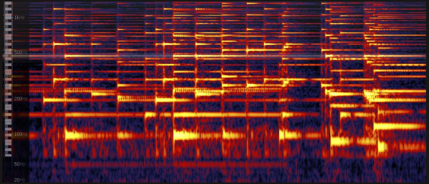
Análisis espectral de señales: Series de Fourier

Teoría de Sistemas lineales



Marco Teran
Universidad Sergio Arboleda

2023

Contenido

Repaso matemático

Formula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

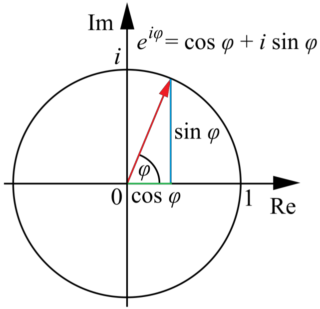


Figura 1: Formula de Euler

Si s solo tiene parte imaginaria, $s = i\omega$:

Tiempo continuo:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} = A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$$

Tiempo discreto:

$$x[n] = Ae^{i\Omega n} = A(\cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n))$$

- Dentro de sus propiedades se encuentra la periodicidad, cuyo periodo fundamental
  - Tiempo continuo: $T = \mathsf{T}\{x(t)\} = \frac{2\pi}{\omega}$
  - Tiempo discreto: $N = \mathsf{T}\{x[n]\} = \frac{2\pi}{\Omega}$

Señales sinusoidales de tiempo continuo

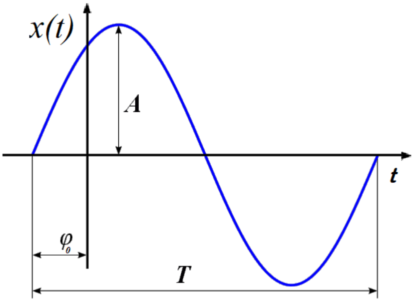
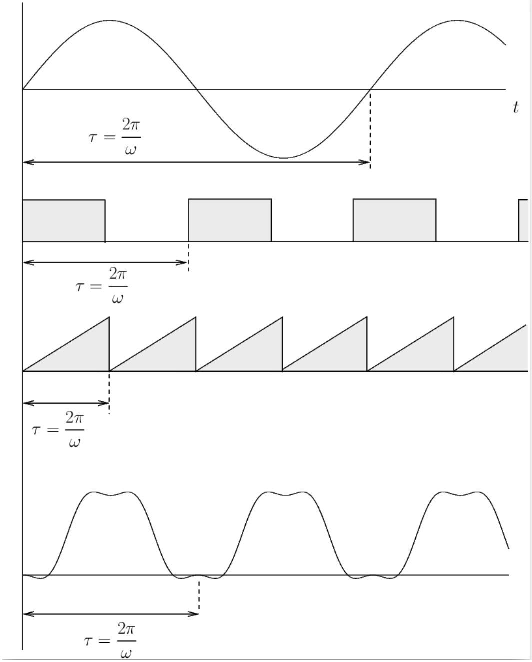


Figura 2: Parámetros de una señal sinusoidal de tiempo continuo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

donde,

$$\begin{aligned}
A \quad &- \quad \text{amplitud real de la señal;} \\
\omega = \frac{2\pi}{T} \quad &- \quad \text{frecuencia angular } [rad/s]; \\
T = \frac{1}{f} \quad &- \quad \text{periodo fundamental } [s], \\
f \quad &- \quad \text{frecuencia } [Hz]; \\
\varphi_0 \quad &- \quad \text{fase inicial } [rad], \\
& \text{entre } 0 \text{ y } 2\pi,\ \varphi_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$


t
$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$
$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$
$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$
$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

Introducción

Introducción

Es posible descomponer cualquier señal en elementos sinusoidales, y el análisis de Fourier muestra como hacerlo.

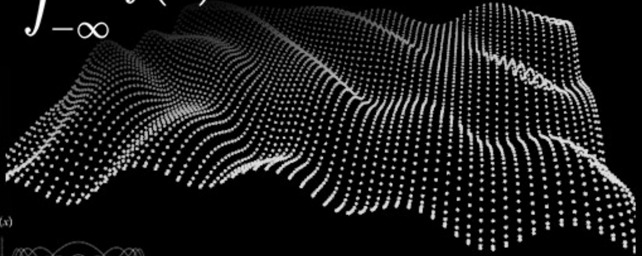
Análisis:

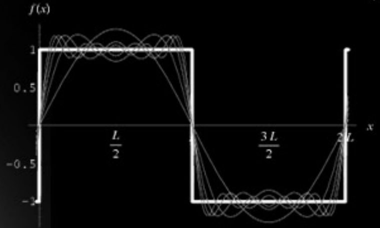
- Del dominio del **tiempo** al dominio de la **frecuencia**
- Encontrar la *contribución* de cada frecuencia distinta
- Encontrar *propiedades ocultas* de la señal

Síntesis

- Del dominio de la **frecuencia** al dominio del **tiempo**
- Crear señales a partir del conocimiento de la frecuencia
- Fijar señales en regiones especificas de frecuencia

