# NORMALIZACIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FRECUENCIAS

## NORMALIZACIÓN

En los problemas de síntesis de circuitos, los cálculos numéricos a veces son largos y engorrosos.
La normalización de los valores de los componentes y de la escala de la variable de Laplace "S", es más útil para los procesos de simplificación.
Existen dos pasos para la simplificación :

a) Si multiplicamos todas las reactancias L y $C^{-1}$ por el mismo factor de escala de frecuencias $\omega_o = 2\ \pi f_o$ en radianes/segundos, y simultáneamente dividimos la variable de Laplace "S" por $\omega_o$, ambas operaciones se cancelan, pero la razón (S/ $\omega_o$), es más cómoda y por lo tanto útil para el trabajo.

b) Si dividimos todos los valores de los componentes R, L y $C^{-1}$ por el mismo valor de impedancia Ro en ohms, todos los valores de las corrientes se harán Ro veces mayores, pero no existirá ningún cambio esencial en el comportamiento de la red.

El conjunto de las dos operaciones ( a y b ), simplifica significativamente la tarea algebraica.

## ESCALADO EN FRECUENCIA Y ESCALADO EN IMPEDANCIA

El escalado en frecuencia es un procedimiento que traslada las curvas de amplitud y de fase de cualquier filtro lineal, a unas nuevas frecuencias.
Escalar en frecuencia nos permite orientar los diseños a un mismo punto de partida, comenzando el diseño, a partir de un filtro prototipo, con una frecuencia de referencia normalizada que verifique en su escala las propiedades exigibles del filtro definitivo.
Matemáticamente el escalado en frecuencia a partir de la versión normalizada, se traduce en un cambio de variable en dicho filtro normalizado, sustituyendo cada variable s por su valor escalado S/$\omega_O$ , es decir :

$$G_{(s)} = G_{O(S)}\Big|_{S=\frac{S}{\omega o}}$$

Donde $Go_{(S)}$ representa la función de transferencia del filtro normalizado.
Desde el punto de vista de los componentes de un circuito, el escalado de frecuencias se puede llevar a cabo mediante el escalado directo de los elementos que almacenan energía, es decir aquellos cuya impedancia depende de "s".
Concretamente el escalado en frecuencia modifica la impedancia de cada inductor y capacitor, según el factor de escala $\omega_O$ es decir :

$$L_n = \frac{L}{\omega_O} \qquad\qquad C_n = \frac{C}{\omega_O}$$

Recordemos que los resistores no se ven afectados por el escalado en frecuencia.

Por otro lado el escalado en impedancia de un circuito, es un proceso que persigue mantener las características de respuesta en frecuencia, del circuito de referencia, multiplicando o dividiendo las corrientes de cada rama del mismo, por un valor constante.

Si al valor de escala de las impedancias lo llamamos Ro, el escalado consistirá en multiplicar por ese factor cada una de las impedancias del circuito, lo que dividirá las corrientes que circulan por las ramas de este por el mismo factor.

Tomemos como ejemplo la función impedancia $Z_{(S)}$, donde supondremos que los valores de R, L y $C^{-1}$ son engorrosos :

$$Z_{(S)} = R + L\ S + \frac{1}{C\ S}$$

Con la transformación antes propuesta se convertirá en :

$$\frac{Z_{(S)}}{R_O} = \frac{R}{R_O} + \frac{L}{R_O}\ \omega_O \left(\frac{S}{\omega_O}\right) + \frac{1}{C\omega_O R_O}\ \frac{1}{\left(\frac{S}{\omega_O}\right)}$$

Es decir :

$$Z_{n(S_n)} = R_n + L_n\ S_n + \frac{1}{C_n\ \ S_n}$$

Donde :

$$R_n = \frac{R}{R_O} \qquad L_n = \frac{L\ \omega_O}{R_O} \qquad C_n = C\ \omega_O\ R_O$$

A los términos $\#_N$ se les llama valores normalizados de cada uno de los elementos.

Por otro lado a $s_n = \dfrac{S}{\omega_O}$ , se le llama frecuencia compleja normalizada.

El uso correcto de tales valores normalizados, no introduce errores, sino que solamente produce un cambio de escala en la respuesta del circuito. En la construcción de la red real, no se debe olvidar que los valores verdaderos de los componentes de la misma, se deducen de los valores normalizados, empleando las siguientes relaciones:

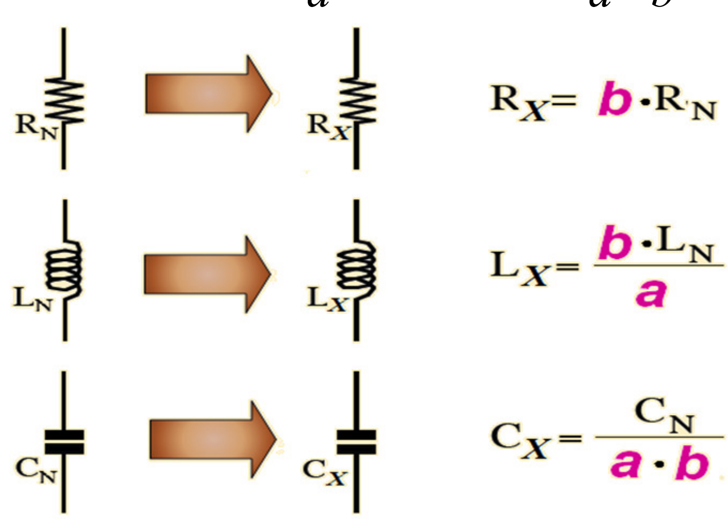
$$R = R_n * R_O \qquad L = \frac{L_n\ R_O}{\omega_O} \qquad C = \frac{C_n}{\omega_O\ R_O}$$

