Quarta Avaliação

Mapa Logístico e Caos

Física Computacional

Aluno
Marcos Paulo Gomes De Castro
Professor
Nuno Crokidakis

Universidade Federal Fluminense
17 de Junho de 2017

Introdução

Um Mapa Logistico é uma aplicação matemática que associa um valor um valor x_{n+1} com outro x_n, tal objeto foi citado inicialmente em um artigo sobre comportamento caotico em equações não lineares, tendo sua popularização em 1976 em um artigo de Robert May sobre comportamento demográfico. Oriundo da equações de Pierre François Verhulst:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x(t) = \lambda x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \tag{1}$$

aqui trataremos $K = 1$, tal que este assim obtemos o seguinte polinômio de segundo grau:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \tag{2}$$

Este moodelo aparentemente simples é muito rico, nele podemos obter informações importantes no estudo do comportamento caotico. Os pontos em que o mapa se aproxima do seu valor previsto são ditos atratorese, os quais podemos calcular para um dado domínio, haja visto o comportamento caotico do mapa (1) temos valores de x^* para os quais os pontos são diversos e outros métodos algébricos são utilizados:

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1\ ,\ x^* = 0 \tag{3}$$

$$1 < \lambda \leqslant 3\ ,\ x^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \tag{4}$$

$$3 < \lambda \leqslant 4\ ,\ x^* = x_i,\ \text{com } i = 1, 2, ... \tag{5}$$

$$\lambda > 4\ ,\ x^* = \text{indefinido} \tag{6}$$

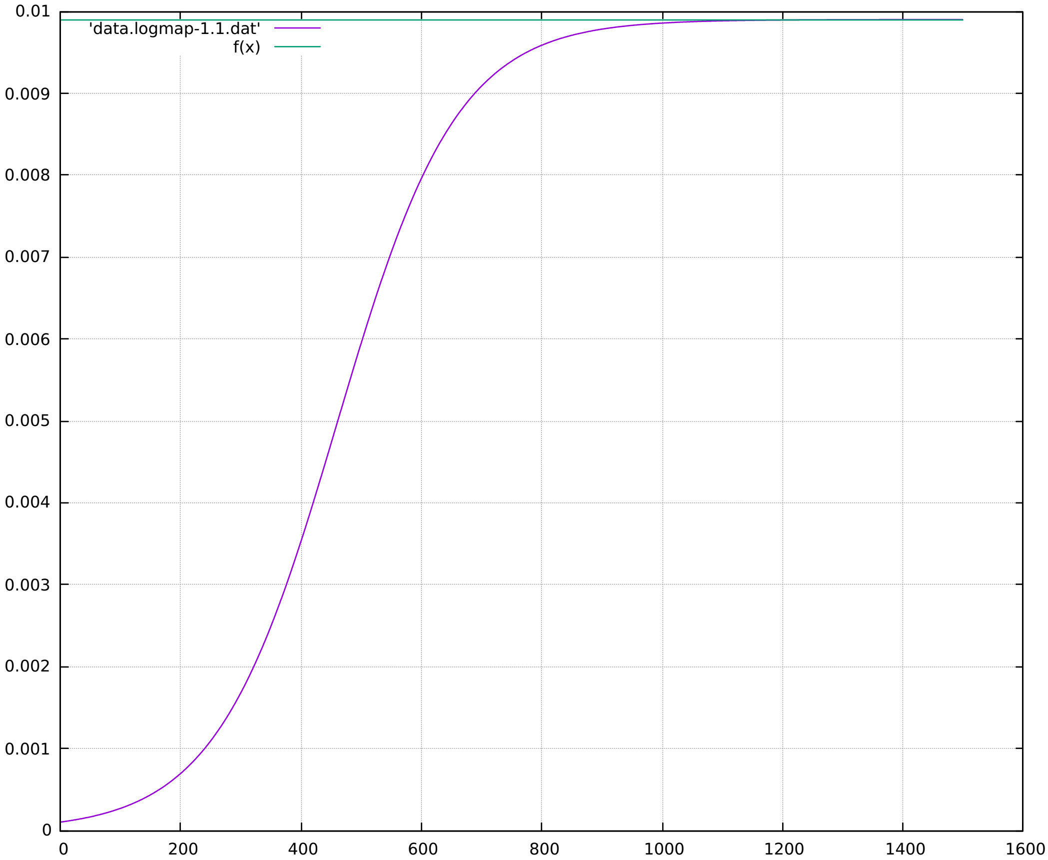
Nos itens seguintes faremos uma anlálise deste mapa para diferentes valores de λ.

1 Análise de Convergência

Dado o mapa (2) podemos iterar o mesmo fazendo uso de um recurso coputacional, como um programa em C no caso deste trabalho, para isso iremos obter uma coluna com valores de x_n e outra para passos de tempo, onde cada iteração representa 1 *segundo*. Ao plotar estes valores em um plano cartesiano, depositando o tempo sobre àbscissa e os valores de x_n sobre a ordenada obtemos uma curva onde podemos observar a convergência para o valor calculado vide a relação (4).

No gráfico (1) temos $\lambda = 1.01$, para este teremos um valor esperado de $x* = 0.00990$, nele podemos ver que o mapa atige a convergência em torno de 25 *min*.

Gráfico 1: Convergência do Mapa Logístico para $\lambda = 1.01$.



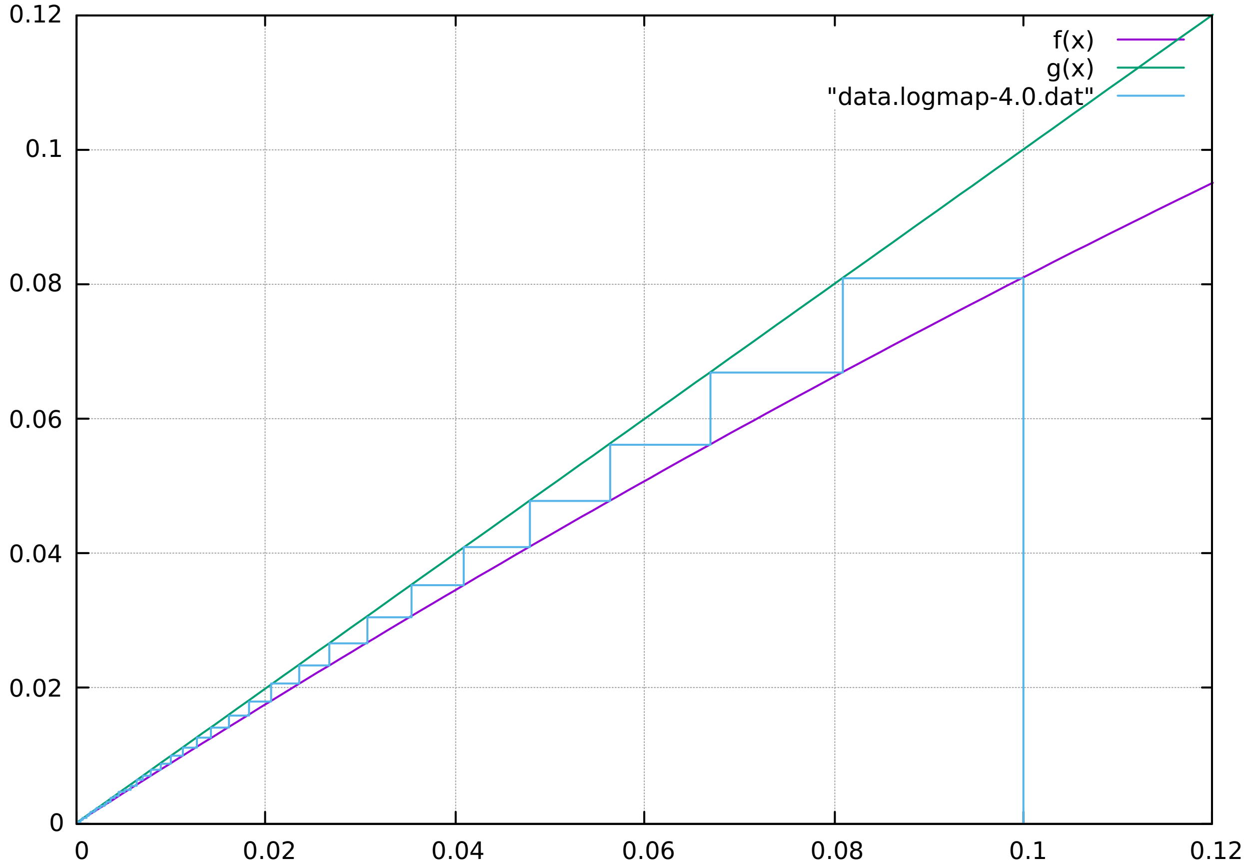
x na ordenada e tempo(segundos) na abscissa

