

"FUNCIONES DE APPROXIMACIÓN"

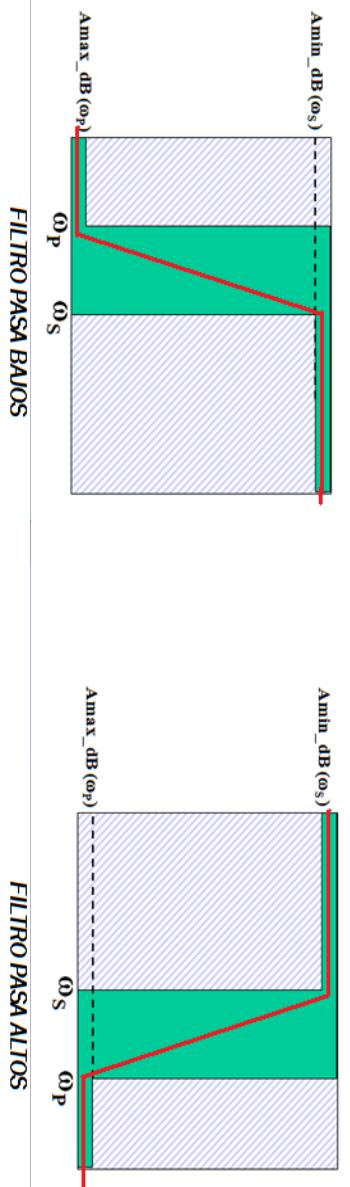


Recopilación realizada en apoyo de la Cátedra

Ing. Juan José GARCIA ALBAU

**TEORÍA DE LOS
CIRCUITOS II**

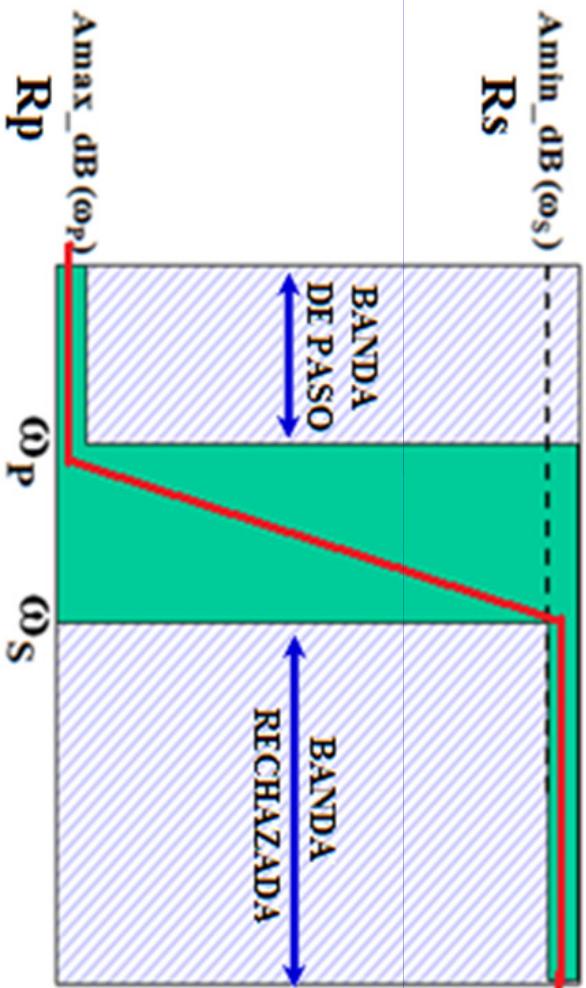
CARACTERÍSTICAS DE ATENUACIÓN DEPENDIENDO DEL TIPO DE FILTRO



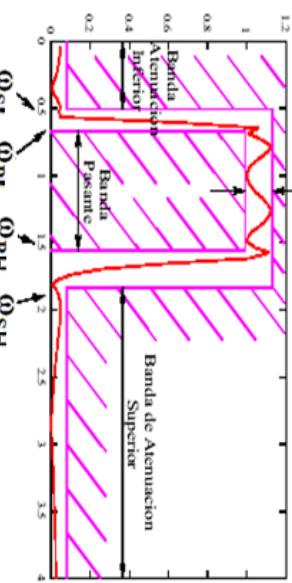
CARACTERÍSTICAS DE GANANCIA DEPENDIENDO DEL TIPO DE FILTRO

PROCESO DE APROXIMACIÓN : Encontrar la función matemática que se corresponde con la característica de transferencia del filtro.

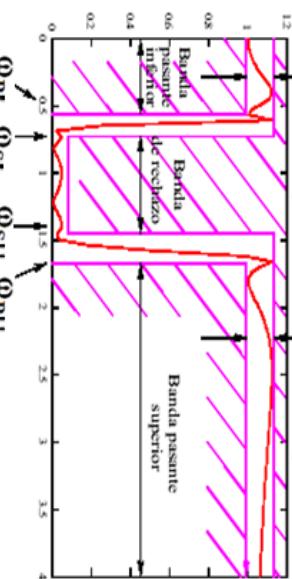
BANDA DE TRANSICIÓN



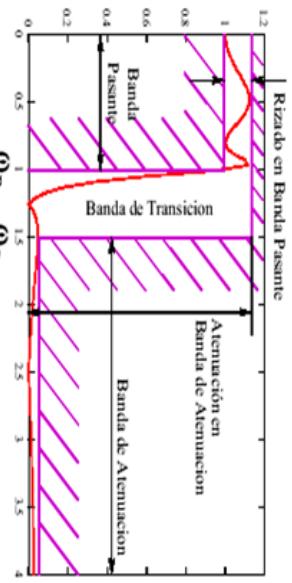
c) Filtro Pasa Banda



a) Filtro Pasa Bajos



b) Filtro Pasa Altos



d) Filtro Elimina Banda

DEFINICIONES:

$\Omega_p \rightarrow$ Pulsación de corte de la banda pasante en filtros pasabajos y pasa altos.

Ω_s → Pulsaciones que delimitan el ancho de banda (BW) en filtros pasa banda y elimina banda.

Ω_{s1} y $\Omega_{s2} \rightarrow$ Pulsaciones que delimitan la banda detenida en filtros pasa banda y elimina banda.

5

DEFINICIONES:

$A_{max_dB} \equiv R_p \rightarrow$ Atenuación máxima en la banda pasante ó Ripple en la banda pasante.

$A_{min_dB} \equiv R_s \rightarrow$ Atenuación mínima en la banda detenida ó Ripple en la banda detenida.

$0 < \omega < \Omega_p \rightarrow$ Banda pasante en filtros pasabajos.

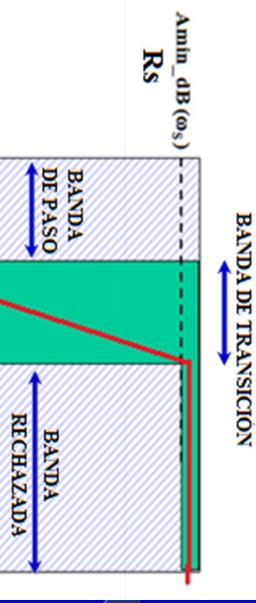
$\Omega_p < \omega < \Omega_s \rightarrow$ Banda de Transición en filtros pasabajos.

$\omega_s < \omega < \infty \rightarrow$ Banda detenida en filtros pasabajos.

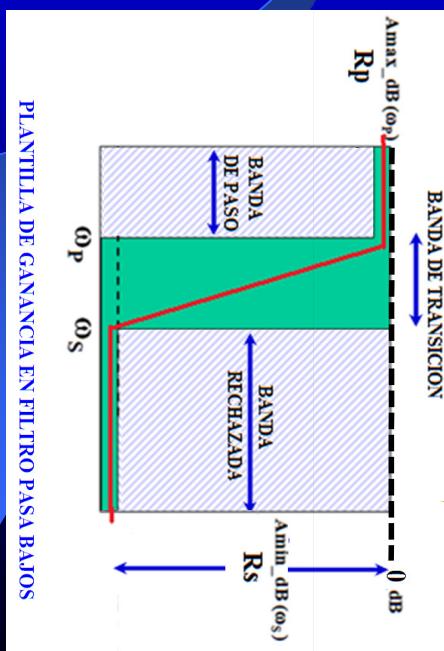
6

MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Hallar en forma manual la función de atenuación que cumpla con la plantilla solicitada.



PLANTILLA DE ATENUACIÓN EN FILTRO PASA BAJOS



PLANTILLA DE GANANCIA EN FILTRO PASA BAJOS

Aprovechamos nuestro conocimiento sobre diagramas de Bode y Método Asintótico.

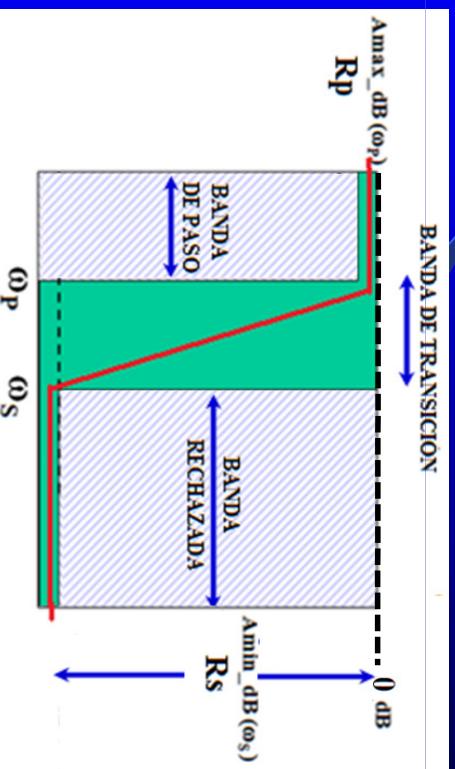
ESPECIFICACIONES

$$\omega_s = 1 \text{ [rad/seg]}$$

$$\omega_p = 3 \text{ [rad/seg]}$$

$$R_p = 4 \text{ [dB]}$$

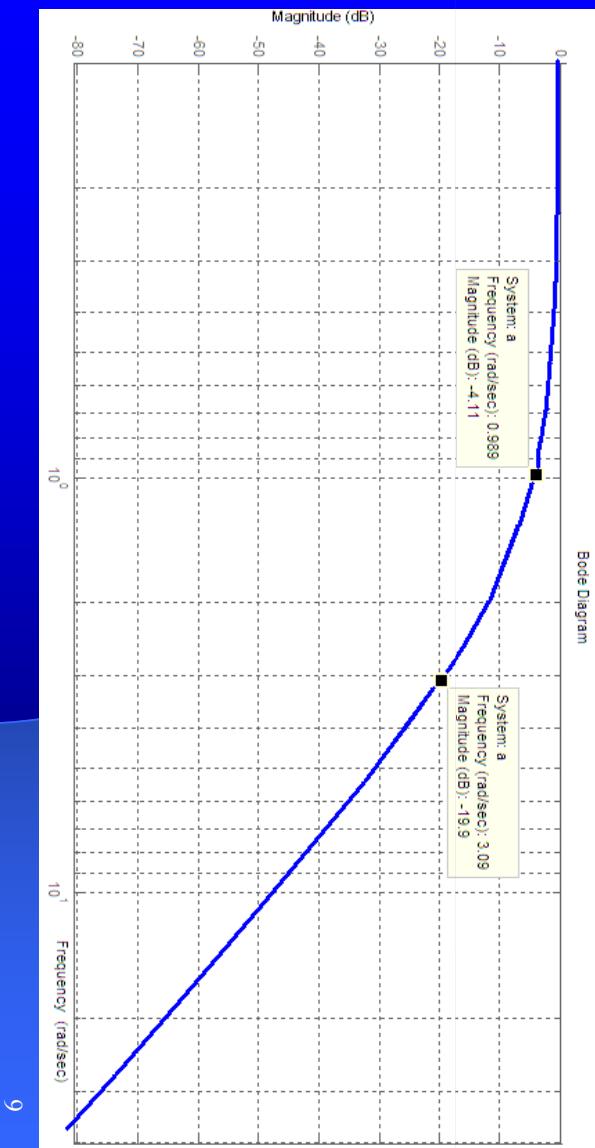
$$R_s = 20 \text{ [dB]}$$



PLANTILLA DE GANANCIA EN FILTRO PASA BAJOS

SOLUCIÓN PROPUESTA:

$$F(p) = \frac{4.335}{(s+1.7)^2 (s+1.5)} = \frac{4.335}{s^3 + 4.9 s^2 + 7.99 s + 4.335}$$



VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MÉTODO:

El método es simple de aplicar cuando la pendiente requerida entre ω_p y ω_s es de 60 dB o menos.

Cada requerimiento de filtro pasa a ser un desafío distinto.

La síntesis e implementación del filtro, ya sea pasiva o activa puede ser dificultosa al tratar de asociar una $F(p)$ con la respuesta de un circuito eléctrico.

En la práctica es más simple emplear diferentes funciones de aproximación predefinidas. Entre las más conocidas tenemos:

BESSEL

- # Presenta una fase máximamente recta
- # Característica de módulo mediocre

BUTTERWORTH

- # Es máximamente plana
- # Atenuación monótonamente creciente
- # Característica de fase *bastante lineal*¹¹

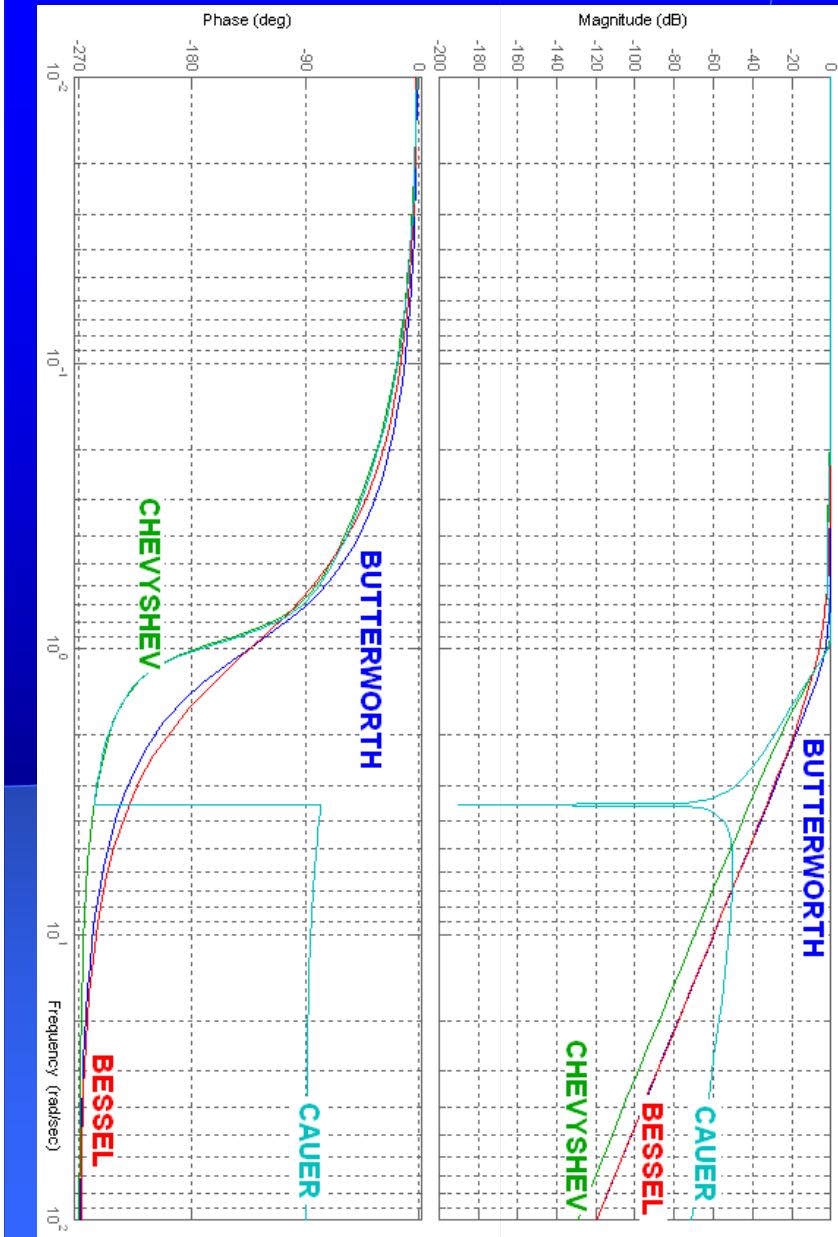
CHEBYSHEV

- # La banda de paso tiene ondulaciones
- # Atenuación monótonamente creciente fuera de la banda de paso. Más abrupta que la de Butterworth
- # Característica de fase peor que la de Butterworth

CAUER o ELÍPTICA

- # Tanto la banda de paso como la de atenuación tienen ondulaciones
- # Se logran bandas de transición más estrechas que con filtros Butterworth o Chebyshev de similar complejidad
- # Presenta la peor característica de fase¹²

COMPARACIÓN DE MAGNITUD Y FASE PARA DISTINTAS APROXIMACIONES DE FILTROS



Partimos de la llamada ecuación de Feldtkeller:

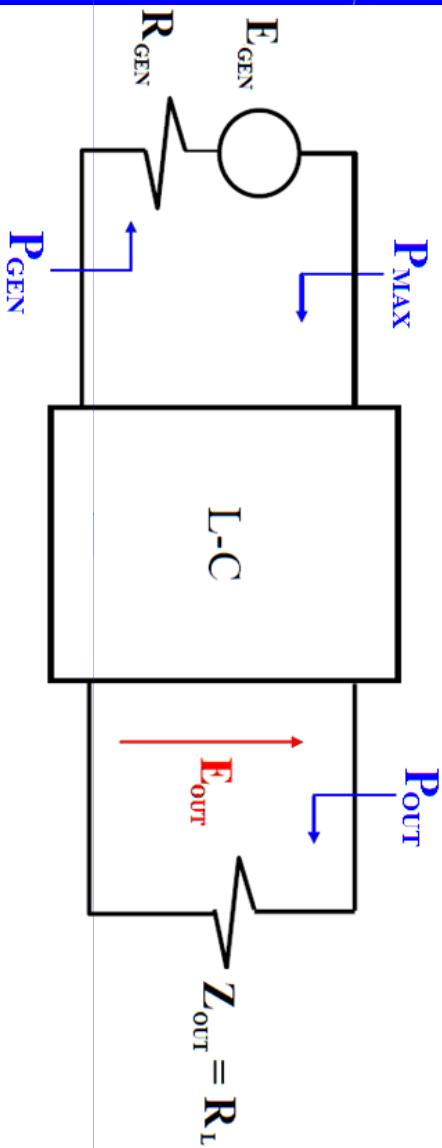
$$\left| \frac{V_{IN(j\omega)}}{V_{OUT(j\omega)}} \right|^2 = \left| A_{(j\omega)} \right|^2 = 1 + \left| K_{(j\omega)} \right|^2 = 1 + \left| \frac{N_{(j\omega)}}{D_{(j\omega)}} \right|^2$$

$$\left| \frac{V_{IN(S)}}{V_{OUT(S)}} \right|^2 = \left| A_{(S)} \right|^2 = 1 + \left| K_{(S)} \right|^2 = 1 + \left| \frac{N_{(S)}}{D_{(S)}} \right|^2$$

