

QUARTA AVALIAÇÃO

---

# Mapa Logístico e Caos

---

FÍSICA COMPUTACIONAL

Aluno

Marcos Paulo Gomes De Castro

Professor

Nuno Crokidakis



Universidade Federal Fluminense

22 de Junho de 2017

# Introdução

Um Mapa Logístico é uma aplicação matemática que associa um valor  $x_n$  com outro  $x_{n+1}$ , tal objeto foi citado inicialmente em um artigo sobre comportamento caótico em equações não lineares, tendo sua popularização em 1976 em um artigo de Robert May sobre comportamento demográfico. Oriundo da equações de Pierre François Verhulst:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \quad (1)$$

aqui trataremos  $K = 1$ , tal que este assim obtemos o seguinte polinômio de segundo grau:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad (2)$$

Este moodelo aparentemente simples é muito rico, nele podemos obter informações importantes no estudo do comportamento caótico. Os pontos em que o mapa se aproxima do seu valor previsto são ditos atratores, os quais podemos calcular para um dado domínio, haja visto o comportamento caótico do mapa (1) temos valores de  $x^*$  para os quais os pontos são diversos e outros métodos algébricos são utilizados:

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad x^* = 0 \quad (3)$$

$$1 < \lambda \leq 3, \quad x^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad (4)$$

$$3 < \lambda \leq 4, \quad x^* = x_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\lambda > 4, \quad x^* = \text{indefinido} \quad (6)$$

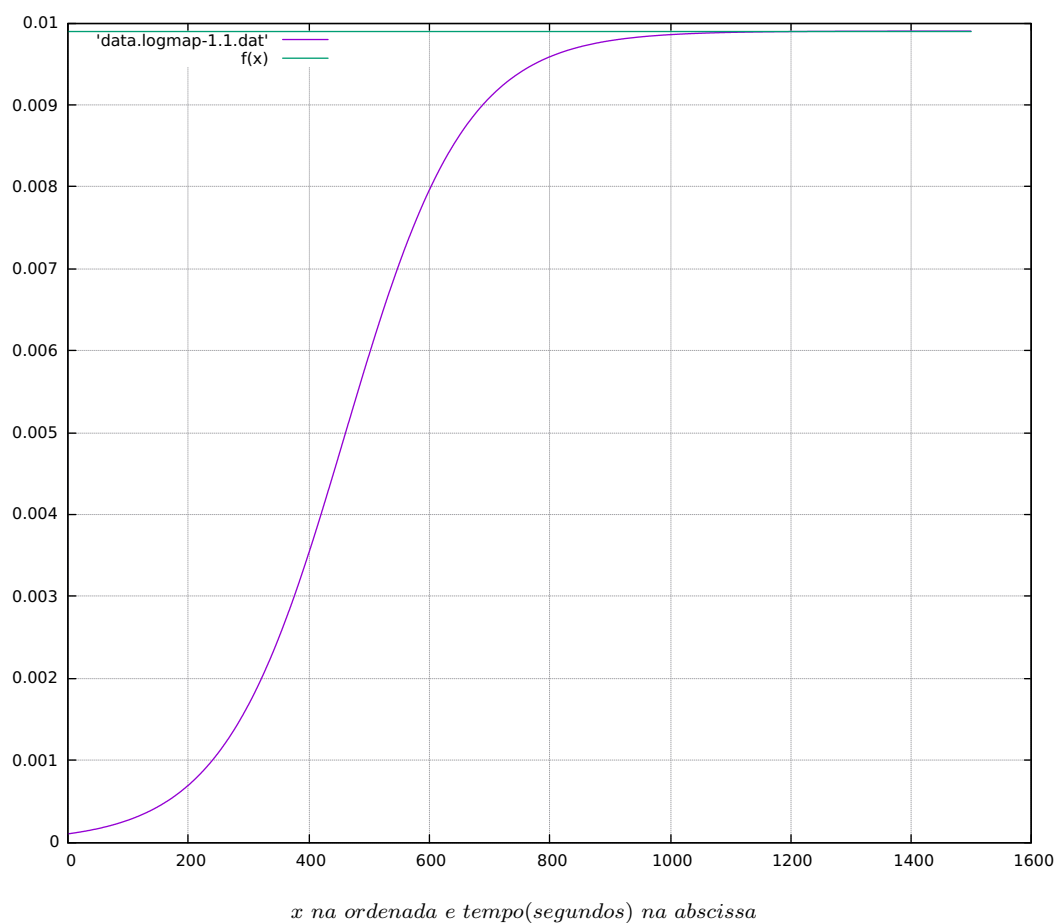
Nos itens seguintes faremos uma análise deste mapa para diferentes valores de  $\lambda$ .

## 1 Análise de Convergência

Dado o mapa (2) podemos iterar o mesmo fazendo uso de um recurso computacional, como um programa em C no caso deste trabalho, para isso iremos obter uma coluna com valores de  $x_n$  e outra para passos de tempo, onde cada iteração representa 1 *segundo*. Ao plotar estes valores em um plano cartesiano, depositando o tempo sobre a abscissa e os valores de  $x_n$  sobre a ordenada obtemos uma curva onde podemos observar a convergência para o valor calculado vide a relação (4).

No gráfico (1) temos  $\lambda = 1.01$ , para este teremos um valor esperado de  $x^* = 0.00990$ , nele podemos ver que o mapa atinge a convergência em torno de 25 *min*.

**Gráfico 1:** Convergência do Mapa Logístico para  $\lambda = 1.01$ .

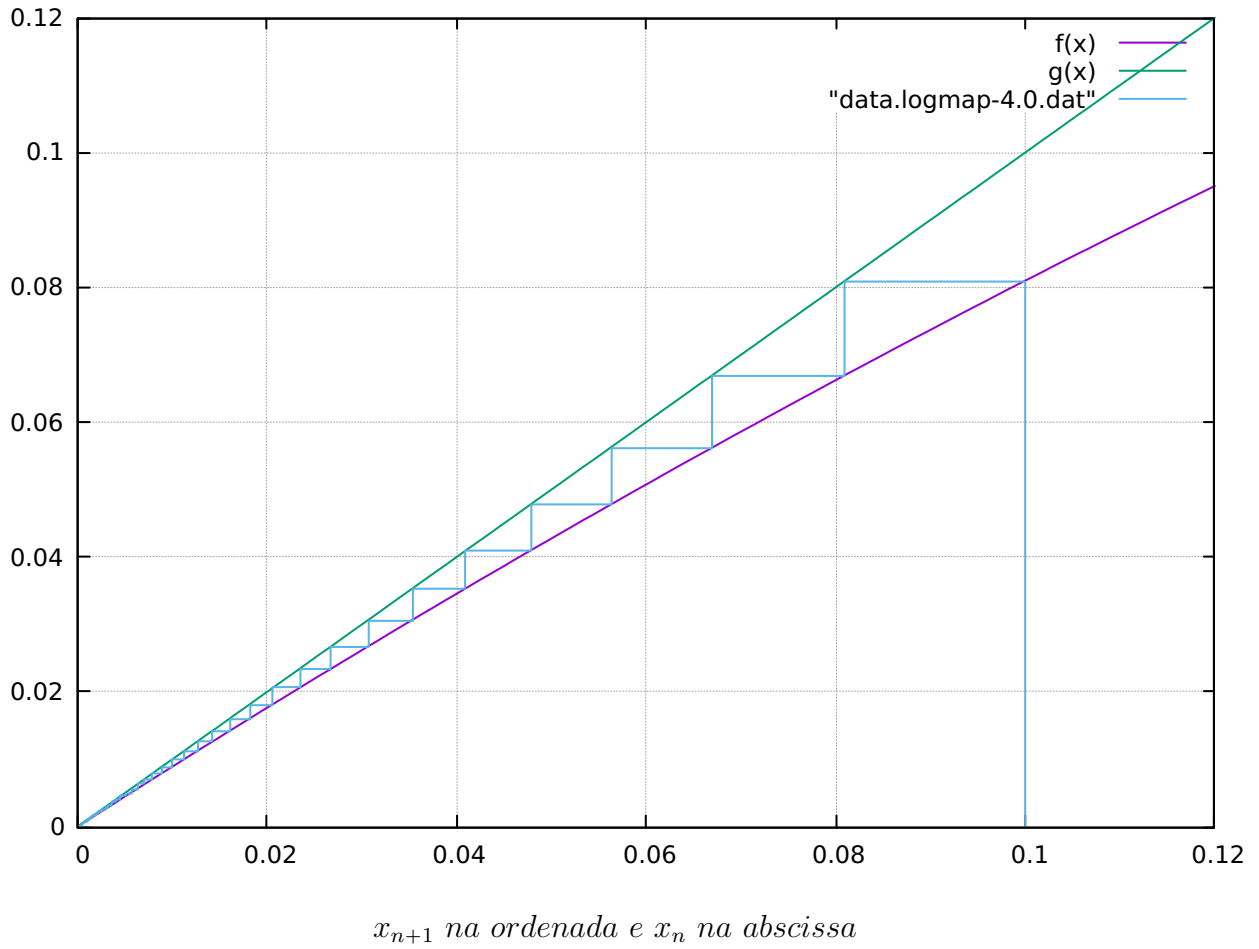


## 2 Diagramas e Atratores

Para valores de  $\lambda \geq 1.00$  temos valores de  $x_n \geq 0$ , com isso podemos plotar um diagrama de  $x_{n+1}$  por  $x_n$  sobre a reta  $x_{n+1} = x_n$  e a parábola  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$  e obter diagramas escada para analisar os pontos atratores. Para valores de  $1 \leq \lambda \leq 3$  temos pontos simples, onde o mapa logístico converge e atinge os valores esperados pela relação (4).