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$





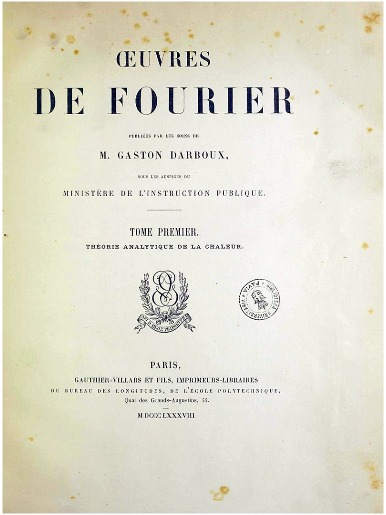
JOSEPH FOURIER

1768 – 1830

Historia

- *Jean Baptiste Joseph Fourier* fue un matemático y físico francés nacido en *Auxerre* en **1768**.
- Fourier fue profesor en la *École Polytechnique* y en la *Universidad de París*, donde realizó importantes contribuciones al campo de las matemáticas y la física.

Historia


ŒUVRES
DE FOURIER
PUBLIÉES PAR LES SOINS DE
M. GASTON DARBOUX,
SOUS LES AUSPICES DU
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME PREMIER.
THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
M DCCC LXXXVIII

- En su obra más conocida, ***Théorie analytique de la chaleur*** (Teoría analítica del calor), Fourier desarrolló la técnica de **análisis de Fourier**, que permite descomponer una señal en sus *componentes frecuenciales*.
- Fourier también estudió la propagación de ondas y la conducción del calor, y sus ideas influyeron en la **teoría electromagnética** de Maxwell.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT, IMPRIMEUR DU ROI,
DE L'INSTITUT ET DE LA MARINE.

THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,

Par M. FOURIER.

A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE
ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.
1822.

Historia

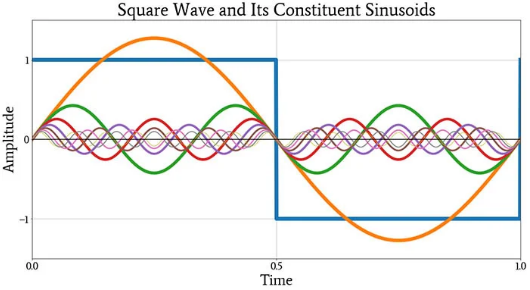
- Durante la **Revolución Francesa**, Fourier fue encarcelado por un tiempo debido a sus vínculos con la nobleza, pero fue liberado gracias a la intervención de Joseph-Louis Lagrange.

- Fourier falleció en París en 1830, a los 62 años de edad, dejando un legado importante en las matemáticas y la física.
- La técnica de **análisis de Fourier** es ampliamente utilizada en el procesamiento de señales, la comunicación inalámbrica, la electrónica y la computación.
- La obra de Fourier también ha tenido un gran impacto en otras áreas de la ciencia, como la física teórica, la astronomía y la ingeniería eléctrica, y su nombre se encuentra en muchas fórmulas matemáticas y técnicas utilizadas hoy en día en diferentes ámbitos.

Historia

Según *Jean-Baptiste Joseph Fourier* cualquier señal, sin importar su complejidad, se puede **generar** a partir de la **suma de armónicos**, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental (ligada a un periodo fundamental), con distintas fases y amplitudes.

Figura 3: Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier realizado por el pintor y dibujante francés Louis Léopold Boilly


Square Wave and Its Constituent Sinusoids
Amplitude
1
0
−1
0.0
0.5
1.0
Time

Bases matemáticas

- El *análisis de Fourier* se puede representar mediante un **cambio de base**.
- Un **cambio de base** es un cambio de *perspectiva* para el análisis.
- Si las bases a las cuales se realizará el cambio son bien escogidas, esta nueva base revelará características hasta ahora desconocidas de la señal.
- Señal continua **periódica** con periodo T y secuencia discreta **periódica** con periodo N.

Series de Fourier

Series de Fourier para señales periódicas

- Especial para el análisis de señales y sistemas.
- Muchas similitudes entre la serie de Fourier de tiempo continuo y la serie de tiempo discreto.

Serie de Fourier

Una señal periódica, de periodo T o N (dependiendo del caso), se puede representar mediante la Serie de Fourier (FS, *ing.* Fourier Series) y consta de la suma de funciones **armónicamente relacionadas**.

Series de Fourier para señales periódicas: caso continuo

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = e^{j\omega kt} = e^{j\omega_k t}, \text{ donde } k \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Donde $\omega_k = \dfrac{2\pi}{T}k$.

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a T, como productos enteros del inverso de este, se denominan **armónicos**.

Series de Fourier para señales de tiempo continuo

La señal periódica $x(t)$ puede ser expresada como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{kt}{T}} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \frac{kt}{T}} \tag{2}$$

donde c_k son los coeficientes de representación de la **CTFS** (*ing.* Continuos Time Fourier Series).

Series de Fourier para señales periódicas: caso discreto

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\Omega kn} = e^{j\Omega_k n}, \text{ donde } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1. \tag{3}$$

Donde $\Omega_k = \dfrac{2\pi}{N}k$.