2 Diagramas e Atratores

Para valores de $\lambda \geqslant 1.00$ temos valores de $x_n \geqslant 0$, com isso podemos plotar um diagrama de x_{n+1} *por* x_n sobre a reta $x_{n+1} = x_n$ e a parábola $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ e obter diagramas escada para analisar os pontos atratores. Para valores de $1 \leqslant \lambda \leqslant 3$ temos pontos simples, onde o mapa logístico converge e atinge os valores esperados pela relação (4).

2.1 Atrator em $\lambda = 0.90, x* = 0$

Gráfico 2: Mapa Escada $\lambda = 0.90$.

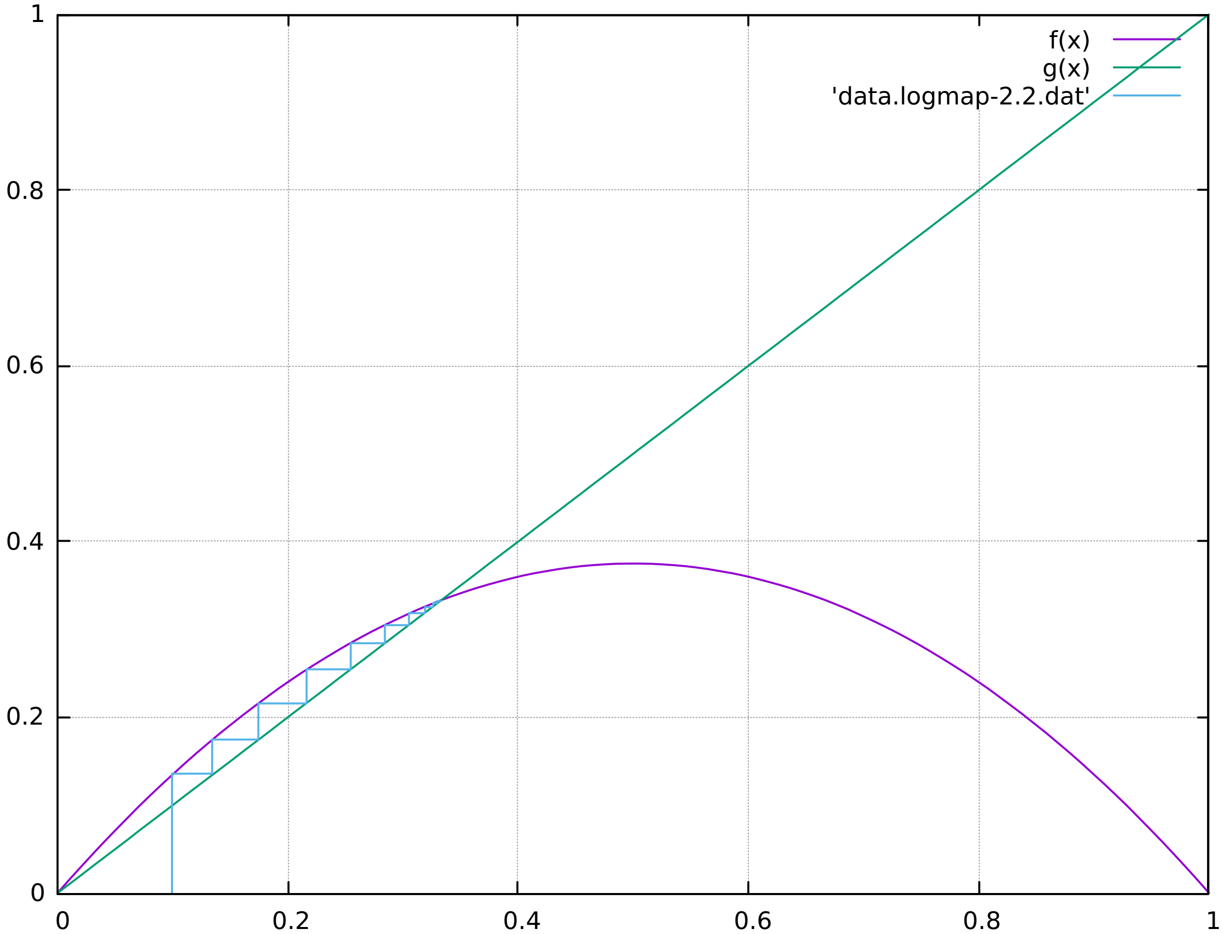


x_{n+1} *na ordenada e* x_n *na abscissa*

A oscilação se torna mais excentrica, surgindo maior número de pontos atratores.

2.2 Atrator em $\lambda = 1.50, x* = 0.33$

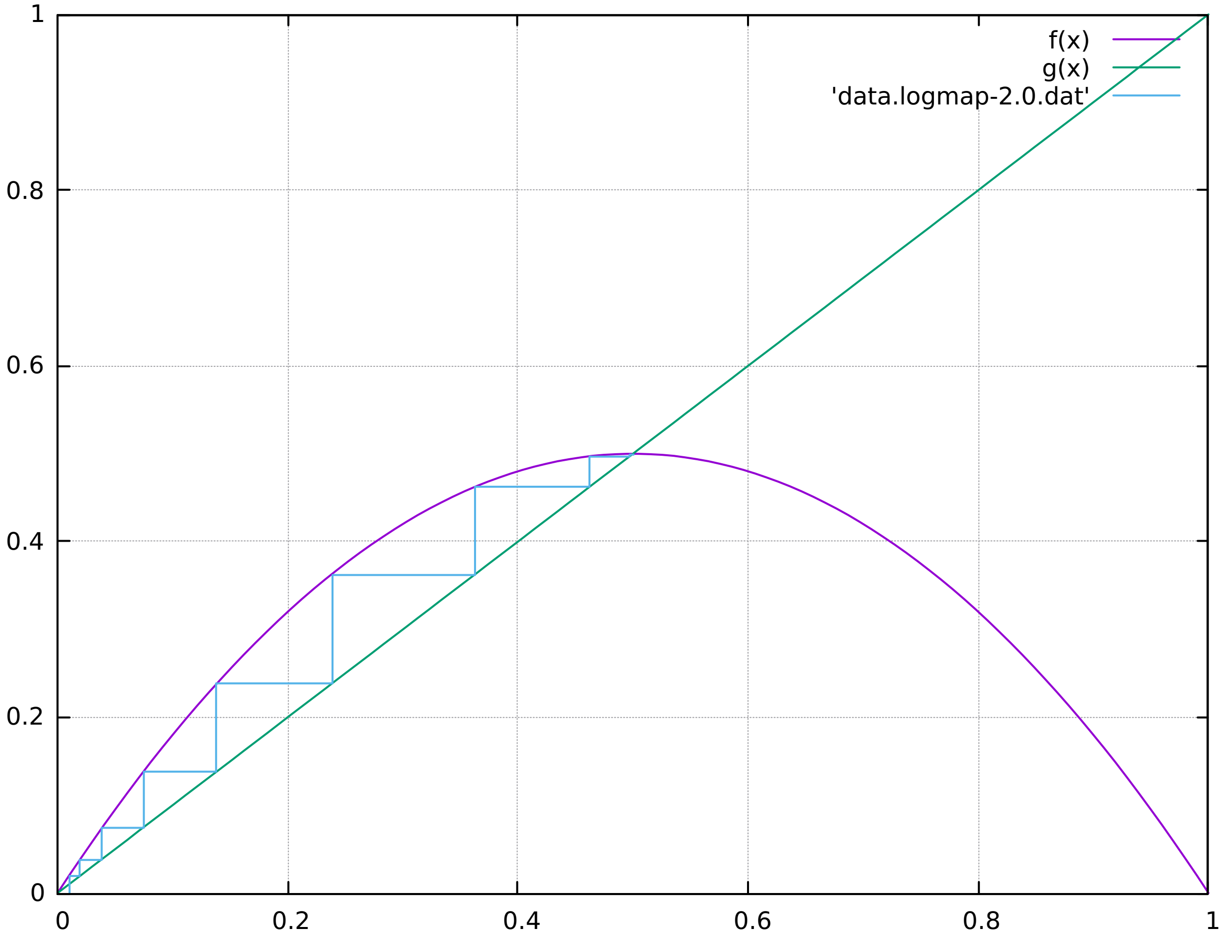
Gráfico 3: Mapa Escada $\lambda = 1.50$.