**NOTA :**

Los valores normalizados carecen de dimensión, por ello la verificación de los resultados por sus ecuaciones de dimensión no es posible, sin embargo, las ventajas de emplear los procedimientos de normalización, superan con creces esta dificultad.
Si se desea se puede normalizar en forma dual, empleando $G_O$ en lugar de $R_O$ .
Nos referiremos a los valores normalizados como si fuesen valores reales ( ohms, henrios, faradios y radianes/segundo) ya que es lo más cómodo y no conduce a ninguna confusión.
Por una cuestión de compatibilidad con el apunte de la Cátedra (Apunte Ing. Oscar Nicasio) llamaremos **b = $R_O$** →Factor de escala de Impedancia y **a = $\omega_O$ = $\omega_C$** →Factor de escala de Pulsación en filtros pb y pa , y **a = BW** →Factor de escala de Pulsación en filtros PB y EB**,** de este modo :

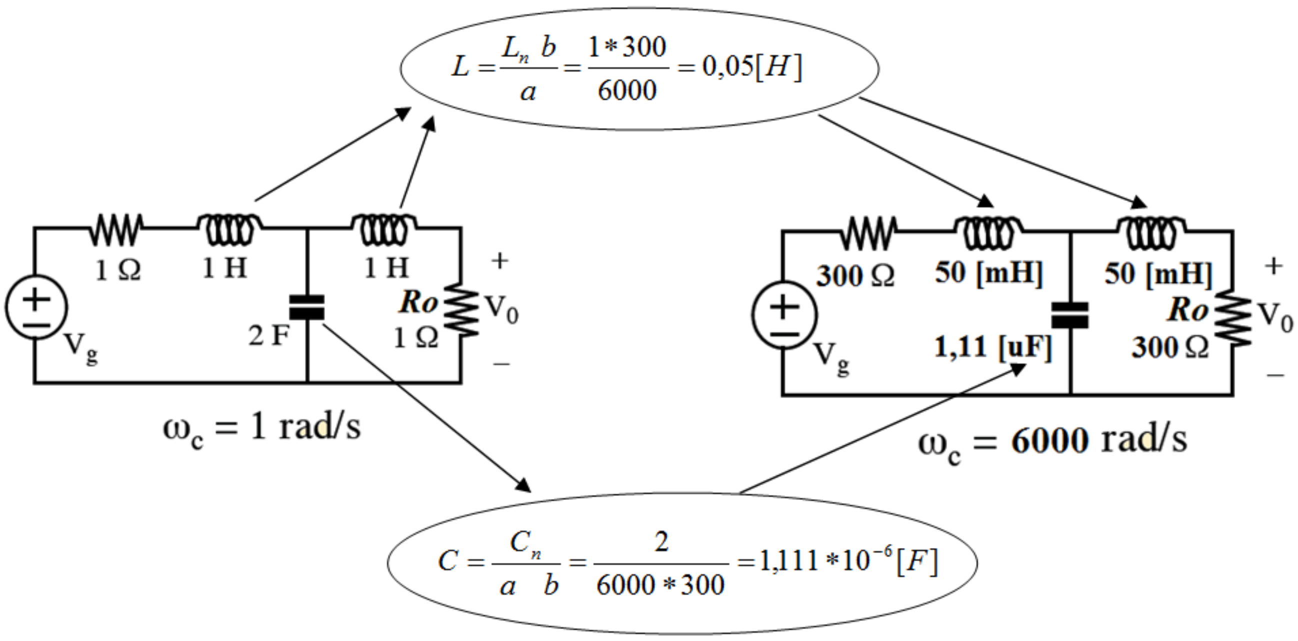
$$R = R_n * b \qquad L = \frac{L_n\ b}{a} \qquad C = \frac{C_n}{a\ \ b}$$

**RESUMEN** →



**EJEMPLO :** Obtenga un filtro pasabajos Kcte, con impedancia característica Ro de 300 Ω y frecuencia de corte de 954,929 Hertz, a partir de un filtros pasabajos Kcte normalizado.

b = 300 [Ω]    a = 2 π 954,929 = 6000 [rad/seg]



