

Integração por Frações Parciais

Cálculo Integral

Integrantes:

Diego Henrique Xavier dos Santos
Eduardo Henrique Aniceto Teixeira
Lucas Vinícius Pedroso Pereira
Marcos Vinícius Nunes Reis
Vitor Daniel Silva Melo

1. Representação Computacional
2. Principais Algoritmos e Estruturas de Dados
3. Resultados das Integrais
4. Possíveis Limitações e Melhorias
5. Repositório

Fatoração Linear

$$\int \frac{Ax + B}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

Fatoração Linear

$$\int \frac{Ax + B}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
4 public class Main {  
5     public static final String simboloIntegral = "∫";
```

Fatoração Linear

$$\int \frac{Ax + B}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
88     public static void linear() {  
89         int A = 0,  
90             B = 0,  
91             C = 0,  
92             D = 0,  
93             x1 = 0,  
94             x2 = 0;
```

Fatoração Linear

$$\int \frac{Ax + B}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
96         do {
97             System.out.print("Insira o coeficiente linear (Ax): ");
98             A = sc.nextInt();
99
100             if (A == 0) {
101                 System.out.println("\n-----Erro! O numerador não pode ser 0!-----\n");
102             }
103         } while (A == 0);
104
105         do {
106             System.out.print("Insira o termo constante (B): ");
107             B = sc.nextInt();
108             if (B == 0) {
109                 System.out.println("\n-----Erro! O numerador não pode ser 0!-----\n");
110             }
111         } while (B == 0);
112
```

Fatoração Linear

$$\int \frac{Ax + B}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
113     do {
114         System.out.print("Insira o valor de x1: ");
115         x1 = sc.nextInt();
116
117         System.out.print("Insira o valor de x2: ");
118         x2 = sc.nextInt();
119
120         if (x1 == x2) {
121             System.out.println("\n-----Erro! Os termos x1 e x2 não podem ser iguais!-----\n");
122         }
123     } while (x1 == x2);
```

Fatoração Linear

$$\int \frac{Ax + B}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
125     C = calculaTermoC(A, B, x1, x2);
126     //System.out.println(" " + C + " " + "\n-----\nx-" + x1)
127
128     D = calculaTermoD(A, B, x1, x2);
129     //System.out.println(" " + D + " " + "\n-----\nx-" + x2);
130
131     resultadoLinear(A, B, C, D, x1, x2);
132 }
```


Fatoração Quadrática

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

Fatoração Quadrática

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
160     public static void quadratico() {  
161         int A = 0,  
162             B = 0,  
163             C = 0,  
164             D = 0,  
165             a = 0,  
166             b = 0,  
167             c = 0;  
168         double x1 = 0,  
169                x2 = 0;  
170     }
```

Fatoração Quadrática

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
171     do {
172         System.out.print("Insira o coeficiente linear (Ax): ");
173         A = sc.nextInt();
174
175         if (A == 0) {
176             System.out.println("\n-----Erro! O numerador não pode ser 0!-----\n");
177         }
178     } while (A == 0);
179
180     do {
181         System.out.print("Insira o termo constante (B): ");
182         B = sc.nextInt();
183         if (B == 0) {
184             System.out.println("\n-----Erro! O numerador não pode ser 0!-----\n");
185         }
186     } while (B == 0);
187
```

Fatoração Quadrática

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
188     System.out.print("Insira o coeficiente quadrático (ax²): ");
189     a = sc.nextInt();
190
191     System.out.print("Insira o coeficiente linear (bx): ");
192     b = sc.nextInt();
193
194     System.out.print("Insira o termo constante (c): ");
195     c = sc.nextInt();
196
```

