EXÁMEN NOVIEMBRE 1999

Trazar el diagrama polar de la siguiente función de transferencia y analizar estabilidad mediante criterio de Nyquist.

$$\boxed{G_{(P)} \bullet H_{(P)} = \frac{10\,P - 10}{P^3 + 4\,P^2 + 8\,P}}$$

1) Determinar el origen de la curva, analizando $\mathbf{G_{(P)}\,.\,H_{(P)}}$ para $P \to 0$.

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)}\Big|_{P\to 0} = \frac{-K_{TE}}{P}\Big|_{P\to 0} = |\infty| \cdot \underline{|+90°} = +j\infty$$

2) Determinar el final de la curva, analizando $\mathbf{G_{(P)}\,.\,H_{(P)}}$ para $P \to \infty$.

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)}\Big|_{P\to 0} = \frac{K_{TE}}{P^2}\Big|_{P\to\infty} = |0| \cdot \underline{|-180°}$$

3) Realizar el cambio de $P \to j\omega$.

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} \Rightarrow G_{(j\omega)} \bullet H_{(j\omega)} = \frac{10\,j\omega - 10}{-j\omega^3 - 4\omega^2 + 8\,j\omega}$$

4) Separar $\mathbf{G_{(j\omega)}\,.\,H_{(j\omega)}}$ en parte real y parte imaginaria.

$$G_{(j\omega)} \bullet H_{(j\omega)} = \frac{-10\omega^4 + 120\omega^2}{16\omega^4 + (8\omega - \omega^3)^2} + j\,\frac{80\omega - 50\omega^3}{16\omega^4 + (8\omega - \omega^3)^2}$$

5) Encontrar el valor de ω que hace cero la parte real.

$$Re\Big|_{\omega} = 0 \therefore \frac{-10\omega^4 + 120\omega^2}{16\omega^4 + (8\omega - \omega^3)^2} = 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} 0, \infty \\ \pm 3{,}4641016 \end{cases}$$

6) Reemplazar el valor positivo de ω que hace cero la parte real en la parte imaginaria, para determinar los cortes al eje imaginario.

$$Im\Big|_{\omega=3{,}46410116} = \frac{80\omega - 50\omega^3}{16\omega^4 + (8\omega - \omega^3)^2}\Bigg|_{\omega=3{,}46410116} = +0{,}7216878$$

Corte al eje imaginario en +0,7216878.

7) Encontrar el valor de ω que hace cero la parte imaginaria.

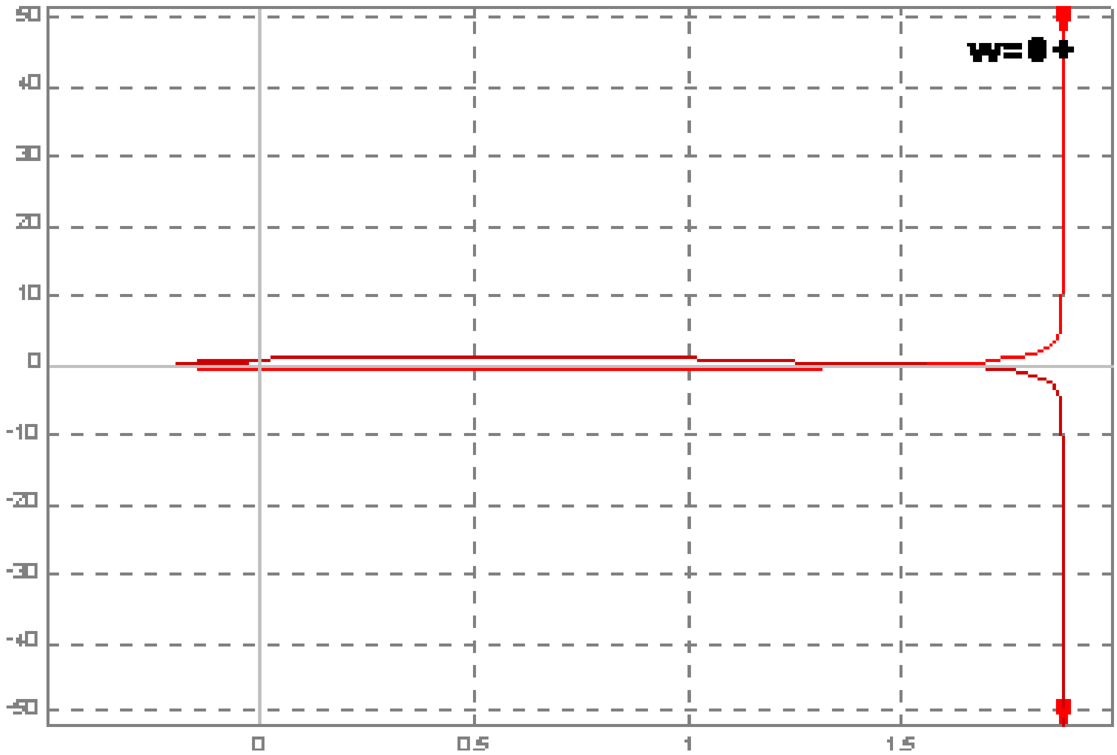
$$Im\Big|_{\omega} = 0 \therefore \frac{80\omega - 50\omega^3}{16\omega^4 + (8\omega - \omega^3)^2} = 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} 0, \infty \\ \pm 1{,}26491106 \end{cases}$$

