Guía 7. Teoremas circuitales

1. Encontrar el equivalente de Thevenin en los puntos AB del circuito de la figura 1.

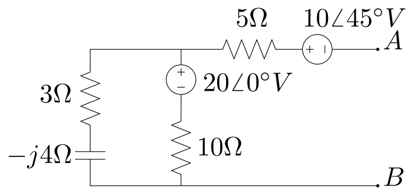


Figura 1: Equivalente Thevenin.

2. Dado el circuito de la figura 2, encontrar el equivalente de Norton en los puntos A y B.

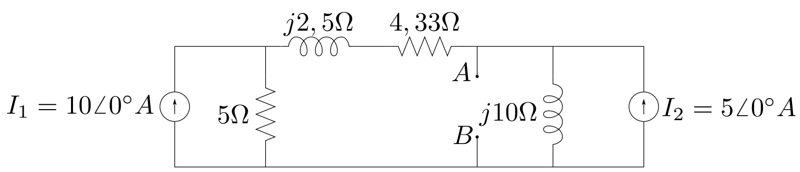


Figura 2: Equivalente Norton.

3. Se desea construir una resistencia para un horno que va a ser alimentado por un generador de tensión senoidal de $V_{ef} = 24V$ (ver figura 3).

a. Calcular el valor resistivo necesario para lograr máxima transferencia de potencia si la impedancia de salida del generador es de $Z_o = 5 + j3,32\Omega$.

b. Calcular la potencia transferida.

c. Construir el triángulo de potencias y diagrama fasorial de tensiones del circuito generador mas horno.

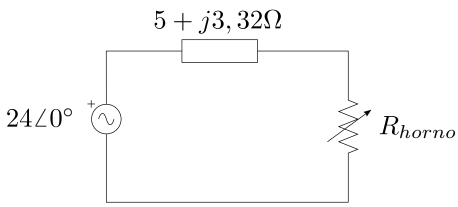


Figura 3

4. La figura 4 muestra el circuito equivalente de la etapa de salida de un amplificador mas filtro al que se le conecta un parlante de $Z_L = R_L + X_L$. Si $X_L = j4$, cuanto debería ser el valor de R_L para que la potencia transferida a la carga sea máxima?

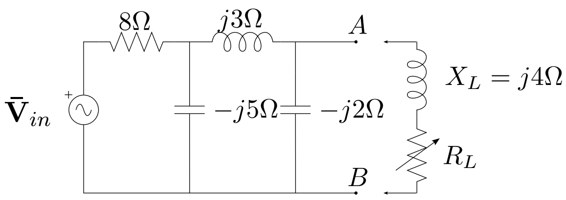


Figura 4

5. Encontrar la máxima potencia que puede recibir la carga R_{carga} del circuito de la figura 5.

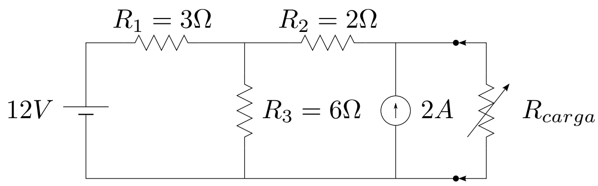


Figura 5: Máxima transferencia de potencia.

6. Encontrar el equivalente en conexión triángulo del circuito de la figura 6.

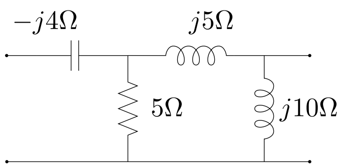


Figura 6

7. Encontrar el circuito simple en conexión triángulo equivalente del circuito de la figura 7.

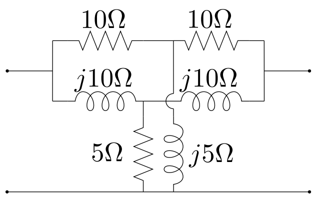


Figura 7

8. El circuito de la figura 8 fue ajustado para que el generador real (con impedancia interna Z_i) transfiera la máxima potencia. Encontrar el equivalente de Thevenin del generador si la potencia máxima transferida es de $P = 8653,8W$.

9. Aplicando el teorema de Thevenin, para el circuito de la figura 9 calcular la corriente de régimen permanente en R, con $R = 10\Omega, R = 100\Omega$ y $R = 1000\Omega$.

