

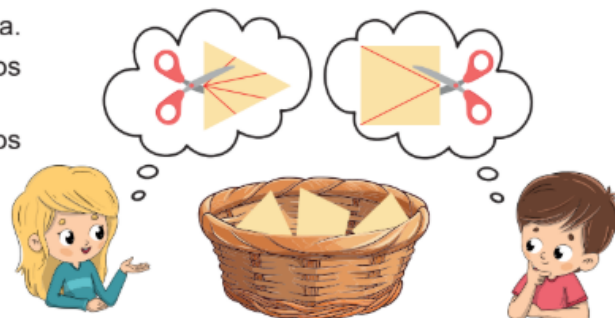
COLÉGIO ESTADUAL PRISCO VIANA			
 	Discente:		Apostila em PDF
	Série:	Turma:	Turno:
	Data: ____/____/____		
	OBMEP 2025 – FASE 2		
Docente: MARCOS ANTONIO DE JESUS			OBMEP 2025 Grupo do WhatsApp 

PREPARAÇÃO OBMEP 2025 – N3 SEGUNDA FASE - QUESTÕES

1. Ana e Pedro cortam pedaços de papel que estão em uma cesta.

- Sempre que Ana pega um pedaço, corta em cinco pedaços e devolve todos eles para a cesta.
- Sempre que Pedro pega um pedaço, corta em três pedaços e devolve todos eles para a cesta.

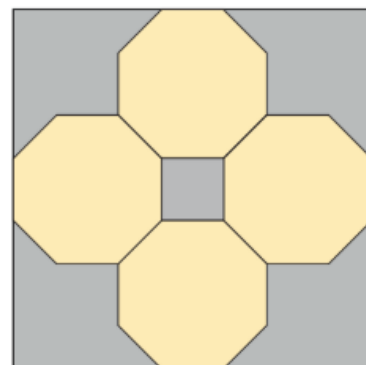
Inicialmente há três pedaços de papel na cesta.



a) Quantos pedaços de papel ficarão na cesta depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta?

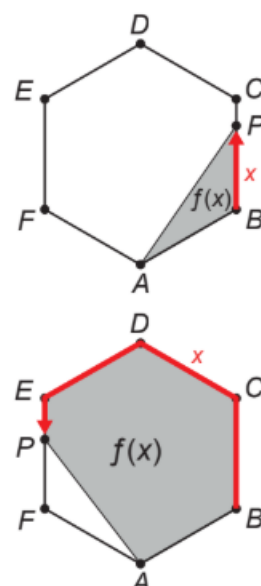
2. Quatro octógonos regulares de lados medindo 1 cm foram desenhados em um cartão quadrado, como na figura. Cada octógono tem um lado na borda do cartão e octógonos adjacentes têm um lado em comum.

a) Qual é a área do cartão?

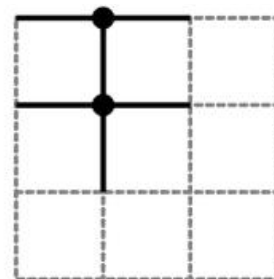


3. Um hexágono regular $ABCDEF$ tem lados de medida 1. Um ponto P desloca-se na borda do hexágono, a partir do vértice B , passando pelos vértices C , D e E até chegar ao vértice F . Seja x a distância percorrida pelo ponto P e seja $f(x)$ a área da região com vértices em P , A e outros vértices do hexágono pelos quais P já passou. A figura mostra algumas dessas regiões.

a) Calcule $f(1)$.



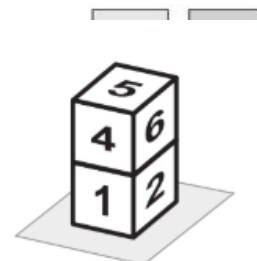
4. Um terreno quadrado foi dividido em 9 lotes também quadrados, cercados por muros. Câmeras instaladas no encontro de dois ou mais muros vigiam os muros adjacentes ao ponto de instalação. Na figura temos duas câmeras vigiando 6 muros.



a) Indique uma posição de duas câmeras na figura abaixo de modo que elas vigiem a maior quantidade possível de muros.



