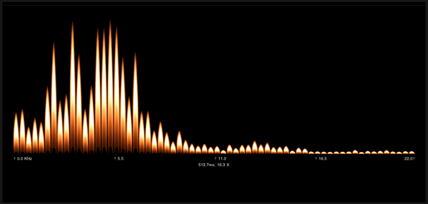
Transformada de Laplace

Teoría de Sistemas lineales



Marco Teran
Universidad Sergio Arboleda

2023

Contenido

Introducción

Introducción

Historia

Pierre-Simon Laplace (Francia, 28 de marzo de 1749 – -París, 5 de marzo de 1827), Astrónomo y matemático francés de origen humilde. Presentó la transformada que lleva su nombre en 1779, aplicada a la resolución de ecuaciones diferenciales.

Figura 1: Pierre-Simon Laplace.

Pierre-Simon Laplace

- Pierre-Simon Laplace fue un matemático y astrónomo francés nacido el 23 de marzo de 1749 en Beaumont-en-Auge, Normandía.

WORLD WAR II

HISTORY'S LARGEST HUMAN TRAGEDY

AXIS POWERS

ITALY

JAPAN

NAZI GERMANY

ALLIES

USSR

GREAT BRITAIN

US

CHINA

FRANCE

SEPT. 1, 1939

World War II begins when **Germany invades Poland**

1940

War spreads to Africa and the Mediterranean as Italy attacks **French and British colonies in Africa**

1941

Germany attacks **Russia**

MAY 8, 1945

War ends in Europe after **Nazi Germany surrenders**

AUG. 6-9, 1945

US drops two atomic bombs on Japanese cities of Hiroshima and Nagasaki on Aug. 6 and 9