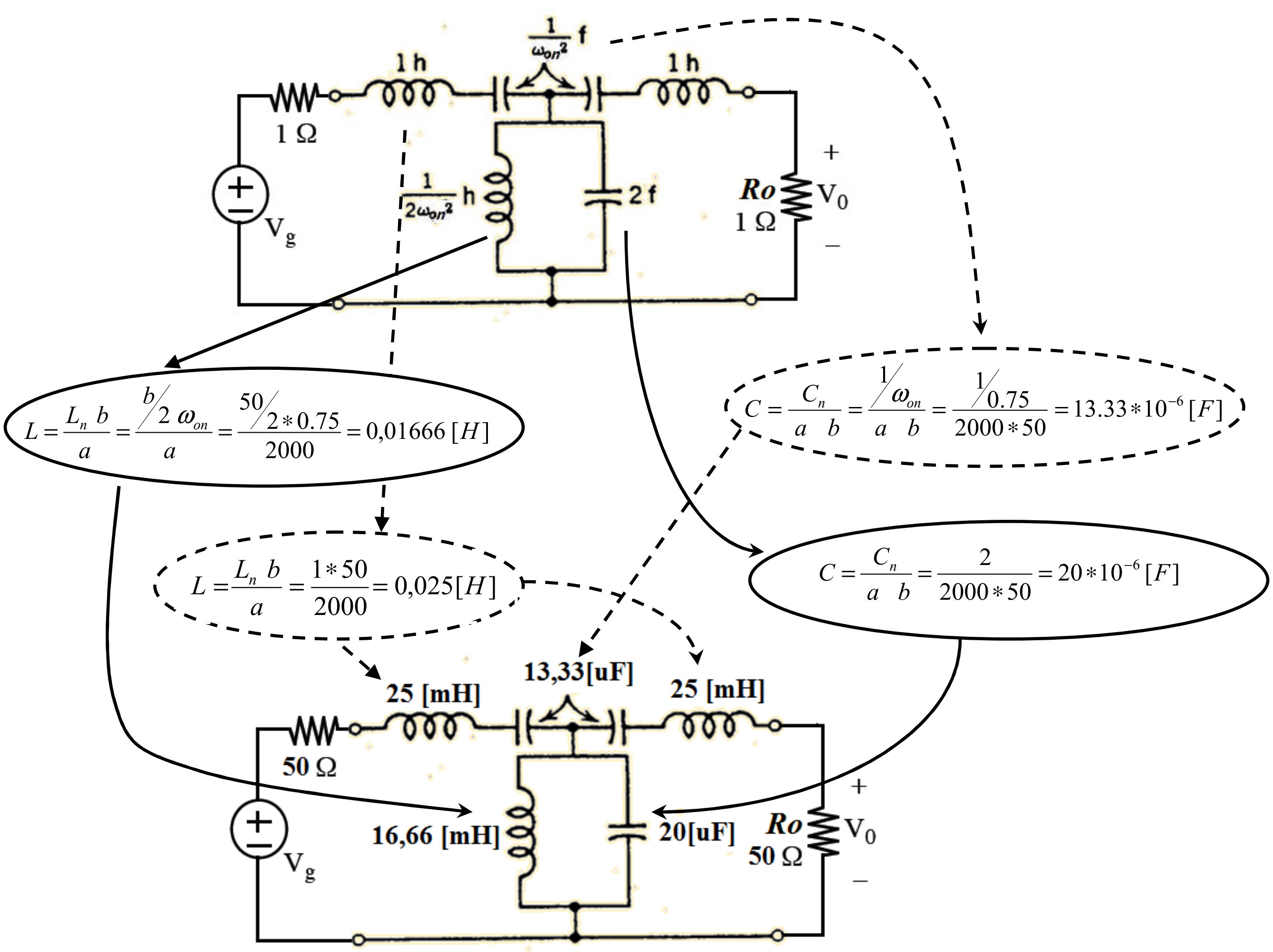

**EJEMPLO :** Obtenga un filtro pasa banda Kcte, con impedancia característica Ro de 50 Ω, frecuencia de corte inferior $f_{C1}$ de 159,154 Hertz y frecuencia de corte superior $f_{C2}$ de 477,464 Hertz, a partir de un filtros pasa banda Kcte normalizado.

b = 50 [Ω]    a = BW = $(f_{C2} - f_{C1})*2\pi = (477{,}464 - 159{,}154)*2*\pi = 2000$ [rad/seg]

$\omega_{C1} = f_{C1}*2\pi = 159{,}154*2*\pi = 1000$ [rad/seg]    $\omega_{C2} = f_{C2}*2\pi = 477{,}464*2*\pi = 3000$ [rad/seg]

$\omega_O = \mathrm{sqrt}(\omega_{C1}*\omega_{C2}) = \mathrm{sqrt}[(477{,}464*2*\pi)*(159{,}154*2*\pi)] = \mathrm{sqrt}(1000*3000) = 1732.0508$ [rad/seg]

$\omega_{On}^2 = \omega_O^2 / BW^2 = 1732.0508^2/2000^2 = 0{,}75$



## TRANSFORMACIÓN DE FRECUENCIAS

A partir del diseño de un filtro pasa bajos (**pb**), se pueden obtener los filtros pasa altos (**pa**), pasa banda (**PB**) y elimina banda (**EB**), que cumplan especificaciones similares, mediante el uso de transformaciones. Denotemos ω y S, donde S es la frecuencia y la variable del filtro pasa bajos normalizado en $\omega_c = 1$ [rad/seg].
Para el desarrollo del tema, analizaremos las expresiones de Xk de los filtros de K-constante para cada uno de los tipos de filtros estudiados (pb, pa, PB y EB).
Recordamos a continuación, algunas expresiones ya estudiadas de los filtros de K-constante :

$$X_K = j|X_K| = \sqrt{\frac{Z_{K1}}{4Z_{K2}}} = \frac{Z_{K1}}{2R_O} = \frac{Ro}{2Z_{K2}}$$

