

QUARTA AVALIAÇÃO

---

# Mapa Logístico e Caos

---

FÍSICA COMPUTACIONAL

Aluno

Marcos Paulo Gomes De Castro

Professor

Nuno Crokidakis



Universidade Federal Fluminense

16 de Junho de 2017

# Introdução

Um Mapa Logístico é uma aplicação matemática que associa um valor  $x_n$  com outro  $x_{n+1}$ , tal objeto foi citado inicialmente em um artigo sobre comportamento caótico em equações não lineares, tendo sua popularização em 1976 em um artigo de Robert May sobre comportamento demográfico. Oriundo da equações de Pierre François Verhulst:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \quad (1)$$

aqui trataremos  $K = 1$ , tal que este assim obtemos o seguinte polinômio de segundo grau:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad (2)$$

Este moodelo aparentemente simples é muito rico, nele podemos obter informações importantes no estudo do comportamento caótico. Os pontos em que o mapa se aproxima do seu valor previsto são ditos atratores, os quais podemos calcular para um dado domínio, haja visto o comportamento caótico do mapa (1) temos valores de  $x^*$  para os quais os pontos são diversos e outros métodos algébricos são utilizados:

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad x^* = 0 \quad (3)$$

$$1 < \lambda \leq 3, \quad x^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad (4)$$

$$3 < \lambda \leq 4, \quad x^* = x_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\lambda > 4, \quad x^* = \text{indefinido} \quad (6)$$

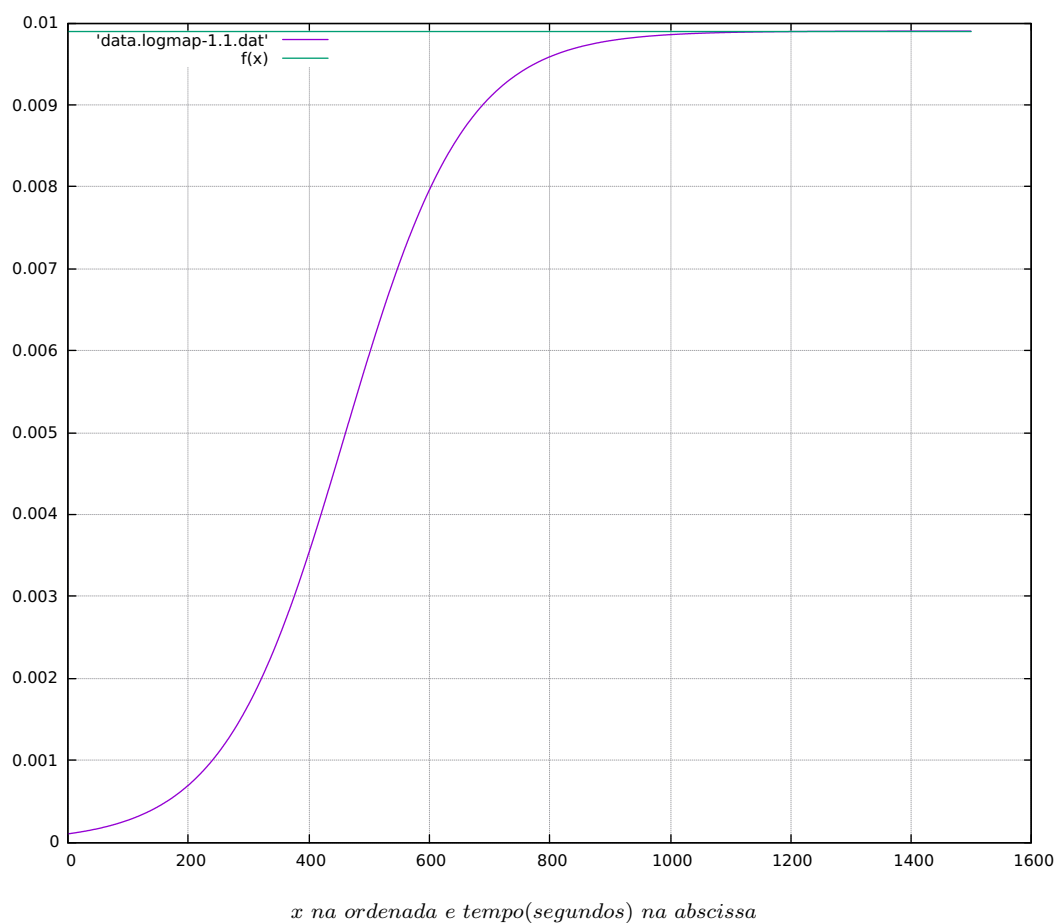
Nos itens seguintes faremos uma análise deste mapa para diferentes valores de  $\lambda$ .

## 1 Análise de Convergência

Dado o mapa (2) podemos iterar o mesmo fazendo uso de um recurso computacional, como um programa em C no caso deste trabalho, para isso iremos obter uma coluna com valores de  $x_n$  e outra para passos de tempo, onde cada iteração representa 1 *segundo*. Ao plotar estes valores em um plano cartesiano, depositando o tempo sobre a abscissa e os valores de  $x_n$  sobre a ordenada obtemos uma curva onde podemos observar a convergência para o valor calculado vide a relação (4).

No gráfico (1) temos  $\lambda = 1.01$ , para este teremos um valor esperado de  $x^* = 0.00990$ , nele podemos ver que o mapa atinge a convergência em torno de 25 *min*.