x_{n+1} *na ordenada e* x_n *na abscissa*

2.3 Atrator em $\lambda = 2.00, x* = 0.50$

Gráfico 4: Mapa Escada $\lambda = 2.00$.



x_{n+1} *na ordenada e* x_n *na abscissa*

3 Valores Excentricos de λ

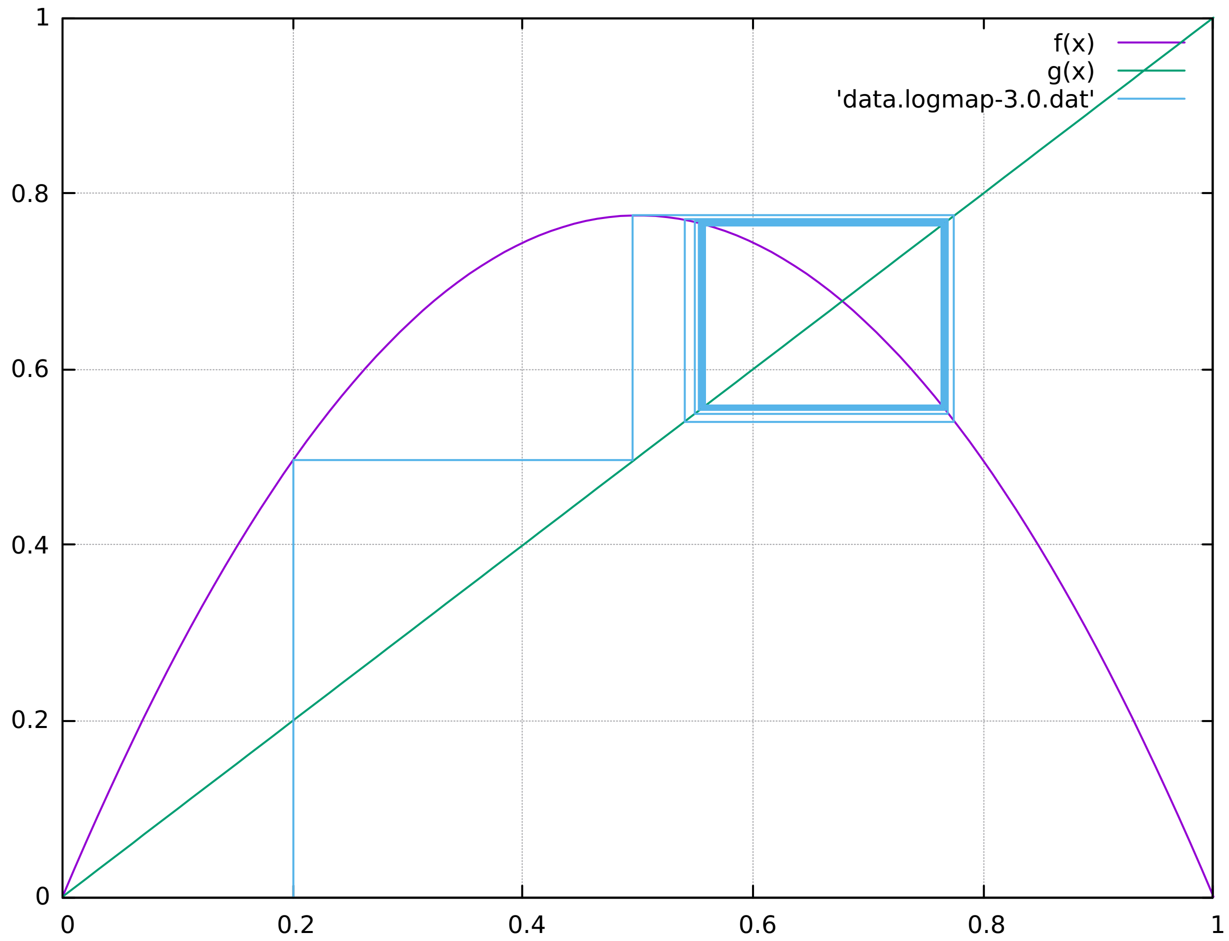
Para valores de $3 \leqslant \lambda \leqslant 4$ temos um comportamento caótico, surgem outros pontos atratores, e temos de fazer uso de recursos algébricos específicos para determinar analíticamente os seus respectivos valores.

O mapa parece convergir para diferentes pontos ao mesmo tempo, em observar a massa de dados obtido pela iteração de (2) podemos ver que os pontos se tornam periódicos, logo no lugar de uma convergência clara o mapa se estabiliza em um equilibrio dinâmico, tendo como pontos atratores os valores tangentes as retas normais.

3.1 Diagrama para $\lambda = 3.10$

Aqui podemos ver o diagrama escada para um dado valor de λ, onde seus pontos formam uma figura regular seccionando pontos diversos na reta $x' = x$. Este plote não é suficiente para definir os pontos onde o mapa adquire equilibrio dinâmico.

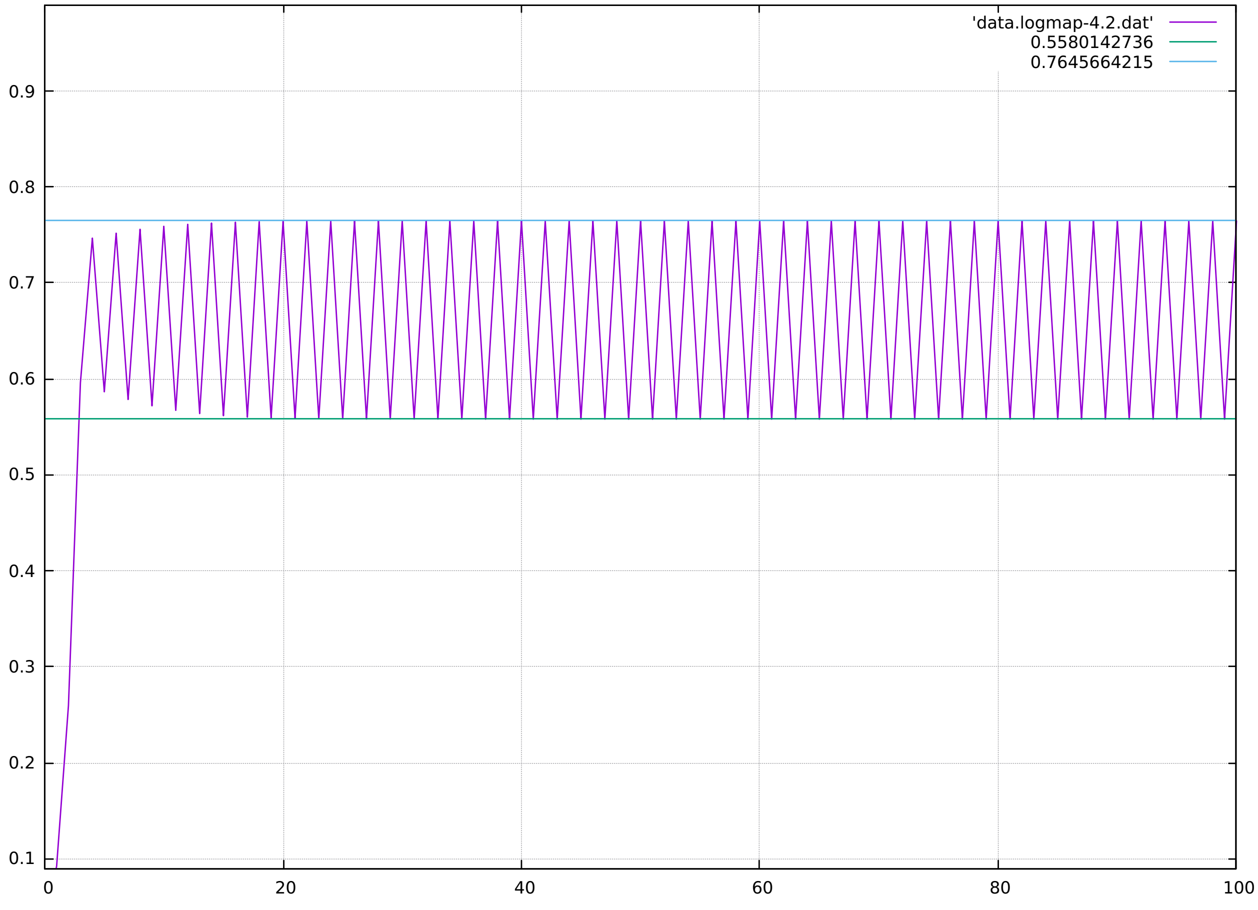
Gráfico 5: Mapa Escada $\lambda = 3.10$.



