

# TEORÍA DE LOS CIRCUITOS I

## CAPÍTULO V

# TRANSITORIO DE CIRCUITOS

Parte A: INTRODUCCIÓN

Parte B: CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

Parte C: CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN

Ing. Jorge María BUCCELLA  
Director de la Cátedra de Teoría de Circuitos I  
Facultad Regional Mendoza  
Universidad Tecnológica Nacional  
Mendoza, Septiembre de 2001.-

## ÍNDICE

|  |    |
|--|----|
| Parte A: INTRODUCCIÓN  | 3  |
| A.1 Las ecuaciones diferenciales de los circuitos eléctricos | 3  |
| A.2 Relaciones volt-amper y energía almacenada               | 4  |
| A.3 Teoremas de los valores iniciales y finales              | 5  |
| A.3.1 Teorema de la energía inicial                          | 6  |
| A.3.2 Teorema del valor inicial y final                      | 6  |
| A.3.3 Ejemplos de cálculo de los valores iniciales y finales | 8  |
| Parte B: CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN                           | 15 |
| B.1 Circuitos de primer orden                                | 15 |
| B.1.1 Excitación por energía almacenada                      | 15 |
| B.1.2 Excitación por un impulso                              | 18 |
| B.1.3 Excitación por un escalón                              | 19 |
| B.1.4 Excitación por una señal senoidal                      | 22 |
| B.1.5 Resonancia y variación de parámetros                   | 23 |
| B.2 Ejemplo de cálculo                                       | 25 |
| Parte C: CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN                          | 29 |
| C.1 Circuitos de segundo orden                               | 29 |
| C.1.1 Excitación por energía almacenada                      | 29 |
| C.1.1.1 Sobrearmortiguado                                    | 32 |
| C.1.1.2 Críticamente amortiguado                             | 35 |
| C.1.1.3 Oscilatorio armónico amortiguado                     | 36 |
| C.1.2 Excitación por señal senoidal                          | 38 |
| C.2 Ejemplo de cálculo                                       | 40 |
| TOTAL: 44 páginas  |    |

## Parte A: INTRODUCCIÓN

Todo cambio de estado significa un cambio en la cantidad de la energía del sistema, sea este mecánico, térmico o eléctrico. Como el suministro o la disipación de energía no puede realizarse con amplitud infinita este cambio requiere un tiempo determinado.

Se pasa de un estado al otro en forma gradual, el tiempo de transición se denomina **período transitorio**. Una vez que el sistema se estabiliza en el nuevo estado se dice que se encuentra en su **período estacionario, de régimen o forzado**.

En todos los casos esa "inercia" en responder es debida a la presencia de elementos capaces de almacenar energía: una masa, un resorte, etc. Nuestro estudio se referirá a los circuitos eléctricos, pero podremos observar la semejanza que existe con otros sistemas. Esta es la base de la computación analógica para el estudio de sistemas dinámicos.

### V - A.1 - Las ecuaciones diferenciales de los circuitos eléctricos.

Dado que hemos considerado que los elementos de las redes serán lineales, bilaterales e ideales, surge que los parámetros  $L$ ,  $C$  y  $R$  son constantes, y por ello las ecuaciones diferenciales de los circuitos serán a **coeficientes constantes**, y en ellas son aplicables los teoremas de linealidad y superposición.

Ya que las ecuaciones diferenciales representan circuitos pueden aplicarse los conceptos de estímulo y respuesta.

El tipo más simple de estímulo para una red es el provisto por la energía acumulada inicialmente en los elementos del circuito (inductancias y/o capacitores). Esta energía hace que la corriente circule, pero a medida que esto ocurre la energía es disipada en las resistencias, si existen, por lo que, con el tiempo, decrecerá hasta cero.

La respuesta de una red excitada por almacenamiento inicial de energía y luego dejada en libertad es una característica de la misma y es denominada **comportamiento natural**, o **respuesta transitoria**, porque las corrientes y tensiones (que constituyen la respuesta) decrecen a cero luego de cierto tiempo. También se la conoce como **comportamiento libre** (no forzado) ya que es producido en el circuito en sí, sin ninguna fuente externa.

Desde el punto de vista matemático el comportamiento natural de un circuito es la solución de la ecuación diferencial con todas las fuentes igualadas a cero. A esta solución se la denomina **función complementaria** u **homogénea**.

La respuesta de un circuito a una excitación por una fuente impulsiva es muy similar al comportamiento natural. El impulso existe sólo entre  $t = 0^-$  y  $t = 0^+$ . Antes y después de este intervalo es cero, tal como sería para obtener la función complementaria de la ecuación diferencial. La única forma por la cual el impulso afecta al circuito es almacenar (o extraer) energía durante el período de existencia. Es decir que, luego de pasado el impulso, la energía almacenada produce el comportamiento natural.

La respuesta de un circuito a la excitación por la función escalón puede encontrarse por integración de la respuesta a un impulso. El teorema de la linealidad se extiende a la integración y a la diferenciación del estímulo y de la respuesta, ya que son operaciones matemáticas lineales.

Alternativamente, la respuesta puede obtenerse directamente de la ecuación diferencial apropiada. En este caso un valor final, o **solución estacionaria**, existe, es proporcional a la excitación y no decrece a cero con el tiempo. El valor estacionario es simplemente la solución para el circuito en  $t = +\infty$  y es idéntica al valor de corriente continua.

La solución completa de una ecuación diferencial de circuito es la suma del comportamiento natural y la solución estacionaria.

La solución estacionaria por sí misma no satisface las condiciones iniciales ( $t=0^+$ ) en el circuito. La solución transitoria provee una transición suave desde el estado energético inicial del circuito, representado por los valores iniciales de las corrientes y tensiones, al estado energético final representado por valores finales de las corrientes y tensiones.

Una excitación más general puede descomponerse en un tren de impulsos o escalones y tratar el caso por superposición. Es posible también resolver directamente la ecuación diferencial correspondiente a la excitación general.

En este caso la solución completa de la solución diferencial es la solución transitoria más una solución que es del mismo tipo que la excitación. Esta última se conoce también como solución estacionaria aunque no es una constante. Un término más adecuado es el de **solución forzada**.

Matemáticamente esta solución es llamada la **integral particular** de la ecuación diferencial.

## V - A.2 - Relaciones volt-amper y energía almacenada.

Para entrar en el tema reescribamos las expresiones de la ley de Ohm para los elementos simples:

$$\text{Para la resistencia:} \quad i_R(t) = e_R(t) \cdot G \quad e_R(t) = i_R(t) \cdot R$$

$$\text{Para la inductancia:} \quad i_L(t) = \Gamma \int_{-\infty}^t e_L(t) dt \quad e_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\text{Y para la capacitancia:} \quad i_C(t) = C \frac{de(t)}{dt} \quad e_C(t) = S \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

A la integral de la tensión la denominamos **enlaces de flujo** y a la integral de la corriente la denominamos **carga eléctrica**.

$$\lambda = \int_{-\infty}^t e_L dt \quad \text{y} \quad q = \int_{-\infty}^t i_C dt$$

Por lo que resulta:

$$e = S \times q \quad \text{y} \quad C \frac{de}{dt} = \frac{dq}{dt} = i$$

La energía puede determinarse por la expresión:

$$W = p \times T \quad \therefore \quad W = \int_{-\infty}^t e i dt$$

La energía almacenada será entonces, para la inductancia:

$$W_L = \int_{-\infty}^t e i dt = L \int_{-\infty}^t \frac{di}{dt} i dt$$

cambiando variables  $t$  por  $i$ , y asumiendo que en el origen de los tiempos el elemento está descargado, resulta:

$$t = -\infty \rightarrow i = 0; \quad t = t \rightarrow i = I$$

$$W_L = \int_0^I L i di \quad \therefore \quad W_L = \frac{L}{2} I^2$$

Y para la capacidad:

$$W_C = \int_{-\infty}^t e i dt = C \int_{-\infty}^t \frac{de}{dt} e dt$$

cambiando variables  $t$  por  $e$  resulta:

$$t = -\infty \rightarrow e = 0; \quad t = t \rightarrow e = E$$

$$W_C = \int_0^E C e de \quad \therefore \quad W_C = \frac{C}{2} E^2$$

Donde hemos verificado que, felizmente, la energía almacenada en ambos elementos depende solamente del valor final y no de la historia de la corriente o la tensión respectivamente.

### V - A.3 - Teoremas de los valores iniciales y finales.

Para poder explicitar la solución a un problema presentado por un circuito en particular no solamente debemos conocer la ley general de su comportamiento sino que también debemos ajustar los resultados de nuestra ecuación a los valores realmente presentes en el circuito. Es decir que nuestra ecuación solución debe cumplir con las condiciones de contorno establecidas en el circuito real.

Para ello debemos estar en condiciones de calcular esas condiciones. Debemos por establecer estrictamente el valor inicial de la respuesta, el valor inicial de la primera derivada de la respuesta, y el valor final o de régimen de la misma.

los teoremas siguientes nos dan las herramientas necesarias para ello.

### V - A.3.1- Teorema de la energía inicial.

A la corriente en la inductancia la podemos expresar como:

$$i = \Gamma \int_{-\infty}^t e \, dt = \Gamma \int_{-\infty}^0 e \, dt + \Gamma \int_0^t e \, dt$$

La primer integral es la cantidad de enlaces de flujo almacenados en la inductancia desde el pasado hasta nuestro tiempo  $t = 0$ . Esta cantidad neta de enlaces de flujo dividida por el coeficiente de autoinductancia es la corriente existente en ese momento, por lo tanto podemos expresar la corriente como:

$$i = I_0 + \Gamma \int_0^t e \, dt$$

por ello una inductancia inicialmente cargada puede reemplazarse por un generador ideal de corriente en paralelo con una inductancia descargada.

A la tensión en el capacitor la podemos expresar como:

$$e = S \int_{-\infty}^t i \, dt = S \int_{-\infty}^0 i \, dt + S \int_0^t i \, dt$$

La primer integral es la carga eléctrica almacenada en la capacidad desde el pasado hasta nuestro tiempo  $t = 0$ . Esta cantidad neta de carga eléctrica dividida por la capacidad es la tensión existente en ese momento, por lo tanto podemos expresar la corriente como:

$$e = E_0 + S \int_0^t i \, dt$$

por ello un capacitor inicialmente cargado puede reemplazarse por un generador ideal de tensión en serie con un capacitor descargado.

### V - A.3.2 - Teorema del valor inicial y final.

Por la ecuación de la corriente en la inductancia, si tomamos el instante  $t = 0^+$  nos quedará:

$$i = I_0 + \Gamma \int_{0^-}^{0^+} e \, dt$$

como el intervalo de integración es prácticamente nulo y si la tensión no es infinita, la integral también será nula. Por ello podemos decir que para  $t = 0^+$  la inductancia descargada es equivalente a un circuito abierto.

En un capacitor resultará que:

$$e = E_0 + S \int_{0^-}^{0^+} i \, dt$$

y haciendo las mismas consideraciones obtendremos una tensión nula que indicará un cortocircuito equivalente en  $t = 0^+$ .

Hay que hacer notar que si la excitación es infinita en ese intervalo (un impulso) la integral tendrá un valor definido, distinto de cero, y representará la carga cedida al (o retirada del) elemento. Esta carga podrá sumarse algebraicamente a la inicial y tratarlo como inicialmente cargado con el valor resultante.