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a N, como productos enteros del inverso de este, se denominan **armónicos**.
- $s_k[n]$ es periódica de periodo N, $s_k[n] = s_k[n+N]$.

Series de Fourier para señales de tiempo discreto

La señal periódica $x[n]$ puede ser expresada como

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \tag{4}$$

donde c_k son los coeficientes de representación de la **DTFS** (*ing.* Discrete Time Fourier Series).

Series de Fourier para señales de tiempo discreto: Demostración

Sea la sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, & \text{para } a = 1; \\ \dfrac{1-a^N}{1-a}, & \text{para } a \neq 1;. \end{cases} \tag{5}$$

se puede probar entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{kn}{N}} = \begin{cases} N, & \text{para } k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \ldots \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases} \tag{6}$$

Series de Fourier para señales de tiempo discreto: Demostración

Multiplicamos ambos lados de 4 por la función exponencial $e^{-j2\pi\frac{ln}{N}}$ y sumamos toda la señal $x[n]$ para todos los valores de n dentro del periodo $[0, N-1]$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{ln}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}} e^{-j2\pi\frac{ln}{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{ln}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi\frac{(k-l)n}{N}}$$

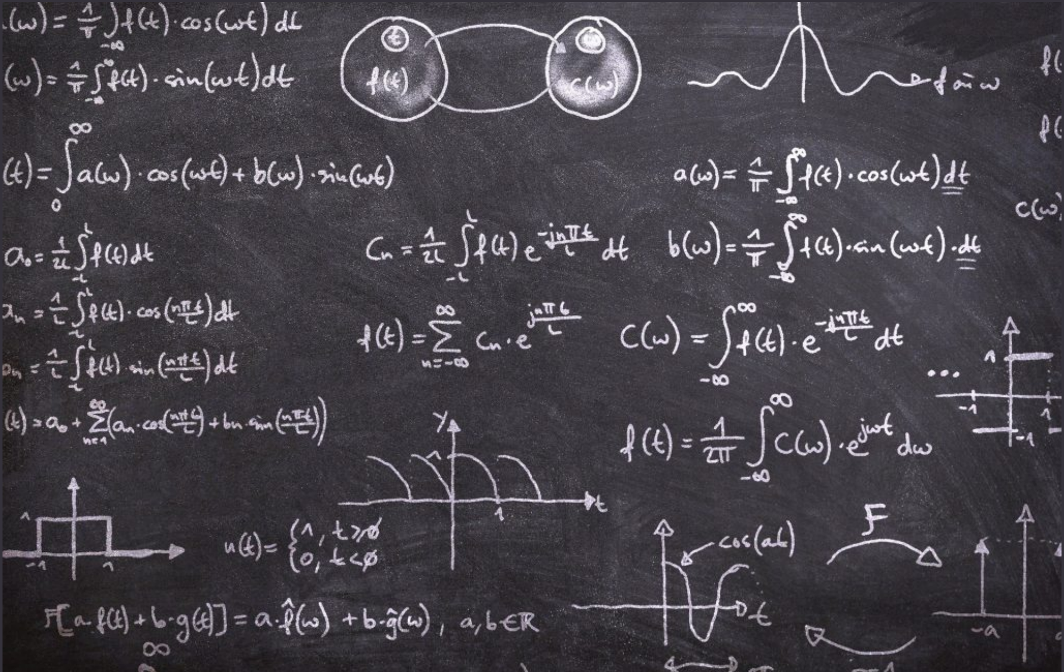
sumamos las n del lado derecho

Series de Fourier para señales de tiempo discreto: Demostración

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{(k-l)n}{N}} = \begin{cases} N, & \text{para } k-l = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

el lado derecho se reduce a Nc_l, y despejando obtenemos

$$c_l = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{ln}{N}}, \text{ para } l = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ N-1.$$



C(ω) = ∫ f(t) · e^(−jnπt/L) dt
f(t) = 1/2π ∫ C(ω) · e^(jωt) dω
Cn = 1/2L ∫ f(t) e^(−jnπt/L) dt
f(t) = Σ Cn · e^(jnπt/L)
a(ω) = 1/π ∫ f(t) · cos(ωt) dt
b(ω) = 1/π ∫ f(t) · sin(ωt) dt
u(t) = {1, t ≥ 0; 0, t < 0}
cos(at)
F

Serie exponencial de Fourier para señales de tiempo continuo

Serie exponencial de Fourier para señales de tiempo continuo

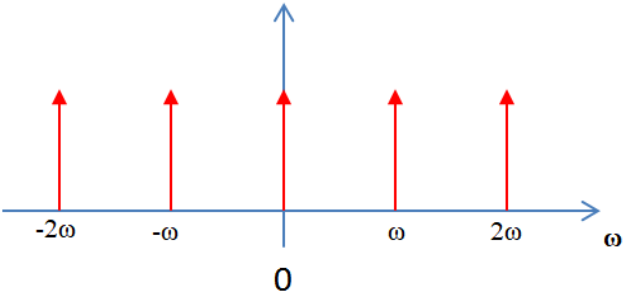
Ecuación de síntesis

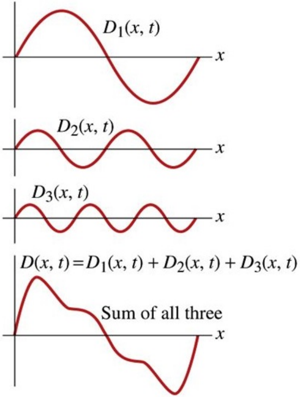
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t} \tag{7}$$

