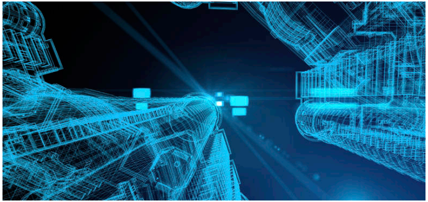
Transformada z

Procesamiento Digital de Señales



Marco Teran

2022

Contenido

Introducción

- Aplicada a señales de tiempo discreto. Es la contraparte de la transformada de **Laplace**.
  - Es análoga a la transformada de Laplace (para la representación de señales de tiempo continuo).
- Representa señales de tiempo discreto en el dominio de z.
  - Donde z es la variable compleja (dominio de frecuencia compleja).
- La transformada z convierte ecuaciones de diferencias en ecuaciones algebraicas, es decir las *linealiza* y *simplifica*.
- Se puede interpretar como una generalización de **DTFT**. Pero se amplia a un rango más amplio de señales.
- Para computar la transformada z (ZT) es necesario definir la región de convergencia (ROC, *ing.* Region Of Convergence).

Definición de la transformada z

Un sistema LTI con respecto al impulso $h[n]$ y salida $y[n]$ a una entrada $x[n]$:

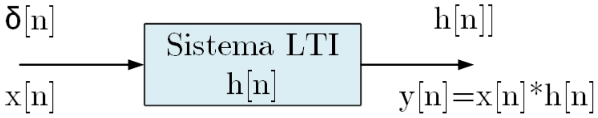


Figure 1: Diagrama de bloques respuesta al impulso

Si la entrada es

$$x[n] = z^n$$

Entonces la salida será

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{z^n\} = H(z)z^n$$

donde

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

transformada z bilateral

$$
\begin{aligned}
X(z) &= Z\{x[n]\} \\
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

donde, $z = re^{j\Omega}$ — representación polar de la variable compleja (VC);
$|z| = r$ — magnitud de la VC;
$\angle z = \Omega$ — fase de la VC (angulo).

transformada z unilateral

Se utiliza para casos donde $x[n] = 0$ para $n < 0$.

$$\begin{aligned} X_I(z) &= Z_I\{x[n]\} \\ X_I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Par de la transformada z

La relación entre la secuencia de tiempo discreto $x[n]$ y su transformada z se denota por:

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \tag{3}$$

Donde la transformada z se expresa mediante

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

A continuación se muestra la conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

$$\begin{aligned} X(z)\big|_{z=re^{j\Omega}} &= X(re^{j\Omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}(e^{-j\Omega n}) \\ &= F\left\{x[n]r^{-n}\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

En el caso $r = 1$ se representa la DTFT. Donde $z = e^{j\Omega}$.

Plano z

- El plano complejo Z se representa mediante el circulo unitario de la región de convergencia.
- Si consideramos el plano z, podemos observar que $H(e^{j\Omega})$ corresponde a evaluar $H(z)$ en el círculo unitario.

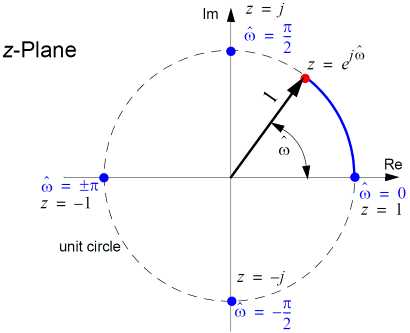


Figure 2: Circulo unitario en el plano complejo z

Región de convergencia, ROC

- La transformada z no converge para todas las secuencias. Si converge lo hace solo en la región de convergencia ROC.
- La ROC son los intervalos de valores de r para los que la variable compleja z converge.
- Es importante saber donde para que valores converge las series infinita.

Es importante saber donde para que valores converge las series infinita.
Condición de convergencia:

$$\begin{aligned} X(z) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Región de convergencia, ROC

Se puede apreciar que la convergencia depende exclusivamente de $|z| = r$ un círculo de radio r. A continuación ejemplos de la ROC.