## 2.1 Atrator em $\lambda = 0.90, x^* = 0$

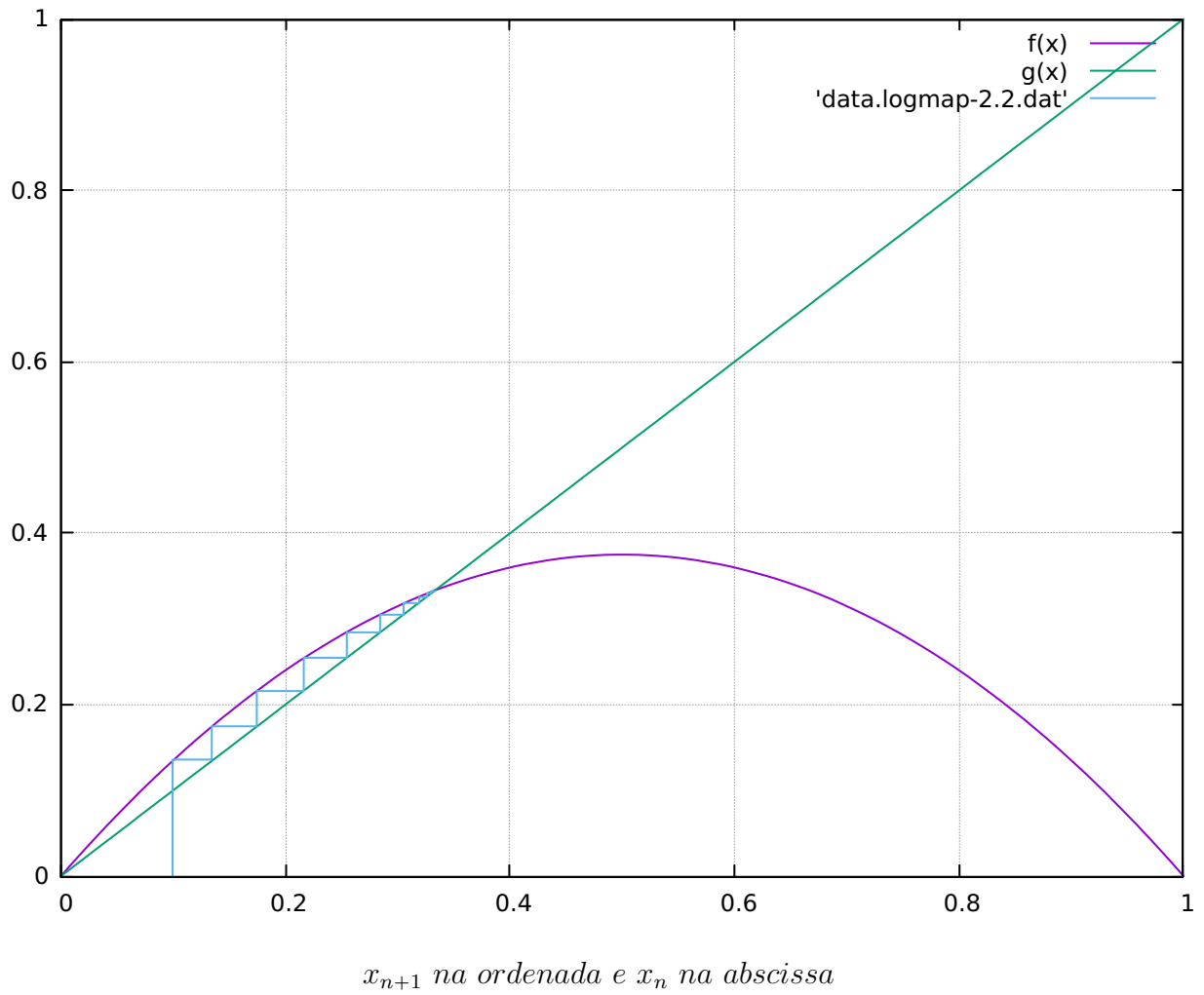
Gráfico 2: Mapa Escada  $\lambda = 0.90$ .



A oscilação se torna mais excentrica, surgindo maior número de pontos atratores.

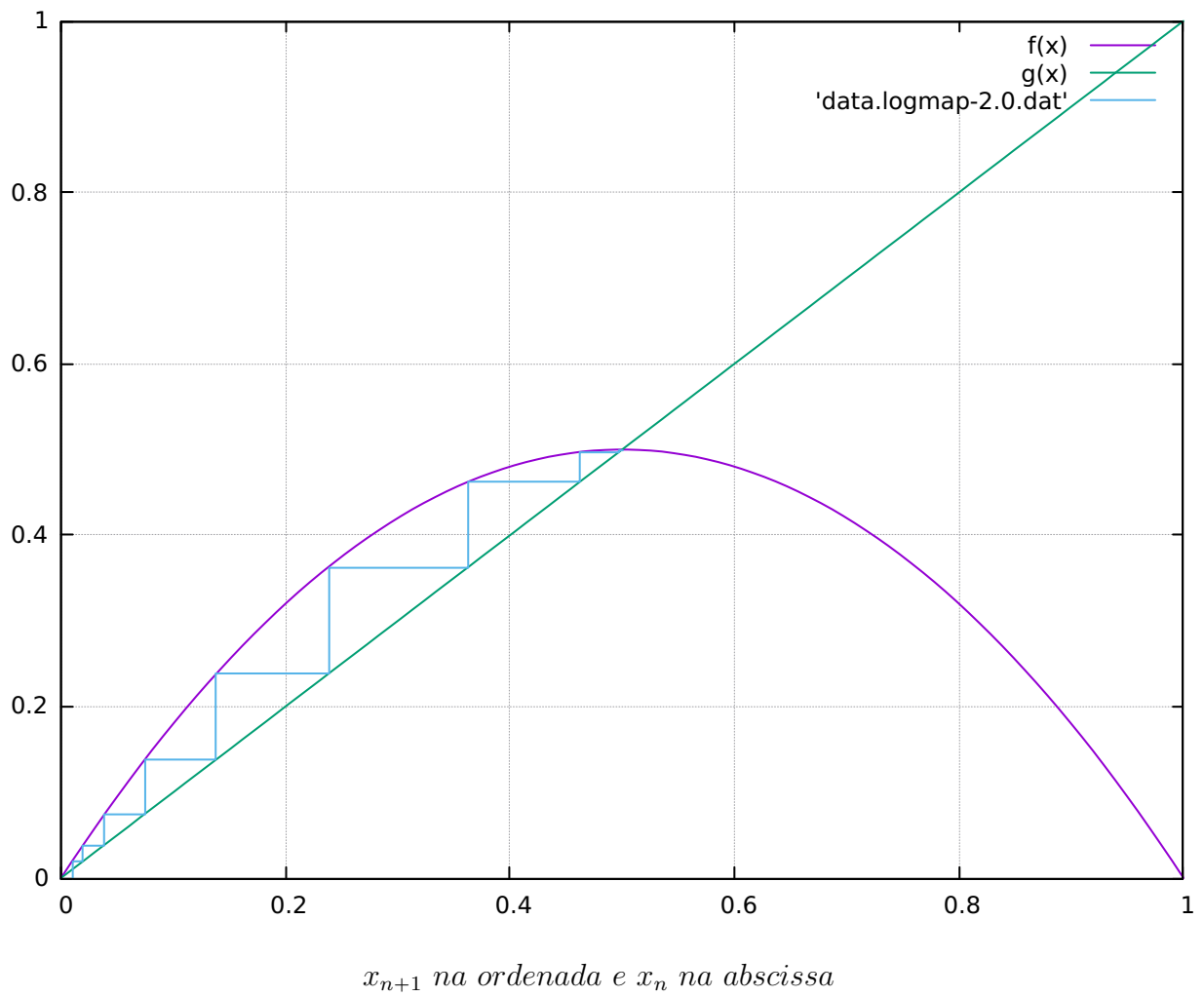
## 2.2 Atrator em $\lambda = 1.50, x^* = 0.33$

Gráfico 3: Mapa Escada  $\lambda = 1.50$ .



### 2.3 Atrator em $\lambda = 2.00$ , $x^* = 0.50$

Gráfico 4: Mapa Escada  $\lambda = 2.00$ .