Para  $t=+\infty$ , luego de desaparecido el transitorio, la inductancia queda con un diferencia de potencial nula y es indistinguible de un cortocircuito; mientras que el capacitor resulta con una corriente nula y por ende es equivalente a un circuito abierto.

Podemos decir que en ambos instantes particulares,  $t=0^+$  y  $t=+\infty$ , el circuito de comporta resistivamente.

Independientemente de que la corriente o la tensión sean nulas en  $t=0^+$  deberemos evaluar también la primera derivada de las mismas, para lo que recordaremos que:

$$\frac{di}{dt} = \Gamma e_L \quad \text{y} \quad \frac{de}{dt} = S i_C$$

Esta evaluación de la derivada de la función para el instante inicial la realizamos analizando el circuito equivalente para ese instante.

Si conocemos la tensión en la bobina tendremos que:

$$e_L(0^+) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} \quad \therefore \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = i'_L(0^+) = \frac{e_L(0^+)}{L}$$

Por otra parte, si conocemos la corriente en el capacitor tendremos que:

$$i_C(0^+) = C \left. \frac{de}{dt} \right|_{t=0^+} \quad \therefore \left. \frac{de}{dt} \right|_{t=0^+} = e'_C(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$$

tal como lo habríamos obtenido por aplicación del concepto de dualidad.

Debemos entender que hablamos de la derivada de la función para un instante dado y no de la derivada del valor de la función para ese instante ya que en este caso el resultado sería siempre nulo y no tiene significado físico.

Para el caso de una función de excitación impulsiva sabemos que su integral está definida por el coeficiente de la misma por lo que la carga cedida, o extraída, se evalúa fácilmente.

Para el capacitor:

$$i(t) = I_A u_0(t)$$

$$e_C(0^+) = S \int_{0^-}^{0^+} I_A u_0(t) dt = S I_A = \frac{I_A}{C}$$

valor que habrá que sumar algebraicamente a la tensión inicial del capacitor  $E_0$ .

Con algebraicamente queremos decir que la energía del impulso puede aumentar o disminuir la existente en el circuito, todo

dependerá de la polaridad relativa de la tensión existente y de la adquirida. Resulta, por otra parte, obvio que la corriente que estamos considerando es la corriente que atraviesa al condensador.

Para el inductor:

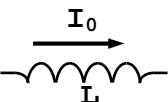
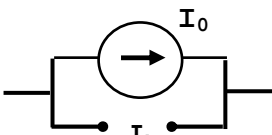
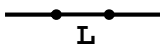
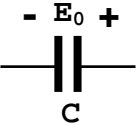
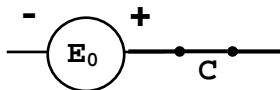
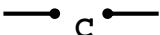
$$e(t) = E_A u_0(t)$$

$$i_L(0^+) = \Gamma \int_{0^-}^{0^+} E_A u_0(t) dt = \Gamma E_A = \frac{E_A}{L}$$

valor que habrá que sumar algebraicamente a la corriente inicial del inductor  $I_0$ .

Para este caso valen las consideraciones hechas para el anterior.

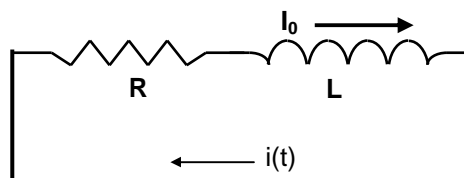
En resumen podemos establecer el siguiente cuadro:

| Elemento   | Tiempo inicial  | Tiempo final   |
|--|---|--|
|   |    |    |
|  |  |  |

### V - A.3.3 - Ejemplos de cálculo de los valores iniciales y finales.

Para completar el tema veremos algunos ejemplos de evaluación de estos valores que constituyen las condiciones de contorno fundamentales para determinar los coeficientes de las soluciones a los problemas de transitorios.

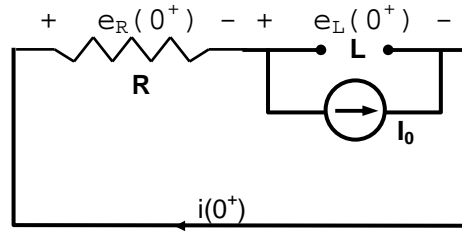
Iniciaremos este estudio considerando una malla constituida por una resistencia  $R$  y una inductancia  $L$  con una carga inicial indicada como una corriente  $I_0$ .



Conforme a lo demostrado hasta ahora podemos determinar los valores iniciales y finales de las variables del circuito. Siendo el circuito excitado por la energía almacenada en el inductor (en forma de campo magnético), no habiendo fuente adicional y existiendo un elemento disipador la energía se disipará. Esto significa que para el tiempo  $t = +\infty$  no habrán tensiones ni corrientes.



Para evaluar lo que acontece en el momento inicial utilizaremos el circuito equivalente para ese instante:



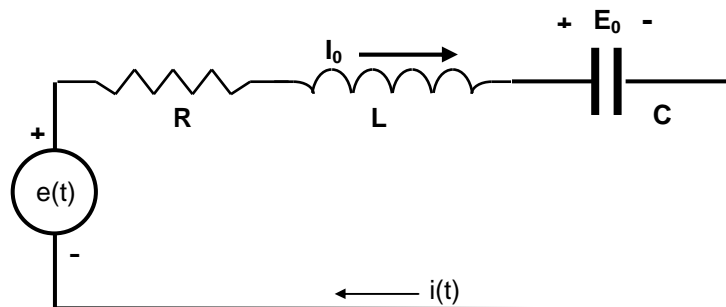
Aquí observamos fácilmente que la corriente inicial en el circuito es igual a la corriente inicial de la bobina. La tensión inicial en la resistencia está dada por la ley de Ohm es decir que:

$$e_R(0^+) = i(0^+) \cdot R = I_0 \cdot R$$

Por su parte la tensión en la bobina debe ser igual en su magnitud y opuesta en la polaridad a la de la resistencia para que se cumpla la segunda ley de Kirchhoff, es decir:

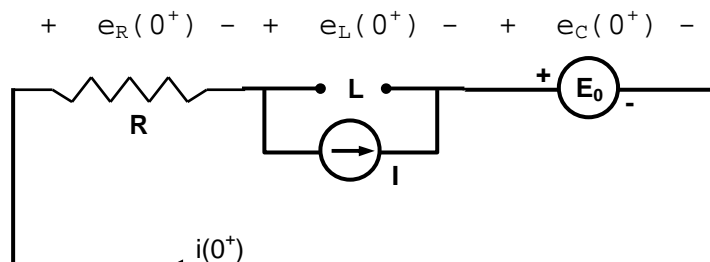
$$e_L(0^+) = -i(0^+) \cdot R = -I_0 \cdot R$$

Veamos un caso excitado por energía almacenada (en la bobina como una corriente  $I_0$  y en el capacitor como una tensión  $E_0$ ) y, además, por una fuente impulsiva en  $t=0$ :



Conforme a lo demostrado hasta ahora podemos determinar los valores iniciales y finales de las variables del circuito. El circuito está excitado por la energía almacenada, la fuente es impulsiva y hay una resistencia, por lo tanto para el tiempo  $t = +\infty$  no habrán tensiones ni corrientes.

Para evaluar lo que acontece en el momento inicial utilizaremos el circuito equivalente para ese instante:



Si ignoramos la fuente impulsiva (que para  $t=0^+$  ya desapareció) observamos fácilmente que la corriente inicial en el circuito es igual a la corriente inicial de la bobina, tal como en el caso anterior. Sin embargo la fuente impulsiva transfirió su energía al circuito y debe estar en algún lado. Olvidemos por el momento la carga inicial, que ya conocemos, y analicemos lo que ocurre con la fuente.

La fuente es de tensión consecuentemente su efecto se manifestará en la inductancia porque, al ser un circuito abierto, admite cualquier tensión. Para  $t=0^+$  podemos evaluar la corriente desarrollada sobre la bobina como la inversa de la inductancia por la integral de esa tensión, lo que nos dará:

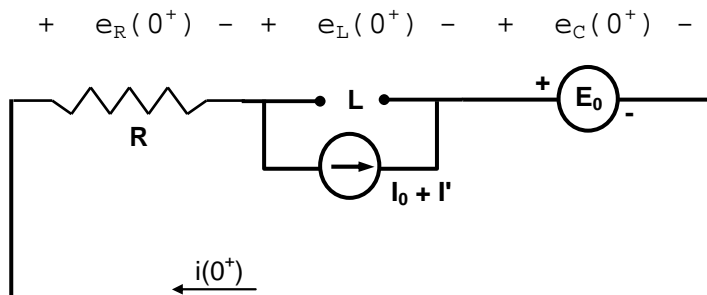
$$I'_L = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} e_L(t) dt$$

que es la corriente con la que se quedó cargada la bobina por efecto de la fuente. El sentido está dado por la polaridad de la tensión desarrollada sobre ella en el intervalo, es decir de izquierda a derecha. Esto implica que se deberá, en este caso, sumar a la que tenía inicialmente.

Otra forma de evaluarla es haciendo:

$$I_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0^+} e_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0^-} e_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} e_L(t) dt = I_0 + I'_L$$

El circuito equivalente para  $t=0^+$  es ahora:



Por lo tanto resulta que:

$$i(0^+) = I_0 + I'$$

$$e_R(0^+) = i(0^+) \cdot R = (I_0 + I') \cdot R$$

$$e_C(0^+) = E_0$$

La ecuación de la segunda ley de Kirchhoff es:

$$e_R + e_L + e_C = 0 \quad \text{luego:}$$

$$e_L(0^+) = -(I_0 + I') \cdot R - E_0$$

En circuitos de este tipo (de segundo orden) se requiere conocer la derivada primera de la variable en  $t=0^+$ . Para evaluarla aplicamos la ley de Ohm:

$$e_L(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt} \therefore \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{e_L(0^+)}{L} = - \frac{(I_0 + I') \cdot R + E_0}{L}$$

$$de_R(t) = R * di(t) \therefore de_R(0^+) = -R * \frac{(I_0 + I') * R + E_0}{L}$$

$$e_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \therefore de_c(0^+) = -\frac{(I_0 + I')}{C}$$

$$e_R(t) + e_L(t) + e_c(t) = 0 \therefore de_R(t) + de_L(t) + de_c(t) = 0$$

De allí podemos despejar  $de_L(0^+)$ :

$$\begin{aligned} de_L(t) &= R * \frac{(I_0 + I') * R + E_0}{L} + \frac{(I_0 + I')}{C} = \\ &= \left( \frac{R^2}{L} + \frac{1}{C} \right) * (I_0 + I') + \frac{R * E_0}{L} \end{aligned}$$

Todo lo desarrollado es válido para circuitos lineales por la linealidad de las operaciones de diferenciación y de integración, cuando el límite superior es la variable.

Los ejemplos muestran los pasos a seguir para la determinación de las condiciones de contorno. Si la fuente es escalón u otra cualesquiera que queda aplicada a partir de  $t=0^+$  se tendrá que evaluar el valor instantáneo de la misma y agregarlo como una fuente ideal adicional en el circuito equivalente correspondiente. En estos casos habrá que determinar las condiciones de contorno para  $t=+\infty$  que pueden no ser cero.

