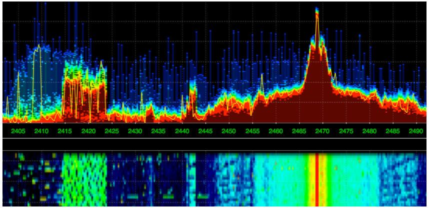
Análisis espectral de señales: Transformada de Fourier

Procesamiento Digital de Señales



Marco Teran

2022

Contenido

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

- Si una señal $x[n]$ de tiempo discreto es periódica con periodo N se puede representar de forma analítica mediante la **serie de Fourier**
- Representar mediante la composición de una **suma** de funciones *armónicamente relacionadas*

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\Omega kn} = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Donde,

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

¿Pero qué ocurre cuando la señal de análisis no es periódica?

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

En este caso tenemos a $x[n]$ una secuencia no periódica de duración finita, es decir $x[n] = 0$ para $|n| > N_1$, tal cual como se puede observar en la siguiente gráfica:

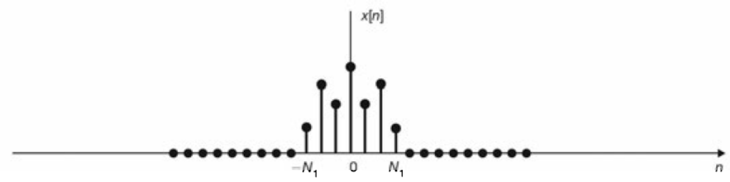


Figure 1: Señal discreta de duración finita

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

- Definimos la secuencia $x_{N_0}[n]$ — representación periódica de $x[n]$
- Se obtiene mediante la periodización, es decir repetición
- N_0 el periodo fundamental de la señal.

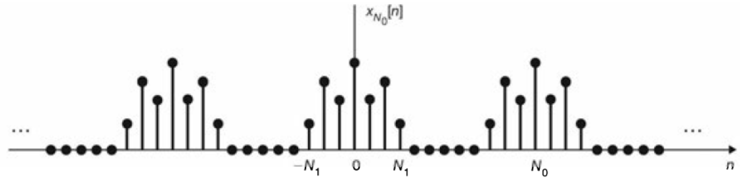


Figure 2: Señal discreta periódica obtenida de la periodización de $x[n]$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

La secuencia $x_{N_0}[n]$ puede ser representada mediante la serie de Fourier

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n}. \tag{1}$$

donde,

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

con coeficientes de la serie de Fourier

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{N_0}[n] e^{-jk\Omega_0 n}. \tag{2}$$

Podemos afirmar que

$$x_{N_0} = x[n], \text{ para } |n| \leq N_1 \tag{3}$$

y $x[n] = 0$ fuera de los limites de $[-N_1, N_1]$.
Podemos rescribir la ecuación 15 de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \tag{4}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Definamos de acuerdo la ecuación 17 una nueva función de una variable independiente Ω de la siguiente manera:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{5}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Reescribamos la ecuación 17 implementando la nueva función definida por la ecuación 18, donde para este caso $\Omega = k\Omega_0$:

$$c_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) \tag{6}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Podemos representar el periodo N_0 de la siguiente forma:

$$\frac{1}{N_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \tag{7}$$

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 20) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 14)

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{\Omega_0}{2\pi} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \tag{8}$$

reescribimos,

$$x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \tag{9}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Si $N_0 \to \infty$ entonces

$$\lim_{N_0 \to \infty} x_{N_0}[n] = x[n] \tag{10}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Podemos representar el periodo T_0 de la siguiente forma:

$$\text{si } N_0 \to \infty \text{ entonces } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \to 0 \text{ entonces } \Omega_0 \to \Delta\Omega$$

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 20) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 14)

$$x[n] = \lim_{\substack{N_0 \to \infty \\ \Delta\Omega \to 0}} x_{N_0}[n] = \lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \underbrace{\underbrace{X(k\Delta\Omega)e^{jk\Delta\Omega n}}_{altura} \underbrace{\Delta\Omega}_{ancho}}_{rectangulo} \tag{11}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

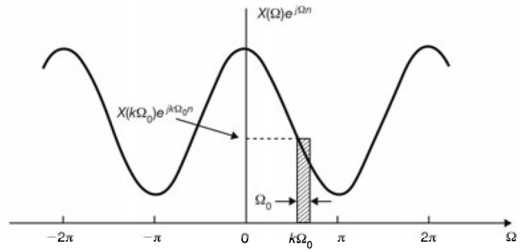


Figure 3: Interpretación de la ecuación analítica de Fourier como suma de integral

$X(\Omega)$ es periódica con periodo 2π. La secuencia $e^{j\Omega n}$ también lo es. Por tanto el producto $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ es periódico con periodo $N = 2\pi$.