### 3 Valores Excentricos de $\lambda$

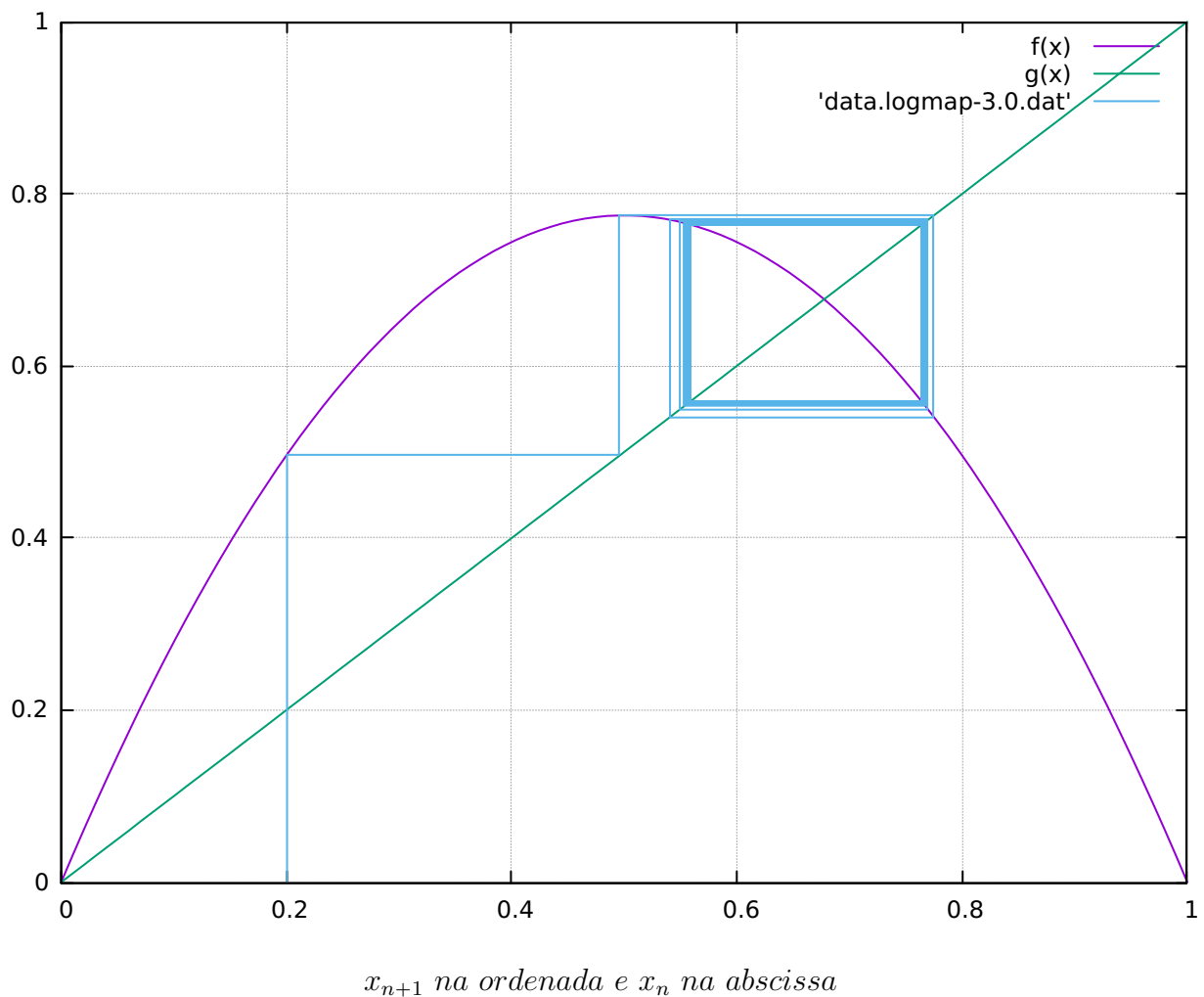
Para valores de  $3 \leq \lambda \leq 4$  temos um comportamento caótico, surgem outros pontos atratores, e temos de fazer uso de recursos algébricos específicos para determinar analiticamente os seus respectivos valores.

O mapa parece convergir para diferentes pontos ao mesmo tempo, em observar a massa de dados obtido pela iteração de (2) podemos ver que os pontos se tornam periódicos, logo no lugar de uma convergência clara o mapa se estabiliza em um equilíbrio dinâmico, tendo como pontos atratores os valores tangentes as retas normais.

#### 3.1 Diagrama para $\lambda = 3.10$

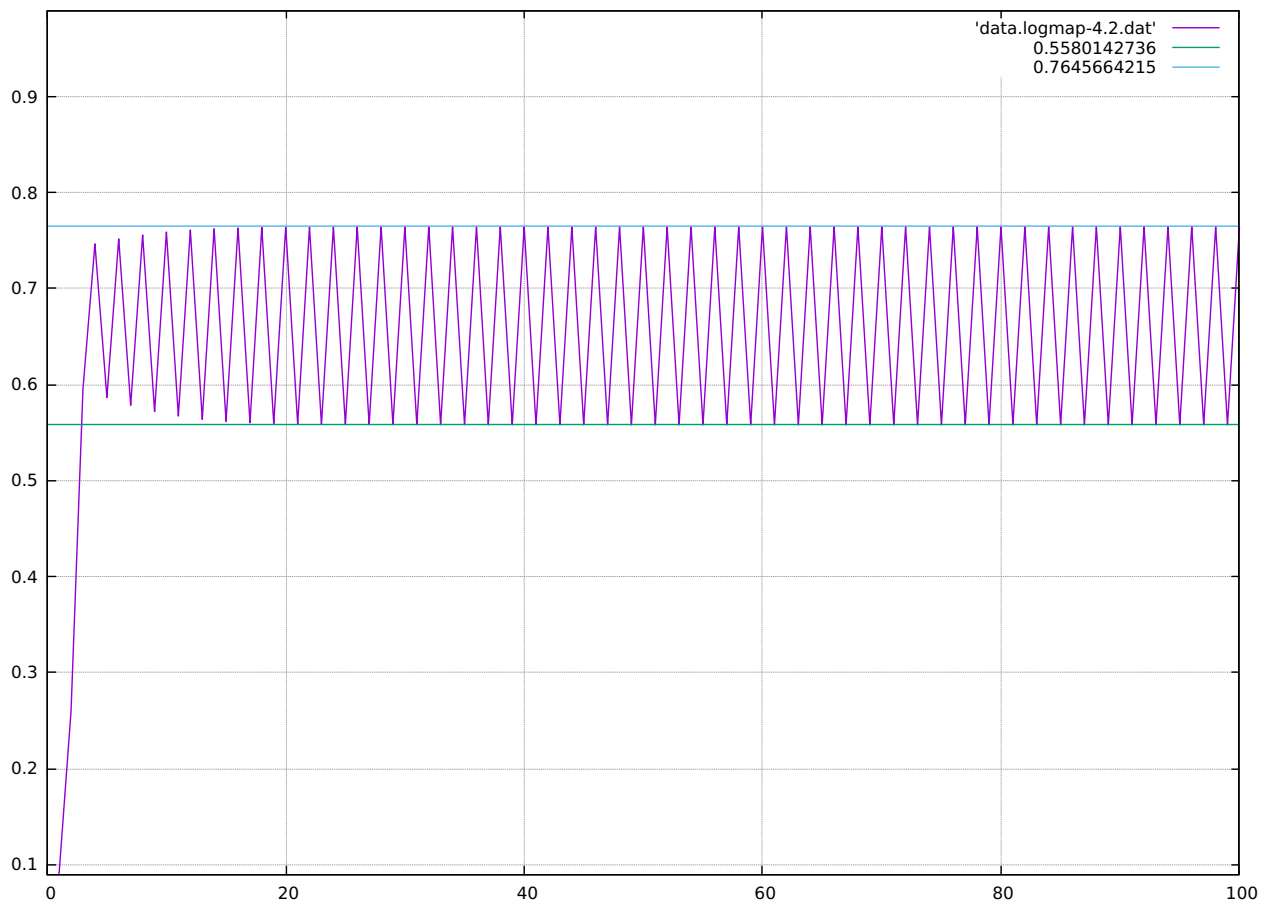
Aqui podemos ver o diagrama escada para um dado valor de  $\lambda$ , onde seus pontos formam uma figura regular seccionando pontos diversos na reta  $x' = x$ . Este plot não é suficiente para definir os pontos onde o mapa adquire equilíbrio dinâmico.