Para evaluarlas se aplican los métodos normales para régimen permanente ya que en ese instante el transitorio ha desaparecido.

Veamos un caso excitado por energía almacenada (en la bobina como una corriente  $I_0$  y en el capacitor como una tensión  $E_0$ ) y, además, por una fuente senoidal  $t=0$ :

$$e(t) = 25 \sin(5t + 30^\circ)$$

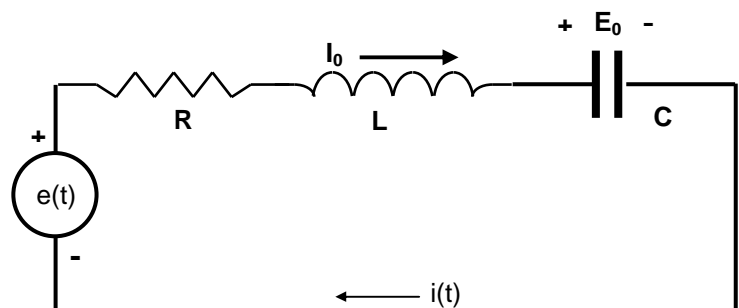
$$I_0 = 1 \text{ Amp.}$$

$$E_0 = 20 \text{ V.}$$

$$R = 40 \ \Omega$$

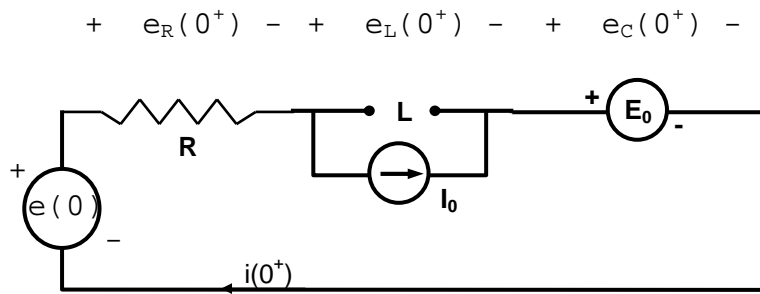
$$L = 10 \text{ Hy.}$$

$$C = 0,01 \text{ Fd.}$$



Conforme a lo demostrado hasta ahora podemos determinar los valores iniciales y finales de las variables del circuito. La fuente es senoidal y queda aplicada desde  $t=0$  en adelante, por lo tanto para el tiempo  $t=+\infty$  es esperable tener respuesta.

Para evaluar lo que acontece en el momento inicial utilizaremos el circuito equivalente para ese instante:



La fuente senoidal nos suministra en  $t=0$  una tensión de 12,5V. Por lo tanto resulta que:

$$i(0^+) = I_0 = 1\text{Amp}$$

$$e_R(0^+) = i(0^+) \cdot R = I_0 \cdot R = 40\text{V}.$$

$$e_C(0^+) = E_0 = 20\text{V}$$

La ecuación de la segunda ley de Kirchhoff es:

$$e_R + e_L + e_C = e(0) \quad \text{luego:}$$

$$e_L(0^+) = e(0) - I_0 \cdot R - E_0 = 12.5 - 40 - 20 = -47.5\text{V}$$

En circuitos de este tipo (de segundo orden) se requiere conocer la derivada primera de la variable en  $t=0^+$ . Para evaluarla aplicamos la ley de Ohm:

$$e_L(0^+) = L \frac{di(0^+)}{dt} \therefore \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{e_L(0^+)}{L} = -\frac{47.5}{10} = -4.75\text{A/s}$$

$$de_R(t) = R * di(t) \therefore de_R(0^+) = -40 * 4.75 = -190\text{V/s}$$

$$e_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \therefore de_C(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{1}{0.01} = 100\text{V/s}$$

$$e_R(t) + e_L(t) + e_C(t) = e(t) \therefore de_R(t) + de_L(t) + de_C(t) = de(t)$$

De allí podemos despejar  $de_L(0^+)$ :

$$de_L(t) = 108.25 + 190 - 100 = 198.25\text{V/s}$$

Para  $t=+\infty$  la energía inicial ya se ha disipado y queda un circuito R-L-C alimentado por una tensión senoidal. Las condiciones de contorno se determinan en forma convencional usando el cálculo simbólico.

$$Z = R + j[\omega L - (1/\omega C)] = 40 + j(50 - 20) = 40 + j30 = 50 \angle 36.87^\circ$$

$$I = E/Z = 25 \angle 30^\circ / 50 \angle 36.87^\circ = 0.5 \angle -6.87^\circ$$

$$i(t) = 0.5 \operatorname{sen}(5t - 6.87^\circ)$$

$$e_R(t) = i \cdot R = 20 \operatorname{sen}(5t - 6.87^\circ)$$

$$e_L(t) = L \, di/dt = 25 \operatorname{sen}(5t + 83.13^\circ)$$

$$e_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = 10 \operatorname{sen}(5t - 96.87^\circ)$$

## **NOTAS Y COMENTARIOS**

## Parte B: CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

Habiendo determinado las características de cada uno de los elementos, tanto en sus aspectos de energía acumulada, como circuitos equivalentes para las condiciones límites, y pudiendo ya determinar los valores de la variable y su primera derivada para  $t=0^+$  y el valor para  $t=+\infty$ , estamos en condiciones de analizar el comportamiento de los circuitos.

Antes que nada diremos que al tener dos tipos distintos de elementos capaces de almacenar energía: capacitores e inductancias, pueden darse dos posibles configuraciones de la red a estudiar.

1º) Denominaremos **circuitos de primer orden** a aquellos que, además de posibles resistencias y/o generadores, contienen elementos reactivos de **un solo tipo**; es decir un número cualquiera de capacitores pero ninguna inductancia, o un número cualquiera de inductores pero ninguna capacidad.

2º) Denominaremos, por lo contrario, **circuitos de segundo orden** a aquellos que contengan **ambos tipos** de elementos, es decir que contengan por lo menos un capacitor y una inductancia.

La razón del nombre radica en que las ecuaciones integro-diferenciales de equilibrio del circuito se pueden reducir a ecuaciones diferenciales de primer o de segundo orden respectivamente.

Para el análisis del tema veremos por separado cada tipo de circuito en su configuración más elemental. Estudiando la respuesta para excitación por energía almacenada, o comportamiento libre, para señal impulsiva, señal escalón y, como caso más general, la excitación por la señal senoidal.

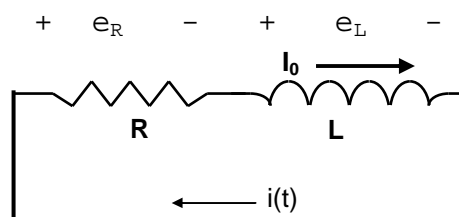
Veremos también la situación conocida como **resonancia** y la forma de resolverla.

### V - B.1 - Circuitos de primer orden.

Circuitos con un solo tipo de elementos almacenadores de energía, que se describen por ecuaciones diferenciales de primer orden. Exigen conocer la energía inicial o el valor inicial de la variable, y la respuesta en el estado final, o de régimen, si hay una excitación del tipo permanente sobre el circuito.

#### V - B.1.1 - Excitación por energía almacenada.

Iniciaremos este estudio considerando una malla constituida por una resistencia  $R$  y una inductancia  $L$  con una carga inicial indicada como una corriente  $I_0$ .



Siendo una malla cerrada aplicaremos la segunda ley de Kirchhoff:

$$e_R + e_L = 0$$

que, en función de la corriente resultará:

$$L \frac{di}{dt} + R i = 0$$

donde, separando variables, obtenemos:

$$\frac{di}{i} = - \frac{R}{L} dt$$

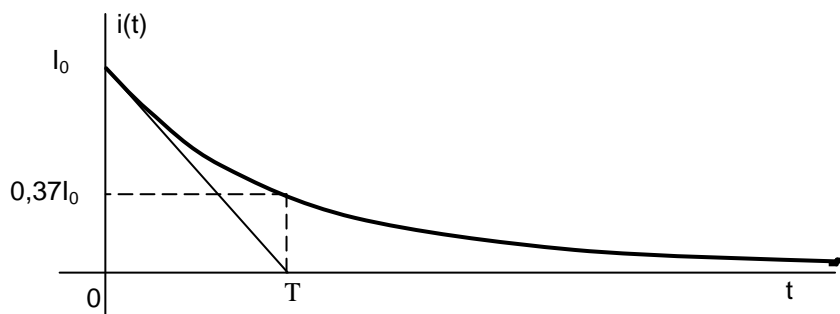
Si integramos entre  $t=0^+$  y  $t=t$  para el tiempo, y entre  $i=I_0$  e  $i=i$  para la corriente:

$$\int_{I_0}^i \frac{di}{i} = - \frac{R}{L} \int_{0^+}^t dt = \ln i - \ln I_0 = - \frac{R}{L} t$$

o explicitando en función de la corriente:

$$i = I_0 e^{-t/T}$$

Hemos obtenido una variación exponencial decreciente que parte del valor inicial  $I_0$  y tiende a 0 para el tiempo tendiendo a  $+\infty$ .



Para  $t = L/R = T$  (Tau), llamada la constante de tiempo, ya que la dimensión es el segundo, y nos da información de la velocidad de variación de la función en el tiempo, podemos evaluar el valor de la variable:

$$i(T) = I_0 e^{-1} = \frac{I_0}{e} \approx 37\% I_0$$

La derivada de la función está dada por:

$$\frac{di}{dt} = - \frac{1}{T} I_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

si la evaluamos para  $t = 0$  nos permite obtener la pendiente a la curva en el origen:



$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = - \frac{I_0}{T}$$

lo que nos dice que la recta tangente al origen corta el eje de tiempos en  $t = T$ .

Si ahora consideramos las tensiones en la resistencia y en la inductancia tendremos que:

$$e_R = Ri = RI_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

$$e_L = L \frac{di}{dt} = - \frac{LI_0}{T} e^{-\frac{t}{T}} = - RI_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

Podemos entonces decir que, partiendo de una función de la forma:

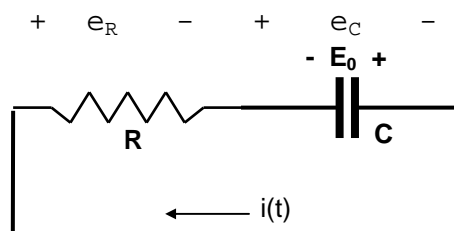
$$f'(t) + \frac{1}{T} f(t) = 0$$

obtendremos una solución de la forma:

$$f(t) = A e^{-\frac{t}{T}}$$

donde  $A$  es el valor inicial de la variable, que evaluamos utilizando el circuito equivalente en  $t = 0$ , y  $T$  es la constante de tiempo del circuito.

Consideraremos ahora circuito compuesto por una resistencia en serie con un capacitor cargado inicialmente, cuya carga está evaluada a través de su tensión inicial  $E_0$ .



