EJERCICIO SOBRE TRAZADO DE DIAGRAMA POLAR Y APLICACIÓN DE CRITERIO DE NYQUIST DE SISTEMAS DE LAZO ABIERTO

PROBLEMA 3: Trazar el diagrama polar de la siguiente función de lazo abierto y determinar la estabilidad del sistema, aplicando criterio de Nyquist.

$$\boxed{G_{(P)}H_{(P)} = \frac{10\cdot(P+8)}{P\cdot(P+2)\cdot(P-7)} = \frac{10\cdot P+80}{P^4-5P^3-14P^2}}$$

PASO 1: Determinar el punto de inicio de la curva que representa el diagrama polar. Para ello evaluamos $G_{(P)}\,H_{(P)}$ para P →0 ó lo que es lo mismo $G_{(j\omega)}\,H_{(j\omega)}$ para ω que tiende a cero.

$$G_{(P)}H_{(P)}\Big|_{P\to 0} = \frac{80}{-14\,P^2}\Big|_{P\to 0} = \frac{-\,Kcte}{P^2}\Big|_{P\to 0} = |\infty|\cdot\ \underline{|-360°}$$

NOTA : debido al signo menos que aparece en la constante, se suman -180°, a los -180° originales de los dos polos en el origen . Recordar explicación mediante método gráfico.

Realizando el mismo procedimiento cambiando P→jω, tenemos :

$$G_{(j\omega)}H_{(j\omega)}\Big|_{\omega\to 0} = \frac{80}{-14(j\omega)^2}\Big|_{\omega\to 0} = \frac{-Kcte}{(j\omega)^2}\Big|_{\omega\to 0} = \frac{-Kcte}{-(\omega)^2}\Big|_{\omega\to 0} = +\infty$$

En el denominador, j^2 = -1, se elimina con el signo menos del numerador y Kcte/ω^2 para w→0 da por resultado +∞ .
Se llega a la misma conclusión anterior, por lo que el inicio de la curva estará en uno de los dos puntos mostrados en la Figura 1.

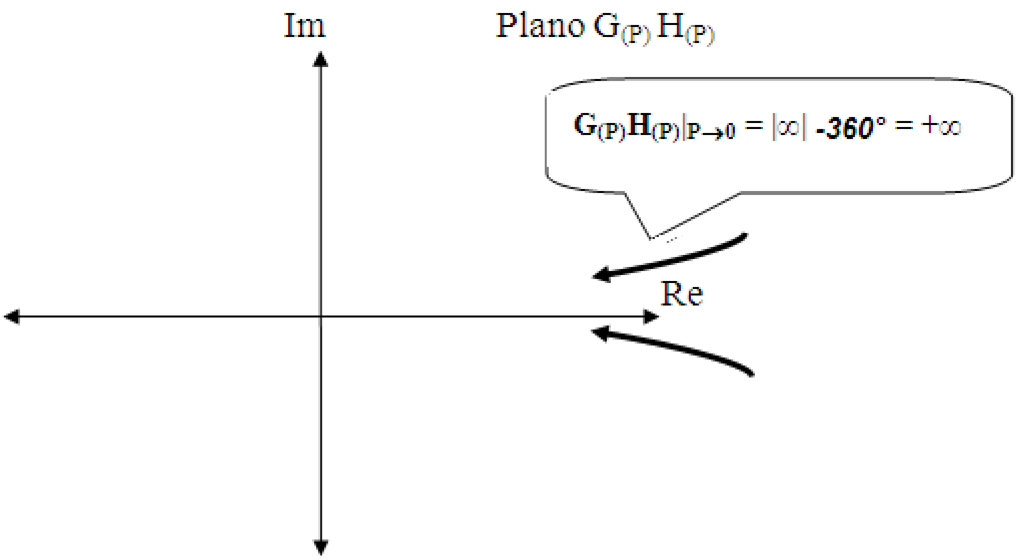

FIGURA 1. Representación en el plano $G_{(P)}\,H_{(P)}$ de los puntos de inicio de la curva para P→0.