**Gráfico 5:** Mapa Escada  $\lambda = 3.10$ .



Ao plotar os pontos de  $x^*$  em função de um tempo, dado que cada passo equivale a 1 *segundo*, obtemos a seguinte relação:

**Gráfico 6:** Convergência do Mapa Logístico para  $\lambda = 3.10$ .



$x^*$  na ordenada e  $x_n$  na abscissa

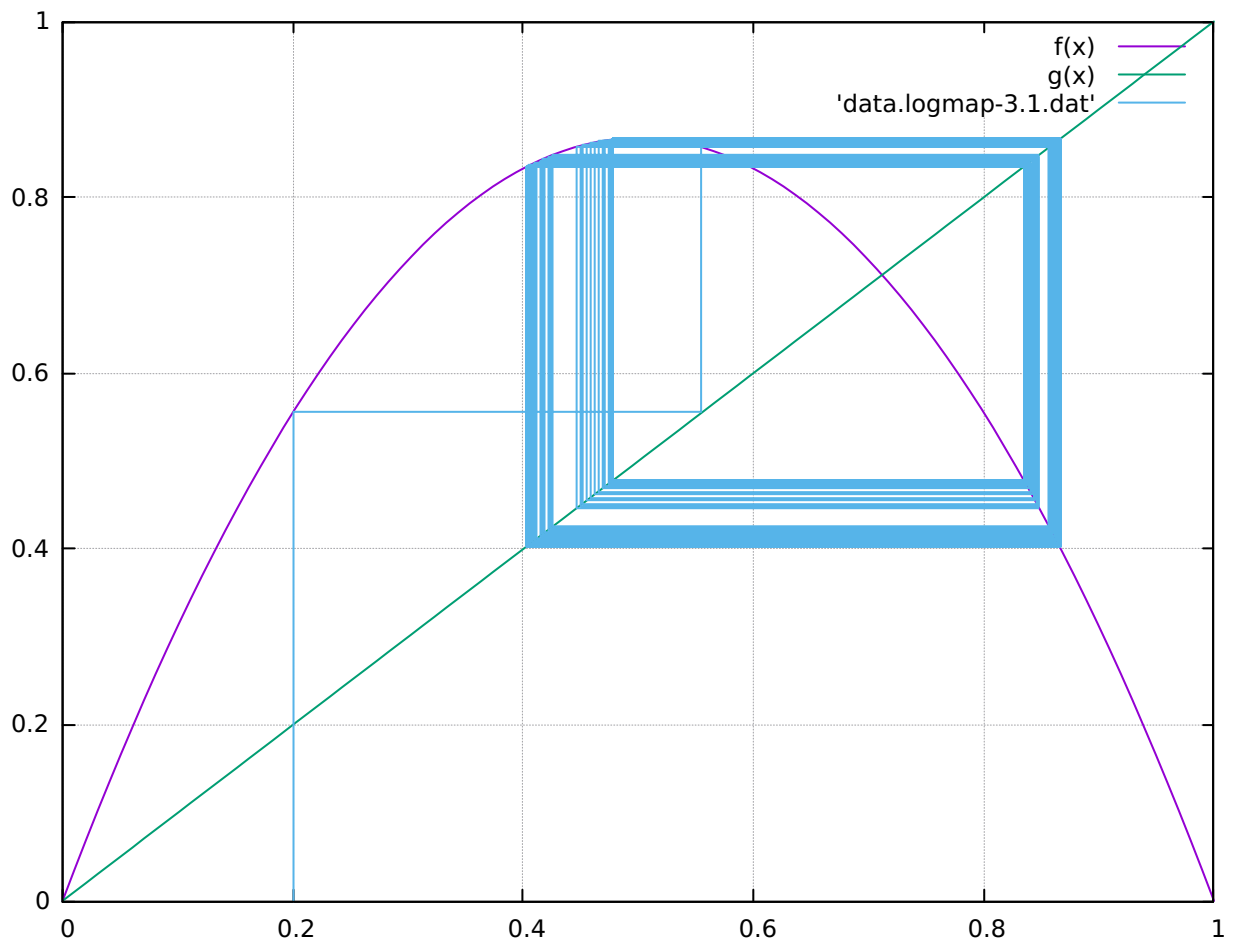
Aqui vemos apenas dois pontos, mas já podemos observar como o mapa oscila.



### 3.2 Diagrama para $\lambda = 3.47$

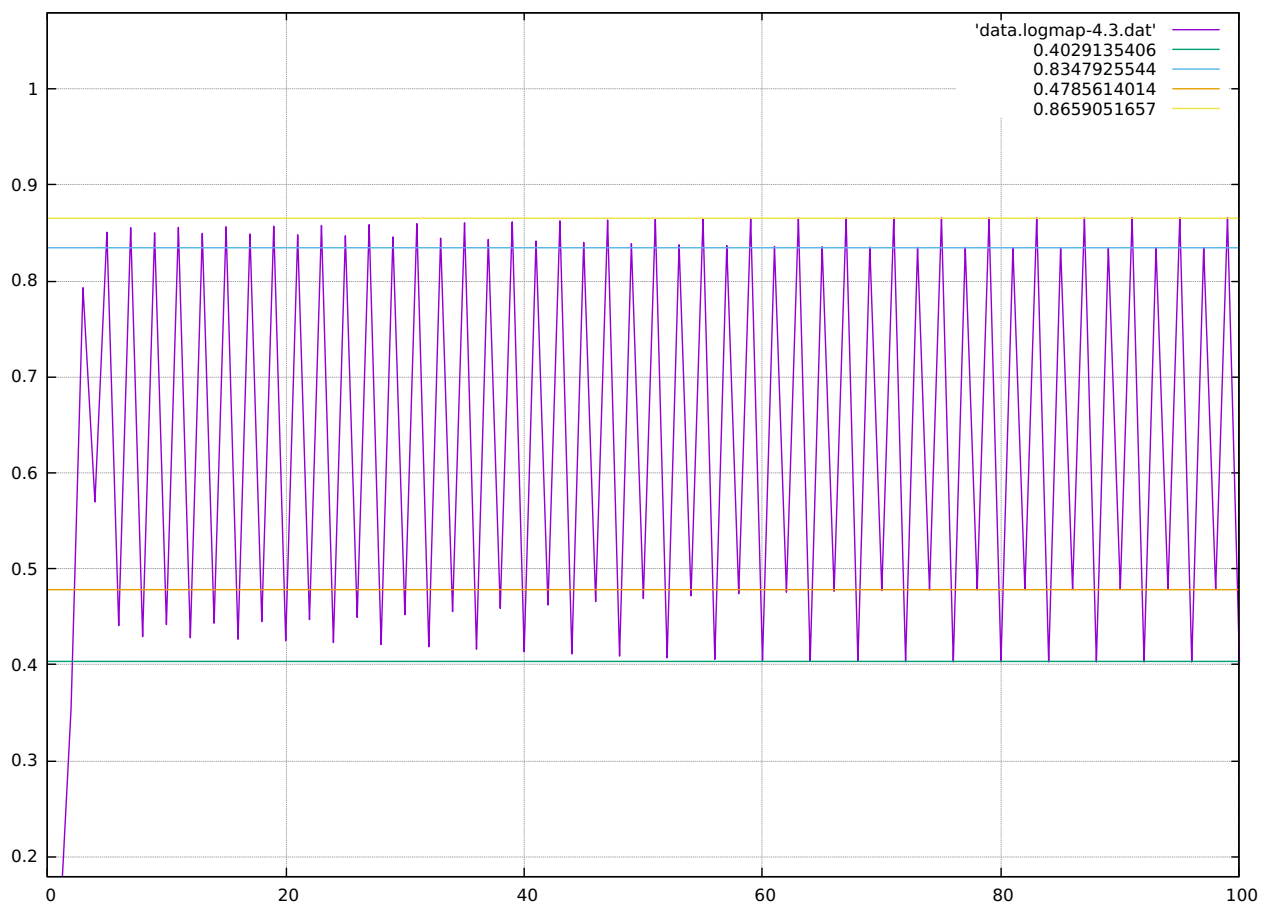
Neste caso temos mais pontos atratores, já é possível ver o quanto os pontos aumentam para uma pequena variação em  $\lambda$ .

