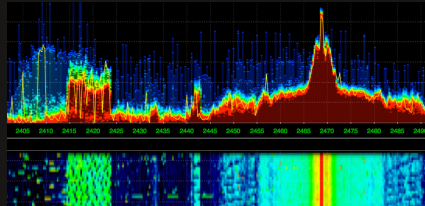


# Análisis espectral de señales: Transformada de Fourier

Teoría de Sistemas lineales



Marco Teran  
Universidad Sergio Arboleda

2023

# Contenido

- 1 De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier
- 2 De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier
- 3 Par de la transformada de Fourier, FT
  - Espectro de Fourier
- 4 Propiedades de la transformada de Fourier
- 5 Ejemplos y ejercicios
- 6 Tarea

**De la Serie de Fourier de tiempo  
continuo a la transformada de Fourier**

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

- Si una señal  $x(t)$  de tiempo continuo es periódica con periodo  $T$ , se puede representar de forma analítica mediante la **Serie de Fourier**
- Representar mediante la composición de una **suma** de funciones *armónicamente relacionadas*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t}$$

Donde,

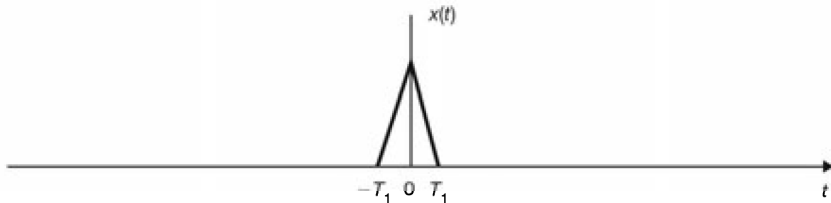
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

¿Pero qué ocurre cuando la señal de análisis no es periódica?

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

En este caso tenemos a  $x(t)$ , una señal **no periódica de duración finita**, es decir  $x(t) = 0$  para  $|t| > T_1$ , tal cual como se puede observar en la siguiente gráfica:



**Figura 1:** Señal continua de duración finita

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

- Definimos la secuencia  $x_{T_0}(t)$  — representación periódica de  $x(t)$
- Se obtiene mediante la **periodización**, es decir repetición del **patrón**.
- $T_0$  el periodo fundamental de la nueva señal.
- La nueva secuencia  $x_{T_0}(t)$  es diferente a la original  $x(t)$

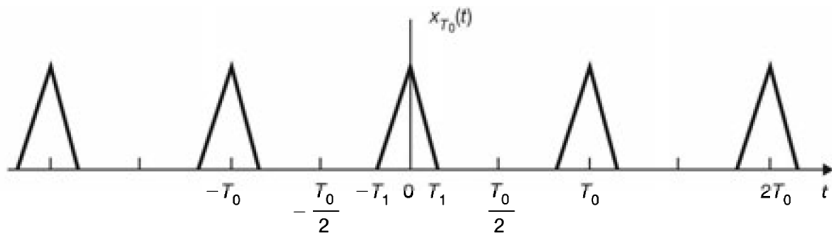


Figura 2: Señal continua periódica obtenida de la periodización de  $x(t)$

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

La secuencia  $x_{T_0}(t)$  **si** puede ser representada mediante la serie de Fourier

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \quad (1)$$

donde,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

con coeficientes de la serie de Fourier

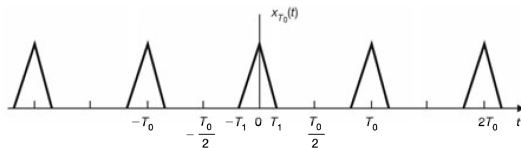
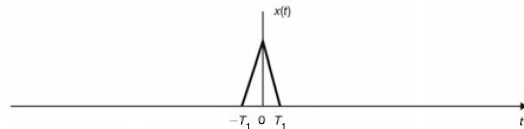
$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Podemos afirmar que

$$x_{T_0}(t) = x(t), \text{ para } |t| \leq T_1 \quad (3)$$

y  $x(t) = 0$  fuera de los límites de  $[-T_1, T_1]$ .



# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Podemos describir la ecuación 2 de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Definamos de acuerdo la ecuación 4 una nueva función de una variable independiente  $\omega$  de la siguiente manera:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Reescribamos la ecuación 4 implementando la nueva función definida por la ecuación 5, donde para este caso  $\omega = k\omega_0$ :

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (6)$$

## De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Podemos representar el periodo  $T_0$  de la siguiente forma:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (7)$$

Entonces,

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (8)$$

Luego reescribimos,

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (9)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Si  $T_0 \rightarrow \infty$  entonces

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t) \quad (10)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Podemos representar el periodo  $T_0$  de la siguiente forma:

$$\text{si } T_0 \rightarrow \infty \text{ entonces } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow 0 \text{ entonces } \omega_0 \rightarrow \Delta\omega$$



## De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 7) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 1)

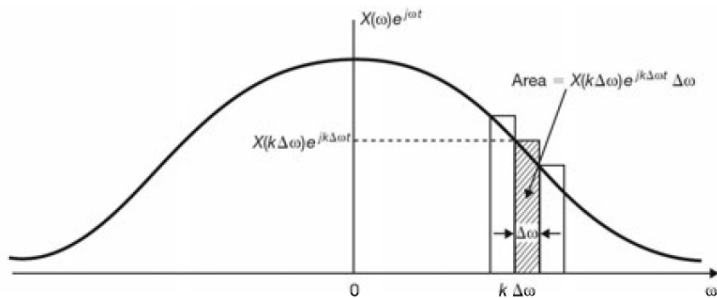
$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (11)$$

entonces,

$$x(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t}}_{\text{altura}} \underbrace{\Delta\omega}_{\text{ancho}} . \quad (12)$$

*rectangulo*

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier



**Figura 3:** Interpretación de la ecuación analítica de Fourier como suma de integral

## De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Por tanto la ecuación 11 se transforma en una integral,

$$x(t) = \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (13)$$

área bajo la función,

$$X(\omega) e^{j\omega t}$$

entonces,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

## De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

- Si una señal  $x[n]$  de tiempo discreto es periódica con periodo  $N$ , se puede representar de forma analítica mediante la **Serie de Fourier**
- Representar mediante la composición de una **suma** de funciones *armónicamente relacionadas*

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\Omega_k n} = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Donde,

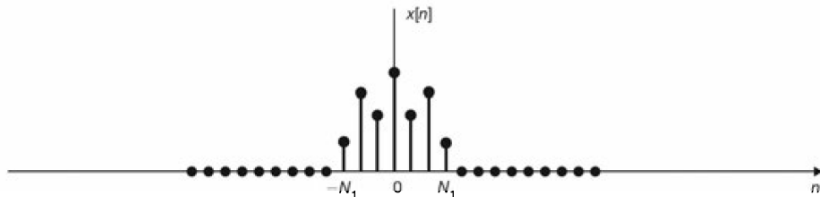
$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

# De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

¿Pero qué ocurre cuando la señal de análisis no es periódica?

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

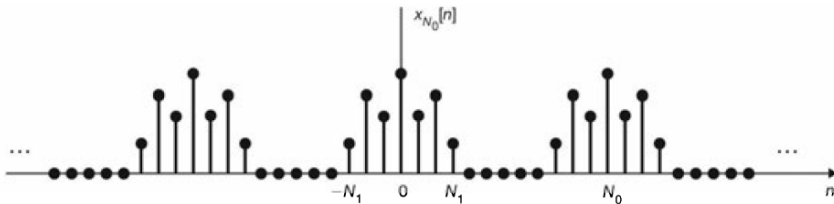
En este caso tenemos a  $x[n]$  una secuencia **no periódica de duración finita**, es decir  $x[n] = 0$  para  $|n| > N_1$ , tal cual como se puede observar en la siguiente gráfica:



**Figura 4:** Señal discreta de duración finita

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

- Definimos la secuencia  $x_{N_0}[n]$  — representación periódica de  $x[n]$
- Se obtiene mediante la **periodización**, es decir repetición del **patrón**.
- $N_0$  el periodo fundamental de la nueva señal.
- La nueva secuencia  $x_{N_0}[n]$  es diferente a la original  $x[n]$



