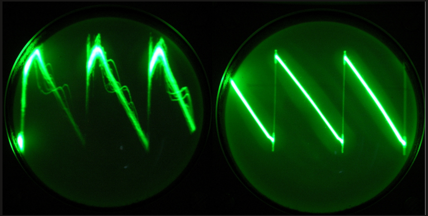
Señales y transformaciones

Teoría de Sistemas lineales



Marco Teran
Universidad Sergio Arboleda

2023

Contenido

Introducción

Señales de tiempo continuo (CT)

- Las señales de **tiempo continuo** son aquellas cuyo dominio (conjunto de la variable independiente) son de **tiempo continuo**.
- Variable independiente de **tiempo continuo** — $t \in \mathbb{R}$.

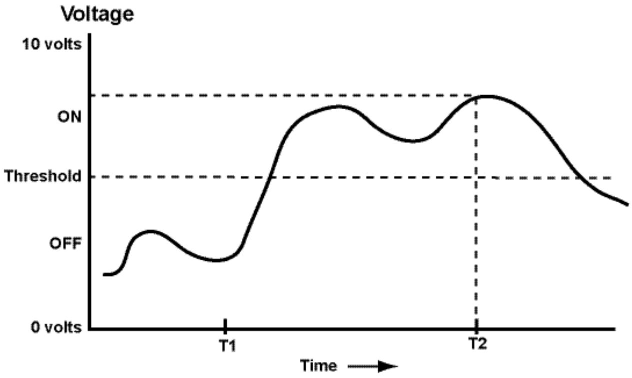


Figure 1: Señal de tiempo continuo.

Señales de tiempo discreto (DT)

- Las señales de **tiempo discreto** son aquellas cuyo dominio (conjunto de la variable independiente) son de **tiempo discreto**.
- Las señales discretas son una secuencia de números.
- Cada valor que toma la señal se denomina *muestra* (*ing.* sample).
- Variable independiente de **tiempo discreto** — $n \in \mathbf{Z}$.

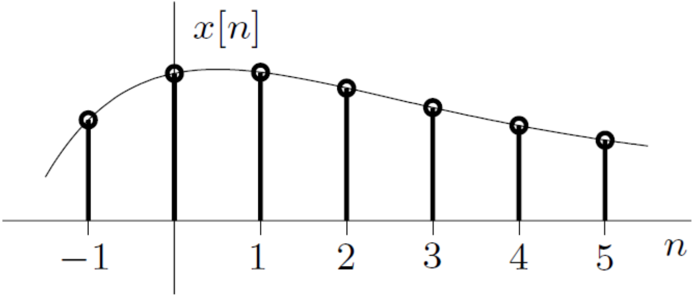


Figure 2: Señal de tiempo discreto.

Señales singulares

Señales singulares

Señal singular

Una **señal singular** es una *función* que representa un *variable física* mediante un *modelo abstracto matemático*.

- Un **modelo abstracto** es una representación matemática ideal
- Los atributos y conceptos que definen el modelo solo pueden ser entendidos de forma virtual, mas no física

