TEORÍA DE LOS CIRCUITOS I

CAPÍTULO III

RESOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE CIRCUITOS

Parte A: INTRODUCCIÓN

Parte B: MÉTODO DE LAS RAMAS ("2b")

Parte C: MÉTODO DE LAS CORRIENTES DE MALLAS
(MÉTODO DE MAXWELL o DE LAS MALLAS)

Parte D: MÉTODO DE LAS TENSIONES NODALES
(MÉTODO DE LOS NODOS)

Parte E: EXPRESIONES MATRICIALES DE LAS
ECUACIONES DE REDES

Parte F: OPERACIONES CON MATRICES

Ing. Jorge María BUCCELLA
Director de la Cátedra de Teoría de Circuitos I
Facultad Regional Mendoza
Universidad Tecnológica Nacional
Mendoza, Septiembre de 2001.-

ÍNDICE

TOTAL: 44 páginas.

III - RESOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE CIRCUITOS

Parte A - INTRODUCCIÓN

III - A.1 - Definiciones.

Los tres elementos pasivos básicos: resistencia, inductancia y capacidad; junto con los dos tipos de fuentes: tensión y corriente; combinados de diversos modos constituyen las denominadas redes eléctricas. En ellas encontramos los siguientes entes constituyentes:

Rama: dipolo activo o pasivo, constituido por uno o más elementos pasivos y/o activos que forman una unidad entre dos terminales que no se puede o desea dividir. Pueden ser ejemplos circuitos equivalentes de Thèvenin o Norton de dipolos más complejos. Está definida por sus dos terminales o nodos externos.

Nudo o nodo: es la unión de dos o más ramas de una red. Puede indicarse como **nodo esencial** aquel en que se unen tres o más ramas en razón que las ramas no pueden asociarse en serie, normalmente usaremos el concepto general ya que se indica un nodo donde deseamos obtener una información en particular.

Malla: consideramos que es todo circuito cerrado dentro de la red, denominándose estrictamente como **malla esencial** aquel que no puede ser subdivido en otros. A los fines prácticos trabajaremos con las mallas esenciales.

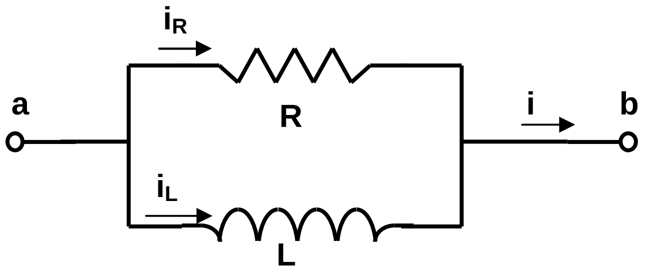
Aunque pueda resultar obvio, debemos conocer las características de todos los elementos de la red, tanto pasivos como activos, lo que dejará como incógnitas las tensiones y corrientes de las ramas.

En términos generales entenderemos que cuando hablamos de resolver un circuito estamos diciendo que queremos determinar la tensión y corriente de cada rama. Por lo tanto debemos definir previamente las ramas (consecuentemente los nodos) y en cada una de ellas la tensión con su polaridad y la corriente con su sentido. Esta definición es totalmente arbitraria por lo que la haremos conforme a nuestra conveniencia o necesidad, pero una vez definida se deberá respetar en todo el desarrollo del problema y los resultados serán coherentes con ella (es decir que los signos se corresponderán con las polaridades o sentidos establecidos inicialmente).

Esta tensión y corriente de cada rama quedan identificadas con la rama, pero, teniendo en cuenta que puede estar constituida por varios elementos, no implica que necesariamente esa tensión y/o esa corriente sean las existentes sobre alguno (o algunos) de los elementos de la rama. De otra forma: la corriente y la tensión en un elemento de la rama no coinciden, en general, con la tensión y corriente de la rama, salvo que sea un elemento único.

Se destaca que la tensión y la corriente de la rama, y no la tensión o corriente de un elemento de ella, son las que van a caracterizar a la rama.

En la figura se verifica que la tensión $\mathbf{e_{ab}}$, que es la tensión que caracteriza a la rama es la misma que la existente en terminales



de la resistencia y de la inductancia ya que ambas están en paralelo. Pero queda claro que la corriente de la rama **i**, es igual a la suma de las corrientes en los dos elementos.

Todos los métodos de resolución utilizan las tres leyes de la electricidad, sea en forma separada o como combinación entre ellas; es por lo tanto fundamental dominar sus conceptos, condiciones de validez y formas de aplicación antes de pretender utilizar cualesquiera de los métodos.

Aunque no está normado asumiremos como convención el uso de las letras minúsculas para indicar las incógnitas de los problemas y ejemplos y las mayúsculas para los datos.

La tensión y la corriente son hechos físicos y por lo tanto existen o no existen. La indicación de una tensión o corriente negativas sólo es a los efectos de relacionarlas con la polaridad o el sentido que se estableció al definirlas. No puede cambiarse un signo si no se cambia a la vez la polaridad o el sentido que le dio origen.

Las polaridades y los sentidos fijados al definir las tensiones y corrientes son las de referencia para expresar analíticamente las relaciones entre ellas. El signo resultante por este concepto es independiente del signo que pueda tener la magnitud de la misma. Es evidente que si cambiamos un sentido o polaridad deberemos cambiarle el signo a la variable en todas las instancias en que esta aparezca (ecuaciones, gráficos, resultados).

III - A.2 - Topología.

Hemos visto que con el uso adecuado de las leyes de Ohm y de Kirchhoff puede resolverse cualquier red lineal.

El objetivo de este capítulo es sistematizar esta actividad de forma que las redes puedan ser resueltas de la forma más simple y segura. El establecer métodos nos permitirá, eventualmente, desarrollar programas computacionales que nos faciliten los cálculos.

Como herramienta de soporte para el análisis de los circuitos utilizaremos una rama de la Geometría denominada Topología. Esta disciplina estudia los entes geométricos, o su estructura, sin importarle ni la forma ni el tamaño. Sólo le interesa el modo en que se combinan los elementos de la figura o ente. Es decir que el ente sigue siendo el mismo aunque se pliegue, estire, etc.

Mediante la Topología se puede llegar a determinar el número y la estructura de las ecuaciones necesarias para resolver una red. Es decir nos permitirá determinar el número mínimo de ecuaciones simultáneas que resuelven la red.

Dada una red cualquiera se puede dibujar el **gráfico**, o **esquema topológico**, que es una representación esquemática que permite visualizar en forma rápida y simple la forma en que se conectan los elementos del circuito y de ese modo podemos llegar a definir cuantas ramas, nodos y mallas posee y, con ello, establecer las ecuaciones a plantear para su resolución.

En el gráfico deberán aparecer aquellos elementos que sean realmente incógnitas. Las fuentes no aparecen en el gráfico ya que no son incógnitas y, por lo tanto, para obtener el gráfico se pasivisa el circuito enmudeciendo los generadores. Esto se obtiene haciendo que la magnitud generada sea cero y no borrándolos. En otras palabras, reemplazamos los generadores ideales de tensión por cortocircuitos y los de corriente por circuitos abiertos.

Para trazarlo se reemplazan los elementos restantes de la red por trazos, rectos o curvos, configurando cada uno a una **rama** de la red. La unión de dos o más ramas definirá a un **nodo**, y quedarán indicados los caminos cerrados que constituyen las **mallas**.

La existencia de un **generador de tensión ideal** (no asociado a ninguna impedancia) implica un cortocircuito entre los nodos terminales al ser enmudecido. Se crea con ello un único nodo topológico. A este nodo se lo denomina **supernodo** por cuanto topológicamente es un solo nodo pero en realidad tiene dos tensiones distintas en sus extremos (tensiones cuya diferencia conocemos por estar establecida por el propio generador en forma absoluta).

Por su parte un **generador de corriente ideal** al ser enmudecido hace desaparecer la rama por él constituido. Esta rama recibe el nombre de **falsa rama** por no serlo topológicamente aunque sepamos que es un camino entre dos nodos por el cual circula sin duda la corriente generada por el dispositivo.

En el caso de circuitos acoplados inductivamente, en el gráfico correspondiente aparecen **partes separadas**.

En conclusión en el gráfico de la red están asociados cuatro tipos de elementos: ramas, nodos, mallas y partes separadas. Es el esqueleto de la red y retiene solamente su aspecto geométrico.

Las partes separadas se pueden unir en un único nodo, imponiendo la condición de tener el mismo potencial todos los nodos superpuestos. Pueden considerarse así gráficos formados por una sola parte.

El gráfico pone en evidencia los caminos cerrados, propiedad necesaria para que existan corrientes. Si destruimos esos caminos, eligiendo adecuadamente las ramas que eliminamos, nos queda un remanente del gráfico original con todos sus nodos conectados entre sí pero sin ningún camino cerrado.

A este gráfico formado por un grupo cualesquiera de ramas suficientes en número para contener (vincular) a todos los nodos, se denomina **árbol**.

El número de ramas remanentes, llamadas **ramas del árbol**, es siempre igual al número total de nodos menos uno. Si agregamos cualquier otra rama se establecerá un camino cerrado.

Las ramas suprimidas se denominan **enlaces** o **eslabones**, y su número indica la cantidad de mallas de la red.

Si indicamos con $\mathbf{n_t}$ el número total de nodos, con **l** (ele) el número de mallas y con **b** el de ramas tendremos que:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{n_t} - 1) + \mathbf{l}$$

llamada **ecuación general de la Topología**.

Habíamos establecido que resolver un circuito era encontrar todas las corrientes y tensiones en las ramas del mismo. Al definirse con b el número de ramas estamos indicando que tendremos 2b incógnitas en la red (tenemos una corriente y una tensión a determinar en cada rama) lo que implica que para obtener una solución única deberemos plantear igual número de ecuaciones.

En cada rama mostrada en el gráfico de la red podemos escribir una relación tensión-corriente con los elementos que la integran. Tenemos entonces b ecuaciones suministradas aplicando la ley de Ohm.

En cada nodo podemos plantear una ecuación de suma de corrientes, pero no podemos usarlas a todas porque resultarían combinaciones lineales de las otras. Podemos escribir, entonces, solamente (n_t - 1) ecuaciones independientes de la primera ley de Kirchhoff.

Por último en cada camino cerrado podemos plantear una ecuación de suma de tensiones, es decir que la segunda ley de Kirchhoff nos suministra l ecuaciones.

En resumen, tenemos:

b >>>> ecuaciones de la ley de Ohm (volt-amper)

$\mathbf{n_t - 1}$ ecuaciones de la 1ª ley de Kirchhoff (Σ i = 0)

l >>>> ecuaciones de la 2ª ley de Kirchhoff (Σ e = 0)

cuya suma, conforme con la ecuación general de la Topología, es igual a **2b**, quedando definida la posibilidad formal de resolver en forma unívoca los circuitos eléctricos.

Lo que acabamos de ver es la fundamentación del llamado **"Método de las Ramas"**, o "Método 2b" por el número de ecuaciones simultáneas a plantear y resolver.

Como característica básica tiene la de ser absolutamente analítico y resultan sus ecuaciones directamente sintetizables unívocamente. Como contrapartida resulta evidente lo complejo de la solución algebraica por el número de ecuaciones simultáneas.

Si recordamos las expresiones de la ley de Ohm observaremos que pone a la corriente en función de la tensión, o viceversa, a través de los elementos de la rama considerada. Esto nos indica que el número de ecuaciones incógnitas independientes no es realmente 2b sino sólo la mitad, no obstante usualmente sigue siendo un número elevado por lo que surge la idea de buscar otro método que nos reduzca esa cantidad de ecuaciones simultáneas aunque no el número total a resolver.

Si observamos el árbol de la red veremos que es imposible que circulen corrientes, por ende podemos decir que las variables independientes son las corrientes en los enlaces, o las corrientes en las mallas. Esto implicará que son **l** (ele) las incógnitas independientes y, por lo tanto, podemos resolver el circuito recurriendo al **"Método de las Corrientes de Mallas"** o "Método de Maxwell", o "Método de las Mallas".

Finalmente, si cortocircuitáramos todos los nodos de la red resultará en la pasivisación de la misma, pudiendo deducir de ello que las tensiones en los nodos, con respecto a uno de referencia, son las variables, o incógnitas, independientes. Plantear esta premisa con sus $\mathbf{n_t - 1}$ ecuaciones es la base del **"Método de las Tensiones Nodales"** o "Método de los Nodos".

Debemos recalcar que aplicar cualesquiera de estos dos últimos métodos no implica que cambien nuestras incógnitas respecto lo dicho inicialmente con el método de las ramas, sólo se facilita el cálculo mediante el uso de variables auxiliares que utilizaremos luego para encontrar las **2b** incógnitas originales.

La selección del método en cada caso dependerá de los recursos de cálculo, del circuito y de las incógnitas que, en particular, necesitemos obtener.

COMENTARIO IMPORTANTE

En el desarrollo de los métodos de resolución que siguen hemos considerado circuitos ejemplos constituidos por resistencias y generadores de corrientes y tensiones continuas constantes.

Debemos aclarar que en cada circuito particular tendremos que plantear las relaciones de la ley de Ohm como correspondan, es decir que tendremos expresiones integro-diferenciales si trabajamos en el dominio del tiempo con funciones temporales o, eventualmente, aplicando los conceptos de impedancias y/o admitancias si trabajamos en el dominio de la frecuencia, mediante el cálculo simbólico, en funciones armónicas del tiempo. En este último caso las expresiones serán con números complejos expresados en forma polar o binómica.

NOTAS Y COMENTARIOS

Parte B - MÉTODO DE LAS RAMAS

III - B.1 - Procedimiento.

Como se dijo en la fundamentación del método la resolución de una red se hace aplicando simultáneamente las leyes de Ohm y de Kirchhoff. Para ello nos guiamos por lo que el gráfico de la red, o esquema topológico, nos muestra.

Entonces podemos establecer el siguiente procedimiento:

1º) Establecer las incógnitas a resolver. Indicamos las tensiones y corrientes de cada rama con sus polaridades y sentidos respectivos. Con ello quedarán definidas las ramas y nodos de la red real a resolver.

2º) Trazamos el gráfico de la red. Para ello la pasivisamos enmudeciendo los generadores. Esta operación nos definirá las ramas y los nodos topológicos (que pueden diferir de los reales).