**Figura 5:** Señal discreta periódica obtenida de la periodización de  $x[n]$



## De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

La secuencia  $x_{N_0}[n]$  puede ser representada mediante la serie de Fourier

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n}. \quad (14)$$

donde,

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

con coeficientes de la serie de Fourier

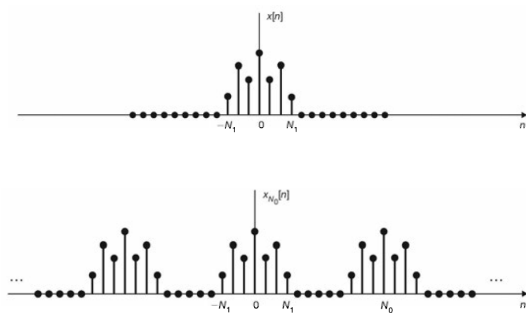
$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{N_0}[n] e^{-jk\Omega_0 n}. \quad (15)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Podemos afirmar que

$$x_{N_0} = x[n], \text{ para } |n| \leq N_1 \quad (16)$$

y  $x[n] = 0$  fuera de los límites de  $[-N_1, N_1]$ .



# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Podemos describir la ecuación 15 de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (17)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Definamos de acuerdo la ecuación 17 una nueva función de una variable independiente  $\Omega$  de la siguiente manera:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (18)$$

## De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Reescribamos la ecuación 17 implementando la nueva función definida por la ecuación 18, donde para este caso  $\Omega = k\Omega_0$ :

$$c_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) \quad (19)$$

## De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Podemos representar el periodo  $N_0$  de la siguiente forma:

$$\frac{1}{N_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \quad (20)$$

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 20) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 14)

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{\Omega_0}{2\pi} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (21)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

reescribimos la ecuación 22,

$$x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n \Omega_0} \quad (22)$$



# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Si  $N_0 \rightarrow \infty$  entonces

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_{N_0}[n] = x[n] \quad (23)$$

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Podemos representar el periodo  $T_0$  de la siguiente forma:

$$\text{si } N_0 \rightarrow \infty, \text{ entonces } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \rightarrow 0, \text{ entonces } \Omega_0 \rightarrow \Delta\Omega$$

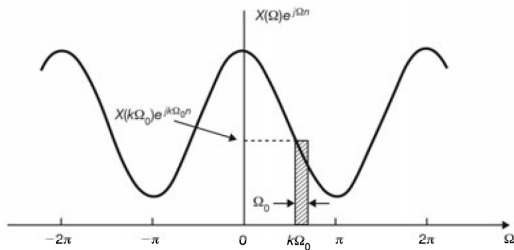
# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 20) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 14)

$$\begin{aligned} x[n] &= \lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ \Delta\Omega \rightarrow 0}} x_{N_0}[n] \\ &= \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \underbrace{X(k\Delta\Omega)e^{jk\Delta\Omega n}}_{\text{altura}} \underbrace{\Delta\Omega}_{\text{ancho}} \end{aligned} \quad (24)$$

*rectangulo*

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier



**Figura 6:** Interpretación de la ecuación analítica de Fourier como suma de integral

$X(\Omega)$  es periódica con periodo  $2\pi$ . La secuencia  $e^{j\Omega n}$  también lo es, por tanto el producto  $X(\Omega)e^{j\Omega n}$  es periódico con periodo  $N = 2\pi$ .

## De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Por tanto la ecuación 22 se transforma en una integral, donde la suma  $\sum_{k=\langle N_0 \rangle}$  se realiza sobre  $N_0$  intervalos de un ancho cada uno de  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ .

Para un intervalo total de ancho  $2\pi$ .