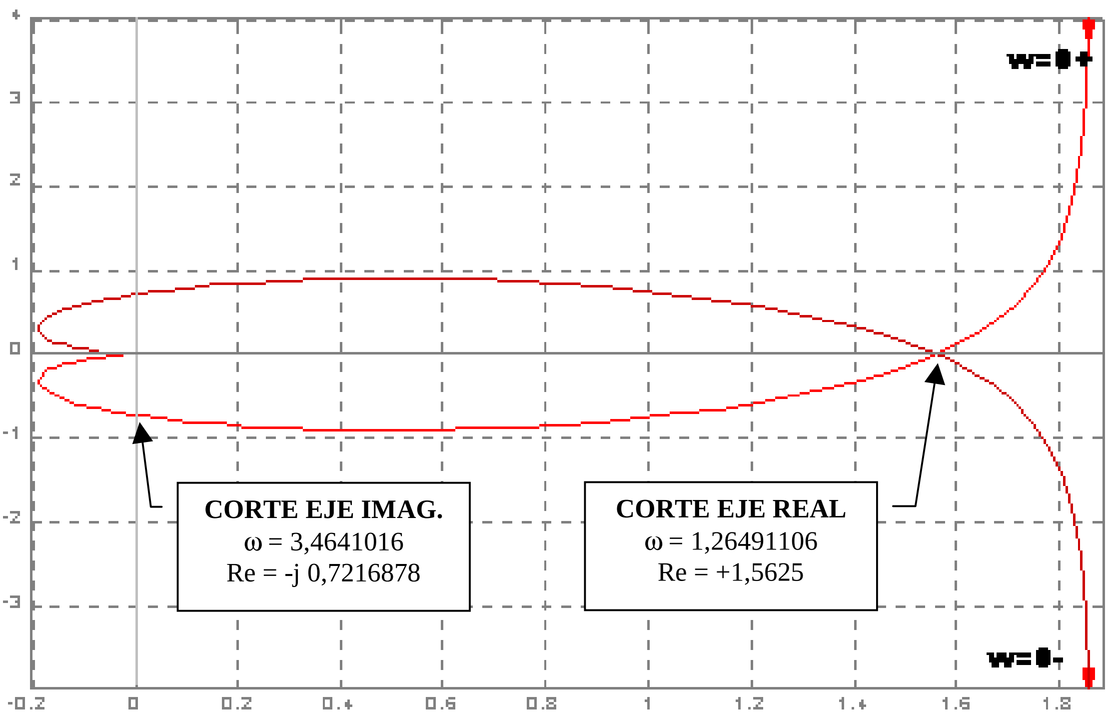
8) Reemplazar el valor positivo de ω que hace cero la parte imaginaria en la parte real, para determinar los cortes al eje real.

$$Re\Big|_{\omega=1,26491106} = \left.\frac{-10\omega^4+120\omega^2}{16\omega^4+(8\omega-\omega^3)^2}\right|_{\omega=1,26491106} = +1,5625$$

Corte al eje imaginario en +1,5625.

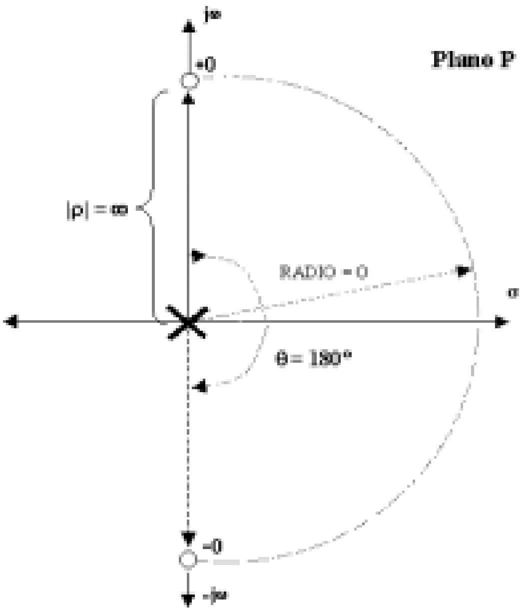
9) Con los datos obtenidos en los pasos 1,2,6 y 8 trazar el diagrama polar.





10) Cerrar la curva para P→0.

Analizamos a continuación el plano P, para observar lo que sucede cuando se estudia un vector que corresponde a un polo en el origen y se desea hacer la rotación del mismo desde ω = +0 a ω = -0.