Fatoração Quadrática

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{x - x_2}$$

```
199     boolean valid = true;
200     if(d < 0 || (Math.sqrt(d) % 1) != 0) valid = false;
201
202     if(valid) {
203         x1 = bhaskara(a, b, d, '+');
204         x2 = bhaskara(a, b, d, '-');
205         System.out.printf("\nNOVA FÓRMULA APÓS FAZER BHASKARA:\n\t%s\t\t %dx+%d\t\t dx\n\t\t ----- \n\t\t (x%.0f)
(x%.0f)\n", simboloIntegral, A, B, x1, x2);
206
207         int x1term = (int) Math.round(x1);
208         int x2term = (int) Math.round(x2);
209         C = calculaTermoC(A, B, x1term, x2term);
210         D = calculaTermoD(A, B, x1term, x2term);
211
212         resultadoLinear(A, B, C, D, x1term, x2term);
213     }
214     else {
215         System.out.println("\n-----Delta inválido!-----\n");
216     }
217 }
218
```

Fatoração Mista

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + x_1)(x^2 + x_2)} dx = \frac{Cx + D}{x^2 + x_1} + \frac{Ex + F}{x^2 + x_2}$$

Fatoração Mista

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + x_1)(x^2 + x_2)} dx = \frac{Cx + D}{x^2 + x_1} + \frac{Ex + F}{x^2 + x_2}$$

```
215     public static void misto() {  
216         int A = 0, B = 0, x1 = 0, x2 = 0;  
217         double C = 0, D = 0, E = 0, F = 0;  
218     }
```

Fatoração Mista

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + x_1)(x^2 + x_2)} dx = \frac{Cx + D}{x^2 + x_1} + \frac{Ex + F}{x^2 + x_2}$$

```
219     do {
220         System.out.print("Insira o coeficiente linear (Ax): ");
221         A = sc.nextInt();
222         if (A == 0) {
223             System.out.println("\n-----Erro! O numerador não pode ser 0!-----\n");
224         }
225     } while (A == 0);
226
227     System.out.print("Insira o termo constante (B): ");
228     B = sc.nextInt();
229
230     do {
231         System.out.print("Insira o valor de x1 (para x²+x1): ");
232         x1 = sc.nextInt();
233
234         System.out.print("Insira o valor de x2 (para x²+x2): ");
235         x2 = sc.nextInt();
236
237         if (x1 == x2) {
238             System.out.println("\n-----Erro! Os termos x1 e x2 não podem ser iguais!-----\n");
239         }
240     } while (x1 == x2);
241
```


Fatoração Mista

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + x_1)(x^2 + x_2)} dx = \frac{Cx + D}{x^2 + x_1} + \frac{Ex + F}{x^2 + x_2}$$

```
242         C = -A / (double) (x1 - x2);
243         D = -B / (double) (x1 - x2);
244         E = A / (double) (x1 - x2);
245         F = B / (double) (x1 - x2);
246
247         resultadoMisto(A, B, C, D, E, F, x1, x2);
248     }
249
```

Identificação do Tipo da Fatoração do Denominador

- Usuário escolhe o tipo da fatoração através de um Menu com uma estrutura de repetição.

```
64 public static int menu() {
65     int type = 0;
66     do {
67         System.out.println("\nEscolha o tipo de fatoração do denominador: ");
68         System.out.println("\n[0] - Sair do programa");
69         System.out.println("\n[1] -\t" + simboloIntegral + " \t Ax+B \t dx\t ----- \t \t (x-x1)(x-x2)");
70         System.out.println("\n[2] -\t" + simboloIntegral + " \t Ax+B \t dx\t ----- \t \t ax^2+bx+c");
71         System.out.println("\n[3] -\t" + simboloIntegral + " \t Ax+B \t dx\t ----- \t \t (x^2+x1)(x^2+x2)");
72         System.out.print("\nOPÇÃO [0 a 3]: ");
73
74         type = sc.nextInt();
75         System.out.println();
76
77         if (type < 0 || type > 3) {
78             System.out.println("\n-----Opção inválida! Digite um número entre 0 e 3-----");
79         }
80     } while (type < 0 || type > 3);
81
82     return type;
83 }
84
```