**Gráfico 1:** Convergência do Mapa Logístico para  $\lambda = 1.01$ .

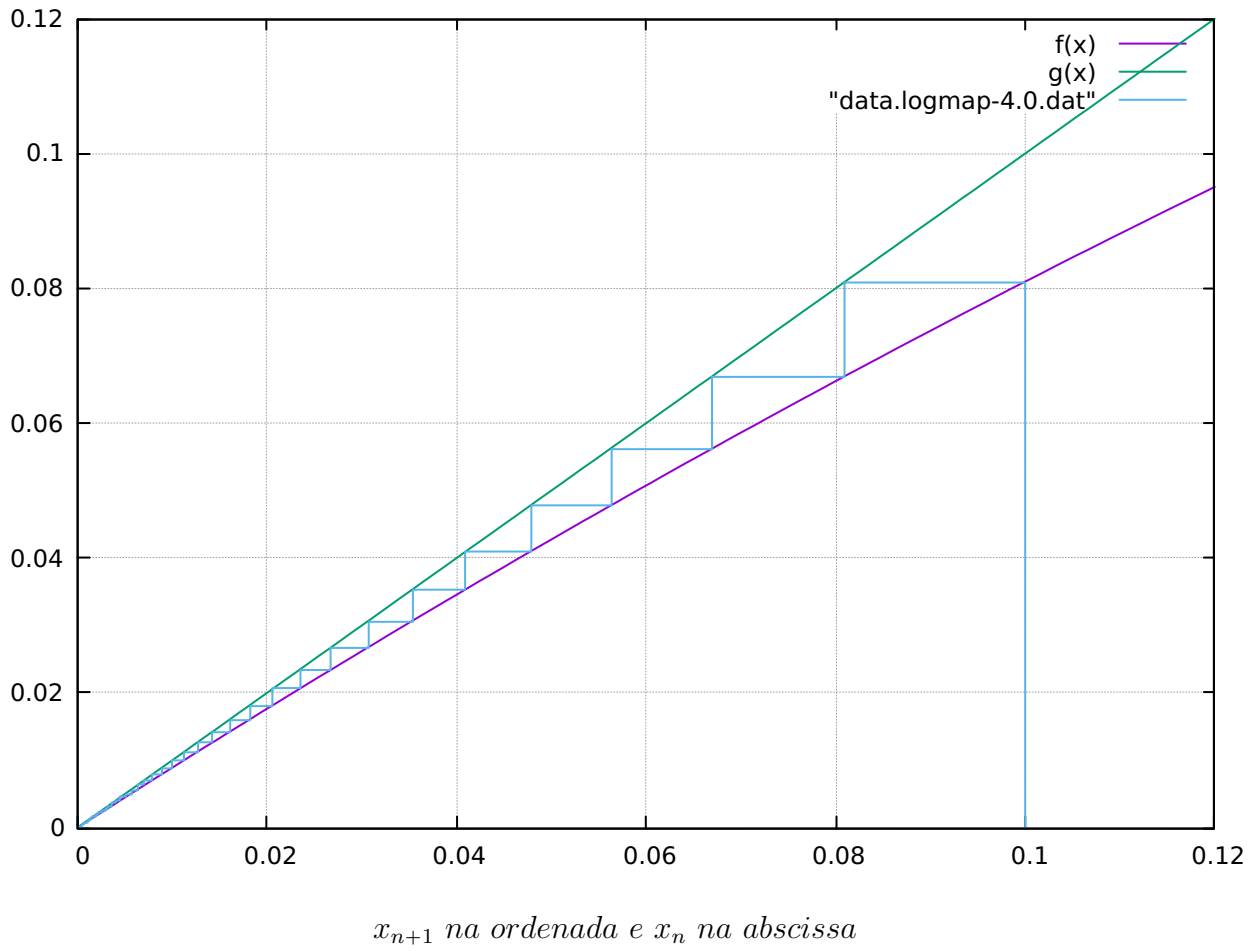


## 2 Diagramas e Atratores

Para valores de  $\lambda \geq 1.00$  temos valores de  $x_n \geq 0$ , com isso podemos plotar um diagrama de  $x_{n+1}$  por  $x_n$  sobre a reta  $x_{n+1} = x_n$  e a parábola  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$  e obter diagramas escada para analisar os pontos atratores. Para valores de  $1 \leq \lambda \leq 3$  temos pontos simples, onde o mapa logístico converge e atinge os valores esperados pela relação (4).

