Lógica Proposicional

Matemáticas Discretas

Marco Teran

2023

Contenido

Introducción a Lógica Proposicional

Introducción a la Lógica

Lógica

La **Lógica** es la rama de las matemáticas que se ocupa de los principios de la demostración y la inferencia válida.

- La lógica es un componente fundamental de las ciencias de la computación y las matemáticas.


VAYA, NO ENCUENTRO FALLAS EN SU LOGICA

Aplicaciones de la lógica en la informática

La lógica juega un papel fundamental en la informática y las ciencias de la computación. Algunas de sus aplicaciones más relevantes son:

- **Diseño de circuitos lógicos:** La lógica es esencial para diseñar y construir circuitos digitales que forman la base de todos los dispositivos electrónicos modernos.
- **Algoritmos y programación:** La lógica es fundamental para el diseño y análisis de algoritmos, así como para la programación de software y la resolución de problemas computacionales.
- **Verificación de software:** La lógica se utiliza para verificar la corrección y el comportamiento de los programas, garantizando que funcionen como se espera.
- **Inteligencia artificial:** En el campo de la inteligencia artificial, la lógica se utiliza para modelar sistemas de razonamiento y toma de decisiones.

La aplicación de la lógica en la informática es esencial para el desarrollo de tecnologías y sistemas que impulsan nuestra vida diaria.

Expresiones lógicas

El Lenguaje de las Proposiciones

Lenguaje de las Proposiciones

El *Lenguaje de las Proposiciones* es un conjunto de símbolos y reglas de formación que se utilizan para representar las proposiciones y sus relaciones.

- Utilizado para formular algoritmos, probar teoremas y modelar situaciones del mundo real.
- **Ejemplo**: $p \vee q$ representa la proposición p y q son verdaderos.

Notación y Valor de Verdad

Valor de Verdad

El **Valor de Verdad** de una proposición es **verdadero** si la proposición es verdadera y **falso** si no lo es.

- Utilizado para determinar la validez de proposiciones y argumentos.
- **Ejemplo**: El valor de verdad de la proposición $2+2=4$ es **verdadero**.

Valor de verdad de las expresiones lógicas

Para determinar el valor de verdad de las expresiones lógicas, es crucial comprender las siguientes reglas:

- **Regla de implicación:** Una implicación $p \Rightarrow q$ es falsa solo cuando p es verdadera y q es falsa; en todos los demás casos, la implicación es verdadera.
- **Regla de disyunción inclusiva:** Una disyunción $p \vee q$ es verdadera si al menos una de las proposiciones p o q es verdadera; solo es falsa cuando ambas son falsas.
- **Regla de conjunción:** Una conjunción $p \wedge q$ es verdadera solo cuando tanto p como q son verdaderas; en cualquier otro caso, es falsa.

Valor de verdad de las expresiones lógicas

Ejemplo: Consideremos las siguientes expresiones lógicas:

- $p =$ El número es par.
- $q =$ El número es divisible por 3.

Entonces, la expresión SI p ENTONCES q es verdadera, ya que todo número par es divisible por 3.

Proposiciones y declaraciones compuestas

Proposiciones

Proposición

Una **proposición** (o **declaración**) es una afirmación declarativa que es falsa o verdadera, pero no ambas.

- Las proposiciones son las unidades básicas de la lógica.
- **Ejemplo**: $2+2=4$ es una proposición verdadera.

Proposiciones

Ejemplos de proposiciones:

- El hielo flota en el agua.
- China está en Europa.
- $2 + 2 = 4$.
- $2 + 2 = 5$.

Proposiciones

Ejemplos de no proposiciones:

- Haz tu tarea.
- ¿A dónde vas?

Ejemplo de proposiciones verdaderas y falsas:

- El hielo flota en el agua (verdadera).
- $2 + 2 = 5$ (falsa).

Proposición Simple

Proposición Simple

Una **Proposición Simple** es una proposición que no contiene otras proposiciones como componentes.

