7. Inversión y polaridad

En esta sección asumiremos conocimiento previo de inversión, también de polos y polares. Aquí hay un repaso rápido.
Sea C un círculo, con centro O y radio r. La inversión con respecto a C es una transformación (De hecho, una involución) que envía un punto P $(\neq O)$ a un punto P' en un rayo OP tal que $OP \cdot OP' = r^2$.
Las inversiones "cambian líneas y círculos." Especificamente, una línea que pasa por el punto O es envíada a sí misma; una línea que no pasa por O es envíada a un círculo a través de O; un círculo que pasa por O es envíado a una línea que no pasa por O; Un círculo que no pasa por O es enviíado a (Posible diferente) un círculo que no pasa por O.
Supongamos que $P(\neq O)$ es un punto, y ℓ es una línea pasando a través de la inversa de P y también perpendicular a OP, y que P es el polo de ℓ. Los mapas polares satisfacen el principio de dualidad. Por ejemplo, P se encuentra en el polar de Q si y solo si Q se encuentra en el polar de P; ℓ_1 pasa a través del polo de ℓ_2 si y solo si ℓ_2 pasa a través del polo de ℓ_1; tres polos son colineales si y solo si los tres polares correspondientes son concurrentes.

Regresemos a la configuración.

Hecho 12. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cílico con circuncentro O. Sea P el punto de encuentro entre AC y BD, las líneas AB y CD se encuentran en Q, y las líneas DA y CB se encuentran en R. Sea M el punto de Miquel de $ABCD$. Entonces P es el inverso de M con respecto al circuncírculo de $ABCD$.
Prueba. Dado que P es la intersección de AC y BD, bajo la inversión, debe estar asignado a la intersección (Distinto a O) de los círculos OAC y OBD, que es M (Hecho 10) □
Notemos que esto da otra prueba al Hecho 11, que dice que O, P, M son colineales.
Hecho 13. La línea QR es el polar del punto P.
Prueba. Esto sigue del Hecho 8 y Hecho 13.
Dado un círculo C, decimos que un triángulo es autopolar si cada lado es el polar del vertice opuesto. Ahora seremos capaces de probar un resultado extremadamente útil en geometría proyectiva[3].

[3] Por lo que valga, aquí hay un bosquejo muy rápido de la prueba del Hecho 14 usando geometría proyectiva: Sea un línea RP que interseca a AB y a BC en E y F, respectivamente. Al aplicar perspectivas desde P y R, encontramos que $(A, B; E, Q) = (C, D; F, Q) = (B, A; F, Q)$, de donde sale que $(A, B; E, Q)$ y $(C, D; F, Q)$ son ambos armónicos. Luego EF es es polar de Q, y por lo tanto PR es el polar de Q. Paralelamente podemos mostrar que QR es el polar de P, y PQ es el polar de Q. Por lo tanto PQR es autopolar.

Hecho 14 (Muy Útil). El triángulo PQR es autopolar con respecto al circuncírculo de $ABCD$

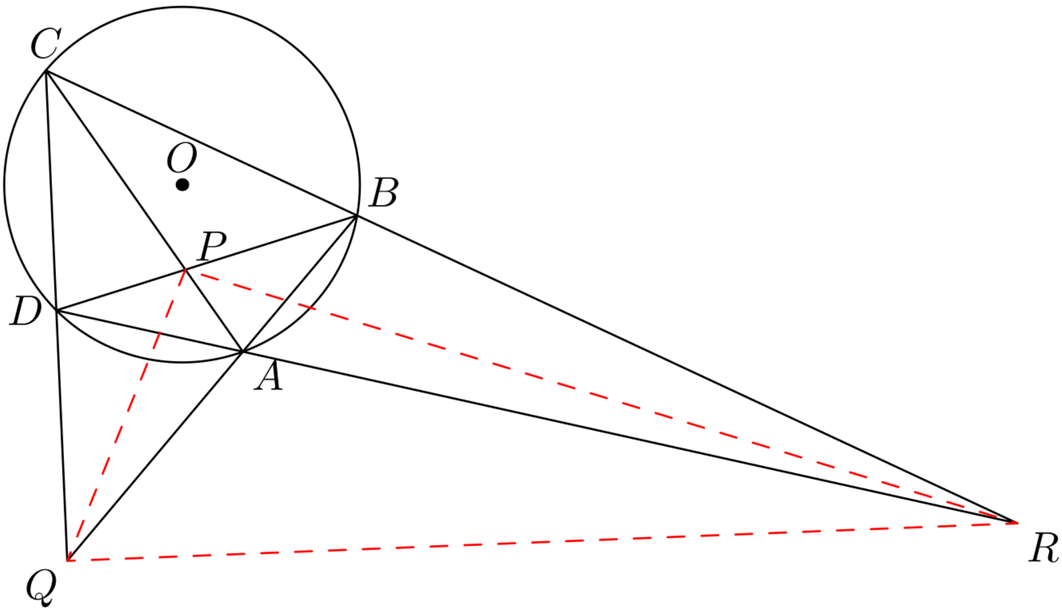

Figura 9: PQR es autopolar.

Prueba. No hay nada en las pruebas que requiera que tengamos A, B, C, D en ese orden en el círculo. Al permutar las re-etiquetas de A, B, C, D podemos podemos deducir del Hecho 13 que PR es el polar de Q, y PQ es el polar de R. Esto nos da el resultado deseado.
□

Hecho 15. O es el ortocentro de PQR.

Prueba Esto sale inmediatamente del Hecho 14, Dado que $OX \perp \ell$ para cualquier par polo-polar (X, ℓ). □