

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE  
Centro de Informática - CIn  
Disciplina: Métodos Numéricos Computacionais  
Professor: Ricardo Martins  
Alunos: Danilo William (dwpl)  
José Ricardo (jraf)  
Marcos William (mwac)

## Relatório Final

### 2ª Parte - Projeto

Relatório referente aos três problemas propostos (Modelagem, e dois problemas envolvendo Circuitos, utilizando as técnicas descritas em sala de aula), além do problema proposto na dissertação de mestrado, envolvendo alguns modelos de equações diferenciais.

13 de Julho de 2018  
Recife - PE

# Sumário

<b>Questão 1 .....</b>	<b>3</b>
<b>Questão 2 .....</b>	<b>16</b>
<b>Questão 3 .....</b>	<b>28</b>
<b>Problema - Dissertação .....</b>	<b>40</b>

Foram apresentadas 3 questões, além das equações da dissertação do mestrado.

Suas descrições estão contidas a seguir:

1. Considere os dois tanques mostrados na figura. O tanque A possui 50 Litros de água no qual 25 quilogramas de sal são dissolvidos. Suponha que o tanque B contenha 50 Litros de água pura inicialmente e que o líquido é bombeado para dentro e para fora dos tanques como mostrado na figura. A mistura trocada entre os dois tanques e o líquido bombeado para fora do tanque B são assumidos como estando bem misturados.

Dela se extraiu o seguinte modelo:

A) Como no tanque A perde-se 4 unidades de mistura, mas se ganha 1 por conta do outro tanque por minuto e no tanque B se ganha 4 unidades do tanque A, mas se perde 4 unidades do próprio tanque, temos a seguinte matriz:

$$\vec{x}' = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Usando as técnicas vistas em sala, sabemos que  $x(t)$  será algo da forma  $c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ .

O coeficiente da exponencial pode ser obtido através da seguinte identidade:

$$\frac{1}{50} * \begin{vmatrix} -4 - r & 1 \\ 4 & -4 - r \end{vmatrix} = \frac{(-4 - 1)^2 - 4}{50} = 0$$

Portanto, obtém-se que  $r_1 = -6$  e  $r_2 = -2$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

e

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Então,

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{25}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-\frac{3}{25}t}$$

Dado que:

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 25/2 \\ 25 \end{bmatrix} e^{-t/25} + \begin{bmatrix} 25/2 \\ -25 \end{bmatrix} e^{-3t/25}$$

$$x_1 = "(1/4 * \exp(-1/25*x) + 1/4 * \exp(-3/25 * x))"$$

$$x_2 = "(1/2 * \exp(-1/25*x) - 1/2 * \exp(-3/25 * x))"$$

Na letra B) temos uma tabela com os valores exatos, aproximados e os valores de erro de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  para cada método, assim como a plotagem dos gráficos referentes a  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , com todos os métodos aplicados a ambas:

***Tabela referente aos valores de  $x_1(t)$ , com  $h=0.01$***

<b>Solução Exata = 23.114490148510384</b>		
---	--	--

<b>Métodos</b>	<b>Aproximações</b>	<b>Erro</b>
<b><i>Euler</i></b>	23.09542714908733	0.019062999423052673
<b><i>Euler Inverso</i></b>	23.09731939534081	0.01717075316957306
<b><i>Euler Aprimorado</i></b>	23.096373272214056	0.018116876296328854
<b><i>Runge-Kutta</i></b>	23.096373448368514	0.018116700141870723
<b><i>Adams-Bashforth</i></b>	23.158348178781548	0.04385803027116353
<b><i>Adams-Moulton</i></b>	23.095184537316765	0.0193056111936194

***Tabela referente aos valores de  $x_2(t)$ , com  $h=0.01$***

<b>Solução Exata = 1.829711293048664</b>		
--	--	--

<b>Métodos</b>	<b>Aproximações</b>	<b>Erro</b>
----------------	---------------------	-------------

<b><i>Euler</i></b>	1.8482255276926425	0.01851423464397839
<b><i>Euler Inverso</i></b>	1.8467253870476381	0.017014093998974023
<b><i>Euler Aprimorado</i></b>	1.845225246402634	0.015513953353969878
<b><i>Runge-Kutta</i></b>	1.8467250608791441	0.01701376783048003
<b><i>Adams-Bashforth</i></b>	1.7867006030454589	0.04301069000320523
<b><i>Adams-Moulton</i></b>	1.8486093333731888	0.01889804032452469

Obs: Todos os gráficos estão com o tamanho do passo, (h), igual a 0,01.