**Gráfico 7:** Mapa Escada  $\lambda = 3.47$ .



$x_{n+1}$  na ordenada e  $x_n$  na abscissa

**Gráfico 8:** Convergência do Mapa Logístico para  $\lambda = 3.47$ .



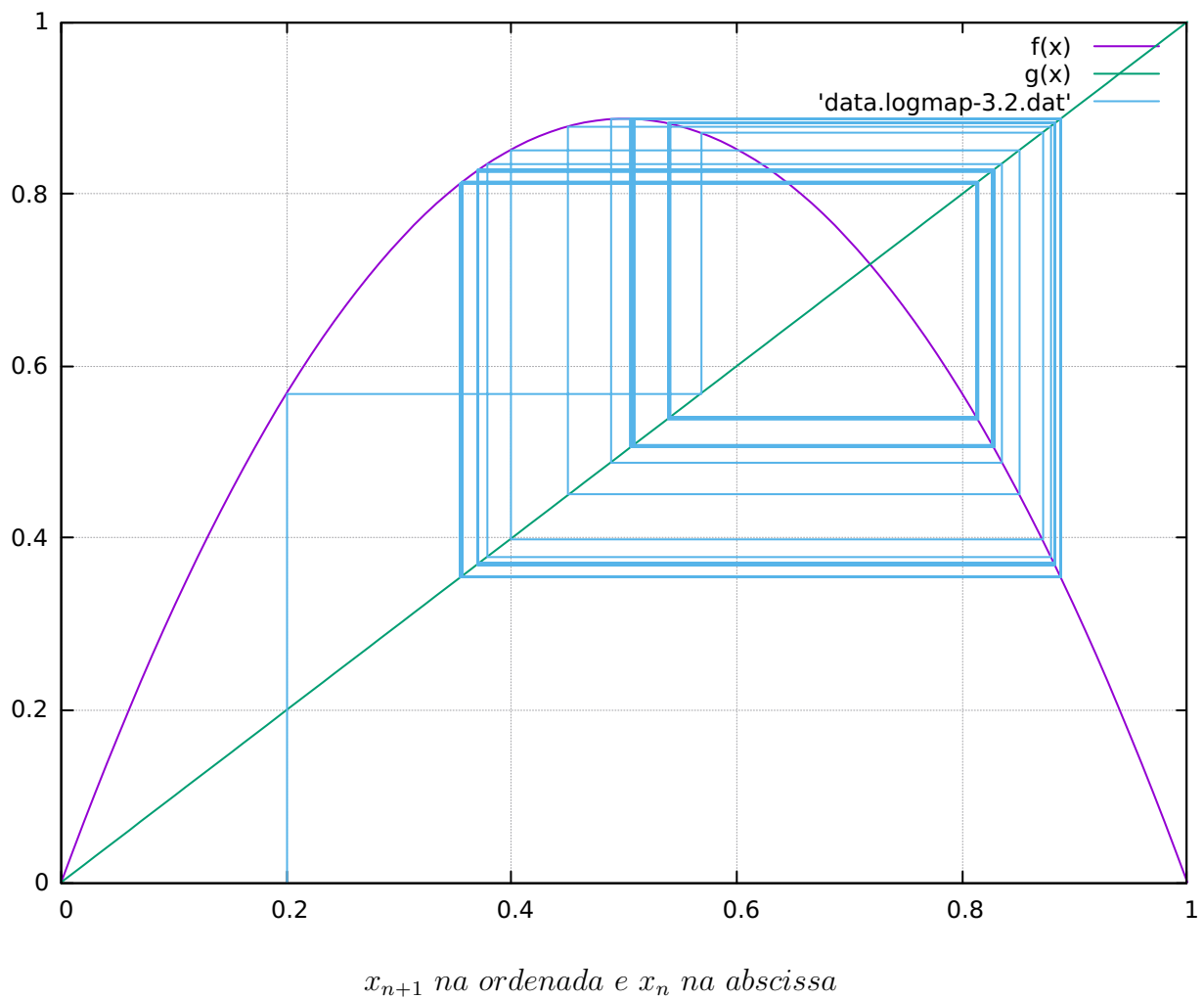
$x^*$  na ordenada e  $x_n$  na abscissa

Vemos neste gráfico que o número de pontos atratores se eleva ao passo que  $\lambda$  se eleva.

### 3.3 Diagrama para $\lambda = 3.55$

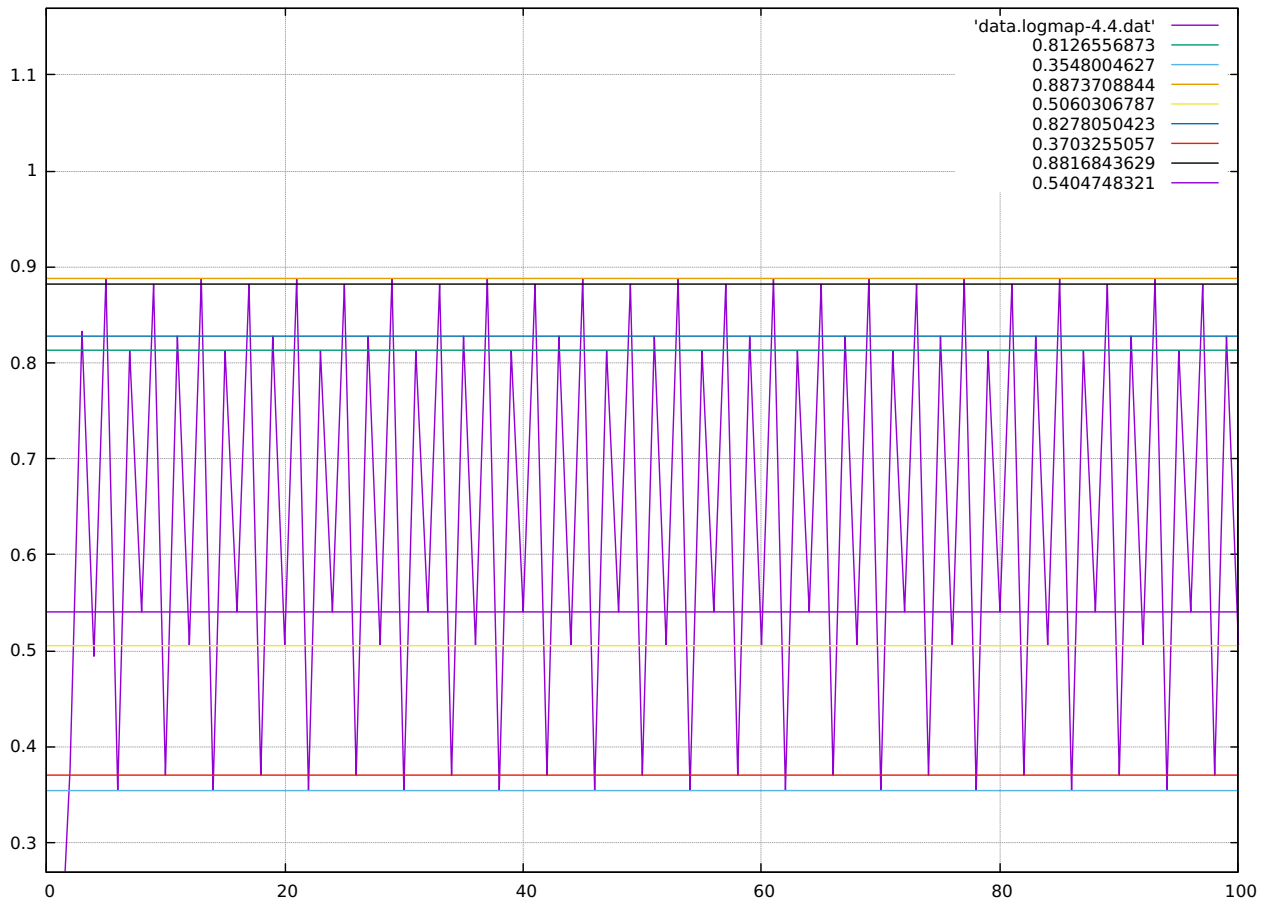
Para este caso o diagrama parece ainda mais confuso, possuindo inumeros pontos onde o mapa corta a reta  $x' = x$ , sendo também maior o distanciamento dos pontos onde o corre e a intersecção.

**Gráfico 9:** Mapa Escada  $\lambda = 3.55$ .



Aqui vemos um aumento exponencial no número de pontos atratores.

**Gráfico 10:** Convergência do Mapa Logístico para  $\lambda = 3.55$ .



$x^*$  na ordenada e  $x_n$  na abscissa

Este fenômeno ocorre devido a aproximação do valor limite onde seu número tende a uma contagem imensurável, para  $\lambda \leq 4$  podemos avaliar, sendo melhor visto no mapa bifurcado.

