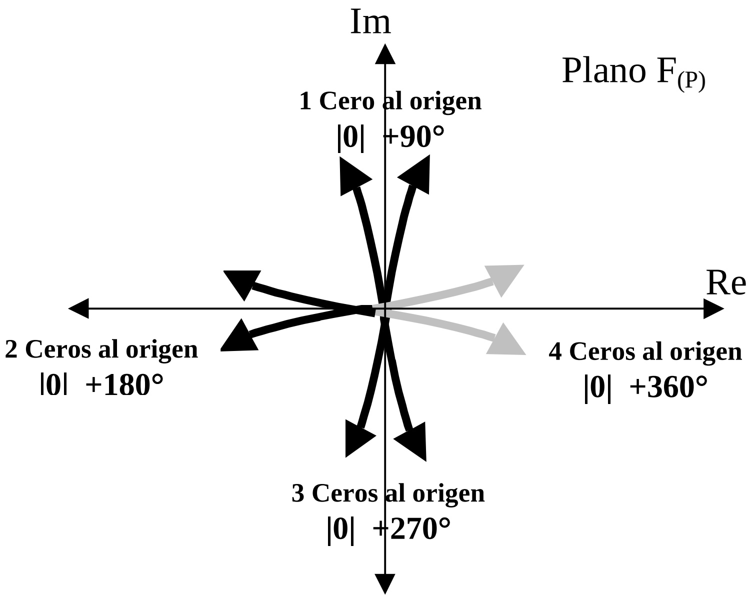


FIGURA 3. Comienzo de la curva de acuerdo a la cantidad de ceros en el origen de $F_{(P)}$.

CASO B-2: La función de transferencia $F_{(P)}$ tiene uno o más polos en el origen y las constantes A_m y B_n de los polinomios del numerador y denominador respectivamente, son ambas positivas o ambas negativas. En este caso

$$F_{(P)}\Big|_{P\to 0} = \frac{K_{TE}}{P^{K}}\Big|_{P\to 0} = \infty$$

Para conocer la fase, veamos el gráfico del plano de la variable P, en donde imaginamos que se hace un *"zoom"* del origen, tal como muestra la Figura 4.

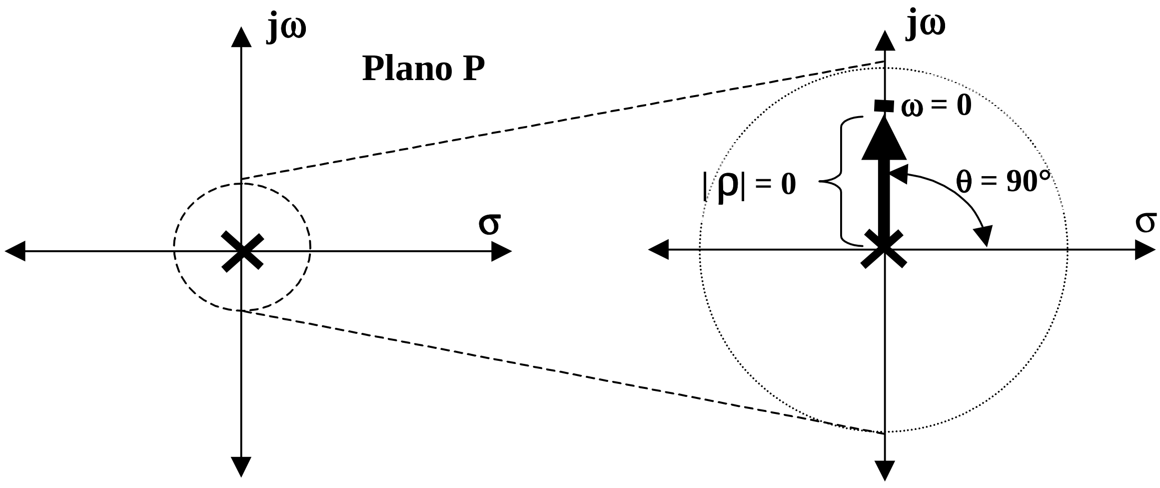


FIGURA 4. Zoom del origen, del plano de la variable "P".

Teniendo en cuenta la Figura 4, podemos representar el o los polos al origen, en forma polar del siguiente modo:

$$F_{(P)}\Big|_{p\to 0} = \frac{K_{TE}}{(\rho \bullet e^{j\theta})^{K}}\Big|_{p\to 0} = |\infty| \cdot e^{-j\theta K} = |\infty| \cdot \underline{|-90° \cdot K}$$

Es decir que para P→0 si existen polos en el origen, el módulo valdrá siempre infinito y la fase será de -90° multiplicados por la cantidad de polos existentes. La Figura 5 da una idea de cómo será el inicio de la curva en el plano $F_{(p)}$, de acuerdo a la cantidad de polos en el origen de la función de transferencia.