PASO 2: Determinar el punto final de la curva que representa el diagrama polar. Para ello evaluamos $G_{(P)}\,H_{(P)}$ para P→∞ ó lo que es lo mismo $G_{(j\omega)}\,H_{(j\omega)}$ para ω que tiende a infinito.

$$G_{(p)}H_{P}\Big|_{p\to\infty} = \frac{10}{p^3}\Big|_{P\to\infty} = |0|\cdot\ \underline{|-270°}$$

Si realizamos el mismo análisis mediante $G_{(j\omega)}$ $H_{(j\omega)}$, tendremos:

$$G_{(j\omega)}H_{(j\omega)}\Big|_{\omega\to\infty} = \frac{10}{(j\omega)^3}\Big|_{\omega\to\infty} = \frac{10}{(j)^3\cdot\omega^3}\Big|_{\omega\to\infty} = j0$$

$$\therefore\ G_{(j\omega)}H_{(j\omega)}\Big|_{\omega\to\infty} = j0 = |0|\cdot\ \underline{|-270^\circ}$$

Se llega a la misma conclusión anterior, por lo que el final de la curva estará en uno de los dos puntos mostrados en la Figura 2.

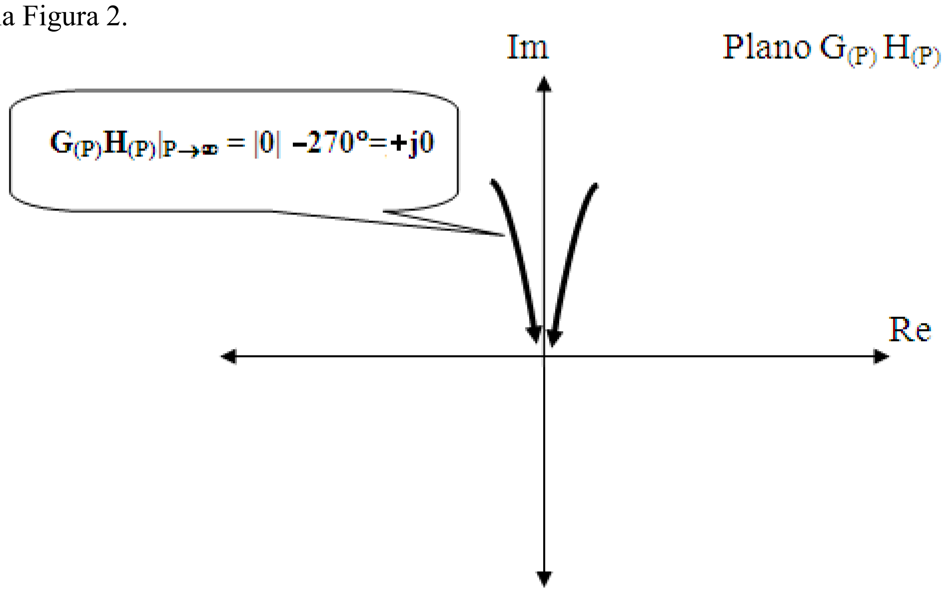

FIGURA 2. Representación en el plano $G_{(P)}$ $H_{(P)}$ de los puntos de final de la curva para P→∞.

PASO 3: Realizar el cambio de P por jω en la función de transferencia:

$$\mathbf{P \Rightarrow j\omega}$$

$$\mathbf{G_{(P)}\ H_{(P)} \Rightarrow G_{(j\omega)}\ \ H_{(j\omega)}}$$

$$\boxed{G_{(j\omega)}H_{(j\omega)} = \frac{80 + j\cdot 10\cdot\omega}{14\cdot\omega^2 + \omega^4 + j\cdot 5\cdot\omega^3)}}$$