Para el filtro pasa bajos Kcte tenemos : $X_K = j|X_K| = \frac{Z_{K1}}{2R_O} = \frac{j\omega\, L_1}{2R_O} = \frac{j\omega}{\frac{2R_O}{L_1}}$

Recordando que : $R_O{}^2 = Z_{K1} * Z_{K2} = \left.\frac{L_1}{C_2}\right|_{En\ Filtros\ pasa-bajos}$ o $R_O = \sqrt{Z_{K1} * Z_{K2}} = \left.\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\right|_{En\ Filtros\ pasa-bajos}$

$$X_K = j|X_K| = \frac{j\omega}{\frac{2R_O}{L_1}} = \frac{j\omega}{\frac{2\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}}{L_1}} = \frac{j\omega}{\frac{2}{\sqrt{L_1 * C_2}}} \qquad pero \qquad \frac{2}{\sqrt{L_1 * C_2}} = \omega_C\,\Big|_{En\ Filtros\ pasa-bajos}$$

$$\boxed{X_K\big|_{pb} = j|X_K|_{pb} = \frac{j\omega}{\omega_C} = S}$$

Para el filtro pasa altos Kcte tenemos :

$$X_K = j|X_K| = \frac{Z_{K1}}{2R_O} = \frac{\frac{1}{j\omega\, C_1}}{2R_O} = \frac{-j}{2R_O\,\omega\, C_1}$$

Recordando que $R_O{}^2 = Z_{K1} * Z_{K2} = \left.\frac{L_2}{C_1}\right|_{En\ Filtros\ pasa-altos}$ o $R_O = \sqrt{Z_{K1} * Z_{K2}} = \left.\sqrt{\frac{L_2}{C_1}}\right|_{En\ Filtros\ pasa-altos}$

$$X_K = j|X_K| = \frac{-j}{2R_O\,\omega C_1} = \frac{-j}{2\sqrt{\frac{L_2}{C_1}}\,\omega C_1} = \frac{-j}{2\omega\sqrt{L_1 * C_2}} \qquad pero \qquad \frac{1}{2\sqrt{L_2 * C_1}} = \omega_C\,\Big|_{En\ Filtros\ pasa-altos}$$

$$\boxed{X_K\big|_{pa} = -j|X_K|_{pa} = \frac{-j}{\frac{\omega}{\omega_C}} = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_C}} = \frac{1}{S}}$$

Para el filtro pasa banda Kcte. tenemos : $X_K = j|X_K| = \frac{Z_{K1}}{2R_O} = \frac{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega\, C_1}}{2R_O} = \frac{j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega\, C_1}}{2R_O}$

Operando y recordando temas ya estudiados tenemos :

$$X_K = j|X_K| = \frac{j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega\, C_1}}{2R_O} = \frac{j\omega L_1 - j\frac{\omega_O{}^2 L_1}{\omega}}{2R_O} \qquad \mathrm{Re}cordando \quad \omega_O{}^2 = \frac{1}{L_1 * C_1} \ \therefore \ \frac{1}{C_1} = \omega_O{}^2 * L_1$$

$$X_K = j|X_K| = \frac{jL_1\left(\omega - \frac{\omega_O{}^2}{\omega}\right)}{2R_O} = \frac{j\left(\omega - \frac{\omega_O{}^2}{\omega}\right)}{\frac{2R_O}{L_1}} \qquad \mathrm{Re}cordando \quad BW = \left.\frac{2R_O}{L_1}\right|_{En\ Filtros\ Pasa\ Banda}$$

$$X_K = j|X_K| = \frac{j\left(\omega - \frac{\omega_O^2}{\omega}\right)}{BW} \quad ordenando \;\rightarrow\; X_K = j|X_K| = j\left(\frac{\omega}{BW} - \frac{\omega_O^2}{\omega * BW}\right)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término del segundo miembro por el ancho de banda BW tenemos:

$$X_K = j|X_K| = j\left(\frac{\omega}{BW} - \frac{\omega_O^2 * \frac{BW}{BW}}{\omega * BW}\right) \quad ordenando \;\rightarrow\; X_K = j|X_K| = j\left(\frac{\omega}{BW} - \frac{\frac{\omega_O^2}{BW^2}}{\frac{\omega}{BW}}\right)$$

$$X_K = j|X_K| = \frac{j\omega}{BW} + \frac{\frac{\omega_O^2}{BW^2}}{\frac{j\omega}{BW}} \quad Llamando \quad \omega_{ON}^2 = \frac{\omega_O^2}{BW^2} \qquad S = \frac{j\omega}{BW}$$

$$\boxed{X_K\big|_{PB} = j|X_K|_{PB} = S + \frac{\omega_{ON}^2}{S}}$$

Para el filtro elimina banda Kcte. tenemos :

$$X_K = j|X_K| = \frac{Z_{K1}}{2R_O} = \frac{j\omega L_1 // \frac{1}{j\omega C_1}}{2R_O} = \frac{\frac{\frac{L_1}{C_1}}{j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}}}{2R_O}$$