Gráfico  $x_1(t)$  : Método de Euler

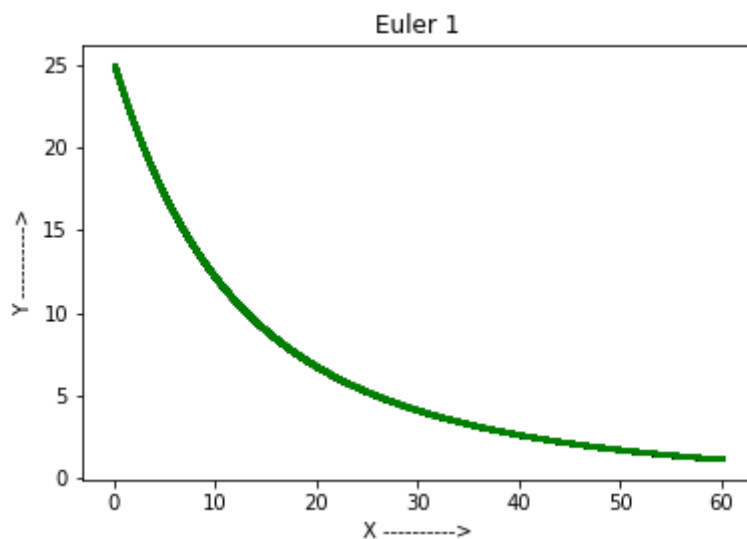


Gráfico  $x_2(t)$  : Método de Euler

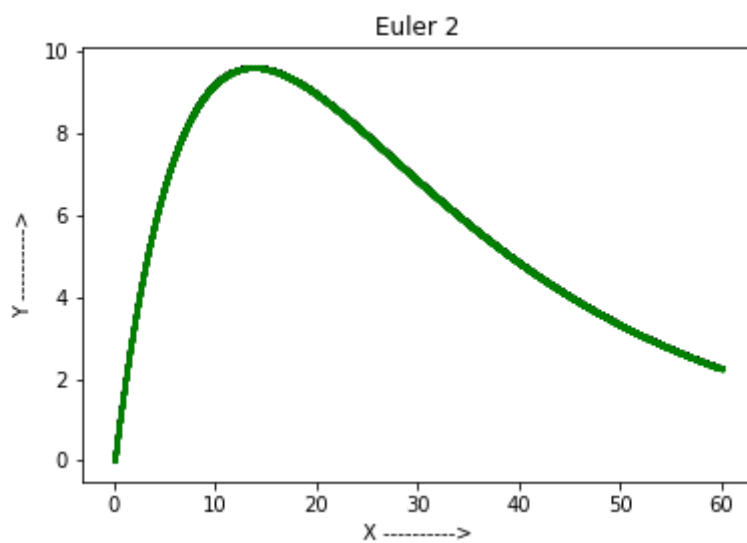


Gráfico  $x_1(t)$  : Método de Euler Inverso

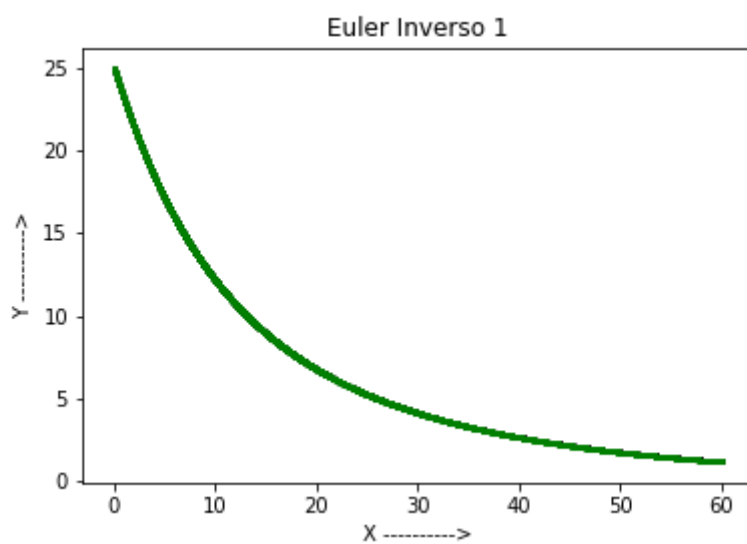


Gráfico  $x_2(t)$  : Método de Euler Inverso

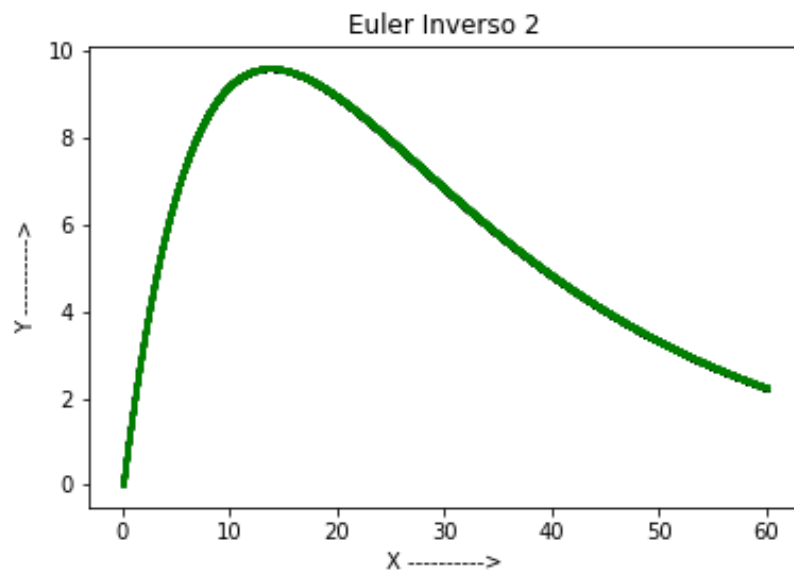


Gráfico de  $x_1(t)$ : Método de Euler Aprimorado

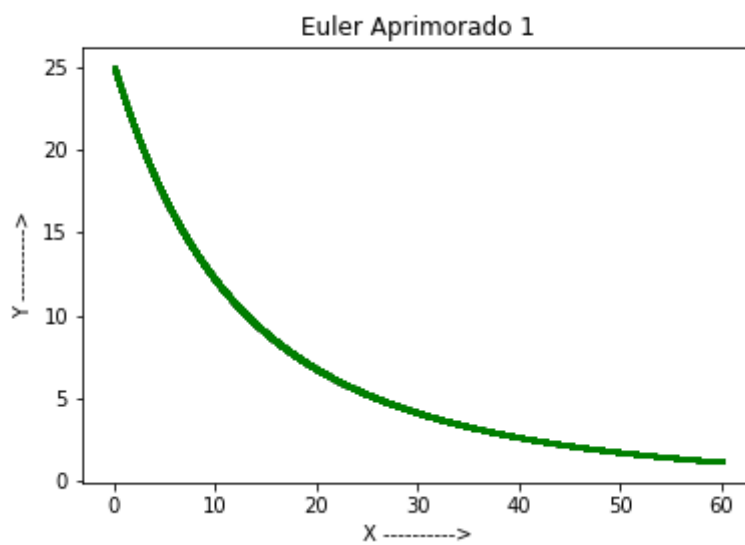




Gráfico de  $x_2(t)$ : Método de Euler Aprimorado

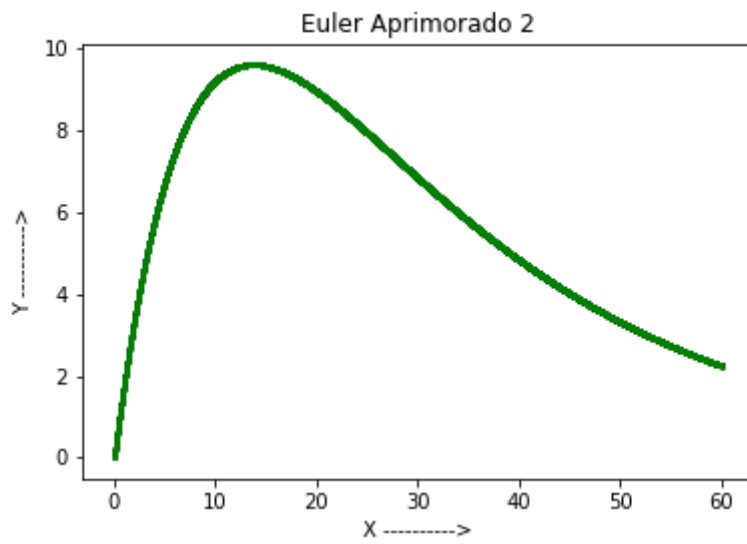


Gráfico  $x_1(t)$ : Método de Runge-Kutta

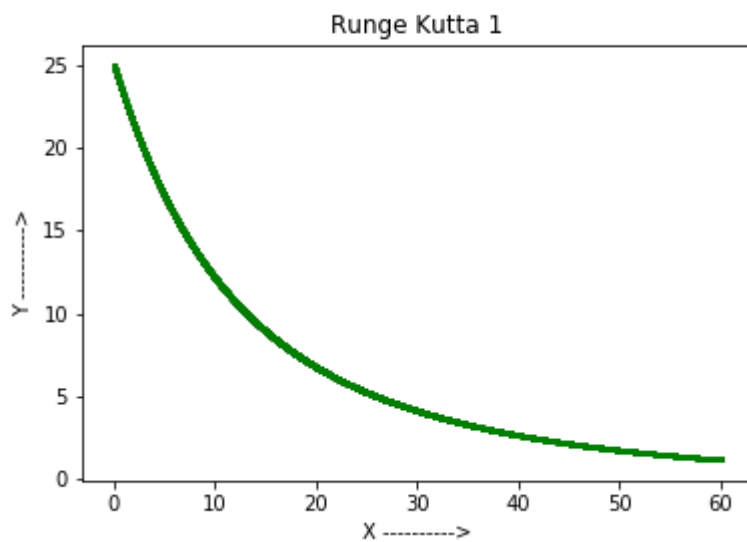


Gráfico de  $x_2(t)$ : Método de Runge-Kutta

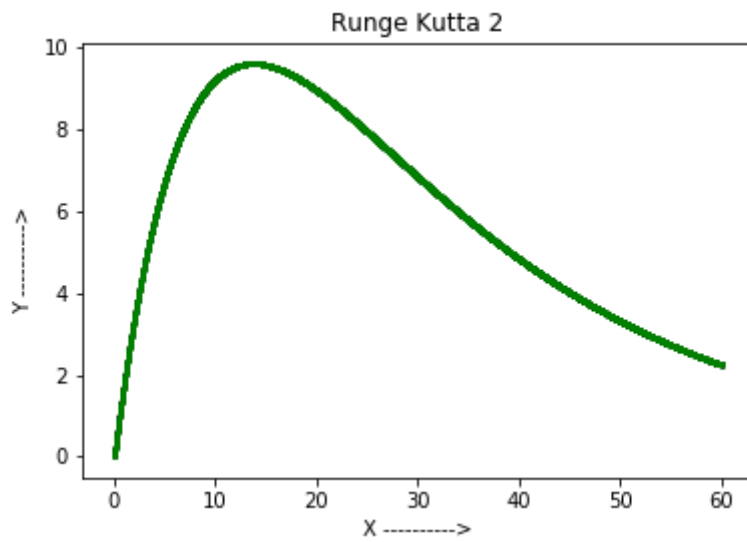


Gráfico de  $x_1(t)$ : Método de Adams-Bashforth

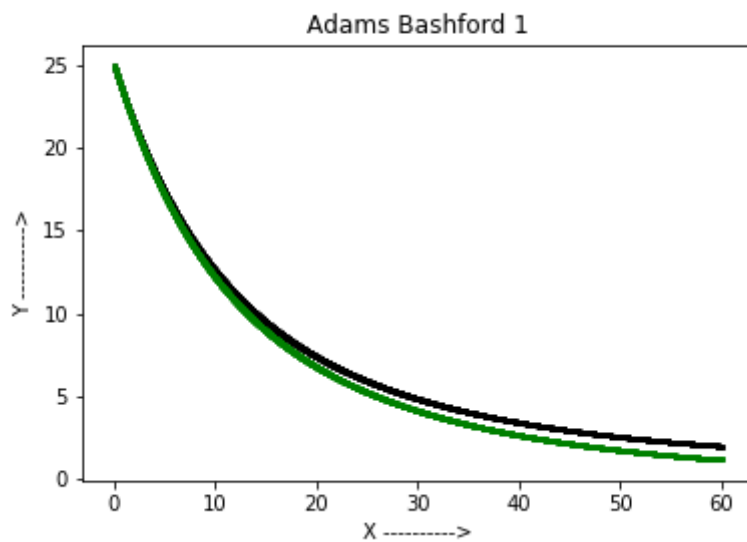


Gráfico de  $x_2(t)$ : Método de Adams-Bashforth

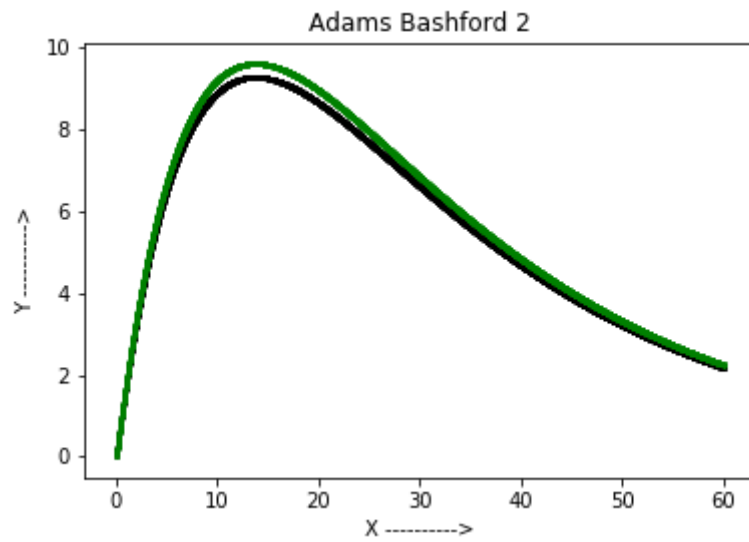


Gráfico de  $x_1(t)$ : Método de Adams-Moulton

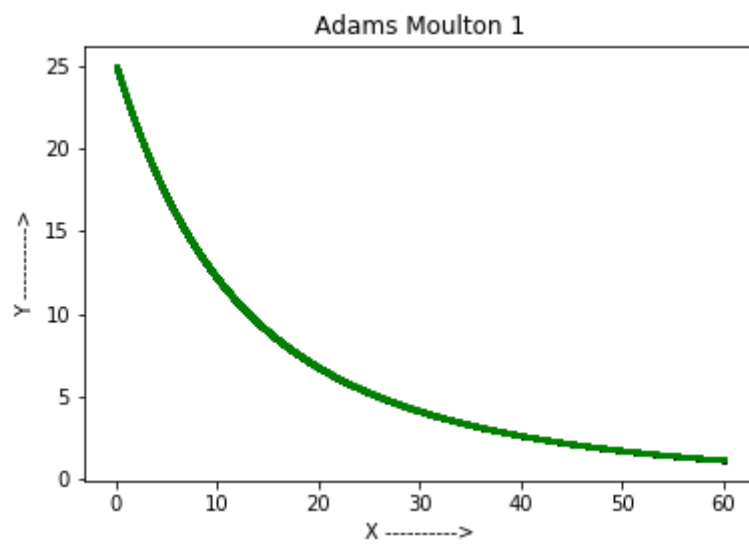


Gráfico de  $x_2(t)$ : Método de Adams-Moulton



Gráfico de  $x_1(t)$ : Métodos Agrupados

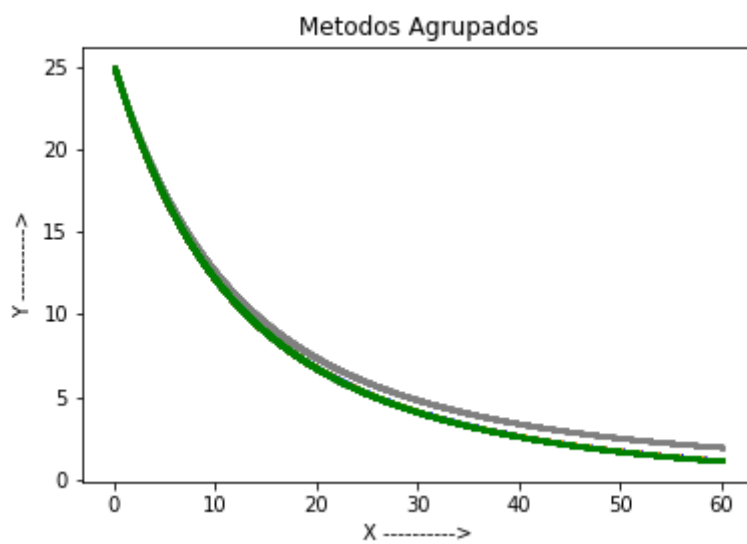


Gráfico de  $x_2(t)$ : Métodos Agrupados

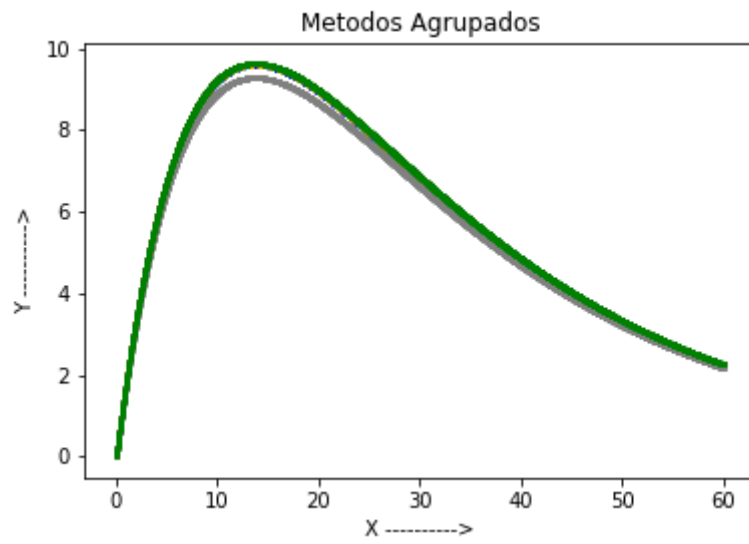


Gráfico de  $x_1(t)$ : Erros Agrupados

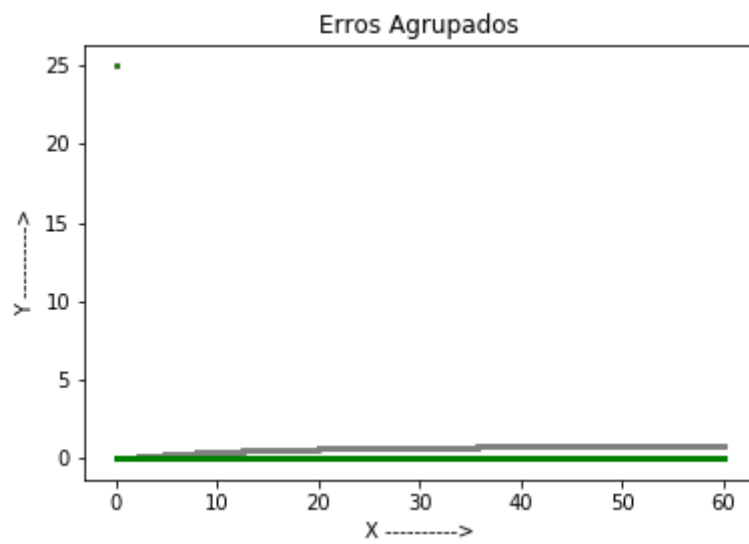
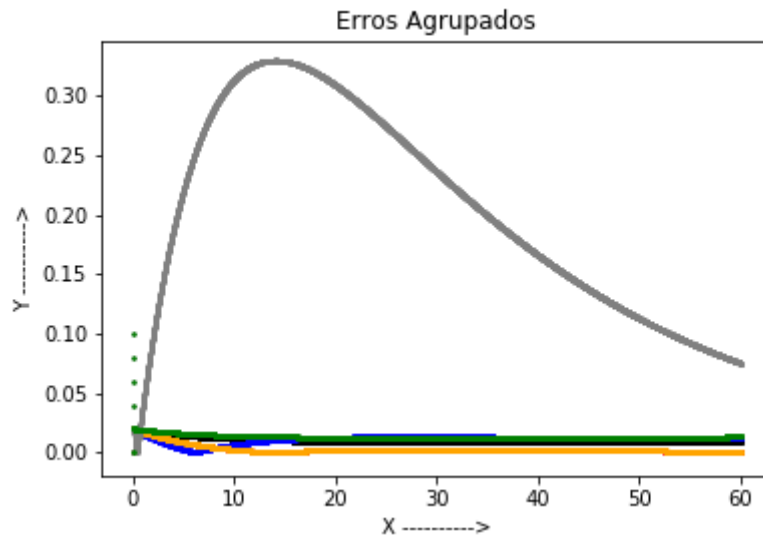
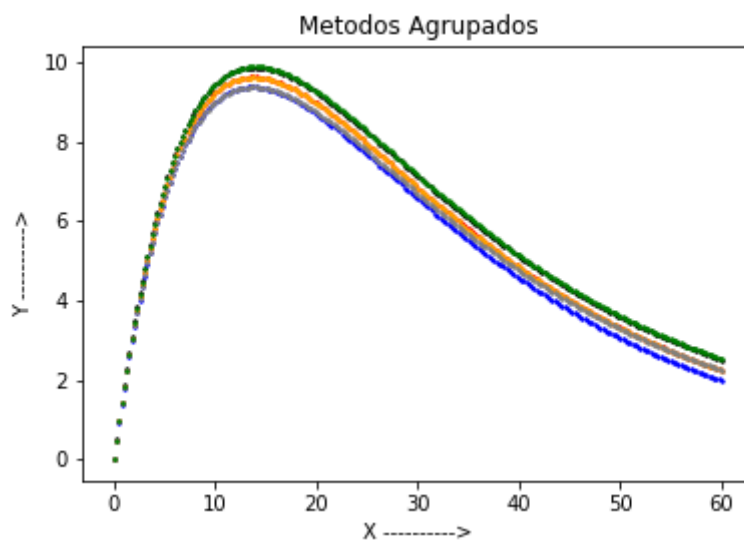


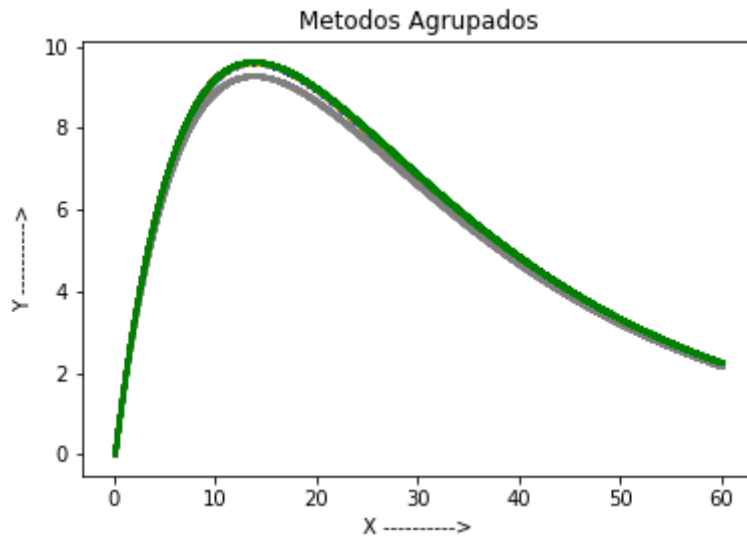
Gráfico de  $x_2(t)$ : Erros Agrupados



Obs: Após as análises dos dados nas tabelas e dos gráficos, de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , comparando o valor exato de  $x_1(t)$  com cada método numérico, podemos constatar que o método que mais se aproxima da solução exata, é o **Método de Euler Inverso**, para o  $h=0,01$ . Já para  $x_2(t)$ , o método que mais se aproxima da solução exata, é o **Método de Euler Aprimorado**, para o  $h=0,01$ .

A seguir, uma comparação entre dois gráficos de  $x_2(t)$ . No primeiro, com o valor de  $h = 0.25$ , 25 vezes maior que o segundo gráfico, com valor de  $h = 0.01$ . A comparação é feita para os **Métodos Agrupados**.





C) Quando  $t$  tende ao infinito, observa-se que:

$$\vec{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \vec{0}$$

2. Na segunda questão temos um circuito RLC, como  $i_1=i_2=0$  e  $i_3 = i_1-i_2$ , então  $i_3=0$ . É o suficiente para aplicar Lei das Malhas, Laplace e Regra de Cramer.