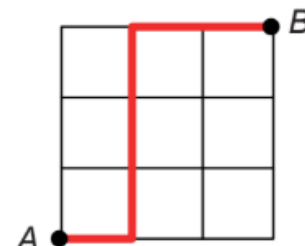
5. Marina tem vários dados idênticos com faces numeradas de 1 a 6. Nesses dados, a soma dos números em faces opostas é sempre igual a 7. Ela junta ou empilha alguns desses dados sobre uma mesa e anota a soma de todos os números que consegue ver ao dar uma volta ao redor da mesa. Por exemplo, para os dados a figura ao lado ela anotou o número 33.



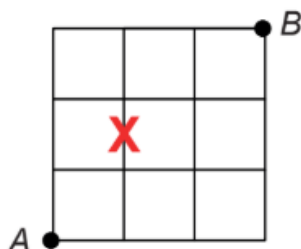
a) Qual é o número que Marina deve anotar para os dados da figura abaixo?



6. Duas formigas caminham sobre as linhas do quadriculado da figura. No mesmo instante, uma parte do ponto A e a outra, do ponto B . A velocidade da formiga que parte de B é dois terços da velocidade da formiga que parte de A . A formiga que parte de A sempre caminha para a direita ou para cima, e a formiga que parte de B sempre caminha para a esquerda ou para baixo. Cada vez que uma delas têm duas direções para prosseguir, essas direções têm probabilidade $1/2$ de ser escolhida. Por exemplo, a probabilidade de que a formiga que parte de A siga o caminho indicado na figura é $(1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) = 1/16$, pois ela tem que fazer 4 escolhas de direções.



a) Qual é a probabilidade de que a formiga que parte de A passe pelo lado do quadriculado marcado com X?



1. Aninha tem nove cartões numerados de 1 a 9. Ela forma sequências com esses cartões colocando alguns deles lado a lado. Uma sequência de Aninha é chamada de *especial* quando, para quaisquer dois cartões vizinhos, o número de um deles é múltiplo do número do outro.

Sequência especial



Sequência especial



Sequência **não** especial



a) Apresente uma sequência especial com sete cartões começando com 6 e 2.

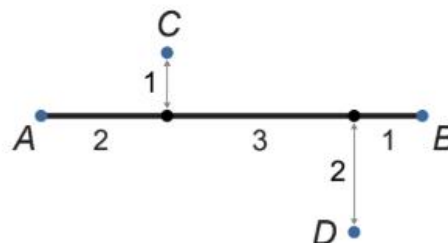


2. Zequinha quer colorir os inteiros positivos de branco ou preto, obedecendo às regras abaixo:

- se n é inteiro, então n e $n + 5$ devem ter a mesma cor;
- se a e b são inteiros e $n = ab$ for branco, então pelo menos um dos fatores a ou b deve ser branco.

a) Explique por que se o 38 for branco, o 3 também deve ser branco.

3. Um carro percorre o trajeto retilíneo AB indicado na figura. Nas proximidades do trajeto, existem antenas de celular com suas bases nos pontos C e D , também indicados. A distância do carro ao ponto A é representada por x . Considere a função f que associa x ao quadrado da distância do carro à base da antena mais próxima. Por exemplo, quando o carro está em A , a antena mais próxima é C e o quadrado da distância do carro a ela é $2^2 + 1^2 = 5$; portanto, $f(0) = 5$.

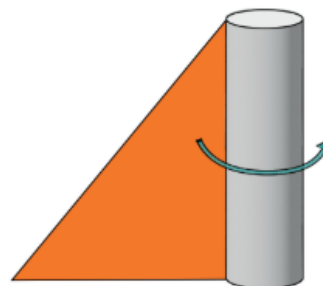


a) Qual é o valor de $f(3)$?

4. Três pessoas entram em um elevador no andar térreo de um prédio com quatro andares, além do térreo. Cada uma delas escolhe um andar ao acaso, independentemente das demais.

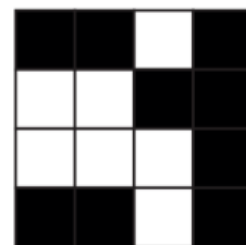
a) Qual é a probabilidade de que o elevador pare em um único andar?

5. Um adesivo, na forma de triângulo retângulo, será colado sobre a superfície lateral de uma lata cilíndrica, com um dos catetos coincidindo com a altura da lata, como na figura. A altura da lata é 15 cm e o comprimento da circunferência da base é 12 cm.

