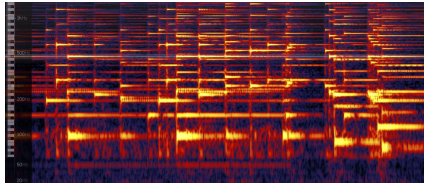


# Análisis espectral de señales: Serie de Fourier

Procesamiento Digital de Señales



**Marco Teran**

2022

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Series de Fourier
- 3 Serie exponencial de Fourier para señales de tiempo discreto
- 4 Convergencia de la serie de Fourier de tiempo discreto
- 5 Propiedades de la serie de Fourier

# Formula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

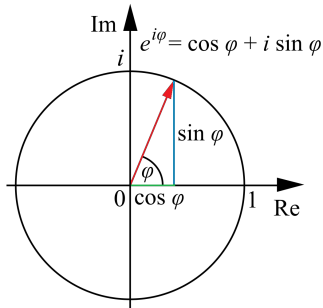


Figure 1: Formula de Euler

Si  $s$  solo tiene parte imaginaria,  $s = i\Omega$ :

$$x[n] = Ae^{i\Omega n} = A(\cos(\Omega n) + i \sin(\Omega n))$$

- Dentro de sus propiedades se encuentra la periodicidad, cuyo periodo fundamental

$$\blacksquare N = T\{x[n]\} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

# Introducción

Es posible descomponer cualquier señal en elementos sinusoidales, y el análisis de Fourier muestra como hacerlo.

## **Análisis:**

- Del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia
- Encontrar la contribución de cada frecuencia distinta
- Encontrar propiedades ocultas de la señal

## **Síntesis**

- Del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo
- Crear señales a partir del conocimiento de la frecuencia
- Fijar señales en regiones específicas de frecuencia

# Historia

Según el físico matemático francés *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (Auxerre, Francia, 21 de marzo de 1768 - París, 16 de mayo de 1830) cualquier señal, sin importar su complejidad, se puede generar a partir de la suma de armónicos, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental (ligada a un periodo fundamental), con distintas fases y amplitudes.



**Figure 2:** Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier realizado por el pintor y dibujante francés Louis Léopold Boilly

# Bases matemáticas

- El *análisis de Fourier* se puede representar mediante un **cambio de base**.
- Un **cambio de base** es un cambio de *perspectiva* para el análisis.
- Si las bases a las cuales se realizará el cambio son bien escogidas, esta nueva base revelará características hasta ahora desconocidas de la señal.
- Secuencia discreta **periódica** con periodo  $N$ .

# Series de Fourier para señales periódicas

- Especial para el análisis de señales y sistemas.
- Muchas similitudes entre la serie de Fourier de tiempo continuo y la serie de tiempo discreto.

## Fourier serie

Una señal periódica, de periodo  $N$ , se puede representar mediante la Serie de Fourier (FS, *ing.* Fourier Series) y consta de la suma de funciones armónicamente relacionadas.

# Series de Fourier para señales periódicas: caso discreto

Tiempo discreto:

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\Omega_k n} = e^{j\Omega_k n}, \text{ donde } k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (1)$$

Donde  $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ .

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a  $N$ , como productos enteros del inverso de este, se denominan *armónicos*.
- $s_k[n]$  es periódica de periodo  $N$ ,  $s_k[n] = s_k[n + N]$ .



# Series exponencial de Fourier para señales de tiempo discreto

## Ecuación de síntesis

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\Omega_k n} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2)$$

## Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\Omega_k n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3)$$

donde,  $\Omega_k = \Omega k = \frac{2\pi}{N}k$  —  $k$ -ésimo armónico.  $\Omega$  — frecuencia fundamental de la secuencia periódica.

# Características de la Serie exponencial de Fourier

- Los coeficientes de de la serie exponencial de Fourier  $c_k = c[k]$  proporcionan una descripción de  $x[n]/x(t)$  en el dominio de la frecuencia.
- $c_k$ , de naturaleza compleja, representa la *amplitud* y la *fase* asociada a cada uno de los armónicos, componentes de frecuencia.
- Como  $s_k[n]$  es periódica, también lo es  $c_k$  y su periodo es  $N$ ,  $c_k = c_{k+N}$ .
- El espectro de una sea una señal periódica  $x[n]$ , de periodo  $N$ , es una secuencia periódica de periodo  $N$ .

**Coeficiente especial:** cuando  $k = 0$  obtenemos el valor promedio de la señal  $x[n]$

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \quad (4)$$

# Series de Fourier de tiempo discreto

## Ejemplo

Considera la siguiente señal periódica con periodo  $N = 10$ . Calcule el espectro de la señal en función de  $c_k$ .

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{para } 5 \leq n \leq 9. \end{cases}$$

# Convergencia de la serie de Fourier

- ¿Que es la convergencia de una serie (sumatoria)?

## Convergencia de la serie de Fourier

Si la serie de Fourier es **finita**, entonces no existen problemas de **convergencia**.