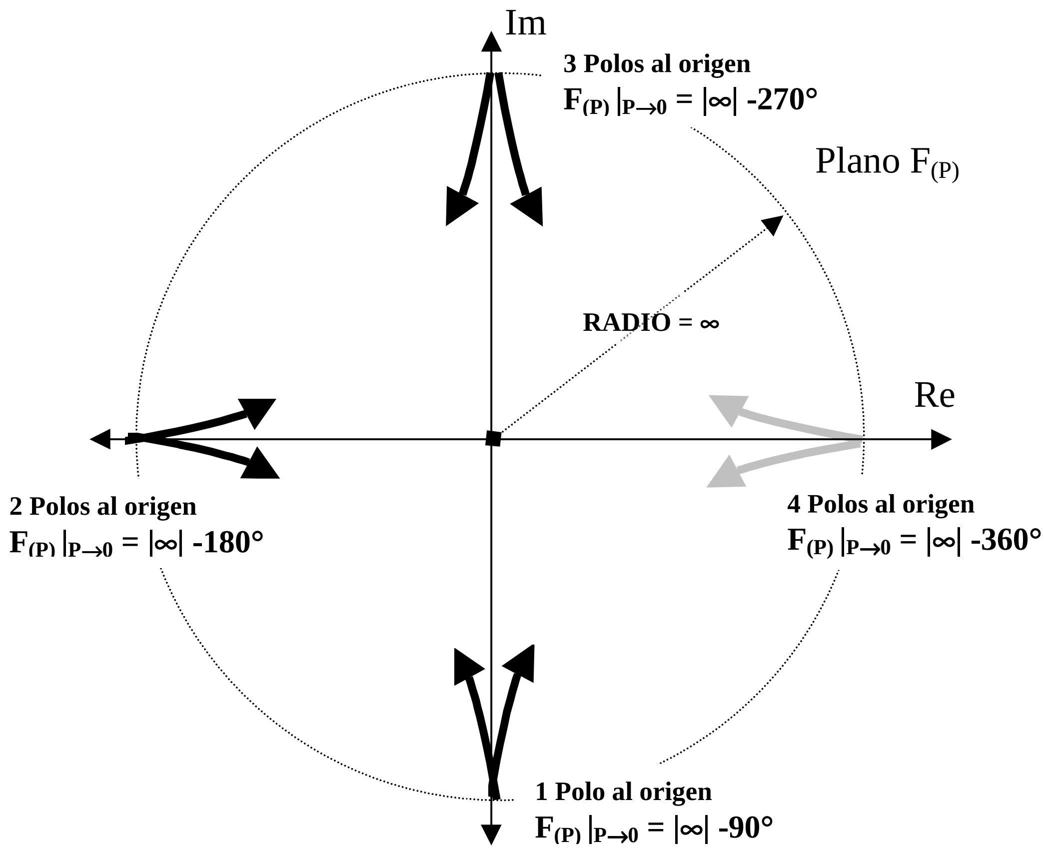


FIGURA 5. Comienzo de la curva de acuerdo a la cantidad de polos en el origen de $F_{(P)}$.

CASO C: Si La función de transferencia $F_{(P)}$ tiene ceros o polos en el origen y las constantes A_m y B_n de los polinomios del numerador y denominador respectivamente, son una positiva y la otra negativa o viceversa, para la variable P que tiende a cero, tendremos uno de los dos casos siguientes:

$$F_{(P)}\Big|_{p\to 0} = -K_{TE\backslash} \bullet (\xi \bullet e^{j\theta})^{K} = -|0| \cdot e^{j\theta K} = -|0| \cdot \underline{|90° \cdot K} = |0| \cdot \underline{|-90° \cdot K}$$

$$F_{(P)}\Big|_{p\to 0} = \frac{-K_{TE}}{(\rho \bullet e^{j\theta})^{K}}\Big|_{p\to 0} = -|\infty| \cdot e^{-j\theta K} = -|\infty| \cdot \underline{|-90° \cdot K} = |\infty| \cdot \underline{|+90° \cdot K}$$

PASO 2:

Determinar el punto de final de la curva que representa el diagrama polar. Para ello evaluamos $F_{(P)}$ para P que tiende a infinito.

$$F_{(p)}\Big|_{p\to\infty} =$$

Se pueden presentar dos casos, si la función de transferencia $F_{(P)}$ tiene igual grado en su numerador y denominador, es decir que $m = n$, en la función de transferencia generalizada, el resultado es una constante (K_{TE}):

$$F_{(p)}\Big|_{p\to\infty} = \frac{(A_0 \bullet P^m + A_1 \bullet P^{m-1} + \cdots + A_m)}{(B_0 \bullet P^n + B_1 \bullet P^{n-1} + \cdots + B_n)}\Big|_{P\to\infty} = \frac{A_0 \bullet P^m}{B_0 \bullet P^n}\Big|_{P\to\infty} = \frac{A_0}{B_0} = K_{TE}$$

Si la función de transferencia $F_{(P)}$ tiene menor grado en su numerador, que en su denominador, es decir que $m < n$, en la función de transferencia generalizada, el resultado estará dado por:

$$F_{(p)}\Big|_{p\to\infty} = \frac{K_{TE}}{P^{n-m}}\Big|_{p\to\infty} = \frac{K_{TE}}{\infty} = 0$$

Para conocer la fase, veamos el gráfico del plano de la variable P en la Figura 6.

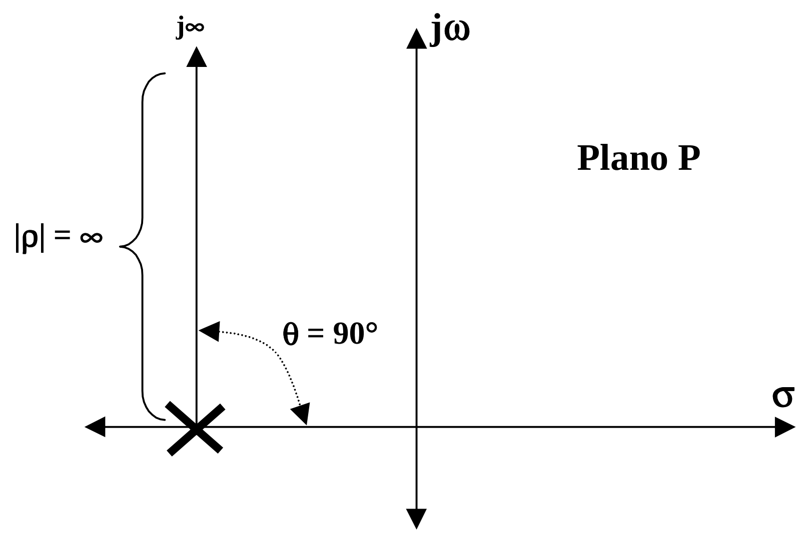


FIGURA 6. Plano P, evaluación de un polo para P→∞ o ω→∞.

Representando el o los polos al origen en forma polar tendremos:

$$F_{(p)}\Big|_{p\to\infty} = \frac{K_{TE}}{(\rho \cdot e^{j\theta})^{n-m}}\Bigg|_{\rho\to\infty} = \left|\frac{K_{TE}}{\infty}\right| \cdot e^{-j\theta(n-m)} = |0| \cdot \underline{|-90° \cdot (n-m)}$$

La Figura 7 muestra la representación del final de la curva en el plano $F_{(P)}$, de acuerdo a la diferencia de grado (n-m) entre denominador y numerador de la función de transferencia dada.