- Son los bloques de construcción de proposiciones más complejas.
- **Ejemplo**: El cielo es azul es una proposición simple.

Proposiciones compuestas

Proposiciones compuestas

Proposiciones compuestas

Muchas proposiciones son **compuestas**; es decir, están compuestas de subproposiciones y varios conectivos que se analizarán dentro de poco. Estas proposiciones se denominan **proposiciones compuestas**.

Proposiciones compuestas

Proposición primitiva

Una proposición es **primitiva** si no es posible separarla en proposiciones más simples; es decir, si no es compuesta.

Proposiciones compuestas

Ejemplo de proposiciones primitivas:

- El hielo flota en el agua.
- $2 + 2 = 4$.

Ejemplo de proposiciones compuestas:

- Las rosas son rojas *y* las violetas son azules.
- Juan es inteligente *o* estudia cada noche.

Proposiciones compuestas

La *propiedad fundamental* de una proposición compuesta es que su **valor de verdad** lo determinan los valores de verdad de sus **subproposiciones** junto con la forma en que se **conectan** para formar las proposiciones compuestas.

Conectivos lógicos

Conectivos lógicos

Conectivos lógicos

En lógica, los **conectivos lógicos** son palabras o símbolos que se utilizan para combinar proposiciones más simples y formar proposiciones compuestas.

Conectivos lógicos

Principales conectivos lógicos:

- **Negación:** $\neg p$, que es verdadera si p es falsa y viceversa.
- **Conjunción:** $p \wedge q$, que es verdadera solo cuando tanto p como q son verdaderas.
- **Disyunción:** $p \vee q$, que es verdadera si al menos una de las proposiciones p o q es verdadera.
- **Implicación:** $p \Rightarrow q$, donde p es la premisa y q es la conclusión.
- **Doble implicación:** $p \Leftrightarrow q$, que es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

Conectivos lógicos

Ejemplo:

- Si $p =$ Es lunes y $q =$ Hay lluvia, entonces la proposición compuesta Si p, entonces $\neg q$ se traduce como Si es lunes, entonces no hay lluvia.

Operaciones lógicas básicas

Proposiciones

Proposición

Sea $P(p, q, ...)$ una expresión construida a partir de variables lógicas p, q, ..., que tienen el valor VERDADERO (V) o FALSO (F), y los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ (además de otros que se analizarán). Una expresión como $P(p, q, ...)$ se denomina *proposición*.

Propiedad clave:

- El valor de verdad de una proposición $P(p, q, ...)$ depende exclusivamente de los valores de verdad de sus variables.

Conjunción ($\wedge$)

Conjunción ($\wedge$)

Conjunción ($\wedge$)

Dos proposiciones, p y q, se combinan mediante la palabra **y** para formar una proposición compuesta que se denomina conjunción de las proposiciones originales. Se escribe así: $p \wedge q$, que se lee p y q.

Conjunción ($\wedge$)

Ejemplo Considere las cuatro proposiciones siguientes:

- El hielo flota en el agua *y* $2+2=4$.
- El hielo flota en el agua *y* $2+2=5$.
- China está en Europa *y* $2+2=4$.
- China está en Europa *y* $2+2=5$.

Valor de verdad:

- Solo la primera proposición es verdadera. Las otras son falsas, ya que al menos una de sus **subproposiciones** es falsa.

Disyunción ($\vee$)

Disyunción ($\vee$)

Disyunción ($\vee$)

Dos proposiciones, p y q, se combinan mediante la palabra o para formar una proposición compuesta que se denomina disyunción de las proposiciones originales. Se escribe así: $p \vee q$, que se lee p o q.

Disyunción ($\vee$)

Ejemplo:

- Si $p =$ Es lunes y $q =$ Es martes, entonces la proposición compuesta $p \vee q$ se traduce como Es lunes o es martes.

Valor de verdad:

- $p \vee q$ es verdadera si al menos una de las proposiciones p o q es verdadera.
- $p \vee q$ es falsa solo cuando ambas son falsas.