Donde:

$A(S)$ función de atenuación pasa bajos deseada
 $K(S)$ función característica

SIGNIFICADO FÍSICO DE $|H(w)|^2$



$$P_{MAX} = P_{GEN} + P_{OUT}$$

$$|H_{(j\omega)}|^2 = \frac{P_{OUT}}{P_{MAX}} = \frac{R_{OUT}}{|E_{GEN}|^2} = 4 * \frac{R_{GEN}}{R_{OUT}} * \left| \frac{E_{OUT}}{E_{GEN}} \right|^2$$

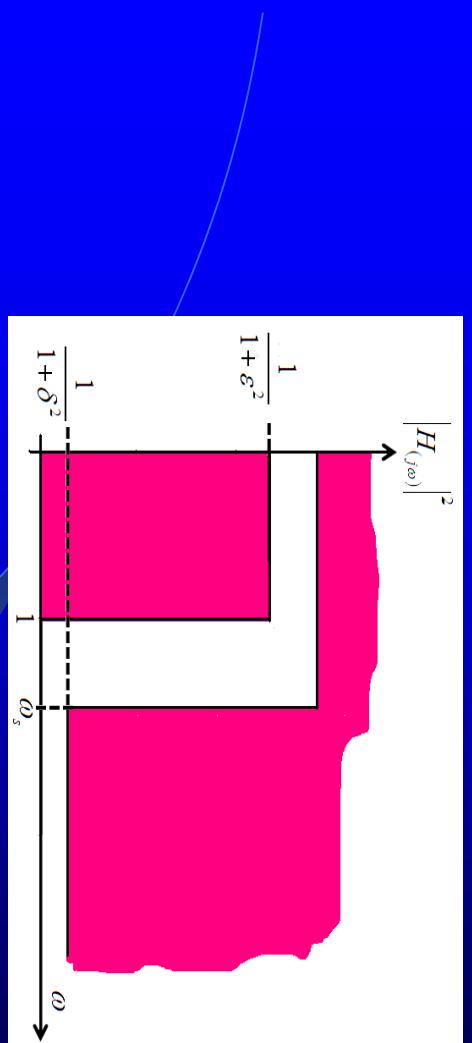
16

$$|H_{(j\omega)}|^2 = \frac{|N_{(j\omega)}|^2}{|D_{(j\omega)}|^2} = \frac{P_{OUT}(\omega)^2}{P_{IN}(\omega)^2}$$

\therefore

$$H_{(S)} = \frac{P_{OUT}(S)}{P_{IN}(S)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s^1 + a_0} \quad n \geq m$$

15



ECUACIÓN DE FELDTKELLER

$$\left| H(j\omega) \right|^2 = \frac{P_{OUT}}{P_{MAX}} = \frac{P_{OUT}}{P_{GEN} + P_{OUT}} = \frac{1}{1 + \frac{P_{GEN}}{P_{OUT}}} = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left| K(j\omega) \right|^2 = \frac{P_{GEN}}{P_{OUT}}} \quad \therefore \quad \boxed{\left| K(j\omega) \right|^2 = \frac{1}{\left| H(j\omega) \right|^2} - 1}$$

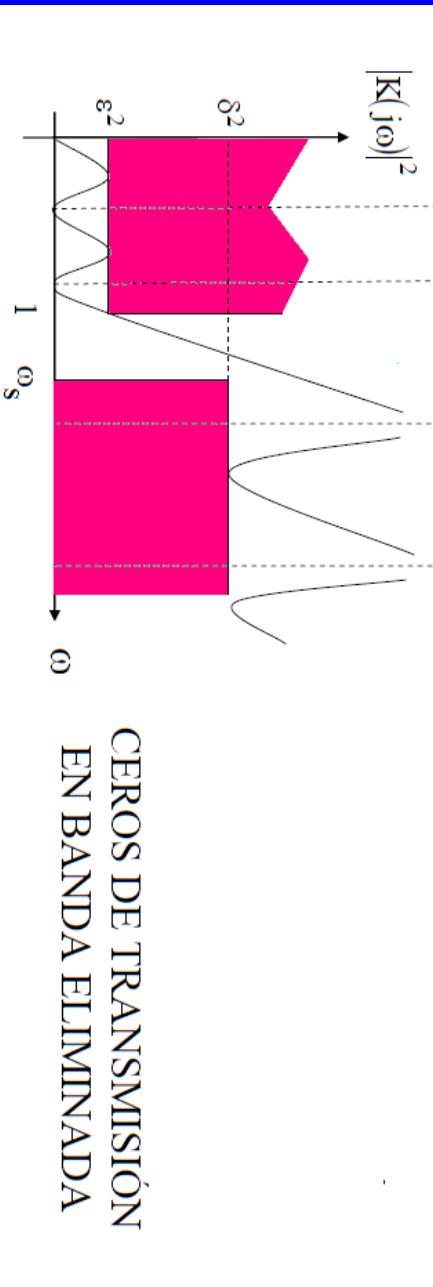
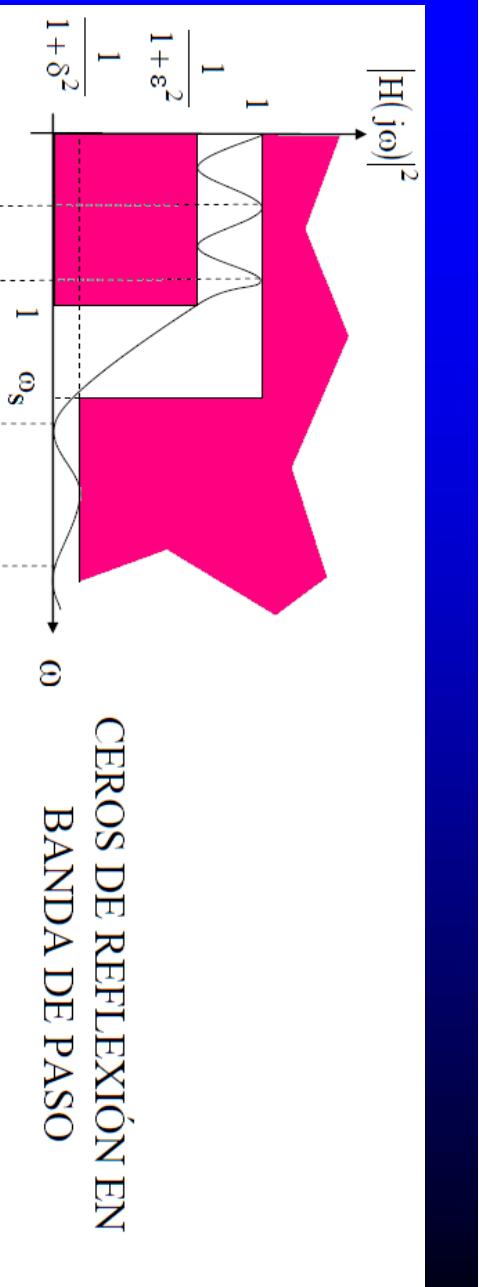
$$\left| \frac{E_{OUT}(j\omega)}{E_{IN}(j\omega)} \right|^2 = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} = \frac{1}{\left| A(j\omega) \right|^2}$$

$$\left| \frac{E_{IN}(j\omega)}{E_{OUT}(j\omega)} \right|^2 = |A(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2 = 1 + \left| \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \right|^2$$

$$\boxed{\left| A(s) \right|^2 = 1 + \left| K(s) \right|^2}$$

A(s) función de atenuación pasa bajos deseada
K(s) función característica

17



18

Polinomio de Butterworth

$$K(s) = B_n(s) = \varepsilon \left(\frac{s}{\omega_p} \right)^n \quad \text{Donde: } \varepsilon > 0$$

Reemplazando:

$$|A(j\omega)| = \left| \frac{V_{IN}(j\omega)}{V_{OUT}(j\omega)} \right| = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n}}$$

19

$$|A(j\omega)|_{dB} = A(\omega) = 10 \cdot \log_{10} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n} \right] [dB]$$

De donde se puede deducir:

$$A(\omega_p) = 10 \cdot \log_{10} \left(1 + \varepsilon^2 \right) = A_{\max} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot A_{\max}} - 1}$$

$$A(\omega_s) = 10 \cdot \log_{10} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^{2n} \right] = A_{\min} \Rightarrow n = \frac{\log_{10} \left(\frac{10^{0,1 \cdot A_{\min}} - 1}{\varepsilon^2} \right)}{\log_{10} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^2}$$

20

Para simplificar los cálculos de diseño es conveniente normalizar, para independizarnos de ω y ω_p

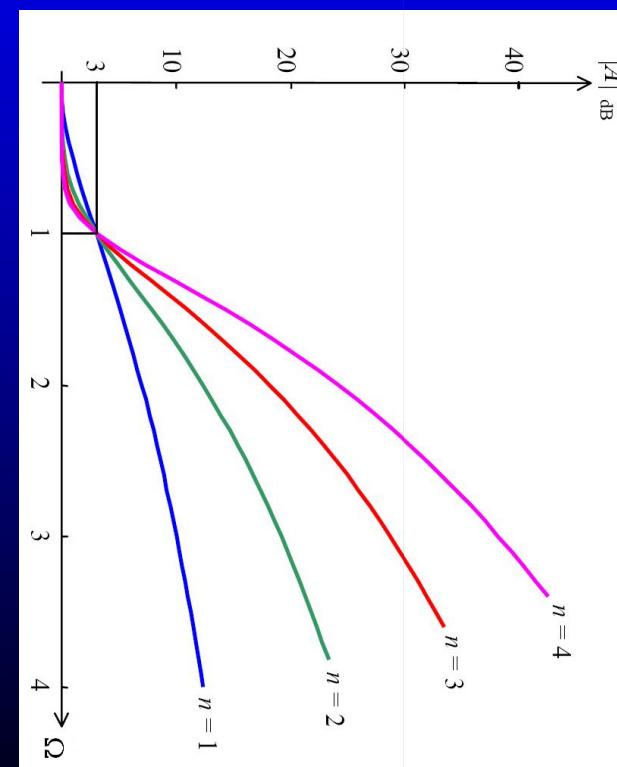
$$\Omega = \varepsilon^{1/n} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)$$

\Downarrow

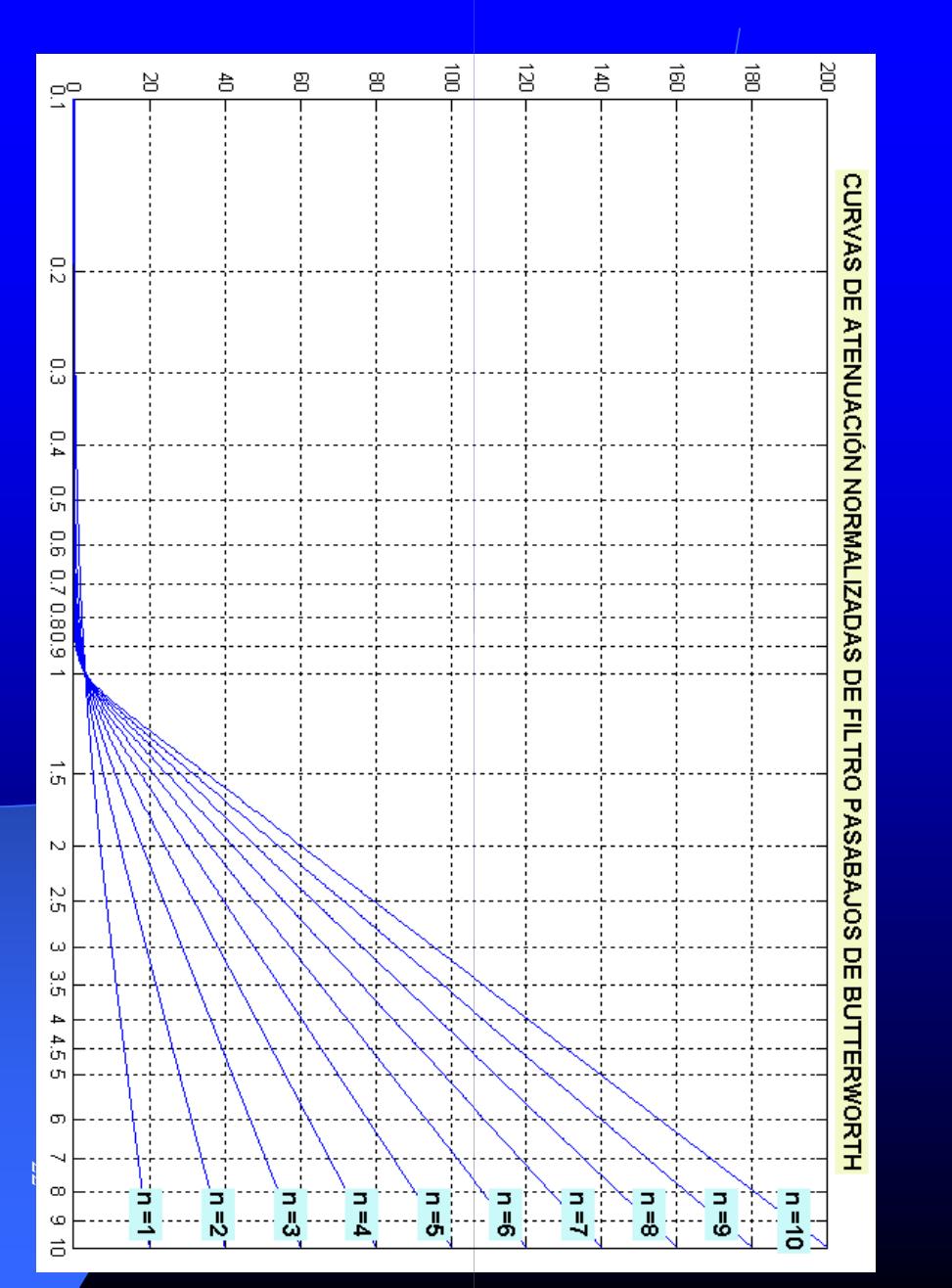
$$A(\Omega) = 10 \log_{10}(1 + \Omega^{2n})$$