En la figura vemos que el vector ρ al pasar desde ω = +0 a ω = -0 en el plano P, describe una trayectoria cuyo ángulo es θ = 180 °. El ángulo φ que describe el vector correspondiente en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ por transformación conforme, estará dado por la expresión:

φ = (-) Número de Polos x θ =

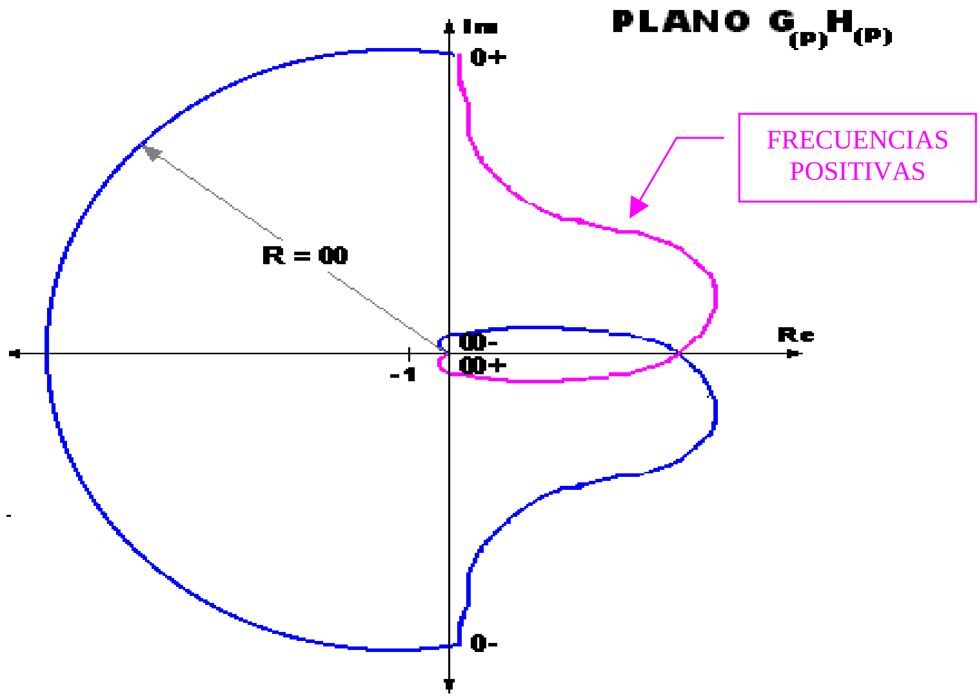
φ = (-) Número de Polos x 180°

para nuestro caso:

$$\varphi = (-)\ 1 * \theta = (-)\ 1 * 180° \quad \therefore \varphi = -180°$$

El signo (-) aparece porque estamos analizando polos, y como los mismos están en el denominador, al calcular la fase aparece el signo negativo.

Por otra parte el signo (-), nos indica que si en el plano P el vector ρ describió una trayectoria que corta los ejes en un sentido, (En este caso particular sentido horario), el vector que describe el ángulo φ en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ o $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$, debe hacerlo cortando los ejes en el sentido opuesto (Antihorario). En la siguiente figura se muestra el cierre del diagrama para P→0.



11) Análisis del diagrama obtenido y aplicación de criterio de Nyquist.
Examinando el diagrama completo de la función de transferencia, obtenemos un rodeo en sentido positivo por lo tanto aplicando el criterio de Nyquist tenemos:

$$\boxed{N = Z - P = 1} \Rightarrow \boxed{\text{Sistema Inestable}}$$

12) Aplicar procedimiento de Routh-Hourwitz para comprobar los resultados de Nyquist.
Para ello calculamos $G_{(P)}.H_{(P)} + 1$.

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} + 1 = \frac{10P - 10}{P^3 + 4P^2 + 8P} + 1 =$$

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} + 1 = \frac{10P - 10 + P^3 + 4P^2 + 8P}{P^3 + 4P^2 + 8P} =$$

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} + 1 = \frac{P^3 + 4P^2 + 18P - 10}{P^3 + 4P^2 + 8P}$$

Aplicamos Routh-Hourwitz al Numerador :

P^3	1	18
P^2	4	-10
P^1	20,5	
P^0	-10	

Existe un cambio de signo , en la primera columna, por lo tanto, el polinomio del numerador tiene una raiz a parte real positiva.

RAICES NUM$_{G(P).H(P)+1}$ = 1

Aplicamos Routh-Hourwitz al Denominador :

P^2	1	8
P^1	4	
P^0	8	

No existe cambio de signo , en la primera columna, por lo tanto, el polinomio del denominador no tiene raices a parte real positiva.

RAICES DEN$_{G(P).H(P)+1}$ = 0

De donde :

N =RAICES NUM $_{G(P).H(P)+1}$ - RAICES DEN $_{G(P).H(P)+1}$ = 1- 0 = 1

Este resultado coincide con el obtenido mediante criterio de Nyquist.