Disyunción

Disyunción

Dos proposiciones, p y q, se combinan mediante el conectivo **o** para formar una proposición compuesta denominada disyunción de las proposiciones originales. Se escribe así: $p \vee q$, que se lee p o q.

Valor de verdad:

- Si p y q son falsas, entonces $p \vee q$ es falsa.
- En cualquier otro caso, $p \vee q$ es verdadera.

Disyunción

Ejemplo: Considere las cuatro proposiciones siguientes:

- **i)** El hielo flota en el agua *o* $2+2=4$.
- **ii)** El hielo flota en el agua *o* $2+2=5$.
- **iii)** China está en Europa *o* $2+2=4$.
- **iv)** China está en Europa *o* $2+2=5$.

Valor de verdad:

- Solo la proposición **iv)** es falsa. Las otras son verdaderas, ya que al menos una de sus subproposiciones es verdadera.

Disyunción exclusiva

Disyunción exclusiva

La *disyunción exclusiva* es una variante de la disyunción donde se utiliza la palabra **o** en el sentido de **p o q pero no ambas**. Se denota como $p \oplus q$.

Disyunción exclusiva

Ejemplo:

- Si $p =$ El estudiante estudiará en Yale y $q =$ El estudiante estudiará en Harvard, entonces la proposición compuesta $p \oplus q$ se traduce como El estudiante estudiará en Yale o en Harvard, pero no en ambas

Valor de verdad:

- $p \oplus q$ es verdadera si exactamente una de las proposiciones p o q es verdadera.
- $p \oplus q$ es falsa si ambas son verdaderas o ambas son falsas.

Observación sobre la disyunción

La palabra **o** en español se usa en dos formas distintas:

- Algunas veces se utiliza en el sentido de **p o q o ambas**, es decir, por lo menos una de las dos alternativas ocurre, como se ha definido anteriormente.
- Otras veces se utiliza en el sentido de **p o q pero no ambas**, lo que se conoce como **disyunción exclusiva**.

Ejemplo:

- En la oración Él estudiará en Yale o en Harvard, la **o** se utiliza en el segundo sentido, es decir, *disyunción exclusiva*.

El lenguaje simbólico, como $p \vee q$ y $p \oplus q$, permite una mayor precisión en la interpretación de la disyunción y la disyunción exclusiva.

Negación ($\neg$)

Negación ($\neg$)

Negación ($\neg$)

La negación de una proposición p se denota como $\neg p$ y se lee "no p". $\neg p$ es verdadera si p es falsa, y es falsa si p es verdadera.

- Dada cualquier proposición p, es posible formar otra proposición, denominada *negación* de p, al escribir **no es verdad que...** o **Es falso que...** antes de p, o, de ser posible, al insertar la palabra **no** en p.
- El símbolo de la negación de p se lee no p y se denota por $\neg p$.

Negación ($\neg$)

Valor de verdad:

- Si p es verdadera, entonces $\neg p$ es falsa.
- Si p es falsa, entonces $\neg p$ es verdadera.

Negación ($\neg$)

Ejemplo:

- Si $p =$ El examen es difícil, entonces $\neg p$ se traduce como El examen no es difícil.

Valor de verdad:

- $\neg p$ es verdadera si p es falsa.
- $\neg p$ es falsa si p es verdadera.

Negación

Ejemplo: Considere las seis proposiciones siguientes:

- **a1)** El hielo flota en el agua.
- **a2)** Es falso que el hielo flota en el agua.
- **a3)** El hielo no flota en el agua.
- **b1)** $2 + 2 = 5$.
- **b2)** Es falso que $2 + 2 = 5$.
- **b3)** $2 + 2 \neq 5$.

Valor de verdad:

- **a2)** y **a3)** son, cada una, la negación de **a1)**. Puesto que **a1)** es verdadera, **a2)** y **a3)** son falsas.
- **b2)** y **b3)** son, cada una, la negación de **b1)**. Puesto que **b1)** es falsa, **b2)** y **b3)** son verdaderas.