3º) Sobre las ramas topológicas escribimos las relaciones volt-ampere (ley de Ohm), tensión característica de la rama en función de la corriente característica de la rama y de los elementos activos y pasivos que contenga, o la corriente característica de la rama en función de la tensión característica de la rama y de los elementos.

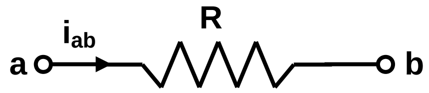
4º) En los $(n_t - 1)$ nodos de la red escribimos las expresiones de la 1ª ley de Kirchhoff (sumatoria algebráica de las corrientes características de las ramas que concurren al nodo igualada a cero).

5º) En las mallas de la red, que pueden detectarse trazando el árbol del circuito, escribimos las expresiones de la 2ª ley de Kirchhoff (sumatoria algebráica de las tensiones características de las ramas de la malla igualada a cero).

6º) La resolución de las ecuaciones nos determinará el valor de las incógnitas buscadas.

III - B.2 - Aplicación de la Ley de Ohm.

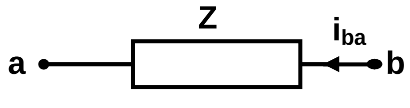
La ley de Ohm es la que resulta más compleja de escribir por lo que daremos algunos ejemplos:



$$e_{ab} = R \cdot i_{ab}$$

$$i_{ab} = e_{ab} \cdot (1/R) = e_{ab} \cdot G$$

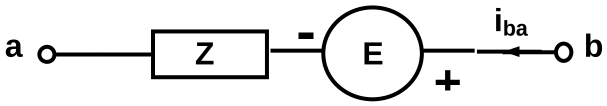
Las expresiones son positivas ya que el sentido de la corriente $\mathbf{i_{ab}}$, de **a** hacia **b**, es coherente con la polaridad de la tensión $\mathbf{e_{ab}}$, positiva en **a** con respecto a **b**.



$$e_{ab} = - Z \cdot i_{ba}$$

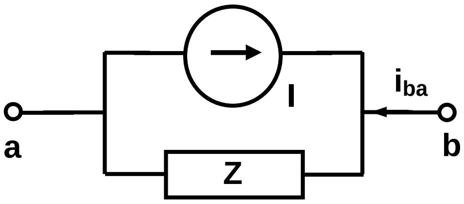
$$i_{ba} = - e_{ab} \cdot (1/Z) = - e_{ab} \cdot Y$$

Las expresiones son negativas ya que el sentido de la corriente $\mathbf{i_{ba}}$, de **b** hacia **a**, es contraria con la polaridad de la tensión $\mathbf{e_{ab}}$, positiva en **a** con respecto a **b**.



$e_{ab} = -Z \cdot i_{ba} - E \quad i_{ba} = -e_{ab} \cdot (1/Z) - E \cdot (1/Z) = -e_{ab} \cdot Y - E \cdot Y$

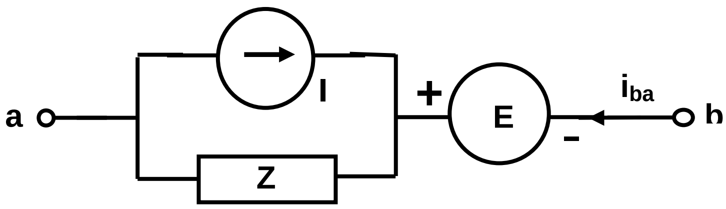
El mismo caso anterior, con la polaridad de la tensión **E** que se opone a la tensión $\mathbf{e_{ab}}$, positiva en **a** con respecto a **b**. Esta rama representa un generador real de tensión con su impedancia interna en serie, pero también puede ser el resultado de un equivalente de Thèvenin de una rama activa más compleja.



$e_{ba} = i_{ba} \cdot Z + I \cdot Z$

$i_{ba} = -I + e_{ba} \cdot (1/Z) = -I + e_{ba} \cdot Y$

La corriente de la rama, $\mathbf{i_{ba}}$ de **b** hacia **a**, tiende a hacer que la tensión de la rama, $\mathbf{e_{ba}}$ positiva en **b** con respecto a **a**, sea positiva, la corriente del generador **I** también. Esta rama representa un generador real de corriente con su impedancia interna en paralelo, pero también puede ser el resultado de un equivalente de Norton de una rama activa más compleja.



$e_{ba} = i_{ba} \cdot Z + I \cdot Z - E \quad i_{ba} = -I + (e_{ba} - E) \cdot (1/Z) = -I + (e_{ba} - E) \cdot Y$

Este es el caso de una rama activa compuesta por los dos tipos de generadores con una impedancia. Notemos que aunque enmudezcamos los generadores sigue existiendo la vinculación entre los nodos terminales **a** y **b** a través de la impedancia **Z**, esto quiere decir que es una rama topológica además de ser una real.

El planteo de estas ecuaciones se simplifica si aplicamos el método de superposición. Analicemos el último caso: tenemos tres factores que contribuyen a la existencia de la tensión en bornes de la rama, la corriente del generador **I**, la tensión del generador **E** y la corriente de la rama $\mathbf{i_{ba}}$.

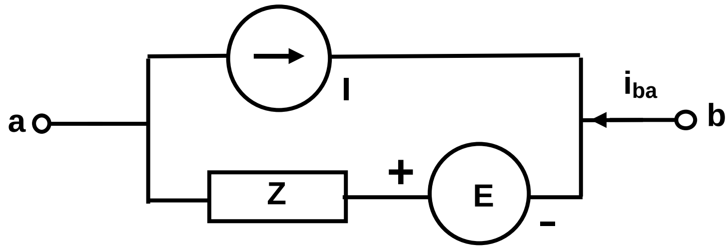
Si enmudecemos los dos generadores el circuito resultante es el de la impedancia atravesada por la corriente de malla $\mathbf{i_{ba}}$ lo que resulta en un término $\mathbf{e'_{ba} = i_{ba} \cdot Z}$.

Si enmudecemos el generador de tensión y hacemos la corriente de malla igual a cero nos queda la corriente **I** circulando sobre la impedancia **Z** de derecha a izquierda con lo obtenemos $\mathbf{e''_{ba} = I \cdot Z}$.

Por último si sólo está activo el generador de tensión **E** resultará que $\mathbf{e'''_{ba} = -E}$.

Sumando los tres términos resulta en la ecuación mostrada para **e_{ba}**.

Otro ejemplo similar tenemos con la rama que mostramos a continuación.



$$e_{ba} = i_{ba}\cdot Z + I\cdot Z - E$$

$$i_{ba} = -I + (e_{ba} - E)\cdot(1/Z) = -I + (e_{ba} - E)\cdot Y$$

Observamos en esta rama que el cambio de estructura con respecto a la rama anterior no cambia la ecuación resultante lo que indica que son ramas equivalentes. No obstante, no son iguales por cuanto las tensiones y corrientes en los elementos no son las mismas (excepto, claro está, las magnitudes generadas por las fuentes de energía).

En general con los ejemplos dados será suficiente para resolver cualquier tipo de rama. Aunque sea reiterativo recordemos que cualquier rama pasiva puede reemplazarse por su impedancia, o admitancia, equivalente, mientras que una rama activa puede resolverse con un equivalente de Thèvenin o Norton.

Como resumen debemos indicar que la ley de Ohm nos permite hacer una descripción analítica, modelo matemático, de cada una de las ramas, teniendo en cuenta los elementos y la estructura de cada una de ellas.

Aquellas ramas que no aparecen en el gráfico de la red no admiten una relación volt-amper ya que están constituidas por, por lo menos, un generador ideal y, tal vez por algún elemento más. Podemos dar como ejemplo un generador de corriente en serie con una impedancia (en cuyo caso sabemos la corriente y la tensión sobre la impedancia, pero no podemos indicar la tensión total de la rama) o, dualmente, un generador de tensión en paralelo con una impedancia (en este caso lo desconocido es la corriente de la rama total).

III - B.3 - Aplicación de las Leyes de Kirchhoff.

La 1ª ley de Kirchhoff, llamada ley de las corrientes o de los nodos o, sintéticamente, **$\Sigma i = 0$**, establece que un nodo no puede ser ni fuente ni sumidero de cargas eléctricas (si el sistema es conservativo). Por ende la suma de las corrientes entrantes al nodo debe estar compensada con las que salen.

Analíticamente, si asignamos por convención particular un signo a las corrientes que entran y el contrario a las que salen, lo podemos expresar como que la suma algebráica de las corrientes en un nodo es igual a cero.

Para el método de las ramas el planteo de esta ley lo debemos hacer en **(n_t - 1)** nodos de la red ya que la restante ecuación que puede escribirse resultará una combinación lineal de las otras por lo deberá descartarse para la solución del sistema de ecuaciones.

El procedimiento es, por lo expresado, el siguiente:

1º) Establecer una convención para el signo de las corrientes entrantes al nodo (por ejemplo el positivo) y el contrario (negativo) para las salientes. Esta convención puede ser cambiada para cada nodo (el cambio de convención implica multiplicar la ecuación por -1) pero es de orden práctico utilizar siempre la misma cualquiera que fuere.

2º) Utilizando las corrientes genéricas de las ramas (no las corrientes en los elementos como ya se dijo) sumar algebraicamente las concurrentes a los **(n_t - 1)** nodos de la red. Insistimos con que el signo que le corresponde a cada corriente por el hecho de entrar o salir del nodo es aparte del que eventualmente tuviere la magnitud de la misma.

La 2ª ley de Kirchhoff, ley de las tensiones, de las mallas, o en forma resumida **$\Sigma e = 0$**, establece que si recorremos una red conservativa, partiendo de un nodo y terminando el recorrido en el mismo nodo, la suma de las tensiones que encontremos debe ser igual a cero. Es decir que el hecho de recorrer un circuito no nos permite ni ganar ni perder potencial eléctrico.

Para formular la expresión analítica para cada una de las **l** (ele) mallas que nos muestra el árbol de la red debemos adoptar dos convenciones arbitrarias: una el sentido en que recorreremos la malla a partir del nodo que elijamos (que puede ser cualquiera) y la otra el signo que le asignaremos a cada tensión de rama (no de elemento) que encontremos. Por ejemplo tomar el sentido del reloj para el recorrido y considerar como positivas a las tensiones que aumentan el potencial y, coherentemente, negativas a las que disminuyen el mismo.

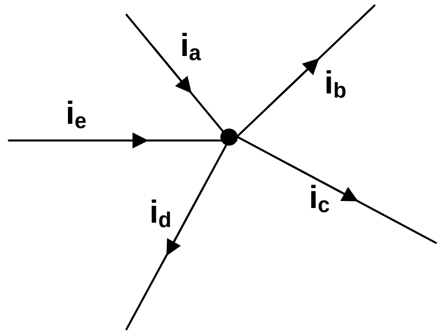
El procedimiento es, por lo expresado, el siguiente:

1º) Establecer una convención para el signo de las tensiones que aumentan el potencial (por ejemplo el positivo) y el contrario (negativo) para las que lo disminuyen. Esta convención puede ser cambiada para cada malla (el cambio de convención implica multiplicar la ecuación por -1) pero es de orden práctico utilizar siempre la misma cualquiera que fuere.

2º) Asignar un sentido de rotación por la malla para evaluar las tensiones, horario o antihorario. Cambiarlo implicará multiplicar la ecuación por -1.

3º) Utilizando las tensiones genéricas de las ramas (no las tensiones en los elementos como ya se dijo) sumar algebraicamente las que encontremos en el recorrido de las **l** (ele) mallas de la red. Insistimos con que el signo que le corresponde a cada tensión por las convenciones adoptadas es aparte del que eventualmente tuviere la magnitud de la misma.

Ejemplos:

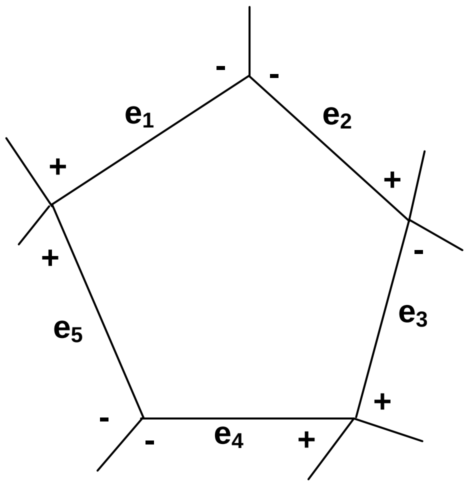


$+ i_a - i_b - i_c - i_d + i_e = 0$

Si: $i_a = 5A$; $i_b = -3A$; $i_c = 6A$;

$i_d = 5A$ y $i_e = 3A$ será:

$+ 5A + 3A - 6A - 5A + 3A = 0A$

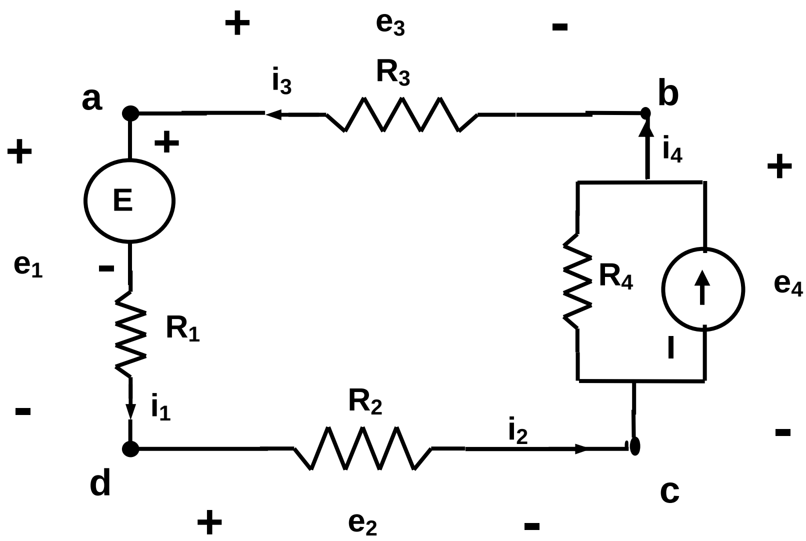


$- e_5 + e_1 - e_2 - e_3 + e_4 = 0$

Hemos utilizado la rotación en sentido horario y considerado al signo de la polaridad que encontramos primero como signo de la tensión evaluada. Es decir que las tensiones que decrecen el potencial a medida que las evaluamos son positivas.