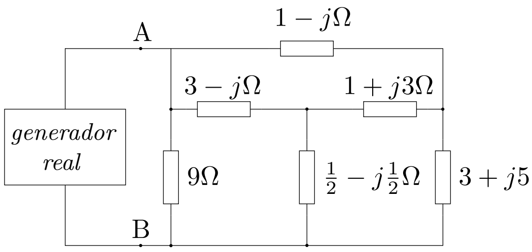


Figura 8: Máxima transferencia de potencia.

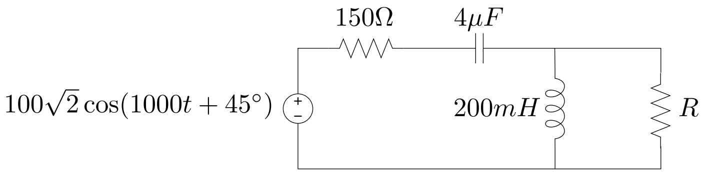


Figura 9: Cálculo de potencia.

10. En el circuito de la figura 10 encontrar la tensión de fuente V y la corriente I según las referencias indicadas.

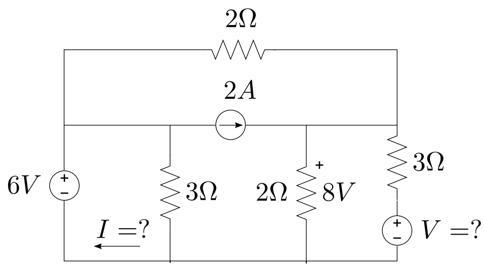


Figura 10: Encontrar V e I.

11. En el circuito de la figura 11 determinar la impedancia a conectar en los terminales $A-B$ para máxima transferencia de potencia.

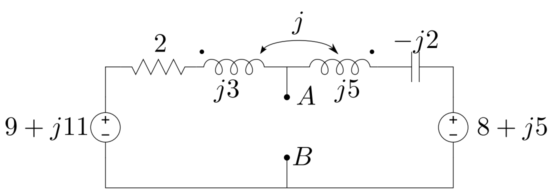


Figura 11: Máxima transferencia de potencia.

12. Se tiene un amplificador de audio de impedancia de salida $|Z_A| = 8\Omega$, ($Z_A = 6 - j5{,}3$) y se desea conectar un parlante cuya curva de impedancia de cono al aire indica que para $f = 5kHz \rightarrow Z_p = 4\Omega$. Se construye el circuito de la figura 12 con el fin que el amplificador transfiera la máxima potencia al parlante en $f = 5kHz$. Calcular L_1 y L_2.

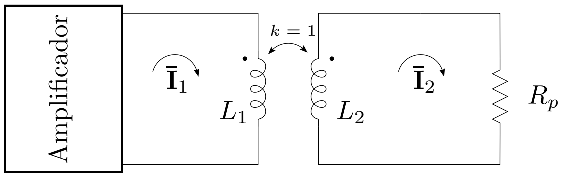


Figura 12: Carga con acoplamiento inductivo.

13. Encontrar el valor de R_c que maximice la transferencia de potencia en el circuito de la figura 13.

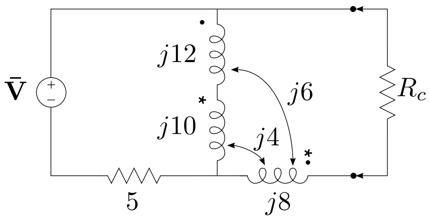


Figura 13: Carga con acoplamiento inductivo.

Soluciones

Ejercicio 1 Solución

$V_{Th} = 11,39\angle 264{,}4°V$
$Z_{Th} = 7,97 - j2,16$

Ejercicio 3 Planteo

El teorema de la máxima transferenica de potencia aplicado a una carga resistiva variable dice que para transferir la máxima potencia de un circuito o generador a la carga, la resistencia de carga debe ser igual al módulo de la impedancia de salida del circuito o generador, es decir que para este caso

$$R_{horno} = |Z_o| \tag{1}$$

La potencia transferida con esta resistencia de carga será

$$P_{transf} = |\bar{\mathbf{I}}|^2 \, R_{horno} \tag{2}$$

donde la corriente total es

$$\bar{\mathbf{I}} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{Z_T} = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{(Z_o + R_{horno})} \tag{3}$$

El triángulo de potencias se determina como

$$S = |\bar{\mathbf{V}}| \, |\bar{\mathbf{I}}|; \quad P = |\bar{\mathbf{V}}| \, |\bar{\mathbf{I}}| \, cos(\varphi); \quad Q = |\bar{\mathbf{V}}| \, |\bar{\mathbf{I}}| \, sen(\varphi)$$