Na letra A) temos o problema descrito por:

$$\begin{bmatrix} -\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3 \\ Li'_1 + Ri_2 + 0 \\ 0 + -Ri_2 + \frac{q_3}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na letra B) do problema, aplicando Laplace e algumas operações algébricas, temos a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} -s & s & s \\ s^2L & sR & 0 \\ 0 & -sR & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{L}\{\epsilon\} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como epsilon é constante, veja que:

$$Q_k = \mathcal{L}\{q_k\}; \mathcal{L}\{\epsilon\} = \frac{\epsilon}{s}$$

Usando Regra de Cramer:



$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6t}{5} + \frac{9e^{-100t}}{500} + \frac{3e^{-100t}t}{5} - \frac{9}{500} \\ \frac{6t}{5} + \frac{3e^{-100t}}{125} + \frac{6e^{-100t}t}{5} - \frac{3}{125} \\ -\frac{3e^{-100t}}{500} - \frac{3e^{-100t}t}{5} + \frac{3}{500} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6(1-e^{-100t})-300e^{-100t}t}{5} \\ \frac{6(1-e^{-100t})-600e^{-100t}t}{5} \\ 60e^{-100t}t \end{bmatrix}$$

Na letra C) temos de início as tabelas com os valores de  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  para cada método numérico, seguido por seu respectivo erro, bem como o comportamento de  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  observados a partir de vários gráficos que provêm da aplicação dos métodos numéricos.

Solução Exata = 1.2

**Tabela referente aos valores de  $i_1(t)$ , com  $h=0.01$**

Métodos	Aproximações	Erro
<i>Euler</i>	1.5015901806462726	0.30159018064627263
<i>Euler Inverso</i>	0.9015901806462709	0.298409819353729
<i>Euler Aprimorado</i>	1.2015901806462725	0.0015901806462725876
<i>Runge-Kutta</i>	1.1996071906058494	0.0003928093941505395
<i>Adams-Bashforth</i>	1.2056699246938802	0.005669924693880279
<i>Adams-Moulton</i>	1.2121977433672504	0.012197743367250435

**Tabela referente aos valores de  $i_2(t)$ , com  $h=0.01$**

Solução exata = 1.2

Métodos		Aproximações	Erro
<i>Euler</i>		1.104808313049348	0.09519168695065194
<i>Euler Inverso</i>		1.104808313049348	0.09519168695065194
<i>Euler Aprimorado</i>		1.104808313049348	0.09519168695065194
<i>Runge-Kutta</i>		1.1988097979299879	0.0011902020700120808
<i>Adams-Bashforth</i>		1.225524472407813	0.02552447240781297
<i>Adams-Moulton</i>		1.2191232026345324	0.019123202634532488

Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Euler

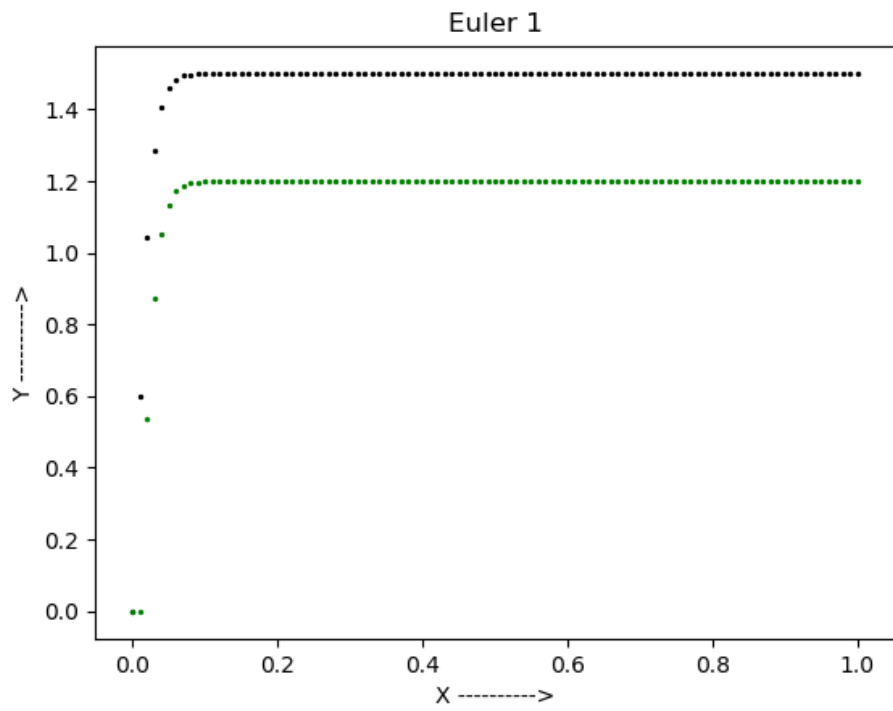


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Euler

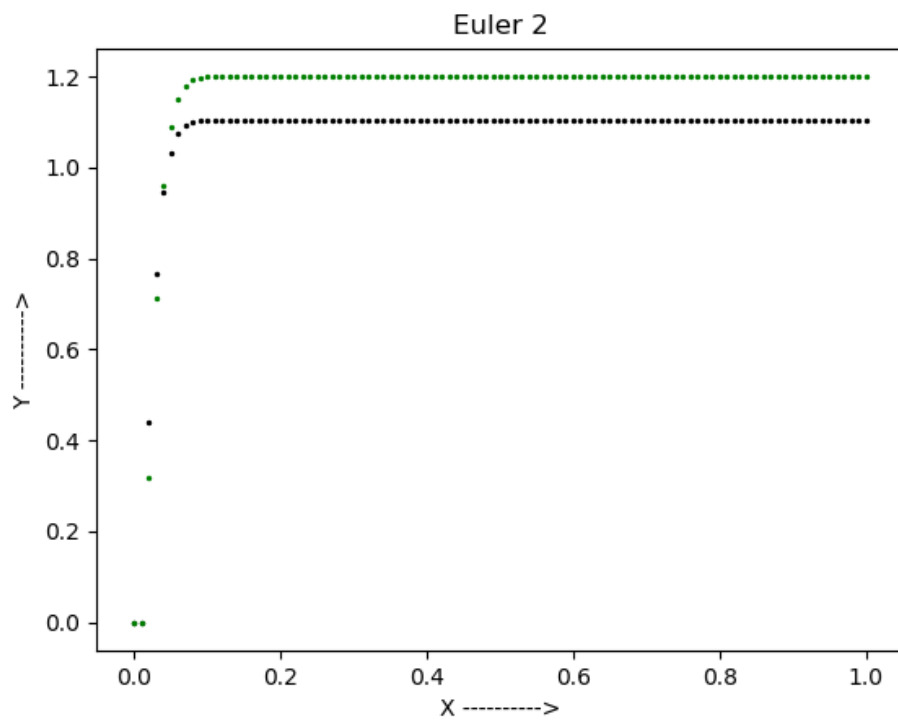


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Euler Inverso

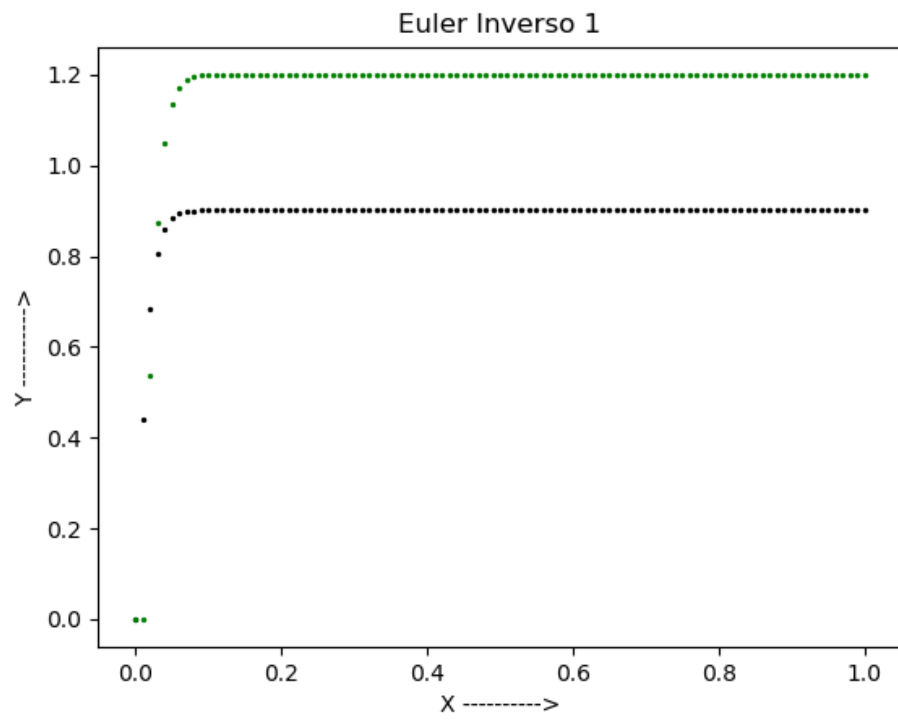


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Euler Inverso

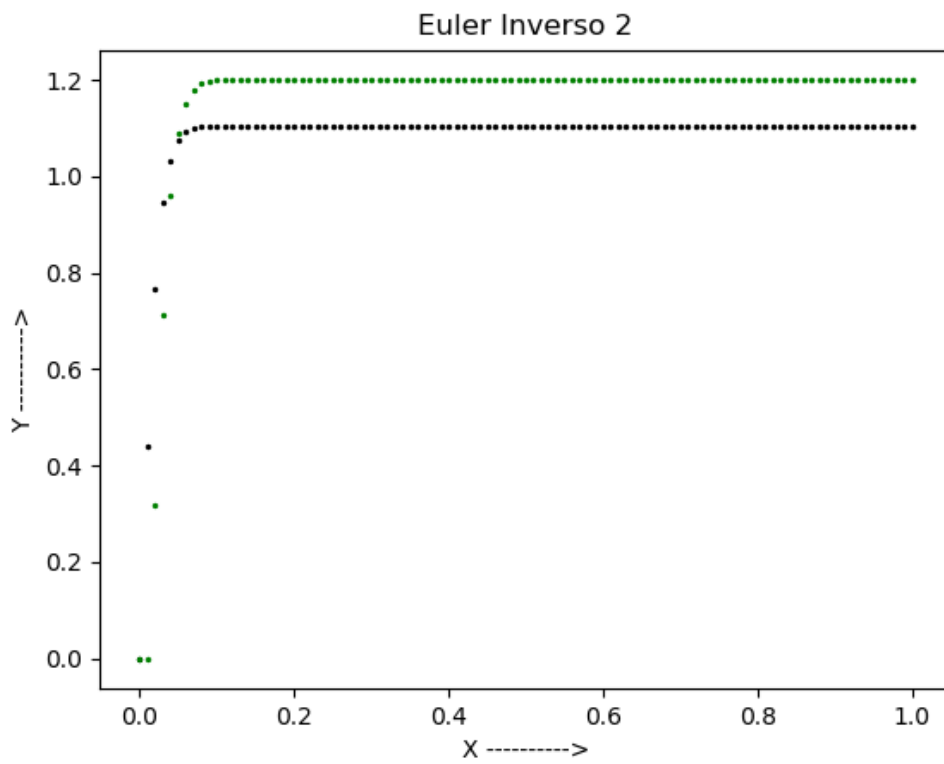


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Euler Aprimorado

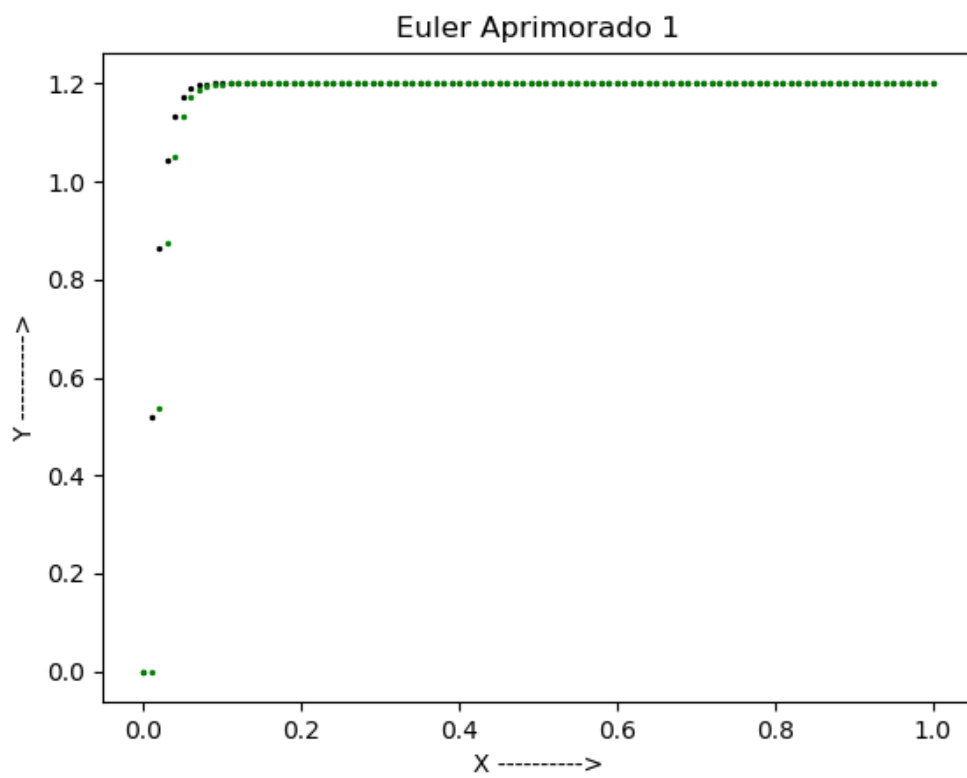


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Euler Aprimorado

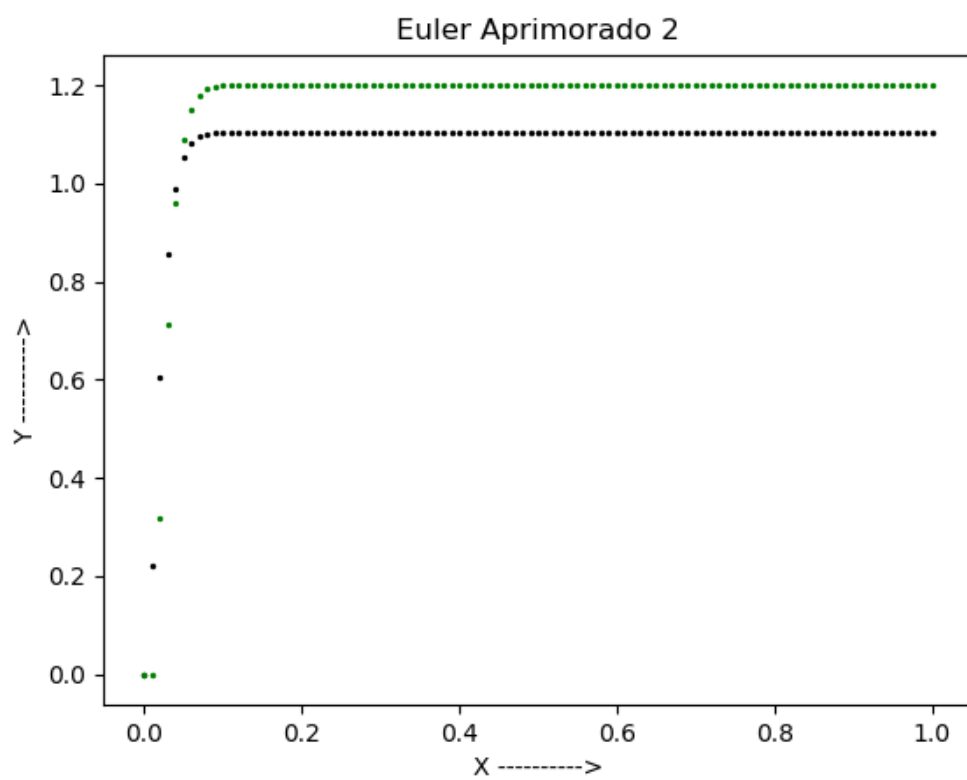


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Runge-Kutta

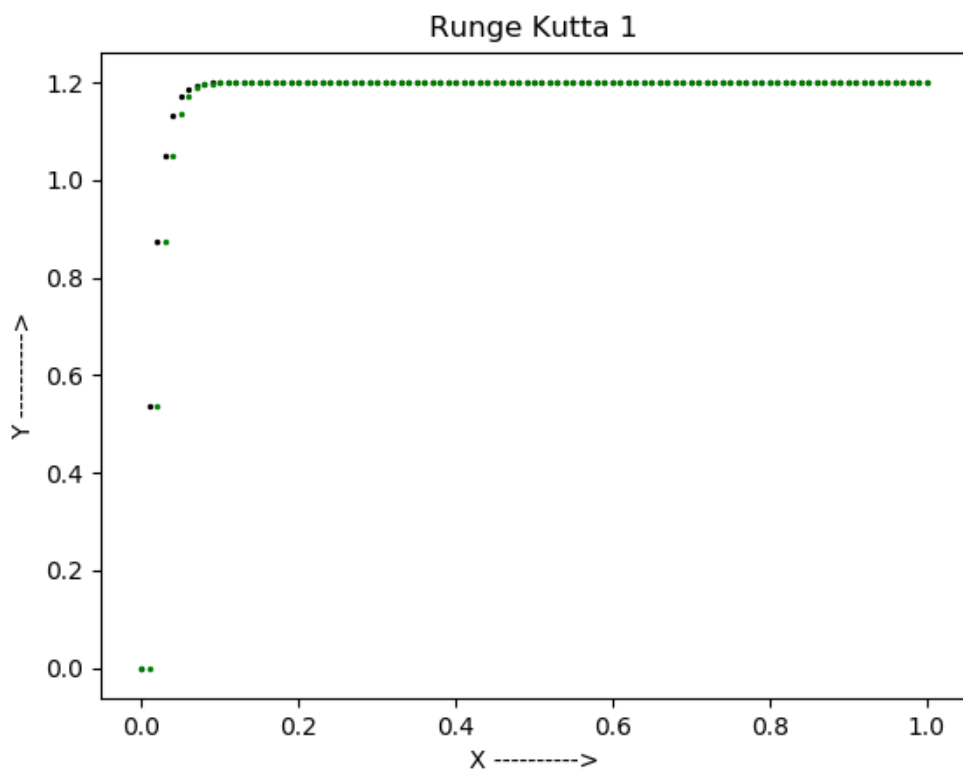


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Runge-Kutta

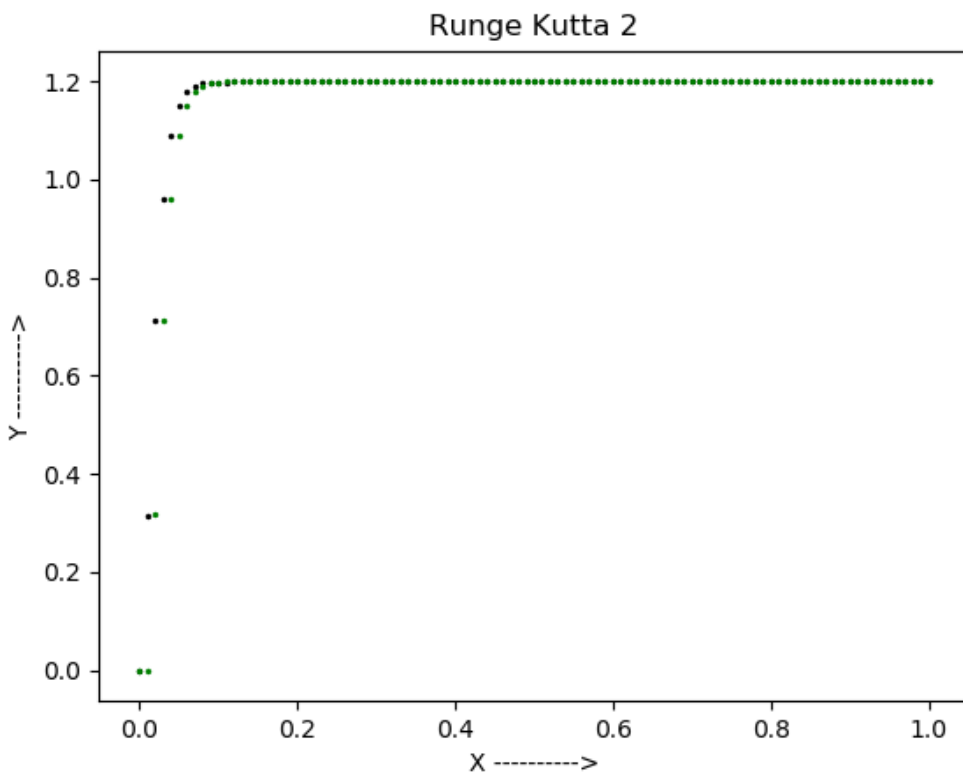


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Adams-Bashforth

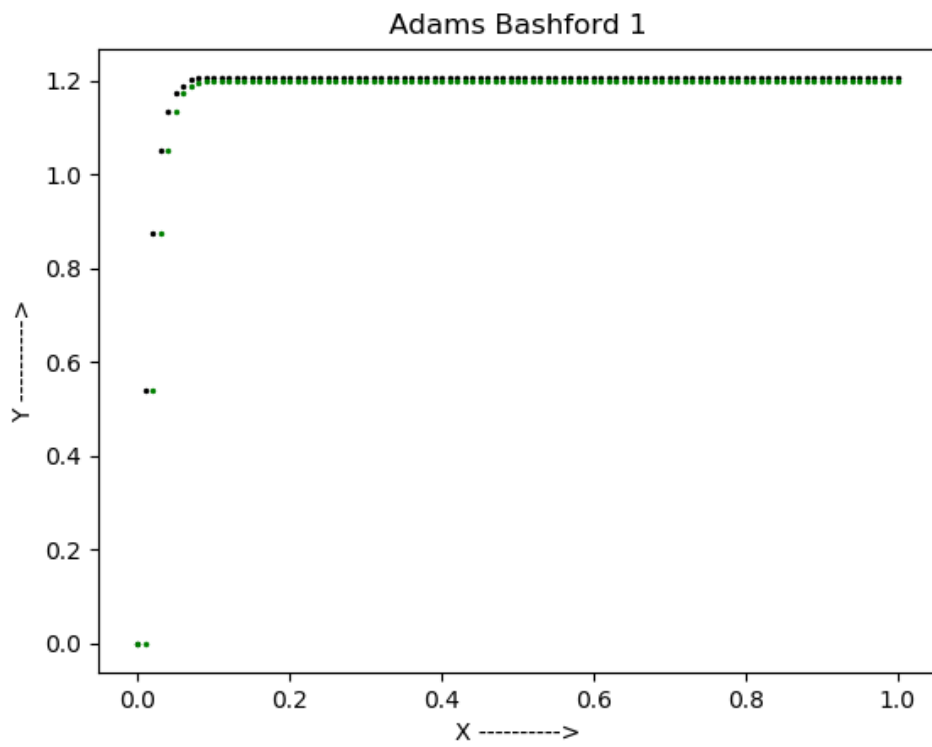


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Adams-Bashforth

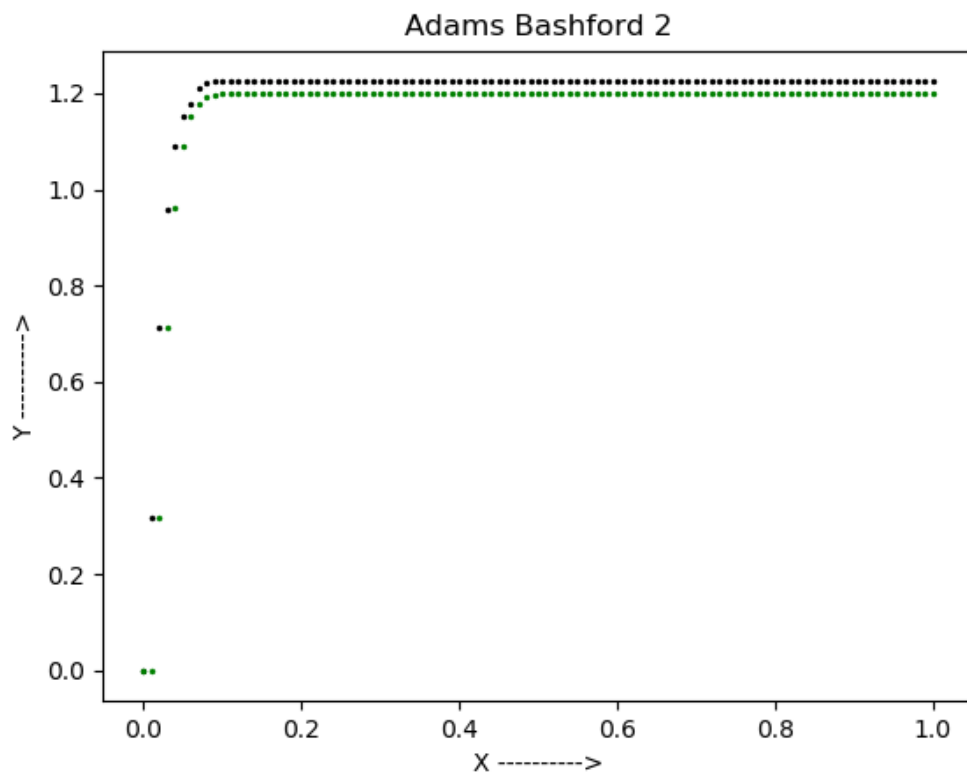


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Adams-Moulton

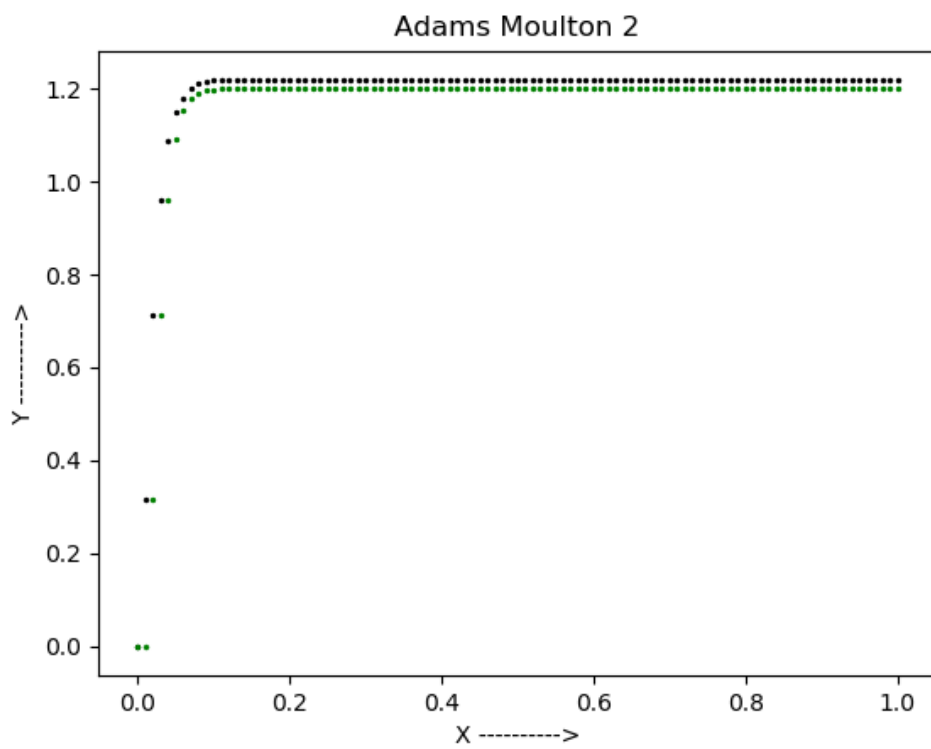


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Adams-Moulton

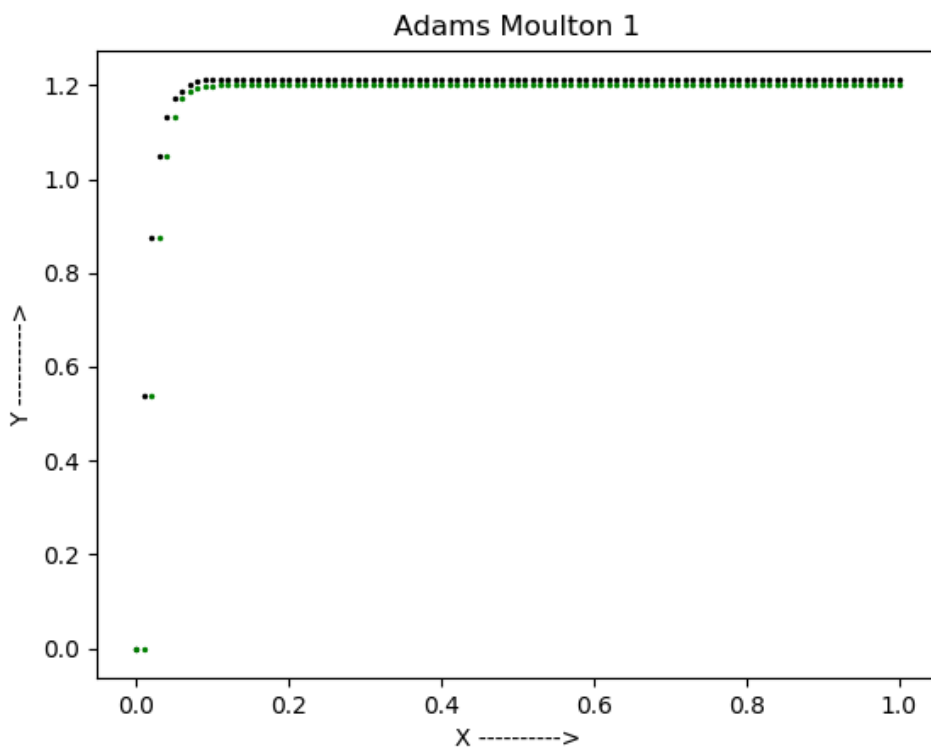


Gráfico de  $i_1(t)$ : Métodos Agrupados



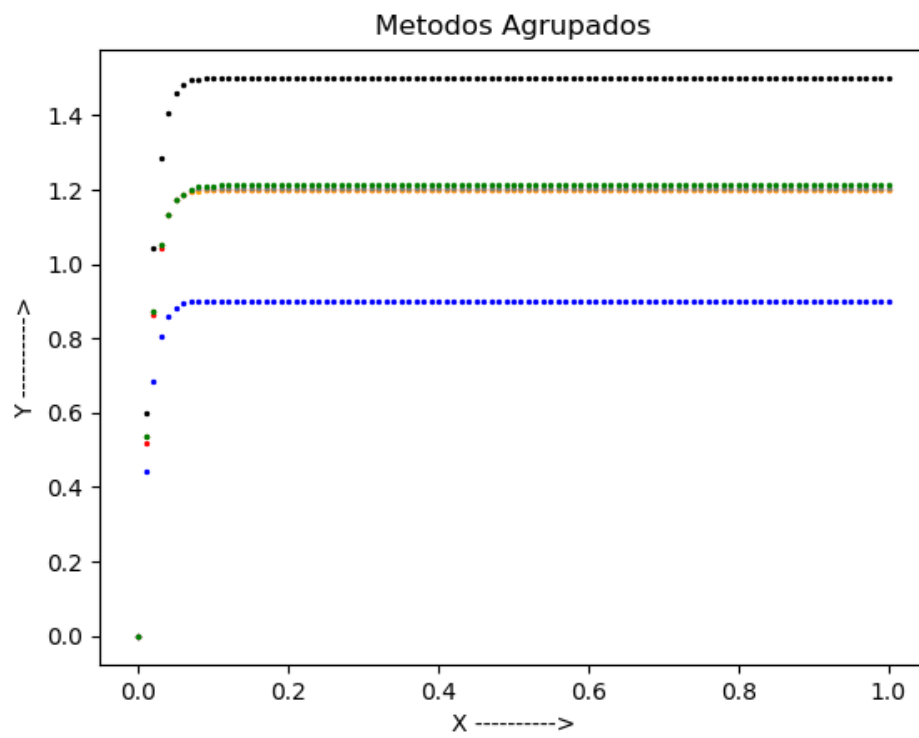


Gráfico de  $i_2(t)$ : Métodos Agrupados

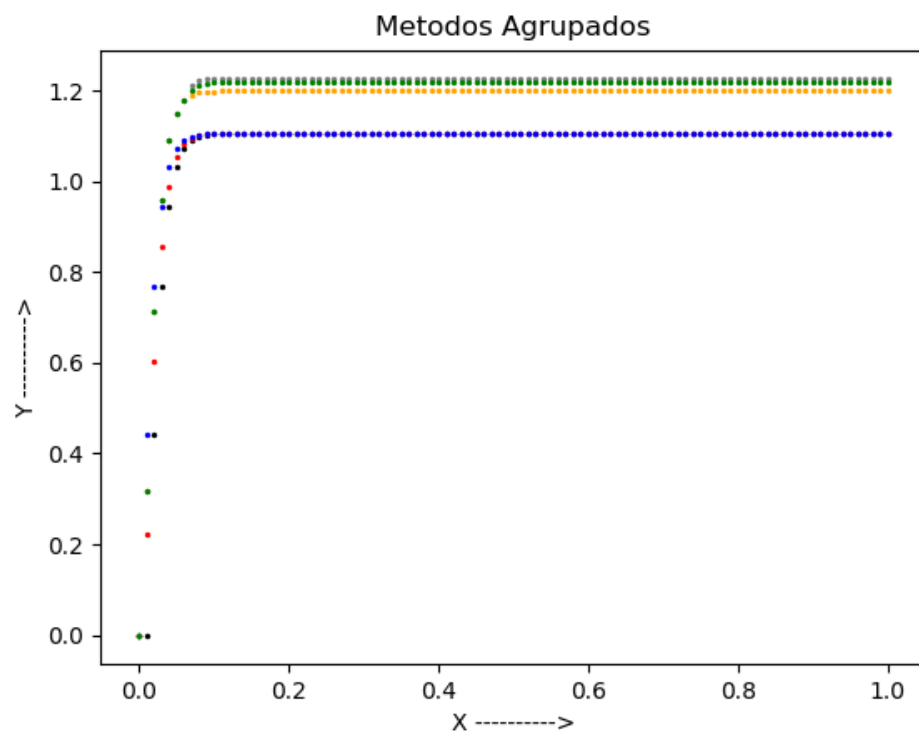


Gráfico de  $i_1(t)$ : Erros Agrupados

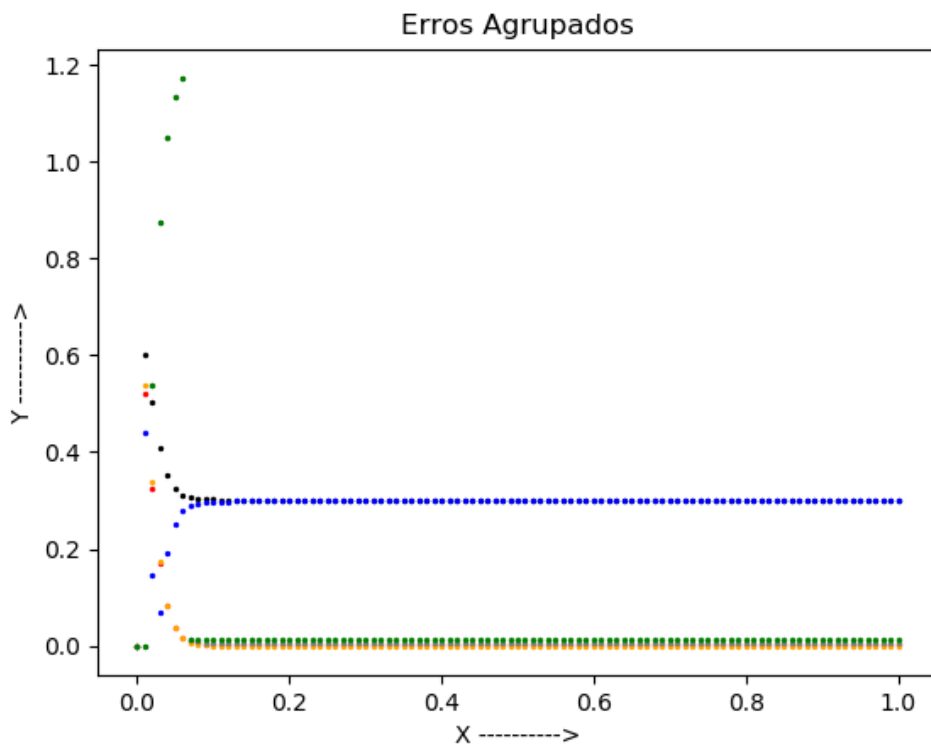
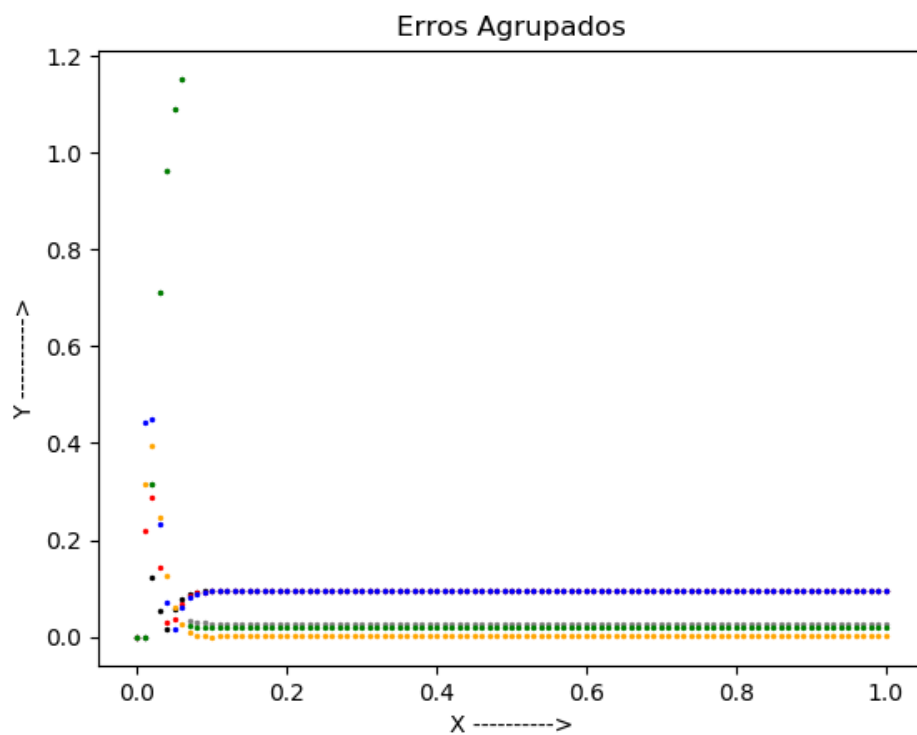


Gráfico de  $i_2(t)$ : Erros Agrupados



Daí se observa que quando  $t$  tende ao infinito,  $i_3$  tenderá a zero, e  $i_1$  e  $i_2$  tenderão para o mesmo valor.

3. Na letra A) temos o sistema de equações abaixo, com os valores já aplicados:

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}(t) + \begin{bmatrix} 100 \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na letra B) utilizamos a variação de parâmetros para resolver o problema:

$$\vec{x}_0 = \vec{0} \therefore \vec{x}(t) = \vec{\Psi}(t) \int_{t_0}^t \vec{\Psi}^{-1}(s) \vec{g}(s) ds$$

Note que , logo:

$$\vec{x}_0 = \vec{0} \therefore \vec{x}(t) = \vec{\Psi}(t) \int_0^t \vec{\Psi}^{-1}(s) \vec{g}(s) ds$$