Operando y recordando temas ya estudiados tenemos :

$$X_K = j|X_K| = \frac{\frac{\frac{L_1}{C_1}}{j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}}}{2R_O} = \frac{\frac{\frac{\cancel{L_1}}{C_1}}{j\omega \cancel{L_1} - j\frac{\omega_O^2 \cancel{L_1}}{\omega}}}{2R_O} \qquad \mathrm{Re}cordando\ \omega_O^2 = \frac{1}{L_1 * C_1} \;\therefore\; \frac{1}{C_1} = \omega_O^2 * L_1$$

$$X_K = j|X_K| = \frac{\frac{1}{j\left(\omega - \frac{\omega_O^2}{\omega}\right)}}{2R_O C_1} = -j\frac{1}{2R_O C_1} * \frac{1}{\left(\omega - \frac{\omega_O^2}{\omega}\right)} \qquad \mathrm{Re}cordando\ \mathbf{B}W = \frac{1}{2R_O C_1}\bigg|_{En\ Filtros\ E\lim ina\ Banda}$$

$$X_K = j|X_K| = -j * BW * \frac{1}{\left(\omega - \frac{\omega_O^2}{\omega}\right)} \quad ordenando \;\rightarrow\; X_K = j|X_K| = -j\,\frac{1}{\left(\frac{\omega}{BW} - \frac{\omega_O^2}{\omega * BW}\right)}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término del denominador del segundo miembro, por el ancho de banda BW tenemos:

$$X_K = j|X_K| = -j\,\frac{1}{\left(\frac{\omega}{BW} - \frac{\omega_O^2 * \frac{BW}{BW}}{\omega * BW}\right)} \quad ordenando \;\rightarrow\; X_K = j|X_K| = -j\,\frac{1}{\left(\frac{\omega}{BW} - \frac{\frac{\omega_O^2}{BW^2}}{\frac{\omega}{BW}}\right)}$$

Introduciendo –j en el denominador tenemos :

$$X_K = j|X_K| = \frac{1}{\dfrac{j\omega}{BW} + \dfrac{\frac{\omega_O^2}{BW^2}}{\frac{j\omega}{BW}}} \qquad \textit{Llamando} \quad \begin{cases} \omega_{ON}^2 = \dfrac{\omega_O^2}{BW^2} \\ S = \dfrac{j\omega}{BW} \end{cases}$$

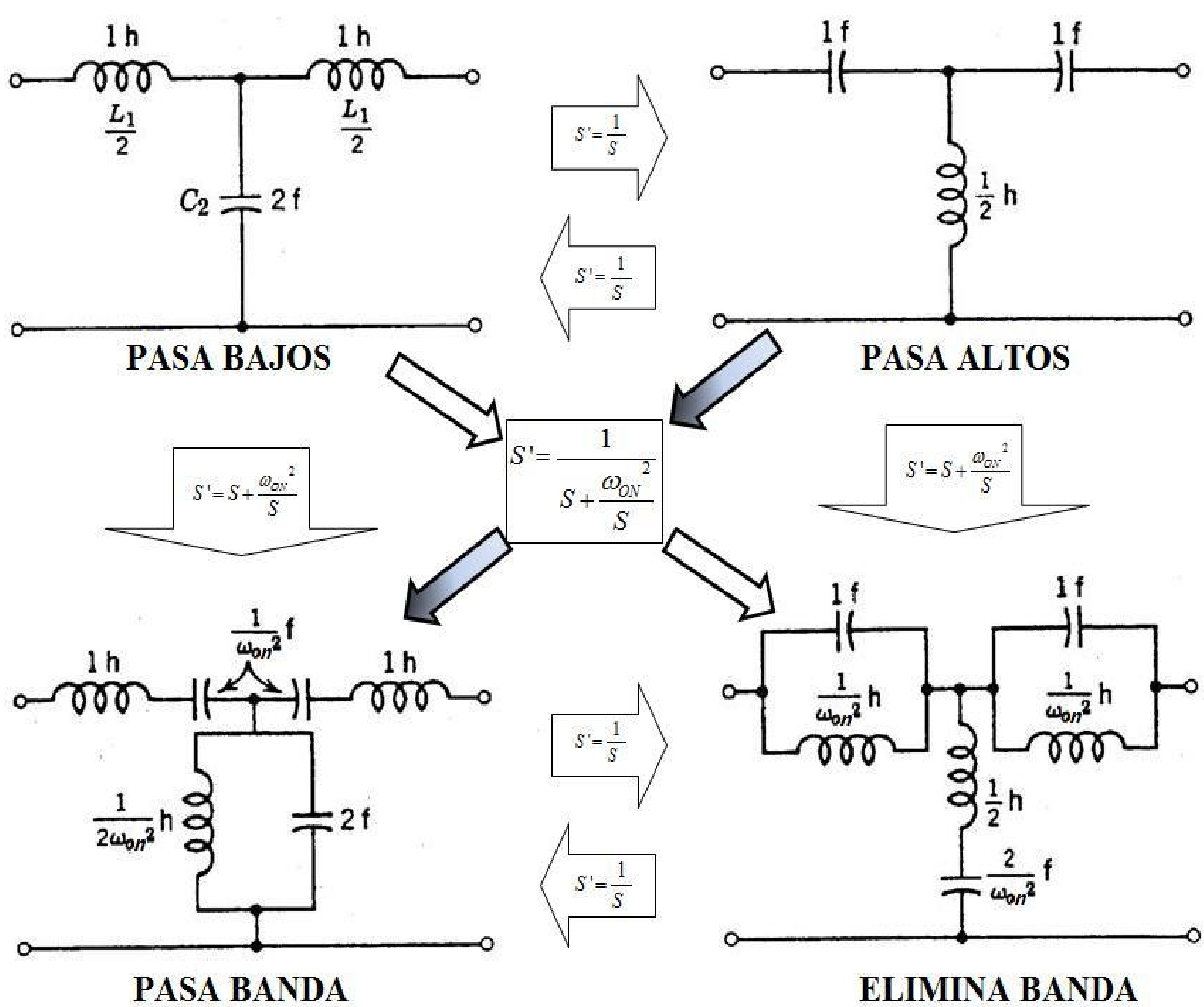
$$\boxed{X_K\big|_{EB} = j|X_K|_{EB} = \frac{1}{S + \dfrac{\omega_{ON}^2}{S}}}$$