Identificação do Tipo da Fatoração do Denominador

- Opção escolhida no Menu é redirecionada à outra função na Main através de uma estrutura condicional.

```
42     public static void main(String[] args) {  
43         int type = menu();  
44  
45         while (type != 0) {  
46             switch (type) {  
47                 case 1:  
48                     linear();  
49                     break;  
50                 case 2:  
51                     quadratico();  
52                     break;  
53                 case 3:  
54                     misto();  
55                     break;  
56                 case 0:  
57                     break;  
58             }  
59  
60             type = menu();  
61         }  
62     }  
63 }
```

Aplicação da Decomposição Adequada

- Cálculo do Termo C e Termo D na fatoração Linear e Quadrática.

```
146     public static int calculaTermoC(int A, int B, int x1, int x2) {  
147         return (B + (A * x1) / (-x2 + x1));  
148     }  
149  
150     public static int calculaTermoD(int A, int B, int x1, int x2) {  
151         return A - (B + (A * x1) / (-x2 + x1));  
152     }  
153
```

- Cálculo do Termo C, Termo D, Termo E e Termo F na fatoração Mista.

```
242         C = -A / (double) (x1 - x2);  
243         D = -B / (double) (x1 - x2);  
244         E = A / (double) (x1 - x2);  
245         F = B / (double) (x1 - x2);  
246
```

Aplicação da Decomposição Adequada

- Aplicação de Bhaskara na fatoração Quadrática.

```
198     if (valid) {
199         x1 = bhaskara(a, b, d, '+');
200         x2 = bhaskara(a, b, d, '-');
201         System.out.printf("\nNOVA FÓRMULA APÓS FAZER BHASKARA:\n\t%s    %dx+%d    dx\n\t ----- \n\t (x%.0f)(x%.0f)\n",
202             simboloIntegral, A, B, x1, x2);
203
204         int x1term = (int) Math.round(x1);
205         int x2term = (int) Math.round(x2);
206         C = calculaTermoC(A, B, x1term, x2term);
207         D = calculaTermoD(A, B, x1term, x2term);
208
209         resultadoLinear(A, B, C, D, x1term, x2term);
210     } else {
211         System.out.println("\n-----Delta inválido!-----\n");
212     }
213 }
214
```

Aplicação da Decomposição Adequada

- Fórmula de Delta e Fórmula de Bhaskara para resolução da fatora  o Quadrática.

```
336     public static int delta(int a, int b, int c) {  
337         return (b * b) - (4 * a * c);  
338     }  
339  
340     public static double bhaskara(int a, int b, int delta, char sym) {  
341         double x = 0;  
342         switch (sym) {  
343             case '-':  
344                 x = ((-b) + Math.sqrt(delta)) / (2 * a);  
345                 break;  
346             case '+':  
347                 x = ((-b) - Math.sqrt(delta)) / (2 * a);  
348                 break;  
349         }  
350         return x;  
351     }  
352 }
```

Integração dos Termos Resultantes

- Formatação dos termos a depender de serem positivos ou negativos ou integração para Ln.

```
7 public static String formatDen(int x) {
8     if (x >= 0)
9         return "(x - " + x + ")"; // Se x1=3 -> (x - 3)
10    else
11        return "(x + " + Math.abs(x) + ")"; // Se x1=-3 -> (x + 3)
12    }
13
14    public static String formatDenFrac(int x) {
15        if (x >= 0)
16            return "x - " + x; // Se x1=3 -> x - 3
17        else
18            return "x + " + Math.abs(x); // Se x1=-3 -> x + 3
19    }
20
21    public static String formatLn(int x) {
22        if (x >= 0)
23            return "ln|x - " + x + "|"; // Se x1=3 -> ln|x - 3|
24        else
25            return "ln|x + " + Math.abs(x) + "|"; // Se x1=-3 -> ln|x + 3|
26    }
27
28    public static String formatTerm(int n) {
29        if (n >= 0)
30            return String.valueOf(n); // Mantém o número, ex: 7
31        else
32            return String.valueOf(n); // Mantém o sinal de menos, ex: -5
33    }
34
35    public static String formatNum(int n) {
36        if (n >= 0)
37            return "+" + n; // Se B=5 -> + 5
38        else
39            return "-" + Math.abs(n); // Se B=-5 -> - 5
40    }
41
```