Observación

Observación

La notación lógica para los conectivos **y**, **o** y **no** aún no está completamente estandarizada. Por ejemplo, en algunos textos se usa:

- $p \wedge q$ o $p \cdot q$ o pq para $p \wedge q$
- $p \vee q$ o $p + q$ para $p \vee q$
- p, $\overline{p}$ o $\sim p$ para $\neg p$

El lenguaje simbólico ofrece una notación concisa y clara para el análisis de proposiciones y la construcción de expresiones lógicas.

Tablas de verdad

Tablas de verdad

Tablas de verdad

Una **tabla de verdad** es una herramienta que muestra todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones en una expresión lógica y el valor de verdad resultante.

Tablas de verdad

- Una tabla de verdad muestra todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las variables en una proposición y el valor de verdad resultante de la proposición.
- El valor de verdad de una proposición se conoce una vez que se conoce el valor de verdad de cada una de sus variables.
- Las tablas de verdad son útiles para determinar el valor de verdad de proposiciones compuestas y analizar su comportamiento lógico.

Tabla de verdad para implicación

Ejemplo de tabla de verdad para implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla de verdad para conjunción

Ejemplo de tabla de verdad para conjunción:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad para disyunción

Ejemplo de tabla de verdad para disyunción:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad para disyunción exclusiva

Ejemplo de tabla de verdad para disyunción exclusiva:

p	q	$p \bigoplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad para negación

Ejemplo de tabla de verdad para negación:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Observación:

- El valor de verdad de la negación de p siempre es el opuesto al valor de verdad de p.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

a) "p y q"

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

b) "p o q"

p	$\neg p$
V	F
F	V

c) "no q"

Construcción de la tabla de verdad

Para construir la tabla de verdad de una proposición $P(p, q, ...)$:

- Enumere todas las variables p, q, ... involucradas en P.
- Genere suficientes renglones para permitir todas las combinaciones posibles de valores de verdad (V y F) para estas variables. Para n variables, se requieren 2^n renglones.
- En cada renglón, asigne valores de verdad (V o F) a las variables.
- Calcule el valor de verdad en cada etapa .elemental"de la construcción de la proposición, utilizando las definiciones de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\neg$.
- Obtenga el valor de verdad de la proposición, que aparece en la última columna de la tabla.

Proposiciones y Tablas de Verdad

Ejemplo

Considere la proposición $\neg(p \wedge \neg q)$.

Tabla de verdad:

- Variables: p, q.
- Renglones: 4 (2 variables).

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

a)

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

b)

Figura 1: Construcción de la tabla de verdad

Tabla de verdad real:

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposiciones y Tablas de Verdad

Observación
Para evitar una cantidad excesiva de paréntesis, algunas veces se adopta un orden de precedencia para los conectivos lógicos:

- $\neg$ tiene precedencia sobre $\wedge$ que tiene precedencia sobre $\vee$.

Por ejemplo, $\neg p \wedge q$ significa $(\neg p) \wedge q$ y no $\neg(p \wedge q)$.
La notación simbólica y la construcción de tablas de verdad permiten analizar expresiones lógicas de manera precisa y eficiente.

Método alterno para construir una tabla de verdad

Método alterno para construir una tabla de verdad

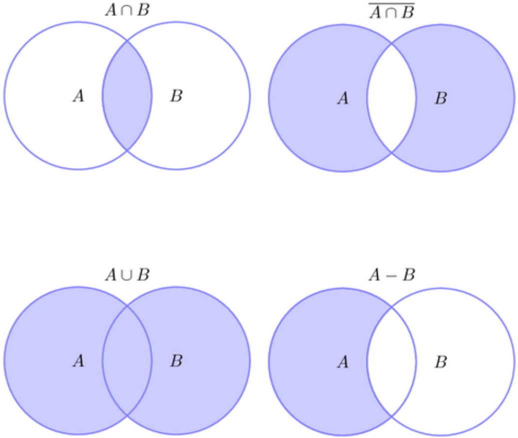
1. Se construye la tabla de verdad. Se enumeran todas las variables y las combinaciones de sus valores de verdad. También hay un renglón final identificado por **Paso**.
2. Se escribe la proposición en el renglón superior a la derecha de sus variables con espacio suficiente para cada columna bajo las variables y bajo cada operación lógica en la proposición.
3. Los valores de verdad de las variables se escriben en la tabla bajo las variables en la proposición.
4. Se escriben valores de verdad adicionales en la tabla de verdad, columna por columna, bajo cada operación lógica. También se indica el paso en que se introducen los valores de verdad de cada columna.
5. La tabla de verdad de la proposición consta entonces de las columnas originales bajo las variables y el último paso; es decir, la última columna se escribe en la tabla.