PASO 4: Operar la función de transferencia $G_{(j\omega)}$ $H_{(j\omega)}$ de forma tal de separar en parte real y parte imaginaria:

$$\mathbf{G_{(j\omega)}\ H_{(j\omega)} = Re|_{\omega} + j\ Im|_{\omega}}$$

$$F_{(j\omega)} = \underbrace{\frac{1120\omega^2 + 130\cdot\omega^4}{(14\cdot\omega^2+\omega^4)^2 + 25\cdot\omega^6}}_{\mathbf{Re|_{\omega}}} + j\underbrace{\frac{10\cdot\omega^5 - 260\cdot\omega^3}{(14\cdot\omega^2+\omega^4)^2 + 25\cdot\omega^6}}_{\mathbf{Im|_{\omega}}}$$

PASO 5: Obtener el valor de ω que anula la parte real de $G_{(j\omega)}H_{)j\omega)}$, para determinar en el paso siguiente si existen cortes sobre el eje imaginario.

$$\mathbf{Re|_{\omega} = 0}$$

$$\mathrm{Re}_{(\omega)} = \frac{1120\omega^2 + 130\cdot\omega^4}{(14\cdot\omega^2 + \omega^4)^2 + 25\cdot\omega^6} = 0$$

Un valor de la frecuencia ω que hace cero la parte real es ω = 0, (fué evaluado en el PASO 1) , otro valor de la frecuencia ω que hace cero la parte real es ω = ∞, pues el grado del numerador es menor que el grado del denominador (fué evaluado en el PASO 2).
Si eliminamos el denominador de la última expresión tendremos:

$$1120\omega^2 + 130\cdot\omega^4 = 0 \therefore \omega = \pm\sqrt{\frac{-1120}{130}} = \pm j2{,}935197$$

PASO 6: Reemplazar en la parte imaginaria el valor de ω que hace cero la parte real, mediante este procedimiento, se determinarán los cortes al eje imaginario.

NOTA : Dado que no existe un valor **"REAL"** que anule la parte real de la función, la misma no corta al eje imaginario.

PASO 7: Obtener el valor de ω que anula la parte imaginaria de $G_{(j\omega)}H_{)j\omega)}$, para determinar en el paso siguiente si existen cortes sobre el eje real.

$$\mathbf{Im|_{\omega} =0}$$

$$\mathrm{Im}_{(\omega)} = j\frac{10\cdot\omega^5 - 260\cdot\omega^3}{(14\cdot\omega^2 + \omega^4)^2 + 25\cdot\omega^6} = 0$$

Un valor de la frecuencia ω que hace cero la parte imaginaria es ω = 0, (fué evaluado en el PASO 1) , otro valor de la frecuencia ω que hace cero la parte imaginaria es ω = ∞, pues el grado del numerador es menor que el grado del denominador (fué evaluado en el PASO 2).

Finalmente:

$$10\cdot\omega^5 - 260\cdot\omega^3 = 0 \therefore \omega = \pm\sqrt{\frac{260}{10}} = \pm 5{,}0990195$$

PASO 8: Reemplazar en la parte real, el valor de ω que hace cero la parte imaginaria, mediante este procedimiento, se determinarán los cortes al eje real.
El valor de ω = 0 y de ω = ∞ no es necesario evaluarlos pues esa información, se obtuvo en los PASOS 1 y 2 respectivamente.
Evaluamos solamente ***el valor positivo*** de la frecuencia ω obtenida en el paso anterior, (ω = + 5,0990195) en la parte real de la función de transferencia, y obtendremos de este modo el valor de corte sobre el eje real.
El valor de corte al eje real debido a la frecuencia negativa (ω = - 5,0990195) , aparecerá en forma automática cuando, en el PASO 9 se trace el espejo de la curva para las frecuencias negativas.

$$\mathrm{Re}\Big|_{\omega=+5{,}0990195} = \left.\frac{1120\omega^2 + 130\cdot\omega^4}{(14\cdot\omega^2 + \omega^4)^2 + 25\cdot\omega^6}\right|_{\omega=+5{,}0990195} = +0{,}076923$$

Se determinó de este modo que el diagrama cortará al eje real en el valor **0,076923** cuando la frecuencia ω tome el valor +**5,0990195**.