x_{n+1} na ordenada e x_n na abscissa

Ao plotar os pontos de $x*$ em função de um tempo, dado que cada passo equivale a 1 *segundo*, obtemos a seguinte relação:

Gráfico 6: Convergência do Mapa Logístico para $\lambda = 3.10$.



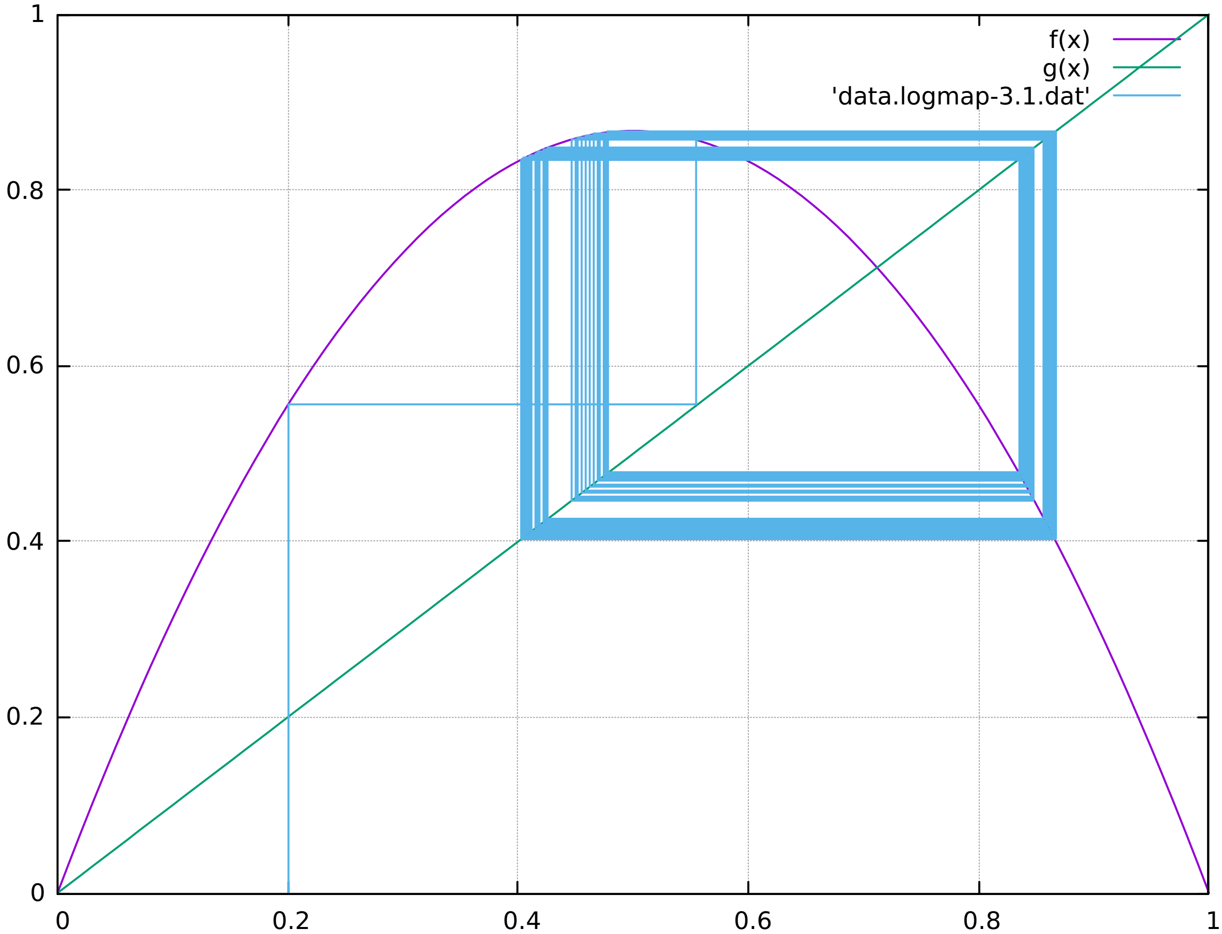
$x*$ *na ordenada e* x_n *na abscissa*

Aqui vemos apenas dois pontos, mas já podemos observar como o mapa oscila.

3.2 Diagrama para $\lambda = 3.47$

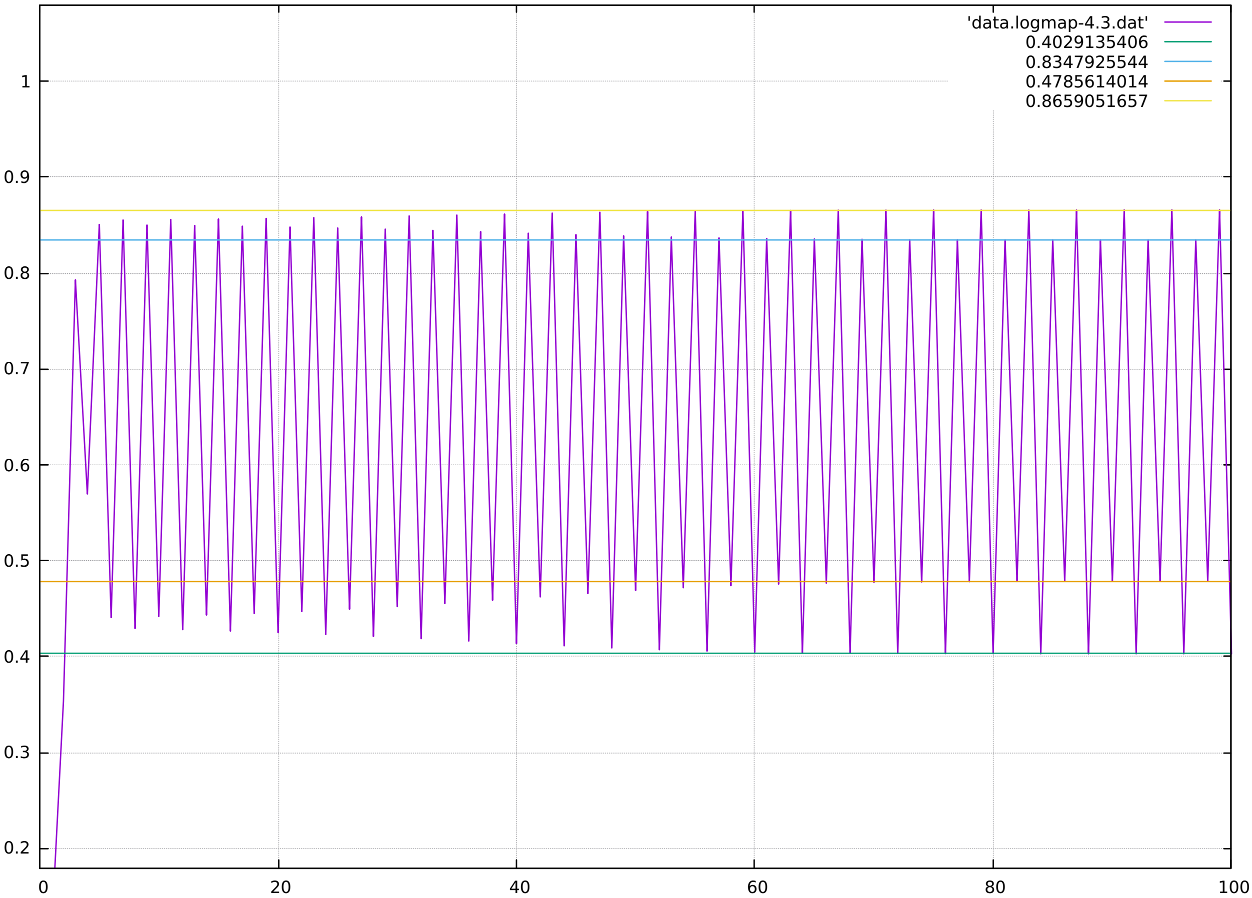
Neste caso temos mais pontos atratores, já é possível ver o quanto os pontos almentam para uma pequena variação em λ.

