EXÁMEN 21 DE NOVIEMBRE DE 2001

Trace el diagrama polar de la siguiente función de transferencia y analice estabilidad mediante criterio de Nyquist. Aplique Routh-Hourwitz como comprobación.

$$\boxed{G_{(P)} \bullet H_{(P)} = \frac{10P + 100}{P^3 - 4P^2 - 8P}}$$

1) Determinar el origen de la curva, analizando $\mathbf{G_{(P)} \,.\, H_{(P)}}$ para $P \to 0$.

$$\boldsymbol{G_{(P)} \bullet H_{(P)}\Big|_{P\to 0} = \frac{-K_{TE}}{P}\Bigg|_{P\to 0} = |\infty| \cdot \underline{|+90°} = +j\infty}$$

2) Determinar el final de la curva, analizando $\mathbf{G_{(P)} \,.\, H_{(P)}}$ para $P \to \infty$.

$$\boldsymbol{G_{(P)} \bullet H_{(P)}\Big|_{P\to 0} = \frac{K_{TE}}{P^2}\Bigg|_{P\to \infty} = |0| \cdot \underline{|-180°}}$$

3) Realizar el cambio de $P \to j\omega$.

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} \Rightarrow G_{(j\omega)} \bullet H_{(j\omega)} = \frac{10j\omega + 100}{-j\omega^3 + 4\omega^2 - 8j\omega}$$

4) Separar $\mathbf{G_{(j\omega)} \,.\, H_{(j\omega)}}$ en parte real y parte imaginaria.

$$G_{(j\omega)} \bullet H_{(j\omega)} = \frac{320\omega^2 - 10\omega^4}{16\omega^4 + (8\omega + \omega^3)^2} + j\frac{800\omega + 140\omega^3}{16\omega^4 + (8\omega + \omega^3)^2}$$

5) Encontrar el valor de ω que hace cero la parte real.

$$\mathrm{Re}\Big|_{\omega} = 0 \therefore \frac{120\omega^2 - 10\omega^4}{16\omega^4 + (8\omega + \omega^3)^2} = 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} 0, \infty \\ \pm 5{,}6568542 \end{cases}$$

6) Reemplazar el valor positivo de ω que hace cero la parte real en la parte imaginaria, para determinar los cortes al eje imaginario.

$$\mathrm{Im}\Big|_{\omega=5,6568542} = \frac{800\omega + 140\omega^3}{16\omega^4 + (8\omega + \omega^3)^2}\Bigg|_{\omega=5,6568542} = +0{,}4419417$$

Corte al eje imaginario en + j 0,4419417

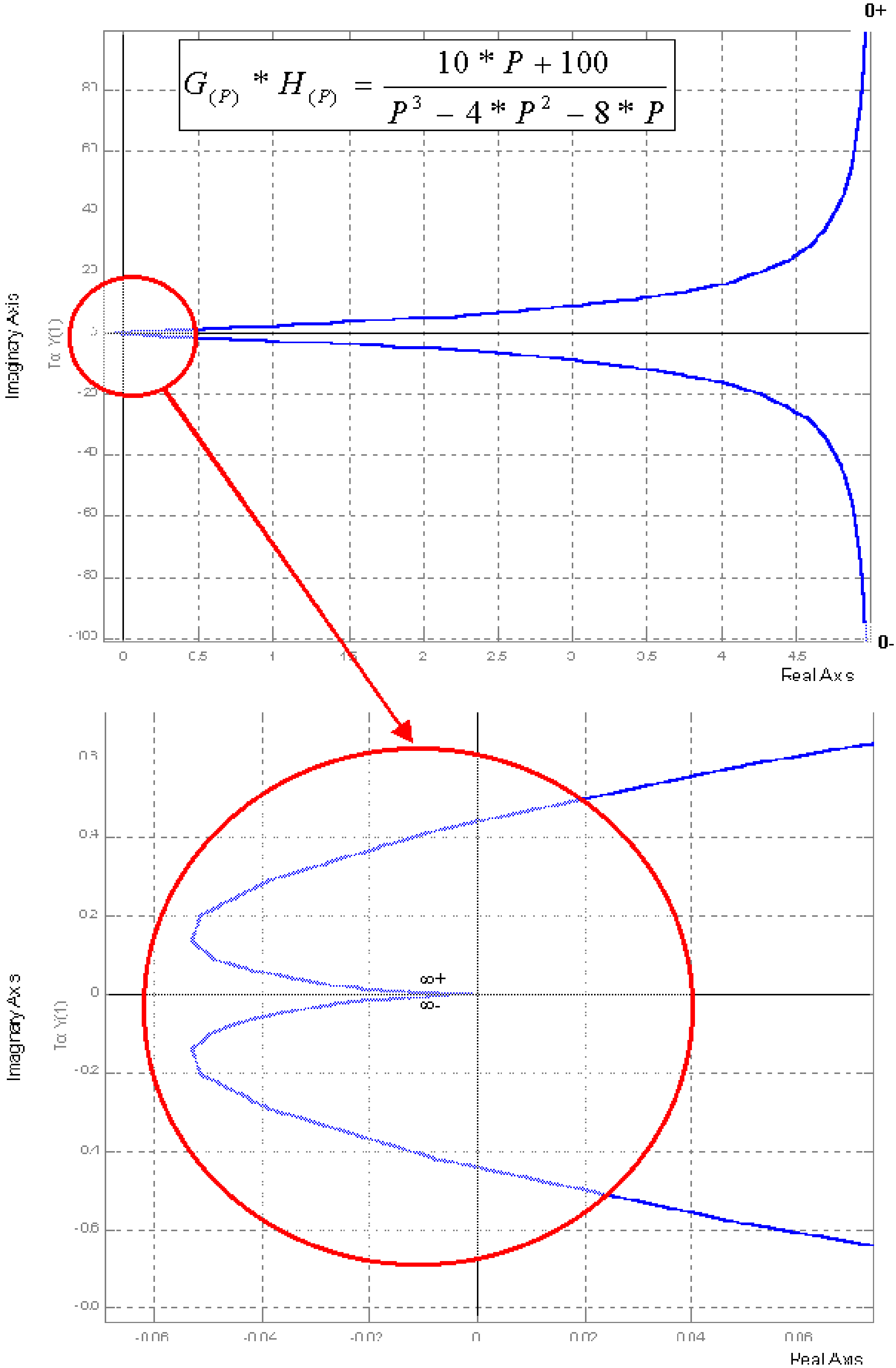
7) Encontrar el valor de ω que hace cero la parte imaginaria.

