5. Un criterio para la ortogonalidad

En esta sección, daremos otra prueba del hecho 8 e introduciremos un criterio computacional muy útil para la ortogonalidad.

Hecho 9 (Muy Útil). Sean A, B, C, D puntos en el plano. Asuma que $A \neq B$ y $C \neq D$. Luego las líneas AB y CD son perpendiculares si y solo si $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Prueba. El resultado sale inmediatamente de la siguiente identidad.

$(\vec{A}-\vec{C})\cdot(\vec{A}-\vec{C})+(\vec{B}-\vec{D})\cdot(\vec{B}-\vec{D})-(\vec{A}-\vec{D})\cdot(\vec{A}-\vec{D})-(\vec{B}-\vec{C})\cdot(\vec{B}-\vec{C}) = 2(\vec{B}-\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{D})$
Note que el lado izquierdo de la ecuación es cero si y solo si $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ y el lado derecho de la ecuación es cero si y solo si $AB \perp CD$ □.

Otra prueba del *Hecho* 8. Sea r el circunradio de $ABCD$. Usando Potencia de un Punto en los circuncírculos de $ABCD$ y $ABRM$, tenemos

$$QO^2 - r^2 = QA \cdot QB = QM \cdot QR = QM \cdot MR + QM^2$$

(La estrategia aquí es transferir todos los datos a la línea QR). Del mismo modo, tenemos

$$RO^2 - r^2 = RA \cdot RD = RM \cdot RQ = QM \cdot MR + RM^2$$

Restando las dos relaciones tenemos que

$$QO^2 - RO^2 = QM^2 - RM^2,$$

Y por el Hecho 9 sigue que OM es perpendicular a QR.
□