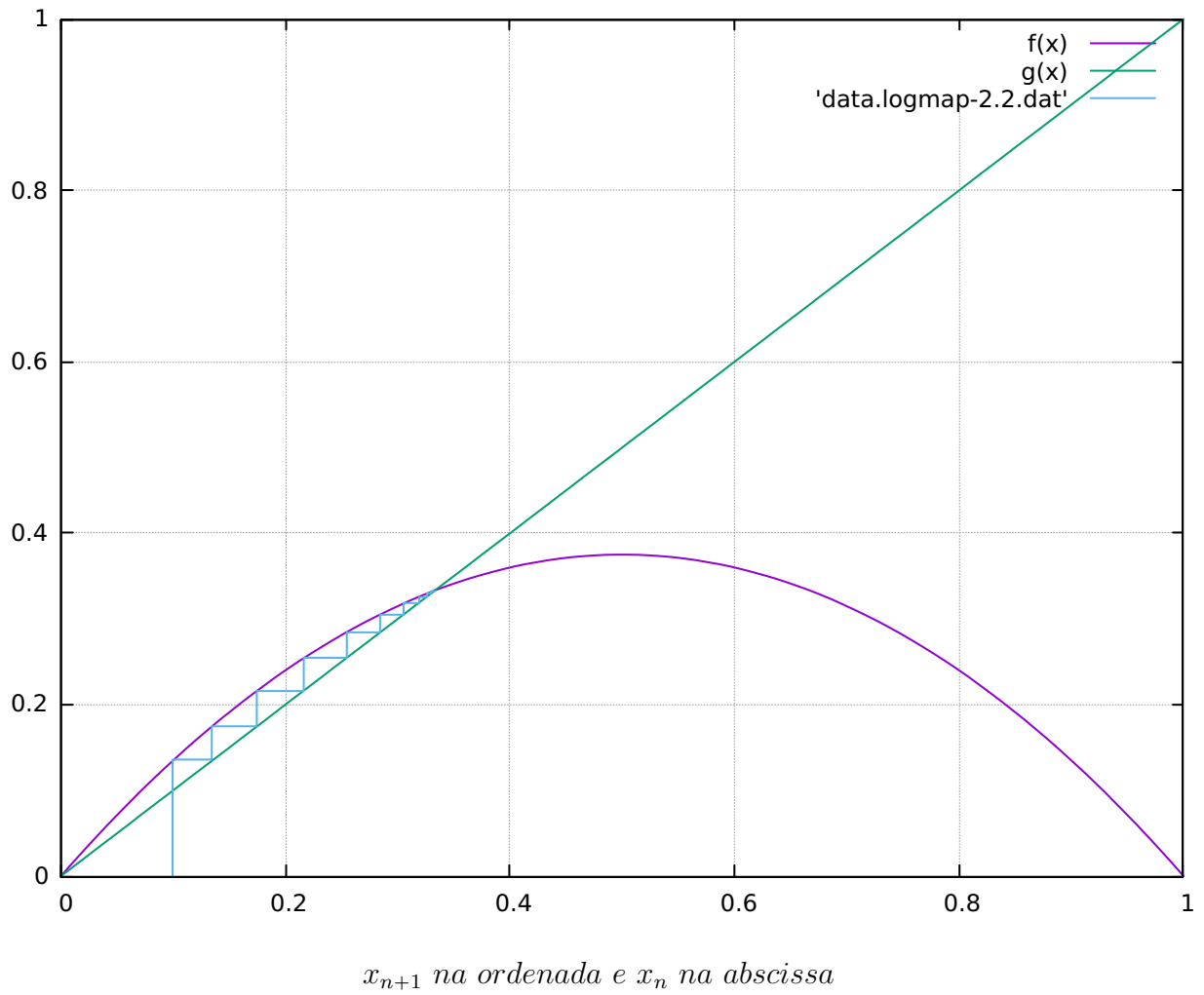
## 2.1 Atrator em $\lambda = 0.90, x^* = 0$

Gráfico 2: Mapa Escada  $\lambda = 0.90$ .



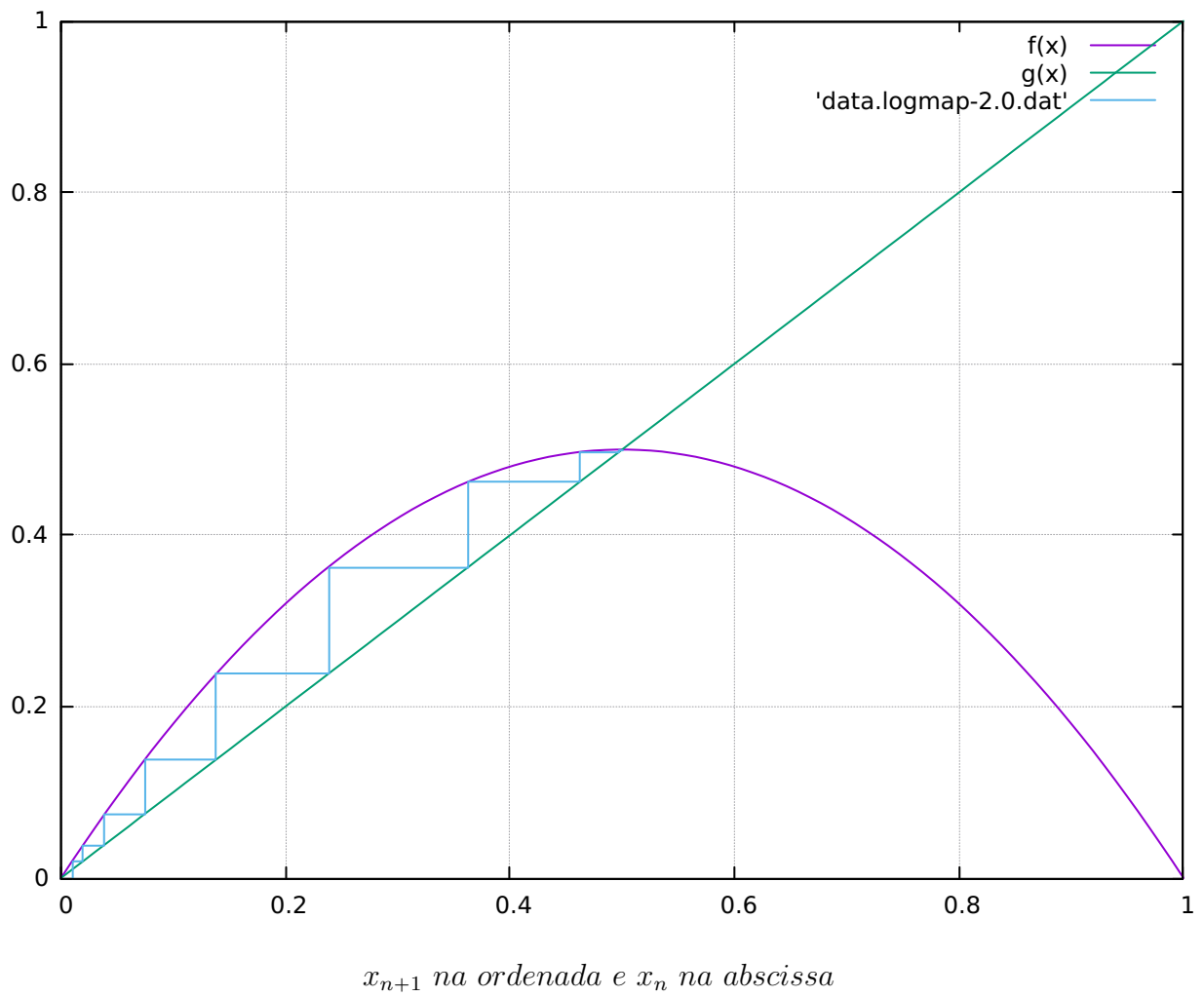
## 2.2 Atrator em $\lambda = 1.50, x^* = 0.33$

Gráfico 3: Mapa Escada  $\lambda = 1.50$ .