# De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (25)$$

**Es decir:**  $k\Omega_0$  va desde  $\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ \Omega_0 \rightarrow 0}} k \frac{2\pi}{N_0} \Big|_{k=1} = 0$  a  $\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ \Omega_0 \rightarrow 0}} k \frac{2\pi}{N_0} \Big|_{k=N_0} = 2\pi$ ,  
es decir desde  $\Omega = 0$  a  $\Omega = 2\pi$

**Par de la transformada de Fourier, FT**

## Par de la transformada de Fourier de tiempo continuo, CTFT

Se entiende como al par de la transformada de Fourier de tiempo continuo la siguiente relación

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (26)$$

Donde la transformada de Fourier de tiempo continuo se expresa mediante

$$X(\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (27)$$

y la transformada inversa de Fourier de tiempo continuo se obtiene

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (28)$$



## Par de la transformada de Fourier de tiempo discreto, DTFT

Se entiende como al par de la transformada de Fourier de tiempo discreto la siguiente relación

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (29)$$

Donde la transformada de Fourier de tiempo discreto se expresa mediante

$$X(\Omega) = \mathfrak{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (30)$$

y la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto se obtiene

$$x[n] = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \quad (31)$$

Recordemos que la DTFT  $X(\Omega)$  es periódica con periodo  $2\pi$ , es decir

$$X(\Omega) = X(\Omega + k2\pi) \quad (32)$$

# Espectro de Fourier

# Espectro de Fourier

## Espectro de Fourier

A  $X(\omega)/X(\Omega)$  se le conoce también como la representación en la frecuencia o el espectro de  $x(t)/x[n]$ .

# Espectro de Fourier

## Tiempo continuo:

La transformada de Fourier de la secuencia  $x(t)$  es de carácter complejo.

## Forma polar:

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\Phi(\omega)} \quad (33)$$

donde,  $|X(\omega)|$  — espectro de magnitud;  $\Phi(\omega)$  — espectro de fase.

Si  $x(t) \in \Re$  entonces el espectro de magnitud es **par** y el espectro de fase **impar**.

# Espectro de Fourier

## Tiempo discreto:

La transformada de Fourier de la secuencia  $x[n]$  es de carácter complejo.

## Forma polar:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\Phi(\Omega)} \quad (34)$$

donde,  $|X(\Omega)|$  — espectro de magnitud;  $\Phi(\Omega)$  — espectro de fase.

Si  $x[n] \in \Re$  entonces el espectro de magnitud es **par** y el espectro de fase **impar**.

# Propiedades de la transformada de Fourier

# Propiedades de la transformada de Fourier: Linealidad

Tiempo continuo:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) \quad (35)$$

Tiempo discreto:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega) \quad (36)$$

## Propiedades de la transformada de Fourier: Periodicidad del espectro de una señal discreta

$$X(\Omega + k2\pi) = X(\Omega) \quad (37)$$

$\Omega$  se da en radianes y es continua de  $-\pi \leq \Omega \leq \pi$  o también  $0 \leq \Omega \leq 2\pi$ .



# Propiedades de la transformada de Fourier: Corrimientos de frecuencia y tiempo

## Tiempo continuo:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (38)$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0) \quad (39)$$

A la ecuación 39 se le conoce como *modulación compleja*.

# Propiedades de la transformada de Fourier: Corrimientos de frecuencia y tiempo

Tiempo discreto:

$$x[n - N] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)e^{-j\Omega N} \quad (40)$$

$$x[n]e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega - \Omega_0) \quad (41)$$

A la ecuación 41 se le conoce como *modulación compleja*.

# Propiedades de la transformada de Fourier: Conjugación

Tiempo continuo:

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\omega) \quad (42)$$

Tiempo discreto:

$$x^*[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\Omega) \quad (43)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Inversión en el tiempo

Tiempo continuo:

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega) \quad (44)$$

Tiempo discreto:

$$x[-n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-\Omega) \quad (45)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Escalamiento en el tiempo

## Tiempo continuo:

Para una versión escalada en el tiempo de  $x_s(t) = x(at)$ :

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (46)$$

si  $a > 1$  la señal se comprime en el tiempo.