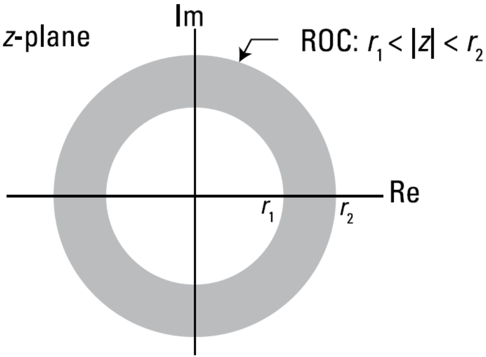


Figure 3: Generalmente la ROC es un anillo

Región de convergencia, ROC

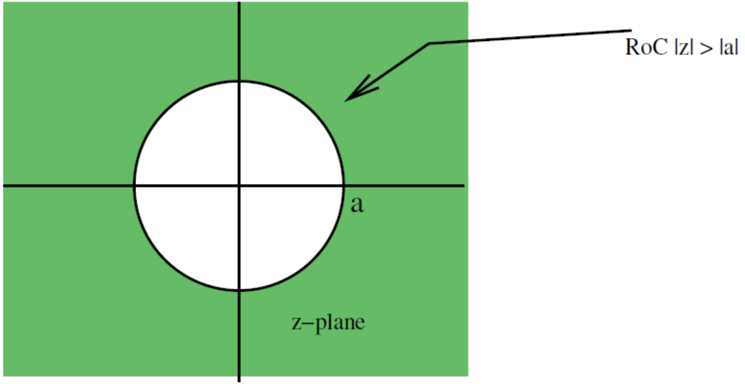


Figure 4: ROC (región verde) para una señal causal

Región de convergencia, ROC

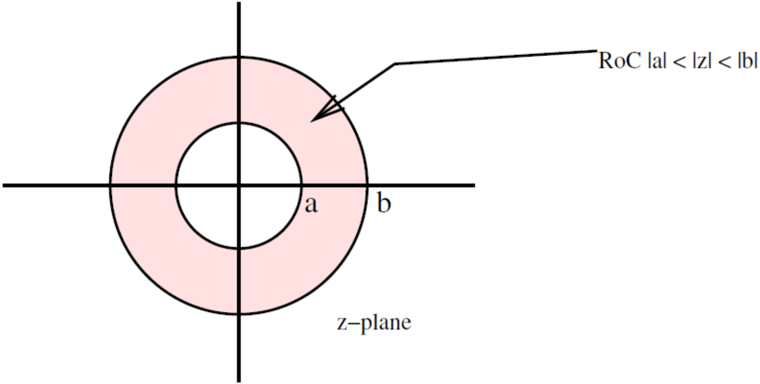


Figure 5: ROC (región de rosa) de una transformada z bilateral

Significado de la ROC

1. Cuando la ZT produce un denominador polinomio — relacionado al ROC
2. Cuando el resultado de la ROC es un racional, la ROC está relacionada a estabilidad — BIBO (*ing.* Bounded Input Bounded Output)

En este plano es posible dibujar los polos y los ceros

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{6}$$

donde, $N(z)$ — aporta los ceros "0";
$D(z)$ — aporta los polos "x".

Pasos para encontrar la ROC

Utilice la definición de zT para determinar la suma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Pasos para encontrar la ROC

Encuentre las condiciones de convergencia que son suministradas por la definición de una serie geométrica infinita:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n = \frac{1}{1 - |az^{-1}|} < \infty$$

lo cual determina que

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \rightarrow |z| > |a|$$

Entonces la ROC es $|z| > |a|$

Pasos para encontrar la ROC

Otra forma de encontrar la ROC es a partir del resultado de la suma de serie geométrica

$$X(z) = \underbrace{\frac{1}{1-az^{-1}}}_{\text{pots. neg. de z}} \frac{z}{z} = \underbrace{\frac{z}{z-a}}_{\text{pots. pos. de z}}, \text{ ROC: } |z| > |a|$$

transformada z

Ejemplo

Encontrar la transformada z de $x[n]$:

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0. \end{cases}$$

transformada z

Ejemplo

Encontrar la transformada z de $x[n]$:

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n)u[n]$$

transformada z

Ejercicio

Encontrar las transformadas z de las siguientes señales:

(a) $x[n] = \delta[n]$

(b) $s[n] = \{5, 3, \underset{\uparrow}{-2}, 0, 4, -3\}$

(c)

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}, a > 0.$$

Linealidad

Para

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$$
$$y[n] \xrightarrow{Z} Y(z)$$

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{Z} \alpha X(z) + \beta Y(z) \tag{7}$$

donde α y β son constantes.

Desplazamiento en el tiempo

$$x[n-n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z), \text{ donde } n_0 \in \mathbb{Z} \text{ constante.} \tag{8}$$

ROC:

$$R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

Casos especiales:

- $x[n-1] \xrightarrow{Z} z^{-1}X(z)$, con ROC: $R' = R \cap \{0 < |z|\}$ — operador de retardo unitario.
- $x[n+1] \xrightarrow{Z} zX(z)$, con ROC: $R' = R \cap \{|z| < \infty\}$ — operador de adelanto unitario.

Multiplicación por z_0^n (corrimiento en frecuencia)

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{9}$$

Polo o cero dependerá del valor de n. Polos o ceros en $z = z_k$ en $X(z)$. Después $z = z_0 z_k$ y la ROC se expande.
Caso especial:

- $e^{-j\Omega_0 n} x[n] \xrightarrow{Z} X\left(e^{-j\Omega_0} z\right)$, con ROC: $R' = R$ son los mismos pero girados un angulo $\angle\Omega_0$.

ROC se expande o contrae dependiendo del valor de $|z_0|$.

Inversión en el tiempo

$$x[-n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right) \tag{10}$$

Con ROC: $R' = \dfrac{1}{R}$.

Polos en $z = z_k$ se desplazan a $z = \dfrac{1}{z_k}$. Implica inversión de la ROC.

Multiplicación por n (diferenciación en z)

$$nx[n] \xrightarrow{Z} -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} \tag{11}$$

Con ROC: $R' = R$.

Acumulación (suma)

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) = \frac{z}{z-1} X(z) \tag{12}$$

Con ROC: $R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$.

Convolución

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z), \text{ ROC: } R_1$$
$$y[n] \xrightarrow{Z} Y(z), \text{ ROC: } R_2$$

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{Z} X(z)Y(z) \tag{13}$$

Con ROC: $R' \supset R_1 \cap R_2$.

Transformada inversa de z

La transformada inversa de z se puede encontrar mediante la integral

$$x[n] = \mathfrak{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z \tag{14}$$

Donde C — contorno de integración en el sentido contrario a las manecillas del reloj que encierra el origen.
Como resolver:

- Uso de tablas de transformada z (aplicar fracciones parciales en lo posible).
- Expansión en series de potencias.

Es recomendable expresar la secuencia en el dominio de z de la forma:

$$x(z) = x_1(z) + x_2(z) + \ldots + x_n(z)$$

Transformada inversa de z

Ejercicio

Encontrar las transformadas inversas de z de las siguientes señales:

1. $S(z) = \dfrac{z}{(z-3)(z+4)}$
2. $X(z) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}$
3. $T(z) = \dfrac{z}{(z-5)(z-2)^2}$