### 2.3 Atrator em $\lambda = 2.00$ , $x^* = 0.50$

Gráfico 4: Mapa Escada  $\lambda = 2.00$ .

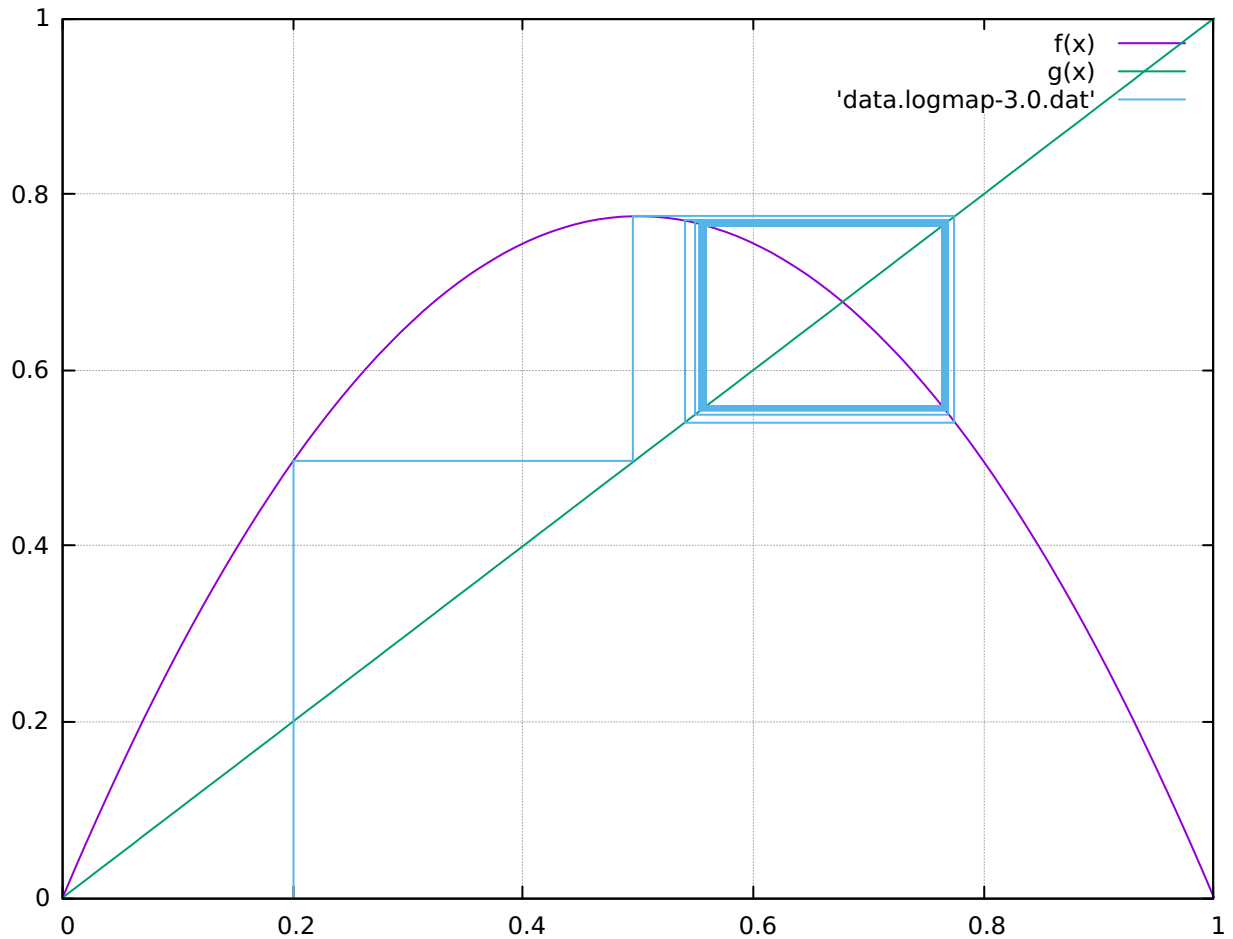


### 3 Valores Excentricos de $\lambda$

Para valores de  $3 \leq \lambda \leq 4$  temos um comportamento caótico, surgem outros pontos atratores, e temos de fazer uso de recursos algébricos específicos para determinar analiticamente os seus respectivos valores. ...