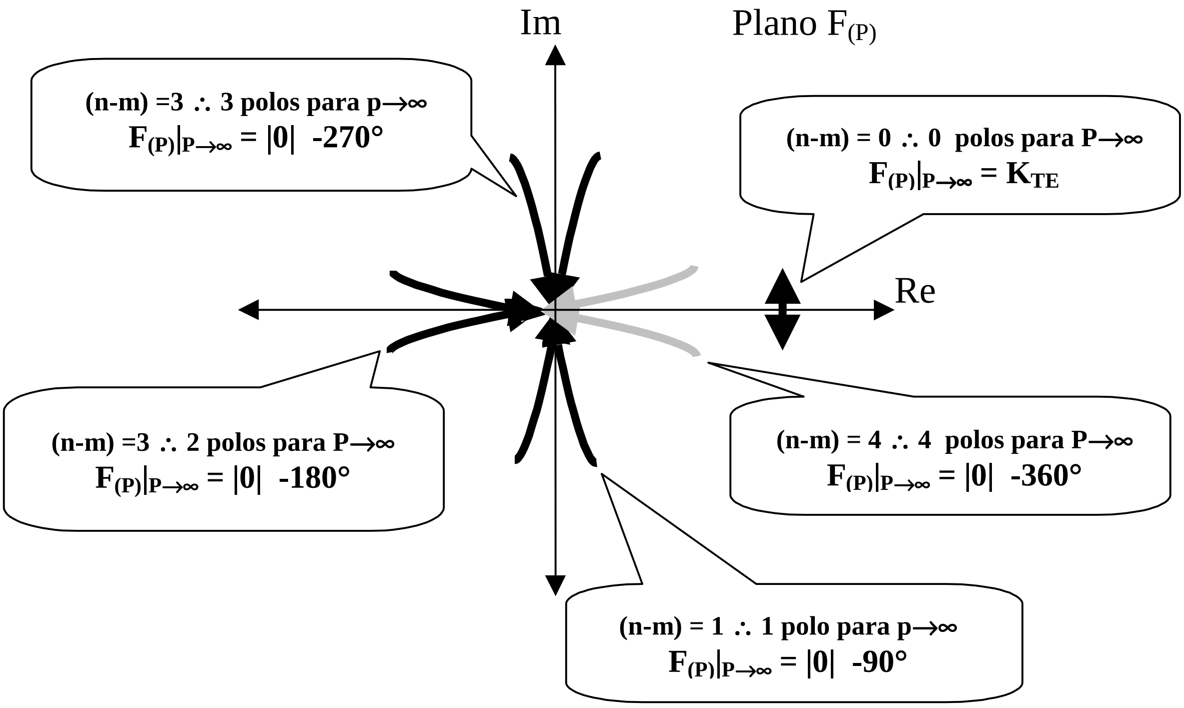


FIGURA 7. Representación del final de la curva en el plano $F_{(P)}$, de acuerdo a la diferencia de grado entre denominador y numerador (n-m) de la función de transferencia.

Si el análisis se realiza cambiando la variable "P" por "jω", tendremos:

$$F_{(j\omega)}\Big|_{\omega\to\infty} = \frac{K_{TE}}{(j\omega)^{(n-m)}}\Bigg|_{\omega\to\infty} = \frac{1}{j^{(n-m)}} \cdot \frac{K_{TE}}{\omega^{(n-m)}}\Bigg|_{\omega\to\infty} = \begin{cases} (n-m)=0 \Rightarrow K_{TE} \\ (n-m)=1 \Rightarrow -j0 = |0| \cdot \angle -90° \\ (n-m)=2 \Rightarrow -0 = |0| \cdot \angle -180° \\ (n-m)=3 \Rightarrow +j0 = |0| \cdot \angle -270° \\ (n-m)=4 \Rightarrow +0 = |0| \cdot \angle -360° \end{cases}$$

Lo cuál es idéntico al resultado mostrado en la Figura 7.

PASO 3: Realizar el cambio de P por jω en la función de transferencia:

$$\mathbf{P \Rightarrow j\omega}$$

$$\mathbf{F_{(P)} \Rightarrow F_{(j\omega)}}$$

PASO 4: Operar la función de transferencia $F_{(j\omega)}$ de forma tal de separar en parte real y parte imaginaria:

$$\mathbf{F_{(j\omega)} = Re|_{\omega} + j\ Im|_{\omega}}$$

PASO 5: Igualar la parte real a cero.

$$\mathbf{Re|_{\omega}=0}$$

Mediante esta operación se identifica el o los valores de la frecuencia ω que hacen cero la parte real. En este análisis se pueden dar uno o más de los siguientes casos:

A) $\mathbf{Re|_{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = 0}$

B) $\mathbf{Re|_{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \infty}$

C) $\mathbf{Re|_{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\text{Numero Positivo}} = \pm\ \text{Numero}}$

D) $\mathbf{Re|_{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\text{Numero Negativo}} = \pm\ j\ \text{Numero}}$

PASO 6: Reemplazar ***el o los valores positivos*** de la frecuencia ω obtenida en el paso anterior, en la parte imaginaria de la función de transferencia, y obtener el o los valores de cortes sobre el eje imaginario.

$$\mathbf{Im|_{\omega\to Re=0} = \text{Número}}$$

NOTA:
Los valores de ω dados por A) y B) en el paso anterior no es necesario evaluarlos pues esta información, se obtiene al realizar los PASOS 1 y 2 , ya que allí se evalúa la función de transferencia para P o ω que tienden a cero y a infinito.
El valor dado por D) no es aplicable pues ***la frecuencia ω es un numero real real***, no puede ser un número imaginario.
Por último del par o pares de valores dados por C), solo evaluamos los positivos, que son los que nos proporcionarán los puntos de corte al eje imaginario para las frecuencias positivas (ω^+), los cortes que realizan sobre el eje imaginario las frecuencia negativas (ω^-), se obtendrán al realizar el trazado del espejo de la curva, en el PASO 9.