Recordando los valores de $X_K$ para cada uno de los tipos de filtros tenemos :

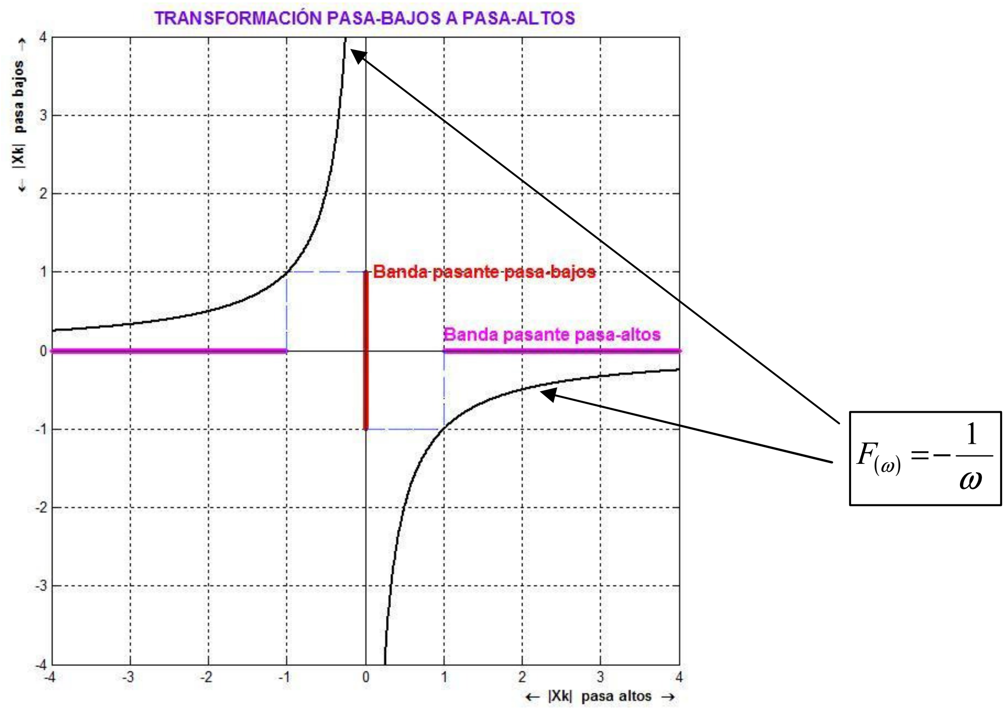
$$\boxed{X_K\big|_{pb} = j|X_K|_{pb} = \frac{j\omega}{\omega_C} = S} \qquad \boxed{X_K\big|_{pa} = -j|X_K|_{pa} = \frac{-j}{\dfrac{\omega}{\omega_C}} = \frac{1}{\dfrac{j\omega}{\omega_C}} = \frac{1}{S}}$$