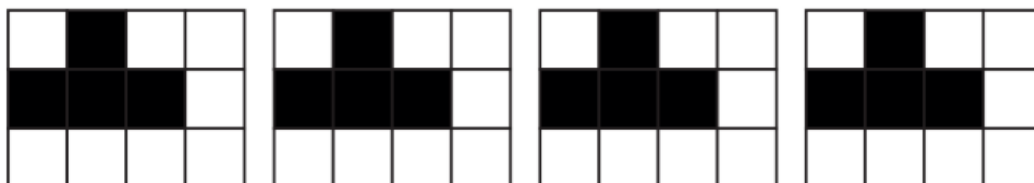


a) Se os catetos do triângulo medem 15 cm e 10 cm, qual será a área da superfície lateral da lata não coberta pelo adesivo?

6. Pedro deseja pintar quadradinhos de tabuleiros de modo que a quantidade de quadradinhos pintados em qualquer subtabuleiro 3×3 seja sempre um número ímpar. Veja um exemplo em um tabuleiro 4×4 na figura ao lado.



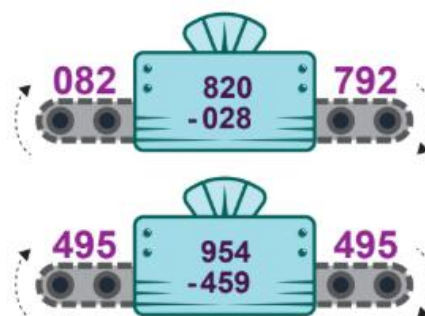
a) Pedro já pintou as duas primeiras linhas de um tabuleiro 3×4 . Indique as 4 maneiras diferentes de completar a pintura desse tabuleiro pintando somente casas da última linha.



1. Uma máquina transforma um número de três algarismos, não todos iguais e podendo ter zeros à esquerda, em outro número de três algarismos (podendo ter zeros à esquerda) da seguinte forma:

- I. ordena os algarismos do número em ordem decrescente;
- II. ordena os algarismos do número em ordem crescente;
- III. calcula a diferença entre os números obtidos em I e II.

Por exemplo, observe na figura as transformações $082 \rightarrow 792$ e $495 \rightarrow 495$.

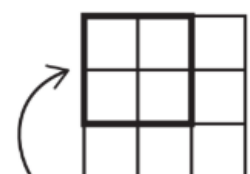


a) Qual é o número que sai da máquina se a entrada for 373?



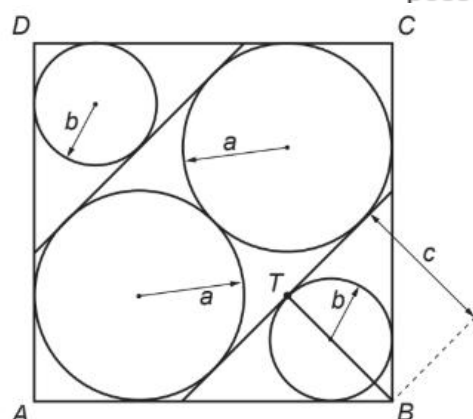
2. Marco preenche quadriculados 3×3 com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, sem repetir nenhum deles.

a) Marco preencheu um quadriculado de forma que os quatro números escritos no quadrado 2×2 destacado têm a menor soma possível. Qual é a soma dos cinco números escritos fora desse quadrado?



Menor soma possível

3. A figura ao lado mostra um quadrado $ABCD$ de lado 1 e quatro circunferências, todas tangentes aos lados do quadrado e aos segmentos, como indicado. O raio das duas circunferências maiores é a , e o raio das duas circunferências menores é b . O segmento BT tem medida c .



a) Mostre que a diagonal do quadrado mede $2(a + c)$.

4. Um número natural é chamado de *zerímpar* quando possui uma quantidade ímpar de algarismos zero. Por exemplo, 32021 e 8000 são zerímpares, enquanto 17 e 2040 não são.

a) Quantos são os números zerímpares de 2 algarismos?

5. Uma caixa contém 4 bolas brancas, 4 azuis, 6 vermelhas e 6 pretas, idênticas a menos da cor. Sem olhar, bolas são retiradas uma a uma da caixa, sem devolução, até que seja retirada a primeira bola branca.



a) Qual é a probabilidade de que uma bola branca saia logo na primeira retirada?