PASO 9: Con los datos obtenidos en los PASOS 1 (Inicio del diagrama), 2 (Final del diagrama), 6 (corte al eje Imaginario) y 8 (corte al eje Real), trazar la curva que representa la función de transferencia para las variaciones de las frecuencias positivas (ω^+), para ello comenzamos trazando desde ω = 0 hasta llegar a ω = ∞. Ver Figura 3.

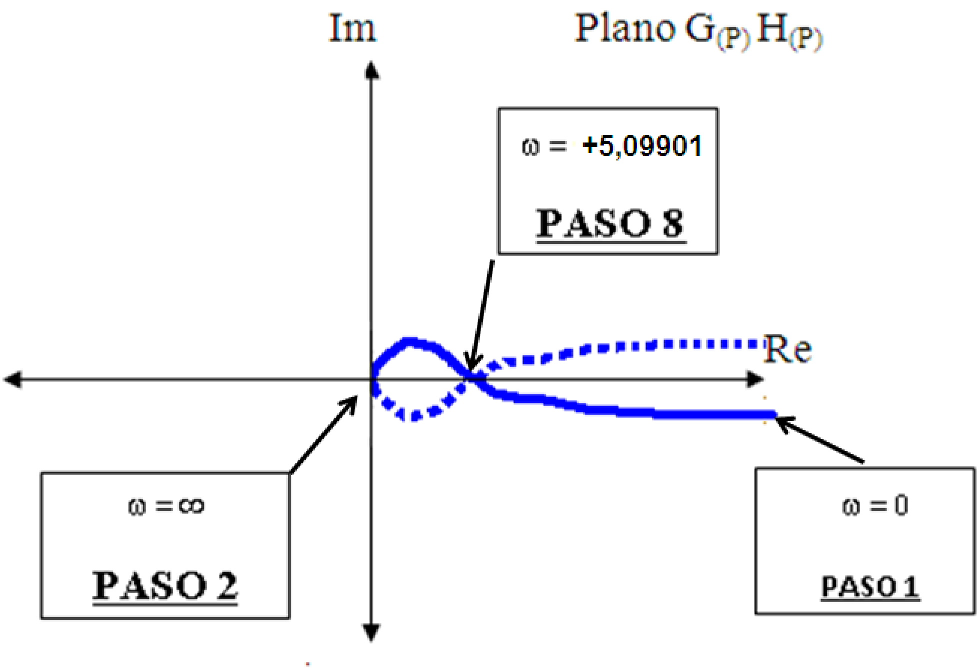

FIGURA 3. Trazado del diagrama con los datos obtenidos.

Recordando que el trazado del diagrama que corresponde a las frecuencias negativas es espejo sobre el eje real del que corresponde a las frecuencias positivas[1] hacemos el trazado del diagrama completo.

[1]Recordar lo visto cuando se realizó el estudio del trazado de diagramas polares mediante el Método Gráfico

PASO 10: Cerrar la curva para P o ω = 0.

