4. Un Resultado Importante de Semejanzas Espirales

Una semejanza espiral[2] sobre un punto O (Conocido como el centro de una semejanza espiral) es una composición de una rotación y una dilatación, ambos centrados en O.

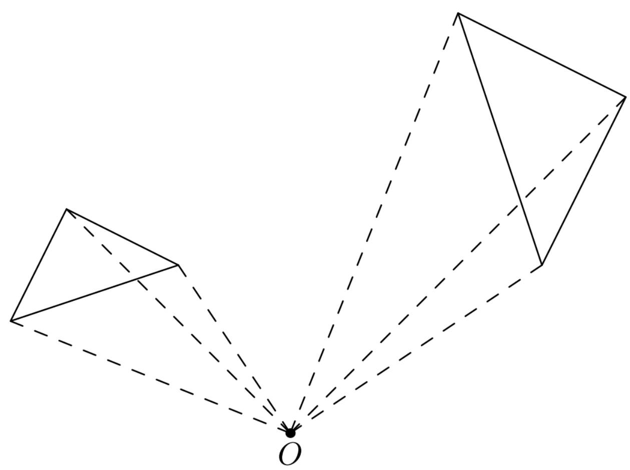

Figura 4: Ejemplo de semejanza espiral

Por ejemplo, en el plano complejo, si $O = 0$, entonces semejanzas espirales son descritas por la multiplicación de un número complejo distinto a cero. Esto es, que las espirales semejantes tienen la forma $z \mapsto \alpha z$, donde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Aquí $|\alpha|$ es el factor de dilatación, y $\arg \alpha$ es el ángulo de rotación. Es fácil deducir de aquí que si el centro de la semejanza espiral es otro punto, digamos z_0, entonces la transformación es dada por $z \mapsto z_0+\alpha(z-z_0)$ (¿Por qué?)

Hecho 4. Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos en el plano, tal que $ABCD$ no es un paralelogramo. Entonces existe una única semejanza espiral que envía A a B, y C a D.

Prueba. Sean a, b, c, d los números complejos correspondientes a los puntos A, B, C, D. Sabemos que una semjanza espiral tiene la forma de $\mathrm{T}(z) = z_0 + \alpha(z + z_0)$, donde z_0 es el centro de la semejanza espiral, y α es información acerca de la rotación y dilatación. Así que nos gustaría encontrar α y z_0 tal que $\mathrm{T}(a) = c$ y $\mathrm{T}(b) = d$. Esto llevaría a resolver el sistema

$$z_0 + \alpha(a - z_0) = c, \qquad z_0 + \alpha(b - z_0) = d$$

[2]Si quieres impresionar a tus amigos con tu vocabulario matemático, una semejanza espiral a veces se llama *similitud* y una dilatación a veces se llama *homotecia*. (En realidad, no son exactamente la misma cosa, pero shhh!)

Resolviendo, vemos que la única solución es

$\alpha = \frac{c-d}{a-b}$, $z_0 = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$ Como $ABCD$ no es un paralelogramo, vemos que $a - b - c + d \neq 0$, así que está es la única solución al sistema. Por lo tanto existe una única semejanza espiral que enviía A a B y C a D. □

Ejercicio 4.¿Cómo podemos determinar rápidamente el valor α en la prueba de arriba sin siquiera necesitar escribir el sistema de ecuaciones?

Ejercicio 5. Da un argumento geométrico de por qué la semejanza espiral, si existe, debe ser única. (Pista: Supón que T_1 y T_2 son dos de las tales semejanzas espirales, entonces ¿Qué podemos decir de $\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2^{-1}$

Ahora llegamos al resultado clave de esta sección. Nos da una muy simple y útil descripción del centro de una semejanza espiral. Puede ser muy útil encontrar semejanzas espirales muy sutiles escondidas en un problema de geometría. Recuerda esto!

(Muy útil) Hecho 5. Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos en el plano, tal que AC no es paralelo a BD. Las líneas AC y BD se encuentran en X. Sea O el punto de intersección distinto a X de los circuncírculos de ABX y CDX. Entonces O es el centro de una única semejanza espiral que envía A a C y B a D.

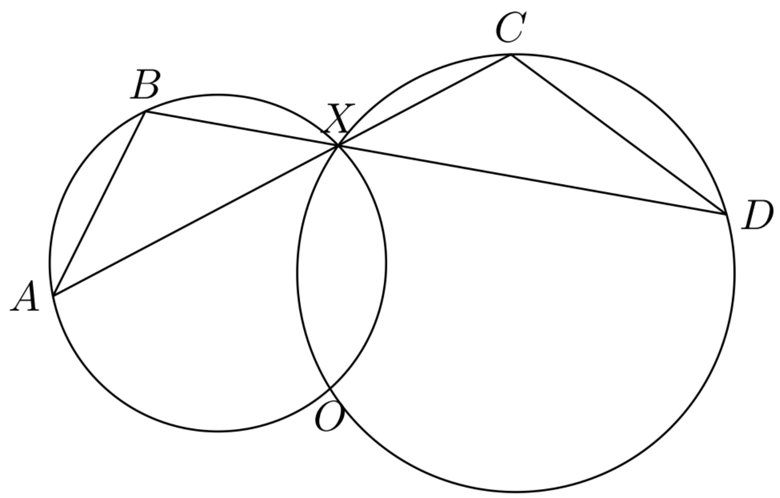

Figura 5: Diagrama del Hecho 5.