Ecuación de análisis

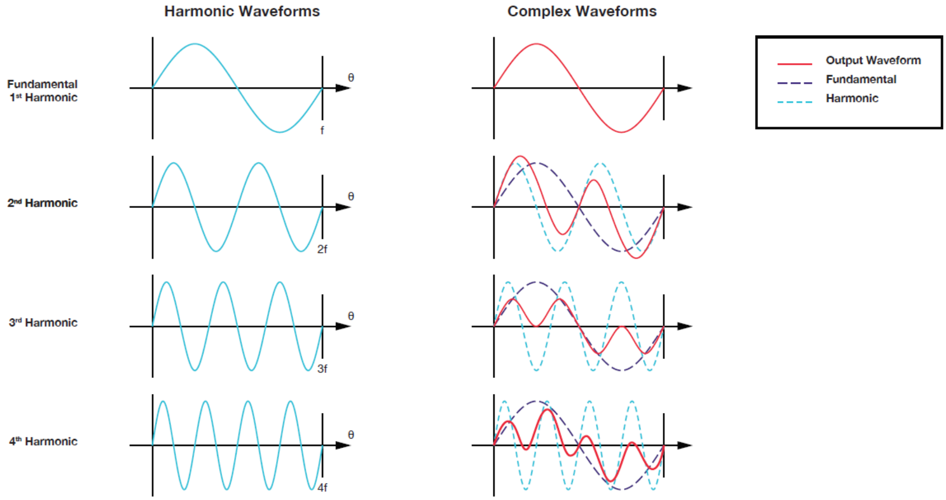
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\omega_k t} \, \mathrm{d}t \tag{8}$$

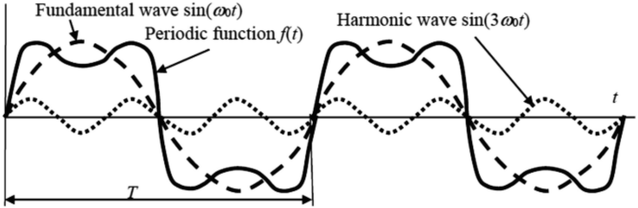
donde, $\omega_k = \omega k = \frac{2\pi}{T} k$ — k-ésimo armónico. ω — frecuencia fundamental de la señal periódica.


-2ω
-ω
ω
2ω
ω
0

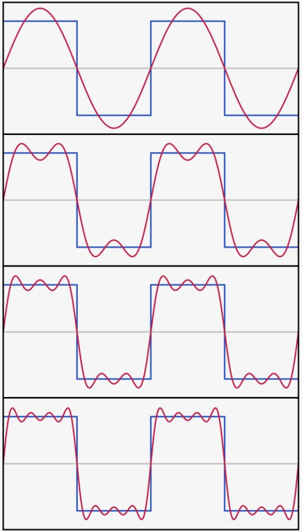


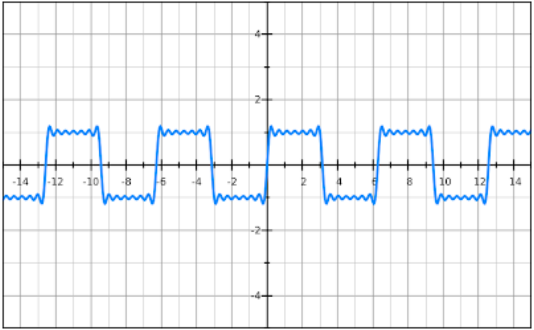
$D_1(x, t)$
x
$D_2(x, t)$
x
$D_3(x, t)$
x
$D(x, t) = D_1(x, t) + D_2(x, t) + D_3(x, t)$
Sum of all three
x

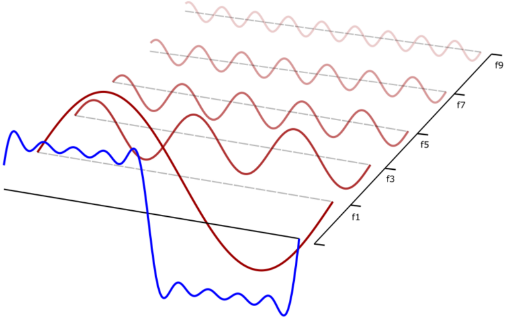

Harmonic Waveforms
Complex Waveforms
Output Waveform
Fundamental
Harmonic
Fundamental
1st Harmonic
2nd Harmonic
3rd Harmonic
4th Harmonic
θ
f
2f
3f
4f