Integração dos Termos Resultantes

- Conversão de números decimais para frações.

```
301     public static String doubleToFraction(double value) {
302         if (value == 0)
303             return "0";
304
305         boolean isNegative = value < 0;
306         value = Math.abs(value);
307
308         if (Math.abs(value - Math.round(value)) < 0.0001) {
309             return (isNegative ? "-" : "") + Math.round(value);
310         }
311
312         int denominador = 1;
313         while (Math.abs(value * denominador - Math.round(value * denominador)) > 0.0001 && denominador < 10000) {
314             denominador++;
315         }
316
317         int numerador = (int) Math.round(value * denominador);
318
319         int mdc = mdc(numerador, denominador);
320         numerador /= mdc;
321         denominador /= mdc;
322
323         if (denominador == 1) {
324             return (isNegative ? "-" : "") + numerador;
325         }
326
327         return (isNegative ? "-" : "") + numerador + "/" + denominador;
328     }
329 }
```


Integração dos Termos Resultantes

- Múltiplo Denomicador Comum (MDC) para conversão de decimal para fração.

```
330     public static int mdc(int a, int b) {  
331         if (b == 0)  
332             return a;  
333         return mdc(b, a % b);  
334     }  
335
```

Integração dos Termos Resultantes

- Integração na fatoração Linear e Quadrática.

```
128     public static void resultadoLinear(int A, int B, int C, int D, int x1, int x2) {
129         String sA = A + "x " + formatNum(B);
130         String sC = formatTerm(C);
131         String sD = formatNum(D);
132         String denCompleto = formatDen(x1) + formatDen(x2);
133         String den1 = formatDenFrac(x1);
134         String den2 = formatDenFrac(x2);
135         String ln1 = formatLn(x1);
136         String ln2 = formatLn(x2);
137     }
```

Integração dos Termos Resultantes

- Integração na fatoração Mista.

```
250 public static void resultadoMisto(int A, int B, double C, double D, double E, double F, int x1, int x2) {
251     String sA = A + "x";
252     String sB = (B >= 0) ? " + " + B : " - " + Math.abs(B);
253     String numerador = sA + sB;
254
255     String den1 = "x2 + " + x1;
256     String den2 = "x2 + " + x2;
257     if (x1 < 0)
258         den1 = "x2 - " + Math.abs(x1);
259     if (x2 < 0)
260         den2 = "x2 - " + Math.abs(x2);
261
262     String termo1Num = doubleToFraction(C) + "x" + (D >= 0 ? " + " : " - ") + doubleToFraction(Math.abs(D));
263     String termo2Num = doubleToFraction(E) + "x" + (F >= 0 ? " + " : " - ") + doubleToFraction(Math.abs(F));
264
```

```
279     if (C != 0) {
280         resultado += doubleToFraction(C / 2) + " · ln|" + den1 + "|";
281     }
282     if (D != 0 && x1 > 0) {
283         double coef = D / Math.sqrt(x1);
284         String sinal = (resultado.isEmpty() || coef < 0) ? "" : " + ";
285         resultado += sinal + " arctg ";
286     }
287
288     if (E != 0) {
289         String sinal = (resultado.isEmpty() || E / 2 < 0) ? "" : " + ";
290         resultado += sinal + doubleToFraction(E / 2) + " · ln|" + den2 + "|";
291     }
292     if (F != 0 && x2 > 0) {
293         double coef = F / Math.sqrt(x2);
294         String sinal = (resultado.isEmpty() || coef < 0) ? "" : " + ";
295         resultado += sinal + " · arctg";
296     }
297
```