Si $\Omega \gg 1$ entonces

$$A(\Omega) \rightarrow 20n \log_{10}(\Omega)$$



21

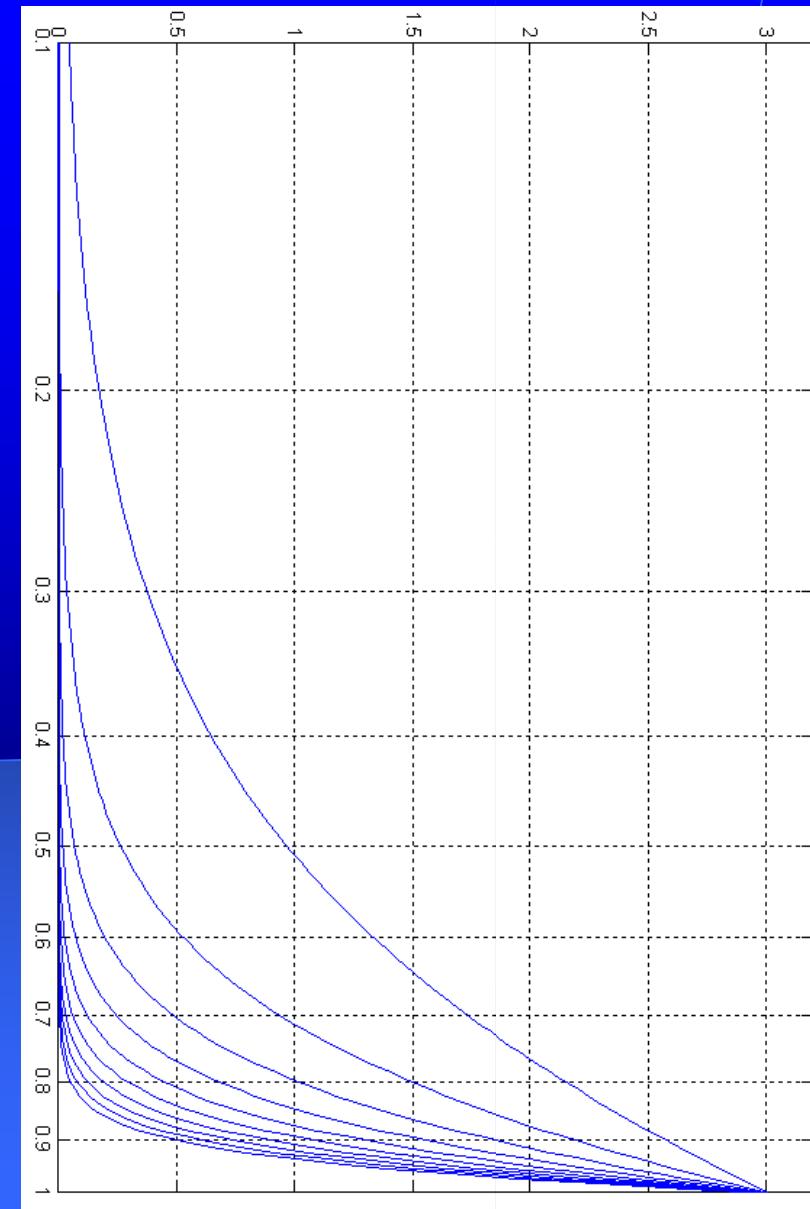


200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0

21

Zoom en $\omega = 1$

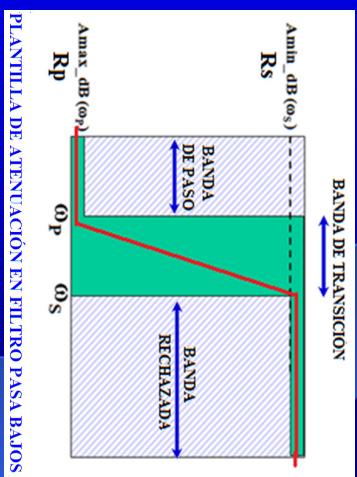
CURVAS DE ATENUACIÓN NORMALIZADAS DE FILTRO PASABAJO DE BUTTERWORTH



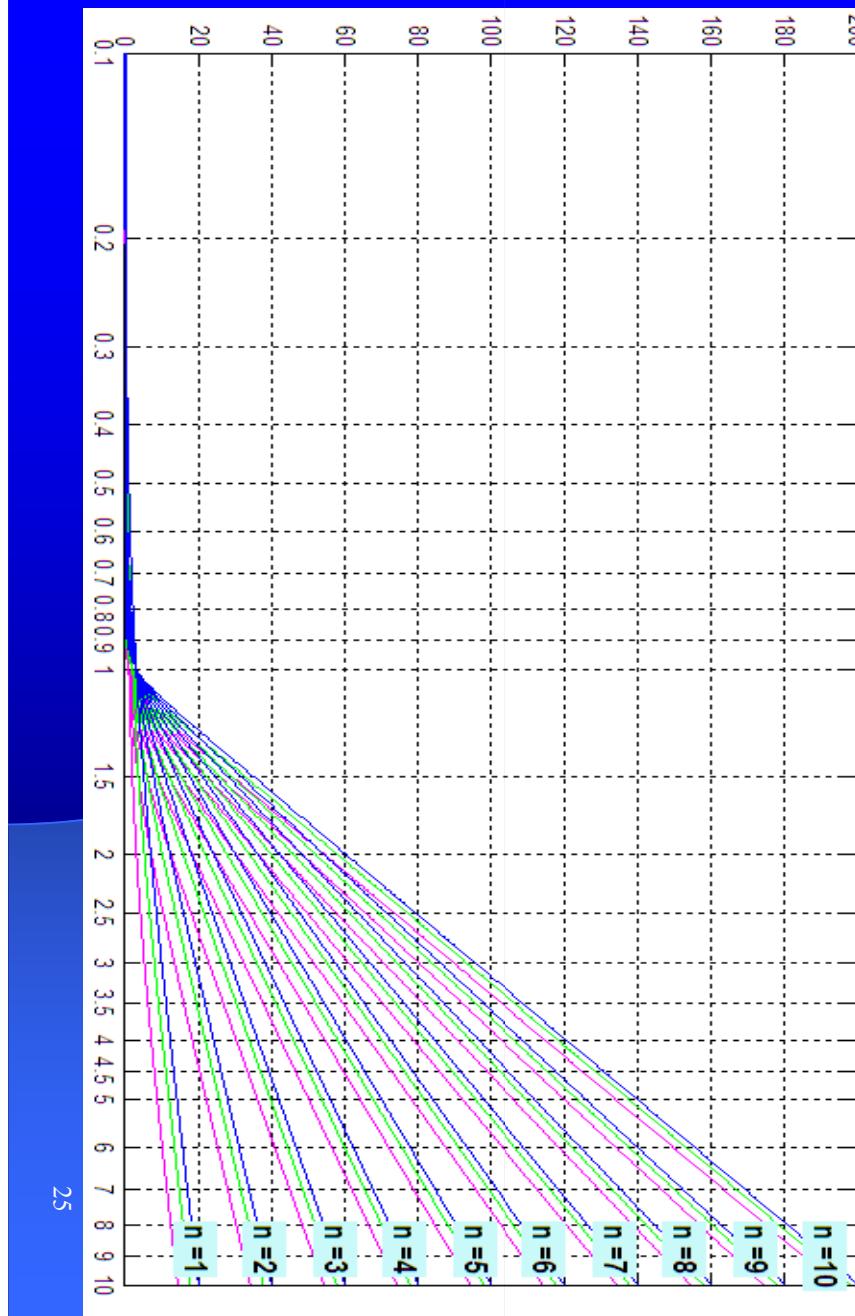
En la aproximación de Butterworth el valor de ϵ se toma generalmente igual a 1 :

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0,1 * A_{\max})} - 1} = 1 \quad \therefore A_{\max} \equiv 3[\text{dB}]$$

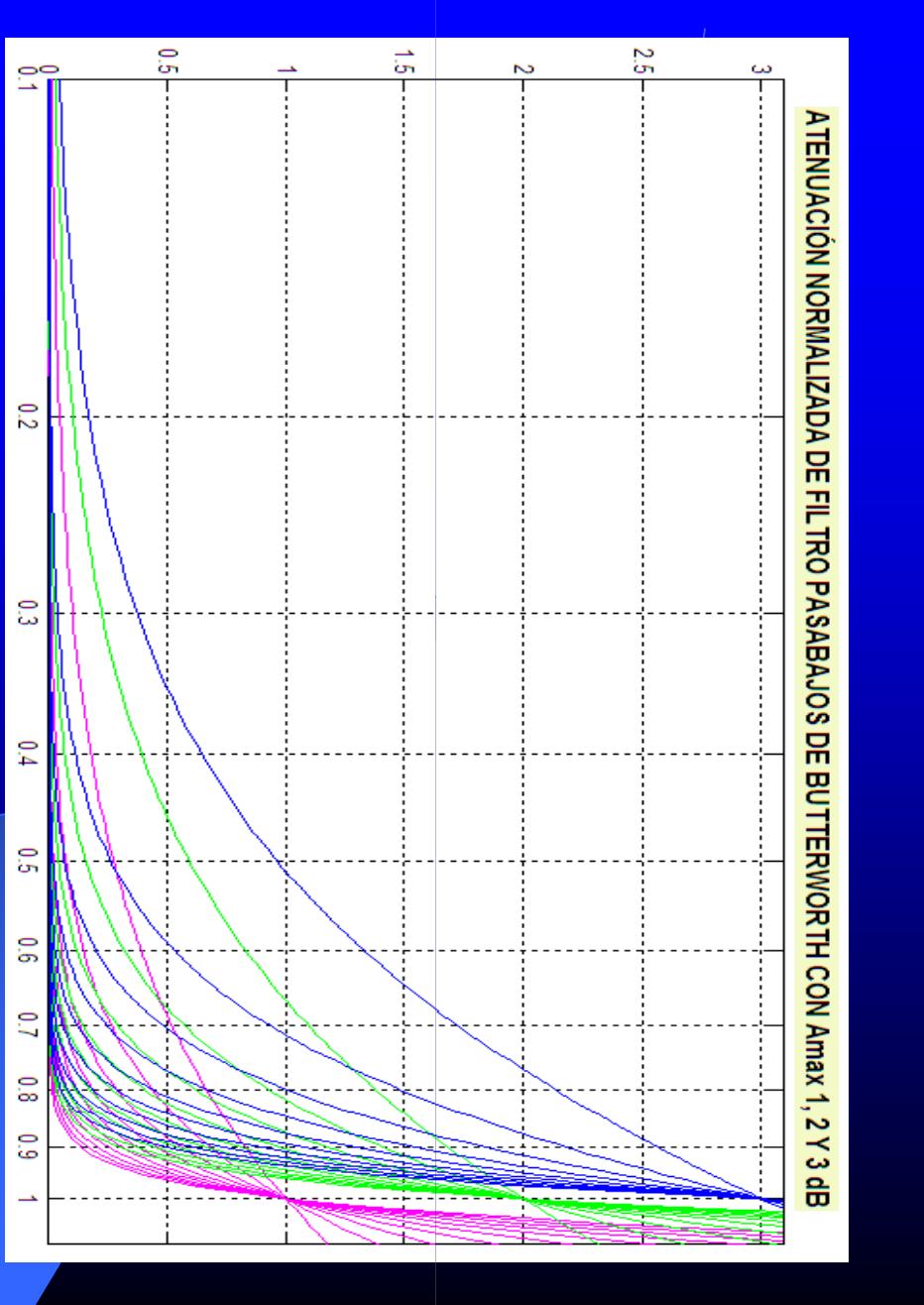
Aunque si se desea A_{\max} puede tomar valores inferiores a 3 [dB]



ATENUACIÓN NORMALIZADA DE FILTRO PASABAJO DE BUTTERWORTH CON A_{max} 1, 2 Y 3 dB



ATENUACIÓN NORMALIZADA DE FILTRO PASABAJO DE BUTTERWORTH CON A_{max} 1, 2 Y 3 dB



CALCULO DE LAS RAICES

$$\left. \begin{array}{l} K^2(\Omega) = \varepsilon^2 \Omega^{2n} \\ \varepsilon = 1 \end{array} \right\} \text{en la aproximación de Butterworth} \Rightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + K^2(\Omega)} = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) H^*(j\Omega)$$

❖ Los coeficientes de $H(s)$ son reales, por tanto:

$$H^*(j\Omega) = H(-j\Omega) \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) H(-j\Omega)$$

$$s = j\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{s}{j} = -js$$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-js)^{2n}} = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

27

CALCULO DE LAS RAICES

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n}$$

Localización de los polos

$$1 + (-s^2)^n = 0$$

La solución de esta expresión es :

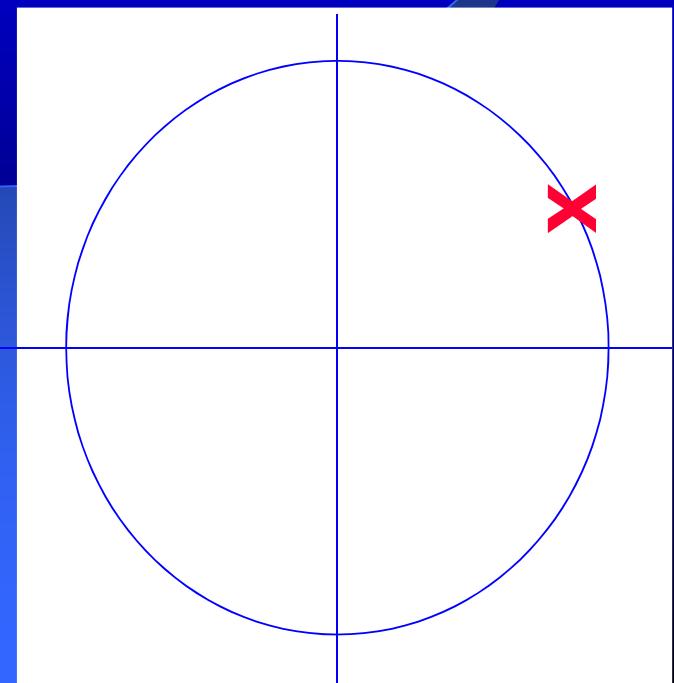
$$s_k = 1 \exp \left\{ j \frac{(2k+n-1)\pi}{2n} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

$$H(s) * H(-s) = \frac{K_{cte}}{\prod_{k=1}^n (S - S_k)}$$

EJEMPLO : CALCULO DE RAICES CON $n = 3$

$$s_k = 1 \exp\left\{j \frac{(2k+n-1)}{n} * \frac{\pi}{2}\right\} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

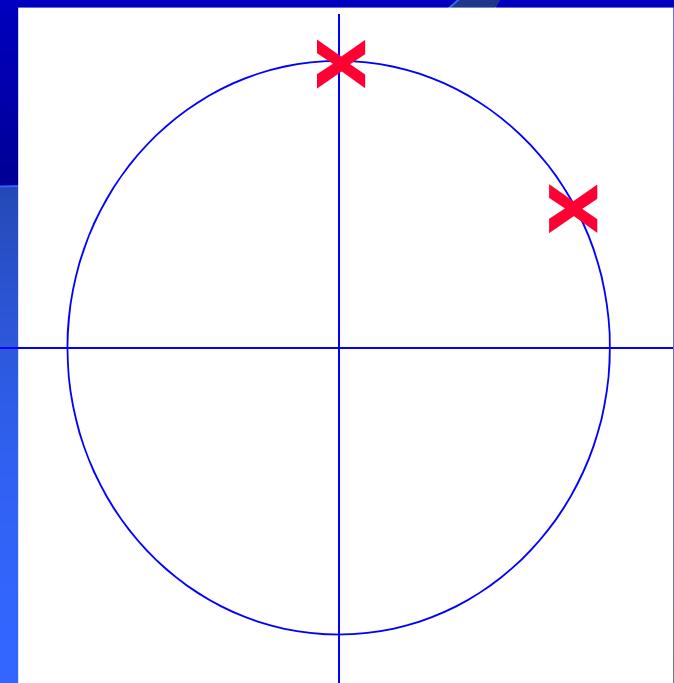
$$k = 1 \\ s_1 = 120^\circ$$



EJEMPLO : CALCULO DE RAICES CON $n = 3$

$$s_k = 1 \exp\left\{j \frac{(2k+n-1)}{n} * \frac{\pi}{2}\right\} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

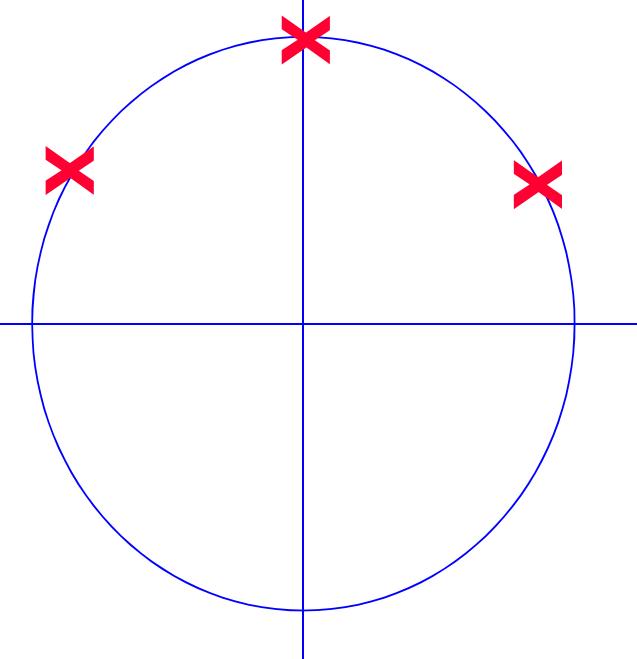
$$k = 2 \\ s_2 = 180^\circ$$



EJEMPLO : CALCULO DE RAICES CON $n = 3$

$$s_k = 1 \exp\left\{j \frac{(2k+n-1)}{n} * \frac{\pi}{2}\right\} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

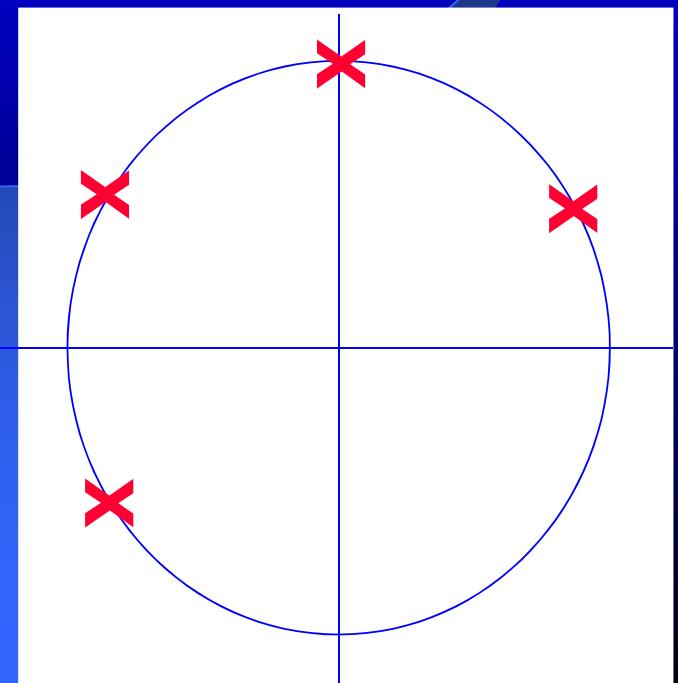
$$k = 3 \\ S_3 = 240^\circ$$



EJEMPLO : CALCULO DE RAICES CON $n = 3$

$$s_k = 1 \exp\left\{j \frac{(2k+n-1)}{n} * \frac{\pi}{2}\right\} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

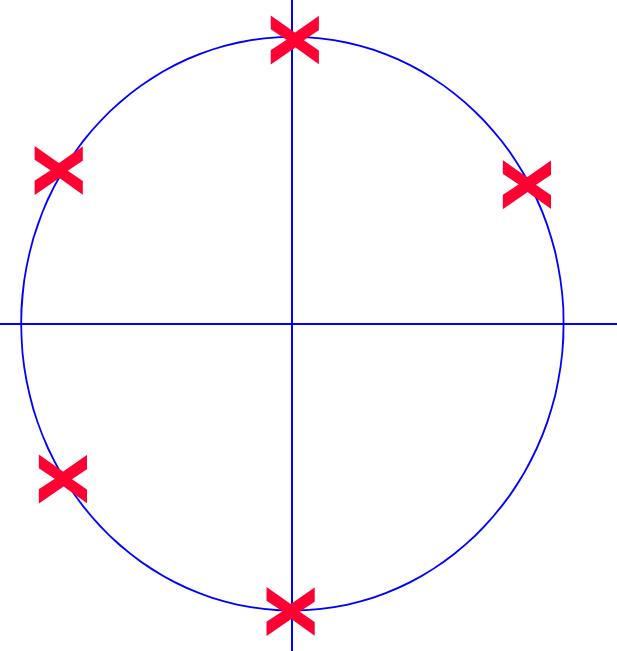
$$k = 4 \\ S_4 = 300^\circ$$



EJEMPLO : CALCULO DE RAICES CON $n = 3$

$$s_k = \exp\left\{j \frac{(2k+n-1)}{n} * \frac{\pi}{2}\right\} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