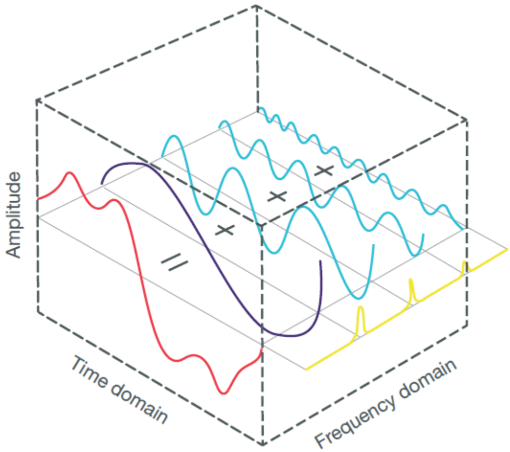


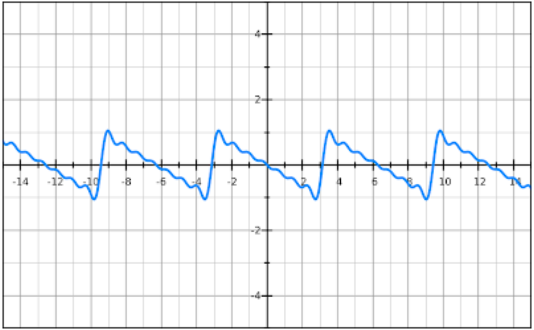
Fundamental wave sin(ω0t)
Periodic function f(t)
Harmonic wave sin(3ω0t)
t
T



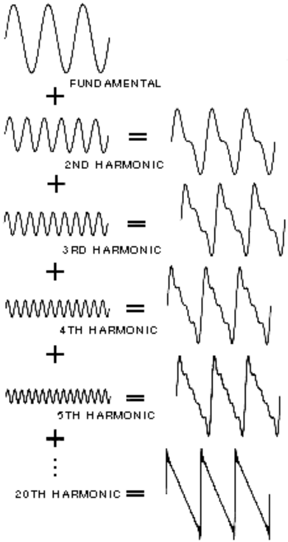

4
2
-2
-4
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
12
14

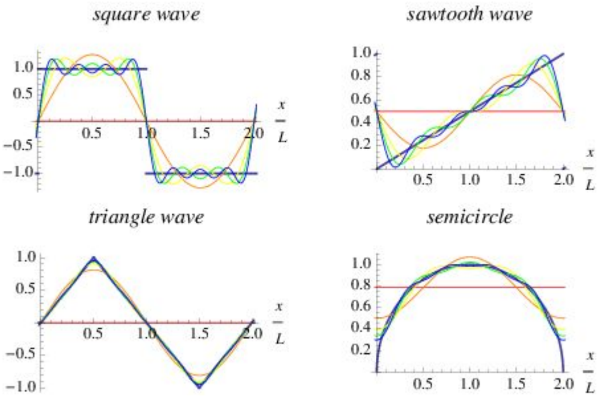

f1
f3
f5
f7
f9


Amplitude
Time domain
Frequency domain



4
2
-2
-4
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
12
14


FUNDAMENTAL
+
2ND HARMONIC
=
+
3RD HARMONIC
=
+
4TH HARMONIC
=
+
5TH HARMONIC
=
+
20TH HARMONIC =



square wave
sawtooth wave
triangle wave
semicircle
x/L

Series exponencial de Fourier para señales de tiempo discreto

Ecuación de síntesis

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\Omega kn} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{9}$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\Omega kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{10}$$

donde, $\Omega_k = \Omega k = \dfrac{2\pi}{N}k$ — k-ésimo armónico. Ω — frecuencia fundamental de la secuencia periódica.

Características de la Serie exponencial de Fourier

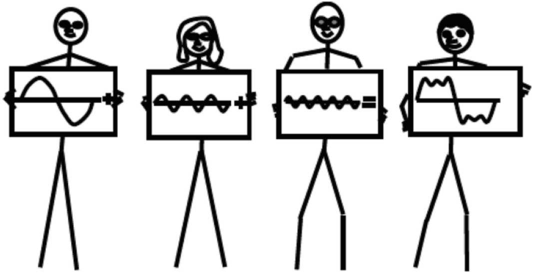
- Los coeficientes de de la serie exponencial de Fourier $c_k = c[k]$ proporcionan una descripción de $x[n]/x(t)$ en el dominio de la frecuencia.
- c_k, de naturaleza compleja, representa la *amplitud* y la *fase* asociada a cada uno de los armónicos, componentes de frecuencia.
- Como $s_k[n]$ es periódica, también lo es c_k y su periodo es N, $c_k = c_{k+N}$.

Características de la Serie exponencial de Fourier

- El espectro de una sea una señal periódica $x[n]$, de periodo N, es una secuencia periódica de periodo N.
  Coeficiente especial: cuando $k = 0$ obtenemos el valor promedio de la señal $x[n]/x(t)$

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \tag{11}$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \, \mathrm{d}t \tag{12}$$



Ejemplo: Series de Fourier

Ejemplo: Series de Fourier de tiempo discreto

Ejemplo

Considera la siguiente señal periódica con periodo $N = 10$. Calcule el espectro de la señal en función de c_k.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{para } 5 \leq n \leq 9. \end{cases}$$

Ejemplo: Series de Fourier de tiempo discreto

Ejemplo

Considera la siguiente señal periódica con periodo $T = 4$. Calcule el espectro de la señal en función de c_k. Encuentre c_1 y c_2.