PASO 7: Igualar la parte imaginaria a cero.

$$\mathbf{Im|_{\omega}=0}$$

Mediante esta operación se identifica el o los valores de la frecuencia ω que hacen cero la parte Imaginaria. En este análisis en forma similar a lo visto en el PASO 5 se pueden dar uno o más de los siguientes casos, :

A) $\mathbf{Im|_{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = 0}$

B) $\mathbf{Im|_{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \infty}$

C) $\mathbf{Im|_{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\text{Numero Positivo}} = \pm \text{ Numero}}$

D) $\mathbf{Im|_{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\text{Numero Negativo}} = \pm\, j \text{ Numero}}$

PASO 8: Reemplazar ***el o los valores positivos de la frecuencia ω*** obtenida en el paso anterior, en la parte Real de la función de transferencia, y obtener el o los valores de cortes sobre el eje Real.

$$\mathbf{Re|_{\omega \to Im=0} = \text{Número}}$$

NOTA:
Los valores de ω dados por A) y B) en el paso anterior no es necesario evaluarlos pues esta información, se obtiene al realizar los pasos 1 y 2 , ya que alli se evalúa la función de transferencia para P o ω que tienden a cero y a infinito.
El valor dado por D) no es aplicable pues la frecuencia ω es real, no puede ser un número imaginario.
Por último del par o pares de valores dados por C), solo evaluamos los positivos, que son los que nos proporcionarán los puntos de corte al eje imaginario para las frecuencias positivas (ω^+), los cortes que realizan sobre el eje imaginario las frecuencia negativas (ω^{--}), se obtendrán al realizar el trazado del espejo de la curva, en el paso 9.

PASO 9: Con los datos obtenidos en los pasos 1 (Inicio del diagrama), 2 (Final del diagrama), 6 (corte al eje Imaginario) y 8 (corte al eje Real), trazar la curva que representa la función de transferencia para las variaciones de las frecuencias positivas (ω^+), para ello comenzamos trazando desde ω = 0 hasta llegar a ω = ∞. Ver ejemplo generalizado de la Figura 8-a y 8-b.

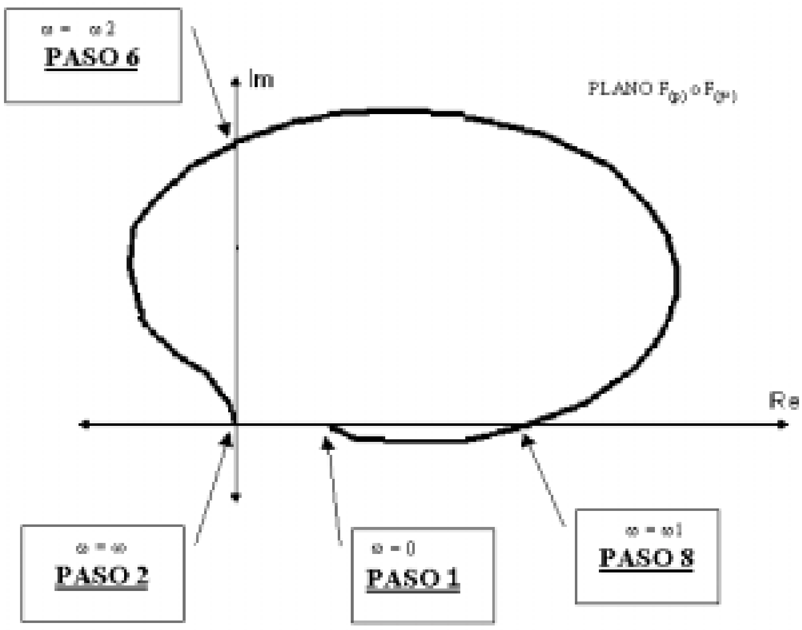


FIGURA 8-a. Diagrama de función de transferencia sin ceros ni polos en el origen.

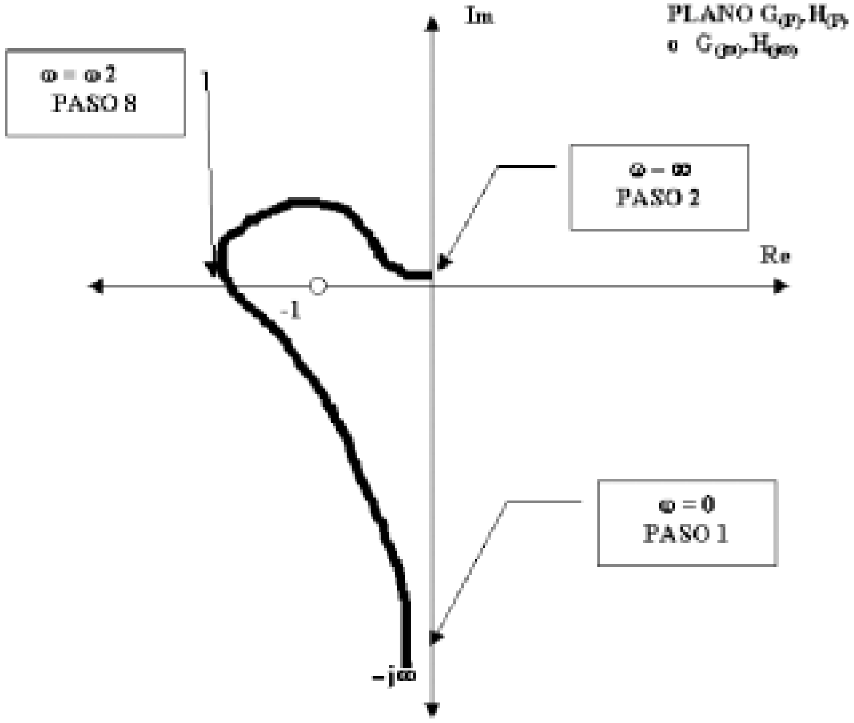


FIGURA 8-b. Diagrama de función de transferencia con un polo en el origen.

Trazamos a continuación, el diagrama correspondiente a las frecuencias negativas, recordando que el trazado del mismo, es espejo sobre el eje real del que corresponde a las frecuencias positivas(1) hacemos el trazado del diagrama completo.