A matriz fundamental ( $\Psi$ ) é dada por:

$$\vec{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-12t} & e^{-2t} \\ -e^{-12t} & 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

E sua transposta por:

$$\vec{\Psi}^{-1}(t) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9e^{12t} & -3e^{12t} \\ e^{2t} & 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}(t) = \int_0^t \vec{\Psi}^{-1}(s) \vec{g}(s) ds$$

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{12t}(216\sin t - 18\cos t) + 18}{29} \\ e^{2t}(4\sin t - 2\cos t) + 2 \end{bmatrix}$$

Por fim:

$$\vec{x}(t) = \vec{\Psi}(t)\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{29}(9e^{-12t} + 29e^{-2t} + 166\sin t - 38\cos t) \\ \frac{6}{29}(-e^{-12t} + 29e^{-2t} + 46\sin t - 28\cos t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{0}$$

Na letra C) temos duas tabelas, uma com o valor exato, aproximações e erros com cada método numérico, para  $i_1(t)$ , e outra com os mesmos dados para  $i_2(t)$ . Logo após as duas tabelas, analisamos o comportamento de  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  nos gráficos referentes a cada método numérico.

Tabela referente aos valores de  $i_1(t)$ , com o  $h=0.001$

Solução Exata = 11.539559532997954		
Métodos	Aproximações	Erro
<i>Euler</i>	11.538328710854818	0.0012308221431354127

<b><i>Euler Inverso</i></b>	11.535874270875022	0.003685262122932187
<b><i>Euler Aprimorado</i></b>	11.537101490864892	0.0024580421330622215
<b><i>Runge-Kutta</i></b>	11.537110770338742	0.0024487626592115674
<b><i>Adams-Bashforth</i></b>	11.136525406338578	0.4030341266593762
<b><i>Adams-Moulton</i></b>	11.539092044227786	0.0004674887701678898

Tabela referente aos valores de  $i_2(t)$ , com o  $h=0.001$

<b>Solução Exata = 5.37732959443937</b>
---

<b>Métodos</b>	<b>Aproximação</b>	<b>Erro</b>
<b><i>Euler</i></b>	5.860193575673216	0.4828639812338462
<b><i>Euler Inverso</i></b>	6.777453752165407	1.4001241577260366
<b><i>Euler Aprimorado</i></b>	6.318823663919316	0.9414940694799458
<b><i>Runge-Kutta</i></b>	6.324798623349087	0.9474690289097172
<b><i>Adams-Bashforth</i></b>	6.187783047880661	0.8104534534412906
<b><i>Adams-Moulton</i></b>	6.146355247172278	0.7690256527329078

Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Euler

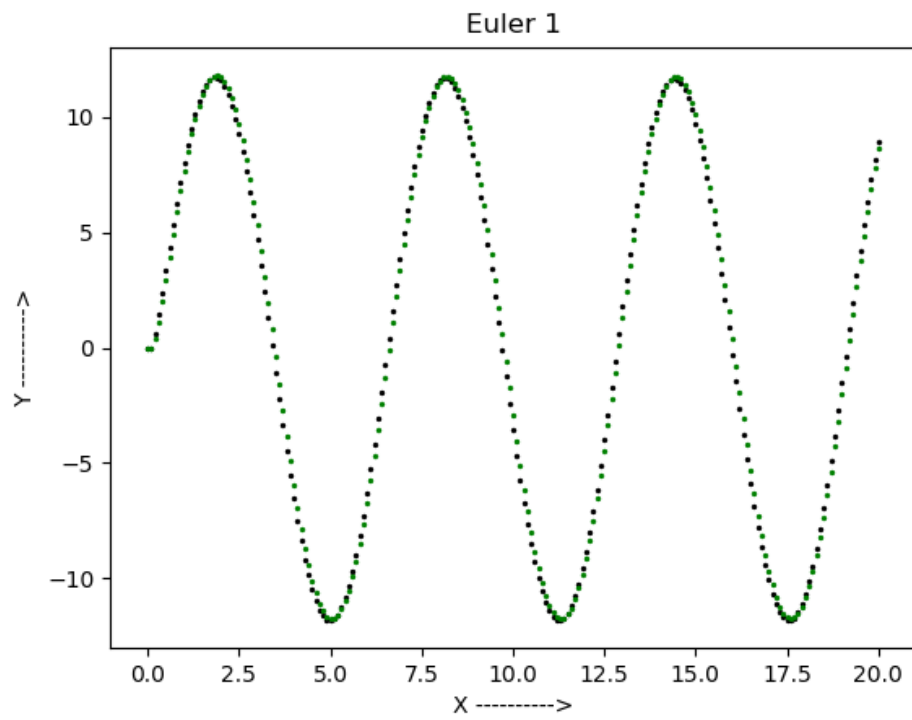


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Euler

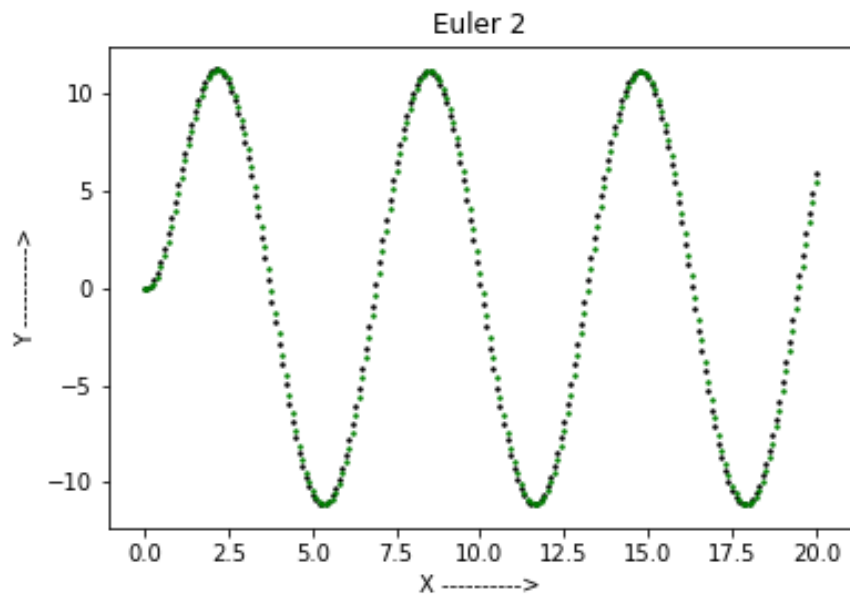


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Euler Inverso

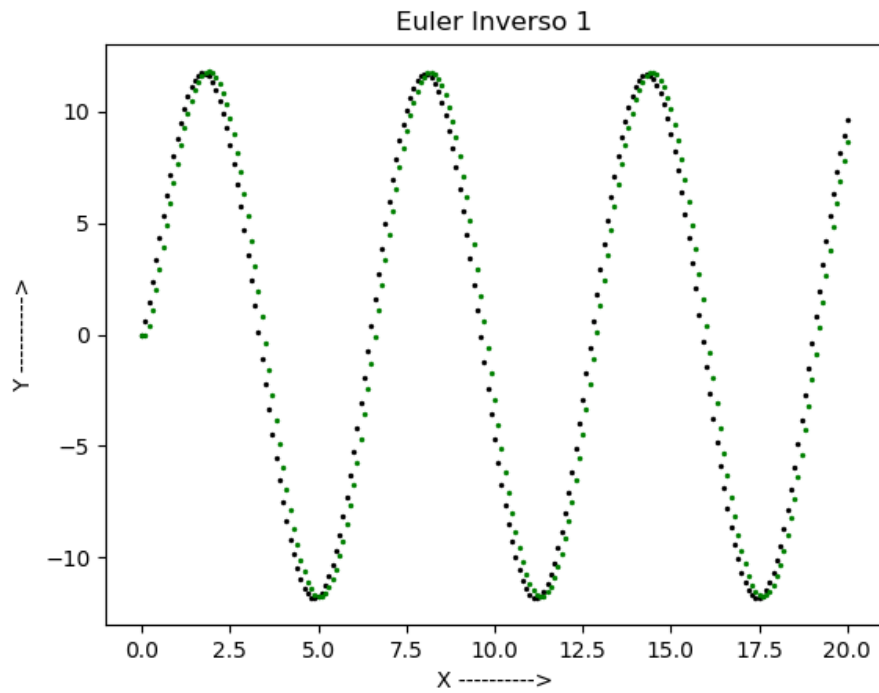


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Euler Inverso

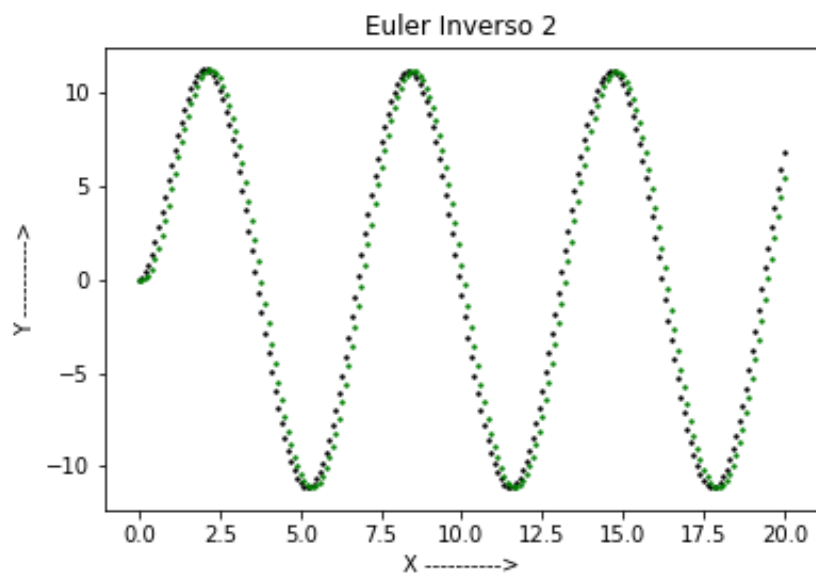


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Euler Aprimorado

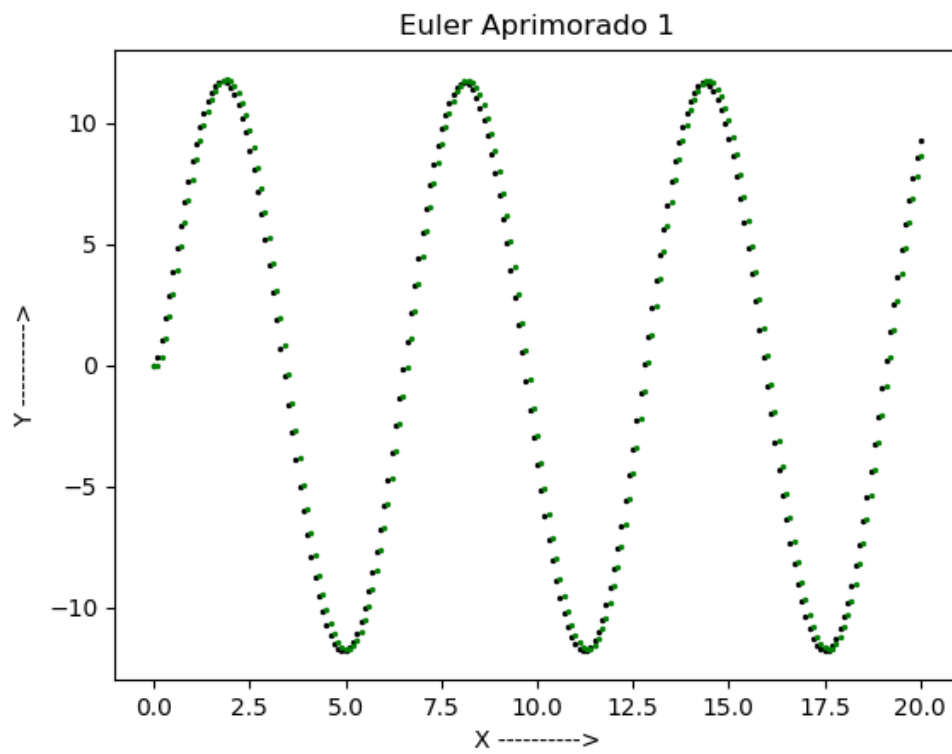


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Euler Aprimorado

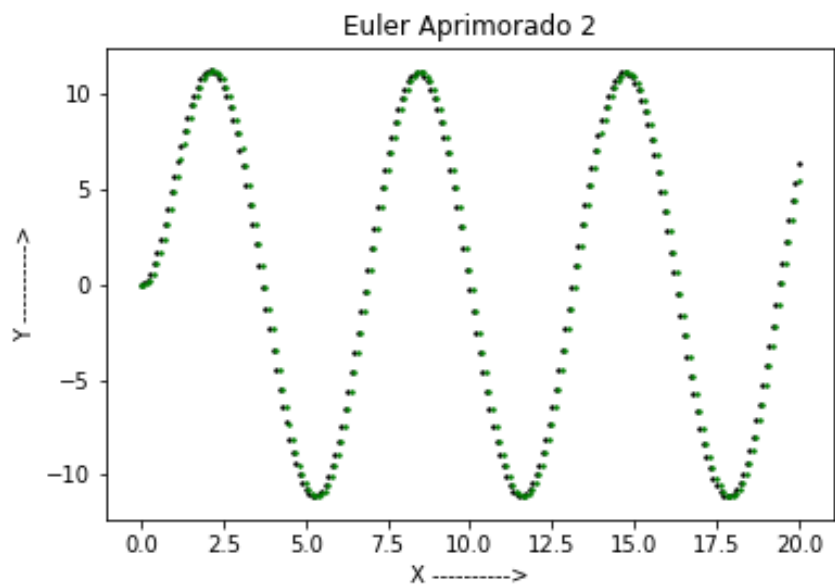


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Runge-Kutta



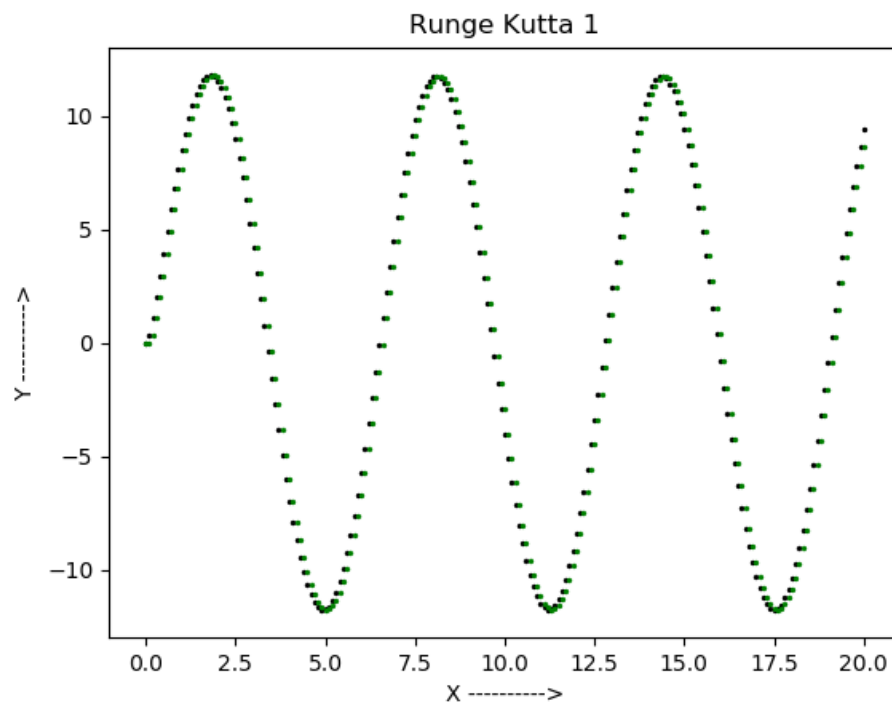


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Runge-Kutta

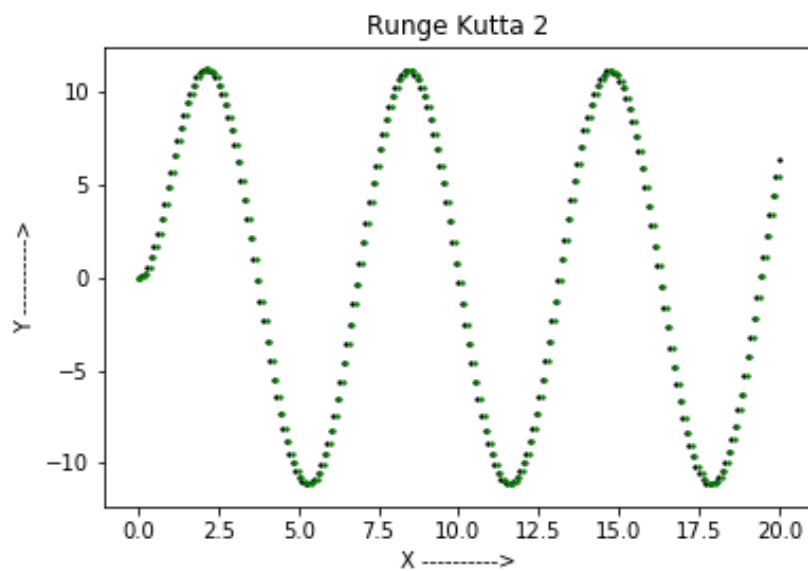