Se calculan las caídas de tensión en Z_o y en R_{horno} para construir el diagrama fasorial

$$\bar{\mathbf{V}}_Z = \bar{\mathbf{I}} \, Z_o; \quad \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{I}} \, R_{horno}$$

Resolución numérica

$$
\begin{aligned}
R_{horno} &= \sqrt{5^2 + 3{,}32^2} = 6\Omega \\
\bar{\mathbf{I}} &= \frac{24V}{(11 + j3{,}32)} = 2 - j0{,}6\Omega = 2{,}09\angle - 16{,}8^\circ \\
P_{transf} &= (2{,}09)^2\, 6 = 26{,}2\, W \\
S &= 24 \cdot 2{,}09 = 50{,}16\, VA \\
P &= 24 \cdot 2{,}09 \cdot 0{,}97 = 48\, W \\
Q &= 24 \cdot 2{,}09 \cdot 0{,}26 = 14{,}5\, VAR \\
\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{Z}} &= (2 - j0{,}6) \cdot (5 + j3{,}32) = 12 + j3{,}6V = 12{,}53\angle 16{,}8^\circ \\
\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{R}} &= (2 - j0{,}6) \cdot 6 = 12 - j3{,}6V = 12{,}53\angle - 16{,}8^\circ
\end{aligned}
$$

En la fig. 14 se puede ver el diagrama fasorial completo y el triángulo de potencias en la fig. 15.

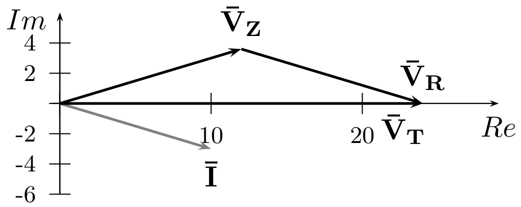


Figura 14: Diagrama fasorial de tensiones

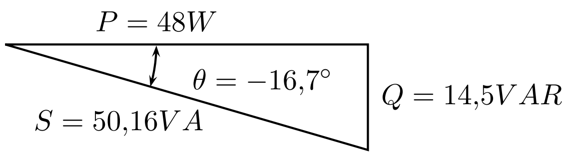


Figura 15: Triángulo de potencias

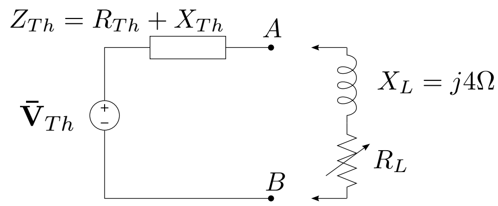
Ejercicio 4 Planteo y resolución numérica

El teorema de la máxima transferencia de potencia aplicado a una carga con parte resistiva variable dice que para transferir la máxima potencia de un circuito o generador a la carga, la parte resistiva de ésta debe ser igual al módulo de la impedancia de salida del circuito o generador mas la parte reactiva de la carga

$$R_L = |Z_o + X_L| \tag{4}$$

y la impedancia de salida del circuito anterior se puede obtener haciendo el equivalente de Thevenin a los bornes $A - B$, y R_L será

$$R_L = |Z_{Th} + X_L| = \sqrt{(R_{Th})^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \tag{5}$$



Para obtener la impedancia de Thevenin Z_{Th} se debe pasivar la fuente $\bar{\mathbf{V}}_{in}$, de esta forma la resistencia de 8Ω forma un paralelo con el capacitor de $-j5\Omega$,que a su vez están en serie con el inductor de $j3\Omega$. Llamando a esto Z_1 tenemos

$$Z_1 = \frac{8\,(-j5)}{8 - j5} + j3 = 2{,}24719 - j0{,}59551 \tag{6}$$

por último, esta impedancia parcial Z_1 está en paralelo con el capacitor de $-j2\Omega$

$$Z_{Th} = \frac{Z_1\,(-j2)}{Z_1 - j2} = 0{,}76263 - j1{,}11916 \tag{7}$$

entonces R_L deberá ser igual a

$$R_L = \sqrt{(0{,}76263)^2 + (4 - 1{,}11916)^2} = 2,9801\Omega \tag{8}$$

Ejercicio 5 Solución

$P_{max} = 16W$

Ejercicio 6 Solución

$Z_A = 1 - j4\Omega \quad , Z_B = 4 + j1\Omega \quad , Z_C = -0,55 + j3,38\Omega$

Ejercicio 8 Planteo y resolución numérica

Un generador real transmite la máxima potencia cuando se lo carga con una impedancia igual al conjugado de su impedancia de salida. Conociendo la impedancia de carga que permite la máxima transferencia de potencia se conoce entonces la impedancia de salida del generdador.