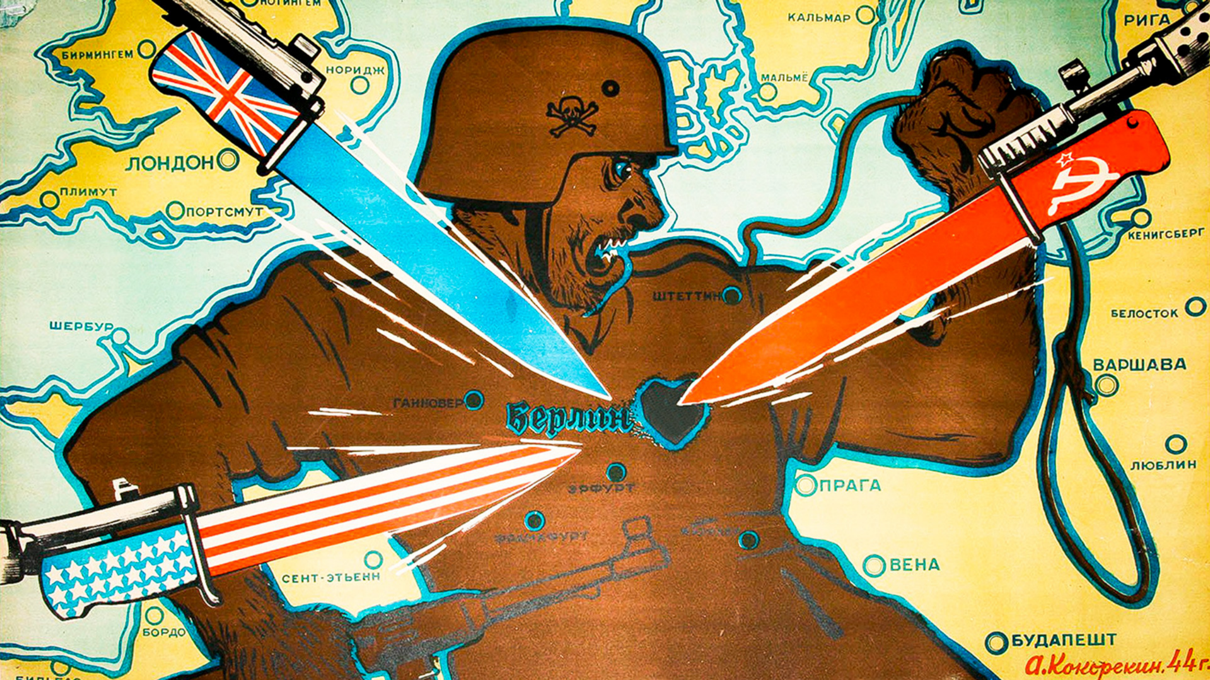
SEPT. 2, 1945

Six years of war ends with **Japan's surrender**

60 COUNTRIES INVOLVED IN THE WAR

110M COMBATANTS

NEARLY 80M PEOPLE DIED

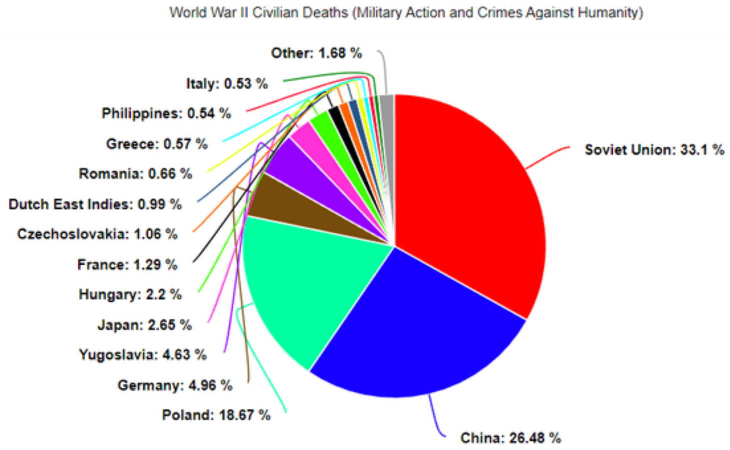


БИРМИНГЕМ
НОРИДЖ
ЛОНДОН
ПЛИМУТ
ПОРТСМУТ
ШЕРБУР
КАЛЬМАР
МАЛЬМЁ
РИГА
КЕНИГСБЕРГ
ШТЕТТИН
БЕЛОСТОК
ВАРШАВА
ГАННОВЕР
Берлин
ЛЮБЛИН
ЭРФУРТ
ПРАГА
СЕНТ-ЭТЬЕНН
ВЕНА
БОРДО
БУДАПЕШТ
А. Кокорекин. 44 г.

For report documenting above map see TIME, November 17, 1941 issue


ОТСТОИМ МОСКВУ!


ЗА РОДИНУ,
ЗА СТАЛИНА!


World War II Civilian Deaths (Military Action and Crimes Against Humanity)
Other: 1.68 %
Italy: 0.53 %
Philippines: 0.54 %
Greece: 0.57 %
Romania: 0.66 %
Dutch East Indies: 0.99 %
Czechoslovakia: 1.06 %
France: 1.29 %
Hungary: 2.2 %
Japan: 2.65 %
Yugoslavia: 4.63 %
Germany: 4.96 %
Poland: 18.67 %
Soviet Union: 33.1 %
China: 26.48 %

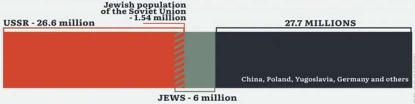
GENOCIDE OF SOVIET POPULATION BY NAZI GERMANY

26.6 MILLION PEOPLE CASUALTIES OF THE USSR

12 MILLION MILITARY LOSSES

INCLUDING 3.3 MILLION DIED IN HOSTAGE

14.6 MILLION CIVILIAN CASUALTIES



IVAN ILYIN READER SOCIETY
INSTITUTE OF ASIAN AND AFRICAN COUNTRIES,
MOSCOW STATE UNIVERSITY


BASED ON A TRUE STORY
BATTLE FOR
SEVASTOPOL


And how many men have you killed?
Not a man.. fascists.. 309.


Color by Klimbim

Notes From Poland

20 Soviet memorials removed in Poland this year and 40 to go, says head of state history body

Poland has removed 20 communist-era memorials to the Soviet Red Army since Russia's invasion of Ukraine, says the head of the country's...

Sep 28, 2022

POLITICO

Estonia removes Soviet Union war monuments

Estonia will remove war monuments dating to the Soviet Union in the eastern city of Narva, the government announced Tuesday.