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
V	V		V			V
V	F		V			F
F	V		F			V
F	F		F			F
Paso						

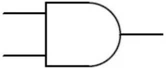
p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
V	V		V		F	V
V	F		V		V	F
F	V		F		F	V
F	F		F		V	F
Paso			1		2	1

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
V	V		V	F	F	V
V	F		V	V	V	F
F	V		F	F	F	V
F	F		F	F	V	F
Paso			1	3	2	1

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F
Paso		4	1	3	2	1

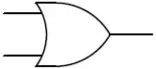

$A \cap B$
A
B
$\overline{A \cap B}$
A
B
$A \cup B$
A
B
$A - B$
A
B

Tautologías y contradicciones



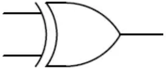
AND

A	B	Output
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



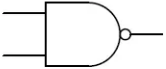
OR

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



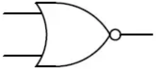
XOR

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



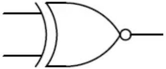
NAND

A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NOR

A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



XNOR

A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tautologías y contradicciones

Tautologías y contradicciones

Tautología

Proposiciones que son verdaderas para cualquier combinación de valores de verdad de sus variables.

Tautologías y contradicciones

Contradicción

Proposiciones que son falsas para cualquier combinación de valores de verdad de sus variables.

Tautologías y contradicciones

Ejemplos

- La proposición $p \vee \neg p$ es una **tautología**.
- La proposición $p \wedge \neg p$ es una **contradicción**.

Tautologías y contradicciones

Tablas de verdad

Tautología: $p \vee \neg p$

p	$p \vee \neg p$
V	V
F	V

Contradicción: $p \wedge \neg p$

p	$p \wedge \neg p$
V	F
F	F

Propiedades

- La negación de una tautología es una **contradicción**.
- La negación de una contradicción es una **tautología**.

Principio de sustitución (Teorema 4.1)

Si $P(p, q, ...)$ es una tautología, entonces $P(p_1, q_2, ...)$ es una tautología para proposiciones arbitrarias $P_1, P_2, ...$.
Ejemplo Si $p \vee q$ es una tautología, entonces $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ también es una tautología.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

a) $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

b) $p \wedge \neg p$

Equivalencia lógica

Equivalencia lógica

Equivalencia lógica

Dos proposiciones $P(p, q, ...)$ y $Q(p, q, ...)$ son lógicamente equivalentes, denotado por $P(p, q, ...) \equiv Q(p, q, ...)$, si tienen tablas de verdad idénticas.

Ejemplo

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Equivalencia lógica

Tabla de verdad

$\neg(p \wedge q)$

p	q	$\neg(p \wedge q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

$\neg p \vee \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Ambas proposiciones tienen la misma tabla de verdad. Por lo tanto, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

Observación

Sean p Las rosas son rojas y q Las violetas son azules. Sea S la proposición:

No es verdad que las rosas son rojas y las violetas son azules.

Entonces S se puede escribir como $\neg(p \wedge q)$. Sin embargo, como ya se observó, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$. En consecuencia, S tiene el mismo significado que la proposición:

Las rosas no son rojas, o las violetas no son azules.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

a) $\neg(p \wedge q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

b) $\neg p \vee \neg q$

¡Muchas gracias por su atención!

¿Preguntas?

Contacto: Marco Teran
webpage: marcoteran.github.io/