Para encotrar la impedancia equivalente que carga al generador se reduce el circuito de carga mediante una transformación estrella-triángulo de las impedancia $Z_1 = 3 - j\Omega$, $Z_2 = 1/2 - j1/2\Omega$ y $Z_3 = 1 + j3\Omega$. El circuito resultante es el de la fig. 16.

$$
\begin{aligned}
Z_A &= \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_3} = 3 - j2\Omega \\
Z_B &= \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_2} = 2 + j16\Omega \\
Z_C &= \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1} = 2 + j3\Omega
\end{aligned}
$$

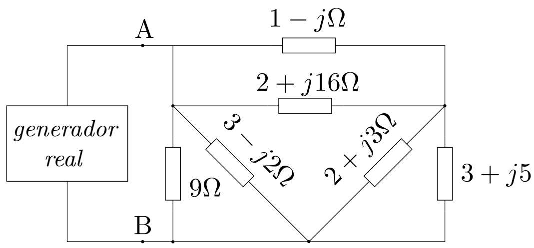


Figura 16: Transformación estrella-triángulo

luego, la impedancia equivalente vista desde los bornes del generador es

$$
\begin{aligned}
Z_{eq} &= (9//Z_A)//[(1-j)//Z_B + (3+j5)//Z_C] \\
Z_{eq} &= [9//(3-j2)]//\{[(1-j)//(2+j16)] + [(3+j5)//(3+j5)]\} \\
Z_{eq} &= (2,4324 - j1,0946)//(1,12821 - j0,97436 + 1,2022 + j1,8764i) \\
Z_{eq} &= 1,3982 - j0,0184\Omega
\end{aligned}
$$

es decir que la impedancia interna del generador es

$$
Z_i = Z_{eq}^* = 1,3982 + j0,0184\Omega \tag{9}
$$

que es también la impedancia equivalente de Thevenin.

La potencia transferida a la carga es $P = 8653,8W$, entonces el modulo de la corriente es

$$
\begin{aligned}
|I| &= \sqrt{\frac{P}{\mathcal{R}e[Z_{eq}]}} = \sqrt{\frac{8653,8}{1,3982}} \\
|I| &= 78{,}671A
\end{aligned}
$$

Finalmente, la tensión de Thevenin se obtiene como el producto de la corriente total por la impedancia total

$$V_{th} = I \cdot (Z_i + Z_{eq}) = 220V$$

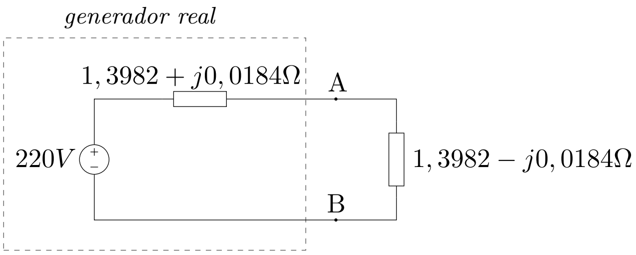
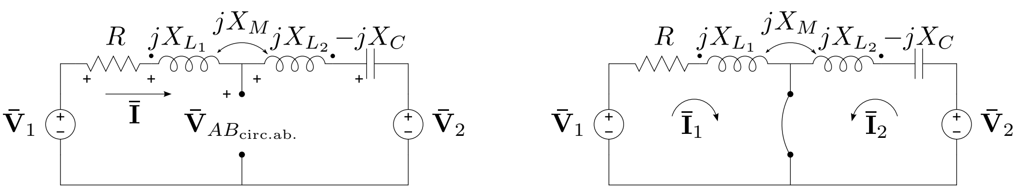


Figura 17: Equivalente de Thevenin del generador real

Ejercicio 11 Solución

La impedancia a conectar entre los terminales $A-B$ para máxima transferencia de potencia viene dada por $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{Th}^*$, donde $\mathbf{Z}_{Th}$ es la impedancia equivalente de Thevenin. Por lo que hay que determinar el circuito equivalente de Thevenin del circuito dado, donde

$$\bar{\mathbf{V}}_{Th} = \bar{\mathbf{V}}_{AB_{\text{circ.ab.}}}, \qquad \mathbf{Z}_{Th} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{AB_{\text{circ.ab.}}}}{\bar{\mathbf{I}}_{\text{corto circ.}}}.$$



(a) Cálculo de $\bar{\mathbf{V}}_{AB_{\text{circ.ab.}}}$ **(b)** Cálculo de $\bar{\mathbf{I}}_{\text{corto circ.}}$

Figura 18: Circuitos para el cálculo del equivalente Thevenin.