La ecuación de equilibrio resulta ahora:

$$R i + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = 0$$

Aplicar una operación lineal a una expresión no altera las conclusiones que podemos extraer. Por ello podemos derivar la expresión anterior con respecto al tiempo y, teniendo en cuenta que el límite superior de la integral es la variable, resulta:

$$\frac{1}{C} i + R \frac{di}{dt} = 0 = \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i$$

por similitud al caso anterior será:

$$i = I_0 e^{-t/T}$$

Determinaremos ahora el valor de  $I_0$ ; la tensión inicial en el capacitor es  $-E_0$  y debe ser  $e_R = -e_C$  conforme a la segunda ley de Kirchhoff. Por ello:

$$I_0 = E_0/R \quad \text{por ser} \quad e_C = -e_R$$

$$\therefore i = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{y} \quad e_R = E_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$e_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = \frac{-1}{C} \frac{E_0}{R} RC (e^{-\frac{t}{RC}} - 1) + C_0$$

donde  $C_0$  es la constante de integración que evaluamos como:

$$e_C(0) = -E_0(1 - 1) + C_0 = C_0 = -E_0$$

por la condición inicial del circuito, por lo que:

$$e_C(t) = -E_0 e^{-t/R^*C}$$

que verifica lo antedicho:  $e_R + e_C = 0$ .

La constante de integración podría haberse evitado desdoblado la integral de 0 a  $0^+$  y de  $0^+$  a  $t$ .

Nuevamente hemos obtenido que, para una ecuación de equilibrio del tipo:

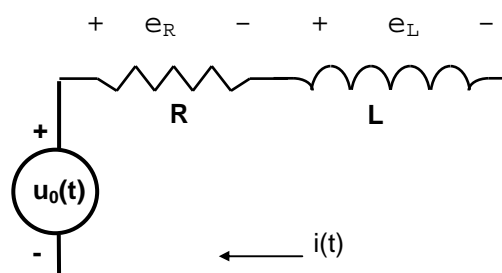
$$f'(t) + (1/T)f(t) = 0$$

resulta una solución de la forma:

$$f(t) = A e^{(-t/T)}$$

## V - B.1.2 - Excitación por un impulso.

Iniciaremos este estudio considerando una malla constituida por una resistencia  $R$  y una inductancia  $L$  con un generador impulsivo unitario  $u_0(t)$  como excitación.



La ecuación de equilibrio es ahora:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_0(t)$$

que para  $t > 0^+$  resultará:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

y, consecuentemente, la solución será:

$$i = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}$$

dado que para  $t=0$  la inductancia descargada es un circuito abierto, toda la tensión estará aplicada a ella. Por lo tanto podemos calcular la corriente inicial como:

$$i_L(0^+) = \int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{L} u_0(t) dt = \frac{1}{L} 1$$

lo que resultará en:

$$i = \frac{1}{L} e^{\frac{-R^*t}{L}}$$

Si el impulso no fuera unitario, por ejemplo  $Au_0(t)$ , la integración daría igual a  $A/L$  y la respuesta será:

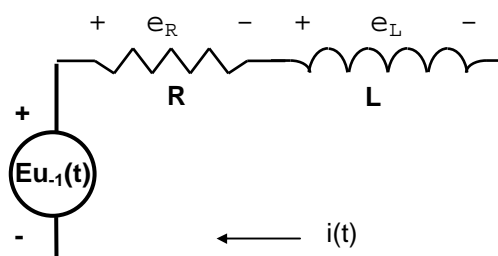
$$(A/L) e^{(-R^*t/L)}$$

NOTA: Todas las soluciones son válidas para  $t>0$  ya que no se puede aseverar nada sobre lo que acontece antes del instante en que comienza el análisis del circuito.

Para indicar esa condición de validez se suele multiplicar la solución encontrada por la función escalón unitaria  $u_{-1}(t)$ . Sin embargo debe entenderse que aquí el uso de esa función singular es sólo simbólica ya que no significa que la solución sea nula para todo tiempo anterior a 0, sino que no está determinada.-

### V - B.1.3 - Excitación por un escalón.

Veamos el circuito:



Tenemos una malla constituida por una resistencia  $R$  y una inductancia  $L$  con un generador escalón  $E u_{-1}(t)$  de amplitud  $E$  como excitación.

Podemos en este caso suponer que habrá una solución distinta de cero para el estado de régimen, es decir para  $t = +\infty$ . Analicemos el circuito:

Para  $t = 0$  tendremos:

$$L \frac{di}{dt} + R i = E$$

separando variables:

$$L \frac{di}{dt} = E - R i$$

$$L di = \left( \frac{E}{R} - i \right) R dt \quad \therefore \quad \frac{di}{\frac{E}{R} - i} = \frac{R}{L} dt$$

integrando:

$$\int_{I_0}^i \frac{di}{\frac{E}{R} - i} = \int_0^t \frac{R}{L} dt$$

obtenemos:

$$\ln[(E/R) - i] / [(E/R) - I_0] = -(R/L)t$$

como  $I_0 = 0$  resulta que:

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

que muestra una solución compuesta de un estado transitorio,  $i_{tt}(t)$ , y un estado estacionario,  $i_{ss}(t)$ :

$$i(t) = i_{tt}(t) + i_{ss}(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

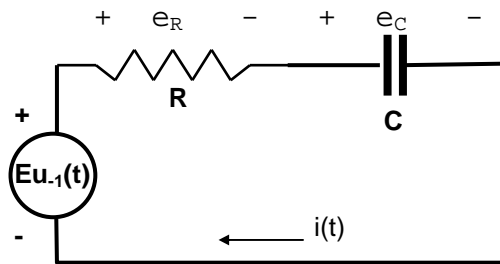
A partir de la corriente podemos calcular las tensiones:

$$e_R(t) = i(t) \cdot R = -E e^{-Rt/L} + E$$

$$e_L(t) = L[di(t)/dt] = L \frac{R}{L} \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = E e^{-Rt/L}$$

En este caso la respuesta en régimen es nula por cuanto la inductancia representa un corto circuito, tal como hemos demostrado antes.

Consideraremos ahora un circuito compuesto por una resistencia en serie con un capacitor descargado inicialmente, con una excitación de tensión escalón.



Ahora la ecuación de equilibrio es:

$$R i + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = E u_1(t)$$

derivando una vez para eliminar la integral:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad \therefore \quad i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

En este caso la solución de régimen es nula ya que el capacitor resulta un circuito abierto para  $t = +\infty$ . Sin embargo si analizamos la respuesta de la tensión sobre ese capacitor obtenemos una solución no nula.

$$e_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = \frac{1}{C} \frac{E}{R} (-RC) e^{-\frac{t}{RC}} + C_0$$

$C_0$  es una constante de integración que determinaremos con la condición de contorno para  $t=\infty$ . El capacitor se comporta en esa condición como un circuito abierto, por ende toda la tensión del generador estará en sus bornes. Esto quiere decir que  $C_0$  debe ser igual a  $E$ , con lo que la respuesta es:

$$e_c = -E e^{-t/RC} + E$$

y en la resistencia:

$$e_R = E e^{-t/RC}$$

A las soluciones que hemos hallado para los casos en que la ecuación de equilibrio está dada por:

$$f'(t) + (1/T)f(t) = Cte$$

las podemos generalizar como:

$$f(t) = A e^{-t/T} + B$$

donde  $A$  y  $B$  las obtenemos ajustando la respuesta en  $t=\infty$  y luego en  $t=0^+$ .

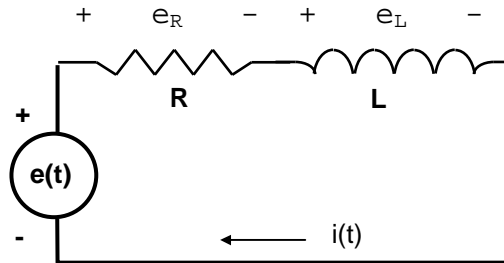
## V - B.1.4 - Excitación por una señal senoidal.

Iniciaremos este estudio considerando una malla constituida por una resistencia  $R$  y una inductancia  $L$  con un generador senoidal  $e(t)$  de amplitud  $E$  y pulsación  $\omega$  como excitación.

Para este caso tendremos dos componentes para la solución, una expresión igual a los casos anteriores para la transitoria y una del mismo tipo que la excitación para la de régimen.

$$e(t) = E \sin(\omega t)$$

Para  $t > 0$ :



$$L \frac{di}{dt} + R i = E_{MAX} \sin \omega t$$

$$i_{tt}(t) = A e^{\frac{-R \cdot t}{L}} \quad \text{y} \quad i_{ss}(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

$$\frac{di_{ss}}{dt} = -B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t$$

para  $t = \infty$  se satisface la ecuación:

$$L \frac{di_{ss}}{dt} + R i_{ss} = E_{MAX} \sin \omega t$$

$$L (-B_1 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t) +$$

$$+ R (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) = E_{MAX} \sin \omega t$$

$$\sin \omega t (-L B_1 \omega + R B_2 - E_{MAX}) + \cos \omega t (L B_2 \omega + R B_1) = 0$$

La única forma que la última igualdad se verifique es que las cantidades encerradas entre paréntesis sean nulas, por ello:

$$L B_1 \omega + R B_2 - E_{MAX} = 0 \quad \text{y} \quad L B_2 \omega + R B_1 = 0$$

de donde resulta:

$$B_1 = \frac{-\omega L E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2}$$

y:

$$B_2 = \frac{R E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2}$$

la solución completa será:

$$i = A e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{-\omega L E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2} \cos \omega t + \frac{R E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2} \sin \omega t$$

de esta expresión debemos encontrar el valor del coeficiente A. Para lo cual igualaremos la expresión para  $t = 0$  con las condiciones del circuito en ese instante inicial:

$$i(0) = A - \frac{\omega L E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2} = 0 \quad \therefore \quad A = \frac{\omega L E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2}$$

Finalmente:

$$i = \frac{\omega L E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2} e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2} (-\omega L \cos \omega t + R \sin \omega t)$$

Esta última expresión podemos trabajarla trigonométricamente y obtener una forma más explícita para la componente de régimen, de manera que corresponda a una función igual a la de excitación. Para ello ponemos:

$$\frac{-\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} = \sin \Theta \quad \frac{R}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} = \cos \Theta \quad \text{con: } \Theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

con lo que resultará:

$$i = \frac{\omega L E_{MAX}}{(\omega L)^2 + R^2} e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E_{MAX}}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin (\omega t - \Theta)$$

En esta expresión la raíz cuadrada representa el módulo de la resistencia aparente que presenta el circuito a la excitación senoidal, que llamamos "Impedancia" y se representa con Z. El ángulo  $\theta$  es el ángulo de esa impedancia que nos muestra el desplazamiento de fase que sufre la señal debido a la presencia de elementos reactivos en el circuito.-

#### V - B.1.5 - Resonancia y variación de parámetros.

Cuando la función de excitación es del mismo tipo que la función respuesta crea un efecto de resonancia que obliga a adoptar otro tipo de método de resolución.

Supongamos una excitación exponencial igual a la respuesta natural del circuito de primer orden. En este caso las dos componentes de la respuesta transitoria completa son iguales y crea una indeterminación que levantaremos mediante el método de **variación de parámetros**.

Supongamos:

$$\frac{di}{dt} + i = e^{-t} \quad \text{con: } i(0) = 0$$

resultaría:

$$i_{tt} = A e^{-t} \quad \text{e} \quad i_{ss} = B e^{-t}$$

esto nos daría una solución indeterminada. Para levantarla hacemos:

$$i_{ss} = g(t) e^{-t}$$

donde  $g(t)$  es una función a determinar.