Aug 16, 2022

The Conversation

Ukraine war prompts Baltic states to remove Soviet memorials

Estonia is to remove all of its Soviet-era war monuments, the latest in a line of eastern European countries to go down this path.

Aug 17, 2022

Pierre-Simon Laplace

- Laplace es reconocido por sus contribuciones fundamentales en el campo de la mecánica celeste y la teoría de la probabilidad.
- En 1773, Laplace publicó su trabajo **Exposition du système du monde** (Exposición del sistema del mundo), donde desarrolló la hipótesis nebular sobre el origen del sistema solar.
- Fue nombrado profesor de matemáticas en la **École Militaire de París** y posteriormente ocupó la cátedra de astronomía en el Collège de France.

Pierre-Simon Laplace

- Laplace realizó importantes avances en el campo de las transformaciones integrales y su aplicación al cálculo de probabilidades.
- Su trabajo más conocido es **Traité de mécanique céleste** (Tratado de mecánica celeste), una obra monumental en cinco volúmenes que sentó las bases de la teoría matemática de los movimientos planetarios.

Pierre-Simon Laplace

- Además de ser un destacado científico, también fue un político activo. Ocupó varios cargos importantes en el gobierno francés, incluyendo el título de Conde del Imperio y el puesto de Ministro del Interior bajo el reinado de Napoleón Bonaparte.
- A pesar de su origen humilde, Laplace adquirió conocimientos matemáticos y científicos de forma autodidacta.
- Laplace era introvertido y dedicado al trabajo. Se decía que rara vez mostraba emociones y que prefería pasar la mayor parte de su tiempo en su estudio, inmerso en sus investigaciones científicas.
- Es famosa su afirmación **"Dios no es necesario"**, en respuesta a Napoleón, quien le preguntó por qué no mencionaba a Dios en su tratado de mecánica celeste. Refleja su enfoque científico y su convicción de que las leyes naturales eran suficientes para explicar el funcionamiento del universo.

Introducción

- Sistemas que se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales (*técnicas de análisis*)
- Convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas (*facilita solución*)
- Dominio temporal $\rightarrow$ Dominio frecuencial $\rightarrow$ solución $\rightarrow$ dominio temporal
- Permite trabajar con las condiciones iniciales de los sistemas

Trasnformada de Laplace

Herramienta matemática que permite la *representación alternativa* de las señales y los sistemas LTI: del dominio del tiempo continuo al dominio de la **variable compleja** s, mediante una integral de transformación.

Definición de la Transformada de Laplace

Definición de la Transformada de Laplace

- Transformar una señal $x(t)$ del dominio del tiempo continuo t al dominio de la variable compleja s

La transformada de Laplace (LT, *ing.* Laplace transform) se denota en términos de una integral de transformación:

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

donde,

$\mathfrak{L}\{\cdot\}$	—	operador de la transformada de Laplace;
$X(s)$	—	transformada de Laplace de $x(t)$;
$s = \sigma + j\omega$	—	variable compleja;
$\sigma = \Re\{s\}$	—	parte real de s;
$\omega = \Im\{s\}$	—	parte imaginaría de s.

- Se le conoce como Transformada de Laplace bilateral (dos lados)
- st es adimensional. s, $[s^{-1}]$

Definición de la Transformada de Laplace: Transformada de Laplace unilateral

- De un extremo (lado)

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

donde, $0^- = \lim_{\epsilon \to 0} [0 - \epsilon]$ — tiempo justo antes de $t = 0$

- $X(s) = X_I(s)$ si $x(t) = 0$ para $t < 0$

Condición de existencia de la Transformada de Laplace

- $x(t)$ es una señal, función real de la variable independiente continua t (tiempo, coordenadas, etc.)