# Propiedades de la transformada de Fourier

Para una versión escalada en el tiempo de  $x_d[n] = x[Mn]$ , donde  $M > 1 \in \mathbb{Z}$ :

$$x_d[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{M} X\left(\frac{\Omega}{M}\right) \quad (47)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Paridad de la transformada de Fourier

## Tiempo continuo:

Para  $x(t) \in \mathfrak{R}$

$$x(t) = x_{even}(t) + x_{odd}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \quad (48)$$

donde,

$$x_{even}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega) \quad (49)$$

$$x_{odd}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\operatorname{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega) \quad (50)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Paridad de la transformada de Fourier

## Tiempo discreto:

Para  $x[n] \in \Re$

$$x[n] = x_{\text{even}}[n] + x_{\text{odd}}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) \quad (51)$$

donde,

$$x_{\text{even}}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \quad (52)$$

$$x_{\text{odd}}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} j \text{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \quad (53)$$



# Propiedades de la transformada de Fourier: Teorema de Parseval

Tiempo continuo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (54)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Teorema de Parseval

Tiempo discreto:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (55)$$

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S_x(\Omega) d\Omega \quad (56)$$

donde  $S_x(\Omega)$  se conoce como densidad espectral de potencia y se calcula

$$S_x(\Omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|X_N(\Omega)|^2}{2N+1}. \quad (57)$$

donde

$$X_N(\Omega) = \mathfrak{F}\{x[n] \{u[n+N] - u[n-N]\}\}. \quad (58)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Diferenciación y diferencia

Tiempo continuo:

Diferenciación:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega) \quad (59)$$

Tiempo discreto:

Diferencia:

$$\underbrace{x[n] - x[n-1]}_{\substack{\text{secuencia de} \\ \text{primera diferencia}}} \xrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega) \quad (60)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Diferenciación en la frecuencia

Tiempo continuo:

$$tx(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (61)$$

Tiempo discreto:

$$nx[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (62)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Integración y Acumulación

## Tiempo continuo: Integración

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega) \quad (63)$$

## Tiempo discreto: Acumulación

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi X(0)\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}X(\Omega) \quad (64)$$

## Propiedades de la transformada de Fourier: Integral de convolución

Integral de convolución en el dominio del tiempo es multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (65)$$

En el dominio de la frecuencia es el producto de ambas señales:

$$\underbrace{Y(\omega)}_{\text{espectro de salida } y(t)} = \underbrace{X(\omega)}_{\text{espectro de entrada } x(t)} \underbrace{H(\omega)}_{\text{respuesta en frecuencia del sistema}} \quad (66)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Integral de convolución

Se cumple que

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)| \quad (67)$$

$$\angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega) \quad (68)$$

## Propiedades de la transformada de Fourier: Suma de convolución

Suma de convolución en el dominio del tiempo es multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (69)$$

en el dominio de la frecuencia se puede realizar mediante el calculo del producto de ambos argumentos de la suma de convolución

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad (70)$$



# Propiedades de la transformada de Fourier: Suma de convolución

Se cumple que

$$|Y(\Omega)| = |X(\Omega)| |H(\Omega)| \quad (71)$$

$$\angle Y(\Omega) = \angle X(\Omega) + \angle H(\Omega) \quad (72)$$

## Propiedades de la transformada de Fourier: Multiplicación en el dominio del tiempo

Tiempo continuo:

$$x(t)y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) \circledast Y(\omega) \quad (73)$$

Tiempo discreto:

$$x[n]y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \circledast Y(\Omega) \quad (74)$$

donde  $\circledast$  — implica **convolución circular**, que se calcula de la forma

$$X(\Omega) \circledast Y(\Omega) = \int_{2\pi} X(\Theta) Y(\Omega - \Theta) d\Theta \quad (75)$$

# Propiedades de la transformada de Fourier: Dualidad

## Tiempo continuo:

si

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (76)$$

entonces,

$$X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega) \quad (77)$$

## Tiempo discreto:

si

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (78)$$

entonces,

$$X[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\Omega) \quad (79)$$

# Ejemplos y ejercicios: Transformada de Fourier

# Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

## Ejemplo

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} A, & \text{para } -M \leq n \leq M; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

# Transformada inversa de Fourier de tiempo continuo: Ejemplo

## Ejemplo

Encuentre la iCTFT de la siguiente señal:

$$X(\omega) = \cos(\omega) \left\{ u\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