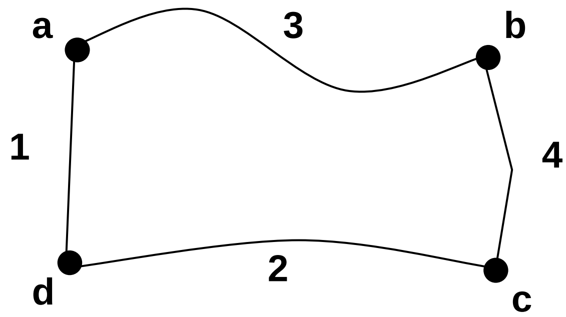
III - B.4 - Aplicación Práctica del Método "2b".

Sea el circuito de la figura donde hemos definido los nodos y con ellos delimitado las ramas que consideraremos.



Como primer paso indicamos con nombre y polaridad o sentido las tensiones y corrientes a resolver.

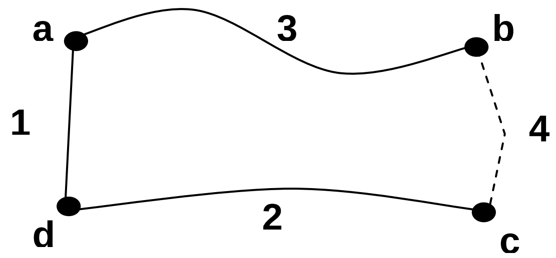
El segundo paso es trazar el gráfico o esquema topológico de la red.



Aquí vemos que tenemos cuatro ramas (**b = 4**), lo que coincide con el circuito real, y cuatro nodos (**n_t = 4**) también coincidentes con los originales. Es decir que el esquema topológico y la red real son semejantes: no hay ni ramas falsas ni supernodos porque no hay generadores ideales. Los dos generadores están integrados a una rama con resistencia.

Esto nos indica que el circuito es resoluble conforme al método elegido.

Nos falta ahora establecer el número de mallas de la red, para ello trazaremos el árbol eliminando todas las ramas posibles sin que queden desconectados los nodos y sin que queden caminos cerrados.



Vemos que con solamente eliminar una rama se obtiene las características deseadas. La rama eliminada, en este caso la 4 aunque podría ser cualquiera, es un enlace lo que establece que tenemos una sola malla (**l = 1**).

Consecuentemente tenemos que el número de ramas es cuatro, lo que implica la existencia de ocho incógnitas, cuatro corrientes y cuatro tensiones tal como lo habíamos definido (**2b = 8**). Además podemos verificar que tendremos el número necesario y suficiente de ecuaciones ya que podremos escribir cuatro ecuaciones volt-amper (**b**), tres ecuaciones de nodo (**n_t - 1**) y una ecuación de malla (**l**). La suma de ellas da dos veces el número de ramas, conforme con la ecuación general de la topología, cantidad igual al número de incógnitas por lo que resulta en sistema normal de Cramer.

El orden en que se plantean las ecuaciones es indistinto salvo por el aspecto formal de sistematización del método.

Ley de Ohm:

Rama 1) $i_1 = + (e_1 - E)/R_1$
Rama 2) $i_2 = + e_2/R_2$
Rama 3) $i_3 = - e_3/R_3$
Rama 4) $i_4 = + I - e_4/R_4$

En estas cuatro ecuaciones quedan involucrados todos los elementos de la red: resistencias y generadores, con las variables o incógnitas del circuito. De hecho podríamos haber planteado las tensiones en función de las corrientes o, inclusive, en algunas ramas tensión en función de la corriente y en otras las recíprocas.

1ª ley de Kirchhoff:

Nodo a) $- i_1 + i_3 = 0$
Nodo b) $- i_3 + i_4 = 0$
Nodo c) $+ i_2 - i_4 = 0$

Notamos que aparecen sólo las corrientes de las ramas no las de los elementos. Es obvio que podríamos haber planteado la ecuación del nodo d ($+ i_2 - i_1 = 0$) y no la de alguno de los otros tres.

2ª ley de Kirchhoff:

$$- e_1 - e_2 + e_4 + e_3 = 0$$

En esta única ecuación aparecen las tensiones de las ramas, no la de los elementos.

Para las ecuaciones de las dos leyes de Kirchhoff podríamos haber adoptado distintas convenciones de signo por lo podrían aparecer algunas, o todas, multiplicadas por -1.

Obtenidas las ecuaciones el sistema puede ser resuelto por cualesquiera de los métodos algebraicos. Una de las formas es reemplazar las ecuaciones de la ley de Ohm en las de Kirchhoff configurando un sistema de b ecuaciones (cuatro en nuestro caso) con las tensiones o las corrientes como incógnitas.

Reemplacemos las corrientes en las ecuaciones de la 1ª ley de Kirchhoff por las obtenidas para la ley de Ohm y agreguemos la de la 2ª ley:

$$\begin{array}{l} \text{Nodo a)} \\ \text{Nodo b)} \\ \text{Nodo c)} \\ \text{Malla} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} - (e_1 - E)/R_1 - (-e_3/R_3) = 0 \\ - e_2/R_2 + (I - e_4/R_4) = 0 \\ e_2/R_2 - (I - e_4/R_4) = 0 \\ - e_1 - e_2 + e_4 + e_3 = 0 \end{array} \right.$$

Ordenando el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} - (1/R_1)e_1 & + \ 0\, e_2 & + (1/R_3)e_3 & + \ 0\, e_4 & = -E/R_1 \\ + \ 0\, e_1 & + \ 0\, e_2 & + (1/R_3)e_3 & - (1/R_4)e_4 & = -I \\ + \ 0\, e_1 & + (1/R_2)e_2 & + \ 0\, e_3 & + (1/R_4)e_4 & = +I \\ - \ e_1 & - \ e_2 & + \ e_3 & + \ e_4 & = \ 0 \end{array} \right.$$

Cada una de las tensiones las obtenemos de la relación entre el determinante de los coeficientes, donde hemos reemplazado los de la incógnita buscada por los términos independientes, y el determinante principal del sistema.

Una vez verificados los valores calculados reemplazándolos en la ecuación de la malla, calcularemos las corrientes usando las ecuaciones de la ley de Ohm. Estas corrientes deben verificarse con la 1ª ley de Kirchhoff.

III - B.5 - Circuitos con generadores ideales.

La presencia de generadores ideales, aquellos que no están asociados a impedancias, crea un problema por cuanto el número de ramas reales difiere del de las ramas que nos señala el gráfico (se reduce en la cantidad de generadores ideales que tenga el circuito).

El número de nodos topológicos también es menor que los reales en la cantidad de generadores ideales de tensión, y el número de mallas se reduce en función de los generadores ideales de corriente.

Es decir que, si señalamos con **s** el número de generadores ideales (en general no todos los generadores), no podríamos escribir **2s** ecuaciones. Ahora bien, si tenemos en cuenta que en estos generadores ideales no tenemos dos incógnitas ya que una es la magnitud generada que conocemos (falsa variable o variable fantasma); resultaría que nos faltarán **s** ecuaciones para poder resolver el sistema.

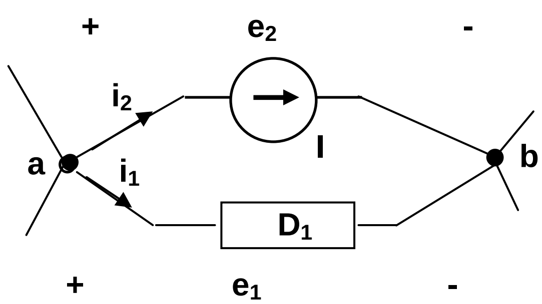
Por lo expuesto el método, tal como fue explicado, no sería válido para resolver este tipo de circuitos.

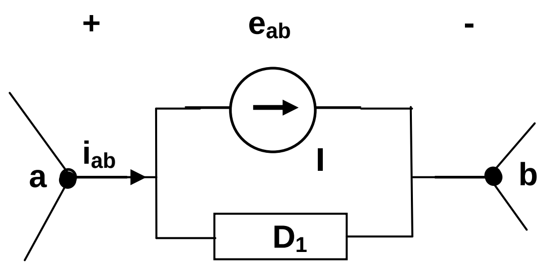
Para sortear el inconveniente nos quedan dos posibilidades: modificar el circuito **transformando las fuentes ideales en reales,** asociándolas con impedancias de la red, o modificar el método, utilizando el concepto de **falsa variable o variable fantasma**, para que pueda ser utilizado en esos casos.

III - B.5.1 - Transformación de fuentes ideales en reales.

Los generadores de corriente se asocian a las ramas reales (sean activas o pasivas) que estén en paralelo con ellos como un elemento más de las mismas.

Pasamos de esta: a esta rama:



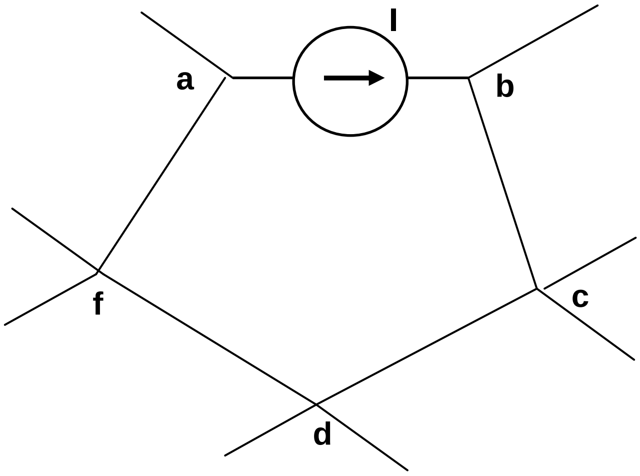


Hecho esto el método nos permitirá encontrar en el circuito transformado la corriente $\mathbf{i_{ab}}$ y la tensión $\mathbf{e_{ab}}$; de ellas deberemos deducir los valores de $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{i_2}$ y $\mathbf{e_2}$ que son nuestras incógnitas verdaderas.

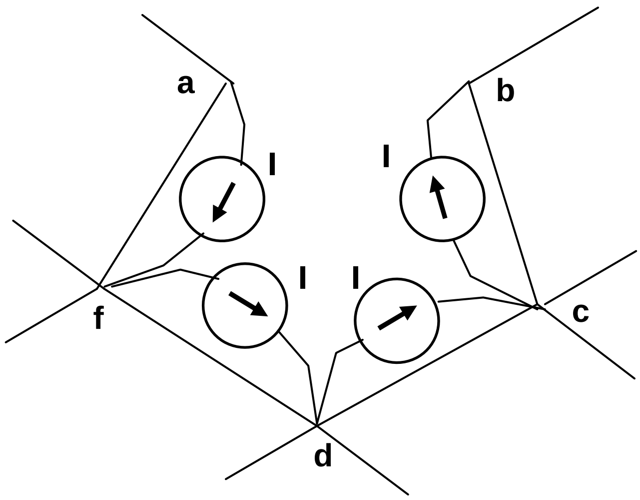
Siendo equivalentes los circuitos original y transformado la tensión entre nodos no se verá alterada por lo que resulta que las tensiones serán $\mathbf{e_1 = e_2 = e_{ab}}$ (salvo el eventual cambio de signo si la polaridad de las tensiones e1 y/o e2 no coinciden con eab).

La corriente $\mathbf{i_{ab}}$ será igual a la suma algebraica de las corrientes $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_2}$, conforme a la 1ª ley de Kirchhoff, y como en este caso $\mathbf{i_2}$ es igual a $\mathbf{I}$ resulta que $\mathbf{i_1 = i_{ab} - I}$. También podríamos encontrar $\mathbf{i_1}$ aplicando la ley de Ohm a la rama 1 en función de la tensión $\mathbf{e_1}$ y de los elementos que constituyan el dipolo $\mathbf{D_1}$.

En el caso de no existir una rama que esté directamente en paralelo con el generador de corriente el caso se complica algo pero puede ser resuelto de la siguiente forma. Supongamos una estructura como la mostrada:



Aquí resulta imposible asociar al generador con alguna de las ramas de la red porque ninguna está en paralelo entre los terminales **a - b**. Podemos realizar un circuito equivalente si mantenemos las condiciones de equilibrio del original como en la figura que sigue:

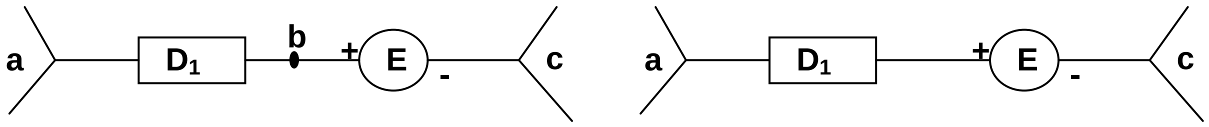


Observamos en esta estructura que el equilibrio no ha cambiado ya que en el nodo **a** sigue saliendo la corriente **I**, en el **b** sigue entrando la misma corriente y en los demás entra una nueva corriente **I** pero sale otra de igual magnitud por ser todos los generadores iguales al original.