Gráfico 7: Mapa Escada $\lambda = 3.47$.



x_{n+1} na ordenada e x_n na abscissa

Gráfico 8: Convergência do Mapa Logístico para $\lambda = 3.47$.



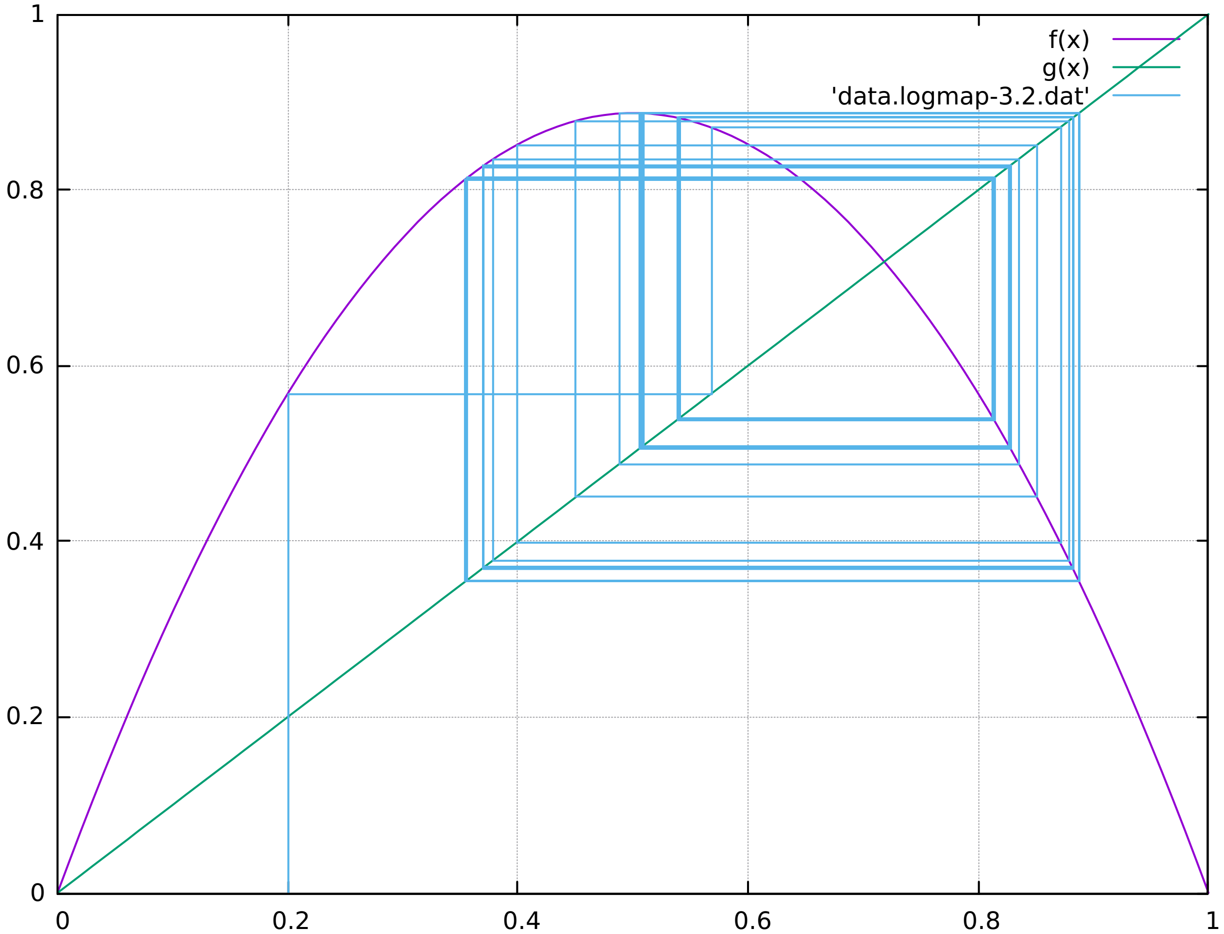
$x*$ *na ordenada e* x_n *na abscissa*

Vemos neste gráfico que o número de pontos atratores se eleva ao passo que λ se eleva.

3.3 Diagrama para $\lambda = 3.55$

Para este caso o diagrama parece ainda mais confuso, possuindo inumeros pontos onde o mapa corta a reta $x' = x$, sendo também maior o distanciamento dos pontos onde o corroe a intersecção.