6. Duas companhias aéreas, CONTI e TRACE, conectam 10 capitais da América do Sul. O diagrama apresenta alguns voos realizados pelas companhias, sendo CONTI representada por uma linha contínua vermelha e TRACE por uma linha tracejada azul.

Os voos estão planejados do seguinte modo:

- dadas duas capitais quaisquer, apenas uma das companhias realiza voos diretos entre elas, em ambos os sentidos;
- entre Brasília e La Paz não é possível fazer viagens usando apenas a CONTI, mesmo fazendo conexões em outras capitais.



a) Qual das companhias faz voos diretos entre Santiago e Brasília? Justifique sua resposta.

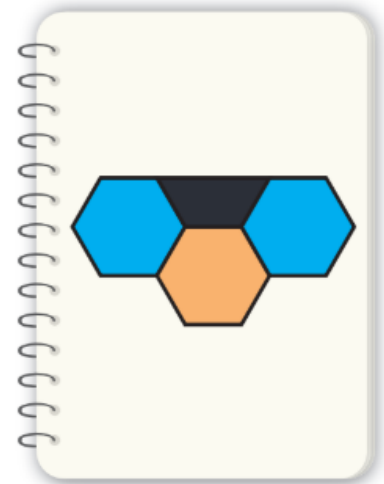
1. Gabriel gosta de preencher quadriculados 3×3 com números de forma que quaisquer três deles, alinhados na horizontal, vertical ou diagonal, tenham a seguinte propriedade: o número central deve ser a média aritmética dos seus dois vizinhos.

19	11	3	$11 = \frac{19 + 3}{2}$	$22 = \frac{19 + 25}{2}$	$14 = \frac{19 + 9}{2}$
22	14	6	$14 = \frac{22 + 6}{2}$	$14 = \frac{11 + 17}{2}$	$14 = \frac{25 + 3}{2}$
25	17	9	$17 = \frac{25 + 9}{2}$	$6 = \frac{3 + 9}{2}$	

a) Complete o preenchimento do quadriculado abaixo, iniciado por Gabriel.

2		14
10		

2. Maria pinta, em seu caderno, figuras formadas por trapézios e hexágonos. Cada hexágono pode ser pintado de azul, bege ou cinza, e cada trapézio, de azul ou preto. Polígonos com um lado em comum não podem ter a mesma cor. A figura ao lado é um exemplo de uma pintura feita por Maria.

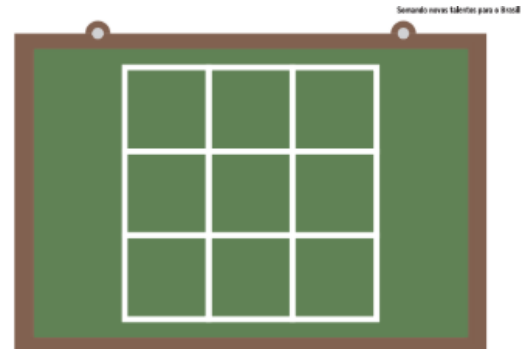


- a) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?

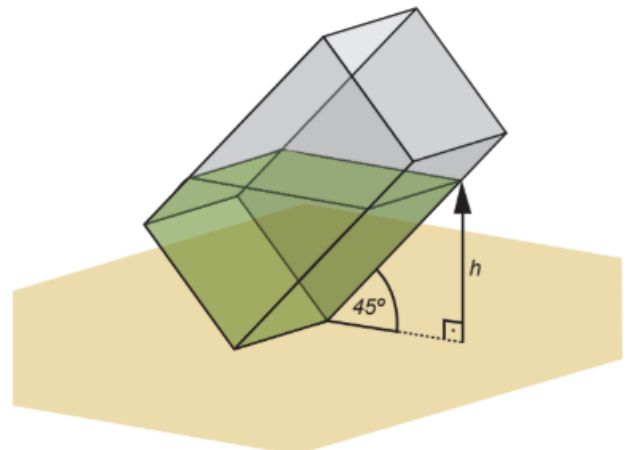


3. Os números de 1 a 9 são distribuídos ao acaso e sem repetição nas casas do quadriculado desenhado na lousa ao lado.

- a) Qual é a probabilidade de que a casa central seja preenchida com um número ímpar?