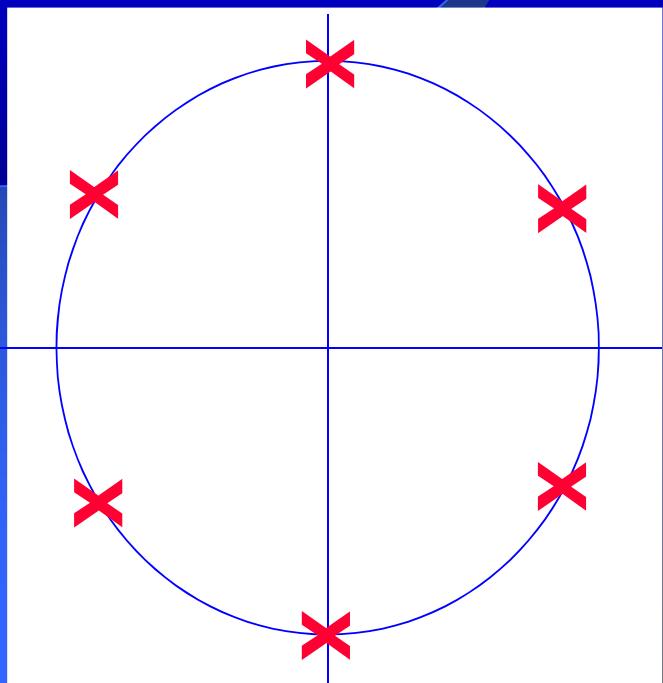
$$k = 5 \\ S_5 = 360^\circ$$



EJEMPLO : CALCULO DE RAICES CON $n = 3$

$$s_k = \exp\left\{j \frac{(2k+n-1)}{n} * \frac{\pi}{2}\right\} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

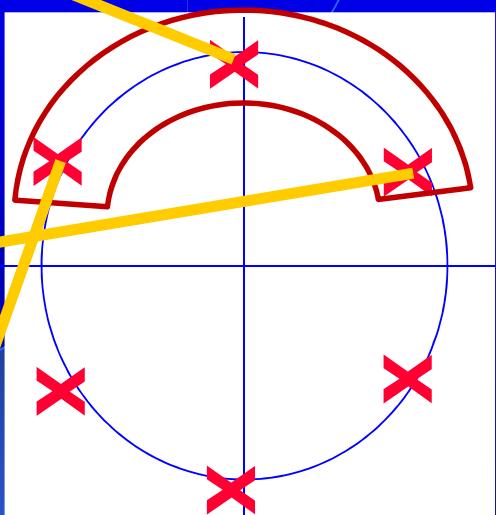
$$k = 6 \\ S_6 = 420^\circ$$



CÁLCULOS AUXILIARES

$$s_k = \exp\left\{j \frac{(2k+n-1)}{n} * \frac{\pi}{2}\right\}$$
$$s_1 = e^{j\pi} = -1$$
$$s_2 = e^{j4\pi/3} = -0.5 - j\sqrt{3}/2$$
$$s_3 = e^{j5\pi/3} = 0.5 - j\sqrt{3}/2$$
$$s_4 = e^{j2\pi} = e^{j0} = 1$$
$$s_5 = e^{j\pi/3} = 0.5 + j\sqrt{3}/2$$

Para definir $H_{(S)}$ se toman las raíces del semiplano izquierdo. (Raíces con parte real negativa)

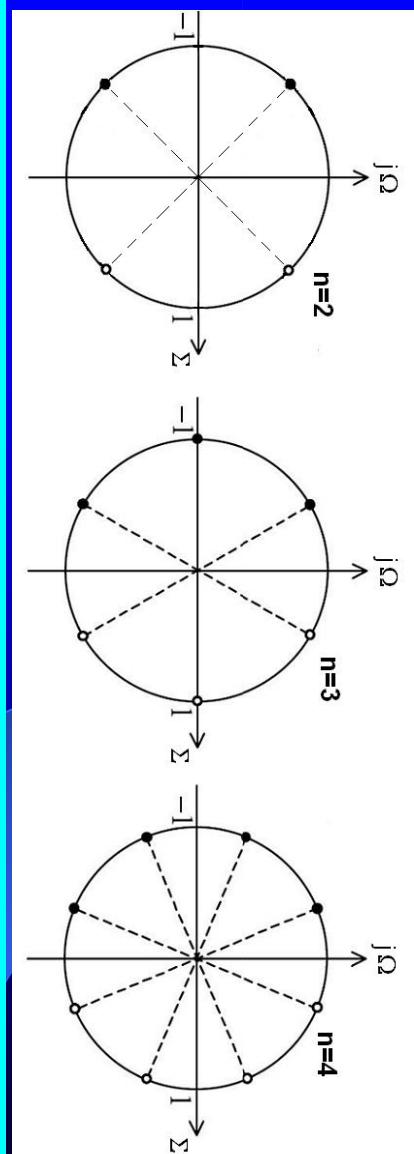


$$H(s) = \frac{1}{(S+1)*(S+0,5+j0,866)*(S+0,5-j0,866)}$$

$$H(s) = \frac{1}{(S^3 + 2S^2 + 2S + 1)}$$

DISTRIBUCIÓN DE RAÍCES PARA DISTINTOS VALORES DE N

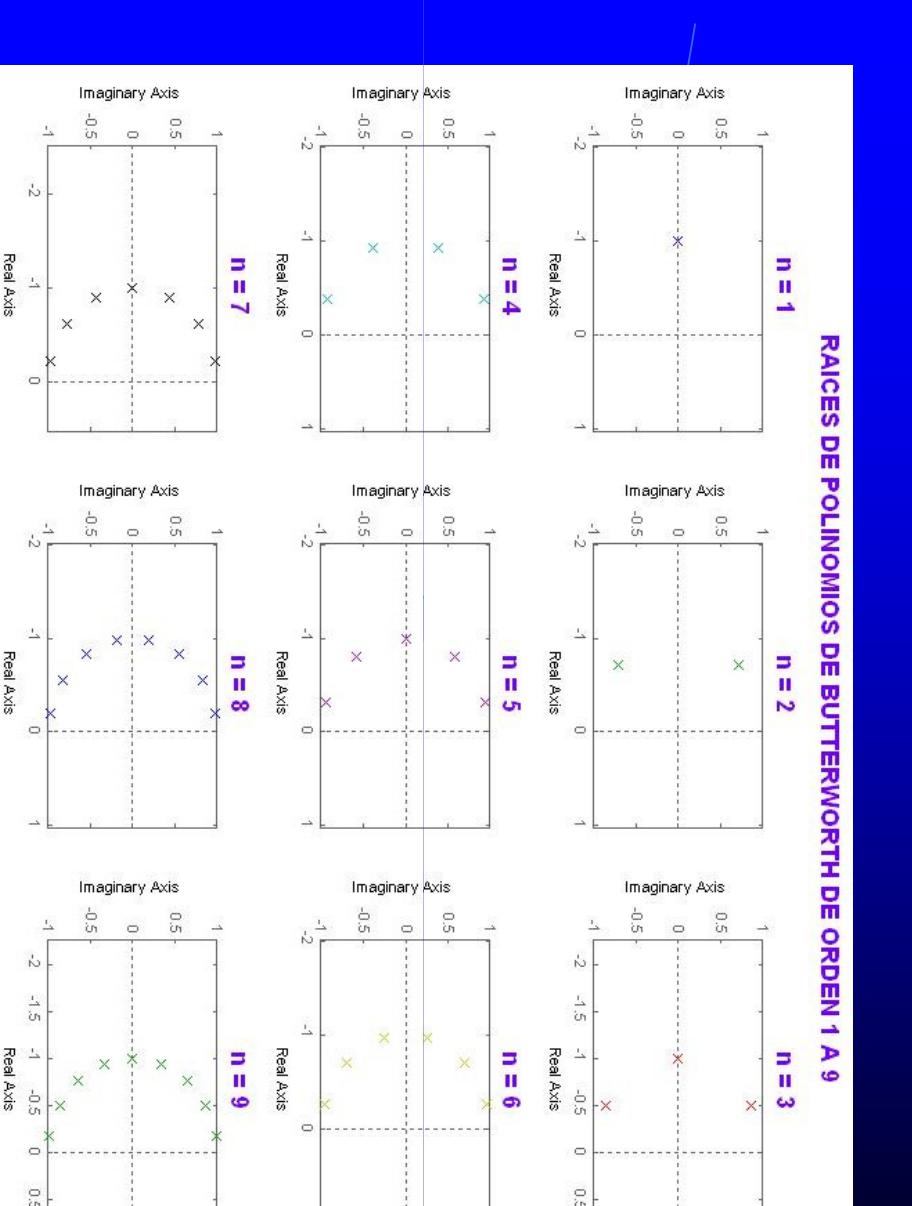
Para cualquier n , las raíces de la aproximación de Butterworth normalizada están distribuidas en forma uniforme sobre un círculo de radio unitario en el plano S. Las del semiplano izquierdo se identifican con $H(S)$ y las del semiplano derecho con $H(-S)$.



Hay una expresión general , que dice que para n impar, la primer raíz, está en $+1$ y que las raíces restantes estarán equidistantes para cualquier n a $360^\circ/n$

3/

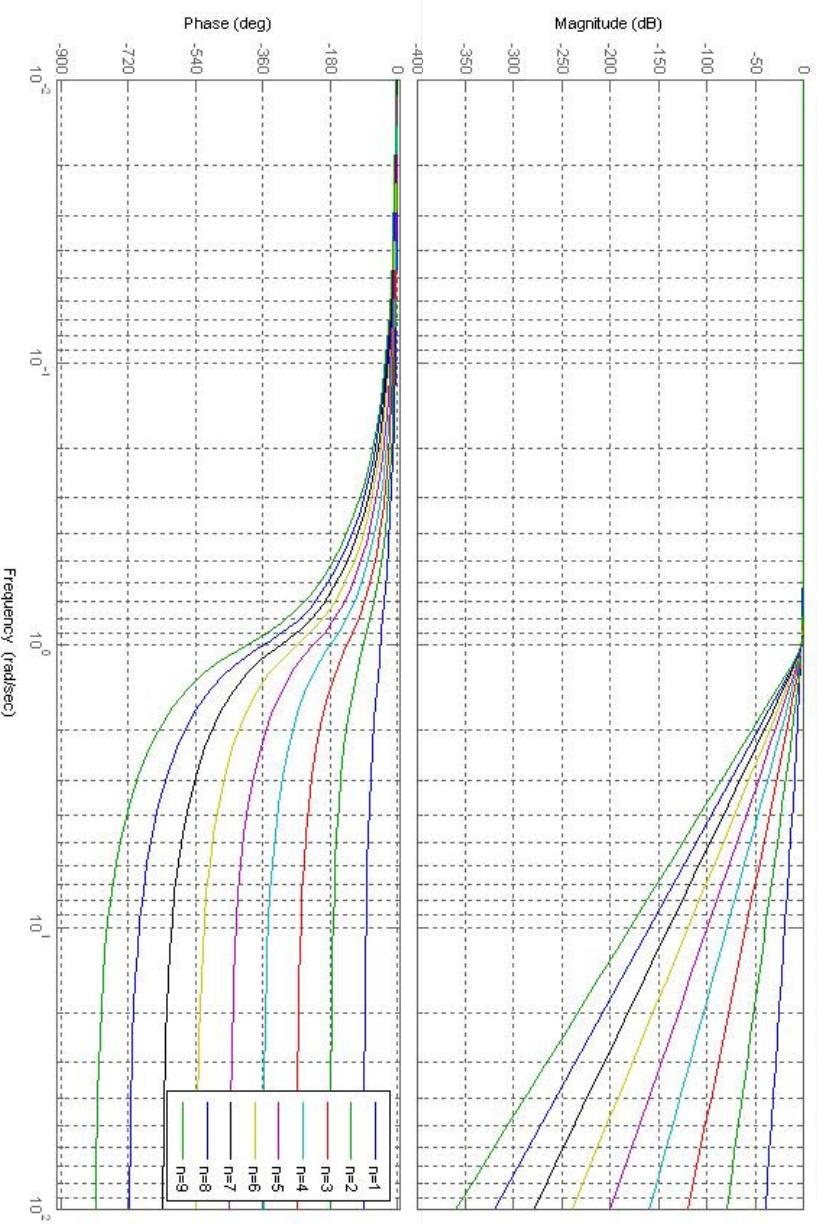
RAÍCES DE POLINOMIOS DE BUTTERWORTH DE ORDEN 1 A 9



Curvas obtenidas con programa BUTT_PRU.m en MATLAB³⁸



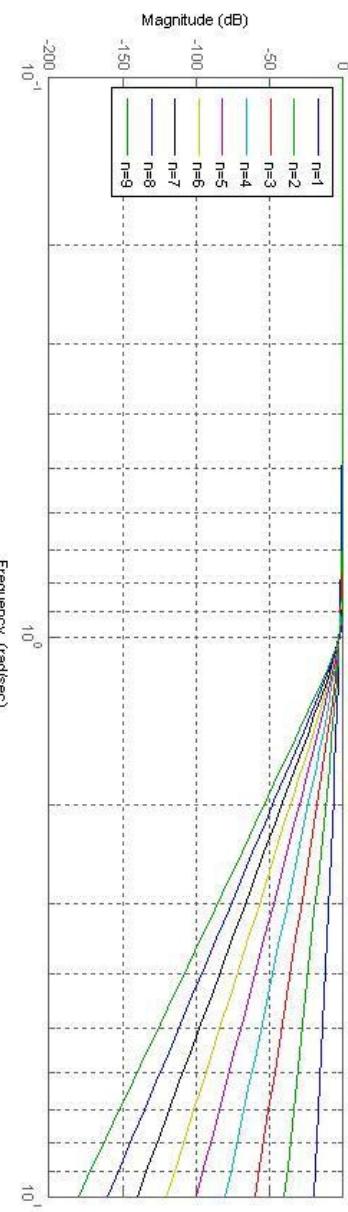
CURVAS DE GANANCIA Y DE FASE DE POLINOMIOS DE BUTTERWORT DE ORDEN 1 A 9



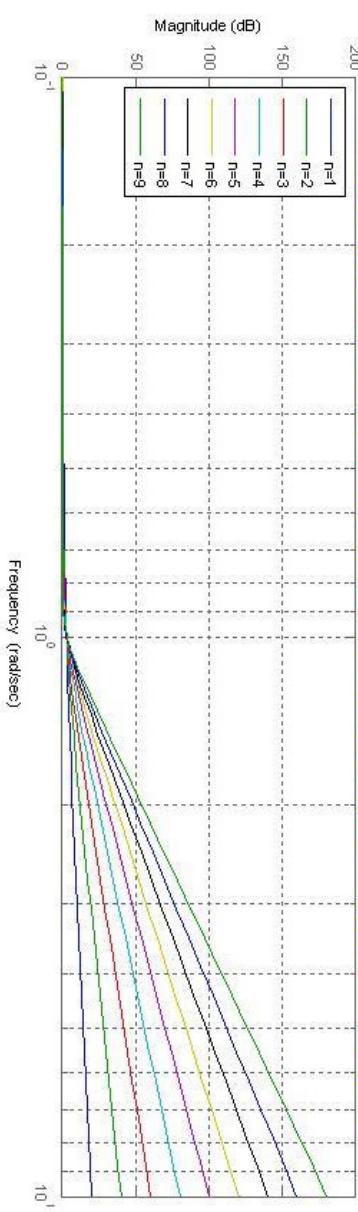
Curvas obtenidas con programa **BUTT_PRU.m** en MATLAB³⁹



CURVAS DE GANANCIA DE POLINOMIOS DE BUTTERWORT DE ORDEN 1 A 9



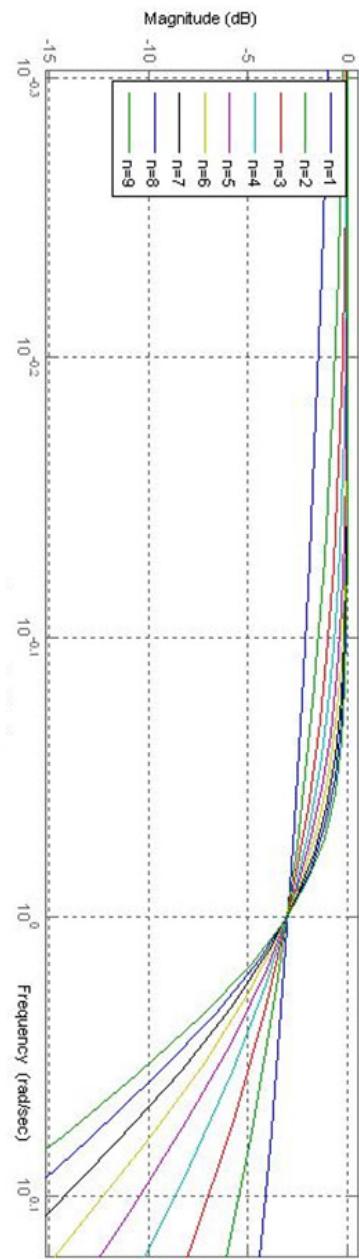
CURVAS DE ATENUACION DE POLINOMIOS DE BUTTERWORT DE ORDEN 1 A 9



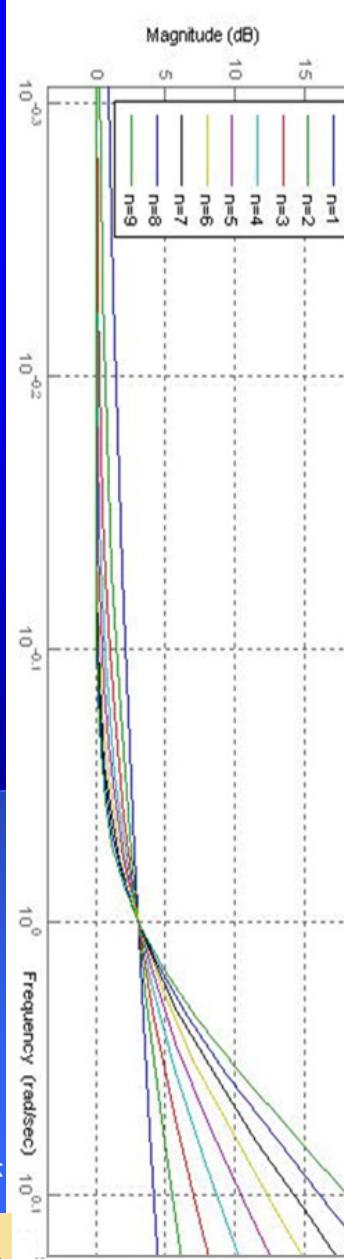
Curvas obtenidas con programa **BUTT_PRU.m** en MATLAB⁴⁰



CURVAS DE GANANCIA DE POLINOMIOS DE BUTTERWORTH DE ORDEN 1 A 9



CURVAS DE ATENUACION DE POLINOMIOS DE BUTTERWORTH DE ORDEN 1 A 9



Curvas obtenidas con programa BUTT_PRU.m en MATLAB⁴



FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE FILTROS PASA-BAJOS DE BUTTERWORTH DE GRADO 1 a 5