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Adams-Bashforth

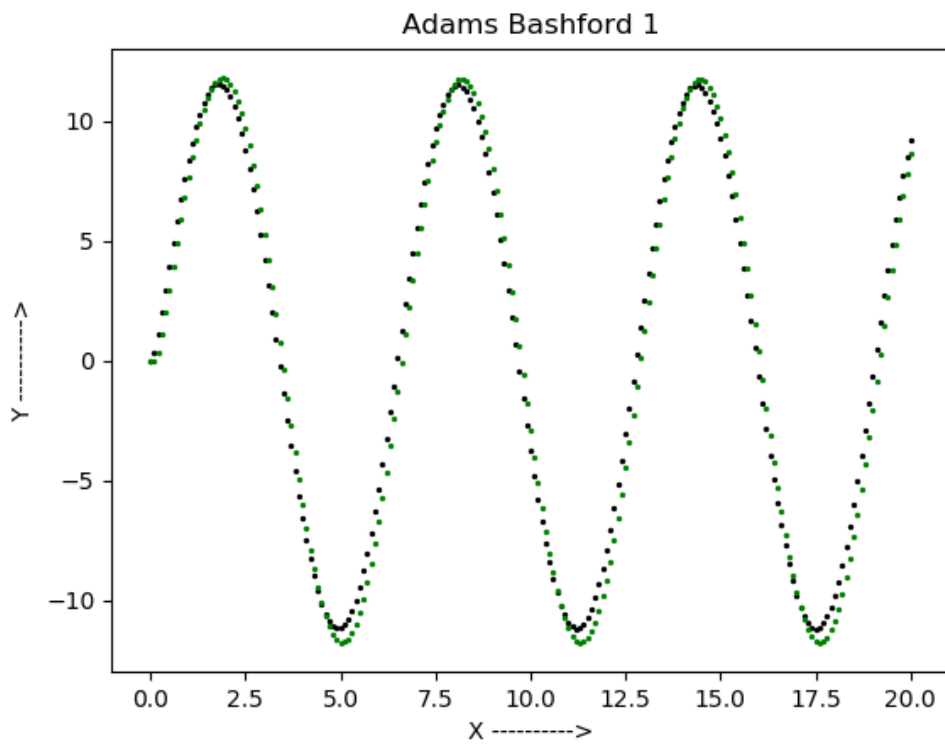


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Adams-Bashforth

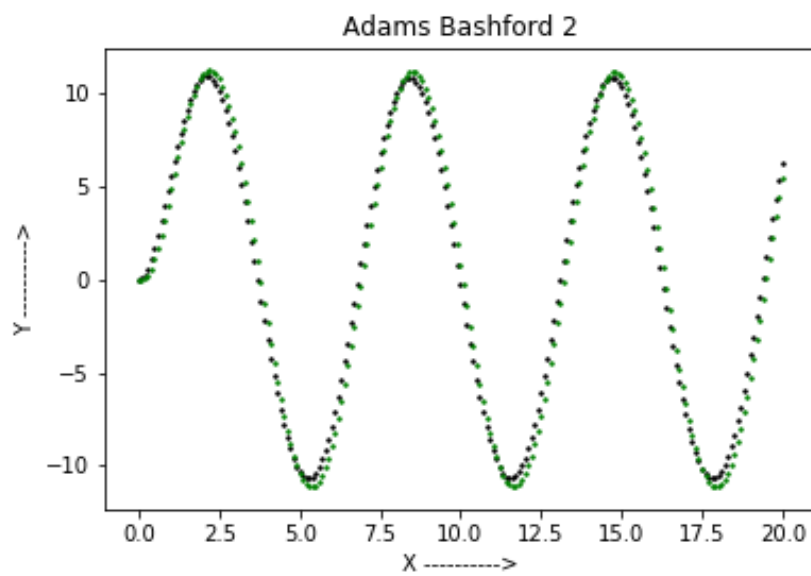


Gráfico de  $i_1(t)$ : Método de Adams-Moulton

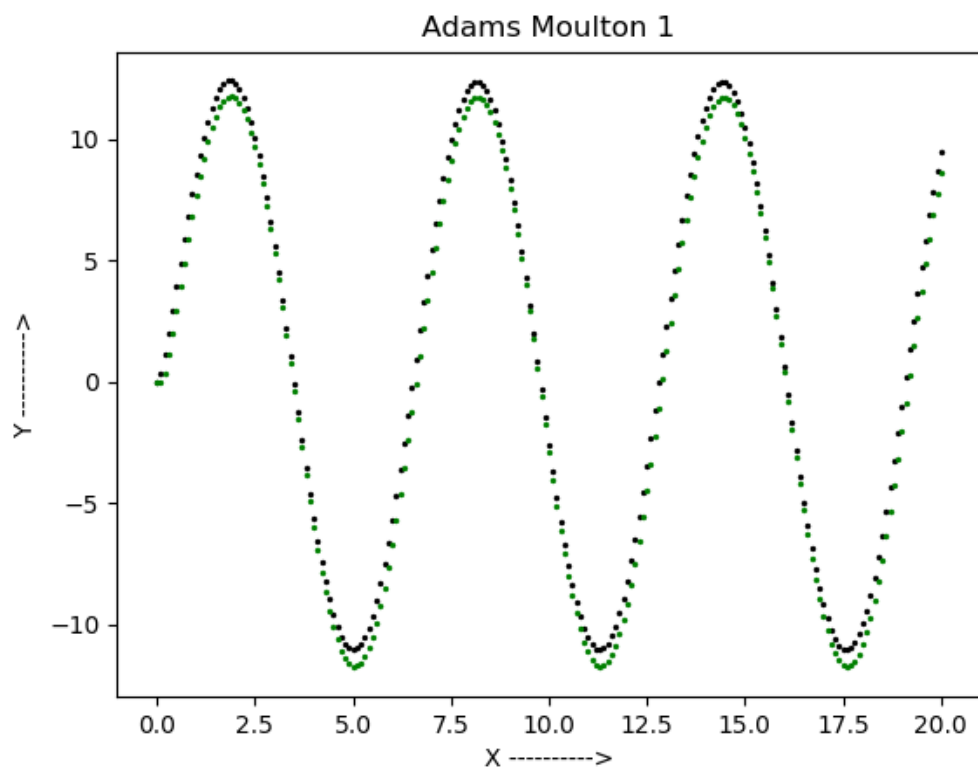


Gráfico de  $i_2(t)$ : Método de Adams-Moulton

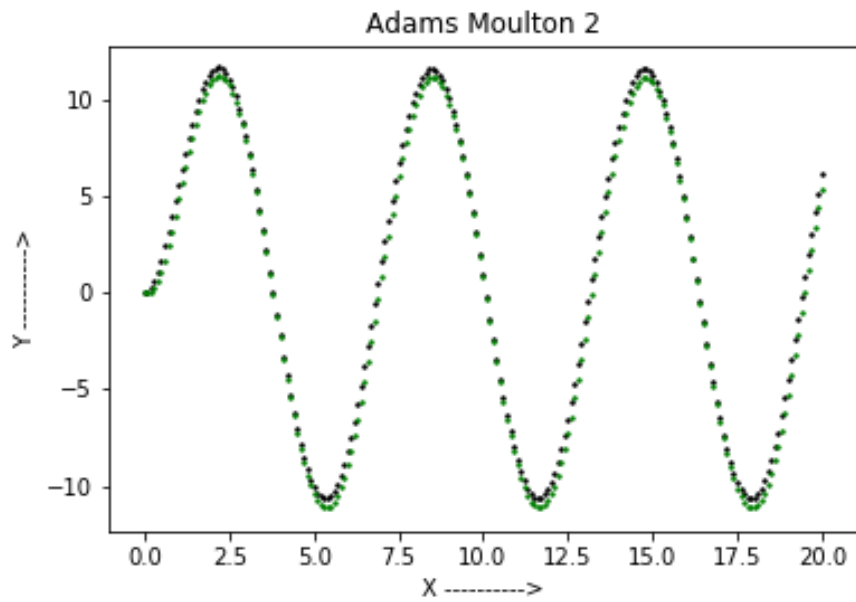


Gráfico de  $i_1(t)$ : Métodos Agrupados

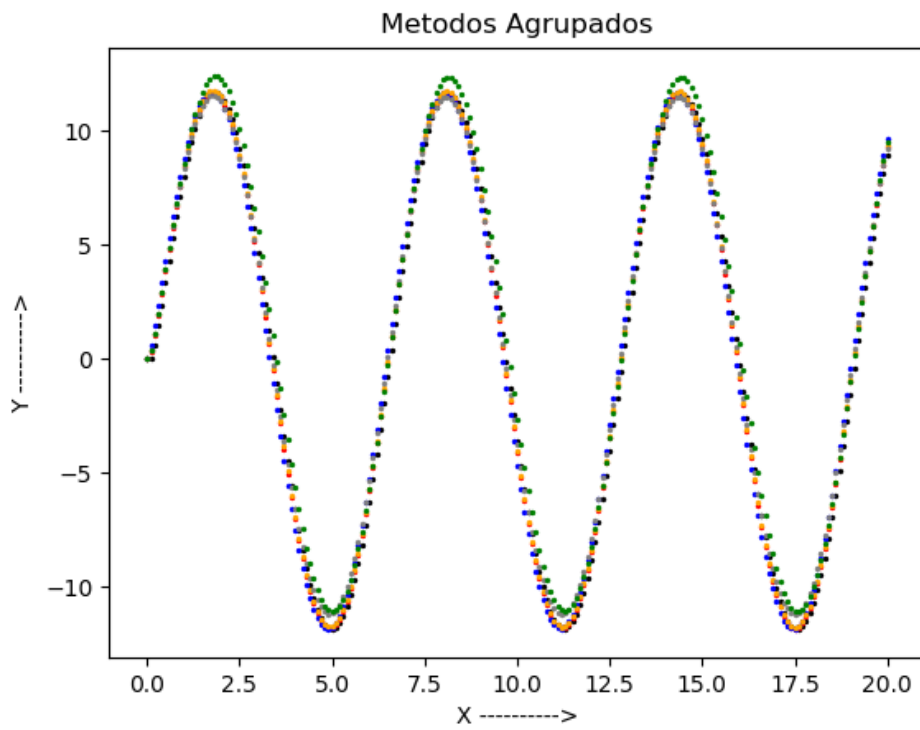


Gráfico de  $i_2(t)$ : Métodos Agrupados

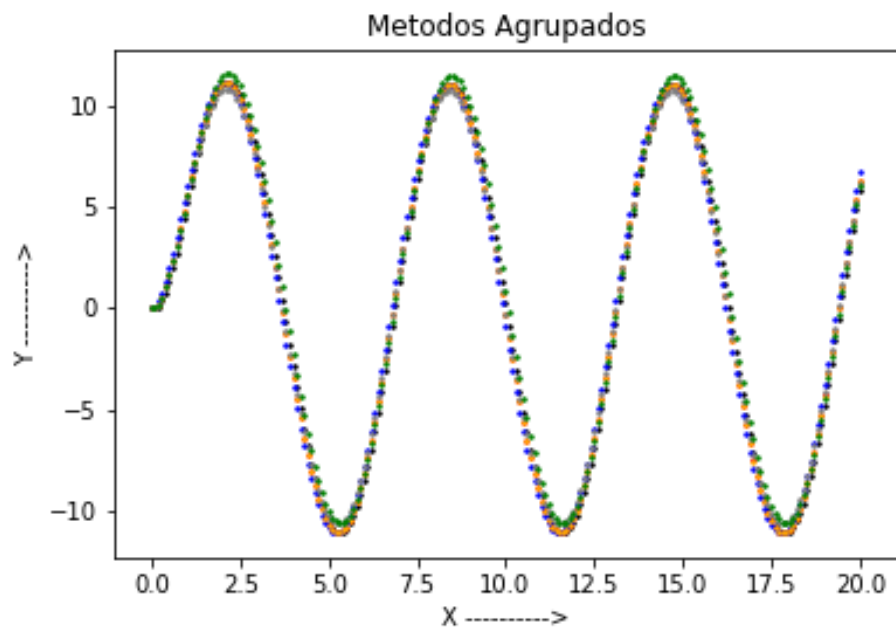


Gráfico de  $i_1(t)$ : Erros Agrupados

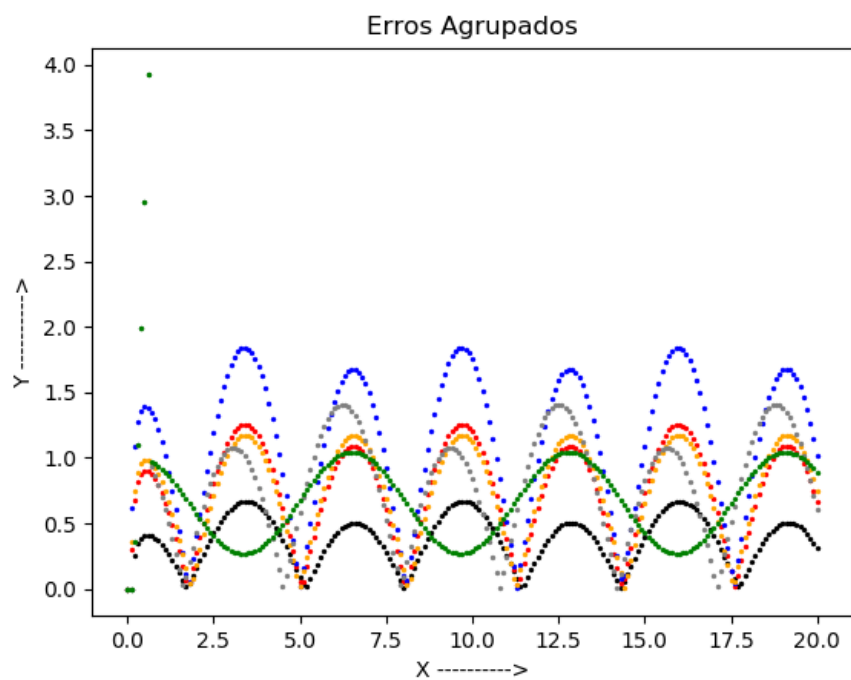
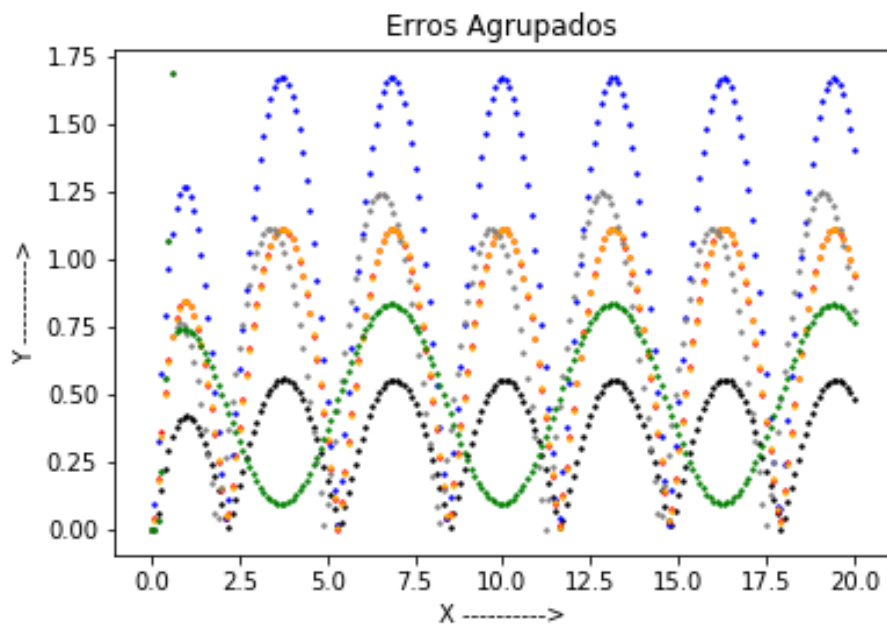


Gráfico de  $i_2(t)$ : Erros Agrupados



Quando  $t$  tende ao infinito, as parcelas exponenciais tendem a zero restando apenas as funções trigonométricas.