# Transformada de Fourier de tiempo continuo: Ejemplo

## Ejemplo

Encuentre la CTFT de la siguiente señal:

$$s(t) = |3t| \{u(t+2) - u(t-2)\}$$

# Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

## Ejemplo

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = r^n u[n], \text{ donde } |r| < 1.$$



# Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

## Ejemplo

Encuentre la iDTFT del siguiente pulso rectangular  $X(\Omega)$ :

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{para } |\Omega| \leq W; \\ 0, & \text{para } W < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

# Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

## Ejercicio

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } |n| \leq N_1; \\ 0, & \text{para } |n| > N_1. \end{cases}$$

# Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

## Ejercicio

Encuentre la DTFT de la siguientes señales:

a  $x[n] = a^{|n|}$ , para  $-1 < a < 1$ .

b  $s[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \{u[n] - u[n-5]\}$

c  $x[n] = -a^n u[-n-1]$ , donde  $a \in \mathfrak{R}$ .

# Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

## Ejercicio

Encuentre la iDTFT de la siguientes señales:

a

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{para } \Omega_0 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

b  $P(\Omega) = \cos^2(\Omega)$

# Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

## Ejercicio

Encuentre la iDTFT de la siguientes señales:

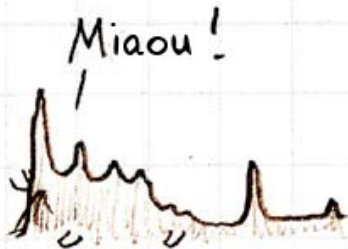
a

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{para } \Omega_0 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

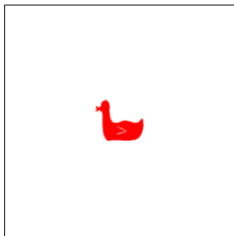
b

$$P(\Omega) = \cos^2(\Omega)$$

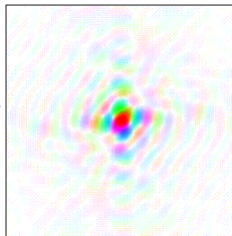
Allo, Dr. Elizabeth?  
Heu... J'ai accidentellement réalisé  
une transformation de Fourier  
sur mon chat...



A duck

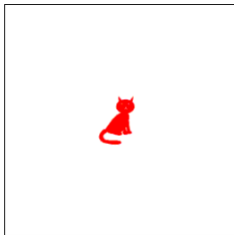


FT  
FT

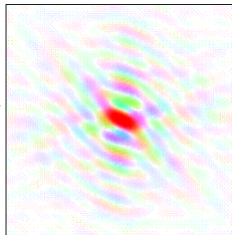


Fourier  
transform  
of a duck

A cat



FT  
FT

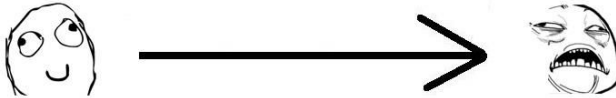


Fourier  
transform  
of a cat

**Fourier Transformation**



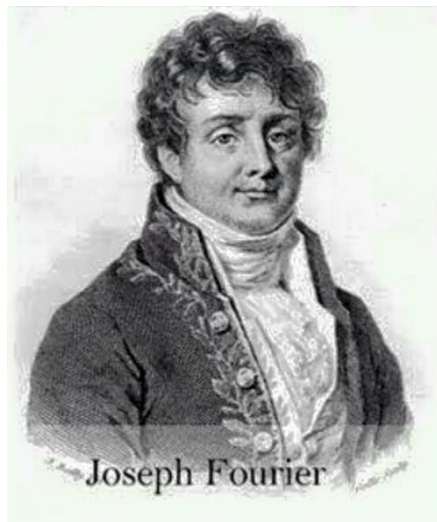
**Four year Transformation**



**Engineering Student**

**ENGINEERING STUDENT**





## Ejercicio

Determine y dibuje la densidad espectral de potencia  $S_x(\Omega)$  de la siguiente señal  $x[n]$ :

$$x[n] = a^n u[n]$$

# ¡Muchas gracias por su atención!

*¿Preguntas?*



**Contacto:** Marco Teran  
**webpage:** [marcoteran.github.io/](https://marcoteran.github.io/)  
**e-mail:** marco.teran@usa.edu.co