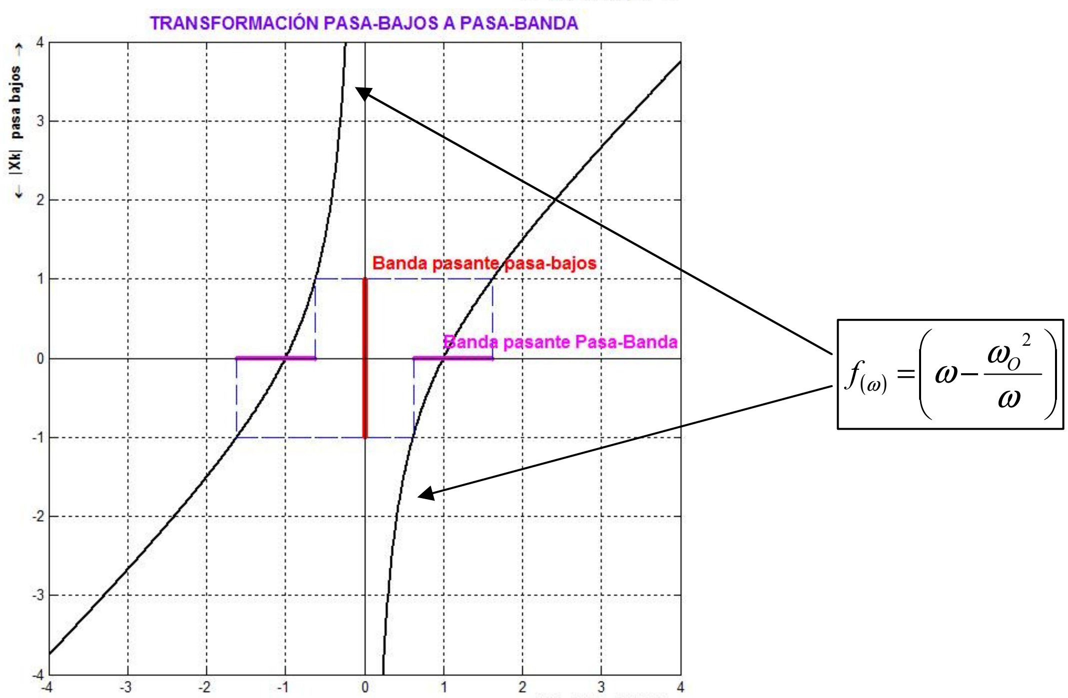
$$\boxed{X_K\big|_{PB} = j|X_K|_{PB} = S + \frac{\omega_{ON}^2}{S}} \qquad \boxed{X_K\big|_{EB} = j|X_K|_{EB} = \frac{1}{S + \dfrac{\omega_{ON}^2}{S}}}$$

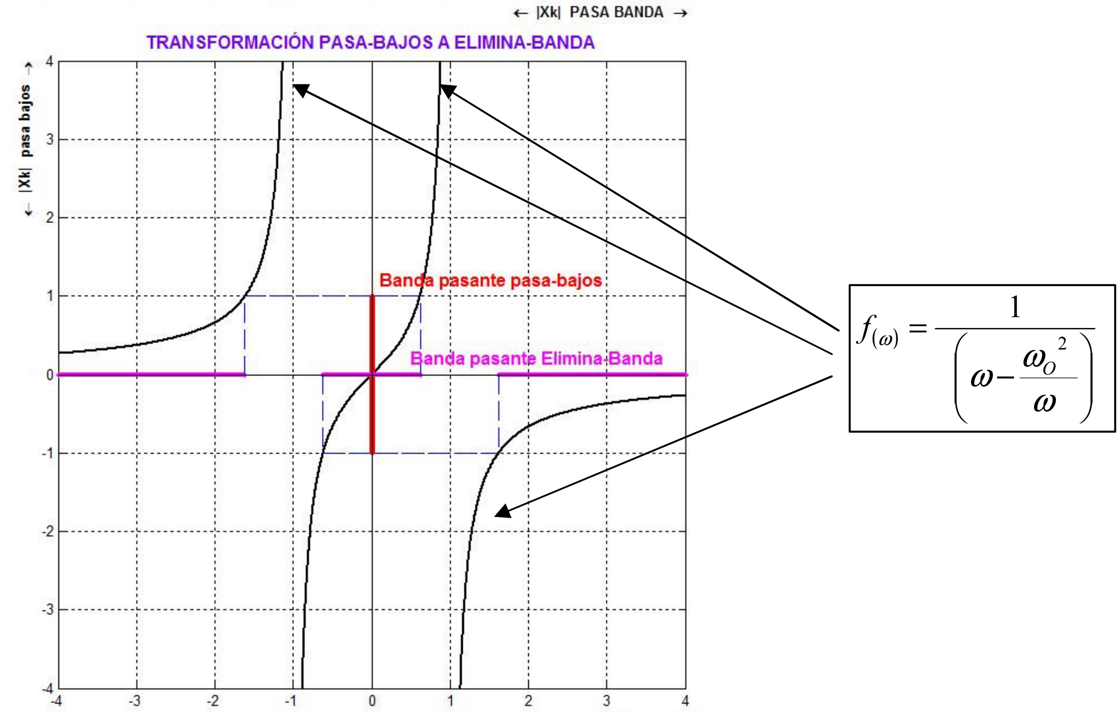
El siguiente esquema detalla la transformación de frecuencias a partir de los resultados obtenidos.
Se indican también los valores normalizados de los elementos que componen cada tipo de respuesta de los filtros con Ro=1Ω y $\omega_C$ = 1 [rad/seg] (en filtros pb y pa) ó BW=1 [rad/seg] (en filtros PB y EB).