Para obtener las corrientes y tensiones de las ramas originales aplicamos el mismo criterio que en la transformación simple anterior. Para la tensión en el generador podemos aplicar la 2ª ley de Kirchhoff ya que conocemos todas las tensiones del resto de las ramas que forman la malla donde está el generador, es decir que:

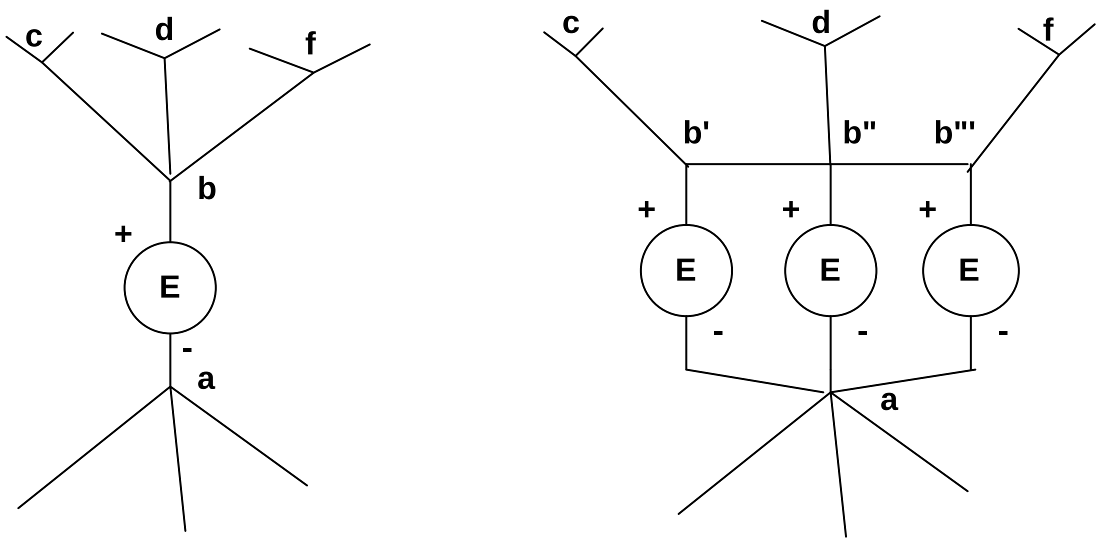
$$\mathbf{e_{ab} = e_{af} + e_{fd} + e_{dc} + e_{cb}.}$$

El caso de los generadores de tensión tiene un tratamiento semejante. Aquí la solución es asociar el generador con alguna rama real activa o pasiva que esté en serie con él.

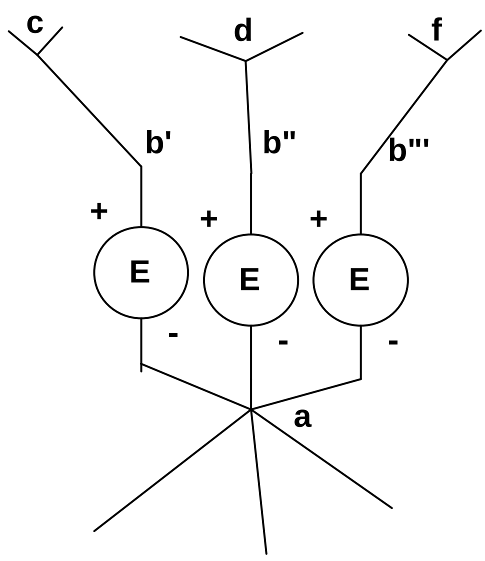


La simple inspección muestra que la corriente es la misma en los dos casos es decir que $\mathbf{i_{ab} = i_{bc} = i_{ac}}$; la tensión $\mathbf{e_{ab}}$ se obtiene de la $\mathbf{e_{ac}}$ restándole algebraicamente la del generador **E**.

Veamos el caso más complejo en el que no hay ramas asociables directamente en serie.



En la figura de arriba a la derecha hemos agregado dos generadores iguales al existente con lo cual el circuito no ha cambiado en sus condiciones de equilibrio. Pero ahora podemos asegurar que entre los nodos **b'**, **b"** y **b"'** no hay diferencia de potencial ya que están a la misma tensión respecto del nodo a por lo que podemos extraer la conexión entre ellos sin modificar las condiciones. En la figura de la izquierda vemos que se pueden asociar los generadores en serie con las ramas **b'-c**, **b"-d** y **b"'-f**, superando el inconveniente.



Es como si hubiéramos empujado al generador a través del nodo b y se hubiera dividido en tres iguales.

Para obtener las incógnitas del circuito original hacemos lo mismo que en el caso simple, aplicando la 1ª ley de Kirchhoff en el nodo a para determinar la corriente que circula por el generador de tensión.

III - B.5.2 - Aplicación de la falsa variable

El principio de esta alternativa del método **2b** es tener en cuenta que el número de incógnitas de la red es de **2b - s** donde **s** es el número de generadores ideales sobre los cuales conocemos una de las variables.

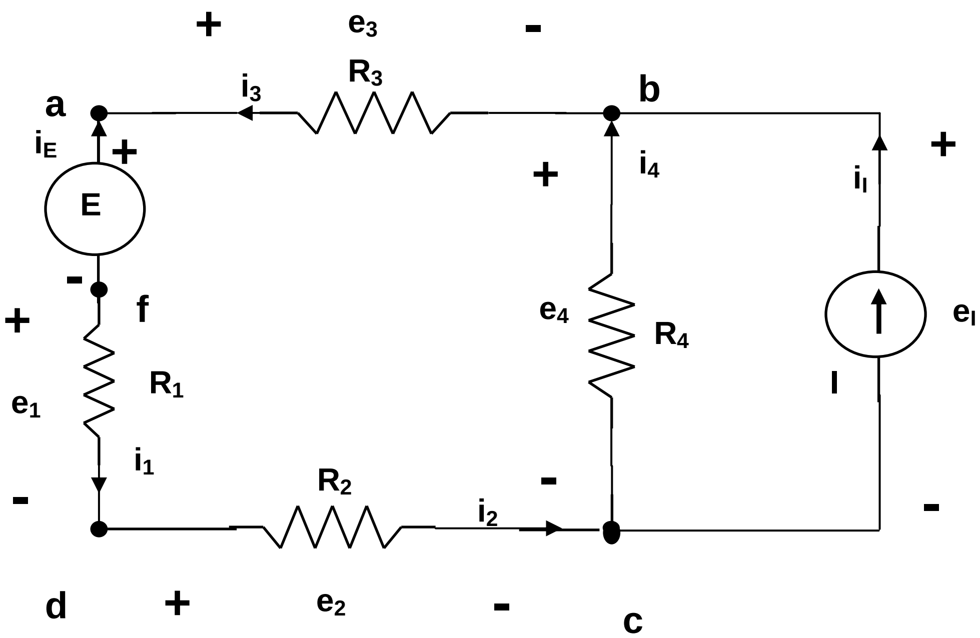
Aquí no modificamos el circuito sino el método en un aspecto. Escribimos las relaciones volt-amper en aquellas ramas que son reales y topológicas en la forma normal pero al escribir las ecuaciones de Kirchhoff consideramos a todas las ramas reales lo que incrementará el número de ecuaciones tanto de nodos, si hay generadores ideales de tensión, como de mallas, si hay generadores ideales de corriente, con respecto a lo que nos indicaría el gráfico topológico.

En el método puro los generadores aparecían sólo en las expresiones de la ley de Ohm ahora los ideales, que no pueden aparecer en relaciones volt-amper porque no las admiten, aparecen como datos e incógnitas en las ecuaciones de Kirchhoff.

Debe tenerse especial cuidado de verificar que si un generador aparece en una expresión de Ohm no debe aparecer en las de Kirchhoff y viceversa.

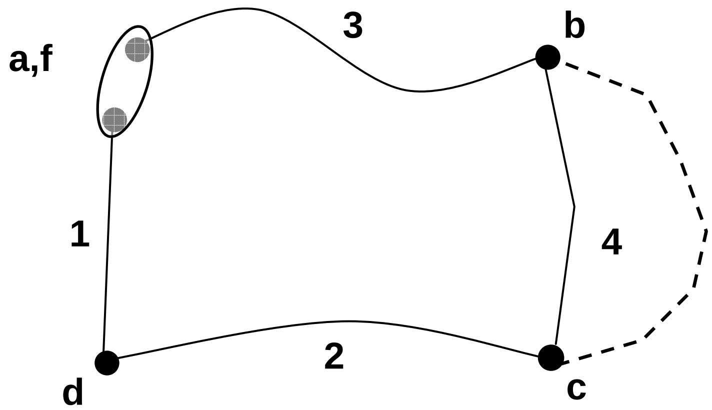
De hecho al no modificarse el circuito las incógnitas se resuelven directamente al resolver el sistema de ecuaciones.

Veamos como ejemplo el mismo circuito anterior pero en el cual hemos considerado los generadores separados de las resistencias que los hacían reales:



Ahora el gráfico de la red cambia un poco ya que tenemos en el circuito dos ramas más (los generadores están separados) y un nodo más (el **f** entre la resistencia $\mathbf{R_1}$ y el generador de tensión).

Al pasivisar la red aparecen dos efectos que nos hacen desaparecer dos ramas. Uno es el generador de tensión que al ser equivalente a un cortocircuito genera un único nodo topológico uniendo el nodo real **a** con el **f** es decir se crea un **supernodo.** El otro es el generador de corriente que al ser equivalente a un circuito abierto hace desaparecer la rama real que conformaba.



La cuenta topológica es ahora de cuatro ramas, cuatro nodos y una malla, mientras que el circuito real tiene seis ramas, cinco nodos y dos mallas. Por otra parte el número de incógnitas es de diez ya que tenemos que **b = 6** y **s = 2** luego **2b - s = 10**.

Apliquemos el procedimiento:

Ley de Ohm (se aplica en las ramas topológicas):

Rama 1) $i_1 = e_1/R_1$
Rama 2) $i_2 = e_2/R_2$
Rama 3) $i_3 = -e_3/R_3$
Rama 4) $i_4 = -e_4/R_4$

Estas cuatro ecuaciones son las únicas que podemos plantear ya que los generadores ideales no establecen restricción alguna en la relación volt-amper. De hecho podríamos haber planteado las tensiones en función de las corrientes o, inclusive, en algunas ramas tensión en función de la corriente y otras las recíprocas.

1ª ley de Kirchhoff (aquí tenemos en cuenta los nodos reales):

Nodo a) $+ i_E + i_3 = 0$
Nodo b) $- i_3 + i_4 + I = 0$
Nodo c) $+ i_2 - i_4 - I = 0$
Nodo d) $+ i_1 - i_2 = 0$

Notamos que aparecen las corrientes de todas las ramas incluyendo la de los generadores de corriente como datos que no estaban incluidos en las de la ley de Ohm. Es obvio que podríamos haber planteado la ecuación del nodo f ($- i_E - i_1 = 0$) y no la de alguno de los otros cuatro.

2ª ley de Kirchhoff (también tenemos en cuenta las mallas reales):

$- e_1 - E - e_2 + e_4 + e_3 = 0$
$+ e_4 - e_I = 0$

En estas ecuaciones aparecen las tensiones de las ramas y la de los generadores de tensión como datos que no aparecieron en las de la ley de Ohm.

En ambos grupos de ecuaciones de Kirchhoff aparecen las corrientes y tensiones de las ramas y no la de los elementos.

Hemos obtenido así las diez ecuaciones que resuelven el problema.

A partir de este punto queda solamente resolver las incógnitas, por algún metodo de cálculo numérico, del sistema de ecuaciones lineales para obtener los resultados del ejemplo.

NOTAS Y COMENTARIOS

Parte C - MÉTODO DE LAS CORRIENTES DE MALLAS

III - C.1 - Introducción.

Hemos visto en la parte B de este mismo capítulo el Método de la Ramas, o "2b", que nos permite resolver cualquier circuito lineal en forma directa. Este método tiene el inconveniente del número de ecuaciones simultáneas a resolver, aún con la reducción que supone la relación entre tensiones y corrientes que pone de manifiesto la ley de Ohm escrita para cada rama.

En la parte A habíamos manifestado que la Topología nos permitía determinar que realmente las variables independientes eran las corrientes en los enlaces ya que sin ellos no podrían existir corrientes en la red al no quedar caminos cerrados por donde circular.

El método que vamos a analizar, también llamado de Maxwell o, simplemente de las mallas, hace uso de este concepto pero empleando las corrientes de malla en lugar de específicamente la de los enlaces. Esta corriente de malla es la componente común de corriente que circula por cada malla de la red.

Con lo expuesto podemos deducir que las variables que vamos a calcular en primera instancia no son en general las corrientes de las ramas sino las de las mallas, y que a partir de ellas deberemos deducir las incógnitas reales del problema. Luego con la aplicación de la ley de Ohm calcularemos las tensiones.

Estamos diciendo que vamos a utilizar variables auxiliares para luego obtener las 2b incógnitas de la red. No hay reducción de incógnitas ni reducción de ecuaciones, por lo contrario ambas cantidades aumentan, lo conveniente está en el número de ecuaciones simultáneas a resolver.

Los pasos que seguiremos para la presentación del método son los siguientes:

1) Supuesto que hayamos definido las ramas, y con ellas las incógnitas básicas del sistema, trazamos el gráfico de la red.

2) A partir del gráfico obtenemos el árbol para que nos queden perfectamente definidas las mallas de la red sobre las cuales vamos a trabajar.

3) Asignamos a cada una de las **l** (ele) mallas del circuito una corriente genérica suponiendo que todas giran en el mismo sentido (esto no es una exigencia pero sí una condición que nos permitirá normalizar el planteo de las ecuaciones).

4) Escribimos las ecuaciones de malla (2ª ley de Kirchhoff).

5) Reexpresamos las ecuaciones poniendo las tensiones en función de las corrientes de malla previamente definidas.

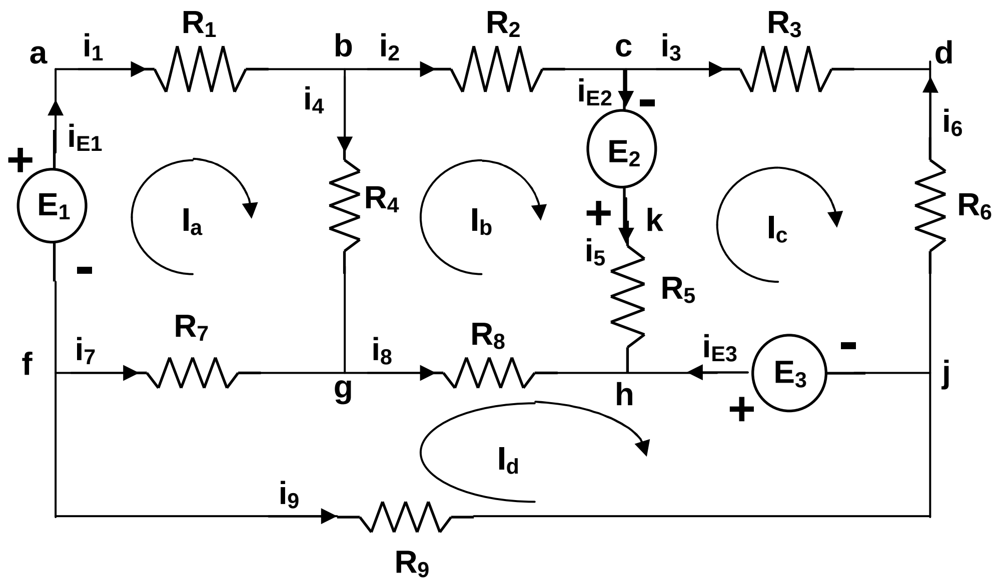
6) Resolvemos el sistema encontrando el valor de las corrientes auxiliares utilizadas.