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Por tanto la ecuación 22 se transforma en una integral, donde la suma $\sum\limits_{k=\langle N_0 \rangle}$ se realiza sobre N_0–intervalos de ancho cada uno $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$, para un intervalo total de ancho 2π.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} \, \mathrm{d}\Omega \tag{12}$$

Es decir: $k\Omega_0$ va desde $\lim\limits_{\substack{N_0 \to \infty \\ \Omega_0 \to 0}} k \dfrac{2\pi}{N_0}\Big|_{k=1} = 0$ a $\lim\limits_{\substack{N_0 \to \infty \\ \Omega_0 \to 0}} k \dfrac{2\pi}{N_0}\Big|_{k=N_0} = 2\pi$ es decir desde $\Omega = 0$ a $\Omega = 2\pi$

Par de la transformada de Fourier de tiempo discreto, DTFT

Se entiende como al par de la transformada de Fourier de tiempo discreto la siguiente relación

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \tag{13}$$

Donde la transformada de Fourier de tiempo discreto se expresa mediante

$$X(\Omega) = \mathfrak{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{14}$$

y la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto se obtiene

$$x[n] = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega \tag{15}$$

Recordemos que la DTFT $X(\Omega)$ es periódica con periodo 2π, es decir

$$X(\Omega) = X(\Omega + k2\pi) \tag{16}$$

Espectro de Fourier

Espectro de Fourier

A $X(\Omega)$ se le conoce también como la representación en la frecuencia o el espectro de $x(t)/x[n]$.

La transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ es de carácter complejo.

Forma polar:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\Phi(\Omega)} \tag{17}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Linealidad

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega) \tag{18}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Periodicidad del espectro de una señal discreta

$$X(\Omega + k2\pi) = X(\Omega) \tag{19}$$

Ω se da en radianes y es continua de $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ o también $0 \leq \Omega \leq 2\pi$.

Propiedades de la transformada de Fourier: Corrimientos de frecuencia y tiempo

$$x[n-N] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)e^{-j\Omega N} \tag{20}$$

$$x[n]e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega-\Omega_0) \tag{21}$$

A la ecuación 38 se le conoce como *modulación compleja*.

Propiedades de la transformada de Fourier: Conjugación

$$x^*[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\Omega) \tag{22}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Inversión en el tiempo

$$x[-n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(-\Omega) \tag{23}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Paridad de la transformada de Fourier

Para $x[n] \in \mathfrak{R}$

$$x[n] = x_{even}[n] + x_{odd}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) \tag{24}$$

donde,

$$x_{even}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \tag{25}$$

$$x_{odd}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \tag{26}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Teorema de Parseval

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{27}$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S_x(\Omega) \mathrm{d}\Omega \tag{28}$$

donde $S_x(\Omega)$ se conoce como densidad espectral de potencia y se calcula

$$S_x(\Omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{|X_N(\Omega)|^2}{2N+1}. \tag{29}$$

donde

$$X_N(\Omega) = \mathfrak{F}\{x[n]\{u[n+N] - u[n-N]\}\}. \tag{30}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Diferenciación y diferencia

Diferencia:

$$\underbrace{x[n]-x[n-1]}_{\text{secuencia de primera diferencia}} \xrightarrow{\mathcal{F}} (1-e^{-j\Omega})X(\Omega) \tag{31}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Diferenciación en la frecuencia

$$nx[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{\mathrm{d}X(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega} \tag{32}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Integración y Acumulación

Acumulación

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} \pi X(0)\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(\Omega) \tag{33}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Integral de convolución

Integral de convolución en el dominio del tiempo es multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{34}$$

Dominio de la frecuencia es el producto de ambas señales:

$$\underbrace{Y(\omega)}_{\text{espectro de salida } y(t)} = \underbrace{X(\omega)}_{\text{espectro de entrada } x(t)} \underbrace{H(\omega)}_{\text{respuesta en frecuencia del sistema}} \tag{35}$$

Se cumple que

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)| \tag{36}$$

$$\angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega) \tag{37}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Suma de convolución

Suma de convolución en el dominio del tiempo es multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{38}$$

en el dominio de la frecuencia se puede realizar mediante el calculo del producto de ambos argumentos de la suma de convolución

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \tag{39}$$

Se cumple que

$$|Y(\Omega)| = |X(\Omega)||H(\Omega)| \tag{40}$$

$$\angle Y(\Omega) = \angle X(\Omega) + \angle H(\Omega) \tag{41}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Multiplicación en el dominio del tiempo

$$x[n]y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \circledast Y(\Omega) \tag{42}$$

donde $\circledast$ — implica **convolución circular**, que se calcula de la forma

$$X(\Omega) \circledast Y(\Omega) = \int\limits_{2\pi} X(\Theta) Y(\Omega - \Theta) \mathrm{d}\Theta \tag{43}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Dualidad

si

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \tag{44}$$

entonces,

$$X[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\Omega) \tag{45}$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejemplo

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} A, & \text{para } -M \leq n \leq M; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejemplo

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = r^n u[n], \text{ donde } |r| < 1.$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejemplo

Encuentre la iDTFT del siguiente pulso rectangular $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{para } |\Omega| \leq W;; \\ 0, & \text{para } W < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

Ejercicio

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } |n| \leq N_1; \\ 0, & \text{para } |n| > N_1. \end{cases}$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

Ejercicio

Encuentre la DTFT de la siguientes señales:

(a) $x[n] = a^{|n|}$, para $-1 < a < 1$.

(b) $s[n] = \sin(\frac{\pi n}{4}(u[n] - u[n-5]))$

(c) $x[n] = -a^n u[-n-1]$, donde $a \in \mathbb{R}$.

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

Ejercicio

Encuentre la iDTFT de la siguientes señales:

(a)

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{para } \Omega_0 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

(b) $P(\Omega) = \cos^2(\Omega)$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

Ejercicio

Encuentre la iDTFT de la siguientes señales:

(a)

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{para } \Omega_0 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

(b) $P(\Omega) = \cos^2(\Omega)$

Tarea

Ejercicio

Determine y dibuje la densidad espectral de potencia $S_x(\Omega)$ de la siguiente señal $x[n]$:

$$x[n] = a^n u[n]$$