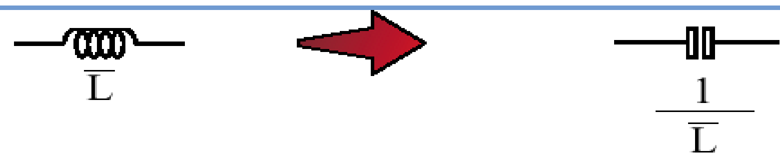
Los siguientes gráficos muestran la relación entre la banda pasante del filtro pasa bajos normalizado en función de $X_K$ sobre el eje "Y" y de la banda pasante de los filtros pasa altos, Pasa Banda y Elimina Banda sobre el eje "X".



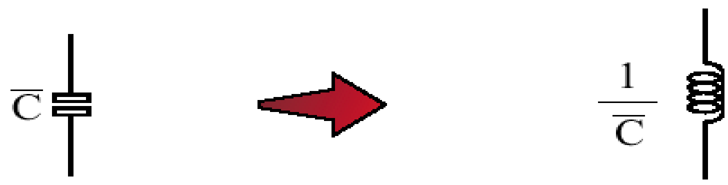



**RESUMEN DE NORMALIZACIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE PASA BAJOS A PASA ALTOS**

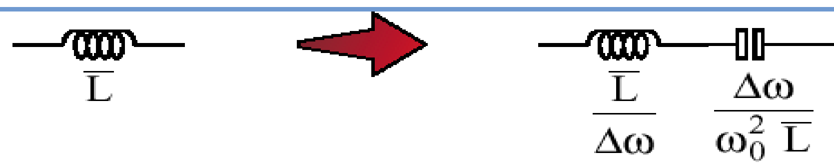



$$\overline{Z} = \overline{s}\,\overline{L} = \left(\frac{1}{s}\right)\overline{L} = \frac{1}{C\,s}$$

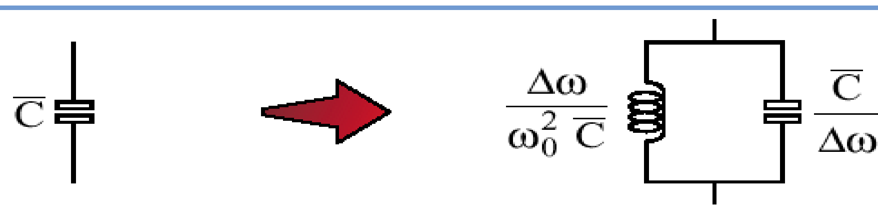



$$\overline{Y} = \overline{s}\,\overline{C} = \left(\frac{1}{s}\right)\overline{C} = \frac{1}{L\,s}$$

**RESUMEN DE NORMALIZACIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE PASA BAJOS A PASA BANDA**

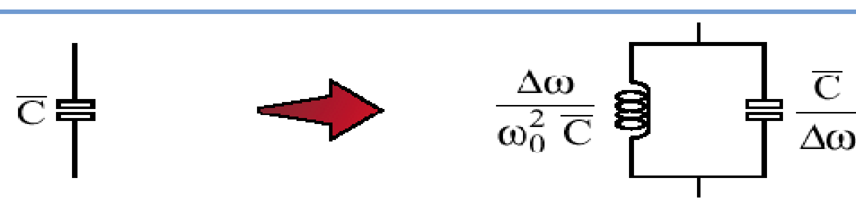



$$\overline{Z} = \overline{s}\,\overline{L} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)\overline{L} = \frac{\overline{L}}{\Delta\omega}s + \frac{\omega_0^2\,\overline{L}}{\Delta\omega\,s} = L\,s + \frac{1}{C\,s}$$

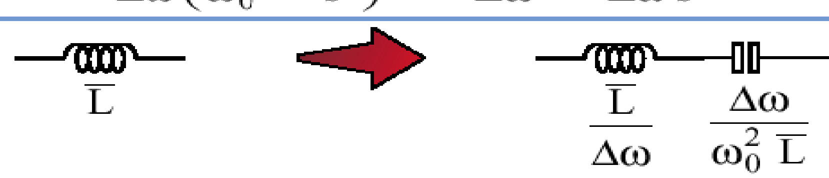



$$\overline{Y} = \overline{s}\,\overline{C} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)\overline{C} = \frac{\overline{C}}{\Delta\omega}s + \frac{\omega_0^2\,\overline{C}}{\Delta\omega\,s} = C\,s + \frac{1}{L\,s}$$

**RESUMEN DE NORMALIZACIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE PASA ALTOS A ELIMINA BANDA**




$$\overline{Y} = \overline{s}\,\overline{C} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)\overline{C} = \frac{\overline{C}}{\Delta\omega}s + \frac{\omega_0^2\,\overline{C}}{\Delta\omega\,s} = C\,s + \frac{1}{L\,s}$$




$$\overline{Z} = \overline{s}\,\overline{L} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)\overline{L} = \frac{\overline{L}}{\Delta\omega}s + \frac{\omega_0^2\,\overline{L}}{\Delta\omega\,s} = L\,s + \frac{1}{C\,s}$$

**NOTA :** **Observe que es conveniente utilizar impedancias (Z) cuando los componentes están en serie y admitancias (Y), cuando los mismos, están en paralelo, para la transformación.**