7) Analizando la red determinamos las corrientes de cada una de las ramas.

8) Con la ley de Ohm calculamos las tensiones de rama con lo que queda resuelto el problema.

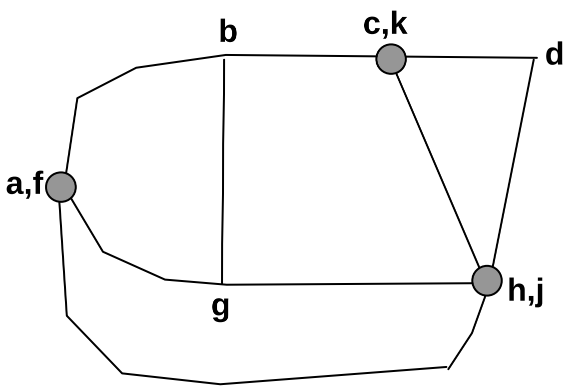
III - C.2 - Aplicación del Método.

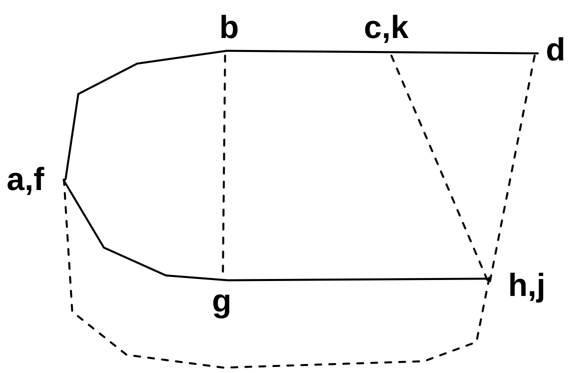
Con un ejemplo verificaremos estos pasos para luego establecer el procedimiento o "receta" para el planteo inmediato de las ecuaciones.



Para la formulación de las ecuaciones vamos a considerar todos los elementos por separado. En las resistencias se han indicado con flechas el sentido de las corrientes las que se asume que tienen el mismo subíndice que las resistencias, lo propio ocurre con las tensiones cuya polaridad concuerda con lo establecido por la ley de Ohm, positivas por donde ingresa la corriente. Esto se hace al solo efecto de no llenar el dibujo con símbolos que, inclusive, podrían dar lugar a equivocaciones.

Conforme a lo indicado arriba tracemos el gráfico correspondiente y, a partir de él, el árbol:





En el gráfico vemos que aparecen tres supernodos generados por las fuentes de tensión, pero esto no afecta al método por cuanto no altera el número de mallas tal como se puede observar en el árbol.

Este último nos muestra claramente, como podríamos haber visto directamente en la red, que el circuito tiene cuatro mallas a las que le hemos asignado las corrientes $\mathbf{I_a}$, $\mathbf{I_b}$, $\mathbf{I_c}$ e $\mathbf{I_d}$.

Escribamos las ecuaciones de la 2ª ley de Kirchhoff:

Malla a) $+ e_1 + e_4 - e_7 - E_1 = 0$
Malla b) $+ e_2 - E_2 + e_5 - e_8 - e_4 = 0$
Malla c) $+ e_3 + e_6 - E_3 - e_5 + E_2 = 0$
Malla d) $+ e_7 + e_8 + E_3 - e_9 = 0$

Hemos obtenido un sistema de cuatro ecuaciones con nueve incógnitas por lo que es imposible resolverlo. Para sortear este inconveniente replantearemos las ecuaciones poniendo las tensiones en función de las corrientes de malla.

$\mathbf{e_1 = + (R_1 \cdot I_a)}$: la corriente de la rama coincide con la corriente de la malla por cuanto no hay otra malla que comparta la misma resistencia, además de tener la misma magnitud tiene el mismo sentido. Por la misma razón tendremos que $\mathbf{e_2 = +(R_2 \cdot I_b)}$, $\mathbf{e_3 = +(R_3 \cdot I_c)}$ y $\mathbf{e_6 = +(R_6 \cdot I_c)}$. Mientras que será $\mathbf{e_9 = -(R_9 \cdot I_d)}$ porque las corrientes tienen sentidos opuestos.

$\mathbf{e_4 = + [R_4 \cdot (I_a - I_b)]}$: aquí la corriente neta de la rama es la diferencia entre la de la malla a y la de la malla b con el sentido de la corriente de la malla a. Con el mismo concepto tenemos que: $\mathbf{e_5 = + [R_5 \cdot (I_b - I_c)]}$, $\mathbf{e_7 = + [R_7 \cdot (I_d - I_a)]}$ y $\mathbf{e_8 = + [R_8 \cdot (I_d - I_b)]}$.

Reemplacemos en las ecuaciones anteriores:

Malla a) $+ (R_1 \cdot I_a) + [R_4 \cdot (I_a - I_b)] - [R_7 \cdot (I_d - I_a)] = + E_1$
Malla b) $+ (R_2 \cdot I_b) + [R_5 \cdot (I_b - I_c)] - [R_8 \cdot (I_d - I_b)] -$
$- [R_4 \cdot (I_a - I_b)] = + E_2$
Malla c) $+ (R_3 \cdot I_c) + (R_6 \cdot I_c) - [R_5 \cdot (I_b - I_c)] = - E_2 + E_3$
Malla d) $+ [R_7 \cdot (I_d - I_a)] + [R_8 \cdot (I_d - I_b)] + (R_9 \cdot I_d) = + E_3$

Agrupando, ordenando y completando obtenemos:

$$\begin{array}{l} \text{Malla a)} \\ \text{Malla b)} \\ \text{Malla c)} \\ \text{Malla d)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + (R_1+R_4+R_7) \cdot I_a - (R_4) \cdot I_b - (0) \cdot I_c - (R_7) \cdot I_d = + E_1 \\ - (R_4) \cdot I_a + (R_2+R_5+R_8+R_4) \cdot I_b - (R_5) \cdot I_c - (R_8) \cdot I_d = + E_2 \\ - (0) \cdot I_a - (R_5) \cdot I_b + (R_3+R_6+R_5) \cdot I_c - (0) \cdot I_d = - E_2 + E_3 \\ - (R_7) \cdot I_a - (R_8) \cdot I_b - (0) \cdot I_c + (R_7+R_8+R_9) \cdot I_d = + E_3 \end{array} \right.$$

Esto constituye un sistema normal de Cramer con solución única para las incógnitas auxiliares que hemos definido para cada malla.

Para resolver las incógnitas de nuestro circuito, las corrientes y tensiones de cada rama, debemos de plantear las siguientes ecuaciones:

$i_1 = I_a$; $i_2 = I_b$; $i_3 = I_c$; $i_4 = I_a - I_b$; $i_5 = I_b - I_c$; $i_6 = I_c$;
$i_7 = I_d - I_a$; $i_8 = I_d - I_b$ e $i_9 = - I_d$.

y con ellas, aplicando la ley de Ohm en cada resistencia, las nueve tensiones incógnitas.

Además tendremos que: $\mathbf{i_{E1} = I_a}$; $\mathbf{i_{E2} = I_b - I_c}$ e $\mathbf{i_{E3} = I_c - I_d}$, con lo que quedan resueltas las veintiuna incógnitas del problema.

Veamos el sistema de ecuaciones al cual llegamos y tratemos de establecer una "receta" para su planteo. Analicemos en primera instancia la ecuación de la malla a. El coeficiente de $\mathbf{I_a}$ está constituido por la suma de las resistencias que encontramos en la malla, que denominaremos **autoimpedancia** de la malla a, mientras que los coeficientes de las corrientes de las otras mallas están constituidos por las resistencias que están compartidas por ambas mallas pero con el signo negativo (cambiado). Notamos así que $\mathbf{I_b}$ tiene a $\mathbf{-R_4}$, $\mathbf{I_c}$ tiene coeficiente cero por no tener ningún elemento en común con la malla a, e $\mathbf{I_d}$ tiene a $\mathbf{-R_7}$. Estos coeficientes se denominan **impedancias compartidas o mutuas**. El término independiente por su parte está constituido por la tensión $\mathbf{E_1}$ que es el generador existente en la malla con signo positivo porque tiende a que la corriente de la malla tenga el sentido preestablecido.

Si observamos las otras ecuaciones vemos que tienen la misma estructura de coeficientes de las incógnitas; en el caso de las mallas c y d aparece un cero como impedancia compartida ya que el generador de tensión es ideal y consecuentemente no tiene impedancia interna. El término independiente está formado por la suma algebraica de las tensiones de los generadores que se encuentran en la malla con el signo positivo si hacen girar la corriente en el sentido establecido o negativo si es al contrario, esta suma es la denominada **tensión de malla**.

Conforme a lo visto podemos presentar la receta para escribir las ecuaciones con la condición de establecer el mismo sentido para todas las corrientes de malla (si no tenemos generadores de corriente):

1) El coeficiente de la corriente de la malla para la cual estamos escribiendo la ecuación está conformado con la suma de todas las resistencias, o impedancias, que la conforman con su signo (**autoimpedancia de la malla**).

2) Los coeficientes de las corrientes del resto de las mallas lo conforma la suma de las resistencias, o impedancias, que sean compartidas por las dos mallas con el signo cambiado (**impedancia mutua**), eventualmente puede ser cero si no tienen elementos comunes.

3) El término independiente lo conforma la suma de las tensiones de los generadores que se encuentran en la malla con su signo si la polaridad es tal que tienden a hacer que la corriente gire en el sentido establecido, o con el signo cambiado si ocurre lo contrario (**tensión de malla**).

4) La matriz de los coeficientes del sistema resultante (cuyo determinante será el principal del sistema) tiene dos características: a) la diagonal principal es eje de simetría de la matriz, y b) la diagonal principal tiene las impedancias con su signo mientras que el resto de los coeficientes tienen los signos cambiados o son ceros.

Hacemos notar que en el ejemplo al haber considerado resistencias ideales podemos establecer que las magnitudes son positivas o negativas, pero en general al trabajar con impedancias sabemos que la parte imaginaria puede resultar positiva o negativa según se trate de inductancias o capacitores lo que hace más general hablar de su signo o signo cambiado. Además en los modelos circuitales pueden aparecer también (por ejemplo en osciladores) resistencias negativas.

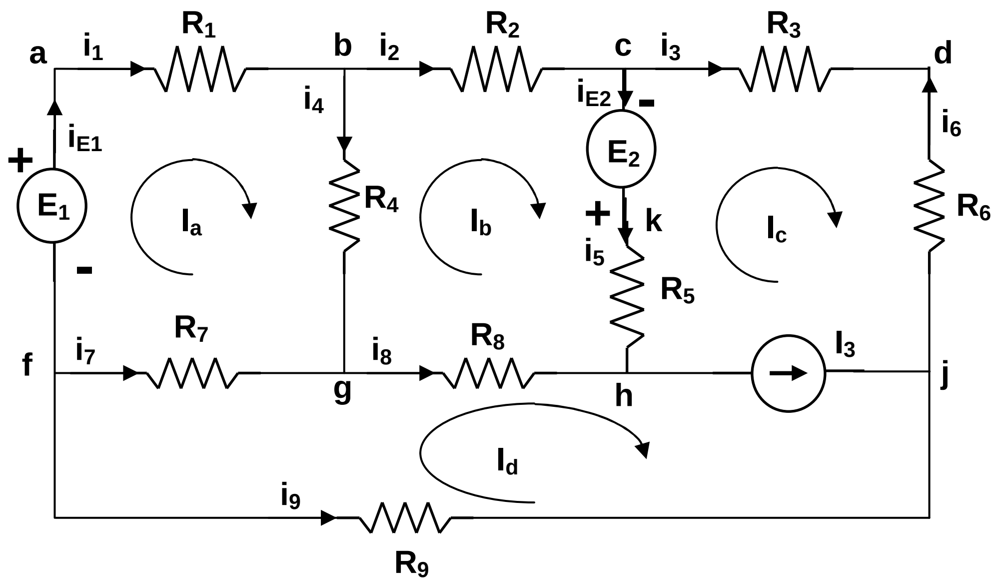
III - C.3 - Caso de generadores de corriente.

Para este método el inconveniente se presenta cuando hay generadores de corriente, debido a que al no tener impedancia representan un circuito abierto y, consecuentemente, hacen desaparecer una malla topológica.

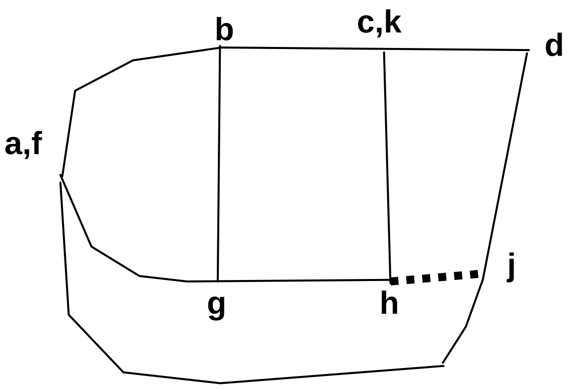
La solución también se plantea, como en el método de las ramas, con dos alternativas: modificar las fuentes o modificar el procedimiento. La modificación de las fuentes es más complicada que en caso anterior ya que para transformar una fuente de corriente en una de tensión debe obtenerse primero una fuente real de corriente y luego pasarla a una equivalente de tensión, es decir que en general se requieren dos pasos para la transformación y luego de resuelto el circuito transformado volver al original.