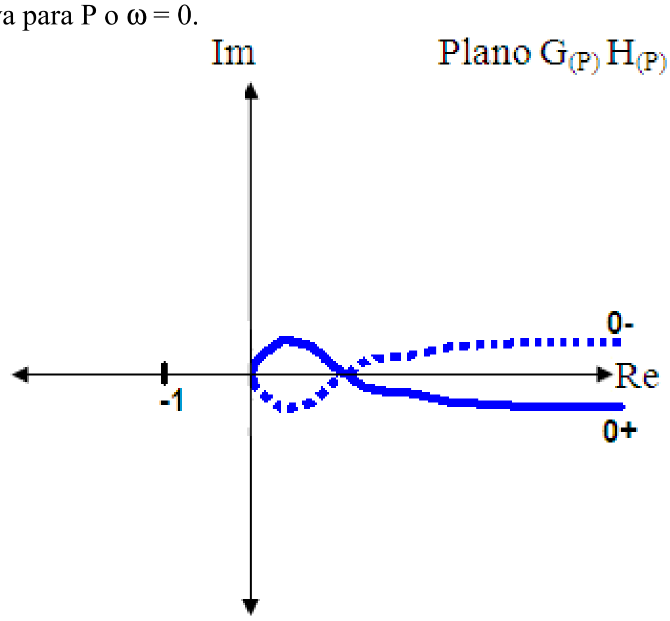

FIGURA 5. Cerrar diagrama de $G_{(P)}.H_{(P)}$. o $G_{j\omega)}.H_{(j\omega)}$

Repetimos parte del análisis realizado en el PASO 1. Recordando que para el cierre:

$$G_{(P)}H_{(P)}\Big|_{p\to 0} = \frac{Kcte}{P^2}\Big|_{P\to 0} = |\infty| \cdot \underline{|-2\cdot\theta°}$$

Para el cierre entre 0+ y 0- , deberemos girar -180° por cada uno de los dos polos al origen que tiene la función:

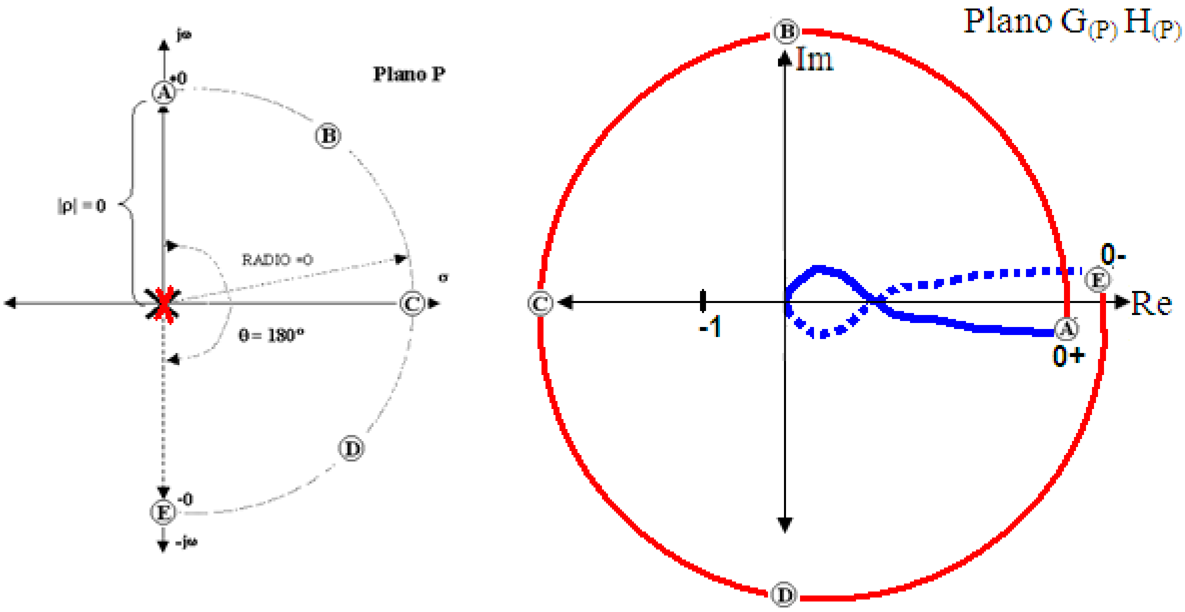

FIGURA 5. Cierre del diagrama para P→0

PASO 12: Cierre del diagrama para P ó ω →∞ . No se aplica pues tenemos una funcion de lazo abierto y la observación de los rodeos se realiza sobre -1+j0.