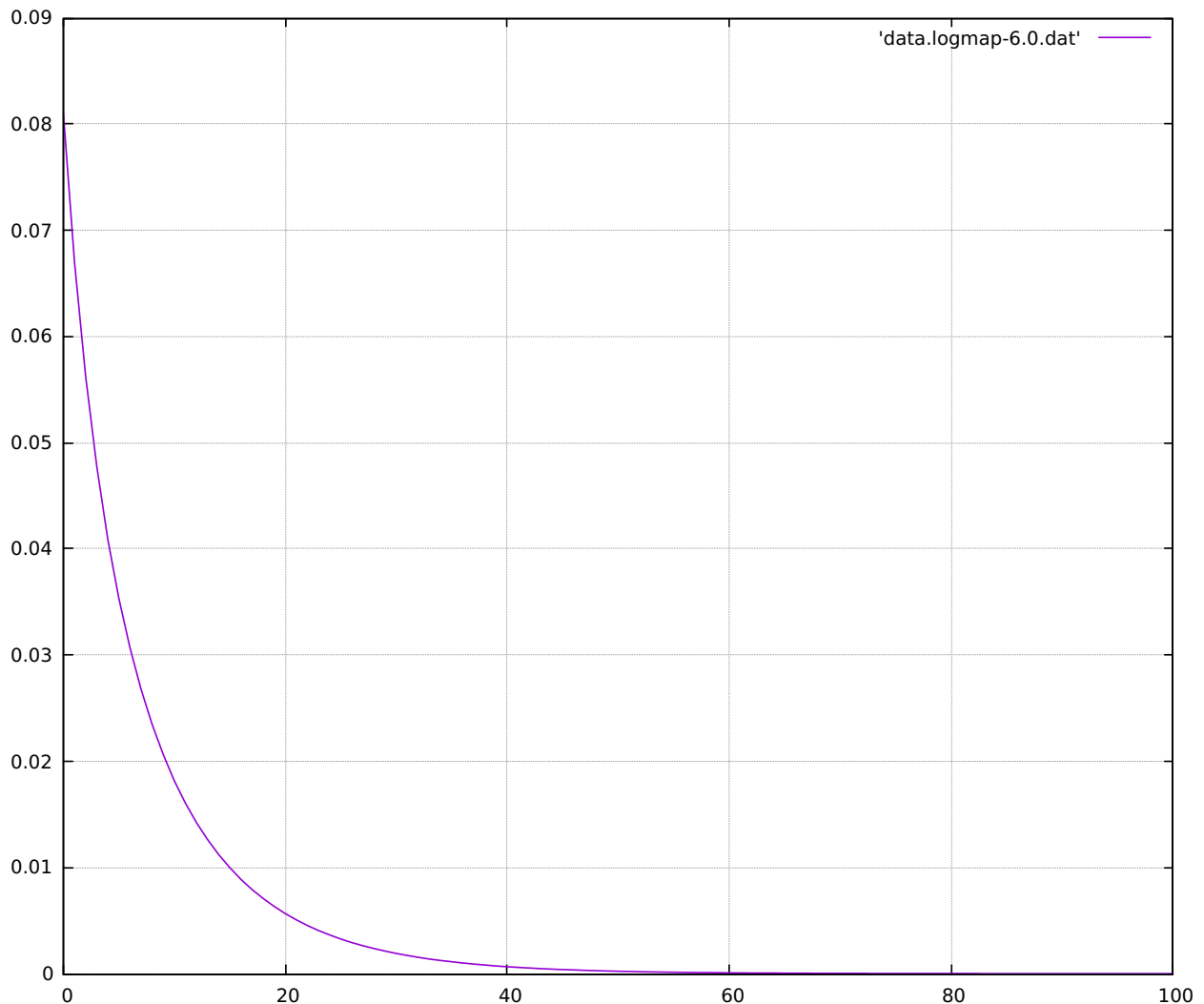
## 4 Curvas Próximo ao Ponto Crítico

Tornando a avaliar o comportamento temporal para valores de  $\lambda$ , neste caso se deseja ver o tipo de curva que estas iterações parecem reproduzir, dado que há um decaimento para valores iniciais de  $x$  ao realizar as iterações.

### 4.1 Caso para $\lambda = 0.90$ , inferior ao ponto crítico

Aqui temos um caso em que o  $\lambda$  está abaixo do ponto crítico, sendo esperado uma transição de fase, notada por uma mudança brusca no comportamento.

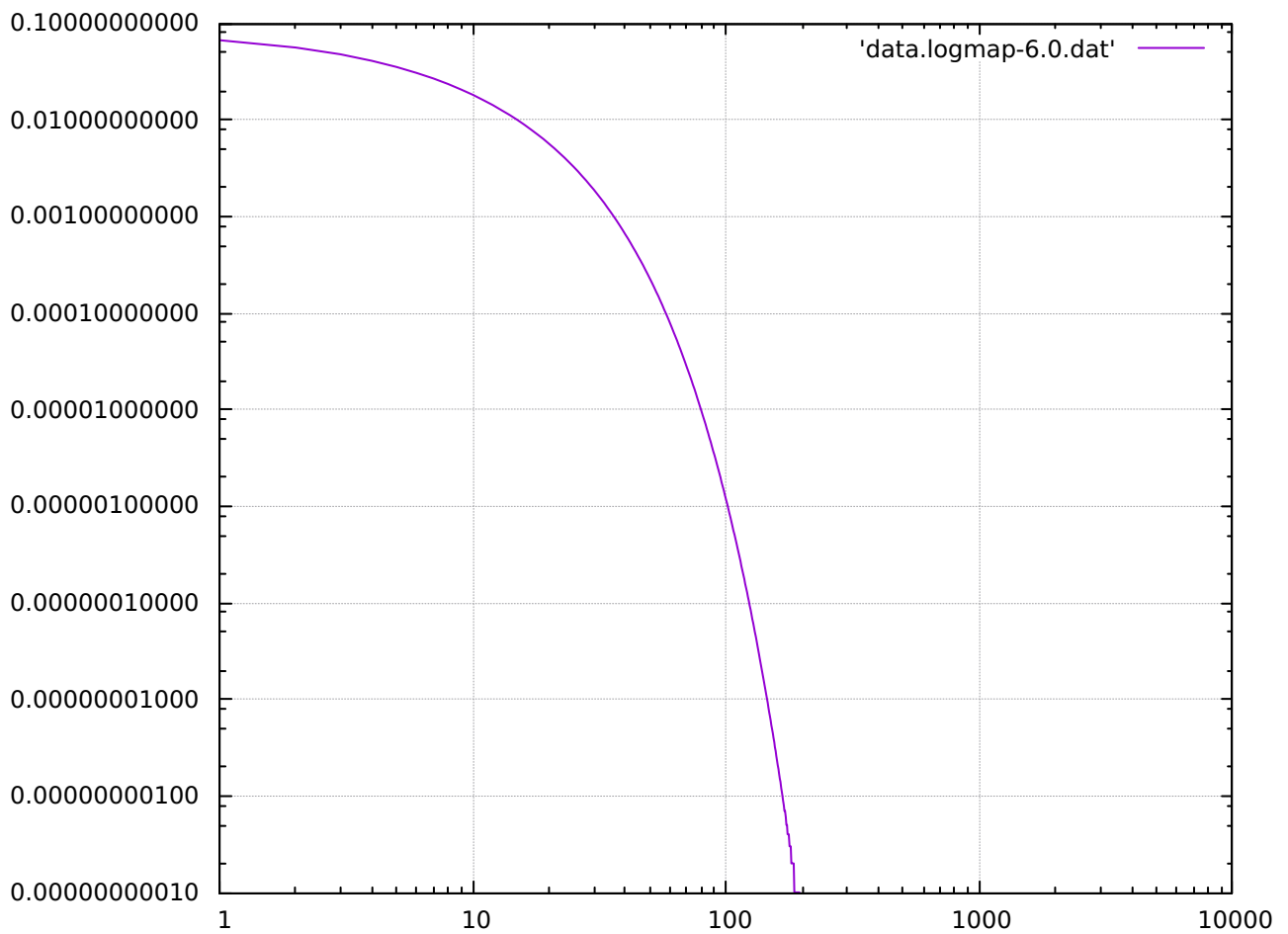
**Gráfico 11:** Decaimento temporal, em  $\lambda = 0.90$ .



*x na ordenada e tempo(segundos) na abscissa*

Claramente vemos que esta curva não descreve uma lei de potência, sendo apenas um decaimento dado por uma curva genérica.

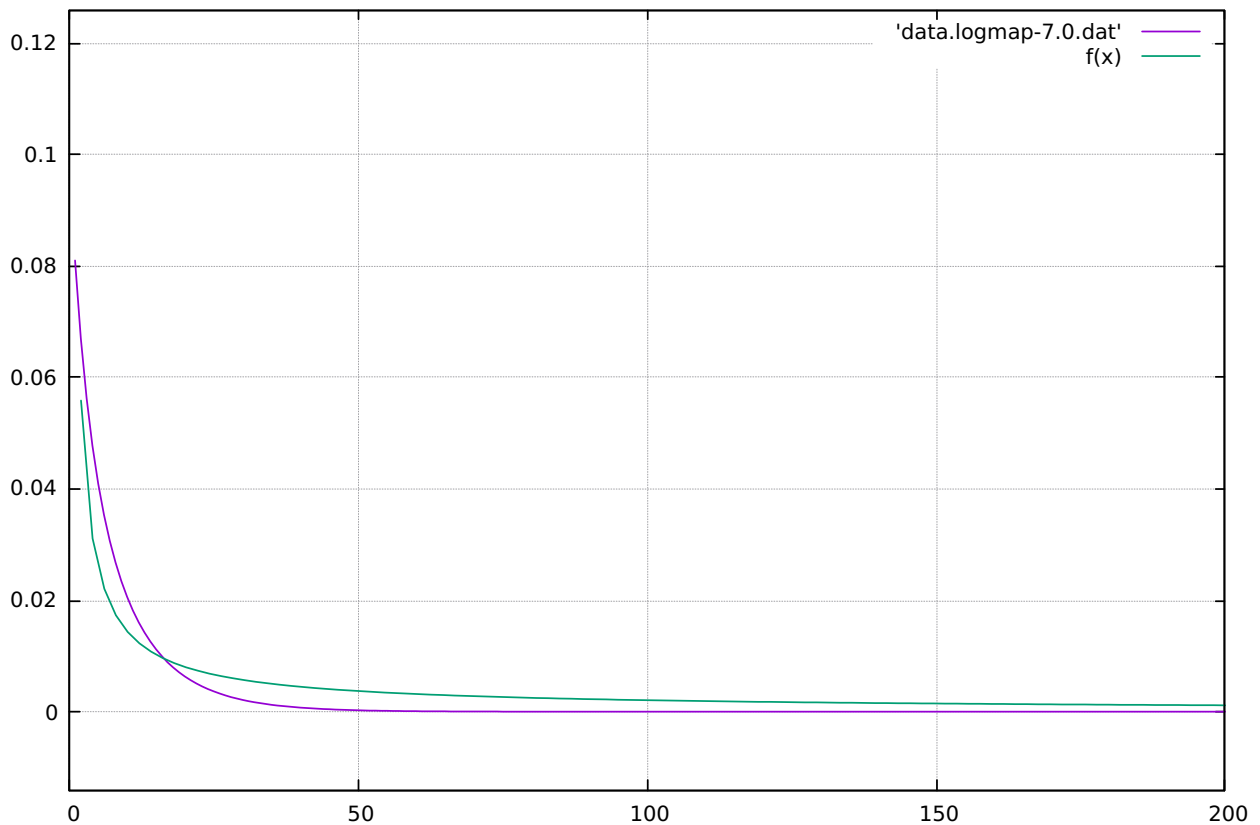
**Gráfico 12:** Log x Log: Verificar lei de potência, em  $\lambda = 0.90$ .