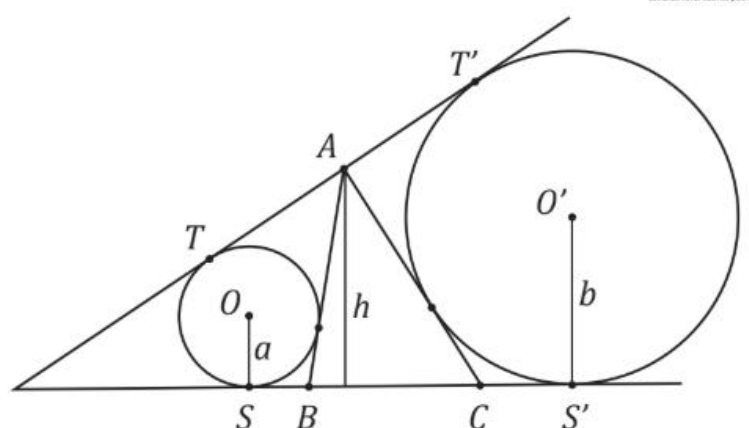


4. Uma lata medindo $20\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, sem tampa, é sustentada por um suporte, de modo que uma de suas arestas mais curtas fique apoiada no plano horizontal e as arestas mais longas formem um ângulo de 45° com o plano horizontal, conforme mostra a figura. Suponha que um líquido seja colocado na lata, até a altura h em relação ao plano horizontal, também como indicado na figura.



- a) Qual é o volume total da lata?

5. Na figura, as circunferências de raios a e b , centradas em O e O' , são tangentes aos lados do ângulo em S e T e em S' e T' , respectivamente. Elas também tangenciam os lados AB e AC de um triângulo ABC , em que A pertence a TT' e BC está contido em SS' . Esse triângulo ABC tem altura h relativa à base BC .



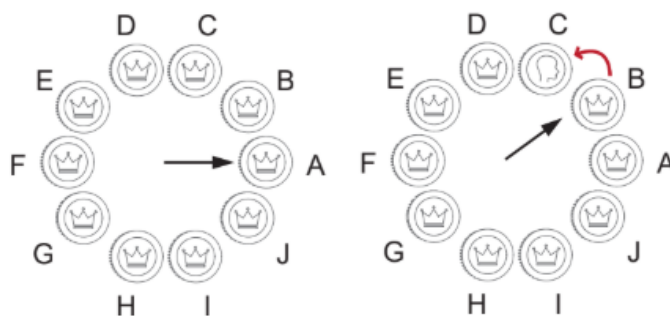
- a) Calcule o perímetro do triângulo ABC quando $SS' = 10$.

6. Em cada uma das dez posições marcadas com as letras de A a J na figura abaixo, é colocada uma moeda. Inicialmente, todas as dez moedas são colocadas com a face coroa voltada para cima e um ponteiro aponta para a posição A. Esse ponteiro começa a se movimentar no sentido anti-horário, saltando de uma posição para a outra mais próxima.

Após cada salto,

- se o ponteiro apontar para uma moeda com a face cara para cima, nada acontece;
- se o ponteiro apontar para uma moeda com a face coroa para cima, deve-se, então, virar a moeda seguinte.

Por exemplo, após o primeiro salto, o ponteiro aponta para a posição B (coroa) e a moeda na posição C é virada, ficando com a face cara para cima.



a) Como ficarão as moedas nas posições C e D logo após o segundo salto do ponteiro?

1. A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.

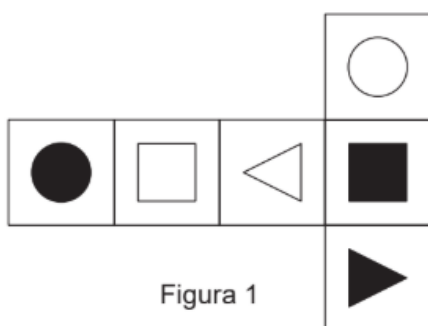


Figura 1



Figura 2

a) Em uma outra vista do mesmo cubo, mostrada abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



Correção Correção

2. A calculadora de Dario tem uma tecla especial. Se um número n diferente de 2 está no

visor e ele aperta a tecla especial, aparece o número $\frac{2 \times n}{n-2}$. Por exemplo, se o número 3 está no visor, ao apertar a tecla especial, aparece o número 6, pois $\frac{2 \times 3}{3-2} = 6$.

a) Se o número 6 está no visor, qual é o número que aparecerá se a tecla especial for apertada?