Apresentação do Resultado Simbólico Final

- Variável global de símbolo de Integral.

```
4 public static final String simboloIntegral = "∫";
```

Apresentação do Resultado Simbólico Final

- Impressão do resultado da fatoração Linear e Quadrática e suas integrações.

```
138     System.out.print("\nRESPOSTA:\n\t" + simboloIntegral + " " + sA + " dx" +  
139         " " + sC + " " + sD + " \n");  
140  
141     System.out.print("\t ----- = ----- + ----- = " + C + ln1 + " " + sD + ln2 + " + c\n");  
142  
143     System.out.println("\t " + denCompleto + " " + den1 + " " + den2);
```

Apresentação do Resultado Simbólico Final

- Impressão do resultado da fatoração Mista e suas integrações.

```
265      System.out.println("\nRESPOSTA:");
266      System.out.println("\t" + simboloIntegral + "      " + numerador + "      dx");
267      System.out.println("\t -----");
268      System.out.println("\t (" + den1 + ")(" + den2 + ")");
269
270      System.out.println("\nDECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS:");
271      System.out.println("\t " + termo1Num + "      " + termo2Num);
272      System.out.println("\t= ----- + -----");
273      System.out.println("\t " + den1 + "      " + den2);
274
275      System.out.println("\nINTEGRAL FINAL:");
276
277      String resultado = "";
278
```

```
298      System.out.println("\t= " + resultado + " + C");
```

Resultados das Integrais

Fatoração Linear

Escolha o tipo de fatoração do denominador:

[0] - Sair do programa

[1] - $\int \frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)} dx$

[2] - $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

[3] - $\int \frac{Ax+B}{(x^2+x_1)(x^2+x_2)} dx$

OPÇÃO [0 a 3]: 1

Insira o coeficiente linear (Ax): 2

Insira o termo constante (B): 1

Insira o valor de x1: 3

Insira o valor de x2: 2

RESPOSTA:

$$\int \frac{2x+1}{(x-3)(x-2)} dx = \frac{7}{x-3} - \frac{5}{x-2} = 7\ln|x-3| - 5\ln|x-2| + c$$

1) $\frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{C}{x-x_1} + \frac{D}{x-x_2}$

$C = \frac{B + Ax_1}{-x_2 + x_1}$

$D = A - \frac{B + Ax_1}{-x_2 + x_1}$

então: A, B, x_1, x_2

$C =$

$D =$

3) $\int \frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)} dx = C \ln|x-x_1| + D \ln|x-x_2| + C$

$\int \frac{2x+1}{(x-3)(x-2)} dx = 7 \ln|x-3| - 5 \ln|x-2| + C$

$\int \frac{\square x + \square}{(x-\square)(x-\square)} dx$

Resolução da Oficina de Cálculo II

Resultados das Integrais

Fatoração Quadrática

Escolha o tipo de fatoração do denominador:

[0] - Sair do programa

[1] - $\int \frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)} dx$

[2] - $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

[3] - $\int \frac{Ax+B}{(x^2+x_1)(x^2+x_2)} dx$

OPÇÃO [0 a 3]: 2

Insira o coeficiente linear (Ax): 2

Insira o termo constante (B): 1

Insira o coeficiente quadrático (ax²): 1

Insira o coeficiente linear (bx): 5

Insira o termo constante (c): 6

NOVA FÓRMULA APÓS FAZER BHASKARA:

$$\int \frac{2x+1}{(x-3)(x-2)} dx$$

RESPOSTA:

$$\int \frac{2x+1}{(x+3)(x+2)} dx = \frac{7}{x+3} - \frac{5}{x+2} = 7\ln|x+3| - 5\ln|x+2| + c$$

2) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{Ax+B}{a(x-x_1)(x-x_2)} dx = \frac{1}{a} \int \frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)} dx$

teste:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

entrada: A, B, a, b, c

$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$$
$$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$
$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow 3$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow 2$$
$$A = 2 \quad B = 1$$
$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2$$
$$C = \frac{1+2 \cdot 3}{-2+3} = \frac{7}{1} = 7$$
$$D = 2 - \frac{1+2 \cdot 3}{-2+3} = 2 - 7 = -5$$

Resolução da Oficina de Cálculo II

Resultados das Integrais

Fatoração Mista

Escolha o tipo de fatoração do denominador:

[0] - Sair do programa

[1] - $\int \frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)} dx$

[2] - $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

[3] - $\int \frac{Ax+B}{(x^2+x_1)(x^2+x_2)} dx$

OPÇÃO [0 a 3]: 3

Insira o coeficiente linear (Ax): 1

Insira o termo constante (B): 2

Insira o valor de x1 (para x²+x1): 1

Insira o valor de x2 (para x²+x2): 3

RESPOSTA:

$$\int \frac{1x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx$$

DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS:

$$\frac{1/2x + 1}{x^2 + 1} + \frac{-1/2x - 1}{x^2 + 3}$$

INTEGRAL FINAL:

$$= 1/4 \cdot \ln|x^2 + 1| + \arctg -1/4 \cdot \ln|x^2 + 3| \cdot \arctg + C$$

$$\int \frac{x+2}{(x^2+1)(x^2+3)} dx = \int \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x-1}{x^2+3} dx$$

então: A, B, C, D, E, F

$$\frac{x+2}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+3} = \frac{(Cx+D)(x^2+3) + (Ex+F)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+3)}$$
$$x+2 = (Cx+D)(x^2+3) + (Ex+F)(x^2+1)$$
$$x+2 = Cx^3 + 3Cx + Dx^2 + 3D + Ex^3 + Ex^2 + Fx + F$$
$$0x^3 + 0x^2 + x + 2 = (C+E)x^3 + (D+F)x^2 + (3C+E)x + 3D+F$$
$$\begin{aligned} C+E &= 0 \Rightarrow C = -E & 3C+E &= 1 \Rightarrow -3E+E=1 \Rightarrow -2E=1 \Rightarrow E = -1/2 \\ D+F &= 0 \Rightarrow D = -F & 3D+F &= 2 \Rightarrow -3F+F=2 \Rightarrow -2F=2 \Rightarrow F = -1 \end{aligned}$$

$C = 1/2$
 $E = -1/2$
 $D = 1$
 $F = -1$

Resolução da Oficina de Cálculo II

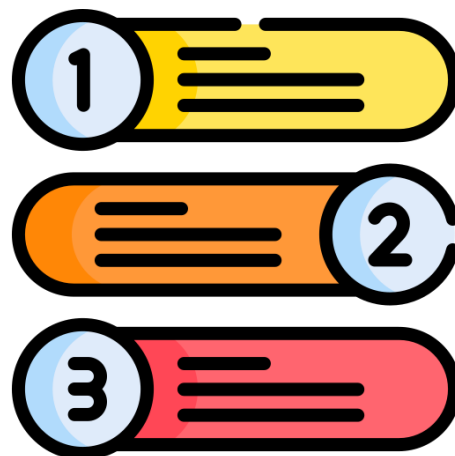
Possíveis Limitações e Melhorias

Interface Gráfica (Front-End)



Interface web que permite melhor interação ao usuário com acesso pelo navegador.

Exibição Passo-a-Passo



Impressão da resolução passo-a-passo e explicações de todo o cálculo.

Formatação de Equações

$$\int — dx$$

Preenchimento das equações com formatação inteligente.

Link Externo para Repositório do Projeto



<https://github.com/marcosware/tp-frac-par> 

Agradecemos a atenção!