La Transformada de Laplace **existe**, si se cumplen las siguientes condiciones (*condiciones de Dirichlet*):

- $x(t) = 0$, para $t < 0$
- $x(t)$ es continua a tramos para $t \geq 0$:
  - Contiene discontinuidades de primer orden en cada subintervalo de t
  - El numero de discontinuidades y de maximos y minimos es finito.
- Existe $M > 0$ y un $\sigma \geq 0$, que para todos los valores de t, se cumple la condición:

$$|x(t)| \leq Me^{\sigma t} \tag{3}$$

  σ — exponente de crecimiento de $x(t)$
- Estas propiedades se cumplen en casi todos los procesos físicos
- La señal se multiplica por un exponencial que acota la función en sus valores extremos

$$Me^{-\sigma t}|x(t)| \to 0, \text{ si } t \to \infty \tag{4}$$

Transformada de Laplace: Ejemplos

Transformada de Laplace: Ejemplos

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace de

$$x(t) = u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace de

$$x(t) = \delta(t)$$

Región de convergencia, ROC

Región de convergencia

- La LT usualmente no converge para todo el plano complejo s

Región de convergencia

Intervalo de valores de la variable compleja s, para los cuales la transformada de Laplace converge.
ROC — region of convergence

- La convergencia depende solamente de $\Re s = \sigma$

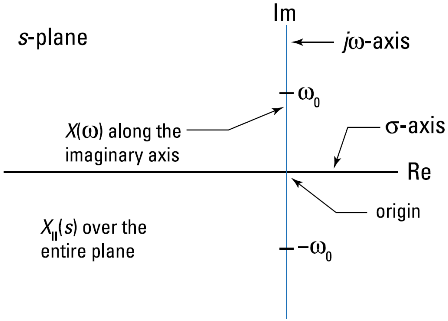


Figura 2: Plano complejo s

Región de convergencia, ROC

- Generalmente la ROC es una banda vertical controlada por σ_1 y σ_2

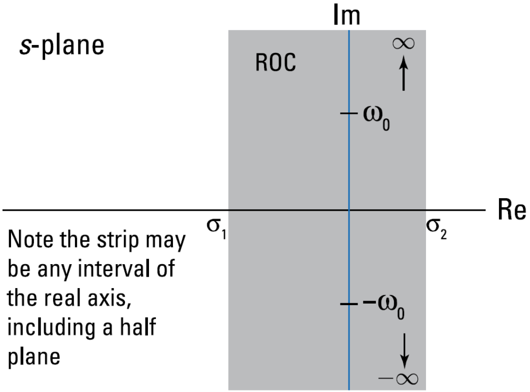


Figura 3: Ejemplo de ROC en el plano complejo

Propiedades de la ROC

Propiedades de la ROC

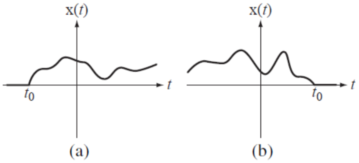


Figura 4: a) Señal por la derecha, (b) Señal por la izquierda

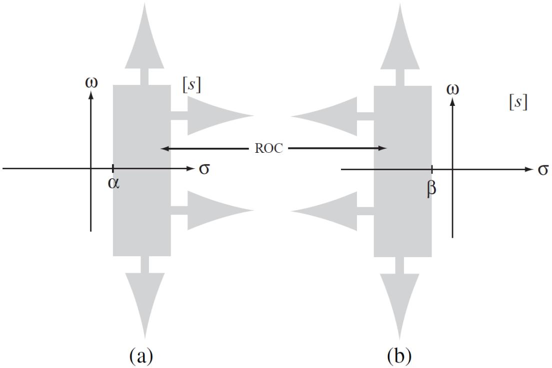


Figura 5: Propiedades de la ROC

Propiedades de la ROC

- $X(s)$ depende de la naturaleza de $x(t)$
- $X(s)$ es una función racional de s

1. La ROC no contiene ningún polo
2. $x(t)$ es una señal de duración finita, $x(t) = 0$, excepto en el intervalo $t_1 \leq t \leq t2$
3. Si $x(t)$ es una señal por la derecha, es decir $x(t) = 0$, para $t < t_1 < \infty$, la ROC es de la forma
$$\Re\{s\} > \sigma_{max}$$
σ_{max} — línea vertical (medio plano a la derecha)
4. Si $x(t)$ es una señal por la izquierda, es decir $x(t) = 0$, para $t > t_2 > -\infty$, la ROC es de la forma
$$\Re\{s\} < \sigma_{min}$$
σ_{min} — línea vertical (medio plano a la izquierda)
5. Si $x(t)$ es una señal de dos lados, es decir $x(t)$ es una señal de duración infinita (no es extrema derecha e izquierda)
$$\text{ROC: } \sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2$$
σ_1,σ_2 — ROC es una franja entre esos dos polos

Ejemplos: Región de convergencia, ROC

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace y la región de convergencia de la señal

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

Graficar la ROC en el plano complejo

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace y la region de convergencia de

$$f(t) = te^{-at}u(t)$$

Polos y ceros

Polos y ceros

- Generalmente $X(s)$ es una función racional en s

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k s^{m-k}}{\sum_{k=0}^{n} b_k s^{n-k}} \tag{5}$$

donde, b_k y a_k — coeficientes constantes reales;
m y n — el orden de los polinomios son enteros positivos.