1st Order Low Pass Butterworth

$$\frac{1}{S + 1}$$

2nd Order Low Pass Butterworth

$$\frac{1}{S^2 + 1.414S + 1}$$

4th Order Low Pass Butterworth

$$\frac{1}{S^4 + 2.613S^3 + 3.414S^2 + 2.613S + 1}$$

5th Order Low Pass Butterworth

$$\frac{1}{S^5 + 3.236S^4 + 5.236S^3 + 5.236S^2 + 3.236S + 1}$$

<i>n</i>	Denominador de $H(s)$ para filtros de Butterworth
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.414s + 1$
3	$(s^2 + s + 1)(s + 1)$
4	$(s^2 + 0.765 + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
6	$(s^2 + 0.517s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.932s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.445s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.802s + 1)$
8	$(s^2 + 0.390s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.663s + 1)(s^2 + 1.962s + 1)$

43

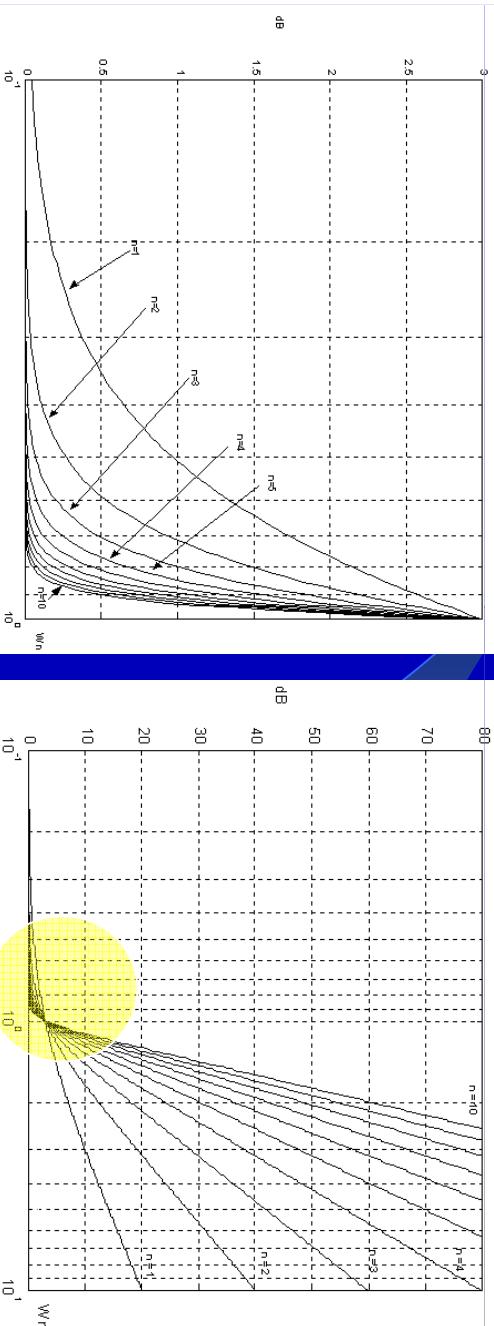
CÁLCULO DE LA ATENUACIÓN EN FILTROS DE BUTTERWORTH

$$\left| A_{(j\omega)} \right|^2 = \left| \frac{1}{H_{(j\omega)}} \right|^2 = 1 + \Omega^{2n} \quad \therefore \quad \left| A_{(j\omega)} \right| = \sqrt{1 + \Omega^{2n}}$$

$$\left| A_{(j\omega)} \right|_{dB} = -20 \log_{10} \left| H_{(j\omega)} \right| = 10 \log_{10} \left(1 + \Omega^{2n} \right)$$

$$\left| A_{(\omega=0)} \right|_{dB} = 10 \log_{10} (1 + 0) = 0 [dB]$$

$$\left| A_{(\omega=1)} \right|_{dB} = 10 \log_{10} (1 + 1) \approx 3 [dB]$$



CÁLCULO DEL ORDEN EN FILTROS DE BUTTERWORTH

MÉTODO 1 :

$K_s \Rightarrow$ Factor de Selectividad

$$K_s = \frac{\omega_p}{\omega_s} \quad K_s < 1 \text{ en Filtros Pasa Bajos}$$

$K_d \Rightarrow$ Factor de Discriminación

$$K_d = \sqrt{\frac{\frac{A_{\max}}{10^{10}} - 1}{\frac{A_{\min}}{10^{10}} - 1}}$$

$0 < K_d < 1 \quad A_{\max} \text{ y } A_{\min} \text{ en dB}$

$$n \geq \frac{\log_{10}(K_d)}{\log_{10}(K_s)}$$

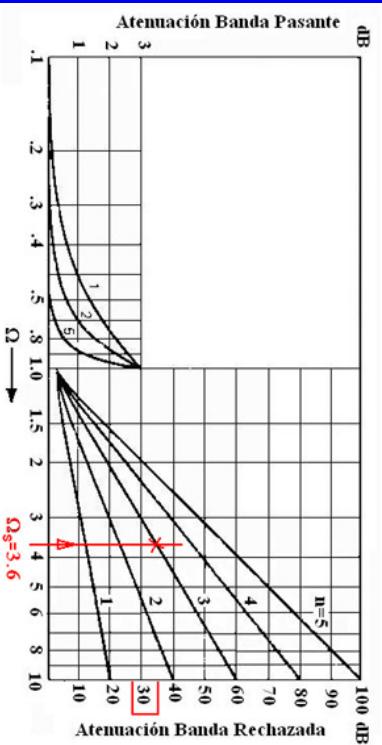
45

CÁLCULO DEL ORDEN EN FILTROS DE BUTTERWORTH

MÉTODO 2 :

$$A(\omega_s) = 10 \cdot \log_{10} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^{2n} \right] = A_{\min} \Rightarrow n = \frac{\log_{10} \left(\frac{10^{0,1 \cdot A_{\min}} - 1}{\varepsilon^2} \right)}{\log_{10} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^2}$$

MÉTODO 3 : GRÁFICO



46

CÁLCULO DEL ORDEN EN FILTROS DE BUTTERWORTH

MÉTODO 4:

"Aplicación en MATLAB"



```
[n,Wn]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s') ;
```

```
[num , den]=butter (n, Wo , 's') ;
```

```
t = tf ( num , den) ;
```

```
pzmap ( t ,color ) ;
```

```
bode ( t ) ;
```

EJEMPLO: encontrar la función de aproximación de Butterworth (normalizada y desnormalizada) para la siguiente plantilla de especificaciones de un filtro pasa bajos.

Datos :

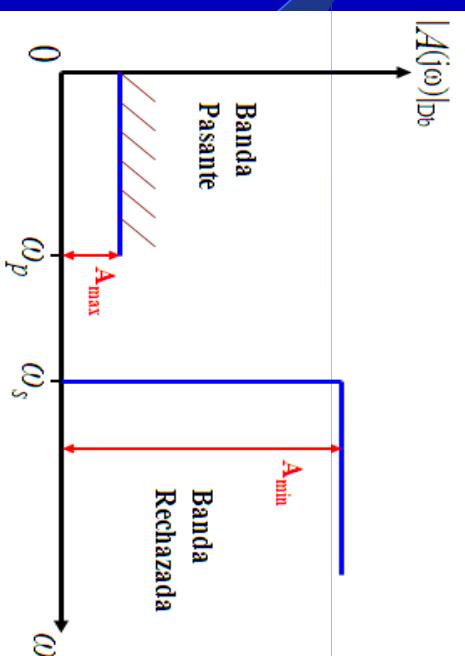
$$\omega_p = 150 [rad / seg]$$

$$A_{\max} = 3 [dB]$$

$$\omega_s = 550 [rad / seg]$$

$$A_{\min} = 30 [dB]$$

$$R_L = 10 [\Omega]$$



METODO 1:

$K_s \Rightarrow$ Factor de Selectividad

$$K_s = \frac{\omega_p}{\omega_s} \quad K_s < 1 \text{ en Filtros Pasa Bajos}$$

$K_d \Rightarrow$ Factor de Discriminación

$$K_d = \sqrt{\frac{\frac{A_{\max}}{10^{\frac{10}{10}}} - 1}{\frac{A_{\min}}{10^{\frac{10}{10}}} - 1}}$$

$$0 < K_d < 1 \quad A_{\max} \text{ y } A_{\min} \text{ en dB}$$

$$K_s = \frac{\omega_p}{\omega_s} = \frac{150}{550} = 0,272727$$

$$K_d = \frac{\sqrt{10^{(0,1*3)} - 1}}{\sqrt{10^{(0,1*30)} - 1}} = 0,031563564$$

49

METODO 1:

$$n \geq \frac{\log_{10}(K_d)}{\log_{10}(K_s)}$$

$$n \geq \frac{\log_{10}(K_d)}{\log_{10}(K_s)} = \frac{\log_{10}(0,031563564)}{\log_{10}(0,272727)} = 2,659$$

$$\therefore n = 3$$

METODO 2:

$$A(\omega_s) = 10 \cdot \log_{10} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^{2n} \right] = A_{\min} \Rightarrow n = \frac{\log_{10} \left(\frac{10^{0,1 \cdot A_{\min}} - 1}{\varepsilon^2} \right)}{\log_{10} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^2}$$

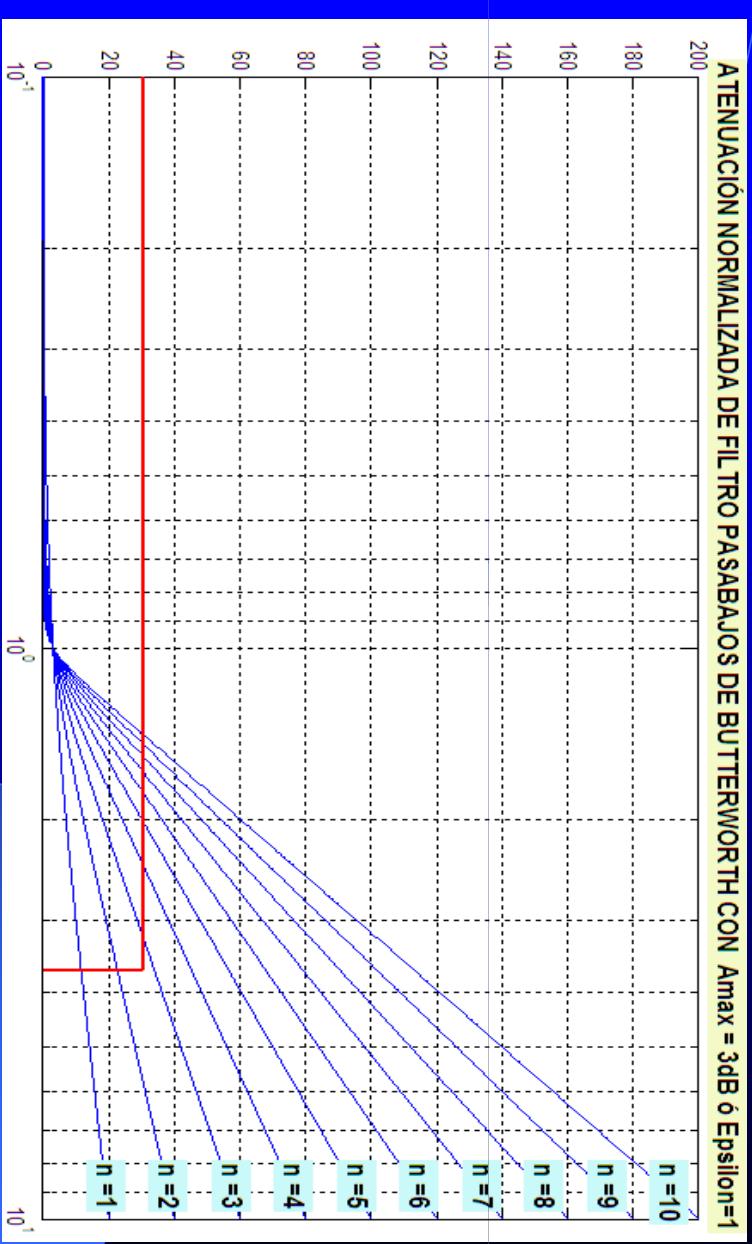
$$n \geq \frac{\log_{10} \left[\frac{(10^{(0,1 \cdot 30)} - 1)}{1} \right]}{\log_{10} \left[\frac{550}{150} \right]^2} = 2,6579101$$

∴ $n = 3$

51

METODO 3: Método Gráfico

Datos: A_{\min} , ε y Ω (norm.) = $\varepsilon * (\omega_s / \omega_p)$



MÉTODO 4:

"Aplicación en MATLAB"



```
[n,Wn]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');
```

```
[num, den]=butter (n, Wo, 's');
```

```
t = tf (num , den);
```

```
pzmap ( t ,color );
```

```
bode ( t );
```

APROXIMACIÓN DE CHEVYSHEV

$$K^2(\omega) = \varepsilon^2 C_n^2(\omega) \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + K^2(\omega)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}$$

❖ Donde $0 < \varepsilon < 1$

$$C_n(\omega) = \begin{cases} \cos[n \arccos(x)] & \omega \leq 1 \\ \cosh[n \operatorname{arccosh}(x)] & \omega > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{n = 0 \rightarrow C_0(\omega) = 1} \text{ y } \boxed{n=1 \rightarrow C_1(\omega) = \omega}$$

Se puede demostrar de forma sencilla que:

$$C_{n+1}(\omega) + C_{n-1}(\omega) = 2\omega C_n(\omega)$$

$$S_k = 1 \exp \left\{ j \frac{(2k+n-1)\pi}{2n} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

APROXIMACIÓN DE CHEVYSHEV

💡 ¿Dónde están los polinomios?

$$C_0(\omega) = 1 \quad ; \quad C_1(\omega) = \omega \quad \text{directamente de la definición}$$

$$C_2(\omega) = 2\omega C_1(\omega) - C_0(\omega) = 2\omega^2 - 1$$

$$C_3(\omega) = 2\omega C_2(\omega) - C_1(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$$

...

💡 De estas expresiones se deduce que:

$$C_n^2(0) = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow |H(j0)| = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}} & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$C_n^2(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad |H(j1)| = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}}$$

55

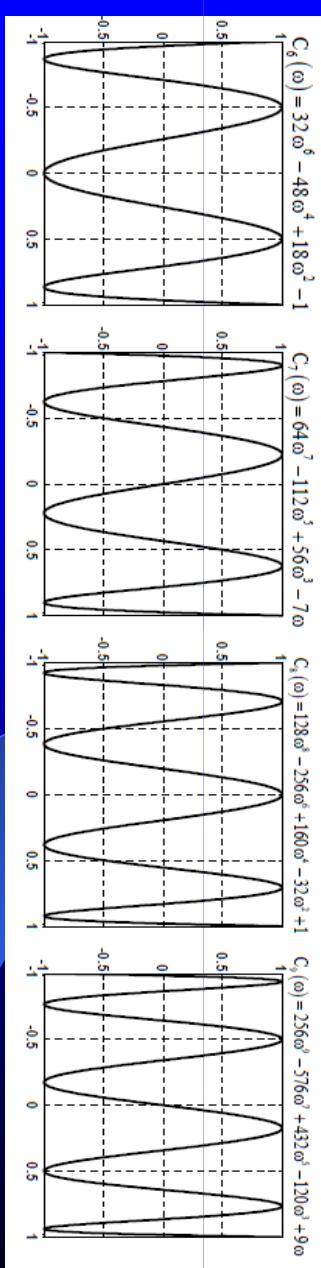
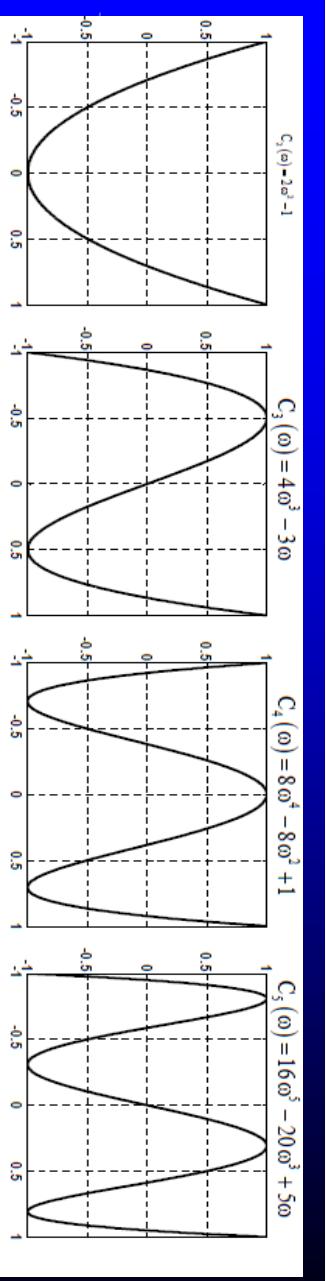
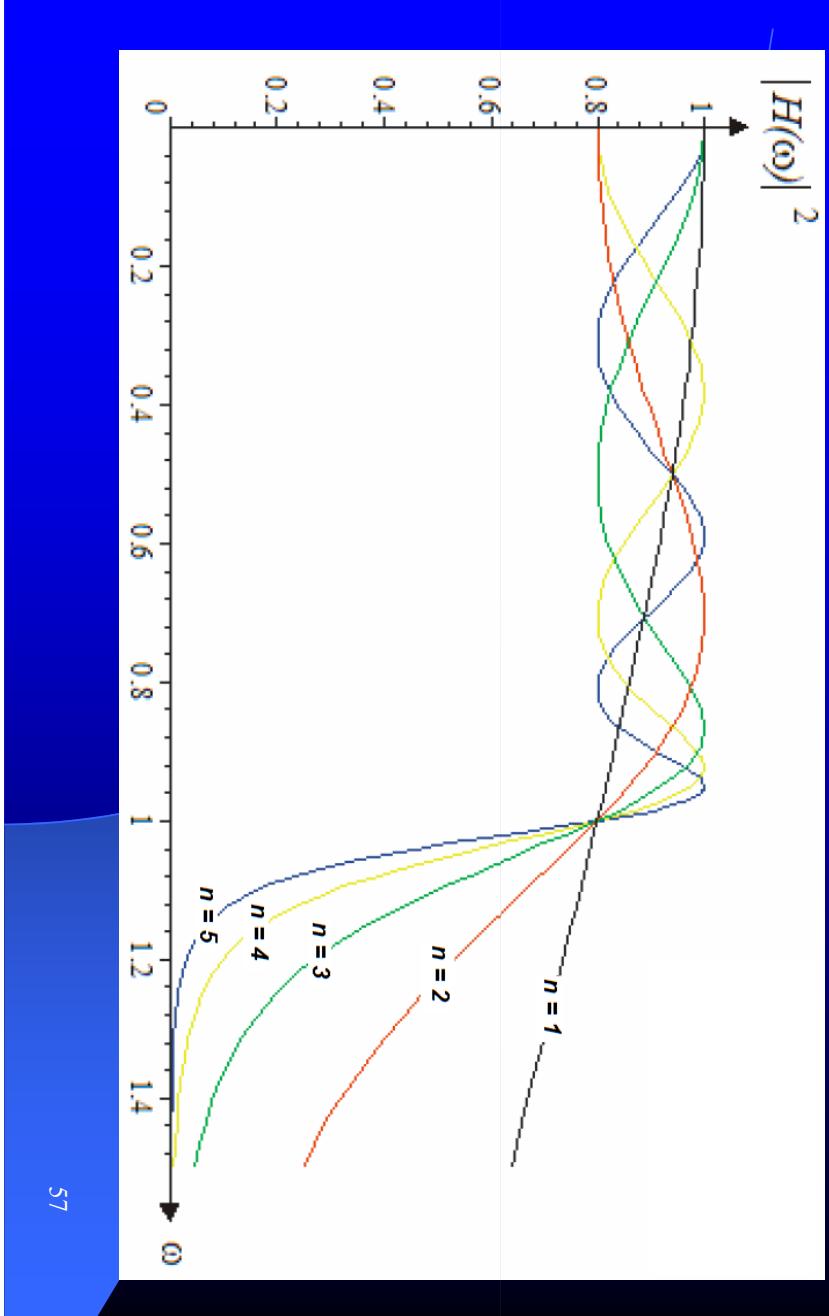