(1)Recordar lo visto cuando se realizó el estudio del trazado de diagramas polares mediante el Método Gráfico

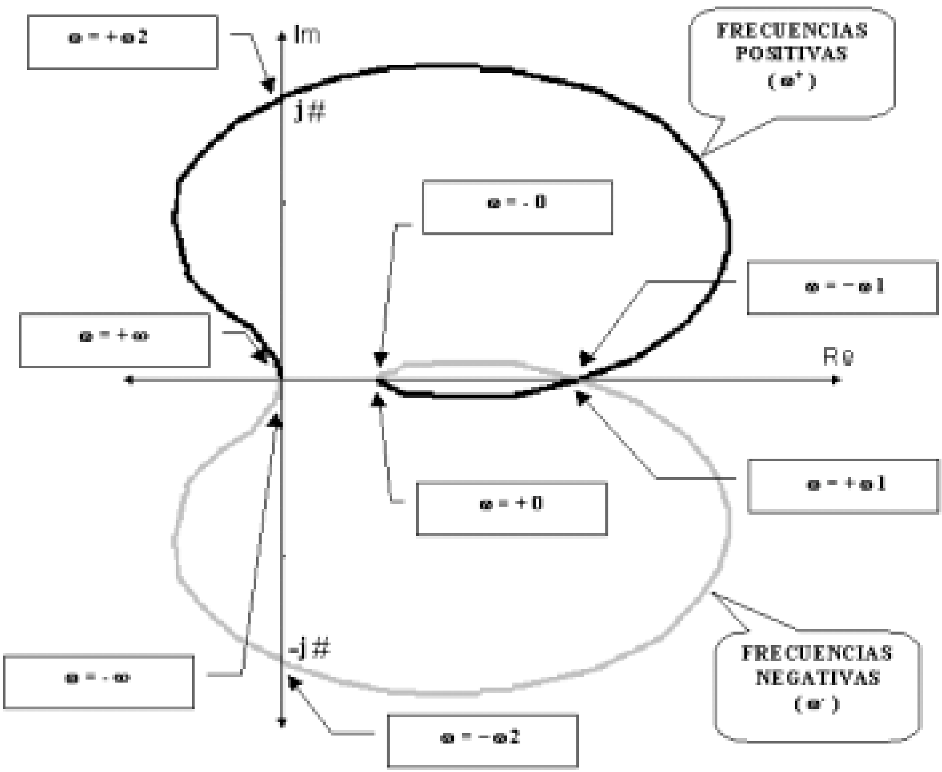


FIGURA 9-a. Trazado completo del diagrama polar para la función de la Figura 8-a.

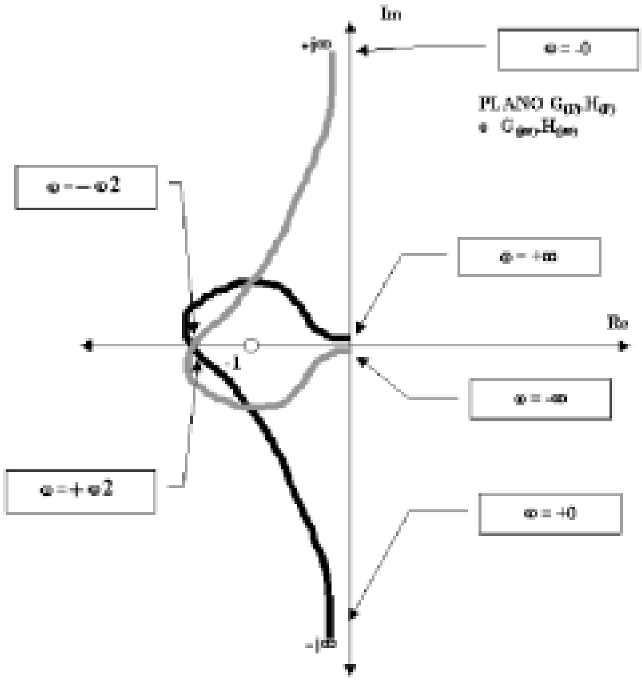


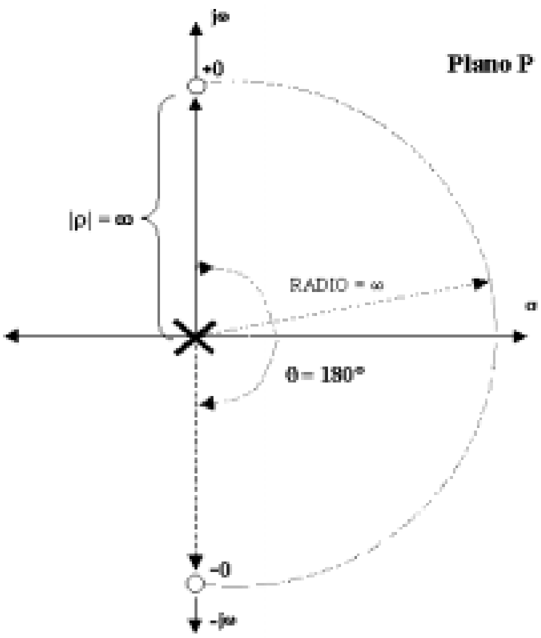
FIGURA 9-b. Trazado completo del diagrama polar para la función de la Figura 8-b.

PASO 10: Cerrar la curva para P o ω = 0.
Este paso se aplicará cuando la función de transferencia tenga uno o más polos en el origen.
Debido a que la función de transferencia $G_{(P)}.H_{(P)}$. tiene polos en el origen, el diagrama polar nos queda abierto entre ω = +0 y ω = -0, tal como puede verse en la Figura 9-b.
Para realizar el estudio de cierre del diagrama para P o ω que tienden a cero, repetimos parte del análisis realizado en el PASO 1.