*x na ordenada e tempo(segundos) na abscissa*

Ainda sim podemos realizar um fit por uma função  $x(t) = \alpha x^{\beta t}$  via comando GNUplot, obtendo valores  $\alpha = 0.121861$ ,  $\Delta\alpha = 0.003245$  e  $\beta = -0.515002$ ,  $\Delta\beta = 0.0094$  para obter uma curva aproximada, mas que não representa de fato a lei física a qual a ordem de decaimento obedece, ela apenas ilustra o mesmo.

**Gráfico 13:** Ajuste por  $x(t) = 0.12t^{-0.52}$ , em  $\lambda = 0.90$ .

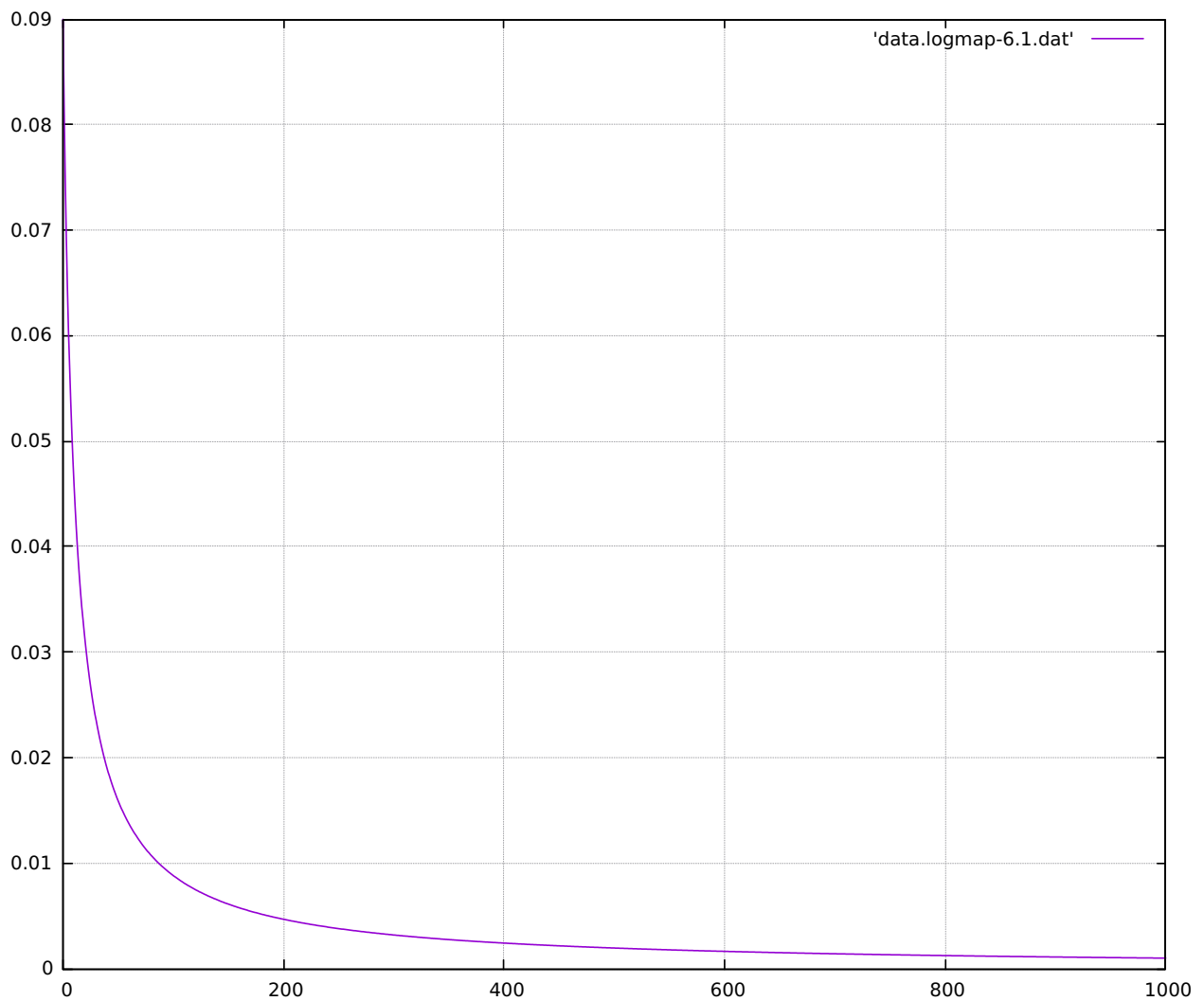


*x na ordenada e tempo(segundos) na abscissa*

## 4.2 Caso para $\lambda = 1.00$ , no ponto crítico

Neste caso se espera ver a mudança de comportamento, dado que  $\lambda$  está sobre o ponto crítico.

**Gráfico 14:** Decaimento temporal, em  $\lambda = 1.00$ .

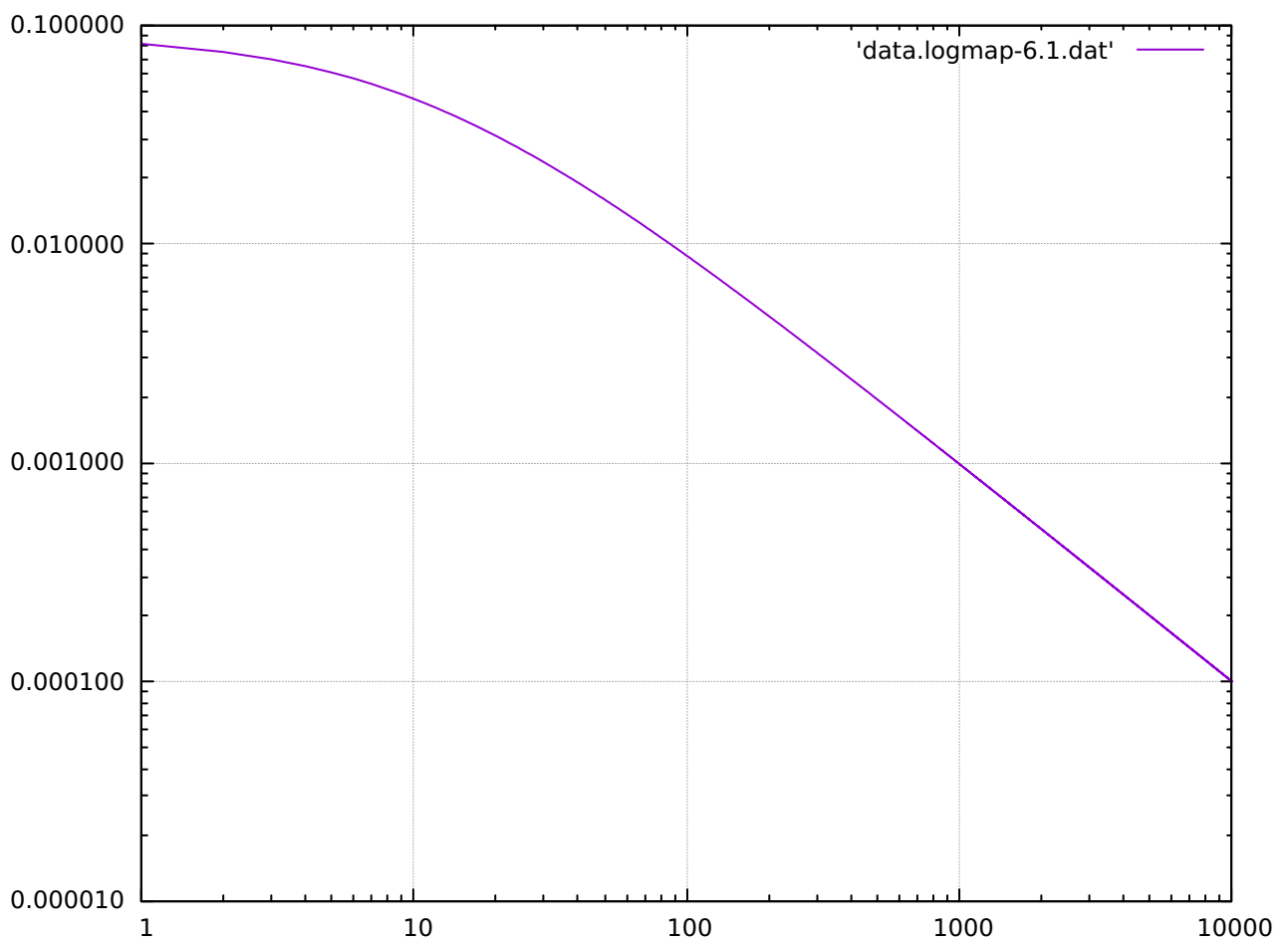


*x na ordenada e tempo(segundos) na abscissa*



Aqui vemos que para valores longos de tempo a curva parece descrever uma lei de potencia, ainda que mais próximo a  $t = 0$  temos um comportamento estranho, característico de outro tipo de curva que não dada por uma lei de potência.

