Cuadriláteros cíclicos - La perspectiva general

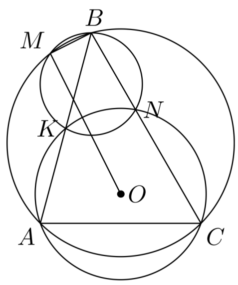
Yufei Zhao

Una habilidad importante de cualquier olímpico geométra es la capacidad de reconocer configuraciones notables.

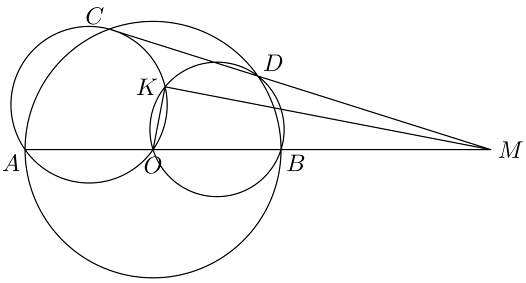
De hecho, muchos problemas de geometría son construídos basados en algunos temas comunes. En esta lectura, exploraremos una de estas configuraciones.

1. ¿Qué tienen en común estos problemas?

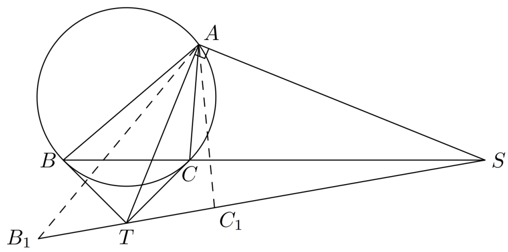
1. (IMO 1985) Un círculo con centro O pasa através de los vértices A y C del triángulo ABC e interseca a los segmentos AB y BC en los puntos K y N, respectivamente. Los circuncírculos de los triángulos ABC y KBN se intersecan exactamente en dos puntos distintos B y M. Probar que $\angle OMB = 90°$



2. (Rusia 1995; TST de Rumania 1996; Iran 1997) Sea un círculo de diámetro AB y centro O, y sean C y D dos puntos de este círculo. La línea CD interseca a la línea AB en el punto M satisfaciendo $MB < MA$ y $MD < MC$. Sea K el punto de intersección (distinto de O) de los circuncírculos de los triángulos AOC y DOB. Demuestra que $\angle MKO = 90°$



3. (USA TST 2007) El triángulo ABC está inscrito en el círculo ω. Las líneas tangentes a ω en B y C se intersecan en el punto T. El punto S se encuentra en el rayo BC tal que $AS \perp AT$. Los puntos B_1 y C_1 están en el rayo ST (C_1 está entre B_1 y S) Tal que $B_1T = BT = C_1T$. Probar que los triángulos ABC y AB_1C_1 son proporcionales entre sí. Aunque estas configuraciones geométricas parecen muy diferentes a



primera vista, en realidad están muy relacionadas. De hecho, son solo pedazitos de un gran diagrama!