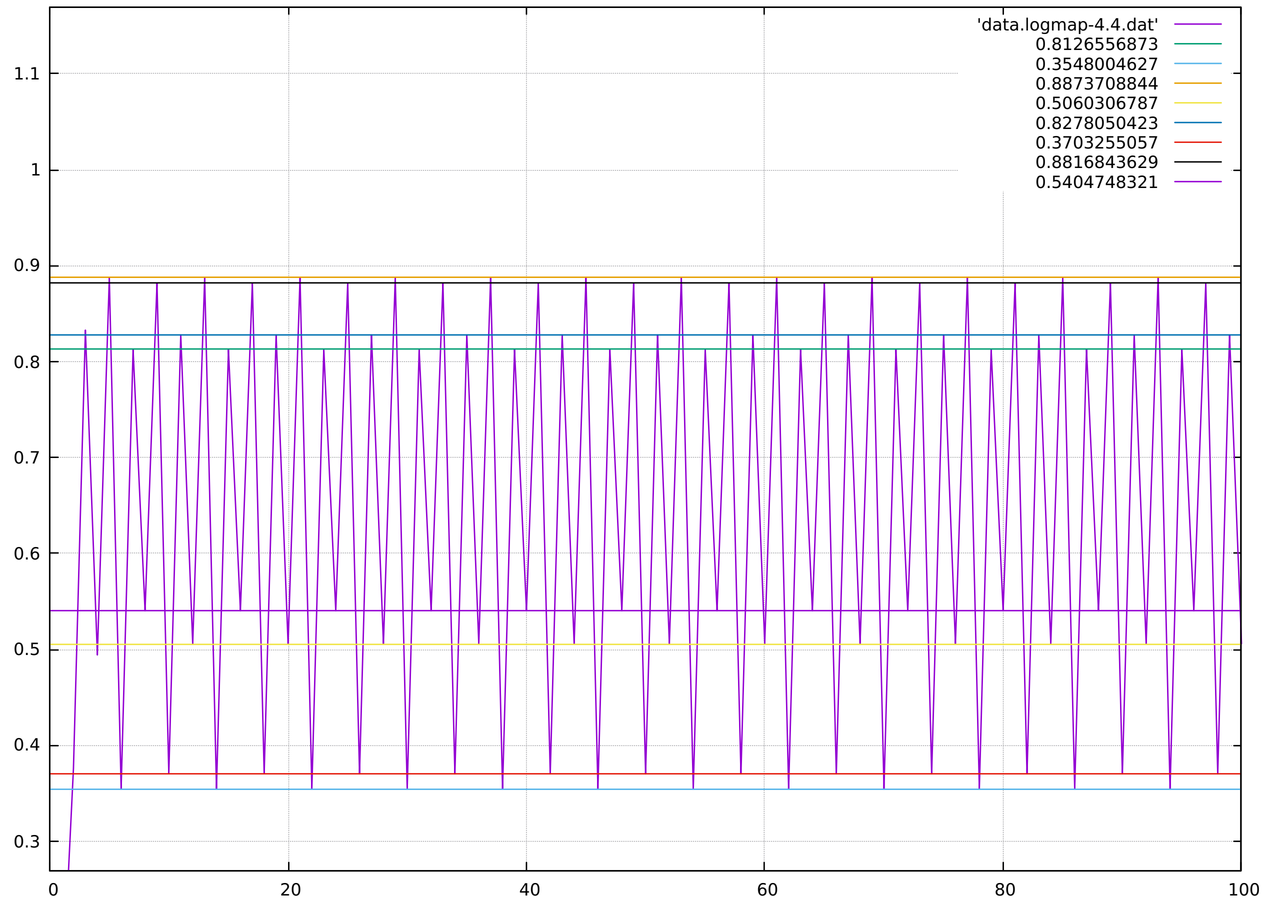
Gráfico 9: Mapa Escada $\lambda = 3.55$.



x_{n+1} na ordenada e x_n na abscissa

Aqui vemos um aumento exponencial no núnemor de pontos atratores.

Gráfico 10: Convergência do Mapa Logístico para $\lambda = 3.55$.



$x*$ na ordenada e x_n na abscissa

Este fenômeno ocorre devido a aproximação do valor limite onde seu número tende a uma contagem imensuravel, para $\lambda \leqslant 4$ podemmos avaliar, sendo melhor visto no mapa bifurcado.

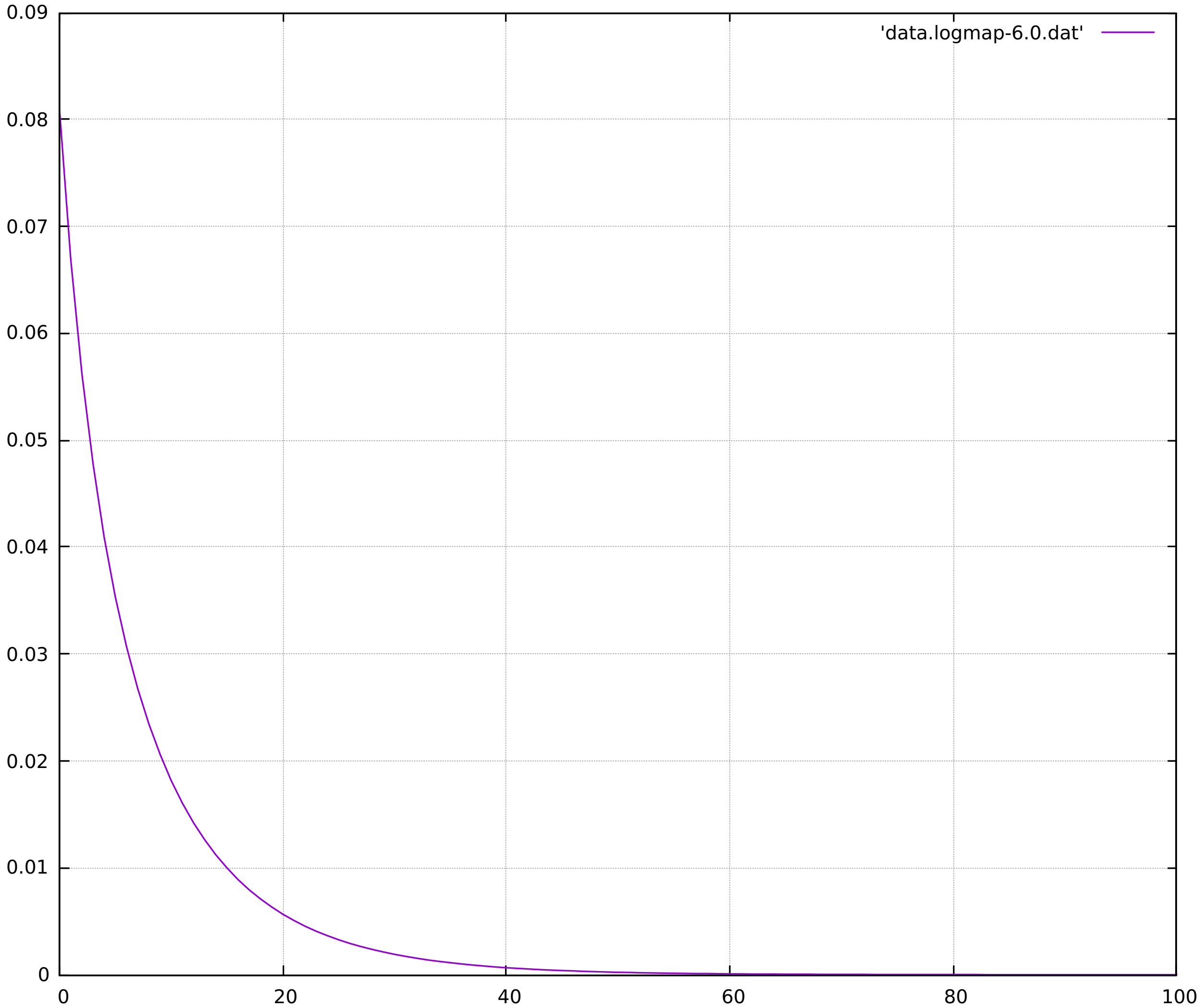
4 Curvas Próximo ao Ponto Crítico

Tornando a avaliar o comportamento temporal para valores de λ, neste caso se deseja ver o tipo de curva que estas iterações parecem reproduzir, dado que há um decaimento para valores iniciais de x ao realizar as iterações.

4.1 Caso para $\lambda = 0.90$, inferior ao ponto crítico

Aqui temos um caso em que o λ está abaixo do ponto crítico, sendo esperado uma transição de fase, notada por uma mudança bruca no comportamento.