A partir de esto obtenemos que:

$$di_{ss} = g'(t) e^{-t} - g(t) e^{-t}$$

y en régimen tendremos:

$$g'(t) e^{-t} - g(t) e^{-t} + g(t) e^{-t} = e^{-t}$$

esto requiere que:

$$g'(t) = 1 \quad \therefore \quad g(t) = t + C$$

La solución completa queda como:

$$i(t) = t e^{-t} + C e^{-t} + A e^{-t}$$

para  $t = 0$  es:  $i(0) = C + A = 0$  con lo que finalmente resulta que:

$$i(t) = t e^{-t}$$

NOTA: Todas las soluciones son válidas para  $t > 0$  ya que no se puede aseverar nada sobre lo que acontece antes del instante en que comienza el análisis del circuito.

Para indicar esa condición de validez se suele multiplicar la solución encontrada por la función escalón unitaria  $u_{-1}(t)$ . Sin embargo debe entenderse que aquí el uso de esa función singular es sólo simbólica ya que no significa que la solución sea nula para todo tiempo anterior a 0, sino que no está determinada.-



## V - B.2 - Ejemplo de cálculo.

Para tener un ejemplo resolveremos un circuito R-C paralelo con energía almacenada y una fuente de corriente senoidal que es aplicada en el instante inicial:

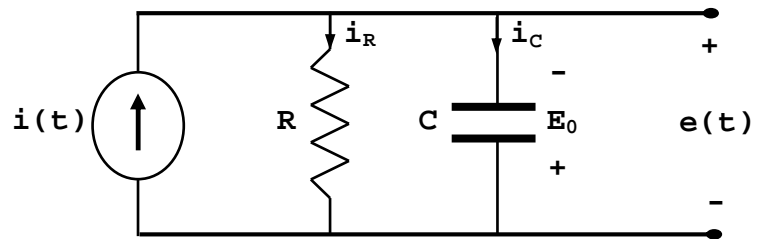
Sean:

$$R = 10 \text{ ohms}$$

$$C = 0.02 \text{ faradios}$$

$$E_0 = 10 \text{ voltios}$$

$$i(t) = [10\text{sen}(5t+30^\circ)]u_1(t)$$

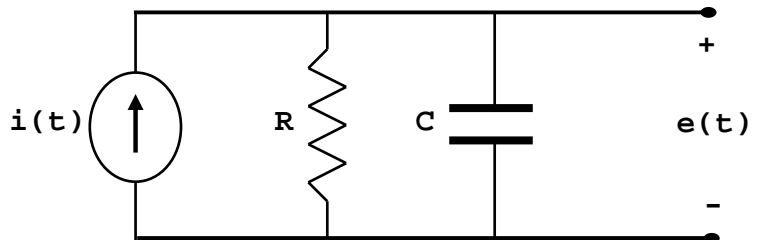


Con la función escalón estamos diciendo que la fuente se enciende instantáneamente en  $t=0^+$ . Y, como esta fuente queda aplicada a partir de ese momento para siempre, es de esperar tener una respuesta en  $t=\infty$ ; por lo tanto debemos evaluar las condiciones de contorno para ese instante en que ya desaparecieron el transitorio y la carga inicial. El circuito nos quedará:

Donde en régimen:

$$e(t) = Z \cdot i(t)$$

Aplicando el cálculo simbólico:



$$E = Z \cdot I = \frac{R/j\omega C}{R + 1/j\omega C} * (I \cos 30^\circ + jI \sin 30^\circ) = (5 - j5)(8.67 + j5) =$$

$$= 68.35 - j18.35 = 70.77 \angle -15.03^\circ \text{ voltios}$$

(hemos tenido en cuenta que  $\omega = 5$ )

Volviendo al dominio del tiempo resulta que, en régimen:

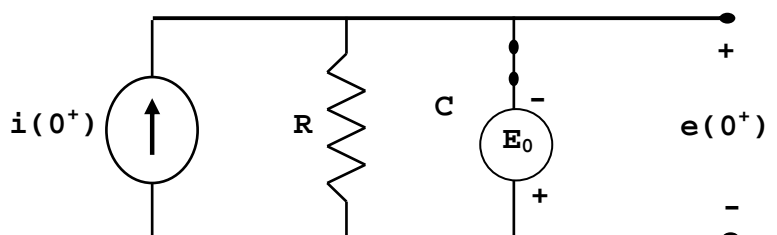
$$e(t) = 70.77 \text{ sen}(5t - 15^\circ) \text{ para } t \rightarrow \infty$$

Para  $t=0^+$  tendremos el circuito equivalente:

Donde es:

$$e(0^+) = -E_0 = -10 \text{ V}$$

$$i(0^+) = I(\text{sen } 30^\circ) = 5 \text{ A}$$



La ecuación de equilibrio del circuito está dada por la primera ley de Kirchhoff:

$$i_R(t) + i_C(t) = i(t)$$

que puesta en función de  $e(t)$  resulta:

$$\frac{e(t)}{R} + C \frac{de(t)}{dt} = I \sin(5t + 30^\circ)$$

dividiendo por  $C$  y ordenando queda:

$$\frac{de(t)}{dt} + \frac{e(t)}{CR} = \frac{I}{C} \sin(5t + 30^\circ)$$

que es de la forma  $x' + (1/T)x = f(t)$  luego podemos definir que la constante de tiempo del circuito es  $T = R \cdot C = 0.2$  segundos y que la solución será de la forma:

$$e(t) = A e^{\frac{-t}{T}} + B$$

donde  $B$  es la solución en régimen ya determinada y  $A$  debe ser evaluada ajustando la solución para las condiciones de contorno iniciales, es decir que debe cumplirse:

$$e(0^+) = A e^{\frac{-(0^+)}{T}} + 70.77 \sin[5(0^+) - 15^\circ]$$

reemplazando los valores tendremos que:

$$-10 = A - 18.32$$

o sea que  $A = 8.32$  voltios y la solución completa es:

$$e(t) = 8.32 e^{\frac{-t}{0.2}} + 70.77 \sin[5t - 15^\circ]$$

con ella podemos obtener las corrientes en la resistencia y en la capacidad:

$$i_R(t) = e(t)/R = 0.83 e^{\frac{-t}{0.2}} + 7.08 \sin[5t - 15^\circ]$$

$$i_C(t) = C \frac{de(t)}{dt} = -0.83 e^{\frac{-t}{0.2}} + 7.08 \cos[5t - 15^\circ]$$

este último valor podría obtenerse despejando de la ecuación de equilibrio del circuito. También pueden encontrarse las corrientes en la resistencia y en la capacidad sabiendo que la forma de la

solución es la misma para todas las variables y determinando las condiciones de contorno para ellas.

Como ejemplo calculemos la corriente en el capacitor, que será de la forma:

$$i_c(t) = A_c e^{\frac{-t}{T}} + B_c$$

Determinemos las condiciones de contorno:

$$B_c(t) = C \cdot [de(t)/dt] = 7.08 \cos(5t - 15^\circ) \text{ Amperes}$$

$$i_c(0^+) = i(0^+) - i_R(0^+) = i(0^+) - e(0^+)/R =$$

$$i_c(0^+) = 5 + 10/10 = 6 \text{ Amperes}$$

Ahora podemos determinar el valor de  $A_c$  debiéndose cumplir que:

$$i_c(0^+) = A_c e^{\frac{-(0^+)}{T}} + 7.08 \cos[5(0^+) - 15^\circ]$$

reemplazamos valores y obtenemos que:

$$A_c = 6 - 6.83 = -0.83 \text{ Amperes}$$

La solución completa es:

$$i_c(t) = -0.83 e^{\frac{-t}{0.2}} + 7.08 \cos[5t - 15^\circ]$$

igual a la obtenida por el procedimiento anterior.

## **NOTAS Y COMENTARIOS**

**Parte C: CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN.****V - C.1 - Circuitos de segundo orden.**

Ya vimos los circuitos de primer orden en sus configuraciones más elementales. Estudiando la respuesta para excitación por energía almacenada, o comportamiento libre, para señal impulsiva, señal escalón y, como caso más general, la excitación por la señal senoidal; también vimos el caso de resonancia.

Veremos ahora el análisis correspondiente para los circuitos de segundo orden: Circuitos con los dos tipos de elementos almacenadores de energía, que se describen por ecuaciones diferenciales de segundo orden.

La solución no es tan simple como en el caso anterior pero su forma es la misma. Una componente transitoria, llamada complementaria u homogénea, y otra permanente, estacionaria o integral particular.

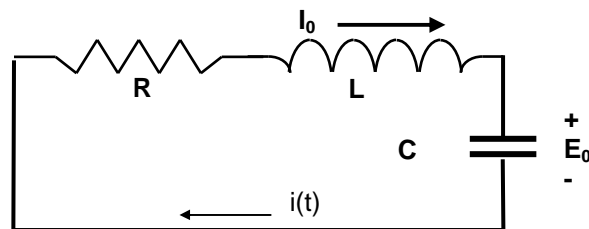
En estos casos requerimos dos constantes arbitrarias para evaluar las dos formas de almacenamiento de energía. Y para poder determinarlas exige conocer la energía inicial o el valor inicial de la variable, y la primera derivada de la variable en  $t = 0^+$ .

Si hay una excitación del tipo permanente sobre el circuito es necesario, lógicamente, la respuesta en el estado final, o de régimen.

**V - C.1.1 - Excitación por energía almacenada.**

Tal como vimos en los circuitos de primer orden esta situación nos permite evaluar la respuesta natural del circuito.

Analizaremos primero el caso del circuito en serie y considerando una malla constituida por una resistencia  $R$ , una inductancia  $L$  con una carga inicial indicada como una corriente  $I_0$ , y un capacitor también cargado inicialmente con su carga representada por una tensión inicial  $E_0$ .



Siendo una malla cerrada aplicamos la segunda ley de Kirchhoff  $e_R + e_L + e_C = 0$ , que en función de la corriente  $i(t)$  quedará:

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = 0 \quad [1]$$

Debe hacerse notar aquí que, si bien no está indicado en los circuitos como en los casos de primer orden, las polaridades de las

tensiones están definidas conforme al sentido de la corriente  $i(t)$  del circuito. Si no fuera así los signos en las ecuaciones serían distintos.

Diferenciando una vez obtenemos:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad [2]$$

Los valores iniciales son:

$$i(0) = I_0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^+} i \, dt = E_0$$

Si  $t = 0$  en [1]:

$$L \frac{di(0)}{dt} + R i(0) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^+} i \, dt = 0$$

$$L \frac{di(0)}{dt} + R I_0 + E_0 = 0$$

por lo tanto:

$$\frac{di(0)}{dt} = - \frac{1}{L} (R I_0 + E_0) = K$$

Esta primera derivada de la corriente puede tomar cualquier valor dependiendo del circuito y de la condición de carga inicial.