PASO 12: Aplicar el criterio de Nyquist al diagrama obtenido en la Figura 5.
Para la aplicación del criterio de Nyquist, en primer lugar recorremos en un sentido determinado, el llamado recinto de Nyquist en el plano P. Ver Figura 5.

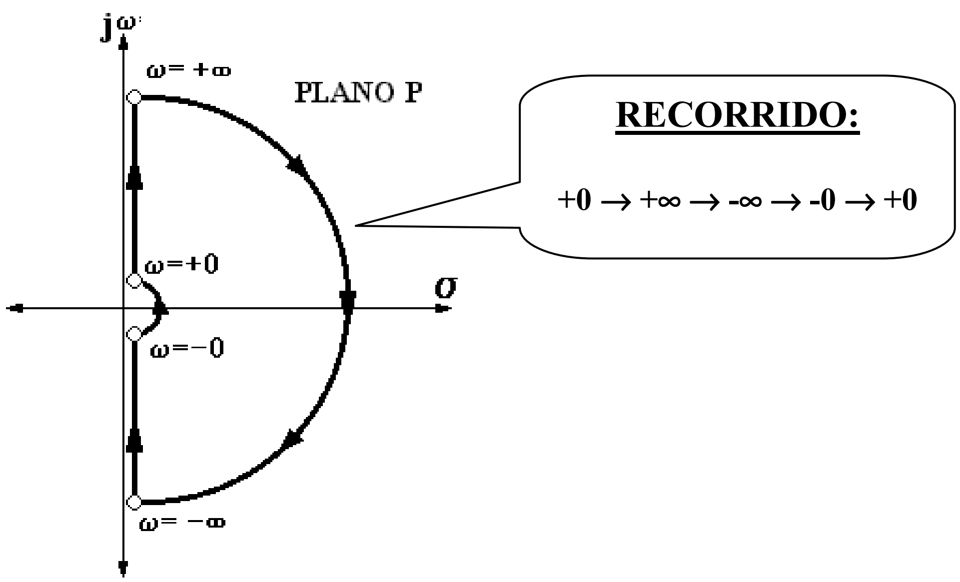

FIGURA 6. Recinto de Nyquist y sentido de recorrido del mismo.

A continuación trazamos el Recorrido (**+0 → +∞ → -∞ → -0 → +0**) mediante flechas en el plano $G_{(P)}$ $H_{(P)}$. ó $G_{(j\omega)}$ $H_{(j\omega)}$.

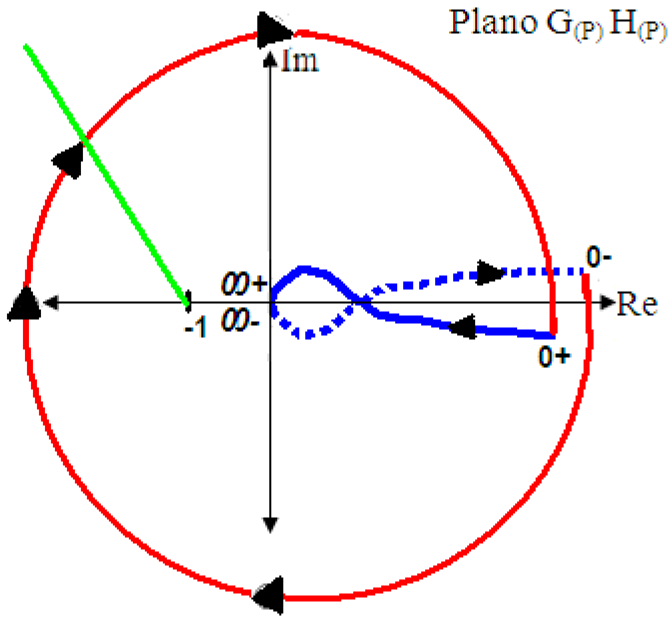

FIGURA 7. Trazado del Recorrido (**+0** → +∞ → -∞ → **-0** → **+0**) en el plano $G_{(P)}\,H_{(P)}$. ó $G_{(j\omega)}\,H_{(j\omega)}$.