$$x(t) = t, \text{ para} -2 \leq t < 2$$

Serie trigonométrica de Fourier

Simetría en integrales definidas

El producto de dos señales se puede clasificar en tres casos, dependiendo la simetría de las señales:

- Si ambas señales son pares:

$$f_{\text{even}}(t) \cdot g_{\text{even}}(t) = s_{\text{even}}(t) \tag{13}$$

- Si tinen distinta paridad:

$$f_{\text{even}}(t) \cdot g_{\text{odd}}(t) = s_{\text{odd}}(t) \tag{14}$$

- Si ambas señales son impares:

$$f_{\text{odd}}(t) \cdot g_{\text{odd}}(t) = s_{\text{even}}(t) \tag{15}$$

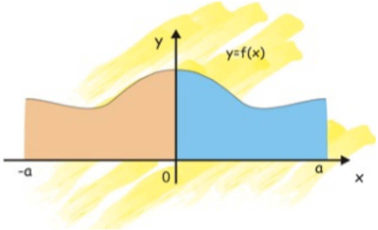
Simetría en integrales definidas

La simetría en integrales definidas se refiere a la propiedad del resultado de la integral, dependiendo si la señal presenta simétrría par o impar.

- Esto puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

Si $s_{\text{even}}(t)$ es una señal simétrica par, es decir, cumple con la propiedad de que $s_{\text{even}}(t) = s_{\text{even}}(-t)$,
Entonces, la integral definida de $-a$ a a de $s_{\text{even}}(t)$ puede expresarse como:

$$\int_{-a}^{a} s_{\text{even}}(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} s_{\text{even}}(t)\,\mathrm{d}t \neq 0 \tag{16}$$

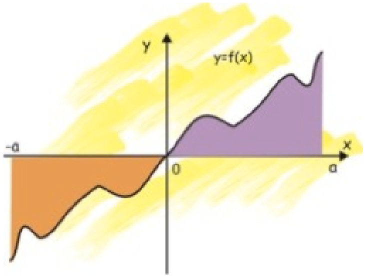

y
y=f(x)
-a
0
a
x

Simetría en integrales definidas

Por otro lado, si $s_{\text{odd}}(t)$ es una función simétrica impar, es decir, cumple con la propiedad de que $s_{\text{odd}}(-t) = -s_{\text{odd}}(t)$, Entonces, la integral definida de $-a$ a a de $s_{\text{odd}}(t)$ es igual a cero, es decir:

$$\int_{-a}^{a} s_{\text{odd}}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{17}$$

Donde a es un valor positivo.


y
y=f(x)
-a
x
0
a

Serie trigonométrica de Fourier para señales de tiempo continuo

Ecuación de síntesis

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\omega_k t\right) + b_k \sin\left(\omega_k t\right) \tag{18}$$

Serie trigonométrica de Fourier para señales de tiempo continuo

Ecuaciones de análisis

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\langle T \rangle} x(t) \cos\left(\omega_k t\right) \mathrm{d}t \qquad (19)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\langle T \rangle} x(t) \sin\left(\omega_k t\right) \mathrm{d}t \qquad (20)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{\langle T \rangle} x(t) \, \mathrm{d}t \qquad (21)$$


$\begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\begin{Bmatrix} \cos(\omega nt) \\ \sin(\omega nt) \end{Bmatrix}\partial t$
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\cos(\omega nt)}_{\frac{e^{j\omega \cdot nt}+e^{-j\omega \cdot nt}}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \underbrace{\sin(\omega nt)}_{\frac{e^{j\omega \cdot nt}-e^{-j\omega \cdot nt}}{2j}} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$
$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{j\omega nt}\left(\frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}\right) + e^{-j\omega nt}\left(\frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2}\right)$
$\frac{a_n}{2} \pm j\frac{b_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left[\cos(\omega nt) \pm j\sin(\omega nt)\right]\partial t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{\pm j\omega nt}\partial t$
desmotivaciones.es
Series de Fourier
Quizá no entiendas nada, pero sin esas ecuaciones NO tendrías Internet.

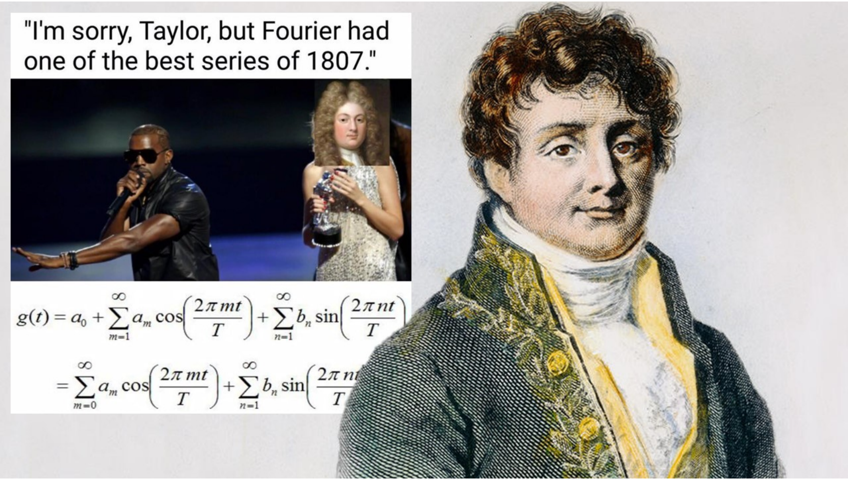
Convergencia de la serie de Fourier de tiempo discreto