Como necesitamos dos constantes arbitrarias intentamos una función consistente en la suma de dos soluciones de primer orden (nada impide que se aplique otro método):

$$i_{tt} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad [3]$$

con: 
$$\frac{di_{tt}}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}$$

y: 
$$\frac{d^2 i_{tt}}{dt^2} = A_1 p_1^2 e^{p_1 t} + A_2 p_2^2 e^{p_2 t}$$

Si la ecuación [3] satisface a la ecuación [2] entonces será:

$$L(A_1 p_1^2 e^{p_1 t} + A_2 p_2^2 e^{p_2 t}) + R(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}) + \frac{1}{C}(A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) = 0$$

$$A_1 e^{p_1 t} \left( L p_1^2 + R p_1 + \frac{1}{C} \right) + A_2 e^{p_2 t} \left( L p_2^2 + R p_2 + \frac{1}{C} \right) = 0$$

Ya que los productos de las constantes por las exponenciales no pueden ser nulas, porque se perdería la posibilidad de resolver el

problema, deben serlo necesariamente las expresiones encerradas entre paréntesis. Las  $p_1$  y  $p_2$  deben ser raíces de la ecuación:

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0$$

con lo que:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

o:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

si ponemos que:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

El parámetro  $\alpha$  se lo conoce como **coeficiente de amortiguamiento**, tiene la dimensión de 1/segundo, la inversa de una constante de tiempo que nos indica la velocidad de decrecimiento del transitorio en el tiempo.  $\omega_0$ , por su parte, tiene las mismas dimensiones y se denomina **frecuencia angular natural, pulsación natural, o de resonancia**, del circuito. Ambos dependen exclusivamente de los elementos y estructura de la red, y no de la excitación.

En función de la expresión de  $p_{1,2}$  se pueden deducir tres casos que dependen de la relación entre  $\alpha$  y  $\omega_0$ :

**1<sup>er</sup> caso)** Si  $\alpha > \omega_0$ , el coeficiente de amortiguamiento es mayor que la pulsación natural, se dice que el circuito está **sobreamortiguado**, o tiene **amortiguamiento hipercrítico**. Los valores de  $p$  son reales, negativos y distintos, y la solución es la suma de dos exponenciales reales.

**2<sup>do</sup> caso)** Si  $\alpha = \omega_0$ , el coeficiente de amortiguamiento es igual a la pulsación natural, el circuito está **críticamente amortiguado**, o tiene **amortiguamiento crítico**. Los valores de  $p$  son reales, negativos e iguales, y la solución es la más complicada de resolver.

**3<sup>er</sup> caso)** Si  $\alpha < \omega_0$ , el coeficiente de amortiguamiento es menor que la pulsación natural, se dice que el circuito está **subamortiguado**, o tiene **amortiguamiento subcrítico**, o es **oscilatorio armónico amortiguado**. Los valores de  $p$  son complejos conjugados, y la solución es la suma de dos exponenciales complejas que llevan a una función de respuesta oscilatoria amortiguada.

**4<sup>to</sup> caso)** De interés teórico no realizable prácticamente, que se obtendría si el circuito no tuviese pérdidas. En tal caso  $\alpha = 0$ , y se llegaría al caso **oscilatorio libre o sin amortiguamiento**.

## V - C.1.1.1 - Sobrearmortiguado.

La solución la obtenemos de las condiciones iniciales:

$$i(0) = I_0 \quad \text{y} \quad di(0)/dt = K$$

donde  $K$ , como vimos, puede tener cualquier valor. Para seguir nuestro estudio en forma más simple asumiremos que  $K = 0$ , pero debe insistirse que normalmente no es así y el cálculo real deberá desarrollarse en cada caso teniendo en cuenta ese valor.

Bajo este supuesto tendremos:

$$i(0) = I_0 = A_1 + A_2$$

y:

$$\frac{di(0)}{dt} = K = 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2$$

de donde:

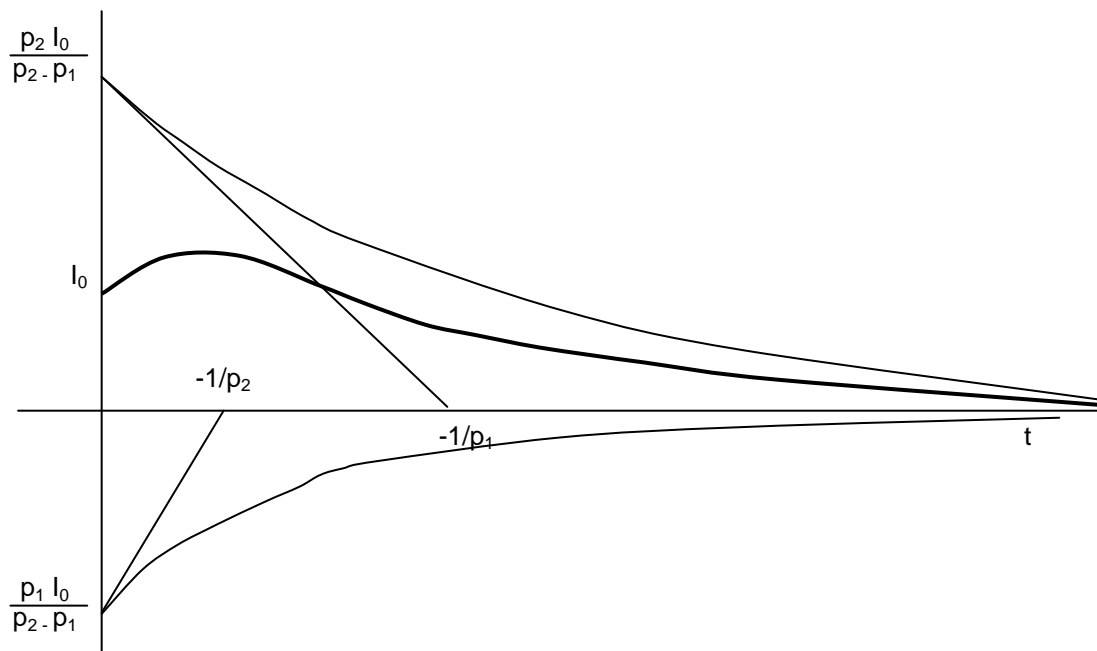
$$A_1 = \frac{p_2 I_0}{p_2 - p_1} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{-p_1 I_0}{p_2 - p_1}$$

$$i(t) = I_0 \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - I_0 \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}$$

con:

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{y} \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Conforme a lo que dijimos resultan  $p_1$  y  $p_2$  negativas y, siendo  $|p_2| > |p_1|$ ,  $(p_2 - p_1)$  también negativa.

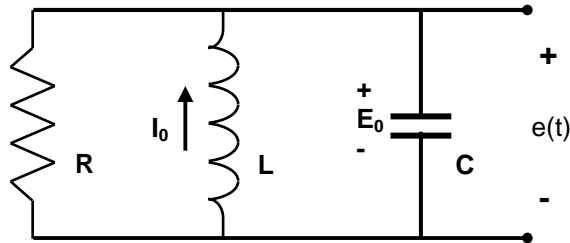


Hemos obtenido un pulso cuyo tiempo de elevación está controlado por una constante de tiempo,  $p_2$  (la mayor), y el de decrecimiento por la otra,  $p_1$ ; ambas definidas por los elementos de



la red y su estructura. Siendo el valor inicial dependiente del estado de carga del circuito y por ende positivo, nulo o negativo.

Veamos ahora el planteo para el circuito en paralelo considerando una red constituida por una resistencia  $R$ , una inductancia  $L$  con una carga inicial indicada como una corriente  $I_0$ , y un capacitor también cargado inicialmente con su carga representada por una tensión inicial  $E_0$ .



Siendo un montaje paralelo aplicamos la primera ley de Kirchhoff  $i_R + i_L + i_C = 0$ , que en función de la tensión  $e(t)$  quedará:

$$C \frac{de}{dt} + G e + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e dt = 0$$

En esta ecuación se ha supuesto que el sentido de las corrientes en los elementos está definido por la polaridad de la tensión  $e(t)$  sobre ellos, es decir es de arriba hacia abajo. De no haber sido así los signos serían distintos.

Derivando una vez queda:

$$L \frac{d^2 e}{dt^2} + G \frac{de}{dt} + \frac{1}{L} e = 0$$

Con los valores iniciales:

$$e(0^+) = E_0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0^+} e dt = I_0$$

y también:

$$\frac{de(0)}{dt} = - \frac{1}{C} (G E_0 + I_0) = K$$

Si a partir de este punto hacemos el mismo desarrollo podremos encontrar que la forma de la solución es igual pero se intercambian los elementos por sus duales.

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2RC} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Los valores de  $\alpha$  y de  $\omega_0$  los podemos obtener directamente si dividimos la derivada de la ecuación de equilibrio por el coeficiente del término de mayor orden y denominamos  $2\alpha$  al

resultante para el término que contiene la primera derivada, y  $\omega_0^2$  al de la variable. Es decir, para el circuito serie:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

que define:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Y para el circuito paralelo resulta:

$$C \frac{d^2 e}{dt^2} + G \frac{de}{dt} + \frac{1}{L} e = 0$$

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{de}{dt} + \frac{1}{LC} e = 0$$

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + 2\alpha \frac{de}{dt} + \omega_0^2 e = 0$$

dando:

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2RC} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

El factor de amortiguamiento, que resulta ser la inversa de una constante de tiempo, está dado por la inversa del doble de la constante de tiempo de la inductancia para el circuito serie, y la inversa del doble de la constante de tiempo del capacitor para el circuito paralelo.

Por su parte la pulsación natural es la misma para ambas configuraciones de la red.

Todas las soluciones son válidas para  $t > 0$  ya que no se puede aseverar nada sobre lo que acontece antes del instante en que comienza el análisis del circuito.

Para indicar esa condición de validez se suele multiplicar la solución encontrada por la función escalón unitaria  $u_{-1}(t)$ . Sin embargo debe entenderse que aquí el uso de esa función singular es sólo simbólica ya que no significa que la solución sea nula para todo tiempo anterior a 0, sino que no está determinada.-

En general la respuesta para este caso será:

$$i(t) = (A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) u_{-1}(t)$$

## V - C.1.1.2 - Críticamente amortiguado.

Pareciera ser el más fácil ya que, al ser  $\alpha = \omega_0$ , las raíces  $p_1$  y  $p_2$  son iguales y negativas. Sin embargo esta circunstancia trae dos inconvenientes: uno es hacer indeterminados los coeficientes de las exponenciales, al dividirse por cero, y otro el de reducirse a una sola exponencial no nos permite tener los dos términos que se requieren para la solución.

Volvamos entonces al caso anterior. La solución puede ponerse:

$$\frac{i(t)}{I_0} = \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}$$

Si hiciéramos aquí  $p_1 = p_2$  los coeficientes resultarían infinitos haciendo indeterminada la diferencia. Para levantar esa indeterminación podemos aplicar la regla de L'Hopital o aplicar el concepto de variación de parámetros como a continuación.