$$G_{(p)} H_{(p)} \Big|_{p \to 0} = \frac{1}{p} \Big|_{P \to \infty} = \frac{1}{\rho \cdot e^{j \cdot \theta}} \Big|_{\rho \to 0} =$$

$$= |\infty| \cdot e^{-j \cdot \theta} = |\infty| \cdot \angle -\theta$$

Analizamos a continuación el plano P para observar lo que sucede cuando se estudia un vector que corresponde a un polo en el origen y se desea hacer la rotación del mismo desde ω = +0 a ω = -0. Para mejorar la observación hacemos un “zoom” del origen. En la figura vemos que el vector ρ al pasar desde ω = +0 a ω = -0 en el plano P, describe una trayectoria cuyo ángulo es θ = 180 °. El ángulo φ que describe el vector correspondiente en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ por transformación conforme, estará dado por la siguiente expresión:



$$\varphi = (-)\ \text{Número de Polos x}\ \ \theta = (-)\ \text{Número de Polos x}\ \ 180°$$

para nuestro caso:

$$\varphi = (-)\ \theta = (-)\ 180° \quad \therefore \varphi = -\ 180°$$

El signo (-) aparece porque estamos analizando polos, y como los mismos están en el denominador, al calcular la fase aparece el signo negativo. Por otra parte el signo (-), nos indica que si en el plano P el vector ρ describió una trayectoria que corta los ejes en un sentido, (En este caso particular sentido horario), el vector que describe el ángulo φ en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ o $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$, debe hacerlo cortando los ejes en el sentido opuesto (Antihorario). En la Figura 11 se muestra el cierre del diagrama para $P \rightarrow 0$.

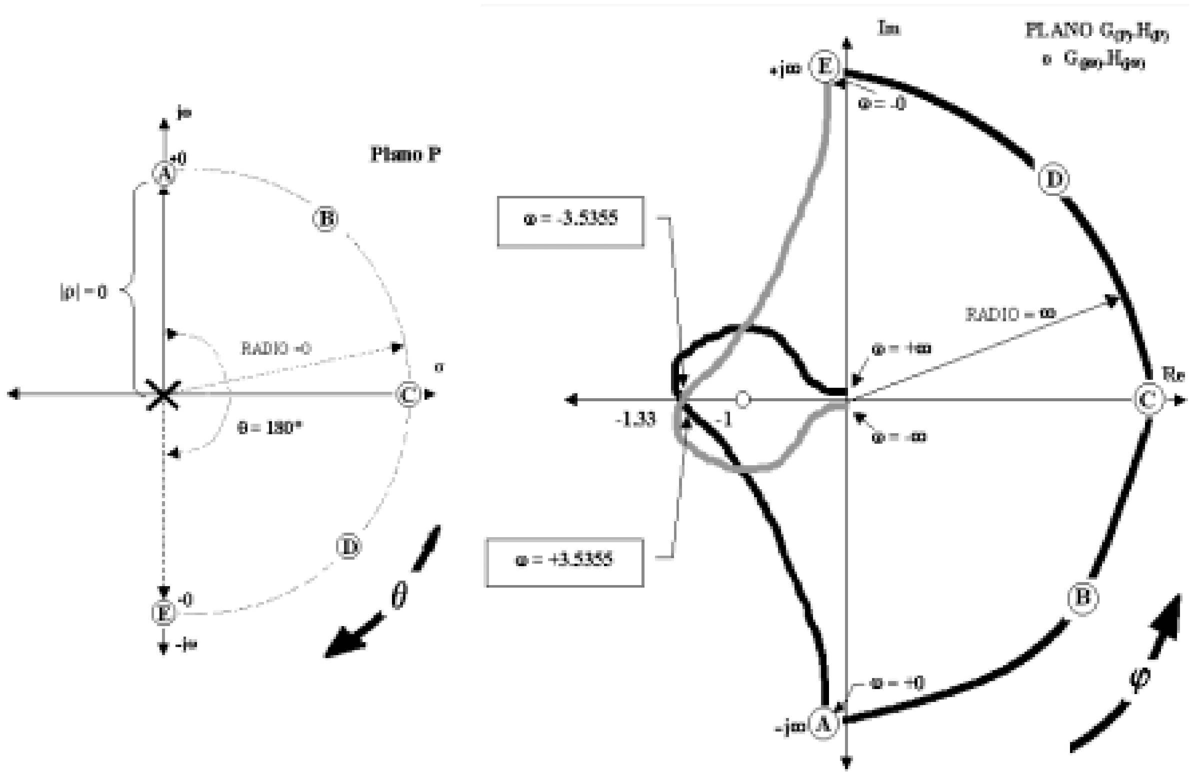
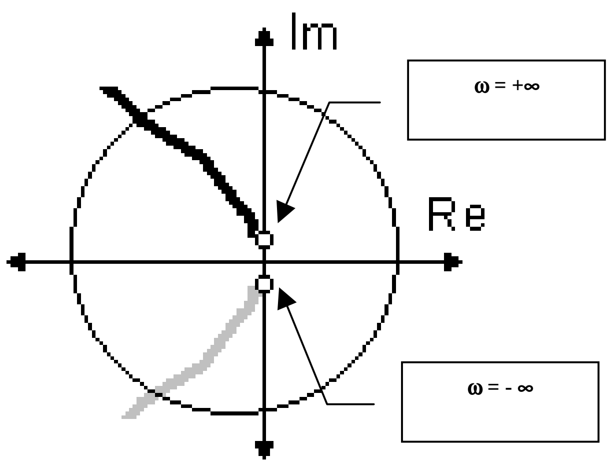


FIGURA 12. Cierre del diagrama para $P \rightarrow 0$

Las letras A,B,C,D y E encerradas en círculos nos muestran distintas posiciones al hacer girar el vector en el plano P y su correlación con el movimiento del vector correspondiente, en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$.

PASO 11: Cerrar la curva para P o $\omega = \infty$. Recordar que debemos analizar si el diagrama encierra o no al origen de los ejes del plano $F_{(P)}$ en el caso de una función de transferencia completa; este paso no se aplica si estamos analizando una función de lazo abierto del tipo $G_{(P)}.H_{(P)}$ pues los rodeos, se observan en $-1 + j0$.

La Figura 13 muestra una especie de "ZOOM" del origen del diagrama en el plano $F_{(P)}$.