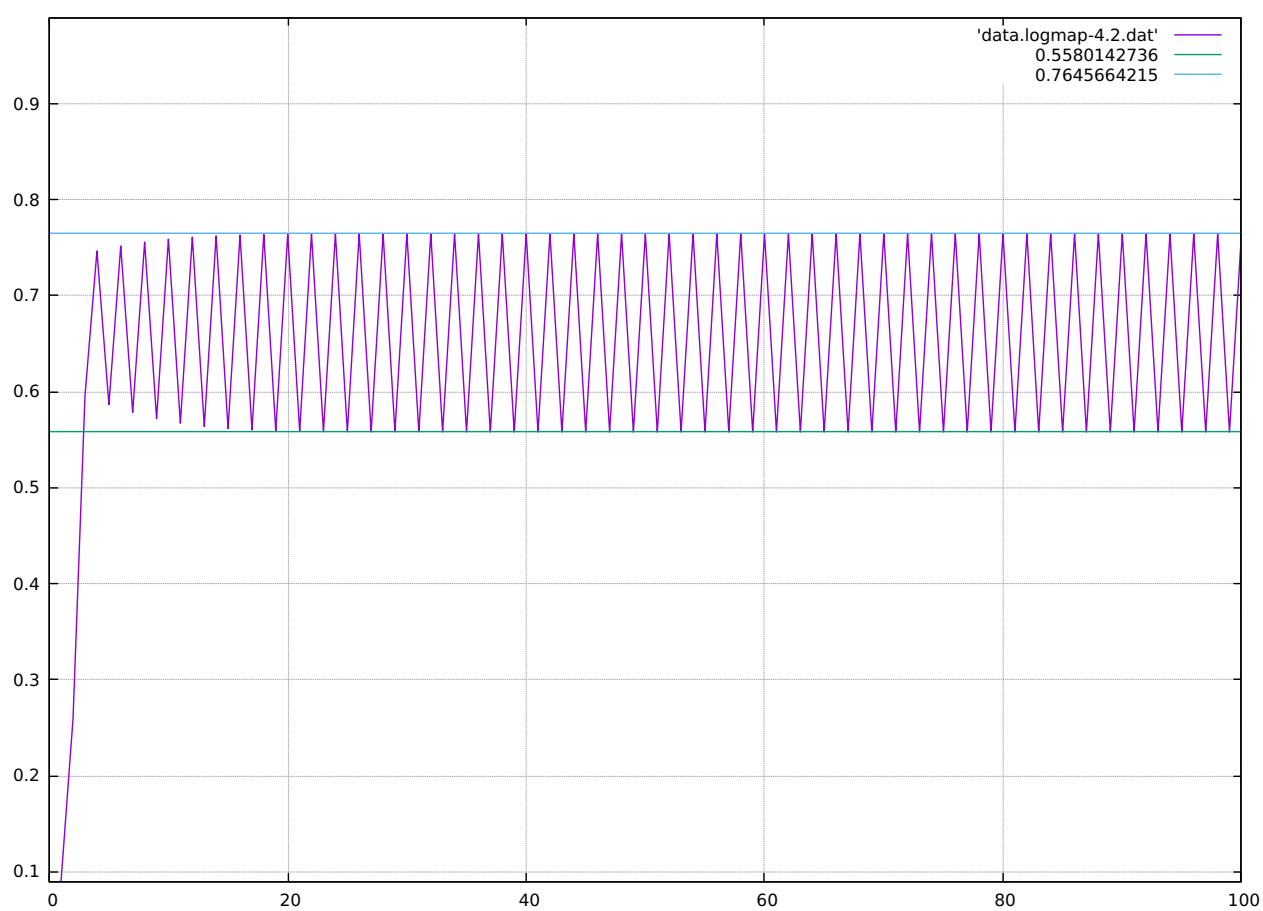
#### 3.1 $\lambda = 3.10$

**Gráfico 5:** Mapa Escada  $\lambda = 3.10$ .



$x_{n+1}$  na ordenada e  $x_n$  na abscissa

**Gráfico 6:** Convergência do Mapa Logístico para  $\lambda = 3.10$ .