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Se asume que  $x[n]$  es periódica con periodo  $T$ .

$$x[n] \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \quad (5)$$

## Linealidad

$$x[n] \xrightarrow{FS} a_k \quad (6)$$

$$y[n] \xrightarrow{FS} b_k \quad (7)$$

entonces,

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{FS} \alpha a_k + \beta b_k \quad (8)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

## Desplazamiento en el tiempo

$$x[n] \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \quad (9)$$

entonces

$$x[n - n_0] \xrightarrow{FS} c_k e^{-j\omega_k n_0}, \quad n_0 \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

## Inversión temporal

$$x[n] \xrightarrow{FS} c_k \quad (11)$$

$$x[-n] \xrightarrow{FS} c_{-k} \quad (12)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

## Multiplicación

$$x[n] \xrightarrow{FS} a_k \quad (13)$$

$$y[n] \xrightarrow{FS} b_k \quad (14)$$

entonces

$$x[n]y[n] \xrightarrow{FS} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} = a_k * b_k \quad (15)$$



# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

## Conjugación y simetría conjugada

$$x[n] \xrightarrow{FS} c_k \quad (16)$$

$$y[n] = x^*[n] \xrightarrow{FS} c_{-k}^* \quad (17)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

## Periodicidad de los coeficientes de la serie de Fourier de tiempo discreto

Es necesario recordar la propiedad de periodicidad del exponencial complejo de tiempo discreto:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n} \quad (18)$$

Los coeficientes  $c_k$  son periódicos con periodo fundamental  $N_0$ . Es posible escribir entonces

$$c_{k+N_0} = c_k \quad (19)$$

$$e^{j\Omega_0(k+N_0)n} = e^{j\Omega_0 kn} e^{j\Omega_0 N_0 n} = e^{j\Omega_0 kn} \quad (20)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

## Dualidad de la serie de Fourier

Para la relación que existe entre  $x[n] \rightarrow c_k$  y  $c[k] \rightarrow x_n$ .

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-j\Omega_0 kn} \quad (21)$$

si hacemos  $n = -m$ , entonces

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m] e^{j\Omega_0 km} \quad (22)$$

hacemos  $k = n$  y  $m = k$

$$c[n] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k] e^{j\Omega_0 kn} \quad (23)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Si comparamos resultados obtenemos que

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} c_k = c[k] \quad (24)$$

$$c[n] \xrightarrow{DTFS} \frac{1}{N_0} x[-k] \quad (25)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

## Complejo conjugado de la serie de Fourier

$$c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^* \quad (26)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

## Secuencia par e impar

Una secuencia  $x[n] \in \mathbb{R}$  se puede expresar mediante la suma de sus componentes par e impar:

$$x[n] = x_o[n] + x_e[n] \quad (27)$$

Si  $x[n]$  es real y par, sus coeficientes de Fourier  $c_k$  son reales. Si  $x[n]$  es real e impar, sus coeficientes de Fourier  $c_k$  son imaginarios.

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} c_k \quad (28)$$

$$x_e[n] \xrightarrow{DTFS} \Re\{c_k\} \quad (29)$$

$$x_o[n] \xrightarrow{DTFS} j\Im\{c_k\} \quad (30)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

## Teorema de Parseval

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} |c_k|^2 \quad (31)$$


# Series de Fourier de tiempo discreto

## Ejemplo

Determine el espectro de las siguientes señales:

a  $x[n] = \cos \sqrt{2}\pi n$

b  $y[n] = \cos \frac{\pi n}{3}$

c  $p[n]$  es periódica con periodo  $N = 4$  y  $p[n] = 1, 2, 0, 0$   





# Series de Fourier de tiempo discreto

## Ejemplo

Determine el espectro de las siguientes señales:

a  $x[n] = \cos \sqrt{2}\pi n$

b  $y[n] = \cos \frac{\pi n}{3}$

c  $p[n]$  es periódica con periodo  $N = 4$  y  $p[n] = 1, 2, 0, 0$   


# Series de Fourier de tiempo discreto

## Ejercicio

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica  $x[n]$  mostrada en la figura

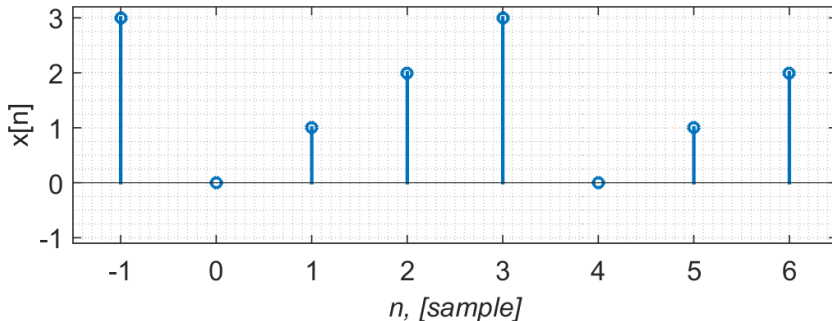


Figure 3: Señal periódica

# Series de Fourier de tiempo discreto

## Ejercicio

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica  $x[n]$ :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$$

# Series de Fourier de tiempo discreto

## Ejercicio


Determine el espectro de las siguientes señales:

**a**  $x[n] = \cos \frac{\pi}{4}n$

**b**  $y[n] = \cos^2 \frac{\pi n}{8}$

**c**  $w[m] = \cos \frac{\pi}{4}(m-3)$

**d**  $s[n] = \cos \frac{\pi}{2}n + \cos \frac{2\pi n}{5}$

**e**  $x[n]$  es una señal periódica con periodo  $N = 8$ , y está definida en un periodo por  
 $x[n] = \{-2, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}$   


# ¡Muchas gracias por su atención!

*¿Preguntas?*



**Contacto:** Marco Teran  
**webpage:** [marcoteran.github.io/](https://marcoteran.github.io/)