Lista de Exercícios - P1

Valdinei Freire

13 de Março de 2023

1 Probabilidade

1. Suponha que uma moeda é arremessada 7 vezes. Deixe A denotar o evento de que cara é obtida no primeiro arremesso e deixe B denotar o evento de que cara é obtida no quinto arremesso. A e B são disjuntos?

   Considere que `K` indica cara e `C` indica coroa. Note que para o resultado $r = \texttt{KKKKKKK}$ os dois eventos, A e B, ocorrem para esse resultado, isto é, $r \in A$ e $r \in B$, logo, $A \cap B \neq \emptyset$ e A e B não são disjuntos.

2. Se A, B, e C são três eventos tal que $\Pr(A \cup B \cup C) = 0.7$, qual é o valor de $\Pr(A^c \cap B^c \cap C^c)$?

$$\Pr(A^c \cap B^c \cap C^c) = \Pr((A \cup B \cup C)^c) = 1 - \Pr(A \cup B \cup C) = 0.3$$

3. Suponha que uma eleição contenha 350 eleitores, dos quais 250 votam no candidato A e 100 no candidato B. Se 30 eleitores são escolhidos aleatoriamente, qual é a probabilidade que exatamente 18 eleitores escolham o candidato A?

$$\frac{\binom{250}{18}\binom{100}{12}}{\binom{350}{30}} = 0.0579$$

4. Suponha que uma caixa contenha r bolas vermelhas e w bolas brancas. Suponha também que bolas são retiradas da caixa uma por vez, aleatoriamente, sem reposição. (a) Qual é a probabilidade que todas as r bolas vermelhas sejam obtidas antes de qualquer bola branca? (b) Qual é a probabilidade que todas r bolas vermelhas serão obtidas antes que duas bolas brancas sejam obtidas?

   (a)

$$\frac{\binom{r}{r}\binom{w}{0}}{\binom{r+w}{r}} = \frac{r!w!}{(r+w)!}$$

(*b*)

$$\frac{\binom{r}{r}\binom{w}{1}}{\binom{r+w}{r+1}} = \frac{(r+1)!w!}{(r+w)!}$$

5. Suponha que uma caixa contenha r bolas vermelhas, w bolas brancas, e b bolas azuis. Suponha também que bolas são retiradas da caixa uma por vez, aleatoriamente, sem reposição. Qual é a probabilidade de que todas as r bolas vermelhas sejam obtidas antes que qualquer bola branca seja obtida?

$$\frac{\binom{r}{r}\binom{w}{0}}{\binom{r+w}{r}} = \frac{r!w!}{(r+w)!}$$

6. Suponha que 10 cartas, dentre as quais 5 são vermelhas e 5 são verdes, são colocadas aleatoriamente em 10 envelopes, dos quais 7 são vermelhos e três são verdes, isto é, cada envelope contém uma única carta. Determine a probabilidade de que exatamente k envelopes conterá a carta que combine com sua cor $(k = 0, 1, \ldots, 10)$.

   Para $k = 2, 4, 6, 8$

$$\Pr(k) = \frac{\binom{3}{(k-2)/2}\binom{7}{(8-k)/2}}{\binom{10}{3}}$$

   e caso contrário: $\Pr(k) = 0$.

7. Suponha que os eventos A e B são disjuntos. Sob quais condições A^c e B^c são disjuntos?

$$A^c = B$$

8. Seja A_1, A_2 e A_3 três eventos arbitrários. Mostre que a probabilidade de que exatamente um desses três eventos ocorra será:

$$\begin{aligned} &\Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3) \\ &\quad -2\Pr(A_1 \cap A_2) - 2\Pr(A_1 \cap A_3) - 2\Pr(A_2 \cap A_3) \\ &\quad +3\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

   Qual é a fórmula geral para n eventos arbitrários?