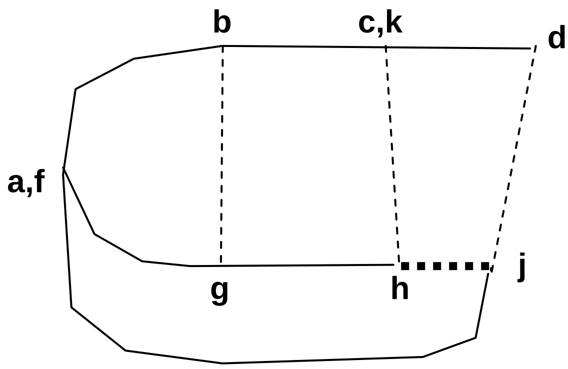
La modificación del procedimiento también se basa en aplicar el concepto de la falsa variable ya que la corriente del generador es la corriente en el enlace que este establece por lo que no hay tal incógnita.

Veamos esta alternativa con un ejemplo:



Si trazamos el gráfico y el árbol obtenemos lo siguiente:





Ya en el gráfico vemos que desaparece la rama donde está el generador de corriente y, a causa de ello en el árbol vemos que nos quedan sólo tres enlaces es decir tres mallas topológicas. Dicho de otra manera: las mallas c y d quedan reducidas a una sola.

Aunque en la red se ve claramente que hay cuatro mallas, y más aún sabemos que en la rama **h,j** hay circulación de corriente y que magnitud tiene, no podemos escribir una ecuación de tensiones en c o en d debido a que no se puede asignar una tensión sobre el generador de corriente. Lo que podemos sostener en todo caso es que las corrientes $\mathbf{I_c}$ e $\mathbf{I_d}$ no son iguales y por ello la malla topológica **c,d** tendrá dos corrientes propias distintas según el tramo.

Las ecuaciones se formarán de la siguiente manera:

Malla a) $+ (R_1+R_4+R_7)\cdot I_a - (R_4)\cdot I_b - (0)\cdot I_c - (R_7)\cdot I_d = + E_1$
Malla b) $- (R_4)\cdot I_a + (R_2+R_5+R_8+R_4)\cdot I_b - (R_5)\cdot I_c - (R_8)\cdot I_d = + E_2$
Malla c,d) $- (R_7)\cdot I_a - (R_5+ R_8)\cdot I_b + (R_3+R_6+R_5)\cdot I_c + (R_7+R_8+R_9)\cdot I_d = - E_2$

pero son tres ecuaciones con cuatro incógnitas lo que resulta insuficiente. No obstante podemos escribir, si aplicamos la 1ª ley de Kirchhoff en el nodo j, que:

$$\mathbf{I_3 = I_d - I_c}$$

ecuación que pone en evidencia la dependencia de las variables $\mathbf{I_d}$ e $\mathbf{I_c}$. Esta ecuación, denominada **restrictiva**, que no es de tensión como las propias del método, completa el número necesario y suficiente para resolver el sistema.

Si ponemos, por ejemplo, $\mathbf{I_d}$ en función de $\mathbf{I_3}$ y de $\mathbf{I_c}$, y la reemplazamos en el sistema anterior obtenemos que:

$$\begin{array}{ll} \text{Malla a)} & \left\{\begin{array}{l} + (R_1+R_4+R_7)\cdot I_a - (R_4)\cdot I_b - (R_7)\cdot I_c = + E_1 + (R_7)\cdot I_3 \\ - (R_4)\cdot I_a + (R_2+R_5+R_8+R_4)\cdot I_b - (R_5+R_8)\cdot I_c = + E_2 + (R_8)\cdot I_d \\ - (R_7)\cdot I_a - (R_5+ R_8)\cdot I_b + (R_3+R_6+R_5+R_7+R_8+R_9)\cdot I_c = \\ \qquad = - E_2 - (R_7+R_8+R_9)\cdot I_d \end{array}\right. \\ \text{Malla b)} & \\ \text{Malla c,d)} & \end{array}$$

que es un sistema normal de Cramer.

Si se hubiera hecho la transformación de fuentes se habría obtenido exactamente el mismo sistema de ecuaciones.

En la práctica no es simple deducir como van a quedar las ecuaciones por cuanto se plantea el sistema de acuerdo al formato anterior, es decir plantear una ecuación de tensiones para cada malla topológica que tenga la red, teniendo en cuenta que puede haber más de una corriente propia de la malla que aparecerá con signo positivo y que las impedancias de la malla se distribuirán en consecuencia con la corriente que las atraviesan, y agregar las ecuaciones **restrictivas** de corrientes que sean necesarias (en general tantas como generadores de corriente) para igualar el número de ecuaciones al de las incógnitas. Para nuestro ejemplo tendríamos:

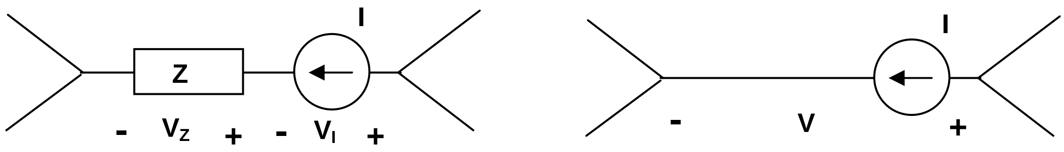
$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \\ \text{b)} & \\ \text{c,d)} & \\ \text{Restr.} & \end{array} \left\{\begin{array}{l} \mathbf{+ (R_1+R_4+R_7)\cdot I_a - (R_4)\cdot I_b - (0)\cdot I_c - (R_7)\cdot I_d = + E_1} \\ \mathbf{- (R_4)\cdot I_a + (R_2+R_5+R_8+R_4)\cdot I_b - (R_5)\cdot I_c - (R_8)\cdot I_d = + E_2} \\ \mathbf{- (R_7)\cdot I_a - (R_5+ R_8)\cdot I_b + (R_3+R_6+R_5)\cdot I_c + (R_7+R_8+R_9)\cdot I_d = - E_2} \\ \mathbf{+ I_d - I_c = + I_3} \end{array}\right.$$

A partir de este sistema se procede a resolver las corrientes de malla, con ellas las corrientes de ramas y, finalmente, las tensiones de ramas. Este es, quizás, el método más utilizado por cuanto es el de más fácil aplicación en los casos de circuitos que contienen inductancias acopladas electromagnéticamente.

III - C.4 - Caso de generadores de corriente en serie con impedancias.

Es posible que en los circuitos nos aparezcan impedancias puestas en serie con generadores de corriente, si este es el caso tales impedancias se deben eliminar reemplazándolas con un cortocircuito por cuanto no alteran la corriente del generador ni las corrientes de las mallas.

La evaluación de la tensión que se desarrolla en la impedancia puede hacerse antes o después de resolver el resto del circuito. Y es tensión va a afectar la tensión sobre el generador de corriente ya que la suma de ambas debe dar como resultado la tensión sobre el generador (sin la impedancia) que nos da el método de las mallas.



Rama original con la impedancia serie **Rama alterada sin la impedancia serie**

Ejemplo: la rama de la figura tiene una impedancia en serie con un generador de corriente. La tensión sobre la impedancia será:

$$\mathbf{V_Z} = \mathbf{Z} \times \mathbf{I}$$

para todo caso. El método de las mallas nos permitirá resolver el circuito alterado sin la impedancia del cual obtendremos la tensión **V** de la rama que contiene al generador. Esa tensión debe ser igual a la suma de $\mathbf{V_Z}$ más $\mathbf{V_I}$ de la rama sin modificar ya que el equilibrio del circuito no se ve modificado por la presencia o no de la impedancia **Z**.

Por lo tanto será:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_Z} + \mathbf{V_I} \text{ por lo que } \mathbf{V_I} = \mathbf{V} - \mathbf{V_Z}$$

que es el valor del circuito original.

NOTAS Y COMENTARIOS

Parte D - MÉTODO DE LAS TENSIONES NODALES

III - D.1 - Introducción.

Cuando en la parte A del capítulo analizamos topológicamente a los circuitos dijimos que podíamos considerar a las tensiones de los nodos como variables independientes ya que esas tensiones eran nulas el circuito era pasivo.

Este criterio es el que fundamenta al "Método de las Tensiones Nodales" o "Método de los Nodos" y, lógicamente, se parte de la aplicación de la 1ª ley de Kirchhoff. Esto implica la formulación de ecuaciones de corrientes que serán explicitadas en función de las tensiones de los nodos.

En este caso las variables auxiliares serán las tensiones de los nodos asignándole a uno de ellos una tensión de referencia que puede ser cualquier valor si se conoce o, normalmente, cero.

Básicamente el procedimiento será el siguiente:

1) Establecer las incógnitas del circuito con lo que quedarán definidas las ramas y, fundamentalmente, los nodos.

2) Trazamos el gráfico de la red para determinar cuales son nodos topológicos.

3) Asignamos a cada nodo una tensión, incógnita auxiliar, incluyendo para uno de los nodos un valor establecido como de referencia (puede ser cero).

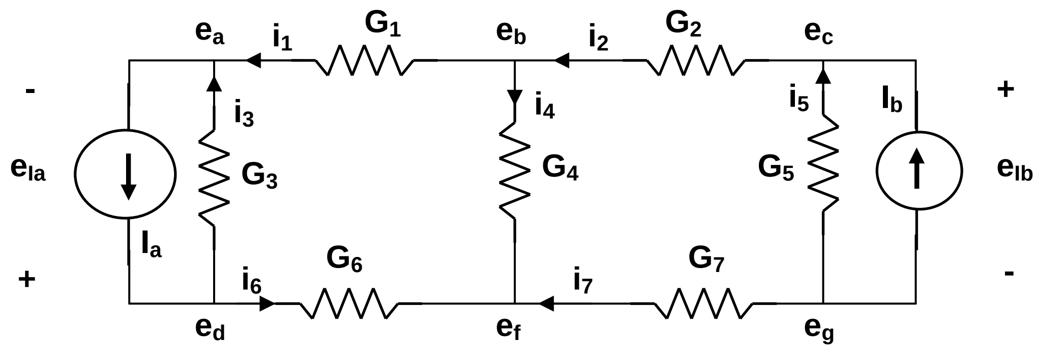
4) En cada uno de los nodos topológicos, excepto uno (generalmente, aunque no necesario, el de referencia), escribiremos una ecuación de equilibrio de las corrientes concurrentes, ya sean estas de las ramas o de los generadores.

5) El sistema lo reescribimos reemplazando, conforme a la ley de Ohm, las corrientes por el producto de la diferencia de potencial en las ramas concurrentes por su conductancia (admitancia).

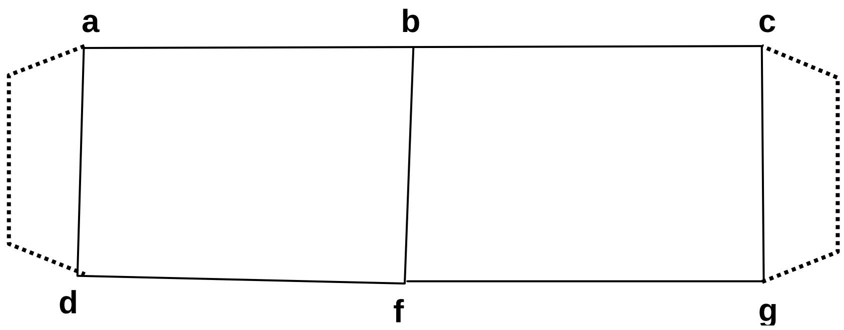
6) Resolvemos para las tensiones de los nodos. Con ellas determinaremos las tensiones en las ramas y, finalmente, las corrientes de las ramas.

III - D.2 - Aplicación del método.

Veamos un ejemplo:



Si trazamos el gráfico veremos que no cambia el número de nodos aunque, si consideramos cada elemento como una rama, si cambia el número de mallas por las creadas por los generadores de corriente. Esto no tiene, para el método de los nodos, ninguna trascendencia.



Escribamos pues las ecuaciones de la 1ª ley de Kirchhoff asumiendo que tomamos al nodo **f** como de referencia.

Nodo a) $- i_1 - i_3 + I_a = 0$
Nodo b) $+ i_1 - i_2 + i_4 = 0$
Nodo c) $+ i_2 - i_5 - I_b = 0$
Nodo d) $+ i_3 + i_6 - I_a = 0$
Nodo g) $+ i_5 + i_7 + I_b = 0$

Reemplacemos las corrientes en función de las tensiones:

Nodo a) $- (e_b-e_a)G_1 - (e_d-e_a)G_3 + I_a = 0$
Nodo b) $+ (e_b-e_a)G_1 - (e_c-e_b)G_2 + (e_b-e_f)G_4 = 0$
Nodo c) $+ (e_c-e_b)G_2 - (e_g-e_c)G_5 - I_b = 0$
Nodo d) $+ (e_d-e_a)G_3 + (e_d-e_f)G_6 - I_a = 0$
Nodo g) $+ (e_g-e_c)G_5 + (e_g-e_f)G_7 + I_b = 0$

Agrupemos, asumamos para $\mathbf{e_f}$ el valor cero, y ordenemos:

$$
\begin{array}{l}
\text{Nodo a)} \\
\text{Nodo b)} \\
\text{Nodo c)} \\
\text{Nodo d)} \\
\text{Nodo g)}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
+ (G_1+G_3)e_a - (G_1)e_b - (0)e_c - (G_3)e_d - (0)e_g = - I_a \\
- (G_1)e_a + (G_1+G_2)e_b - (G_2)e_c - (0)e_d - (0)e_g = 0 \\
- (0)e_a - (G_2)e_b + (G_2+G_5)e_c - (G_5)e_d - (0)e_g = + I_b \\
- (G_3)e_a - (0)e_b - (0)e_c + (G_3+G_6)e_d - (0)e_g = + I_a \\
- (0)e_a - (0)e_b - (G_5)e_c - (0)e_d + (G_5+G_7)e_g = - I_b
\end{array}
\right.
$$

Logramos un sistema de ecuaciones normal de Cramer que nos permite calcular las tensiones de los nodos respecto a la tensión del nodo **f**.

Para resolver las incógnitas de nuestro circuito, las corrientes y tensiones de cada rama, debemos de plantear las siguientes ecuaciones:

$e_1 = e_b - e_a$; $e_2 = e_c - e_b$; $e_3 = e_d - e_a$; $e_4 = e_b$; $e_5 = e_g - e_c$;
$e_6 = e_d$ y $e_7 = e_g$

y con ellas, aplicando la ley de Ohm en cada conductancia, las siete corrientes incógnitas.