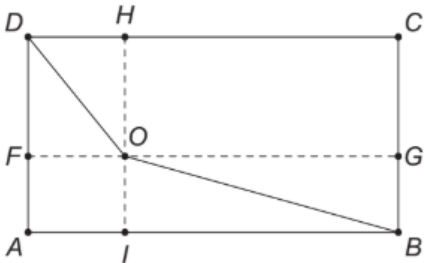


3. As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana têm uma bola cada uma. Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola.

a) Qual é a probabilidade de que Ana receba três bolas?



4. a) Na figura abaixo, o ponto O no interior do retângulo $ABCD$ é tal que $OF = 2$, $OG = 6$, $OH = 3$ e $OI = 1$. Os segmentos FG e HI são paralelos aos lados AB e BC , respectivamente. Calcule $OB^2 + OD^2$.



5. Um tabuleiro preenchido com as letras A, B, C e D é *bacana* se essas quatro letras aparecem em qualquer quadriculado 2×2 do tabuleiro. Por exemplo, dos tabuleiros abaixo, o da esquerda é bacana e o da direita não é bacana.

C	D	C
A	B	A
C	D	C

C	B	C
C	D	A
A	C	B

a) Preencha os tabuleiros abaixo de modo que eles sejam bacanas e diferentes entre si.

A	B	
C	D	

A	B	
C	D	

A	B	
C	D	

Correção Regional

Correção Nacional

6. Seis livros, numerados de 1 a 6, estão inicialmente distribuídos entre seis pessoas A, B, C, D, E e F, respectivamente. Cada uma delas pode trocar seu livro com o de outra pessoa uma única vez por dia. A tabela abaixo mostra um exemplo de possíveis trocas de livros entre as pessoas em dois dias. No 1º dia, as pessoas A e D, bem como B e E, trocaram livros entre si, e C e F não trocaram seus livros. No 2º dia, somente A e C trocaram livros entre si.

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	4	5	3	1	2	6
Após o 2º dia	3	5	4	1	2	6

Trocas: A ↔ D e B ↔ E
 Trocas: A ↔ C

Observe que, após o 2º dia, ocorreu a seguinte distribuição de livros:

- o livro que estava com A ficou com D, o livro que estava com D ficou com C, e o livro que estava com C ficou com A;
- o livro que estava com B ficou com E, e o livro que estava com E ficou com B;
- o livro que estava com F ficou com ele mesmo.

a) Complete a tabela abaixo de acordo com as trocas indicadas:

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia						
Após o 2º dia						

Trocas: B ↔ D
 Trocas: A ↔ B e C ↔ E

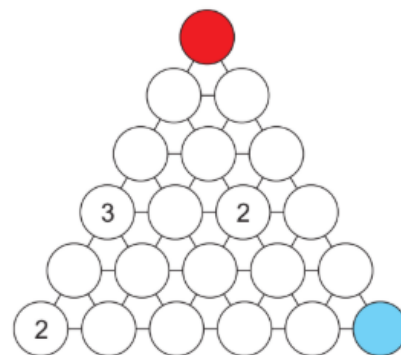
Correção Regional

Correção Nacional

1. Um número inteiro positivo é chamado de *interessante* quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos. Por exemplo, 326 e 1020 são interessantes, pois $3 \times 2 = 6$ e $1 \times 0 \times 2 = 0$.

a) Qual deve ser o valor do algarismo A para que o número 14A8 seja interessante?

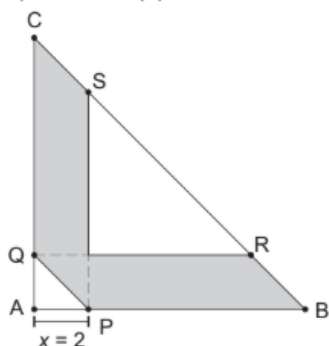
a) Qual número deverá ser escrito no círculo vermelho?



- $a \# b = a^2 + b^2$
- $a @ b = (a + b)^2$

a) Qual é o valor de $(2@3) - (2\#3)$?

a) Calcule $f(2)$.



Correção Regional

Correção
Nacional

a) Quantos nós são feitos até o final do processo?



a) Qual é o maior número que pode aparecer em uma coluna que contém um número 1?

[illegible]