   Considere o evento $A_1^- = A_1 - (A_2 \cup A_3)$, então:

$$\Pr(A_1^{-1}) = \Pr(A_1) - \Pr(A_1 \cap A_2) - \Pr(A_1 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Defina A_2^- e A_3^- de forma equivalente. Então, deseja-se calcular:

$$\begin{aligned}
\Pr(A_1^- \cup A_2^- \cup A_3^-) =& \Pr(A_1) - \Pr(A_1 \cap A_2) - \Pr(A_1 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&+ \Pr(A_2) - \Pr(A_2 \cap A_1) - \Pr(A_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&+ \Pr(A_3) - \Pr(A_3 \cap A_1) - \Pr(A_3 \cap A_2) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
=& \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3) \\
&- 2\Pr(A_1 \cap A_2) - 2\Pr(A_1 \cap A_3) - 2\Pr(A_2 \cap A_3) \\
&+ 3\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^-\right) = \quad & \sum_{i=1}^n \Pr(A_i) - 2\sum_{i<j} \Pr(A_i \cap A_j) \\
& +3\sum_{i<j<k} \Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots \\
& +n(-1)^{n+1} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n).
\end{aligned}$$

2 Probabilidade Condicional

1. Suponha que A, B e D sejam três eventos tais que $\Pr(A|D) \geq \Pr(B|D)$ e $\Pr(A|D^c) \geq \Pr(B|D^c)$. Prove que $\Pr(A) \geq \Pr(B)$.

$$\Pr(A) = \Pr(A|D) + \Pr(A|D^c) \geq \Pr(B|D) + \Pr(B|D^c) = \Pr(B)$$

2. Suponha que uma moeda justa seja arremessada repetidamente de forma independente até que apareça cara e coroa pelo menos uma vez. Qual é a probabilidade de que exatamente três arremessos sejam necessários?

$$\frac{1}{4}$$

3. Suponha que A e B são eventos tais que $\Pr(A) = 1/3$, $\Pr(B) = 1/5$, e $\Pr(A|B) + \Pr(B|A) = 2/3$. Calcule $\Pr(A^c \cup B^c)$.

Temos que

$$\Pr(A^c \cup B^c) = \Pr((A \cap B)^c) = 1 - \Pr(A \cap B)$$

e

$$\Pr(A|B)+\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}+\frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = 5\Pr(A\cap B)+3\Pr(A\cap B) = \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$\Pr(A \cap B) = \frac{1}{12}.$$

e

$$\Pr(A^c \cup B^c) = \frac{11}{12}.$$

4. Suponha que A e B são eventos independentes tais que $\Pr(A) = 1/3$ e $\Pr(B) > 0$. Qual é o valor de $\Pr(A \cup B^c|B)$?

   Temos que

   $$\Pr(A\cup B^c|B) = \Pr(A|B)+\Pr(B^c|B)-\Pr(A\cap B^c|B) = \Pr(A|B) = \Pr(A) = \frac{1}{3}.$$

5. Suponha que em 10 jogadas de um dado, o número 6 apareceu exatamente três vezes. Qual é a probabilidade que nas primeiras três jogadas todas obteve o número 6?

   Temos que

   $$\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}.$$

6. Suponha que A, B, e D são eventos tais que A e B são independentes, $\Pr(A \cap B \cap D) = 0.04$, $\Pr(D|A \cap B) = 0.25$, e $\Pr(B) = 4\Pr(A)$. Calcule $\Pr(A \cup B)$.

   Temos:

   $$\Pr(D|A \cap B) = \frac{\Pr(A \cap B \cap D)}{\Pr(A \cap B)} = \frac{0.04}{\Pr(A)\Pr(B)} = \frac{0.04}{4\Pr(A)\Pr(A)} = 0.25$$

   Logo $\Pr(A) = 0.2$ e $\Pr(B) = 0.8$ e

   $$\Pr(A\cup B) = \Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B) = \Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A)\Pr(B) = 0.84.$$

7. Suponha que os eventos A e B são disjuntos e que cada um deles tem probabilidade positiva. A e B são independentes?

   Não, pois
   $$\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0 \neq \Pr(A)\Pr(B).$$