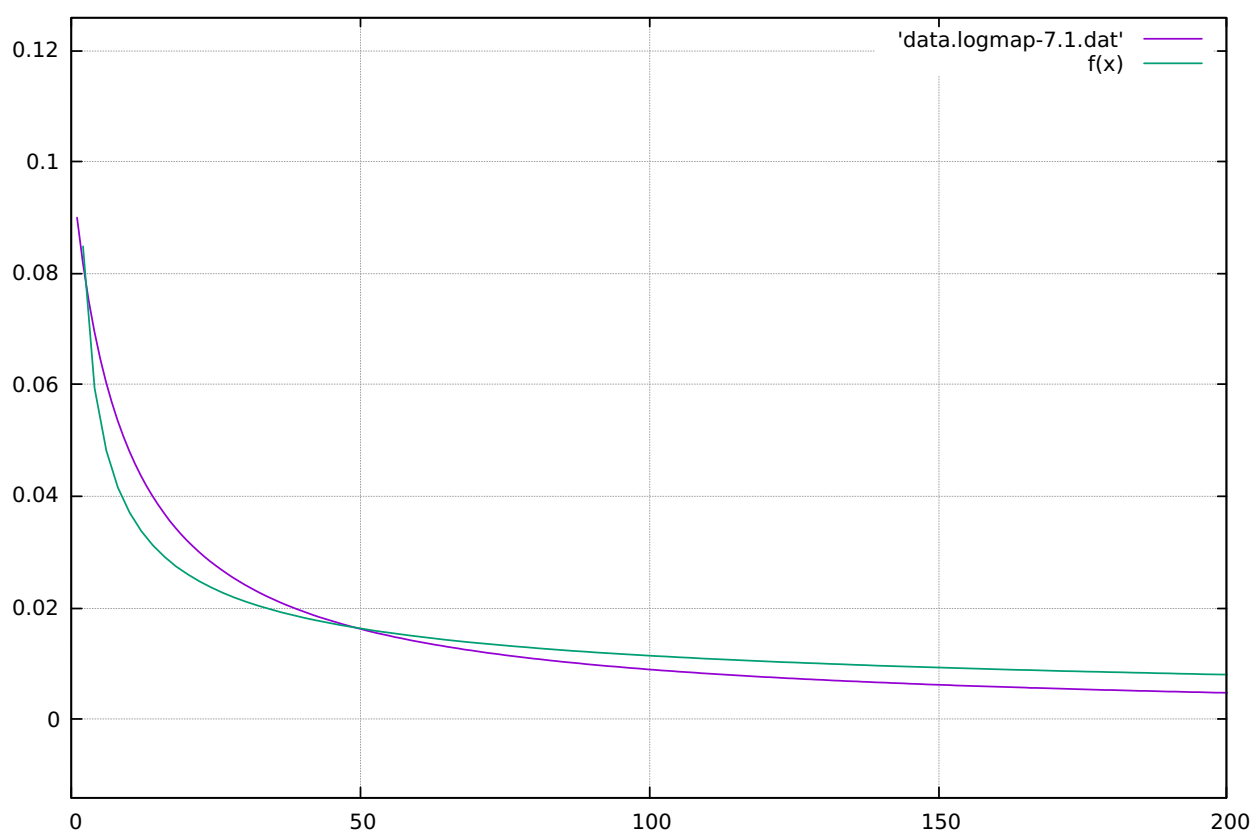
**Gráfico 15:** Log x Log: Verificar lei de potência, em  $\lambda = 1.00$ .



*x na ordenada e tempo(segundos) na abscissa*

Tornando ao fit, podemos usar para este conjunto de pontos o mesmo recurso via GNUplot, obtendo  $\alpha = 0.101214$ ,  $\Delta\alpha = 0.003283$ .

**Gráfico 16:** Ajuste por  $x(t) = 0.10t^{-0.84}$ , em  $\lambda = 1.00$ .



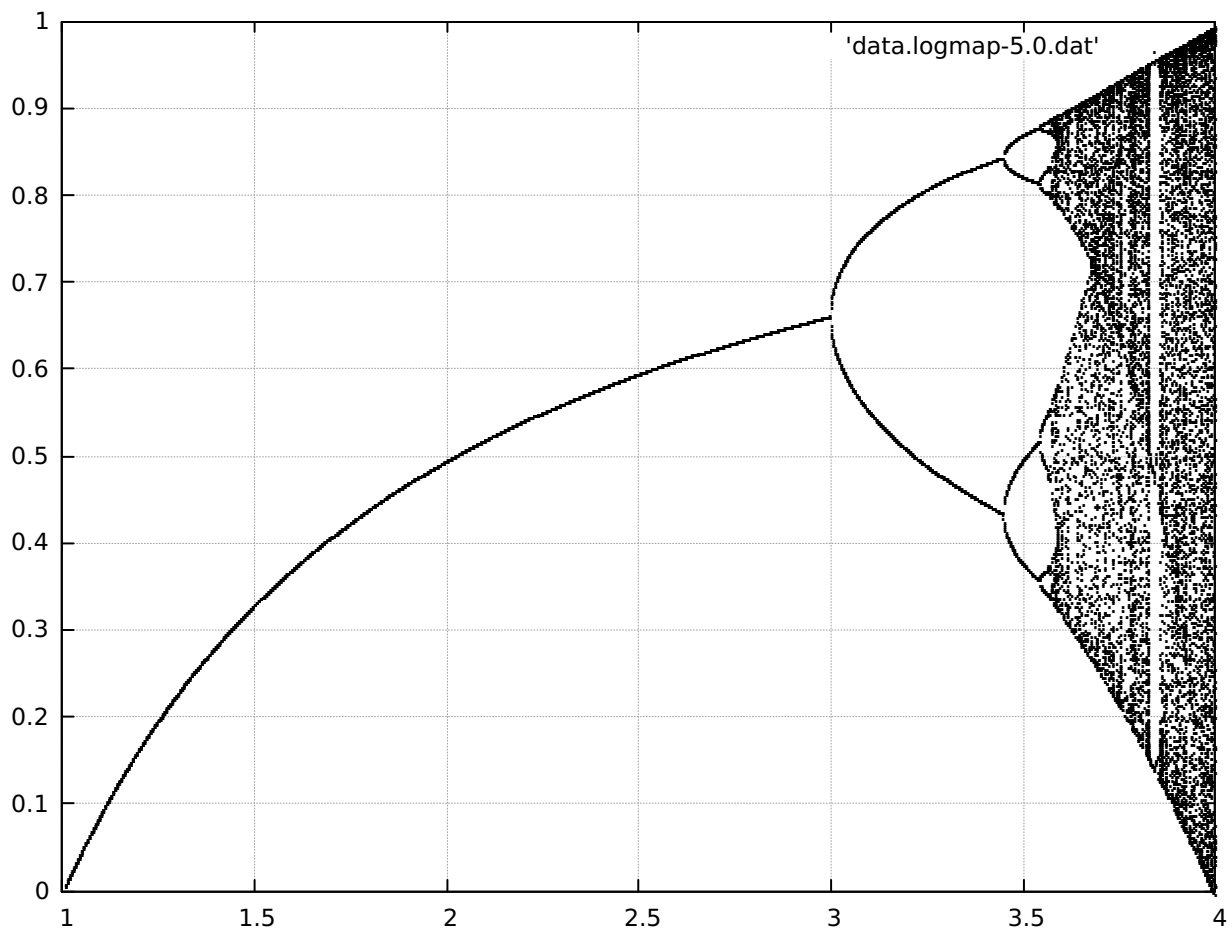
*x na ordenada e tempo(segundos) na abscissa*

## 5 Mapa Bifurcado

### 5.1 Atratores Estranhos

Para consumir este trabalho, temos um plote dos pontos de  $\lambda$ . O longo deste texto fiz menção diversas vezes a transição e os pontos de  $\lambda$ . Aqui vemos a relação direta entre os possíveis valores de  $x^*$  em função da distribuição de  $\lambda$ , onde contemplamos este mapa conhecido como: Mapa Bifurcado. Sendo em  $\lambda = 4$  um grande número de pontos atratores, aparentemente crescente de forma caótica e indeterminada. Tal efeito é oriundo de observarmos muito proximo da evolução temporal do nosso sistema, para tempos maiores provavelmente poderemos notar algum padrão na formação das bifurcações, mas para este regime remos esta figura inusitada.

Gráfico 17:  $0 \leq \lambda \leq 4.00$ .



$x^*$  na ordenada e  $\lambda$  na abscissa