Repetimos parte del análisis realizado en el PASO 2. Suponemos como ejemplo, que existen 3 polos más que ceros para $p \rightarrow \infty$ en la función de transferencia analizada.

$$F_{(p)} \Big|_{p \to \infty} = \frac{1}{p^3} \Big|_{p \to \infty} = \frac{1}{(\rho^3 \cdot e^{j3\theta})} \Big|_{\rho \to \infty} =$$

$$= |0| \cdot e^{-j3\cdot\theta} = |0| \cdot \angle{-3 \cdot \theta}$$

Analizamos a continuación el plano P para observar lo que sucede cuando se estudia un vector que corresponde a un polo y se desea hacer la rotación del mismo desde $\omega = +\infty$ a $\omega = -\infty$.

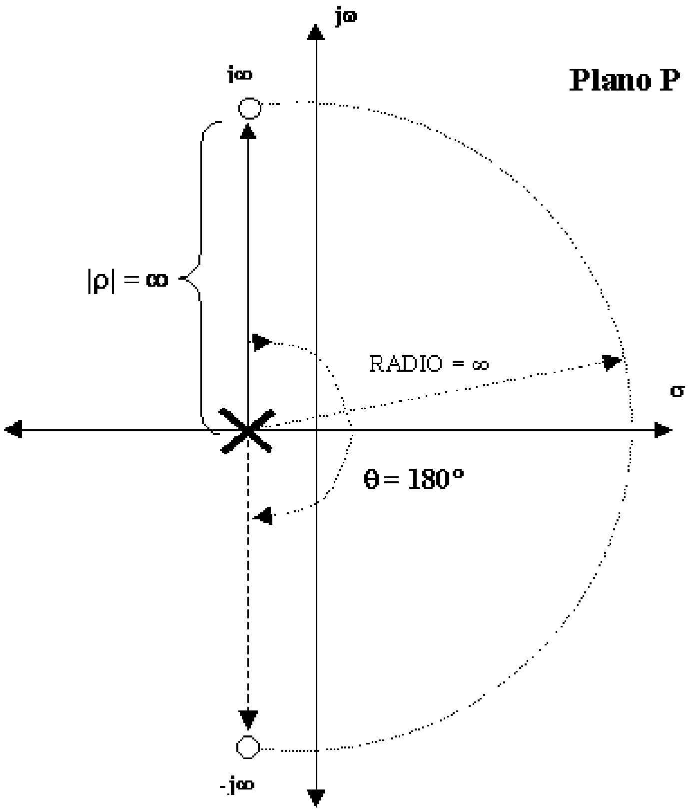


FIGURA 14. Rotación de vector desde $\omega = +\infty$ a $\omega = -\infty$.

En la figura anterior vemos que el vector ρ al pasar desde $\omega = +\infty$ a $\omega = -\infty$ en el plano P, describe una trayectoria cuyo ángulo es $\theta = 180°$. El ángulo φ que describe el vector correspondiente en el plano $F_{(P)}$ por transformación conforme, estará dado por la expresión:

$$\varphi = (-)\ \text{Número de Polos} \times \theta = (-)\ \text{Número de Polos} \times 180°$$

para nuestro caso:

$$\varphi = (-)\ 3 \times \theta = (-)\ 3 \times 180° \quad \therefore \varphi = -540°$$

El signo (-) aparece porque estamos analizando polos, y como los mismos están en el denominador, al calcular la fase aparece el signo negativo.

Por otra parte el signo (-), nos indica que si en el plano P el vector ρ describió una trayectoria que corta los ejes en un sentido, (En este caso particular sentido horario), el vector que describe el ángulo φ en el plano $F_{(P)}$ o $F_{(j\omega)}$, debe hacerlo cortando los ejes en el sentido opuesto (Antihorario). En la Figura 8 se muestra en forma aumentada el cierre del diagrama para $P \rightarrow \infty$.

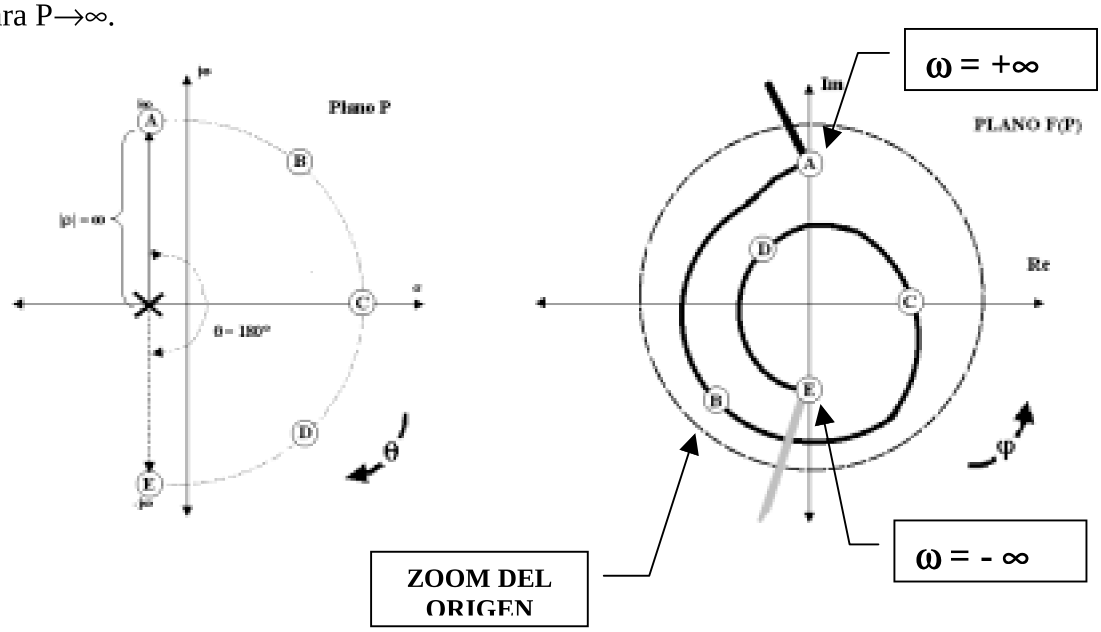


FIGURA 15. Cierre del diagrama para $P \rightarrow \infty$.