8. Suponha que há uma probabilidade de $1/50$ que você vencerá um certo jogo. Se você jogar o jogo 50 vezes, independentemente, qual é a probabilidade que você vencerá pelo menos uma vez?

   $$1 - \left(\frac{49}{50}\right)^{50} = 0.6358$$

9. Três estudantes A, B e C estão matriculados na mesma classe. Suponha que A vá às aulas 30% do tempo, B vá às aulas 50% do tempo, e C vá às aulas 80% do tempo. Se esses estudantes vão às aulas independentemente um do outro, qual é: (a) a probabilidade que ao menos um deles estará

na sala em um dia particular, e (b) a probabilidade que exatamente um deles estará na sala em um dia particular.

(a)

$$1-(1-0.3)\times(1-0.5)\times(1-0.8)=0.93$$

(b)

$$0.3\times(1-0.5)\times(1-0.8)+(1-0.3)\times 0.5\times(1-0.8)+(1-0.3)\times(1-0.5)\times 0.8=0.38$$

10. Suponha que três bolas vermelhas e três bolas brancas são arremessadas aleatoriamente dentro de três caixas e que todos arremessos são independentes. Qual é a probabilidade que cada caixa contenha uma bola vermelha e uma bola branca?

$$\frac{3!}{3^3}\frac{3!}{3^3}=\frac{4}{81}$$

11. Se cinco bolas são arremessadas aleatoriamente dentro de n caixas, e que todos arremessos são independentes, qual é a probabilidade que nenhuma caixa contenha mais que duas bolas?

$$1-n\times\left(\frac{\binom{5}{3}(n-1)^2}{n^5}+\frac{\binom{5}{4}(n-1)}{n^5}+\frac{1}{n^5}\right)=\frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-3)}{n^4}$$

12. Três jogadores A, B, e C arremessam uma moeda um de cada vez. Suponha que A arremesse a moeda primeiro, B arremesse em segundo, e C arremesse em terceiro; e suponha que o ciclo se repita até que alguém vença ao obter uma cara. Determine a probabilidade que cada um dos três jogadores vencer o jogo.

$$\Pr(A \text{ vencer o jogo})=\sum_{i=0}^{\infty}0.5\times 0.5^{3i}=0.5\sum_{i=0}^{\infty}(0.5^3)^i=0.5\sum_{i=0}^{\infty}(0.125)^i=0.5\frac{1}{1-0.125}=\frac{4}{7}$$

$$\Pr(B \text{ vencer o jogo})=\sum_{i=0}^{\infty}0.5^2\times 0.5^{3i}=\frac{2}{7}$$

$$\Pr(C \text{ vencer o jogo})=\sum_{i=0}^{\infty}0.5^3\times 0.5^{3i}=\frac{1}{7}$$

13. Suponha que 80% de todos estatísticos sejam tímidos, enquanto apenas 15% de todos economistas são tímidos. Suponha também que 90% das pessoas em uma conferência sejam economistas e que outros 10% seja estatísticos. Se você encontrar uma pessoa tímida aleatoriamente na conferência, qual é a probabilidade que a pessoa é uma estatística?

$$\begin{aligned}\Pr(\texttt{estatística}|\texttt{tímida}) &= \frac{\Pr(\texttt{tímida}|\texttt{estatística})\Pr(\texttt{estatística})}{\Pr(\texttt{tímida})} \\ &= \frac{0.8 \times 0.1}{0.9 \times 0.15 + 0.1 \times 0.8} = 0.3721\end{aligned}$$

14. Suponha que uma família tenha exatamente n crianças ($n \geq 2$). Assuma que a probabilidade que qualquer criança será uma garota é $1/2$ e que todos nascimentos sejam independentes. Dada que a família tenha pelo menos uma garota, determine a probabilidade que a família tenha pelo menos um garoto.