Además tendremos que: $\mathbf{e_{Ia} = e_d - e_a}$ y $\mathbf{e_{Ib} = e_c - e_g}$, con lo que quedan resueltas las dieciséis incógnitas del problema.

Veamos el sistema al cual llegamos y tratemos de establecer una "receta" para su planteo. Analicemos en primera instancia la ecuación del nodo a. El coeficiente de $\mathbf{e_a}$ está constituido por la suma de las conductancias que concurren al nodo, que denominaremos **autoadmitancia** del nodo a, mientras que los coeficientes de las tensiones de los otros nodos están constituidos por las conductancias que vinculan a ambos nodos pero con el signo negativo (cambiado). Notamos así que $\mathbf{e_b}$ tiene a $\mathbf{-G_1}$, $\mathbf{e_c}$ tiene coeficiente cero por no tener ningún elemento en común con el nodo a, lo mismo ocurre con $\mathbf{e_g}$, y $\mathbf{e_d}$ tiene a $\mathbf{-G_3}$. Estos coeficientes se denominan **admitancias compartidas o mutuas.** El término independiente por su parte está constituido por la corriente $\mathbf{-I_a}$ que es el generador concurrente al nodo con signo negativo porque tiende a que la tensión del nodo sea negativa.

Si observamos las otras ecuaciones vemos que tienen la misma estructura de coeficientes de las incógnitas y del término independiente; éste está formado por la suma algebraica de las corrientes de los generadores que concurren al nodo con el signo positivo si hacen positiva a la tensión del nodo (entran) o negativo si es al contrario, esta suma es la denominada **corriente de nodo.**

Conforme a lo visto podemos presentar la receta para escribir las ecuaciones (si no tenemos generadores de tensión):

1) El coeficiente de la tensión del nodo para el cual estamos escribiendo la ecuación está conformado con la suma de todas las conductancias, o admitancias, que concurren al nodo con su signo (**autoadmitancia del nodo**).

2) Los coeficientes de las tensiones del resto de los nodos lo conforma la suma de las conductancias, o admitancias, que conectan a ambos nodos con el signo cambiado (**admitancia mutua**), eventualmente puede ser cero si no tienen elementos comunes.

3) El término independiente lo conforma la suma de las corrientes de los generadores que concurren al nodo con su signo si el sentido es tal que tienden a hacer que la tensión del nodo sea positiva (entrando al nodo), o con el signo cambiado si ocurre lo contrario (**corriente de nodo**).

4) La matriz de los coeficientes del sistema resultante (cuyo determinante será el principal del sistema) tiene dos características: a) la diagonal principal es eje de simetría de la matriz, y b) la diagonal principal tiene las admitancias con su signo mientras que el resto de los coeficientes tienen los signos cambiados o son ceros.

Hacemos notar que al haber considerado en el ejemplo conductancias ideales podemos establecer que las magnitudes son positivas o negativas, pero al trabajar con admitancias sabemos que la parte imaginaria puede resultar positiva o negativa, según se trate de capacitores o inductancias, lo que hace más pertinente hablar de con su signo o con el signo cambiado. Además, en los modelos circuitales pueden aparecer también (por ejemplo en osciladores) conductancias negativas.

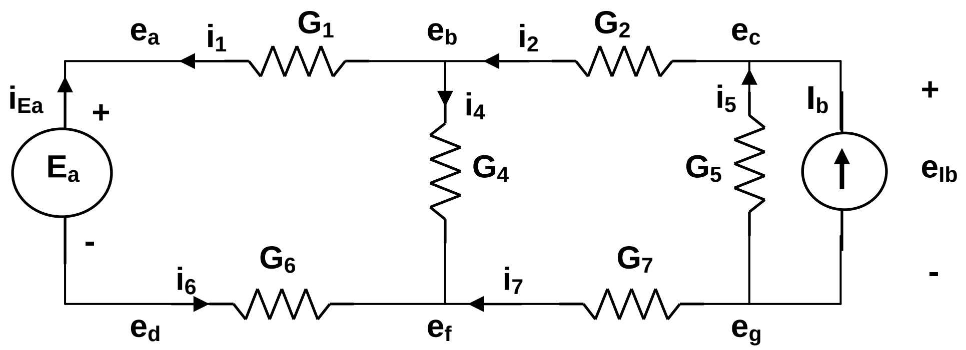
III - D.3 - Caso de generadores de tensión.

Para este método el inconveniente se presenta cuando hay generadores de tensión, debido a que al tener impedancia cero representan un cortocircuito y, consecuentemente, hacen desaparecer un nodo topológico formando un supernodo.

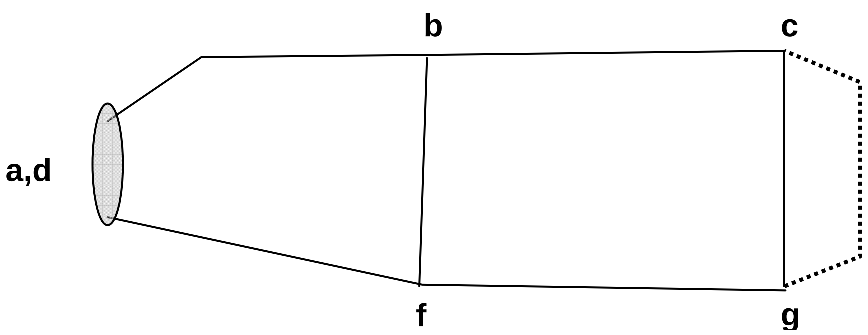
La solución también se plantea, como en el método de las ramas y en el de las mallas, con dos alternativas: modificar las fuentes o modificar el procedimiento. La modificación de las fuentes es tan complicada como en el método anterior ya que para transformar una fuente de tensión en una de corriente debe obtenerse primero una fuente real de tensión y luego pasarla a una equivalente de corriente, es decir que se requieren dos pasos para la transformación y, luego de resuelto el circuito transformado, volver al original.

La modificación del procedimiento también se basa en aplicar el concepto de la falsa variable ya que la tensión del generador es la diferencia de tensión entre los nodos extremos por lo que no hay tal incógnita.

Veamos esta alternativa con un ejemplo:



Si trazamos el gráfico de la red tendremos:



Topológicamente tenemos cinco nodos ya que el **a** quedó unido al **d** formando un supernodo. No obstante sabemos que la red tiene seis nodos porque la tensión en a no es la misma que en d y conocemos su diferencia de potencial. Sin embargo no podemos escribir ninguna relación que vincule a esa diferencia de tensión conocida con la corriente que se establecerá entre sus terminales.

Podemos escribir, en consecuencia, sólo ecuaciones de corrientes en los nodos topológicos, de modo que, asumiendo que ef es igual a cero, obtendremos:

Nodo a,d) - i1 + i6 = 0
Nodo b) $+ i_1 - i_2 + i_4 = 0$
Nodo c) $+ i_2 - i_5 - I_b = 0$
Nodo g) $+ i_5 + i_7 + I_b = 0$

Reemplacemos las corrientes en función de las tensiones:

Nodo a,d) $- (e_b-e_a)G_1 + (e_d)G_6 = 0$
Nodo b) $+ (e_b-e_a)G_1 - (e_c-e_b)G_2 + (e_b-e_f)G_4 = 0$
Nodo c) $+ (e_c-e_b)G_2 - (e_g-e_c)G_5 - I_b = 0$
Nodo g) $+ (e_g-e_c)G_5 + (e_g-e_f)G_7 + I_b = 0$

Agrupemos y ordenemos:

Nodo a,d) $+ (G_1)e_a - (G_1)e_b - (0)e_c + (G_6)e_d - (0)e_g = 0$
Nodo b) $- (G_1)e_a + (G_1+G_2+G_4)e_b - (G_2)e_c - (0)e_d - (0)e_g = 0$
Nodo c) $- (0)e_a - (G_2)e_b + (G_2+G_5)e_c - (0)e_d - (G_5)e_g = + I_b$
Nodo g) $- (0)e_a - (0)e_b - (G_5)e_c - (0)e_d + (G_5+G_7)e_g = - I_b$

Este es un sistema irresoluble ya que tiene cuatro ecuaciones y cinco incógnitas, debemos escribir otra que no sea de corrientes en nodos. El supernodo nos permite escribir la ecuación restante que, como en el método de las mallas, se denomina **ecuación restrictiva**:

$$\mathbf{e_a - e_d = E_a}$$

Esta ecuación pone en evidencia la dependencia entre $\mathbf{e_a}$ y $\mathbf{e_d}$ a través de la tensión del generador $\mathbf{E_a}$, pone en evidencia la **falsa variable**.

Si la introducimos en el sistema y ponemos, por ejemplo, ed en función de ea obtenemos:

Nodo a,d) $+ (G_1)e_a - (G_1)e_b - (0)e_c + (G_6)(e_a-E_a) - (0)e_g = 0$
Nodo b) $- (G_1)e_a + (G_1+G_2+G_4)e_b - (G_2)e_c - (0)(e_a-E_a) - (0)e_g = 0$
Nodo c) $- (0)e_a - (G_2)e_b + (G_2+G_5)e_c - (0)(e_a-E_a) - (G_5)e_g = + I_b$
Nodo g) $- (0)e_a - (0)e_b - (G_5)e_c - (0)(e_a-E_a) + (G_5+G_7)e_g = - I_b$

Desarrollando queda:

$$\begin{array}{ll} \text{Nodo a,d)} & \multirow{4}{*}{} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Nodo a,d)} \\ \text{Nodo b)} \\ \text{Nodo c)} \\ \text{Nodo g)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + (G_1+G_6)e_a - (G_1)e_b - (0)e_c - (0)e_g = + (G_6)E_a \\ - (G_1)e_a + (G_1+G_2)e_b - (G_2)e_c - (0)e_g = 0 \\ - (0)e_a - (G_2)e_b + (G_2+G_5)e_c - (G_5)e_g = + I_b \\ - (0)e_a - (0)e_b - (G_5)e_c + (G_5+G_7)e_g = - I_b \end{array} \right.$$

Que constituye un sistema normal, puede observarse que si se hubiera hecho la transformación de la fuente de tensión en corriente, asociándola con G_6, se hubiera obtenido el mismo sistema de ecuaciones.

Como no es simple, en general, establecer como quedarán modificadas las ecuaciones, se plantea el sistema incluyendo la ecuación restrictiva y luego se desarrolla.

Nuestro ejemplo quedaría entonces:

$$\begin{array}{l} \text{Nodo a,d)} \\ \text{Nodo b)} \\ \text{Nodo c)} \\ \text{Nodo g)} \\ \text{Restrict.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + (G_1)e_a - (G_1)e_b - (0)e_c + (G_6)e_d - (0)e_g = 0 \\ - (G_1)e_a + (G_1+G_2+G_4)e_b - (G_2)e_c - (0)e_d - (0)e_g = 0 \\ - (0)e_a - (G_2)e_b + (G_2+G_5)e_c - (0)e_d - (G_5)e_g = + I_b \\ - (0)e_a - (0)e_b - (G_5)e_c - (0)e_d + (G_5+G_7)e_g = - I_b \\ + e_a - e_d = E_a \end{array} \right.$$

Podemos establecer, entonces, la receta del método de las tensiones nodales de la siguiente forma:

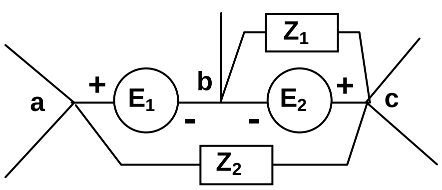
1) Escribir las ecuaciones de corrientes en todos los nodos topológicos en función de las tensiones, teniendo en cuenta que en los supernodos hay más de una tensión propia y a cada una hay que asociarle las conductancias (admitancias) que llegan a esa tensión.

2) En los supernodos escribir las ecuaciones restrictivas de tensión que ellos establecen. Obteniendo así tantas ecuaciones como tensiones nodales tengamos en la red original.

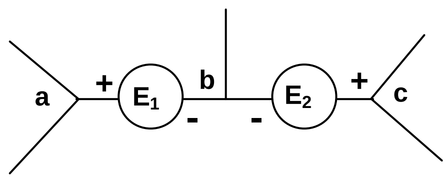
3) A partir de la solución de esas tensiones de nodos con respecto al de referencia se calcularán las tensiones de las ramas y, con ellas aplicando la ley de Ohm, se obtendrán las corrientes.

III - D.4 - Caso de generadores de tensión en paralelo con impedancias.

Las impedancias puestas en paralelo con generadores ideales de tensión no alteran la tensión que generan, por consiguiente podemos eliminarlas a los efectos del cálculo. Lo que sí vamos a tener que resolver es la tensión y corriente sobre ellas lo que puede calcularse antes o después del resto del circuito. La corriente que circula por ellas deberá sumarse algebráicamente a la que calculemos para el o los generadores afectados resolviendo el circuito sin esas impedancias.



Circuito con las impedancias



Circuito sin las impedancias

En la figura tenemos un supernodo formado por los nodos a, b y c debido a la existencia entre ellos de los generadores E_1 y E_2. Como consecuencia sabemos que la tensión sobre Z_1 está dada por $E_1 - E_2$; la existente sobre Z_2 es E_2 con ello es fácil deducir las corrientes en ambas impedancias.

En el circuito modificado esas corrientes no están, pero las tensiones no se han modificado. Las corriente resultante sobre E_1 será la que obtengamos del circuito modificado más, algebráicamente la que circula por Z_2. La de E_2 será la obtenida más, algebráicamente, las que circulan por Z_1 y por Z_2.

Parte E - EXPRESIONES MATRICIALES DE LAS ECUACIONES DE REDES

III - E.1 - Método de las Mallas.

Si generalizamos las expresiones de las ecuaciones de equilibrio de una red mediante el método de las mallas tendríamos un sistema de **l** (ele) ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \ldots\ldots\ldots + Z_{1l}I_l = E_1 \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \ldots\ldots\ldots + Z_{2l}I_l = E_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{l1}I_1 + Z_{l2}I_2 + Z_{l3}I_3 + \ldots\ldots\ldots + Z_{ll}I_l = E_l \end{cases}$$

Donde las $\mathbf{Z_{ii}}$ son las autoimpedancias de cada malla con su signo, las $\mathbf{Z_{ij}}$ son las impedancias compartidas con el signo cambiado, las $\mathbf{E_i}$ son las tensiones de malla, todas las cuales se conocen, y las $\mathbf{I_i}$ son las corrientes de malla que son nuestras incógnitas.