PASO 12: Aplicar el criterio de Nyquist al diagrama obtenido.
Aquí se presentan dos opciones de acuerdo al tipo de función de transferencia bajo estudio, si estamos analizando una función de transferencia total representada por $F_{(P)}$, nos fijaremos si el diagrama encierra el origen y de hacerlo nos fijaremos el sentido, en cambio si estamos estudiando un sistema de lazo cerrado representado por la función $G_{(P)}.H_{(P)}$, nos fijaremos en la cantidad y sentido de los rodeos al punto del plano indicado por $-1 + j0$.
Para la aplicación del criterio de Nyquist, en cualquiera de ambos casos, en primer lugar recorremos en un sentido determinado, el llamado recinto de Nyquist en el plano P. Ver Figura 16.

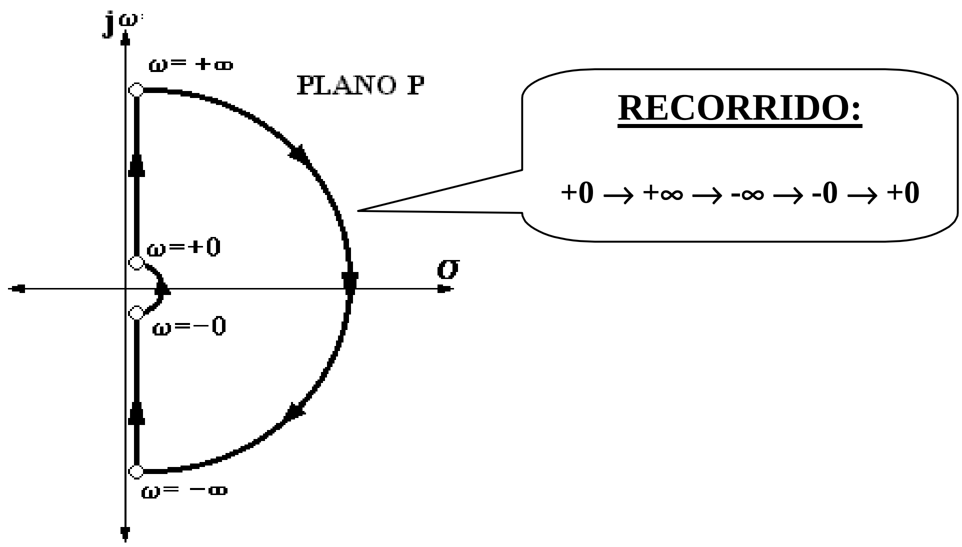


FIGURA 16. Recinto de Nyquist y sentido de recorrido del mismo.

A continuación trazamos el Recorrido (**+0** $\rightarrow$ **+∞** $\rightarrow$ **-∞** $\rightarrow$ **-0** $\rightarrow$ **+0**) mediante flechas en el diagrama del plano $F_{(P)}$ o $G_{(P)}.H_{(P)}$, de acuerdo al tipo de sistema bajo estudio. Luego, observamos la cantidad y sentido de los rodeos al origen o al punto –1 + j0 , de acuerdo al caso. El ***número*** de rodeos al origen o al punto –1 + j0, de acuerdo al tipo de función, nos dará el valor de N. El ***sentido*** de los rodeos, determinará el signo de N, correspondiendo signo positivo si el sentido de giro del diagrama polar en el plano de la función, es idéntico al trazado en el recinto del plano P (ver figura 16), y por otro lado, N será de signo negativo si el sentido de corte a los ejes del plano de la función es contrario al del plano de la variable.
Finalmente en correspondencia con la cantidad y sentido de los rodeos obtenidos, indicamos el resultado del criterio de Nyquist el cual está expresado por :

$$\mathbf{N = Z - P}$$

En donde :

N = Número de rodeos al origen del plano de la función, si la misma, es del tipo total ($F_{(P)}$), o número de rodeos del punto –1 + j0 del plano de la función, si la misma corresponde a a una de lazo cerrado, representada por $G_{(P)}$.$H_{(P)}$.

Z = Ceros de la función de transferencia (Total o lazo cerrado).

P = Polos de la función de transferencia (Total o lazo cerrado).

Finalmente el la Tabla 1, se indican para los dos tipos de función de transferencia, los posibles resultados que pueden obtenerse aplicando el criterio de Nyquist.

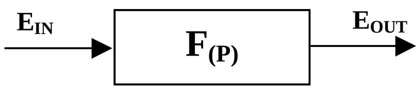
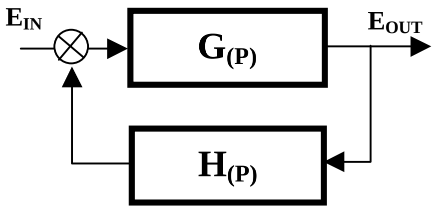
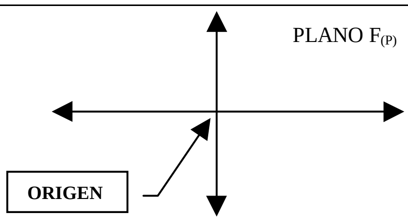
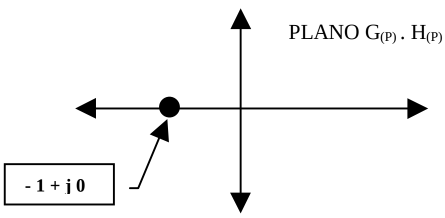
TIPO DE FUNCIÓN	**FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA TOTAL**	**FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO**
FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	$\mathbf{F_{(P)}}$	$\mathbf{G_{(P)} \cdot H_{(P)}}$
DIAGRAMA EN BLOQUES DEL SISTEMA		
LUGAR DE OBSERVACIÓN DE LOS RODEOS		
CONCLUSIONES SI N = 0	**NO SE SABE POR CRITERIO DE NYQUIST. APLICAR OTRO MÉTODO**	**NO SE SABE POR CRITERIO DE NYQUIST. APLICAR OTRO MÉTODO**
CONCLUSIONES SI N = Numero positivo	**NO SE SABE POR CRITERIO DE NYQUIST. APLICAR OTRO MÉTODO**	**INESTABLE**
CONCLUSIONES SI N = Numero negativo	**INESTABLE**	**NO SE SABE POR CRITERIO DE NYQUIST. APLICAR OTRO MÉTODO**

TABLA1. Conclusiones aplicando criterio de Nyquist