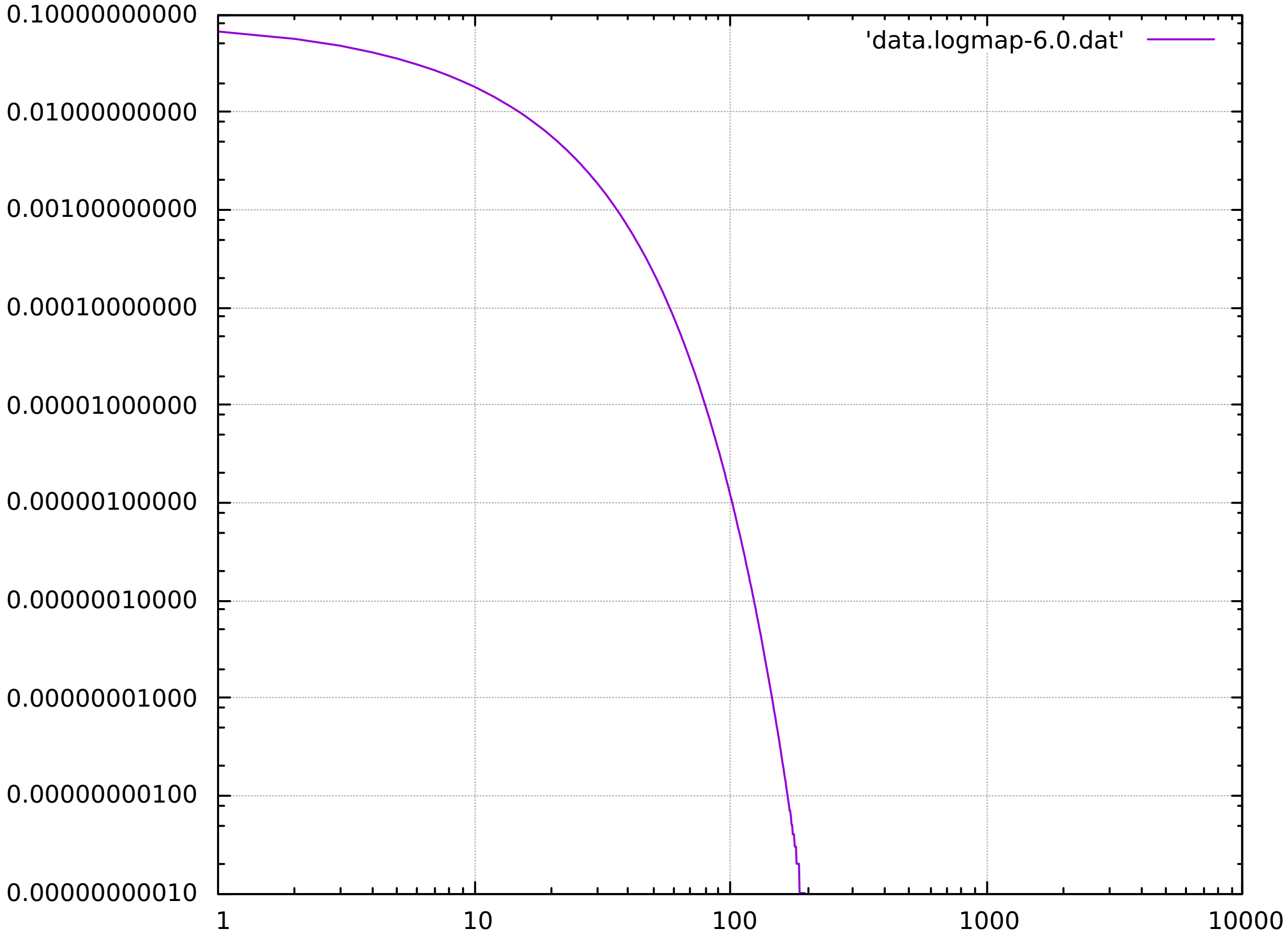
Gráfico 11: Decaimento temporal, em $\lambda = 0.90$.



x na ordenada e tempo(segundos) na abscissa

Claramente vemos que esta curva não descreve uma lei de potência, sendo apenas um decaimento dado por uma curva genérica.

Gráfico 12: Log x Log: Verificar lei de potência, em $\lambda = 0.90$.

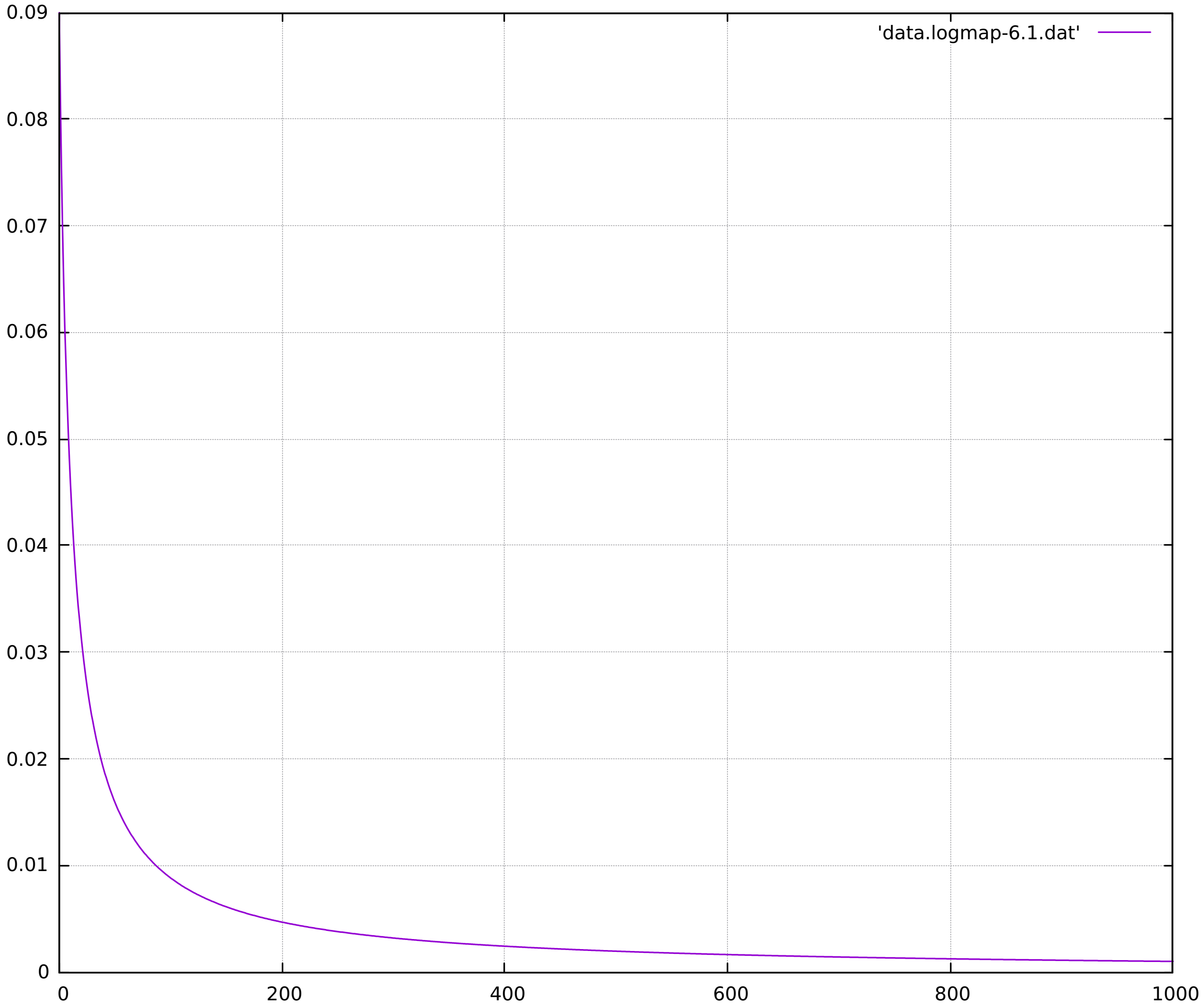


x *na ordenada e tempo(segundos) na abscissa*

4.2 Caso para $\lambda = 1.00$, no ponto crítico

Neste caso se espera ver a mudança de comportamento, dado que λ está sobre o ponto crítico.