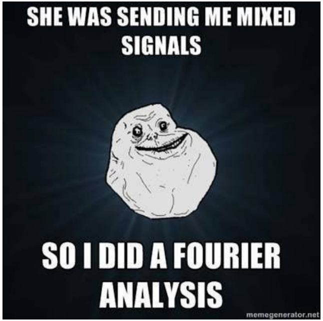
Convergencia de la serie de Fourier

- ¿Qué es la convergencia de una serie (sumatoria)?

Convergencia de la serie de Fourier

Si la serie de Fourier es **finita**, entonces no existen problemas de **convergencia**.


"I'm sorry, Taylor, but Fourier had one of the best series of 1807."
$g(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$
$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right.$


SHE WAS SENDING ME MIXED SIGNALS
SO I DID A FOURIER ANALYSIS
memegenerator.net

Propiedades de la serie de Fourier

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Se asume que $x(t)$ es periódica con periodo T.

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \tag{22}$$

Linealidad:

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \tag{23}$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k \tag{24}$$

entonces,

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{FS} \alpha a_k + \beta b_k \tag{25}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Desplazamiento en el tiempo:

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \tag{26}$$

entonces

$$x(t-\tau) \xrightarrow{FS} c_k e^{-j\omega_k \tau}, \;\; \tau \in \mathfrak{R} \tag{27}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Inversión temporal:

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k \tag{28}$$

$$x(-t) \xrightarrow{FS} c_{-k} \tag{29}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Multiplicación:

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \tag{30}$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k \tag{31}$$

entonces

$$x(t)y(t) \xrightarrow{FS} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} = a_k * b_k \tag{32}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Conjugación y simetría conjugada:

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k \tag{33}$$

$$y(t) = x^*(t) \xrightarrow{FS} c^*_{-k} \tag{34}$$

Periodicidad de los coeficientes de la serie de Fourier de tiempo discreto:

Es necesario recordar la propiedad de periodicidad del exponencial complejo de tiempo discreto:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n} \tag{35}$$

Los coeficientes c_k son periódicos con periodo fundamental N_0. Es posible escribir entonces

$$c_{k+N_0} = c_k \tag{36}$$

$$e^{j\Omega_0(k+N_0)n} = e^{j\Omega_0 kn} e^{j\Omega_0 N_0 n} = e^{j\Omega_0 kn} \tag{37}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Dualidad de la serie de Fourier:

Para la relación que existe entre $x[n] \rightarrow c_k$ y $c[k] \rightarrow x_n$.

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-j\Omega_0 kn} \tag{38}$$

si hacemos $n = -m$, entonces

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m] e^{j\Omega_0 kn} \tag{39}$$

hacemos $k = n$ y $m = k$

$$c[n] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k] e^{j\Omega_0 kn} \tag{40}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Si comparamos resultados obtenemos que

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} c_k = c[k] \tag{41}$$

$$c[n] \xrightarrow{DTFS} \frac{1}{N_0} x[-k] \tag{42}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Complejo conjugado de la serie de Fourier:

$$c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^* \tag{43}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Secuencia par e impar: Una secuencia $x[n] \in \Re$ se puede expresar mediante la suma de sus componentes par e impar:

$$x[n] = x_o[n] + x_e[n] \tag{44}$$

Si $x[n]$ es real y par, sus coeficientes de Fourier c_k son reales. Si $x[n]$ es real e impar, sus coeficientes de Fourier c_k son imaginarios.

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} c_k \tag{45}$$

$$x_e[n] \xrightarrow{DTFS} \mathfrak{Re}\{c_k\} \tag{46}$$

$$x_o[n] \xrightarrow{DTFS} j\mathfrak{Im}\{c_k\} \tag{47}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

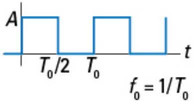
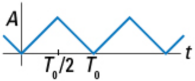
Teorema de Parseval:

Tiempo continuo:

$$\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \tag{48}$$

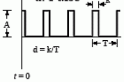
Tiempo discreto:

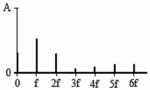
$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0\rangle} |c_k|^2 \tag{49}$$

Waveform	***Sketch***	***Coefficients*** X_n
Analysis/ Synthesis		$X_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi nf_0 t}$ $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nf_0 t}$
Square wave		$\begin{cases} \frac{A}{2}, & n = 0 \\ \frac{A}{j\pi n}, & n \text{ odd} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Pulse Train		$\frac{A\tau}{T_0} \cdot \text{sinc}\,(\pi(nf_0)\tau) \cdot e^{-j\pi(nf_0)\tau}$
Triangle wave		$\begin{cases} \frac{A}{2}, & n = 0 \\ \frac{-2A}{\pi^2 n^2}, & n \text{ odd} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