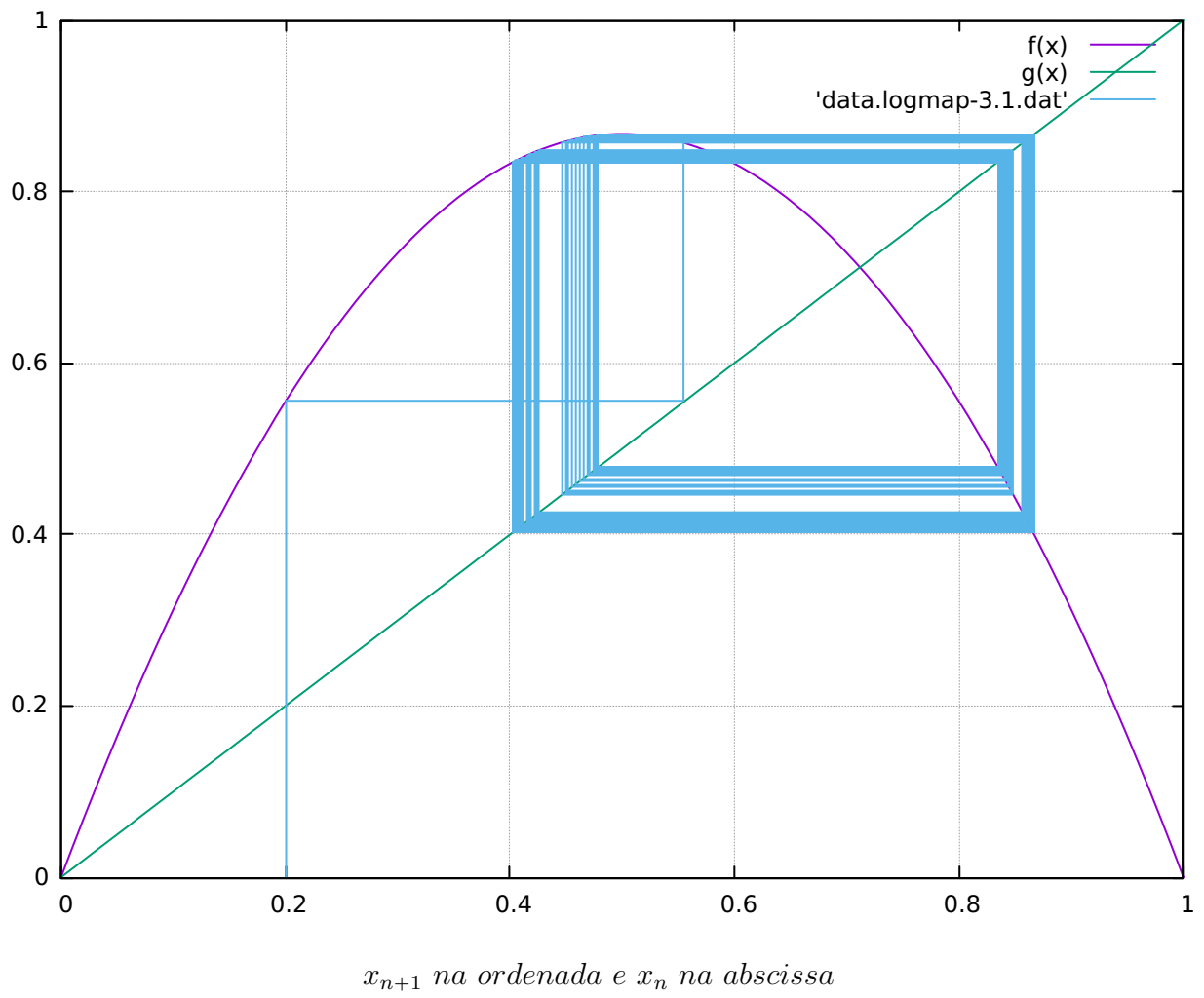


*$x^*$  na ordenada e  $x_n$  na abscissa*

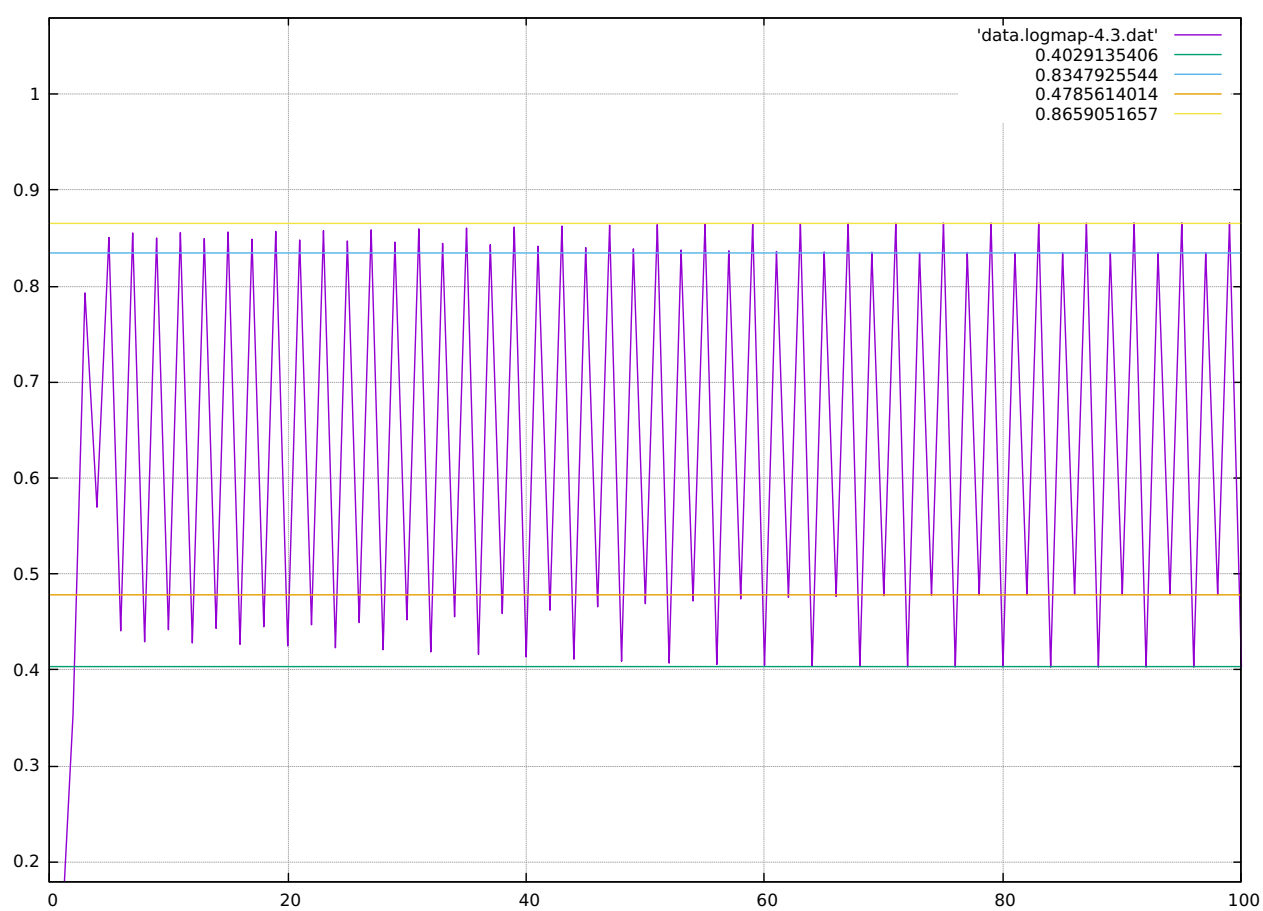


### 3.2 $\lambda = 3.47$

Gráfico 7: Mapa Escada  $\lambda = 3.47$ .