TABLA DE POLINOMIOS DE CHEVYSHEV

n	$C_n(\omega)$
0	1
1	ω
2	$2\omega^2 - 1$
3	$4\omega^3 - 3\omega$
4	$8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$
5	$16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$
6	$32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1$
7	$64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega$
8	$128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1$
9	$256\omega^9 - 576\omega^7 + 432\omega^5 - 120\omega^3 + 9\omega$
10	$512\omega^{10} - 128\omega^8 + 1120\omega^6 - 400\omega^4 + 50\omega^2 - 1$

56

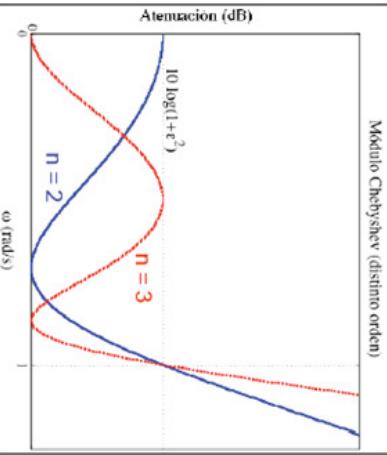
APROXIMACIÓN DE CHEVYSHEV



$$C_n^2(0) = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow |H(j0)| = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}} & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$C_n^2(1) = 1$$

58



$$A_{\text{dB}}(1) = A_{\text{máx}}$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{A_{\text{máx}} / 10} - 1}$$

$$A_{\text{dB}}(1) = -20 \log|A(j1)| = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$A_{\text{dB}}(0) = -20 \log|A(j0)| = \begin{cases} 10 \log(1 + \epsilon^2) & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

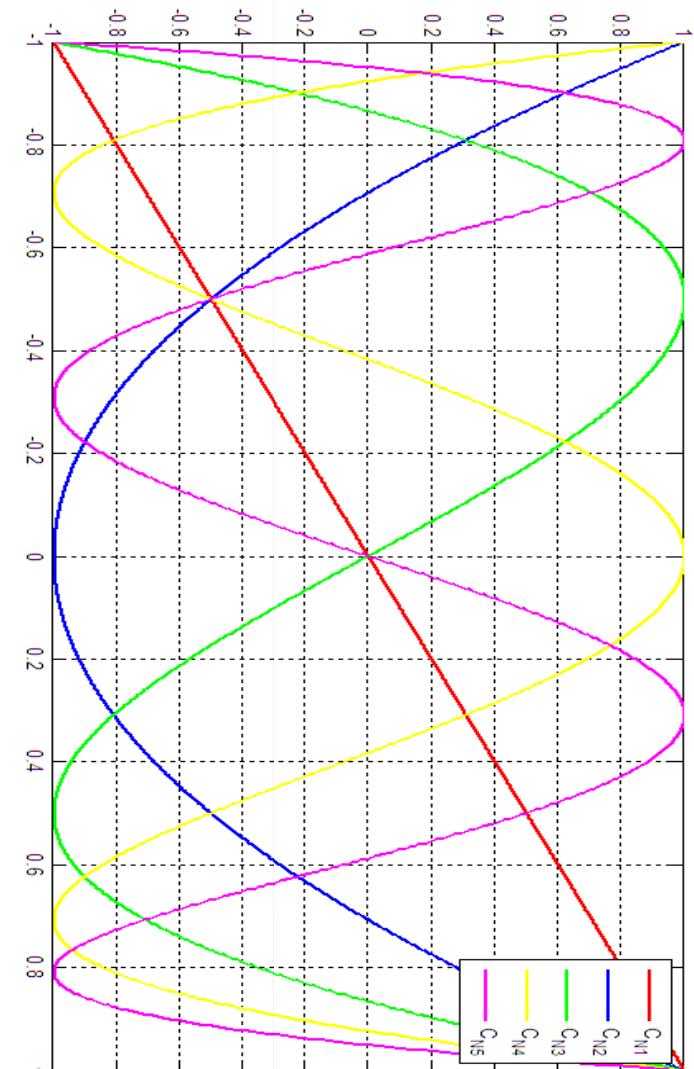
En términos de atenuación,

APROXIMACIÓN DE CHEBYSHEV

Curvas obtenidas con programa **CHEVY_CRESTA_VALLE.m** en MATLAB



59



APROXIMACIÓN DE CHEVYSHEV



Localización de los polos de $H(s)H(-s)$:

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

❖ Donde

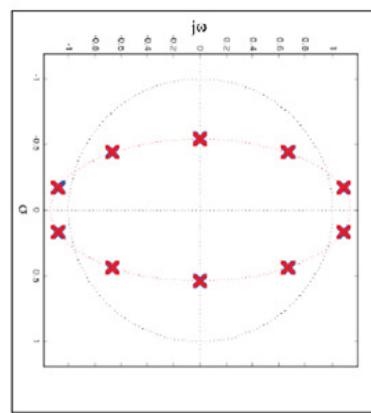
$$\sigma_k = \operatorname{senh}(a) \operatorname{sen} \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \quad \omega_k = \cosh(a) \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right]$$

$$a = \frac{\operatorname{arcseinh}(1/\varepsilon)}{n} \equiv \text{coeficiente de compresión}$$

❖ Los polos Chebyshev verifican que:

$$\frac{\sigma_k^2}{\operatorname{senh}^2(a)} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2(a)} = 1$$

ecuación de una ellipse



"Aplicación en MATLAB"



```
[N, Wp] = cheb1ord(Wp, Ws, Wo, Rp, Rs);
```

```
[num, den]=cheby1(n, Rp, Wo,'s');
```

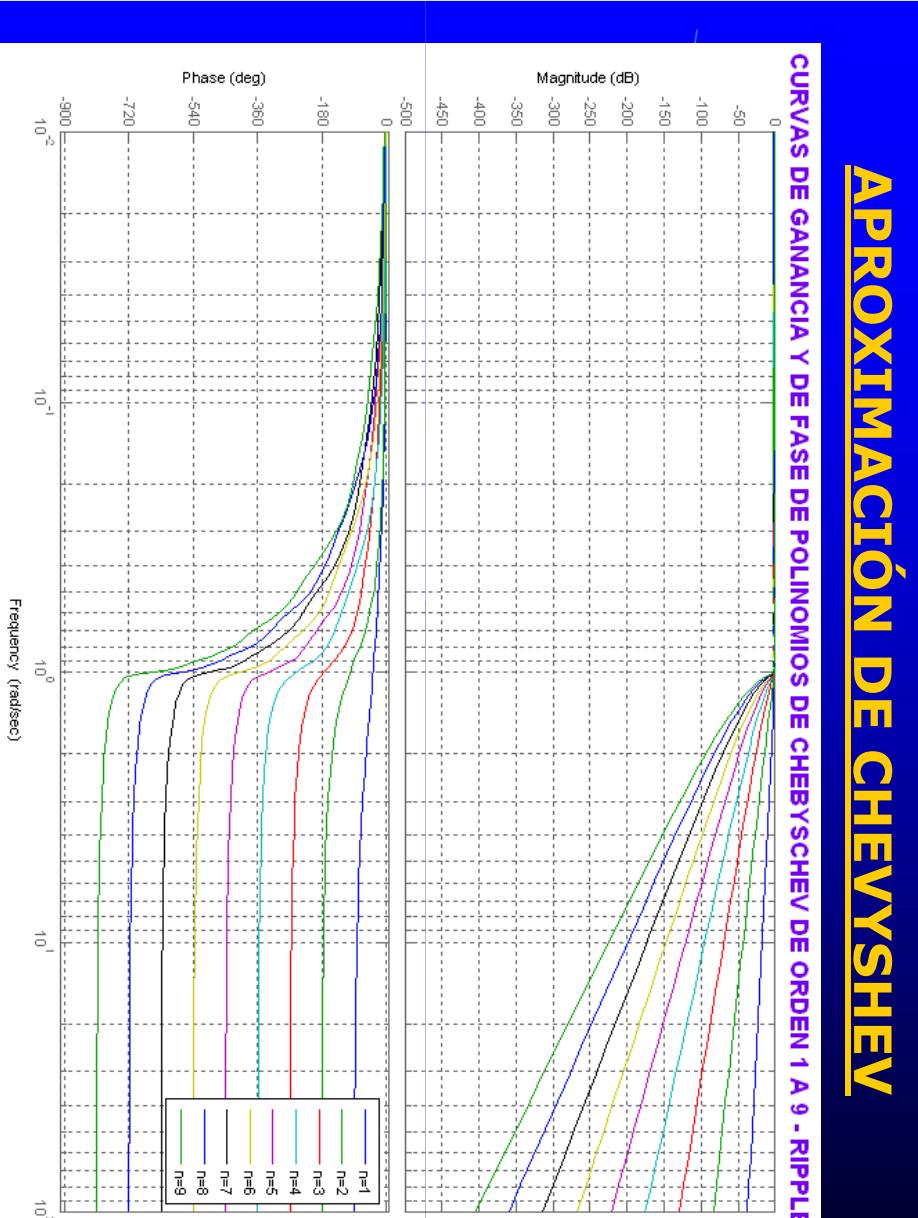
```
t = tf(num, den);
```

```
pzmap(t,color);
```

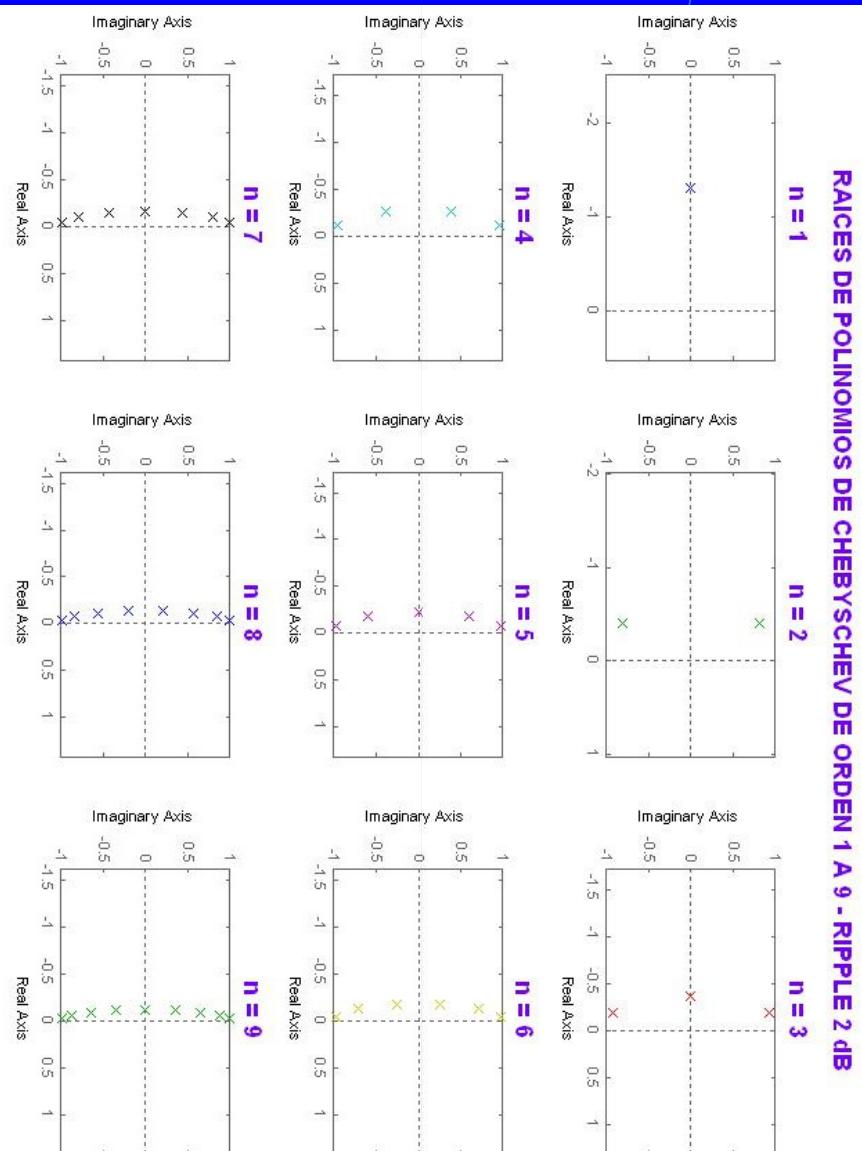
```
bode(t);
```



APROXIMACIÓN DE CHEBYSHEV

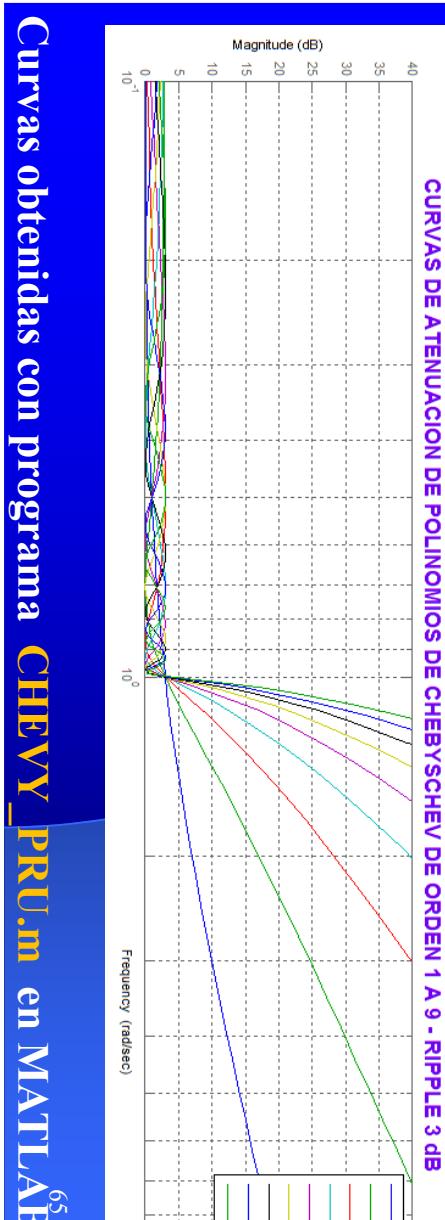
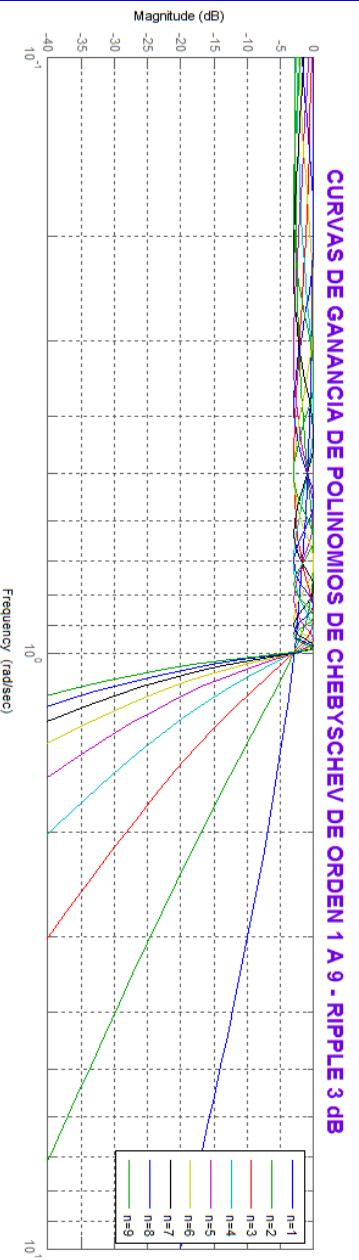


Curvas obtenidas con programa **CHEVY_PRU.m** en **MATLAB⁶³**



Curvas obtenidas con programa **CHEVY_PRU.m** en **MATLAB⁶⁴**

APROXIMACIÓN DE CHEVYSHEV



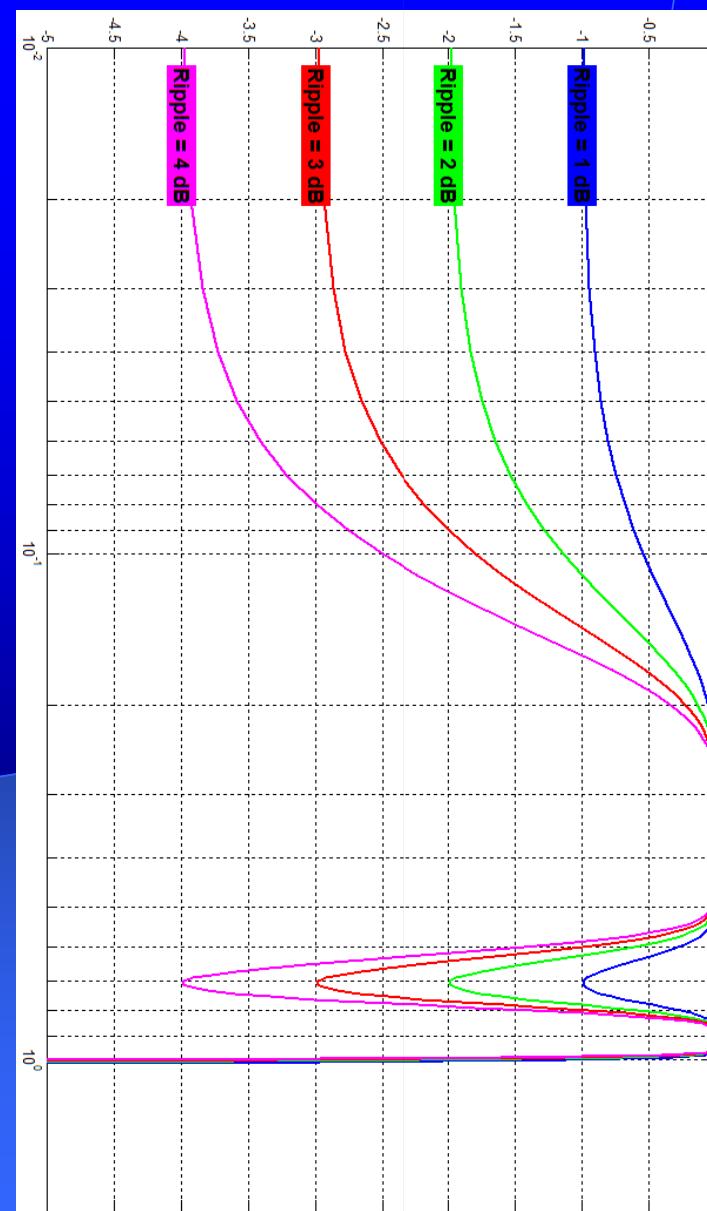
Curvas obtenidas con programa **CHEVY_PRU.m** en MATLAB⁶⁵

Polinomios para filtros de Chebychev con $R_p = 0.1$ dB.