Para el cálculo de la tensión $A-B$ a circuito abierto se parten de las ecuaciones de equilibrio de tensiones del circuito de la figure 18a

$$\bar{\mathbf{V}}_1 - \bar{\mathbf{V}}_R - \bar{\mathbf{V}}_{b_1} - \bar{\mathbf{V}}_{AB} = 0,$$
$$\bar{\mathbf{V}}_{AB} - \bar{\mathbf{V}}_{b_2} - \bar{\mathbf{V}}_C - \bar{\mathbf{V}}_2 = 0$$

y las relaciones $V - I$

$$\bar{\mathbf{V}}_R = R\bar{\mathbf{I}} \tag{10}$$
$$\bar{\mathbf{V}}_{b_1} = jX_{L_1}\bar{\mathbf{I}} - jX_M\bar{\mathbf{I}} \tag{11}$$
$$\bar{\mathbf{V}}_{b_2} = jX_{L_2}\bar{\mathbf{I}} - jX_M\bar{\mathbf{I}} \tag{12}$$
$$\bar{\mathbf{V}}_C = -jX_C\bar{\mathbf{I}}. \tag{13}$$

Luego

$$\bar{\mathbf{V}}_1 - \bar{\mathbf{V}}_{AB} = \bar{\mathbf{I}}(R + jX_{L_1} - jX_M) = \bar{\mathbf{I}}\mathbf{Z}_1 \tag{14}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB} - \bar{\mathbf{V}}_2 = \bar{\mathbf{I}}(jX_{L_2} - jX_M - jX_C) = \bar{\mathbf{I}}\mathbf{Z}_2 \tag{15}$$

que resolviendo para $\bar{\mathbf{V}}_{AB}$ queda

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_1\mathbf{Z}_2 + \bar{\mathbf{V}}_2\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \tag{16}$$

que dados los valores de $\mathbf{Z}_1 = 2 + j2 = 2,828\underline{/45^\circ}$ y $\mathbf{Z}_2 = j2 = 2\underline{/90\circ}$, queda

$$\bar{\mathbf{V}}_{AB} = 7,2 + j7,6 = 10,469\underline{/46,55^\circ}. \tag{17}$$

Para el cálculo de la corriente de cortocircuito, se parte del circuito de la figura 18b, donde $\bar{\mathbf{I}}_{\text{corto circ.}} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2$, donde $\bar{\mathbf{I}}_1$ e $\bar{\mathbf{I}}_2$ se obtiene a partir del método de las corrientes de malla. Los elementos de la matriz de impedancias, a partir de las corrientes de malla definidias en la figure 18b son

$$z_{11} = R + jX_{L_1} \tag{18}$$

$$z_{22} = jX_{L_2} - jX_C \tag{19}$$

$$z_{12} = z_{21} = jX_M \tag{20}$$

por lo que el sistema matricial queda

$$\begin{bmatrix} 2+j3 & j \\ j & j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_1 \\ \bar{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+j11 \\ 8+j5 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Resolviendo, se tiene

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = 3,38 + j0,16 = 3,38\underline{/2,71^\circ} \tag{22}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_2 = 0,54 - j2,72 = 2,77\underline{/-78,7^\circ}, \tag{23}$$

por lo que la corriente de cortocircuito queda

$$\bar{\mathbf{I}}_{\text{corto cir.}} = 3,92 - j2,56 = 4,68\underline{/-33,14^\circ} \tag{24}$$

Luego, la impedancia equivalente de Thevenin queda

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\bar{\mathbf{V}}_{AB_{\text{circ.ab.}}}}{\bar{\mathbf{I}}_{\text{corto circ.}}} = 0,4 + j2,2 = 2,236\underline{/79,7^\circ}. \tag{25}$$

Por lo tanto, la impedancia de carga, para máxima transferencia de potencia es

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*_{Th} = 0,4 - j2,2. \tag{26}$$

Ejercicio 13 Solución

$R_c = 4,03\Omega$