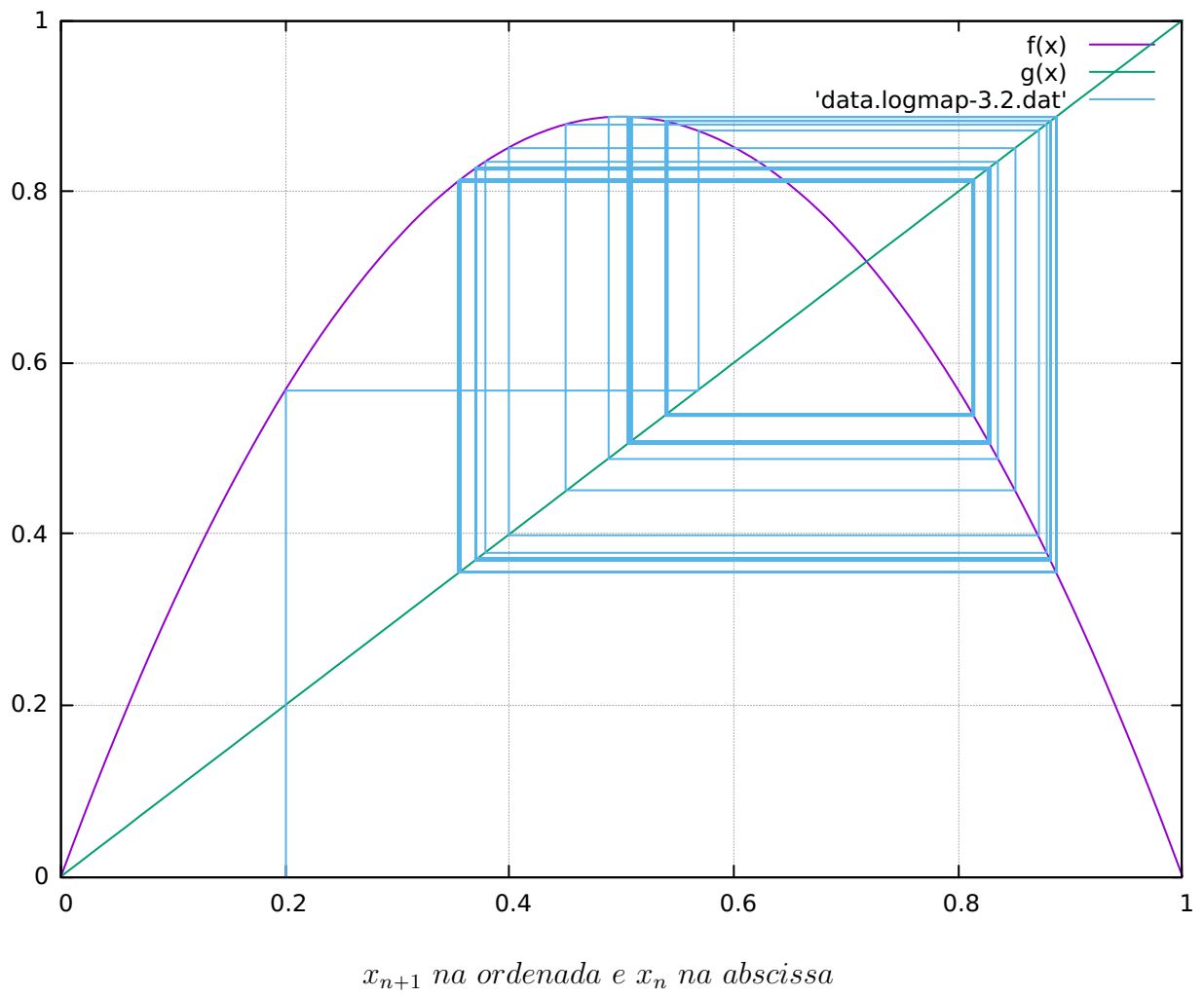
**Gráfico 8:** Convergência do Mapa Logístico para  $\lambda = 3.47$ .



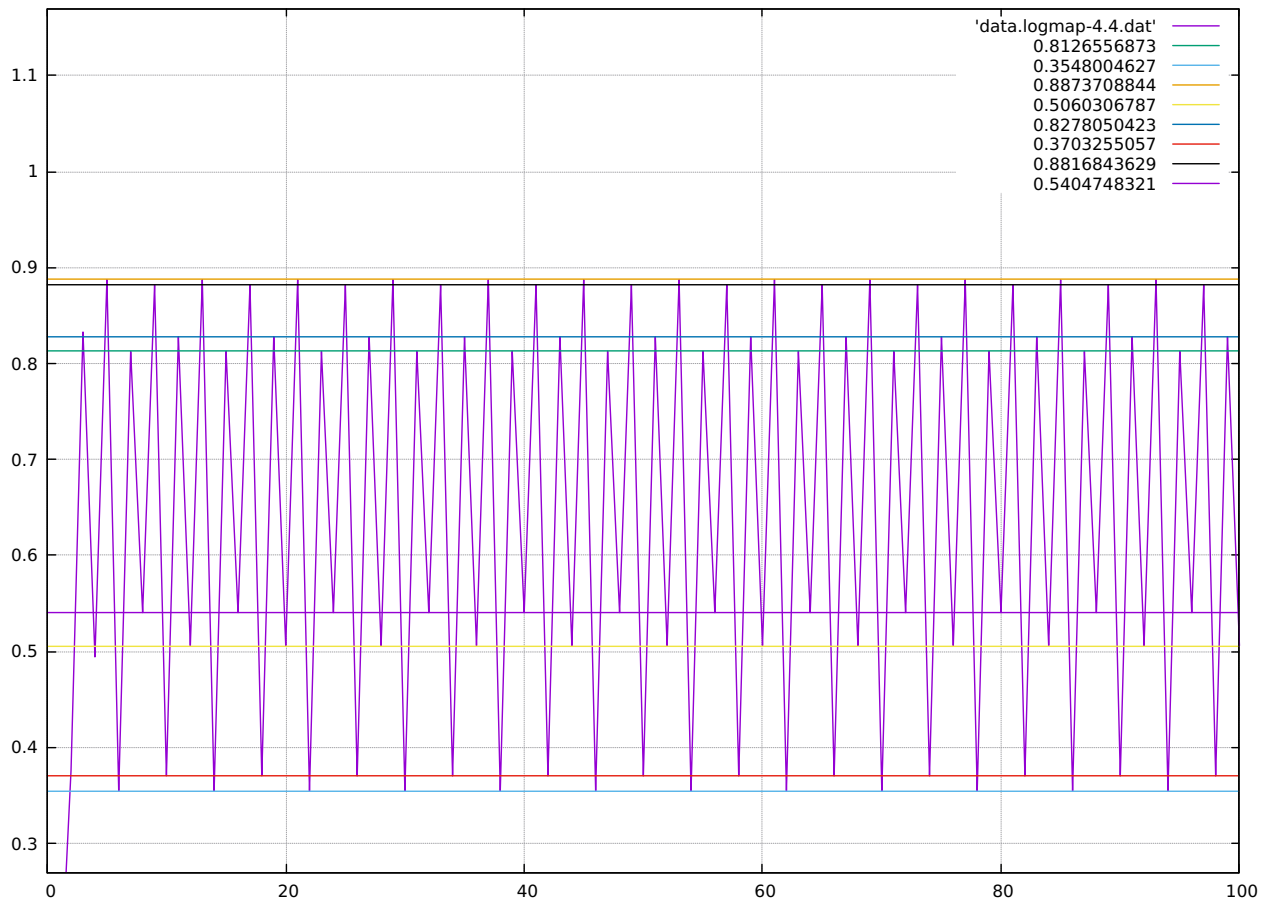
*$x^*$  na ordenada e  $x_n$  na abscissa*