ORDEN	FORMA FACTORIAL
2	$s^2 + 2.371s + 3.311$
3	$(s^2 + 0.97s + 1.689)(s + 0.97)$
4	$(s^2 + 0.528s + 1.33)(s^2 + 1.276s + 0.623)$
5	$(s^2 + 0.333s + 1.195)(s^2 + 0.872s + 0.636)(s + 0.539)$
6	$(s^2 + 0.885s + 0.263)(s^2 + 0.229s + 1.13)(s^2 + 0.627s + 0.696)$
7	$(s^2 + 0.167s + 1.093)(s^2 + 0.679s + 0.33)(s^2 + 0.47s + 0.753)(s + 0.377)$

APROXIMACIÓN DE CHEVYSHEV

Características de diseño de Filtros Pasa-bajos de Chevyshev de orden n=4 y ripple de 1 a 4 dB



67

APROXIMACIÓN DE BESEL

💡 La aproximación de Bessel se obtiene a partir de la siguiente expresión :

$$H_{(S)} = \frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{B_n(0)}{B_n(S)}$$

💡 Donde $B_n(S)$ es el polinomio de Bessel de orden "n" definido por la siguiente ecuación recursiva:

$$B_0(S) = 1$$

$$B_1(S) = (S+1)$$

$$\text{y} \quad B_n(S) = (2n-1)B_{n-1}(S) + S^2 B_{n-2}(S)$$

EJEMPLOS :

$$H_{(S)} \Big|_{n=2} = \frac{3}{S^2 + 3S + 3}$$

$$H_{(S)} \Big|_{n=3} = \frac{15}{S^3 + 6S^2 + 15S + 15}$$

68

Polinomios de Bessel y ecuación de recurrencia

$$B_0(p) = 1$$

$$B_1(p) = p + 1$$

$$B_2(p) = p^2 + 3p + 3$$

$$B_3(p) = p^3 + 6p^2 + 15p + 15$$

$$B_4(p) = p^4 + 10p^3 + 45p^2 + 105p + 105$$

$$B_5(p) = p^5 + 15p^4 + 105p^3 + 420p^2 + 945p + 945$$

$$B_6(p) = p^6 + 210p^4 + 1260p^3 + 4725p^2 + 10395p + 10395$$

⋮

$$B_{N+1}(p) = (2N+1)B_N(p) + p^2 B_{N-1}(p)$$

69



[num, den]=besself (n, wo);

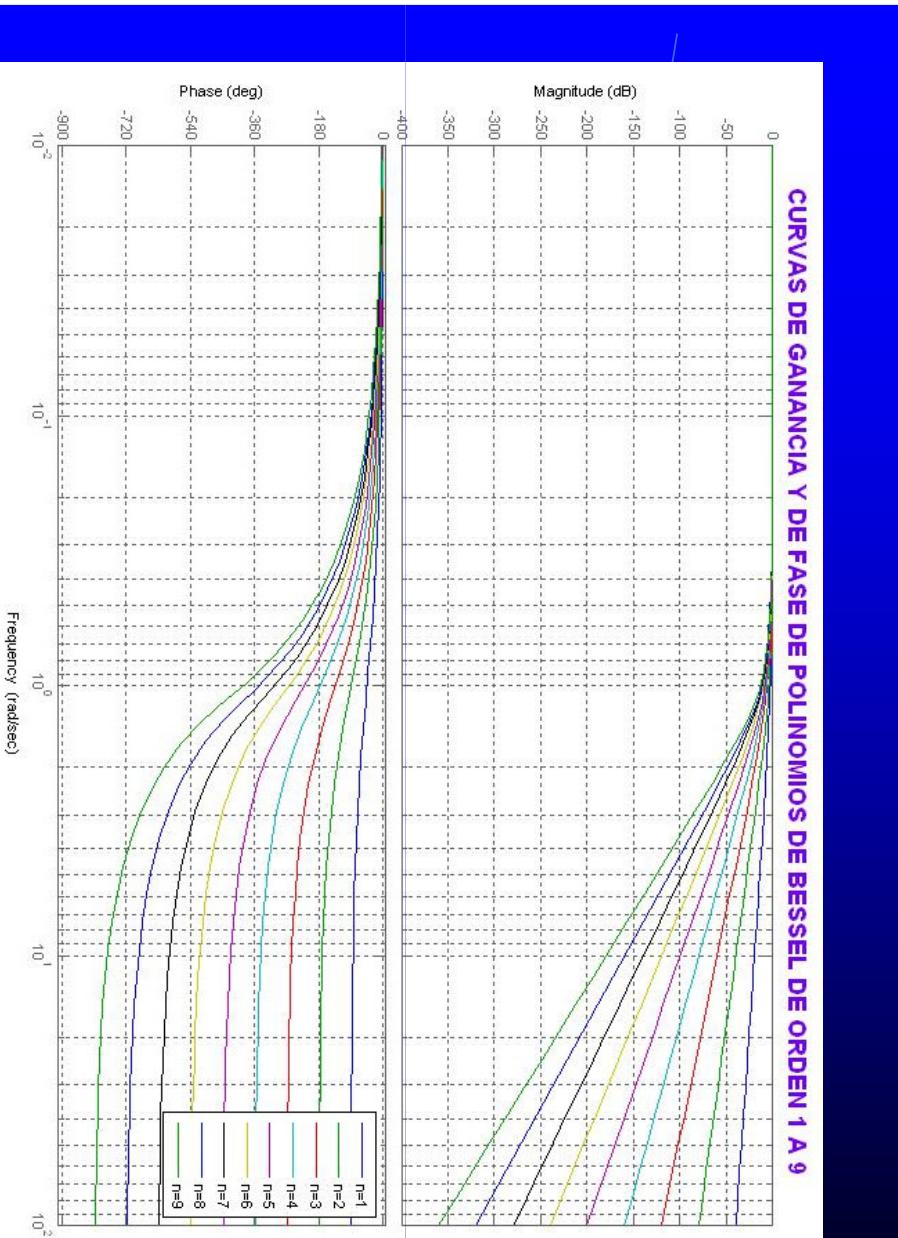
t = tf (num , den);

pzmap (t ,color);

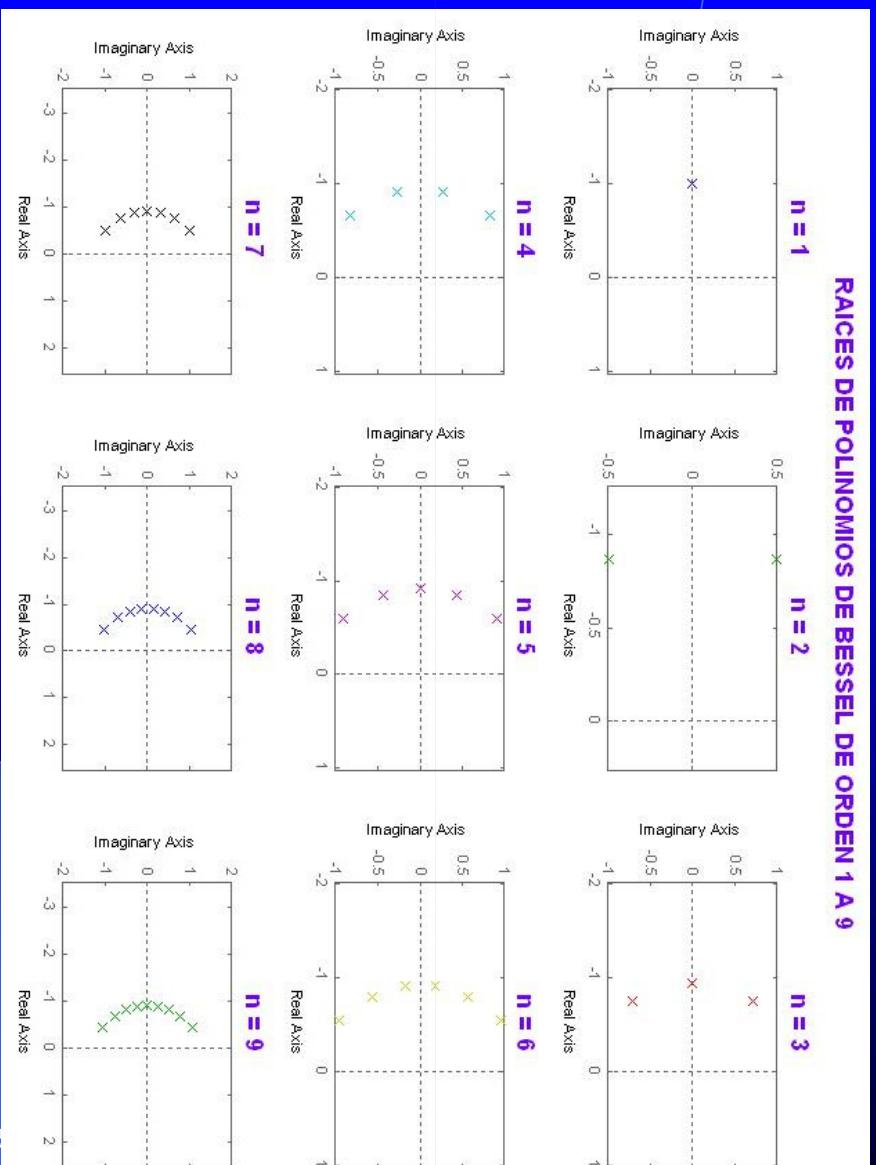
bode (t);

70

CURVAS DE GANANCIA Y DE FASE DE POLINOMIOS DE BESSSEL DE ORDEN 1 A 9



Curvas obtenidas con programa BESSEL_PRU.m en MATLAB



Curvas obtenidas con programa BESSEL_PRU.m en MATLABTM



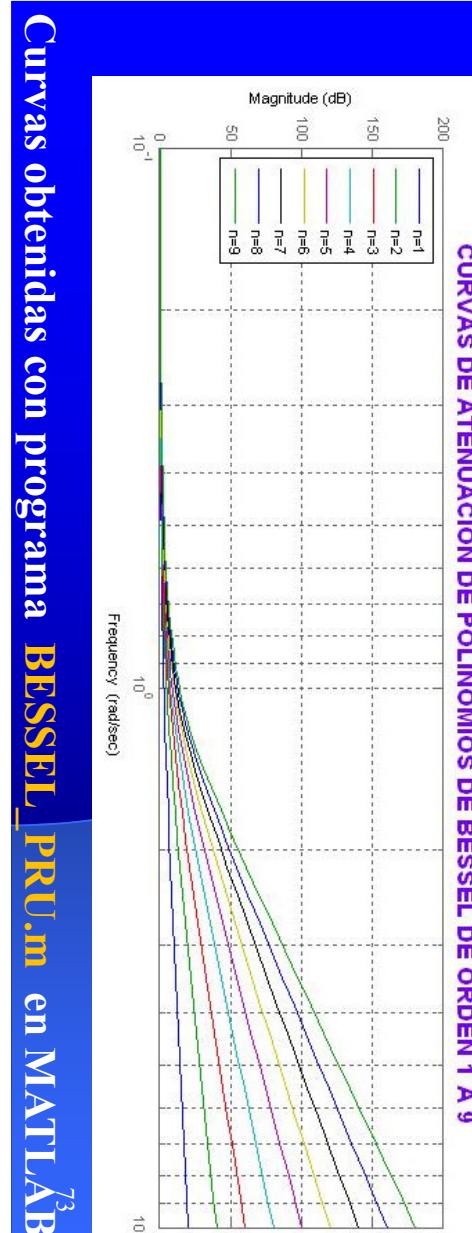
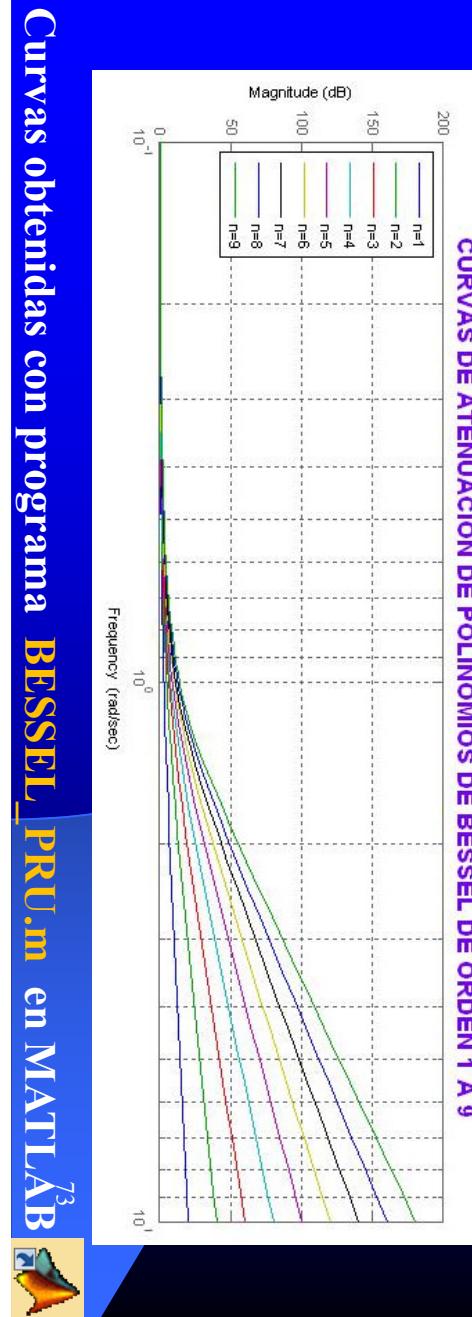
APROXIMACIÓN DE CAUER O ELÍPTICA

La aproximación de Cauer o elíptica :

- ❖ Introduce Ceros de Transmisión intermedios
- ❖ Presenta oscilaciones en la banda de paso (de altura constante)
- ❖ Presenta oscilaciones en la banda de atenuación (de altura constante)

Está definida por : $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + D^2(\omega)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 Z_n^2(\omega)}$

- ❖ Donde $Z_n(\omega)$ es un cociente de polinomios (funciones racionales de Chebyshev) y ε juega un papel de control de las oscilaciones similar al de la aproximación Chebyshev.



$$|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 R_n^2(\omega) \Rightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 Z_n^2(\omega)}$$

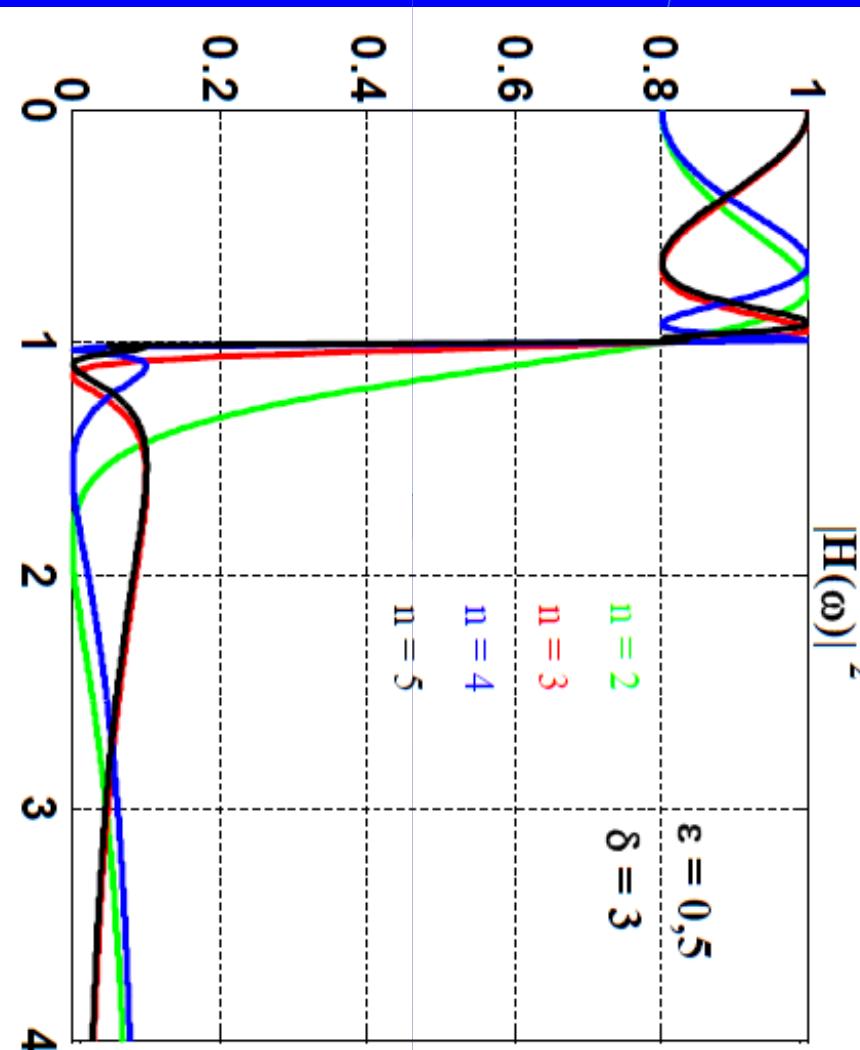
$$Z_n(\omega) = k \prod_{i=1}^{n/2} \frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega^2 - \omega_{zi}^2} \quad n \text{ par}$$

$$Z_n(\omega) = k \omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{\omega^2 - \omega_n^2}{\omega^2 - \omega_{zi}^2} \quad n \text{ impar}$$