Luego nos fijamos cuantas veces y en que sentido se rodea al punto -1 + j0. Como método práctico se recomienda trazar desde el punto -1 + j0 una línea que corte al gráfico en cualquier lugar y contar el número de flechas que interceptan esta línea. La diferencia entre flechas a la izquierda y la derecha nos indica el número de rodeos al origen y el sentido del mismo. Ver Figura 7.
Contamos el número de flechas que tocan a la línea, en este caso 1, lo cual nos indica rodeo a -1 + j0, para determinar el sentido, recordemos que en el plano P, se realizó el recorrido del recinto de Nyquist cortando a los ejes en sentido horario, de la Figura 6, se observa que el diagrama corta a los ejes en sentido horario por lo cual el número de rodeos será :

$$\mathbf{N = +1}$$

Por lo tanto al aplicar el criterio de Nyquist tenemos :

$$\mathbf{N = Z - P = +1}$$

donde:

N = Número de rodeos al origen.
Z = Cantidad de ZEROS de $G_{(P)}\,H_{(P)}$ a parte real positiva.
P = Cantidad de POLOS de $G_{(P)}\,H_{(P)}$ a parte real positiva.

Con el resultado obtenido: $\mathbf{N = +1}$ el sistema será **"INESTABLE**", ya que la función $G_{(P)}\,H_{(P)}$, tiene al menos un cero más que polos a parte real positiva.

Comprobamos por aplicación del criterio de Routh-Hurtwitz, aplicando el algoritmo al numerador y al denominador de $\mathbf{G_{(P)}\,H_{(P)} + 1}$:

$$G_{(P)}H_{(P)}+1=\frac{10\cdot P+80}{P^4-5P^3-14P^2}+1=\frac{P^4-5P^3-14P^2+10\cdot P+80}{P^4-5P^3-14P^2}$$

Aplicando Routh-Hurtwitz, al numerador de $G_{(P)}\, H_{(P)} + 1$ tenemos:

Numerador = 1.0*P4 + -5.0*P3 + -14.0*P2 + 10.0*P1 + 80.0

P4 |	**1.0000**	**-14.0000**	**80.0000**
P3 |	**-5.0000**	**10.0000**	
P2 |	**-12.0000**	**80.0000**	
P1 |	**-23.3333**		
P0 |	**80.0000**		

Vemos que el algoritmo tiene dos cambios de signo en la primera columna por lo que el Numerador tiene dos raices a parte real positiva.

Aplicando Routh-Hurtwitz, al denominador de $G_{(P)}\, H_{(P)} + 1$ tenemos:

Denominador $= P^4 - 5\,P^3 - 14\,P^2$, se observa que el polinomio tiene dos raices en el origen por lo que aplicamos el algoritmo al polinomio resultante de dividir el denominador por P^2, por lo tanto :

Denominador $= P^2 - 5\,P^1 - 14\,P^0$

P^2 |	**1.0000**	**-14.0000**
P^1 |	**-5.0000**	
P^0 |	**-14.0000**	

Vemos que el algoritmo tiene un cambio de signo en la primera columna por lo que el Numerador tiene una raiz a parte real positiva.

Como conclusión el número de rodeos del diagrama polar aplicando criterio de Nyquist debe ser igual a la diferencia entre el número de raices a parte real positiva entre el numerador y el denominador de $G_{(P)}\, H_{(P)} + 1$ al aplicar el algoritmo de Routh-Hurtwitz:

Rodeos aplicando Nyquist → $N = Z - P = \mathrm{Raices}_{NUMERADOR} - \mathrm{Raices}_{DENOMINADOR}$

En nuestro caso : $\mathbf{N = Z - P = +1 = R_{NUM} - R_{DEN} = 2 - 1 = 1}$

Sistema ***"INESTABLE"***