Prueba. Damos una prueba solo para la configuración que está arriba. Como $ABXO$ y $CDOX$ son cíclicos, tenemos que $\angle OBD = \angle OAC$ y $\angle OCA = \angle ODB$. Luego sigue que los triángulos AOC y BOD son semejantes. Por lo tanto, la semejanza espiral con centro en O que envía A a C también debe envíar B a D.

Ejercicio 6. Reescribe la prueba de arriba usando ángulos dirigidos módulo π tal que que funcione para todas las configuraciones.

Finalmente, vale la pena mencionar que las semejanzas espirales frecuentemente vienen en pares. Si podemos envíar AB a CD, entonces también facilmente podemos envíar AC a BD.

Hecho 6. Si O es el centro de una semejanza espiral que envía A a C y B a D, entonces O es también centro de la semejanza espiral que envía A a B y C a D.

Prueba. Como la semejanza espiral mantiene los mismo ángulos en O, tenemos $\angle AOB = \angle COD$. También la razón de la dilatación de la primera semejanza espiral es $OC/OA = OD/OB$. Así que la rotación con un ángulo $\angle AOB = \angle COD$ y la dilatación con razón $OB/OA = OD/OC$ envía A a B, y C a D, como queríamos. $\square$

Ejercicio 7. Dedude el Hecho 6 utilizando el Hecho 2 y 5.

Ahora, aplicaremos estos resultados para nuestra configuración de la sección 2.

Hecho 7. Sea M el punto de Miquel del cuadriláter $ABCD$. Luego M es el centro de la semejanza espiral que envía a AB a CD, como también el centro de la semejanza espiral que envía a AD a BC

Ejercicio 8 Probar el Hecho 7.

Vamos a enfocarnos en cuadriláteros cíclicos y continuar la configuración del Hecho 3.

Hecho 8. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncentro O. Las líneas AB y CD se chocan en en Q, y las líneas DA y CB se chocan en R. Sea M el punto de Miquel de $ABCD$ (Que está en la línea QR, por el Hecho 3). Entonces OM es perpendicular a QR.

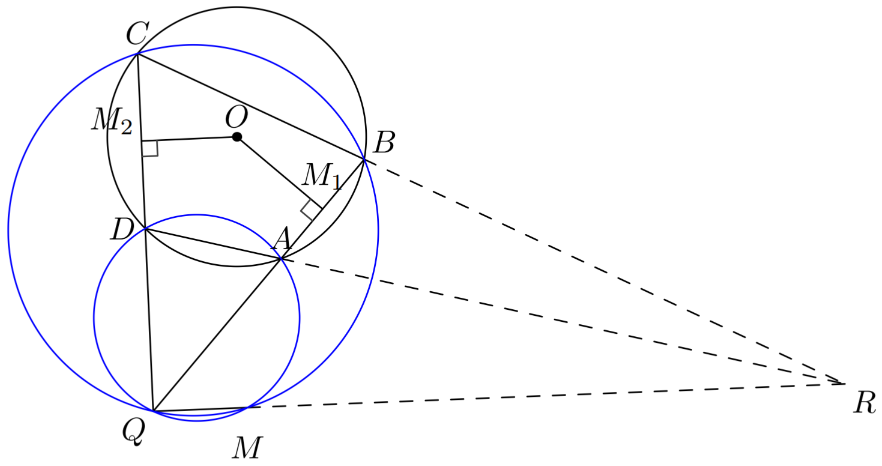

Figura 6: Diagrama para prueba del Hecho 8

Prueba. Utilicemos T para denotar la semejanza espiral centrada en M que envía a A a D y a B a C (Hecho 7). Sean M_1 y M_2 loes puntos medios de AB y DC respectivamente. Luego T debe envíar a M_1 a M_2. Así que M es el centro de la única semejanza espiral que envía a A a M_1 y D a M_2 (Hecho 6), y por lo tanto $M, M_1, M2, Q$ son concíclicos (Hecho 5). Como M_1 y M_2 son los puntos medios de las cuerdas AB y DC, tenemos $\angle OM_2Q = \angle OM_1Q$, y por lo tanto O, M_1, M_2, Q son concíclicos y OQ es el diametro del círculo en común. Luego O, M, M_1, M_2, Q están en el círculo con diametro OQ. En particular, $\angle OMQ = 90°$, como queríamos. □