### 3.3 $\lambda = 3.55$

Gráfico 9: Mapa Escada  $\lambda = 3.55$ .



**Gráfico 10:** Convergência do Mapa Logístico para  $\lambda = 3.55$ .

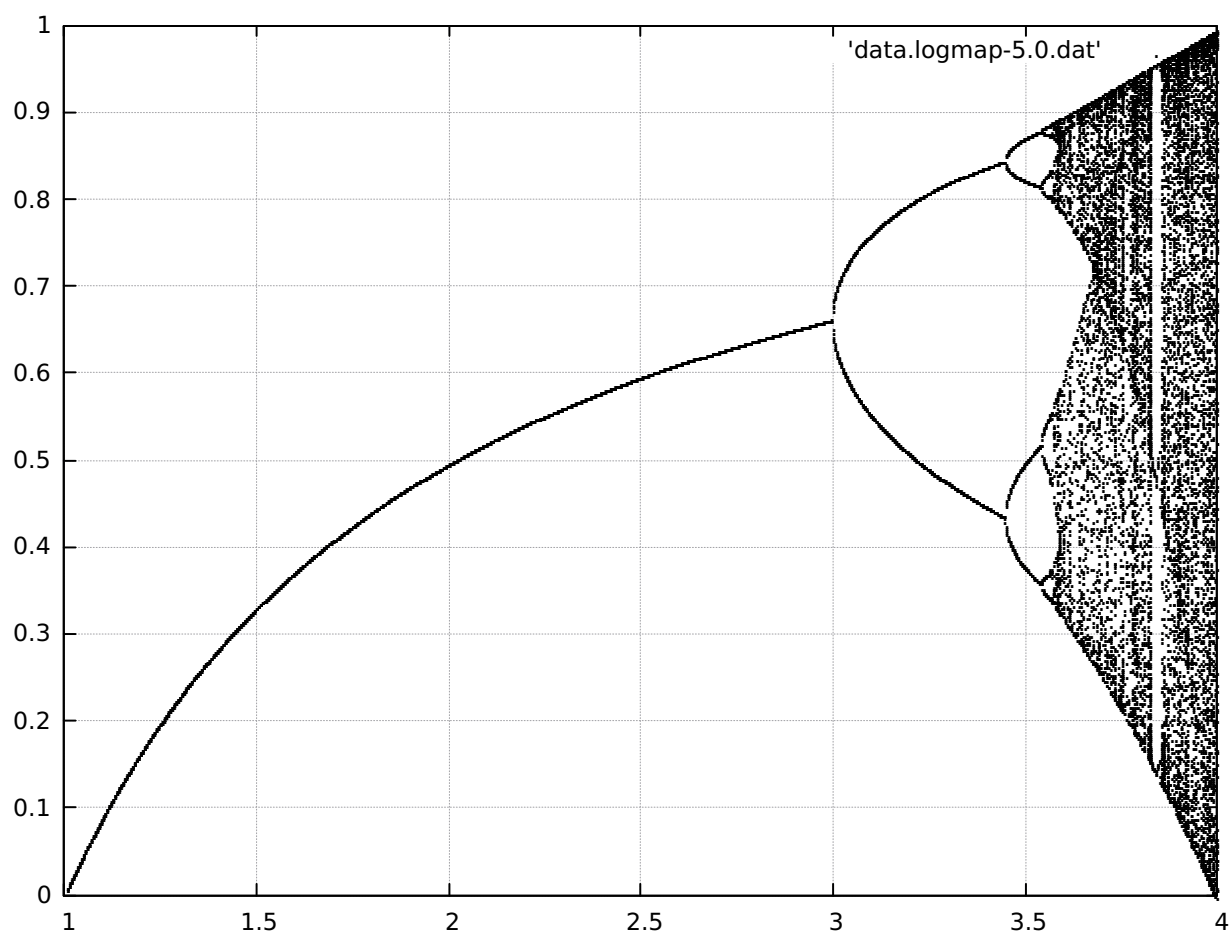


$x^*$  na ordenada e  $x_n$  na abscissa

## 4 Mapa Bifurcado

### 4.1 Atratores Estranhos

Gráfico 11:  $0 \leq \lambda \leq 4.00$ .



$x^*$  na ordenada e  $\lambda$  na abscissa