Ceros de Transmisión: ω_n

Ceros de Reflexión: ω_{zi}

75



76

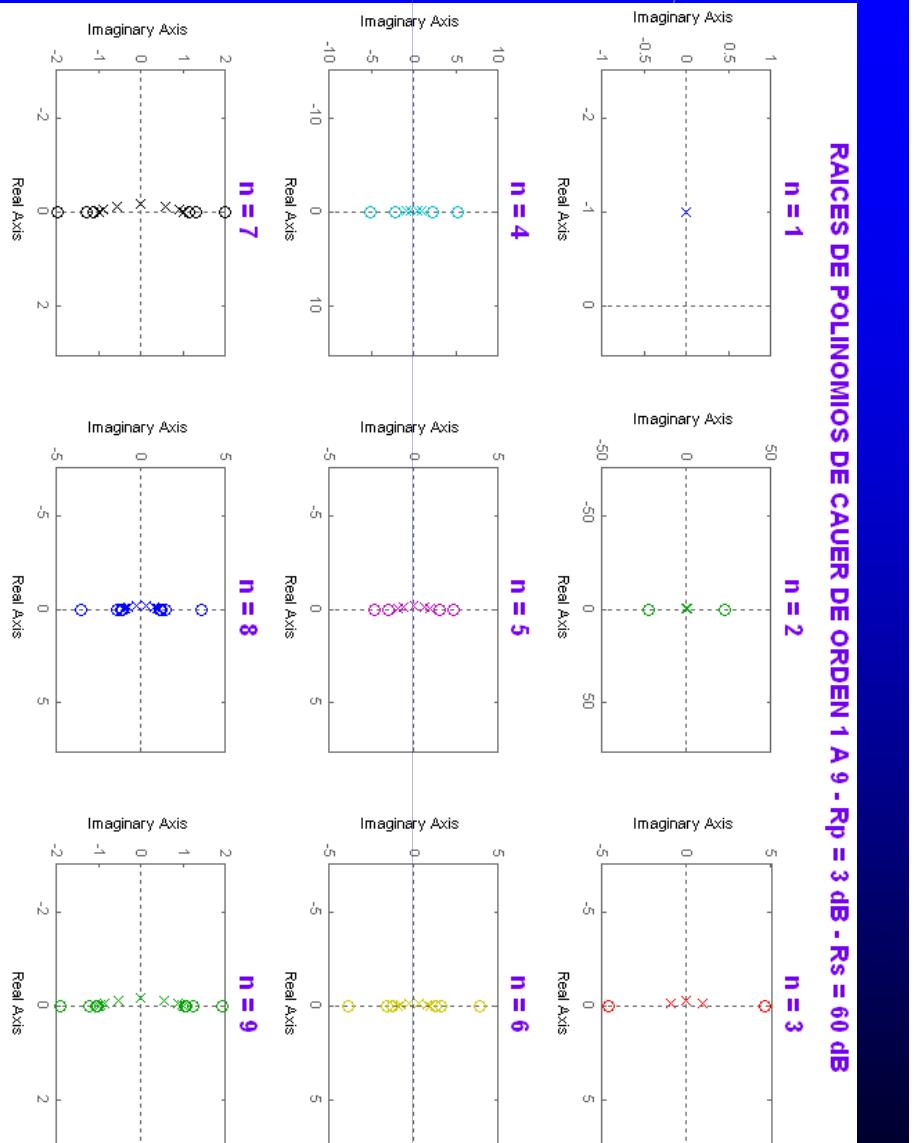
"Aplicación en MATLAB"



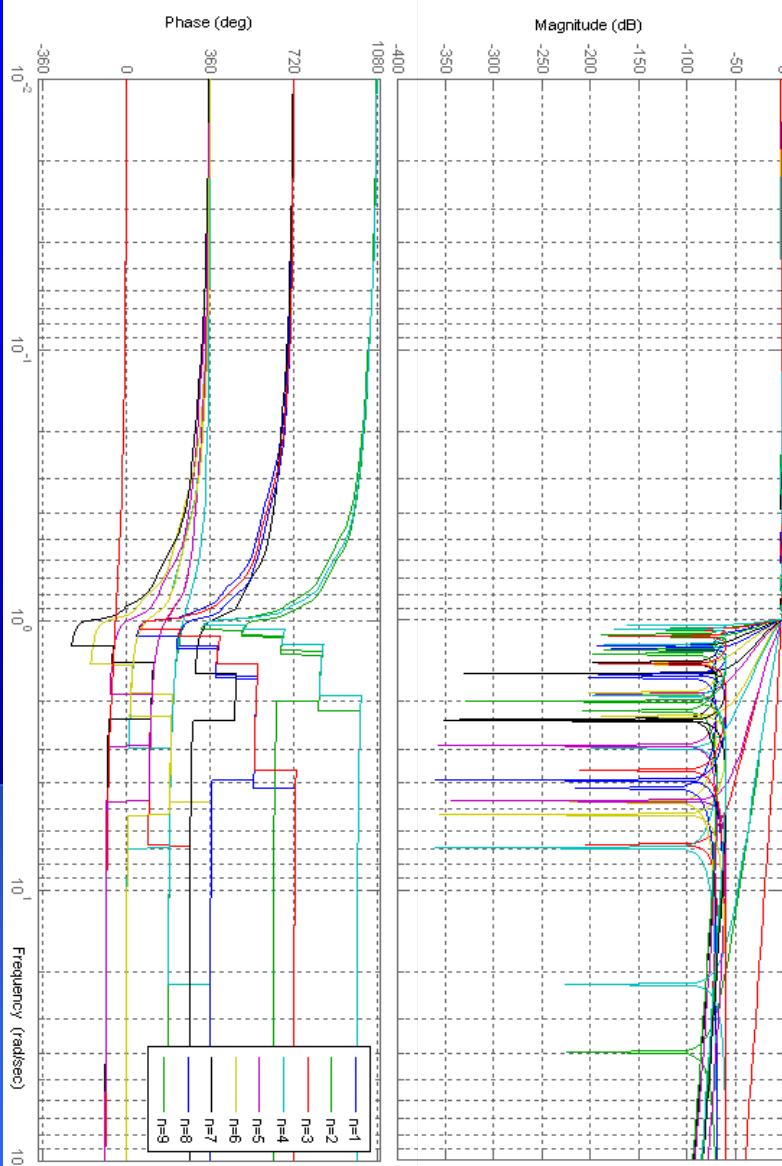
[N, WP] = ellipord (WP, WS, Rp, Rs, 's');

t = tf (num , den);
pzmap (t) ;

bode (t) ;



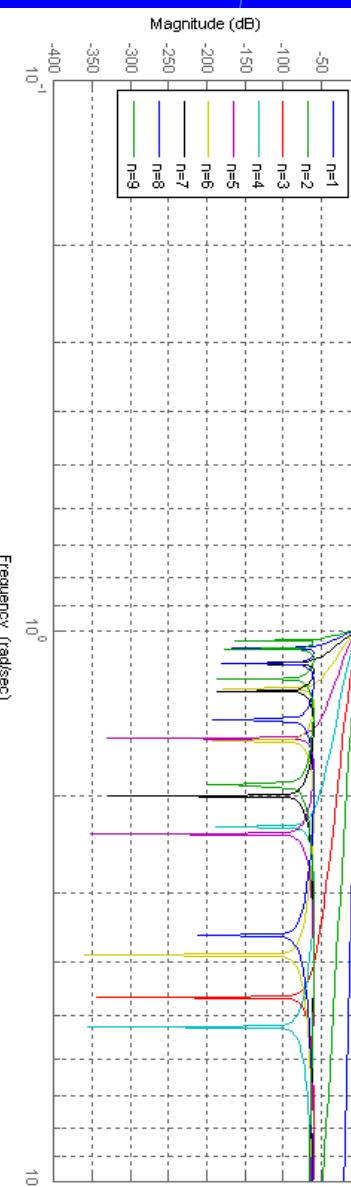
CURVAS DE GANANCIA Y DE FASE DE POLINOMIOS DE CAUER DE ORDEN 1 A 9 - $R_p = 3$ dB - $R_s = 60$ dB



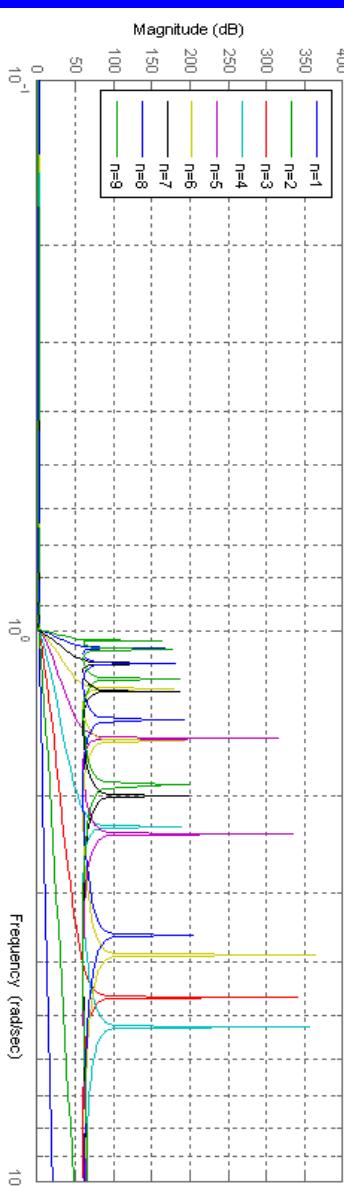
Curvas obtenidas con programa **CAUER_PRU.m** en **MATLAB[®]**



CURVAS DE GANANCIA DE POLINOMIOS DE CAUER DE ORDEN 1 A 9 - $R_p = 3$ dB - $R_s = 60$ dB



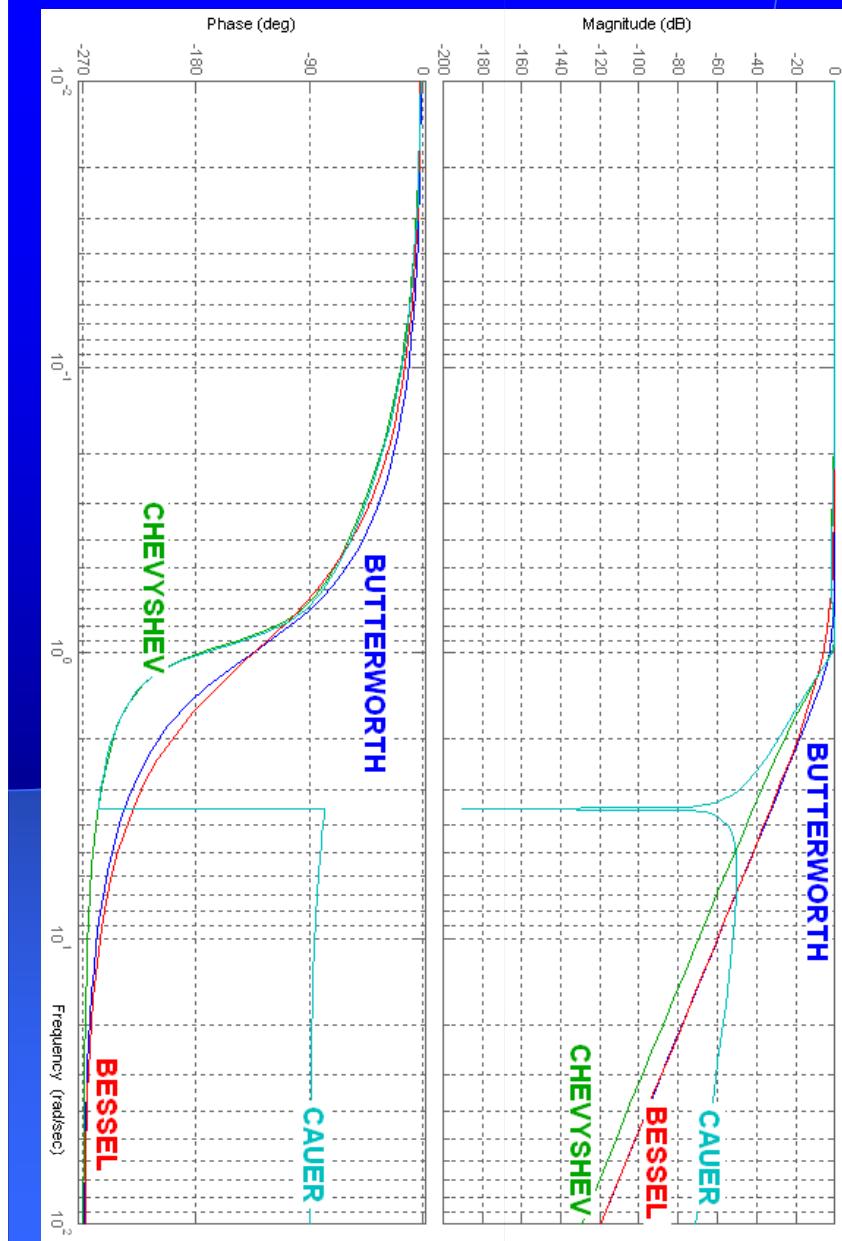
CURVAS DE ATENUACION DE POLINOMIOS DE CAUER DE ORDEN 1 A 9 - $R_p = 3$ dB - $R_s = 60$ dB



Curvas obtenidas con programa **CAUER_PRU.m** en **MATLAB[®]**

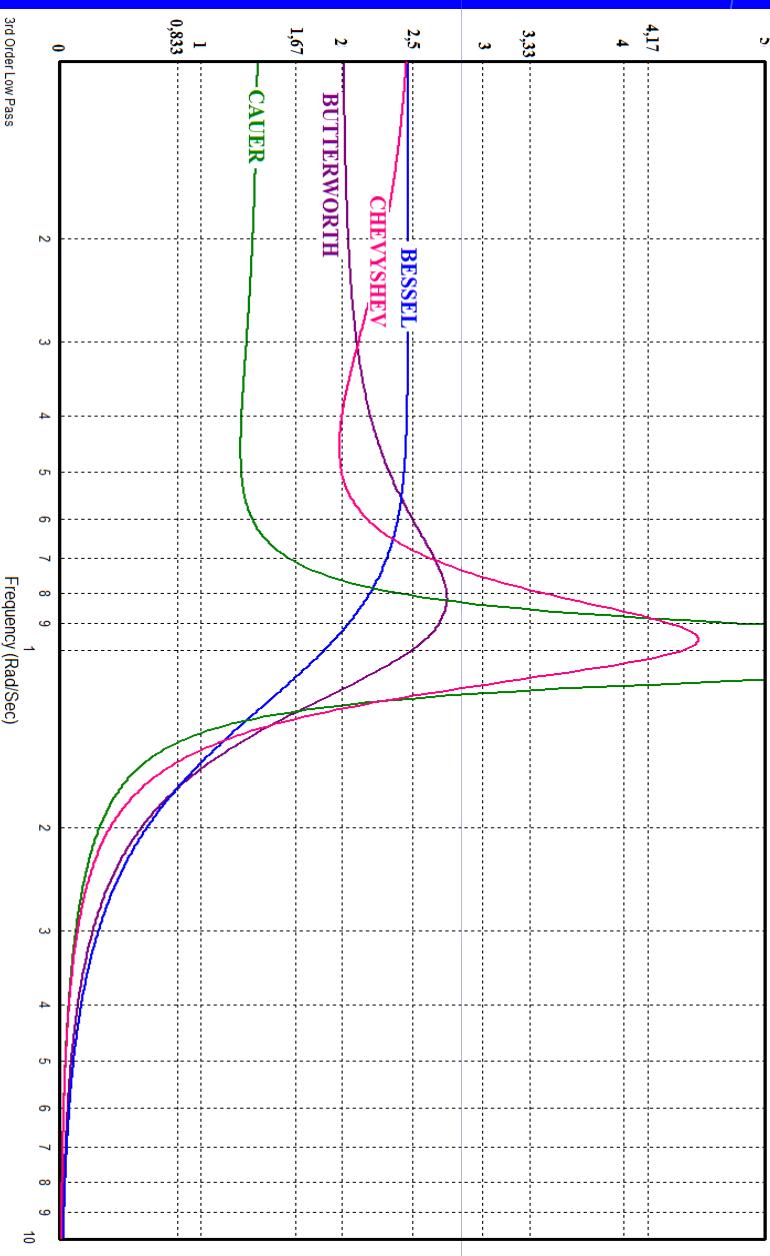


COMPARACIÓN DE MAGNITUD Y FASE PARA FILTROS CON $n=3$



COMPARACIÓN DE RETRASO DE GRUPO PARA FILTROS CON $n=3$

RETARDO DE GRUPO DE DIFERENTES TIPOS DE FILTRO



COMPARACIÓN DE CARACTERÍSTICAS DE DISTINTOS TIPOS DE FILTROS

CARACTERÍSTICAS	TIPO DE FILTRO	BESSEL	BUTTERWORTH	CHEVYSHEV	CAUER
Pendiente de corte para un orden n determinado		Muy mediocre	Mediocre	Buena	Muy Buena
Regularidad del tiempo de propagación de Grupo		Excelente	Buena	Mediocre	Muy mediocre
Regularidad de la curva de respuesta Amplitud / Frec.		Excelente	Excelente	Ripple en BP	Ripple en BP Y BA
Deformaciones en Régimen Transitorio		Muy pequeñas	Pequeñas	Grandes	Muy Grandes
Número de componentes para determinada Selectividad		Muy Elevado	Elevado	Bajo	Bajo
Coeficientes de sobretensión		Muy Bajos	Bajos	Medios	Elevados
Ceros de Transmisión		No	No	No	Si
Dificultad de Ajuste y Sensibilidad		Pequeñas	Pequeñas	Medias	Altas
Disparidad de los valores de los Elementos		Muy Pequeñas	Pequeñas	Considerable	Pequeñas