2. Un Gran Diagrama

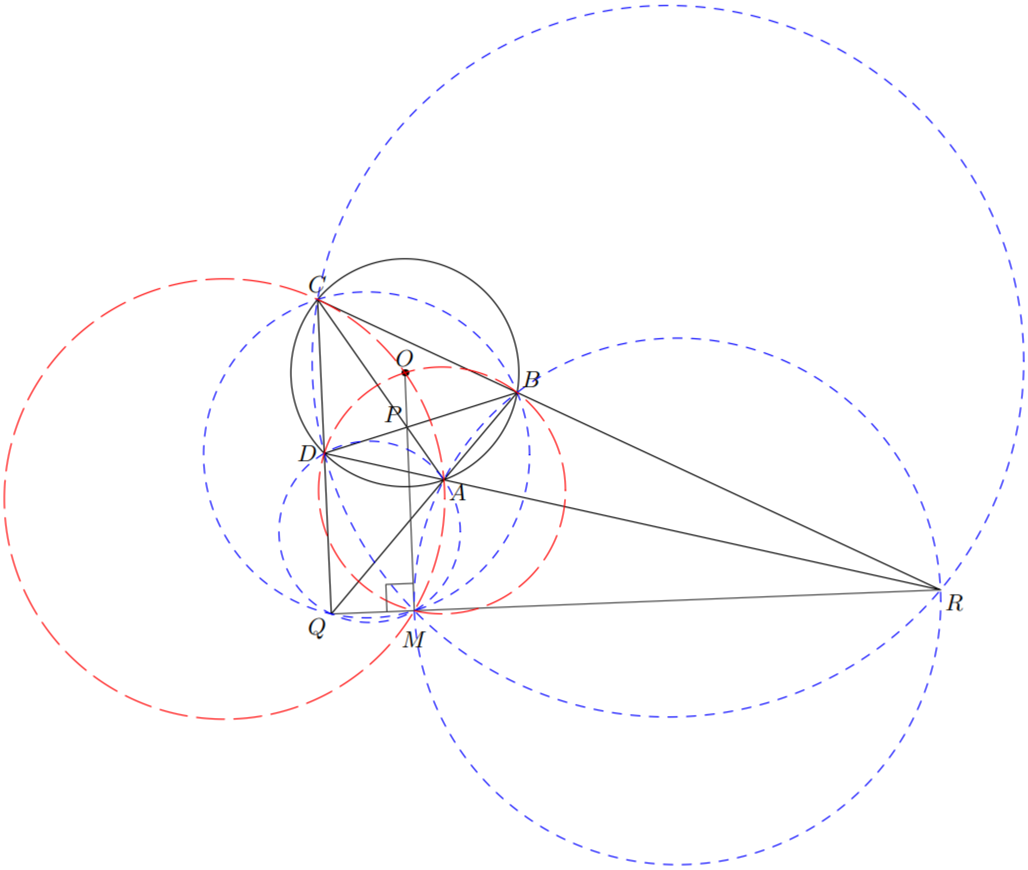


Figura 1: La perspectiva general

En esta lección, trataremos de entender las propiedades de la Figura 1. Hay muchas cosas ocurriendo en este diágrama y al verlo puede ser aterrador, pero no te preocupes, lo superaremos paso a paso. En el proceso, discutiremos algunas técnicas geométricas que también son útiles en otros lugares. (¿Puedes decir dónde podemos encontrar cada uno de los problemas de la Sección 1 en la Figura 1? Probablemente no puedas hacerlo ahora mismo, pero ojala seas capaz al final de esta clase)

3. Teoeorema de Miquel y el punto de Miquel

Hecho 1. (El teorema de Miquel) Sea ABC un triangulo, y sean X, Y, Z puntos en las líneas BC, CA, AB, respectivamente. Asume que los seis puntos A, B, C, X, Y, Z son todos distintos. Luego, los circuncírculos de AYZ, BZX, CXY pasan a través de un punto en común.

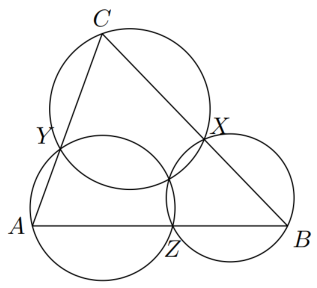


Figura 2: Diagrama para el Hecho (Teorema de Miquel)

Ejercicio 1. Probar el punto 1.(Es muy fácil solo busca[1] a algunos ángulos)

Hecho 2 (Punto de Miquel) Sean $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ cuatro líneas en el plano, donde ninguna es paralela entre sí. Utilicemos C_{ijk} para denotar el circuncírculo de los triángulos formados por las líneas ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k (Estos círculos son llamados círculos de Miquel). Luego $C_{123}, C_{124}, C_{134}, C_{234}$ pasan a través de un punto en común (llamado el Punto de Miquel)

Ejercicio 2. Probar el punto 2 (Pista: Aplicar el teorema 1)

Queremos enfocarnos en el caso de cuadrilátero cíclico. **Hecho 3.** Sea

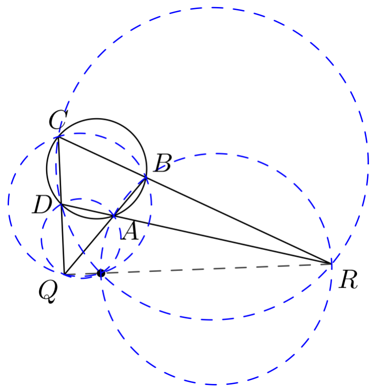


Figura 3: Punto de Miquel para el cuadrilátero cíclico $ABCD$

$ABCD$ un cuadrilátero. Las rectas AB y CD chocan en Q, y las rectas DA

[1] Si te molestan los problemas de configuración y orientación (Y debería!), usa ángulos dirigidos

y CB chocan en R. Luego el punto de Miquel de $ABCD$ (i.e El segundo punto de intersección de ADQ y ABR) está en la recta QR si y solo si $ABCD$ es cíclico.

Ejercicio 3. Probar el Hecho 3 (Esto de nuevo es una fácil persecución de ángulos)