Polos y ceros

- Es necesario asegurarse de que $X(s)$ es propiamente una **función racional racional propia** $N > M$. EN caso contrario (función racional impropia),

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{r=0}^{M-N} K_r s^r + \frac{N_1(s)}{D(s)} \tag{6}$$

donde $N_1(s)$ es el residuo de la división polinomial

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_m} = \frac{a_0 (s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{b_0 (s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_m)} \tag{7}$$

- Las raices del numerador se conocen como ceros — z_k
- Las raices del denominador se conocen como polos — p_k

Polos y ceros

Ejemplo

Encontrar los polos y ceros de la siguiente función racional de Laplace

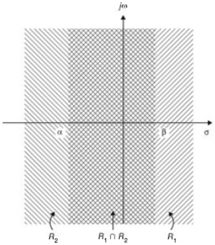
$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$$

Propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad

$$x_1(t) \rightarrow X_1(s),\ ROC = R_1$$
$$x_2(t) \rightarrow X_2(s),\ ROC = R_2$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	$R' = R_1 \cap R_2$



Desplazamiento en el tiempo

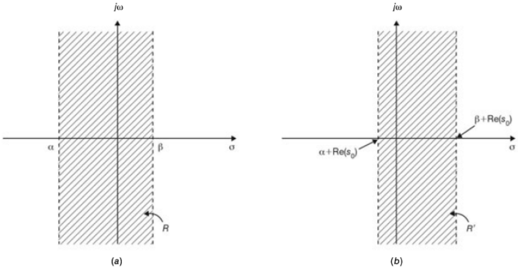
$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	$R' = R$

Desplazamiento en la frecuencia

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

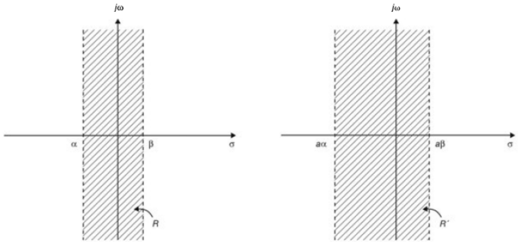
Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R' = R + \Re\{s_0\}$



Escalamiento en el tiempo

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	$R' = aR$

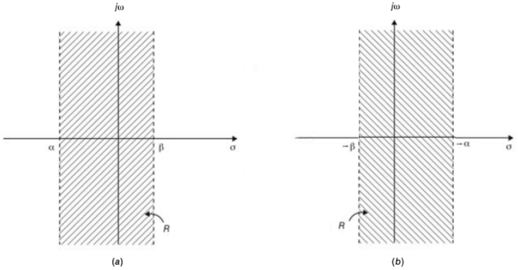


- Escalamientos inversos en las variables

Inversión en el tiempo

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$x(-t)$	$X(-s)$	$R' = -R$



- Inversión en σ respecto el eje $j\omega$

Diferenciación en el tiempo

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R' \supset R$

- No se modifica a menos que se elimine un polo

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$\dfrac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n X(s) - s^{(n-1)} x(0^-) - \ldots - s x^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-)$	$R' \supset R$

Diferenciación en el dominio de s

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$-tx\,(t)$	$\dfrac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}$	$R' \supset R$

Integración en el dominio de st

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R' = R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$

- Se agrega un polo más al sistema

Integración en el dominio de s

$$x(t) \to X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty X(s)\,\mathrm{d}s$	$R' = R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$

- Se agrega un polo más al sistema

Convolución en el dominio del tiempo

$$x_1(t) \to X_1(s),\ ROC = R_1$$
$$x_2(t) \to X_2(s),\ ROC = R_2$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