Time Domain	Frequency Domain

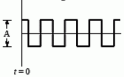
a. Pulse

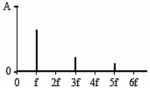




$$a_0 = A\,d$$
$$a_n = \frac{2A}{n\pi}\sin(n\pi d)$$
$$b_n = 0$$
(d = 0.27 in this example)

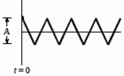
b. Square

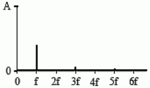




$$a_0 = 0$$
$$a_n = \frac{2A}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$b_n = 0$$
(all even harmonics are zero)

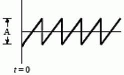
c. Triangle

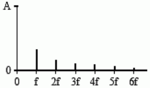




$$a_0 = 0$$
$$a_n = \frac{4A}{(n\pi)^2}$$
$$b_n = 0$$
(all even harmonics are zero)

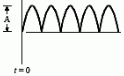
d. Sawtooth

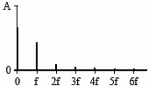




$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{A}{n\pi}$$

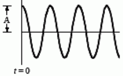
e. Rectified

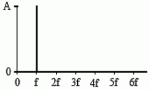




$$a_0 = 2A/\pi$$
$$a_n = \frac{-4A}{\pi(4n^2-1)}$$
$$b_n = 0$$

f. Cosine wave





$$a_1 = A$$
(all other coefficients are zero)

Serie de Fourier de tiempo discreto mediante transformación lineal

Serie de Fourier de tiempo discreto mediante transformación lineal

Es posible obtener los coeficientes de la serie de Fourier de tiempo discreto de una secuencia periódica $x[n]$ mediante una transformación lineal de esta, de la forma: $\{\mathsf{T} : \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^N\}$, definida a través de la matriz compleja $\mathbf{W} \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{C}^N$:

$$\boldsymbol{c_k} = \mathbf{W}_{N\times N}\boldsymbol{x}. \tag{50}$$

donde $\boldsymbol{c_k} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T$ y $\boldsymbol{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$.

$$\mathbf{W}_{N\times N} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & W_N^3 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & W_N^6 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ 1 & W_N^3 & W_N^6 & W_N^9 & W_N & W_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & W_N^{3(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \tag{51}$$

Donde,

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \tag{52}$$


LE DIJE QUE VIMOS
SERIES DE FOURIER
Y ME PREGUNTÓ QUE
SI ESTABA EN NETFLIX


Dijiste que te gustaban las series
Pero de Fourier...

Ejemplos de la serie de Fourier

Series de Fourier de tiempo continuo: Ejemplo

Ejemplo de la onda cuadrada

Determine el espectro de las siguiente señal periódica, con periodo 2π:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ -1, & \text{para } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

Series de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejemplo

Determine el espectro de las siguientes señales:

a) $x[n] = \cos \sqrt{2}\pi n$

b) $y[n] = \cos \dfrac{\pi n}{3}$

c) $p[n]$ es periódica con periodo $N = 4$ y $p[n] = \underset{\uparrow}{1}, 2, 0, 0$

Series de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejemplo

Determine el espectro de las siguientes señales:

a. $x[n] = \cos \sqrt{2}\pi n$

b. $y[n] = \cos \dfrac{\pi n}{3}$

c. $p[n]$ es periódica con periodo $N = 4$ y $p[n] = \underset{\uparrow}{1}, 2, 0, 0$

Series de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejercicio

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$ mostrada en la figura

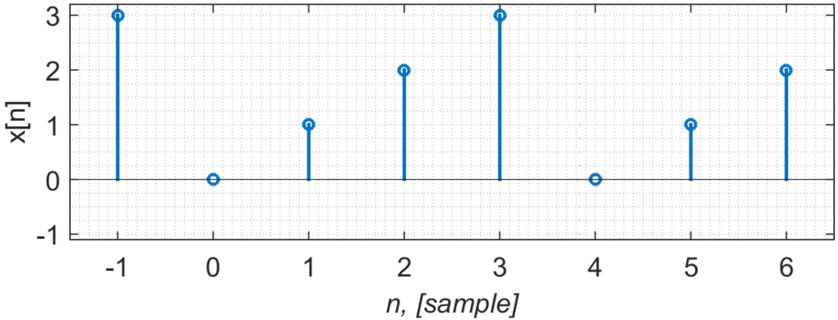


Figura 4: Señal periódica

Series de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejercicio

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

Series de Fourier de tiempo discreto: Tarea

Ejercicio

Determine el espectro de las siguientes señales:

a. $x[n] = \cos\frac{\pi}{4}n$

b. $y[n] = \cos^2\frac{\pi n}{8}$

c. $w[m] = \cos\frac{\pi}{4}(m-3)$

d. $s[n] = \cos\frac{\pi}{2}n + \cos\frac{2\pi n}{5}$

e. $x[n]$ es una señal periódica con periodo $N = 8$, y está definida en un periodo por $x[n] = \{\underset{\uparrow}{-2}, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}$

¡Muchas gracias por su atención!

¿Preguntas?

Contacto: Marco Teran
webpage: marcoteran.github.io/
e-mail: marco.teran@usa.edu.co

UNIVERSIDAD
SERGIO ARBOLEDA