Hacemos:

$$p_1 = -\alpha \quad y \quad p_2 = p_1 + \delta$$

obteniendo:

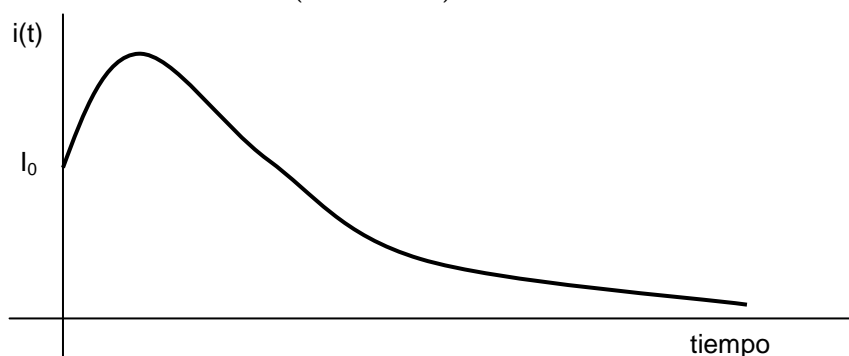
$$\begin{aligned} \frac{i(t)}{I_0} &= \frac{p_1 + \delta}{p_1 + \delta - p_1} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 + \delta - p_1} e^{(p_1 + \delta)t} = \\ &= \frac{e^{p_1 t}}{\delta} [p_1 + \delta - p_1 e^{\delta t}] = \frac{e^{p_1 t}}{\delta} \left[ p_1 + \delta - p_1 \left( 1 + \frac{\delta t}{1!} + \frac{\delta^2 t^2}{2!} + \dots \right) \right] = \\ &= e^{p_1 t} \left( \frac{\delta - \delta p_1 t}{\delta} + \dots \right) \end{aligned}$$

haciendo tender a  $\delta$  a cero:

$$\frac{i(t)}{I_0} = e^{-\alpha t} (1 + \alpha t)$$

En el caso general subsisten las constantes arbitrarias y queda la solución de la forma:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t) u_{-1}(t)$$



## V - C.1.1.3 - Oscilatorio armónico amortiguado.

Este caso corresponde a la condición  $\alpha < \omega_0$ , que significa tener las dos raíces complejas conjugadas al ser negativo el radicando:

$$p_1 = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha + j\omega_d$$

$$p_2 = -\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha - j\omega_d$$

Donde  $\omega_d$  es la llamada pulsación forzada, o pulsación de oscilación del circuito. Esta es la de resonancia afectada por la amortiguación (las pérdidas) de la red.

Partimos de la misma solución general que usamos en el análisis anterior:

$$\begin{aligned} \frac{i(t)}{I_0} &= \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} = \\ &= \frac{-\alpha - j\omega_d}{-2j\omega_d} e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} - \frac{-\alpha + j\omega_d}{-j\omega_d} e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t} = \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{2j\omega_d} [(\alpha + j\omega_d) e^{j\omega_d t} - (\alpha - j\omega_d) e^{-j\omega_d t}] = \\ &= e^{-\alpha t} \left[ \frac{\alpha}{\omega_d} \left( \frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j} \right) + \left( \frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2} \right) \right] = \\ &= e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) = \frac{i(t)}{I_0} \end{aligned}$$

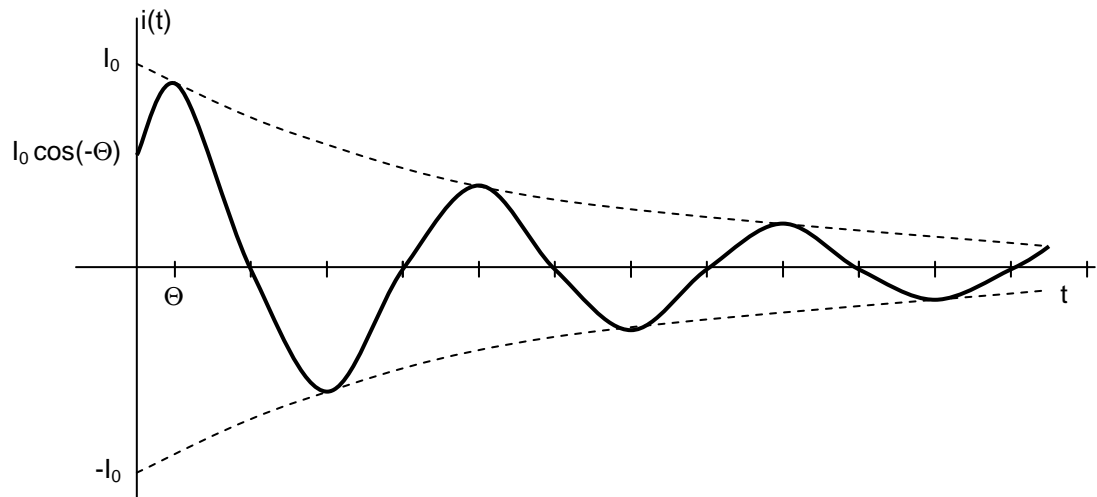
En esta expresión podemos sacar  $\omega_0/\omega_d$  como factor común, y hacer  $\alpha = \omega_0 \sin \varphi$  y  $\omega_d = \omega_0 \cos \varphi$ , ya que ambas son menores que la pulsación de resonancia  $\omega_0$ .

$$\frac{i(t)}{I_0} = \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} (\sin \theta \sin \omega_d t + \cos \theta \cos \omega_d t)$$

con lo que:

$$i(t) = I_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta)$$

Es decir una señal oscilante a la pulsación forzada  $\omega_d$  y atenuada con la constante de tiempo  $1/\alpha$ .



En general tendremos:

$$i(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta) u_{-1}(t) \quad [1]$$

$$i(t) = (A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t) e^{-\alpha t} u_{-1}(t) \quad [2]$$

En la expresión [1] los coeficientes de ajuste que deben determinarse de las condiciones de contorno son  $A$  y  $\theta$ , mientras que en [2] son  $A_1$  y  $A_2$ . La última expresión es más fácil de operar.

Si consideramos la posibilidad teórica de que las pérdidas sean nulas, lo que implica que no habrá atenuación y que  $\alpha = 0$ , tendremos el llamado 4° caso:

$$p_1 = j\omega_0 \quad \text{y} \quad p_2 = -j\omega_0$$

$$\frac{i(t)}{I_0} = \frac{-j\omega_0}{-2j\omega_0} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$i(t) = I_0 \cos \omega_0 t * u_{-1}(t)$$

Estas cuatro soluciones son válidas siempre como solución transitoria, respuesta natural, de los circuitos de segundo orden.

La excitación externa y/o permanente deberá evaluarse de forma análoga a lo realizado en la primera parte de este capítulo. Esto es:

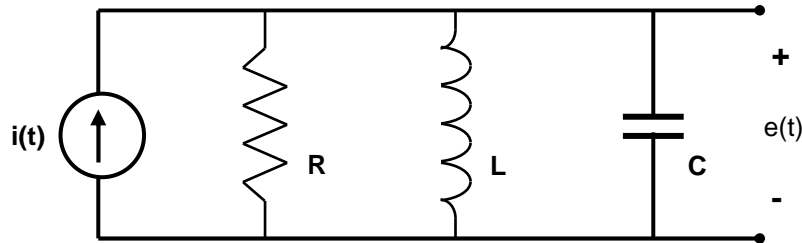
1) Encontrar la energía transferida al circuito si tenemos una excitación del tipo impulsiva.

2) Encontrar la respuesta forzada o permanente del circuito ante la excitación de este tipo, evaluando la situación en régimen,  $t = \infty$ .

3) Ajustar los coeficientes de la respuesta transitoria correspondiente al tipo de circuito que se trate para que la suma de las dos respuestas satisfagan las condiciones de contorno en  $t = 0$ .

## V - C.1.2 - Excitación por señal senoidal.

Utilizaremos este caso como ejemplo de un circuito excitado por una señal permanente a partir de  $t = 0^+$ . Partiremos de una red en paralelo. Sea el circuito:



con  $i(t) = I_{MAX} \sin \omega t * u_{-1}(t)$ .

1) Análisis de la respuesta natural:

Ecuación de equilibrio:

$$i_R + i_L + i_C = i(t)$$

$$C \frac{de}{dt} + \frac{e}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e dt = I_{MAX} \sin \omega t$$

derivando:

$$C \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{de}{dt} + \frac{1}{L} e = \omega I_{MAX} \cos \omega t \quad [1]$$

dividiendo por C:

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{de}{dt} + \frac{1}{LC} e = \frac{\omega I_{MAX}}{C} \cos \omega t \quad [2]$$

de donde:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Comparando  $\alpha$  con  $\omega_0$  obtendremos el tipo de circuito que estamos estudiando. Supongamos que  $\alpha$  es mayor que  $\omega_0$ , es decir que el circuito está sobreamortiguado. En tal caso la respuesta natural será de la forma:

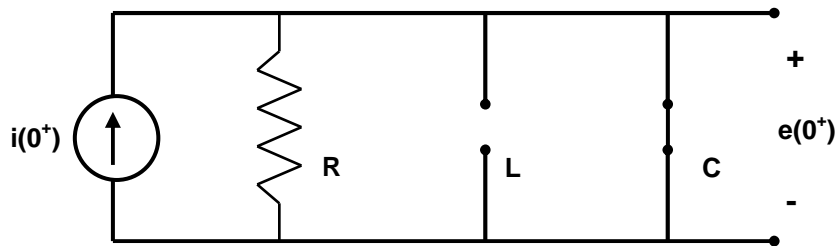
$$e_{tt}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

con:

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{y} \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

2) Análisis de las condiciones iniciales:

Utilizamos el circuito equivalente para  $t = 0^+$ :



del que resulta:  $e(0^+) = 0$

y como es:  $i(0^+) = 0$

resulta:  $i_C(0^+) = C e'(0^+) = 0$

y en consecuencia:  $e'(0^+) = 0$

3) Respuesta en régimen:

Debido al tipo de excitación podemos poner que:

$$e_{ss}(t) = B \sin(\omega t + \theta) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t$$

que implica:  $\frac{d e_{ss}(t)}{dt} = \omega B_1 \cos \omega t - \omega B_2 \sin \omega t$

$$y: \frac{d^2 e_{ss}(t)}{dt^2} = -\omega^2 B_1 \sin \omega t - \omega^2 B_2 \cos \omega t$$

Reemplazando en la ecuación [1] obtenemos:

$$\begin{aligned} & C(-\omega^2 B_1 \sin \omega t - \omega^2 B_2 \cos \omega t) + \frac{1}{R}(\omega B_1 \cos \omega t - \omega B_2 \sin \omega t) + \\ & + \frac{1}{L}(B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t) = \omega I_{MAX} \cos \omega t \\ & \sin \omega t \left( -\omega^2 C B_1 - \omega \frac{1}{R} B_2 + \frac{1}{L} B_1 \right) + \\ & + \cos \omega t \left( -\omega^2 C B_2 + \omega \frac{1}{R} B_1 + \frac{1}{L} B_2 \omega I_{MAX} \right) = 0 \end{aligned}$$

La resolución de esta ecuación nos permite encontrar los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$ :

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) B_1 - \frac{1}{R} B_2 = 0 \\ \frac{1}{R} B_1 + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) B_2 = I \end{cases}$$

de donde:

$$B_1 = \frac{\frac{1}{R} I}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 + \frac{1}{R^2}} \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) I}{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 + \frac{1}{R^2}}$$

Con esto hemos obtenido la respuesta en régimen y ahora podemos determinar los coeficientes de la respuesta natural ajustando la suma de las dos respuestas a las condiciones de contorno para el instante  $t = 0^+$ .

$$e(0^+) = A_1 + A_2 + B_2 = 0$$

$$e'(0^+) = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \omega B_1 = 0$$

de donde:

$$A_1 + A_2 = -B_2 \quad ; \quad p_1 A_1 + p_2 A_2 = -\omega B_1$$

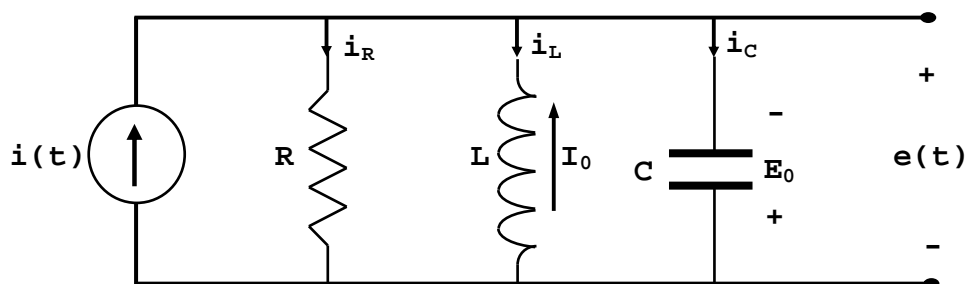
y luego:

$$A_1 = \frac{-p_2 B_2 + \omega B_1}{p_2 - p_1} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{-\omega B_1 + p_1 B_2}{p_2 - p_1}$$

Con esto queda resuelto el problema.