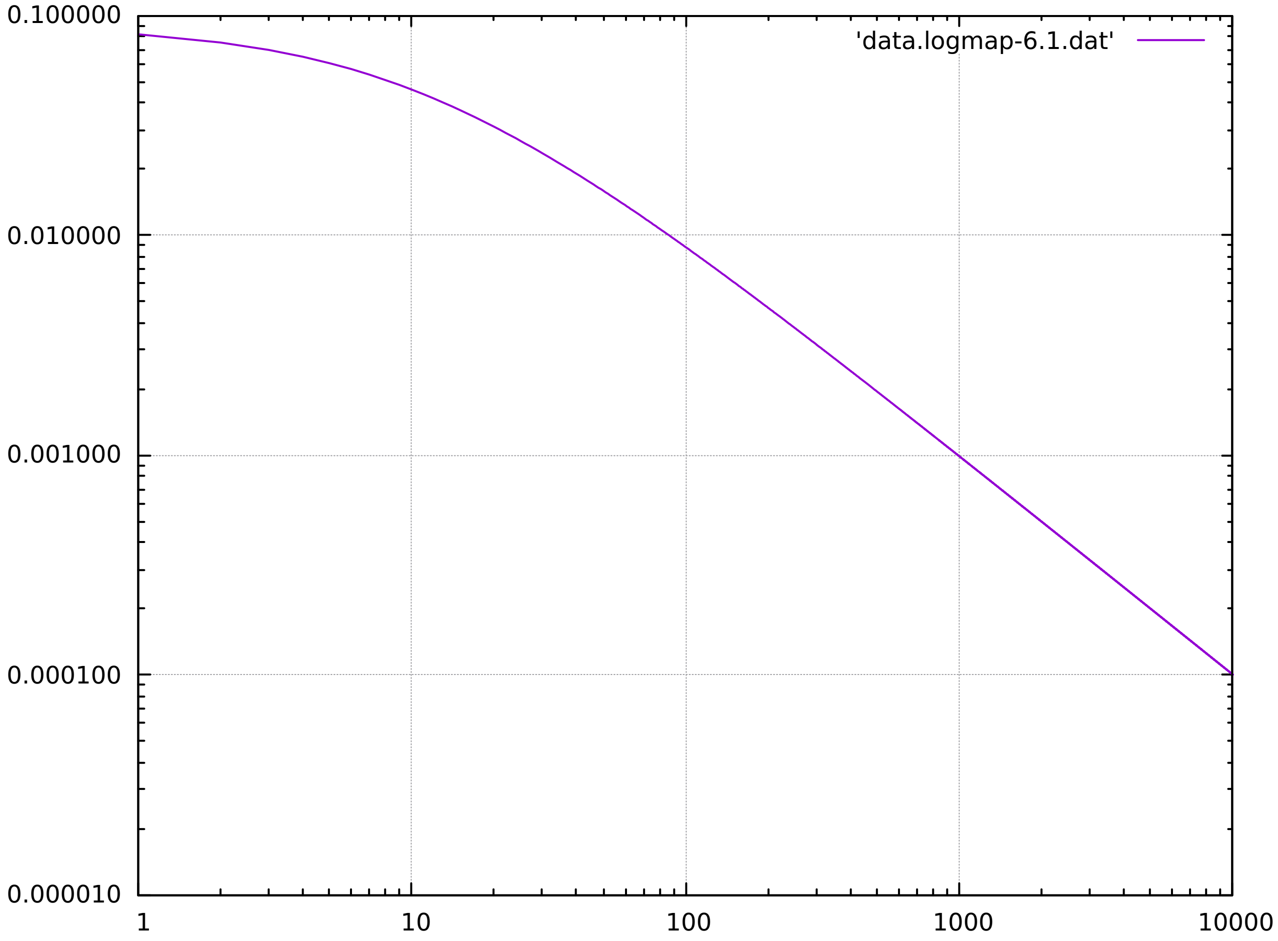
Gráfico 13: Decaimento temporal, em $\lambda = 1.00$.



x *na ordenada e tempo(segundos) na abscissa*

Aqui vemos que para valores longos de tempo a curva parece descrever uma lei de potencia, ainda que mais próximo a $t = 0$ temos um comprtamento estranho, caraterístico de outro tipo de curva que não dada por uma lei de potência.

Gráfico 14: Log x Log: Verificar lei de potência, em $\lambda = 1.00$.



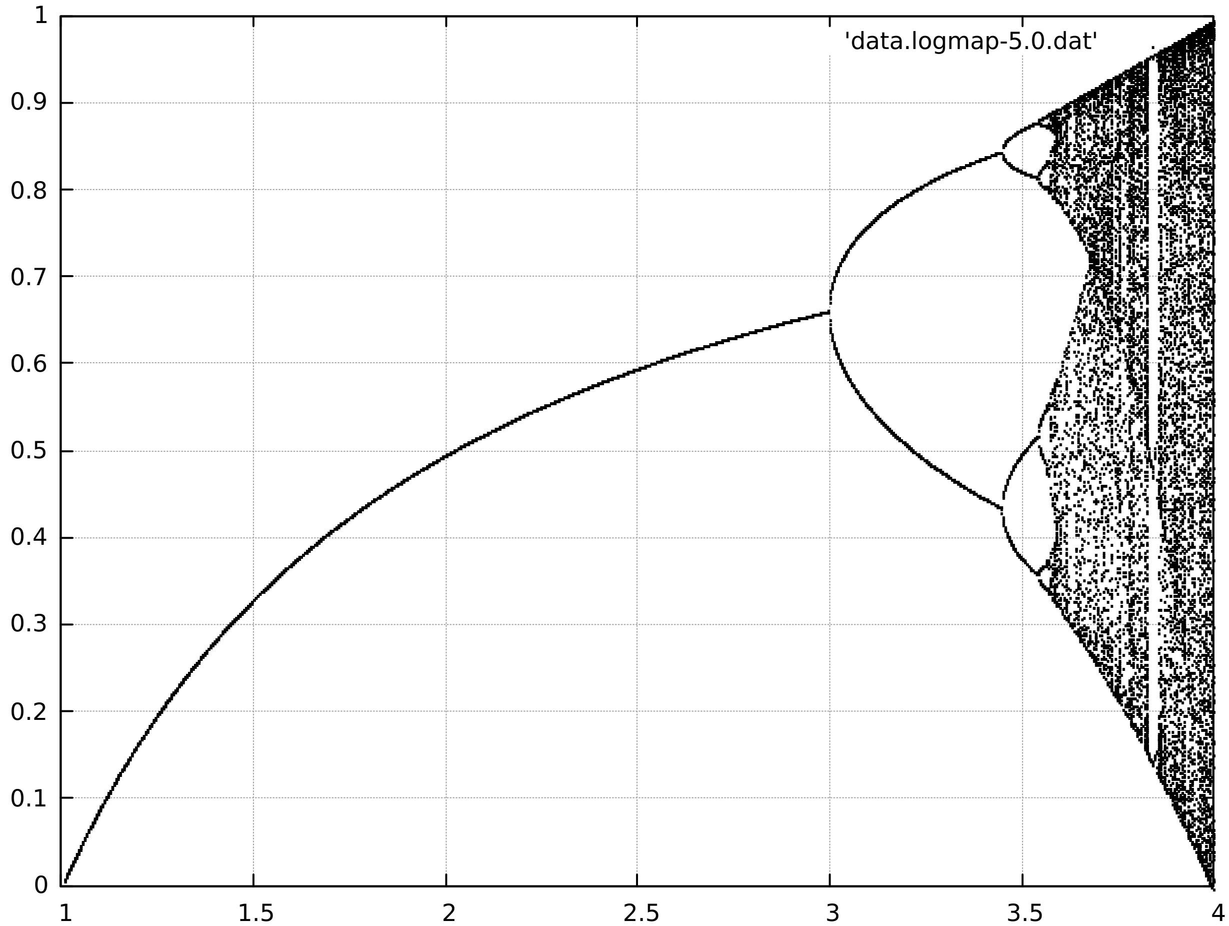
x *na ordenada e tempo*(*segundos*) *na abscissa*

5 Mapa Bifurcado

5.1 Atratores Estranhos

Para consumar este trabalho, temos um plote dos pontos de λ. O longo deste texto fiz mensão diversas vezes a transição e os pontos de λ. Aqui vemos a relação direta entre os possíveis valores de $x*$ em função da disribuição de λ, onde contemplamos este mapa conhecido como: Mapa Bifurcado. Sendo em $\lambda = 4$ um grande númerio de pontos atratores, aparentemente crescente de forma caótica e indeterminada. Tal efeito é oriundo de observarmos muito proximo da evolução temporal do nosso sistema, para tempos maiores provavelmente poderemos notar algum padrão na formação das bifurcações, mas para este regime remos esta figura inusitada.

Gráfico 15: $0 \leqslant \lambda \leqslant 4.00$.



$x*$ na ordenada e λ na abscissa