Para se obter o máximo e o mínimo, é necessário que:

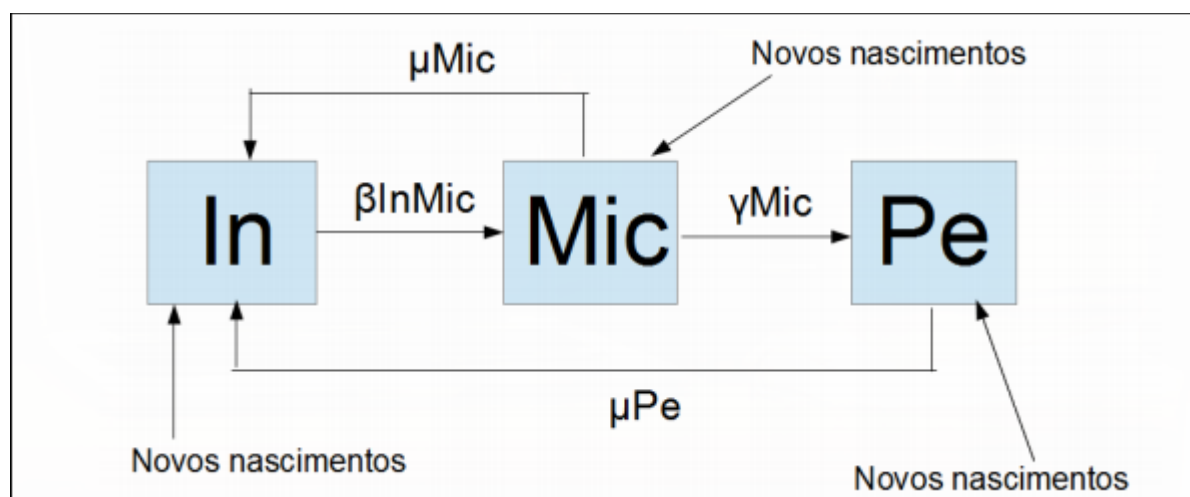
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{0}$$

Uma forma mais simples de se obter o máximo e o mínimo, uma vez que se tem a solução exata, é fazer uma busca nos resultados. Como, quando  $t$  tende a infinito, temos uma função trigonométrica, que por si só já é menor para  $t$  pequeno, então esta solução nos dá uma aproximação:

	Max	Min
$i1(t)$	11.8	-11.7
$i2(t)$	11.2	-11.1

## Problema - Dissertação de Mestrado sobre Análise Comportamental de Micro e Pequenas Empresas

Modelo SIR:



Dele se extrai as seguintes taxas:

$$\frac{dIn}{dt} = -\beta InMic + \mu(Mic + Pe) \quad (4.1)$$

$$\frac{dMic}{dt} = \beta InMic - \gamma Mic - \mu Mic \quad (4.2)$$

$$\frac{dPe}{dt} = \gamma Mic - \mu Pe \quad (4.3)$$

As taxas anteriores são suficiente para se obter os seguintes algoritmos:

```
def dIn(t):  
    return -beta*In[t]*Mic[t] + mi*(Mic[t] + Pe[t])  
def dMic(t):  
    return beta*In[t]*Mic[t] - Mic[t]*(gama + mi)  
def dPe(t):  
    return gama*Mic[t]-mi*Pe[t]
```

Onde In, Mic, Pe são arranjos contendo os valores calculados anteriormente.

Usando o beta, gama e mi obtidos no mestrado, e um passo de:

$$\frac{1}{12 * 30}, \text{ ou seja, a quantidade aproximada de dias}$$

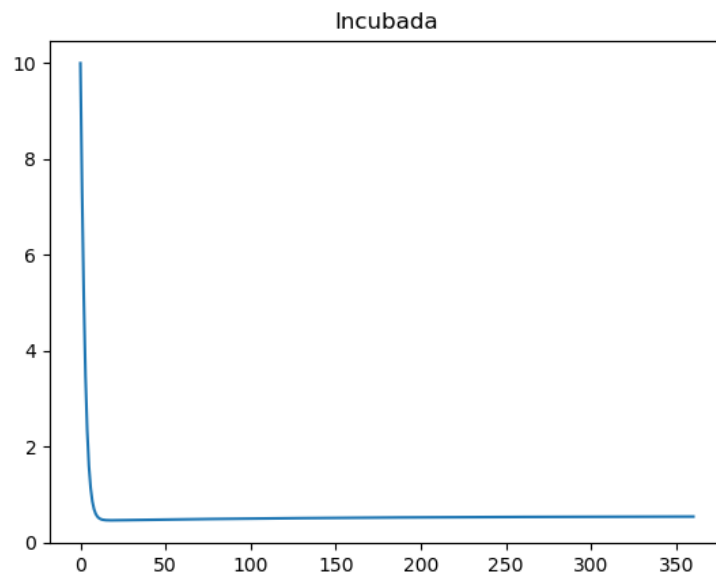
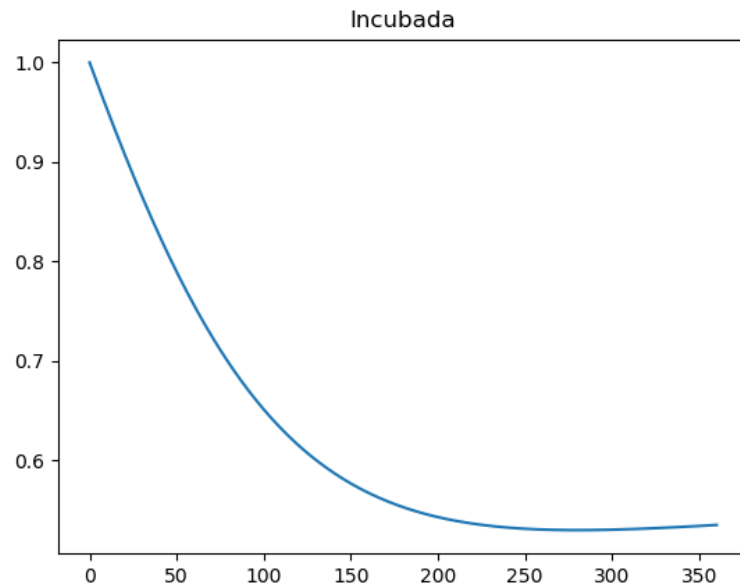
num ano

É possível observar os seguintes valores ao longo de um ano.

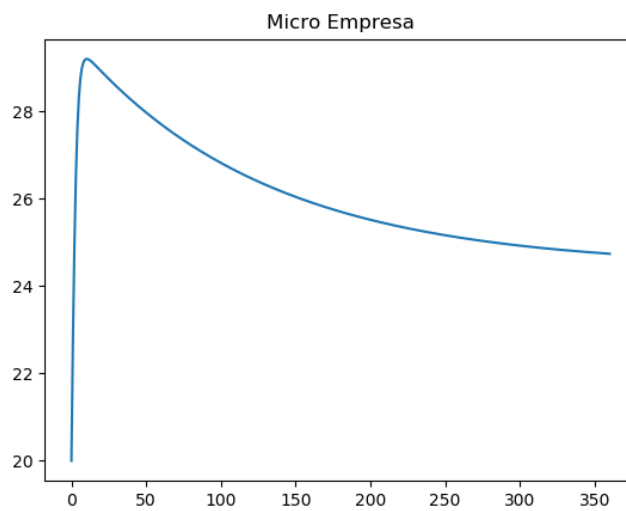
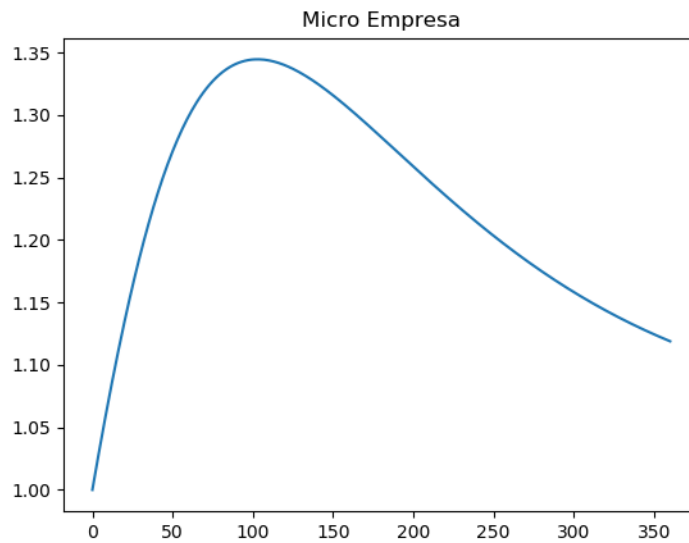
Obs: Os métodos usados para este problema foram: Euler, Euler Inverso e Euler Aprimorado.



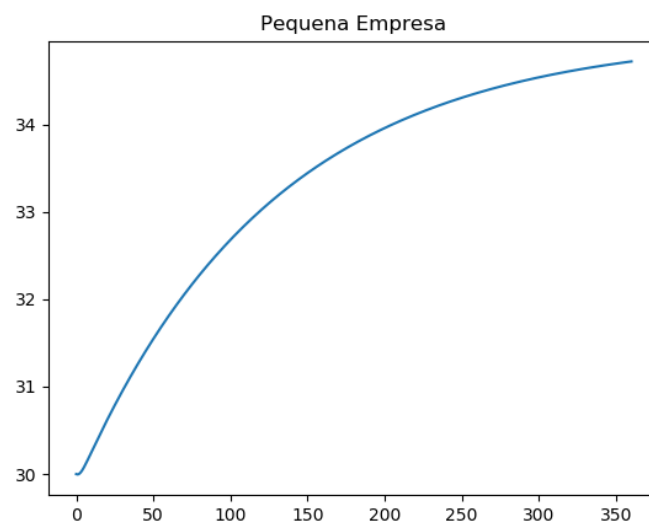
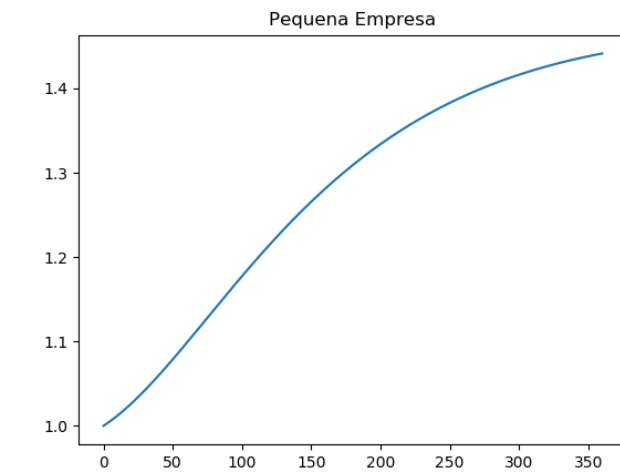
# Empresa Incubada



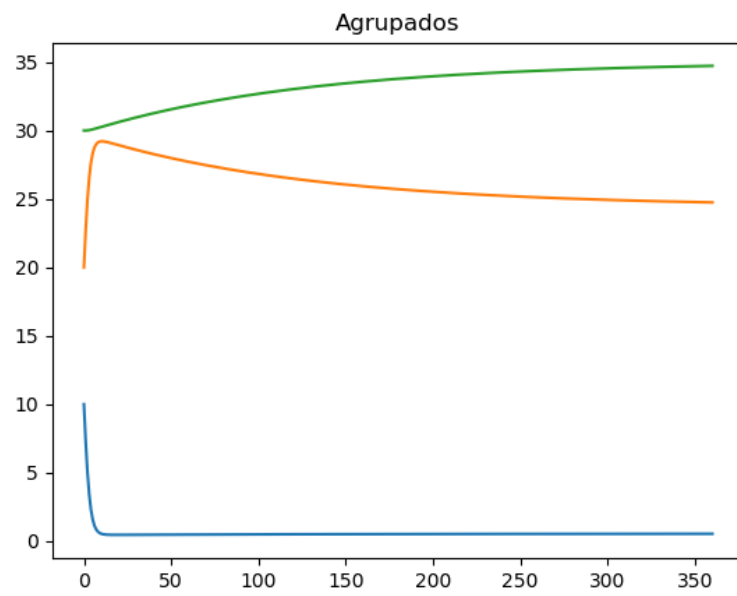
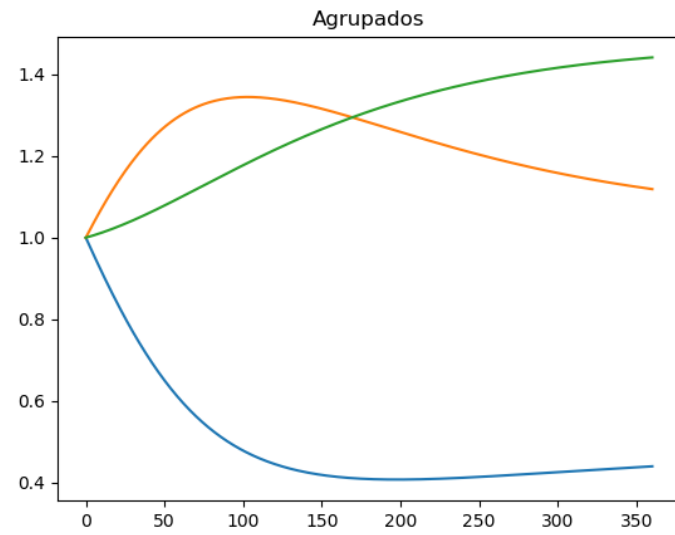
# Micro Empresa



# Pequena Empresa



# Valores agrupados



# Análise comportamental de Empresas

Apesar de valores iniciais diferentes, ambos os casos tendem para o mesmo valor.

Problema: Se observa uma clara diferença entre o gráfico apresentado e o do mestrado, uma possível causa foi o erro ao codificar e entender os problemas.