## V - C.2 - Ejemplo de cálculo.

Para tener un ejemplo resolveremos un circuito R-L-C paralelo con energía almacenada y una fuente de corriente senoidal que es aplicada en el instante inicial:



Sean:

$$R = 10 \text{ ohmios} \quad L = 10 \text{ henrios} \quad C = 0.01 \text{ faradio}$$

$$i(t) = [10\text{sen}(5t+30^\circ)]u_{-1}(t) \text{ amperes} \quad I_0 = 10 \text{ amperes}$$

y  $E_0 = 10 \text{ voltios}$ .

Con la función escalón estamos diciendo que la fuente se enciende instantáneamente en  $t=0^+$ . Y, como esta fuente queda

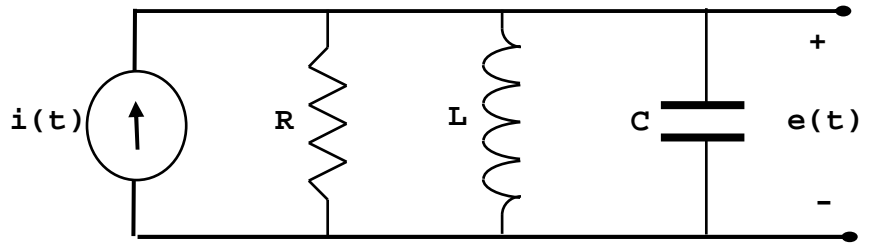


aplicada a partir de ese momento para siempre, es de esperar tener una respuesta en  $t=\infty$ ; por lo tanto debemos evaluar las condiciones de contorno para ese instante en que ya desaparecieron el transitorio y la carga inicial. El circuito nos quedará:

Donde en régimen:

$$e(t) = i(t)/Y$$

Aplicando el cálculo simbólico:



$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0,1 + j(0,05 - 0,02) = 0,1 + j0,03 =$$

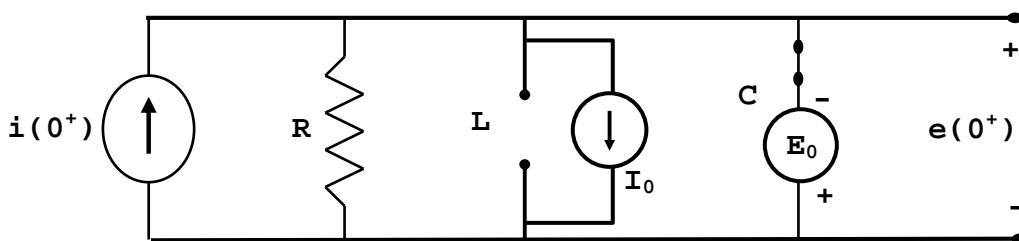
$$= 0,104 \angle 16,7^\circ \text{ mhos}$$

$$E = 10 \angle 30^\circ / 0,104 \angle 16,7^\circ = 96,15 \angle 13,3^\circ \text{ voltios}$$

Pasando al dominio del tiempo será, en régimen:

$$e(t) = 96,15 \sin(5t + 13,3^\circ) \text{ para } t \rightarrow \infty$$

Para  $t=0^+$  tendremos el circuito equivalente:



Donde es:

$$e(0^+) = -E_0 = -10 \text{ V} \quad i_R(0^+) = e(0^+)/R = -1 \text{ A}$$

$$i(0^+) = I(\sin 30^\circ) = 5 \text{ A} \quad i_L(0^+) = I_0 = 10 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = i(0^+) - i_R(0^+) - i_L(0^+) = -4 \text{ A}$$

Nos hará falta, además, la primera derivada de la variable en el origen, para ello recordemos que la corriente en el capacitor es:

$$i_C(t) = C de(t) \therefore de(t) = \frac{i_C(t)}{C} \text{ y por lo tanto } de(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = -400 \text{ V/s}$$

La ecuación de equilibrio del circuito está dada por la primera ley de Kirchhoff:

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i(t)$$

que puesta en función de  $e(t)$  resulta:

$$\frac{e(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e(t) dt + C de(t) = I \sin(5t + 30^\circ)$$

Derivando una vez respecto al tiempo, dividiendo por  $C$  y ordenando queda:

$$\frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} de(t) + \frac{e(t)}{LC} = 5 \frac{I}{C} \cos(5t + 30^\circ)$$

que es de la forma  $x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = f(t)$ , luego podemos definir que el coeficiente de amortiguamiento del circuito es:

$$\alpha = 1/2R \cdot C = 5 \text{ segundos}^{-1},$$

la pulsación natural es:

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} = 3,16 \text{ pps}$$

y que la solución será de la forma:

$$e(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + B$$

dado que el circuito está sobreamortiguado por ser  $\alpha > \omega_0$ . En la expresión  $B$  es la solución en régimen, ya determinada, y los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  deben ser evaluados ajustando la solución para las condiciones de contorno iniciales.

Previamente calcularemos los valores de  $p_1$  y  $p_2$ :

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -5 + \sqrt{5^2 - 3,16^2} = -1,13 \text{ s}^{-1}$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -5 - \sqrt{5^2 - 3,16^2} = -8,87 \text{ s}^{-1}$$

Deben cumplirse:

$$\begin{cases} e(0^+) = A_1 e^{-1,13(0^+)} + A_2 e^{-8,87(0^+)} + 96,15 \sin(5(0^+) + 13,3^\circ) \\ de(0^+) = -1,13 A_1 e^{-1,13(0^+)} - 8,87 A_2 e^{-8,87(0^+)} + 480,75 \cos(5(0^+) + 13,3^\circ) \end{cases}$$

reemplazando los valores tendremos que:

$$\begin{cases} -10 = A_1 + A_2 + 22,12 \\ -400 = -1,13 A_1 - 8,87 A_2 + 467,85 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -32.12 = A_1 + A_2 \\ -867.85 = -1.13 A_1 - 8.87 A_2 \end{cases}$$

Resolviendo resulta:

$$A_1 = -148.9 \text{ V} \quad \text{y} \quad A_2 = +116.8 \text{ V.}$$

La solución completa es:

$$e(t) = -148.9 e^{-1.13t} + 116.8 e^{-8.87t} + 96.15 \sin(5t + 13.3^\circ)$$

con ella podemos obtener las corrientes en la resistencia, la inductancia y en la capacidad:

$$i_R(t) = e(t)/R = \frac{[-148.9 e^{-1.13t} + 116.8 e^{-8.87t} + 96.15 \sin(5t + 13.3^\circ)]}{R} =$$

$$i_R(t) = -14.89 e^{-1.13t} + 11.68 e^{-8.87t} + 9.62 \sin(5t + 13.3^\circ)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e(t) dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0^+} e(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{L} \int_{0^+}^t (-148.9 e^{-1.13t} + 116.8 e^{-8.87t} + 96.15 \sin(5t + 13.3^\circ)) dt =$$

$$= I_0 + 13.2 e^{-1.13t} - 1.3 e^{-8.87t} - 1.9 \cos(5t + 13.3^\circ) + C_0$$

Aquí  $C_0$  es la constante de integración que se determina para coincidir con la condición de contorno en  $t=0^+$ , en este caso resulta ser igual a  $-I_0$ .

La corriente en la bobina es:

$$i_L(t) = 13.2 e^{-1.13t} - 1.3 e^{-8.87t} - 1.9 \cos(5t + 13.3^\circ)$$

$$i_C(t) = C de(t) = C[168.3 e^{-1.13t} - 1036.0 e^{-8.87t} + 480.8 \cos(5t + 13.3^\circ)] =$$

$$i_C(t) = 1.68 e^{-1.13t} - 10.36 e^{-8.87t} + 4.8 \cos(5t + 13.3^\circ)$$

este último valor podría obtenerse despejando de la ecuación de equilibrio del circuito. También pueden encontrarse las corrientes en la resistencia, inductancia y en la capacidad sabiendo que la forma de la solución es la misma para todas las variables y determinando las condiciones de contorno para ellas.

Como ejemplo calculemos la corriente en la bobina, que será de la forma:

$$i_L(t) = A_{L1} e^{-1.13t} + A_{L2} e^{-8.87t} + B_L$$

Determinemos las condiciones de contorno:

$$B_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e(t) dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t [96.15 \sin(5t + 13.3^\circ)] dt =$$

$$= \frac{1}{L} [-19.23 \cos(5t + 13.3^\circ)] = -1.92 \cos(5t + 13.3^\circ)$$

$$i_L(0^+) = I_0 = 10 \text{ A}$$

$$e_L(t) = L di_L(t) \therefore di_L(0^+) = \frac{e_L(0^+)}{L} = -1 \text{ A / seg}$$

Ahora podemos determinar los valores de  $A_{L1}$  y  $A_{L2}$  debiéndose cumplir que:

$$\begin{cases} i_L(0^+) = A_{L1}e^{-1.13(0^+)} + A_{L2}e^{-8.87(0^+)} - 1.92 \cos(5(0^+) + 13.3^\circ) \\ di_L(0^+) = -1.13A_{L1}e^{-1.13(0^+)} - 8.87A_{L2}e^{-8.87(0^+)} + 9.6 \sin(5(0^+) + 13.3^\circ) \end{cases}$$

reemplazando los valores tendremos que:

$$\begin{cases} 10 = A_{L1} + A_{L2} - 1.87 \\ -1 = -1.13 A_{L1} - 8.87 A_{L2} + 2.21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11.87 = A_{L1} + A_{L2} \\ -3.21 = -1.13 A_{L1} - 8.87 A_{L2} \end{cases}$$

Resolviendo resulta:

$$A_{L1} = 13.2 \text{ A} \quad \text{y} \quad A_{L2} = -1.3 \text{ A.}$$

La solución completa es:

$$i_L(t) = 13.2 e^{-1.13t} - 1.3 e^{-8.87t} - 1.9 \sin(5t + 13.3^\circ)$$

igual a la obtenida por el procedimiento anterior.