$$\mathrm{Im}\Big|_{\omega} = 0 \therefore \frac{800\omega + 140\omega^3}{16\omega^4 + (8\omega + \omega^3)^2} = 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} 0, \infty \\ \pm j5{,}71428 \end{cases}$$

No existe valor real de ω.

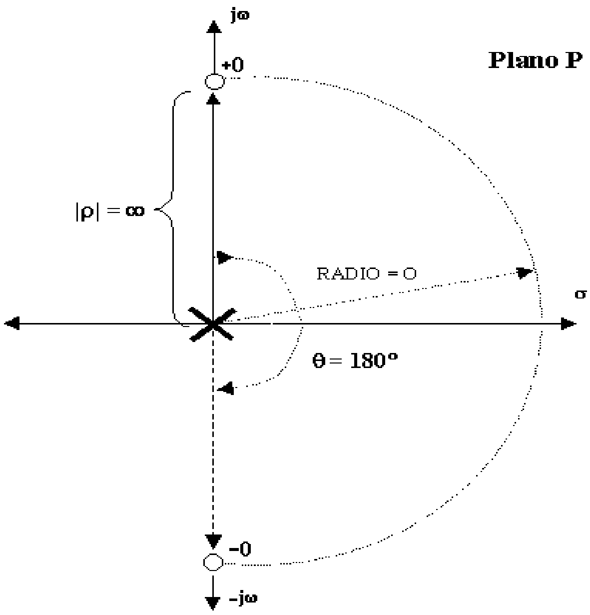
8) No se aplica por no existir valor real de ω que haga cero la parte imaginaria, salvo $\omega = 0$ y $\omega = \infty$.

9) Con los datos obtenidos en los pasos 1, 2, 6 y 8 trazar el diagrama polar.



10) Cerrar la curva para $P \rightarrow 0$.

Analizamos a continuación el plano P, para observar lo que sucede cuando se estudia un vector que corresponde a un polo en el origen y se desea hacer la rotación del mismo desde $\omega = +0$ a $\omega = -0$.



En la figura vemos que el vector **ρ** al pasar desde $\omega = +0$ a $\omega = -0$ en el plano P, describe una trayectoria cuyo ángulo es $\theta = 180°$. El ángulo φ que describe el vector correspondiente en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ por transformación conforme, estará dado por la expresión:

$$\boldsymbol{\varphi = (-)\ \text{Número de Polos} \times \theta =}$$

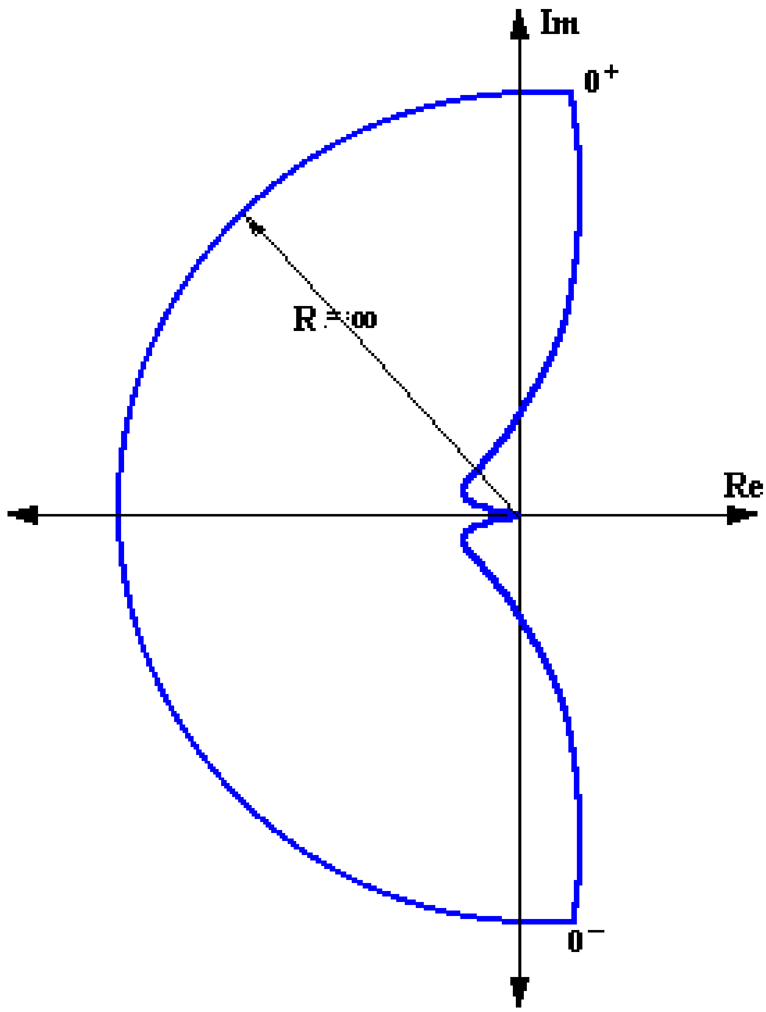
$$\boldsymbol{\varphi = (-)\ \text{Número de Polos} \times 180°}$$

para nuestro caso:

$$\boldsymbol{\varphi = (-)\ 1 * \theta = (-)\ 1 * 180° \quad \therefore \varphi = -180°}$$

El signo (-) aparece porque estamos analizando polos, y como los mismos están en el denominador, al calcular la fase aparece el signo negativo.

Por otra parte el signo (-), nos indica que si en el plano P el vector **ρ** describió una trayectoria que corta los ejes en un sentido, (En este caso particular sentido horario), el vector que describe el ángulo φ en el plano $G_{(P)}.H_{(P)}$ o $G_{(j\omega)}.H_{(j\omega)}$, debe hacerlo cortando los ejes en el sentido opuesto (Antihorario). En la siguiente figura se muestra el cierre del diagrama para $P \rightarrow 0$.



11) Análisis del diagrama obtenido y aplicación de criterio de Nyquist.
Examinando el diagrama completo de la función de transferencia, obtenemos un rodeo en sentido positivo por lo tanto aplicando el criterio de Nyquist tenemos:

$$\boxed{N = Z - P = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Sistema Inestable}}$$

12) Aplicar procedimiento de Routh-Hourwitz para comprobar los resultados de Nyquist.
Para ello calculamos $G_{(P)}.H_{(P)} + 1$.

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} + 1 = \frac{10P + 100}{P^3 - 4P^2 - 8P} + 1 =$$

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} + 1 = \frac{10P + 100 + P^3 - 4P^2 - 8P}{P^3 - 4P^2 - 8P} =$$

$$G_{(P)} \bullet H_{(P)} + 1 = \frac{P^3 - 4P^2 + 2P + 100}{P^3 - 4P^2 - 8P}$$

Aplicamos Routh-Hourwitz al Numerador :

P^3	**1**	**2**
P^2	**-4**	**100**
P^1	**27**	
P^0	**100**	

Existen dos cambios de signo , en la primera columna, por lo tanto, el polinomio del numerador tiene dos raices a parte real positiva.

RAICES NUM$_{G(P).H(P)+1}$ = 2

Aplicamos Routh-Hourwitz al Denominador :

P^2	**1**	**-8**
P^1	**-4**	
P^0	**-8**	

Existe un cambio de signo , en la primera columna, por lo tanto, el polinomio del denominador tiene una raiz a parte real positiva.

RAICES DEN$_{G(P).H(P)+1}$ = 1

De donde :

N =RAICES NUM $_{G(P).H(P)+1}$ - RAICES DEN $_{G(P).H(P)+1}$ = 2 – 1 = 1

Este resultado coincide con el obtenido mediante criterio de Nyquist.