Este sistema lo podemos resolver conforme a Cramer aplicando el desarrollo de los determinantes por menores complementarios de la forma:

$$\begin{cases} I_1 = E_1(\Delta_{11}/\Delta) + E_2(\Delta_{21}/\Delta) + E_3(\Delta_{31}/\Delta) + \ldots\ldots + E_l(\Delta_{l1}/\Delta) \\ I_2 = E_1(\Delta_{12}/\Delta) + E_2(\Delta_{22}/\Delta) + E_3(\Delta_{32}/\Delta) + \ldots\ldots + E_l(\Delta_{l2}/\Delta) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_l = E_1(\Delta_{1l}/\Delta) + E_2(\Delta_{2l}/\Delta) + E_3(\Delta_{3l}/\Delta) + \ldots\ldots + E_l(\Delta_{ll}/\Delta) \end{cases}$$

Donde Δ_{ij} es el menor complementario correspondiente a la fila de la tensión y la columna de la corriente con su signo (cofactor), y Δ es el determinante principal o de impedancias del sistema.

El orden del menor complementario es inferior en una unidad al orden del determinate principal, consecuente las dimensiones de la relación entre ambos son las de una admitancia.

Introduciendo el concepto de admitancias de punto impulsor, o impulsoras (cuando los subíndices del menor complementario son iguales), y de transferencia (cuando los subíndices del menor complementario no son iguales) podemos reescribir las ecuaciones, que constituyen la solución del sistema, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} I_1 = E_1y_{11} + E_2y_{12} + E_3y_{13} + \ldots\ldots + E_ly_{1l} \\ I_2 = E_1y_{21} + E_2y_{22} + E_3y_{23} + \ldots\ldots + E_ly_{2l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_l = E_1y_{l1} + E_2y_{l2} + E_3y_{l3} + \ldots\ldots + E_ly_{ll} \end{cases}$$

Donde se han intercambiado los subíndices respecto a los de los menores complementarios para mantener un ordenamiento formal de los coeficientes.

Recordemos que estas **y** no tienen nada que ver con las **Y** del método de tensiones nodales.

El nombre de admitancias impulsoras viene del hecho que establecen la relación entre la corriente de la malla y la tensión en la misma malla para el caso que el resto de las tensiones de malla sean nulas. Las de transferencia también dan la relación corriente tensión pero referidas a distintas mallas.

Si del primer sistema de ecuaciones (ecuaciones de equilibrio) separamos las tensiones y las mostramos en la forma ordenada en que están obtendremos una matriz de tensiones:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ .. \\ .. \\ E_l \end{bmatrix}$$

Los corchetes nos indican simplemente que es un conjunto ordenado de fuerzas electromotrices.

A los coeficientes de los términos del primer miembro, que son impedancias, también podemos exhibirlos en forma similar a lo hecho con las tensiones:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & .... & Z_{1l} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & .... & Z_{2l} \\ \multicolumn{5}{c}{....................} \\ \multicolumn{5}{c}{....................} \\ Z_{l1} & Z_{l2} & Z_{l3} & .... & Z_{ll} \end{bmatrix}$$

Nuevamente los corchetes nos indican que se trata de un grupo de impedancias relacionado, ordenado de una forma sistemática.

Aunque esto parece un determinante no lo es. No puede desarrollarse ni evaluarse, sólo muestra.

Las matrices pueden ser cuadradas o rectangulares, en el caso de las tensiones tenemos una matriz columna mientras que la de las impedancias es una matriz cuadrada.

La matriz impedancia nos dice como se comportará la red cuando se aplican fuerzas electromotrices a ella. Es decir que contiene toda la información acerca de las propiedades de impedancia de la red y por ello se dice que caracteriza la red.

Podemos simplificar poniendo que:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

donde el signo igual sólo significa que [Z] es una manera abreviada de escribir la matriz impedancia. Lo mismo podemos hacer para todas las matrices.

Si volvemos a la última expresión vemos que es una matriz dos por dos, correspondiente evidentemente a una red de dos mallas. Esta matriz tiene cuatro elementos y, si se refiere a una red de elementos bilaterales, sólo tres de ellos son diferentes porque $Z_{12} = Z_{21}$. Es decir que una red de dos mallas queda caracterizada por tres coeficientes de impedancia.

Si vemos el grupo de ecuaciones de solución del sistema podemos deducir que también queda caracterizada la red por medio de la admitancias impulsoras y de transferencia. Si tomamos el caso de una red de dos mallas obtendríamos una matriz característica de la misma en función de dichas admitancias:

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

también es dos por dos y tiene cuatro coeficientes y, si podemos demostrar que $y_{12} = y_{21}$, también quedará caracterizada la red por tres coeficientes de admitancia.

Vamos a demostrar que es así en redes bilaterales. Por definición:

$$y_{21} = \Delta_{12}/\Delta \qquad\qquad y_{12} = \Delta_{21}/\Delta$$

luego $y_{21} = y_{12}$ siempre que sea $\Delta_{12} = \Delta_{21}$.

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1l} \\ Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{l2} & Z_{l3} & \dots & Z_{ll} \end{vmatrix}$$

si la red es bilateral sabemos que $Z_{ij} = Z_{ji}$ por lo que podemos permutar esos valores en Δ_{21}:

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{31} & \dots & Z_{l1} \\ Z_{23} & Z_{33} & \dots & Z_{l3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{2l} & Z_{3l} & \dots & Z_{ll} \end{vmatrix}$$

una propiedad de los determinantes dice que el intercambio de filas y columnas no lo altera:

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} & \dots & Z_{2l} \\ Z_{31} & Z_{33} & \dots & Z_{3l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{l1} & Z_{l3} & \dots & Z_{ll} \end{vmatrix}$$

si comparamos con el determinante Δ_{12} veremos que son iguales. Luego $y_{12} = y_{21}$ y en general podemos escribir que $y_{pq} = y_{qp}$.

Esta conclusión nos sirve para asegurar que también en el caso que caracterizamos la red a través de sus admitancias impulsoras y de transferencia hacen falta conocer sólo tres coeficientes (si la red es de dos mallas). Pero, mucho más importante aún, esta conclusión establece las bases para el **teorema de la reciprocidad** que nos dice que: en un circuito podemos, si es activo, intercambiar una fuente de tensión con un amperímetro sin que la lectura del mismo se modifique; o que las características direccionales de una antena receptora son las mismas que cuando se usa como transmisora.

III - E.2 - Método de las Tensiones Nodales.

Lo dicho para las ecuaciones de malla puede extenderse a las ecuaciones de nodo. En este caso la caracterización de la red se hará a través de la matriz admitancia (propias y mutuas):

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{AA}\ Y_{AB}\ Y_{AC}\ ....\ Y_{AN} \\ Y_{BA}\ Y_{BB}\ Y_{BC}\ ....\ Y_{BN} \\ .... \\ .... \\ Y_{NA}\ Y_{NB}\ Y_{NC}\ ....\ Y_{NN} \end{bmatrix}$$

o también con la matriz impedancia (impulsoras y de transferencia).

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{AA}\ z_{AB}\ z_{AC}\ ....\ z_{AN} \\ z_{BA}\ z_{BB}\ z_{BC}\ ....\ z_{BN} \\ .... \\ .... \\ z_{NA}\ z_{NB}\ z_{NC}\ ....\ z_{NN} \end{bmatrix}$$

De acuerdo a las definiciones resulta evidente que la impedancia impulsora en un par de terminales y la admitancia impulsora en ese mismo par de terminales son cantidades recíprocas, pero no existe una relación simple entre las impedancias y admitancias de transferencia, no son recíprocas.

III - E.3 - Expresión matricial de las ecuaciones de nodos y mallas

De acuerdo con lo expuesto podemos, usando la notación matricial abreviada, poner para las ecuaciones de nodo:

$$[\,\mathbf{Y}\,] \cdot [\,\mathbf{V}\,] = [\,\mathbf{I}\,]$$

y para las ecuaciones de tensión que constituyen su solución:

$$[\,\mathbf{V}\,] = [\,\mathbf{z}\,] \cdot [\,\mathbf{I}\,]$$

Para el método de las mallas será:

$$[\,\mathbf{Z}\,] \cdot [\,\mathbf{I}\,] = [\,\mathbf{V}\,]$$

y:

$$[\,\mathbf{I}\,] = [\,\mathbf{y}\,] \cdot [\,\mathbf{V}\,]$$

Estas ecuaciones matriciales no significan nada sin reglas apropiadas de interpretación y un conocimiento básico de las operaciones matriciales.

Con las expresiones obtenidas podemos plantear la solución de las redes utilizando matrices. Por ejemplo para el método de las mallas tenemos:

$$[\,Z\,] \cdot [\,I\,] = [\,V\,]$$

donde las incógnitas son las corrientes. Para resolver premultiplicamos ambos términos de la ecuación por $[\,Z\,]^{-1}$

$$[\,Z\,]^{-1} \cdot [\,Z\,] \cdot [\,I\,] = [\,Z\,]^{-1} \cdot [\,V\,]$$

que resultará en:

$$[\,I\,] = [\,Z\,]^{-1} \cdot [\,V\,]$$

que es la solución formal de las ecuaciones de malla. Pero también tenemos que:

$$[\,I\,] = [\,y\,] \cdot [\,V\,]$$

lo que implica que:

$$[\,y\,] = [\,Z\,]^{-1}$$

Para el método de los nodos tenemos:

$$[\,Y\,] \cdot [\,V\,] = [\,I\,]$$

y para las ecuaciones de tensión que constituyen su solución:

$$[\,V\,] = [\,Y\,]^{-1} \cdot [\,I\,]$$

conforme a la otra forma es:

$$[\,V\,] = [\,z\,] \cdot [\,I\,]$$

y por consiguiente:

$$[\,z\,] = [\,Y\,]^{-1}$$

Estas expresiones que sintetizan la ley de Ohm matricial son muy prácticas para la solución de redes por computadoras.

Como ejemplo de aplicación: podemos transformar una red de dos terminales a otra de igual impedancia de entrada si a la matriz de impedancia [Z] es postmultiplicada por una matriz de transformación y premultiplicada por la transpuesta de esa matriz de transformación. La matriz de impedancia de la nueva red equivalente es:

$$[Z'] = [T]_t\ [Z]\ [T]$$

donde la matriz de transformación es de la forma:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

donde las a_{ij} pueden ser cualquier número real. Físicamente hay que tener cuidado para evitar elementos negativos (resistencias, inductancias y/o capacitores) en la nueva red equivalente.

Parte F: Operaciones con matrices

Como ayuda veamos sintéticamente algunas operaciones matriciales.

Igualdad de matrices: Una matriz es igual a otra si, y sólo si, cada elemento de una es idéntico al correspondiente de la otra. Esto implica que las dos matrices deben ser de igual formato.

Producto de matrices:

Matriz cuadrada por matriz columna: es otra matriz formada multiplicando el primer término de la primera fila de la matriz cuadrada por el primer término de la matriz columna; el segundo término de la primera fila de la matriz cuadrada por el segundo de la columna; el tercero de la primera fila de la matriz cuadrada por el tercero de la columna y así sucesivamente hasta completar la fila y la columna (completar con ceros los términos faltantes) La suma de todos ellos da el primer elemento de la matriz columna resultante.

De la misma manera multiplicando cada término de la segunda fila de la matriz cuadrada por el elemento correspondiente de la matriz columna, su suma da el segundo término de la matriz resultante; así hasta completar el número de filas.

Ejemplo:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} & Y_{AC} \\ Y_{BA} & Y_{BB} & Y_{BC} \\ Y_{NA} & Y_{NB} & Y_{NC} \end{bmatrix} \quad y \quad [V] = \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}$$

$$[Y]\,[V] = \begin{bmatrix} Y_{AA}\,V_A + Y_{AB}\,V_B + Y_{AC}\,V_C \\ Y_{BA}\,V_A + Y_{BB}\,V_B + Y_{BC}\,V_C \\ Y_{CA}\,V_A + Y_{CB}\,V_B + Y_{CC}\,V_C \end{bmatrix}$$

como este producto es igual a la matriz columna [I] si ponemos que:

$$[Y]\,[V] = [I]$$

obtenemos la familia de ecuaciones del método de tensiones nodales.

Producto de matrices cuadradas: Se obtiene otra matriz cuadrada del mismo orden donde cada columna resulta de multiplicar la primera matriz por una columna de la segunda de la forma ya explicitada. Puede expresarse que si:

$$[a]\,[b] = [c] \quad \text{resulta} \quad c_{pq} = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}\, b_{rq}$$

Producto de una matriz por un número: Cada elemento de la matriz queda multiplicado por ese número.

Matriz unitaria: es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos y el resto ceros. El símbolo es [U] y la pre o postmultiplicación de una matriz unitaria por otra matriz cualesquiera no altera a esta última.

Matriz inversa: dada una matriz [Y] definimos otra matriz, que llamamos inversa y notamos con $[Y]^{-1}$, de forma tal que el producto de ambas resulta en una matriz unitaria.

Para ello debe ser:

$$[Y]^{-1} = 1/\Delta \begin{bmatrix} \Delta_{AA} & \Delta_{BA} & \Delta_{CA} \\ \Delta_{AB} & \Delta_{BB} & \Delta_{CB} \\ \Delta_{AC} & \Delta_{BC} & \Delta_{CC} \end{bmatrix}$$

Donde $1/\Delta$ es la inversa del determinante de la matriz [Y] y Δ_{AB} es el cofactor del término Y_{AB} de este determinante.

Suma de matrices: si tenemos las matrices [A] y [B] su suma será la matriz [C] cuyos elementos serán la suma de los elementos de las dos matrices sumandos:

$$c_{pq} = a_{pq} + b_{pq}$$

División de matrices: no estando definida la división se efectúa el producto por la matriz inversa.

Transposición: significa el intercambio de filas por columnas.

$[A]_t$ es la transpuesta de [A] si:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad y \quad [A]_t = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Matriz recíproca: es la transpuesta de la matriz inversa.