Ejemplos: Propiedades de la transformada de Laplace

Propiedades de la transformada de Laplace

Ejemplo

Encontrar la LT a partir de la trasformada de Laplace de $u(t)$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la LT a partir de la trasformada de Laplace de $u(t)$

$$\int\limits_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal

$$s(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal, para $t \geq 0$

$$f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal, para $t \geq 0$

$$r(t) = \cos(2t) + e^{-3t}$$

Transformada inversa de Laplace, ILT

Transformada inversa de Laplace

Fórmula de inversión de Rieman-Mellin:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} \, \mathrm{d}s \tag{8}$$

donde, $\mathfrak{L}^{-1}\{\cdot\}$ — operador de la transformada inversa de Laplace

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

1. Descomponga $X(s)$ en términos simples usando una **expansión de fracciones parciales**
2. Se encuentra el inverso de cada término contrastándolo con las entradas de la tabla

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

Polos simples:

- Polo simple es un polo de **primer orden**
- $D(s)$ se vuelve un producto de factores

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_m)} \tag{9}$$

donde, $s = p_1, p_2, \ldots p_m$ son polos simples, no repetidos $p_i \neq p_j$ para toda $i \neq j$ entonces:

$$X(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{k_m}{s-p_m} \tag{10}$$

donde $k_1, k_2, \ldots, k_m$ se conocen como residuos de $X(s)$. El coeficiente de expansión se determina:

$$k_i = (s-p_i)X(s)|_{s=p_i} \tag{11}$$

entonces:

$$x(t) = (k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \ldots + k_m e^{p_m t})u(t) \tag{12}$$

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

Polos repetidos:

- $X(s)$ tiene r polos repetidos en $s = p_1$

entonces se representa $X(s)$ como:

$$X(s) = \frac{k_r}{(s-p_1)^r} + \frac{k_{r-1}}{(s-p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{k_2}{(s-p_1)^2} + \frac{k_1}{s-p_1} + X_1(s) \tag{13}$$

donde, $X_1(s)$ es el residuo de $X(s)$ que no tiene un polo en $s = p_1$

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

Polos repetidos: Los coeficientes de expansión se determinan:

$$k_r = (s-p_1)^r X(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$k_{r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s-p_1)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$k_{r-2} = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[(s-p_1)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$k_{r-n} = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\left[(s-p_1)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$x(t) = \left(k_1 e^{p_1 t} + k_2 t e^{p_1 t} + \frac{k_3}{2!}t^2 e^{p_1 t} + \ldots + \frac{k_m}{(m-1)!}t^{m-1}e^{p_1 t}\right)u(t) + x_1(t) \tag{14}$$

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

Polos complejos:

- Un par de polos complejos es simple si no están repetidos
- Es un par de polos complejos dobles o múltiples si están repetidos
- La mejor solución expresar cada par de polos complejos como un *cuadrado total*, de la forma $(s+\alpha)^2+\beta$

$X(s)$ se puede representar de la forma:

$$X(s) = \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + as + b} + X_1(s) \tag{15}$$

donde, $X_1(s)$ es el residuo de $X(s)$ que no tiene este par de polos complejos

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = (s+\alpha)^2 + \beta^2$$

también se hace que

$$A_1 s + A_2 = A_1(s+\alpha) + B_1\beta$$

$$X(s) = \frac{A_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta} + \frac{B_1\beta}{(s+\alpha)^2+\beta} + X_1(s) \tag{16}$$

entonces:

$$x(t) = \left(A_1 e^{-\alpha t}\cos(\beta t) + B_1 e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\right)u(t) + x_1(t) \tag{17}$$

Ejemplos: Transformada inversa de Laplace

Transformada inversa de Laplace

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$X(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$F(s) = 1 + \frac{4}{s+3} - \frac{5s}{s^2+16}$$

Transformada inversa de Laplace

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2+4}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace

$$X(s) = \frac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)}$$

Transformada inversa de Laplace

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

¡Muchas gracias por su atención!

¿Preguntas?

Contacto: Marco Teran
webpage: marcoteran.github.io/
e-mail: marco.teran@usa.edu.co

UNIVERSIDAD
SERGIO ARBOLEDA