$$\frac{2^n - 2}{2^n - 1}$$

15. Uma sequência de n candidatos a um trabalho são preparados para serem entrevistados. Nós gostaríamos de contratar o melhor candidato, mas não temos informações para distinguir os candidatos antes de entrevistá-los. Nós assumimos que o melhor candidato é igualmente provável de ser qualquer um dos n candidatos na sequência antes da entrevista começar. Depois que as entrevistas começam, nós podemos ranquear os candidatos já entrevistados, mas não temos nenhuma informação sobre onde os candidatos restantes se localizam no ranque geral. Depois de cada entrevista, nós temos que ou contratar o candidato atual imediatamente, ou deixar o candidato ir embora e nunca mais contactá-lo. A seguinte regra é utilizada: um número r é selecionado e nós entrevistamos os primeiros r candidatos sem intenção de contratá-los. Iniciando com próximo candidato $r + 1$, nós continuamos entrevistando até que o candidato atual é o melhor que vimos até o momento; a entrevista para e contrata o candidato atual. Se nenhum dos candidatos de $r + 1$ até n é o melhor, o candidato n é contratado. Nós gostaríamos de selecionar r de tal forma que maximize a probabilidade de contratar o melhor candidato. Seja A o evento de que o melhor candidato é contratado, e seja B_i o evento de que o melhor candidato está na posição i na sequência de entrevistas.

    (a) Seja $i > r$. Encontre a probabilidade de que o candidato que é relativamente o melhor entre os i primeiro entrevistados apareça nas primeiras r entrevistas.

    $$\frac{r}{i}$$

(b) Prove que $\Pr(A|B_i) = 0$ para $i \leq r$ e $\Pr(A|B_i) = \frac{r}{i-1}$ para $i > r$.
Se $i \leq r$ então o melhor já foi perdido e não será contratado. Se $i > r$, o melhor só é contratado se ninguém até $i-1$ foi contratado, isto é, o melhor entre os $i-1$ primeiro está entre os r primeiros. Então, basta usar o resultado de (a).

(c) Para r fixo, seja p_r a probabilidade de A usando aquele valor de r. Prove que $p_r = (r/n)\sum_{i=r+1}^{n}(i-1)^{-1}$.

$$\Pr(A) = \sum_{i=r+1}^{n} \Pr(A|B_i)\Pr(B_i) = \frac{r}{n}\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{i-1}$$

(d) Seja $q_r = p_r - p_{r-1}$ para $r = 1, \ldots, n-1$, prove que q_r é uma função estritamente decrescente em r.

$$\begin{aligned} q_r = p_r - p_{r-1} &= \frac{r}{n}\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{i-1} - \frac{r-1}{n}\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i-1} \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i-1} - \frac{r}{r-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_r - q_{r+1} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i-1} - \frac{r}{r-1}\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{i-1} - \frac{r+1}{r}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{r-1} - \frac{r}{r-1} + \frac{r+1}{r}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1-r}{r-1} + \frac{r+1}{r}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{r+1}{r} - 1\right) = \frac{1}{nr} > 0 \end{aligned}$$

(e) Mostre que o valor de r que maximiza p_r é o último r tal que $q_r > 0$.
Se $q_r > 0$, então temos que $p_r > p_{r-1}$. Por outro lado, se $q_{r+1} < 0$, então temos que $p_r > p_{r+1}$. Ainda, como q_r é estritamente em r, para todo r tal que $q_r > 0$, temos que $p_r > p_{r-1} > \ldots > p_0$, e, para todo r tal que $q_{r+1} < 0$, temos que $p_r > p_{r+1} > \ldots > p_{n-1}$. Logo a escolha de r como consta no enunciado maximiza p_r.

(f) Para $n = 10$, encontre o valor de r que maximiza p_r, e encontre o valor de p_r correspondente.
Para $r = 3$ temos que $p_r = 0.3987$.

3 Bibliografia

- Morris H. DeGroot and Mark J. Schervish. Probability and Statistics, 4th Edition, Addison-Wesley, 2012. Capítulos 1 e 2.