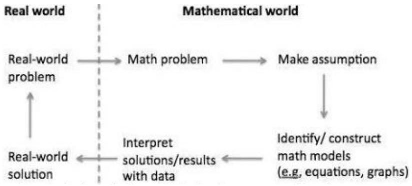
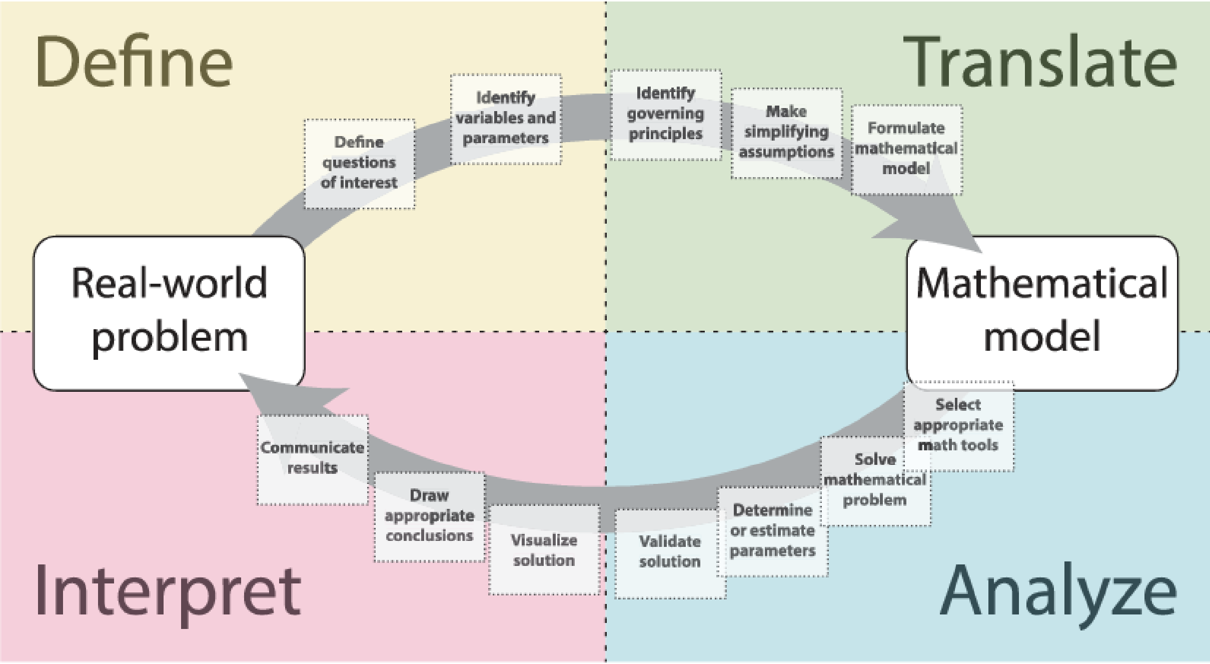
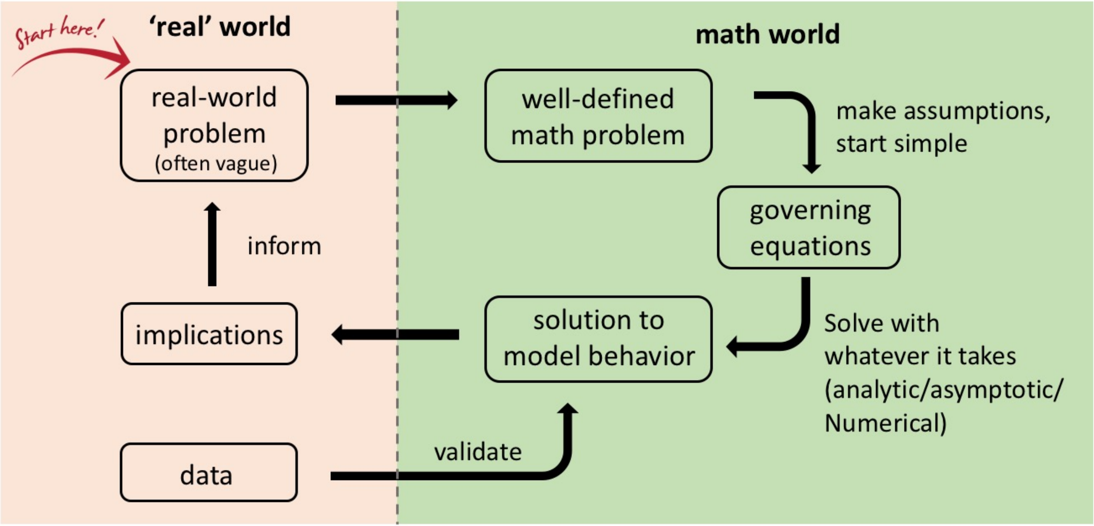


Figure 3: Los modelos matemáticos como relación entre el mundo real y el matemático.



Define
Translate
Interpret
Analyze
Real-world problem
Mathematical model
Define questions of interest
Identify variables and parameters
Identify governing principles
Make simplifying assumptions
Formulate mathematical model
Select appropriate math tools
Solve mathematical problem
Determine or estimate parameters
Validate solution
Visualize solution
Draw appropriate conclusions
Communicate results

Typical mathematical modeling process



Señales singulares de tiempo discreto

Características de una señal singular:

1. No existen modelos abstractos físicos realizables: estas señales son ideales — no se encuentran en la naturaleza.
2. Aproximación adecuada a señales reales de la naturaleza — solo bajo ciertas condiciones y restricciones.
3. Las señales singulares representan un comportamiento asintótico de los sistemas físicos reales.

Señales singulares de tiempo discreto

Representar un comportamiento asintótico quiere decir reproducir una función al cual una señal o la caracterización de un sistema físico real tienden a aproximarse en todos sus posibles valores.

1. Esta tendencia se puede expresar mediante equivalencias.

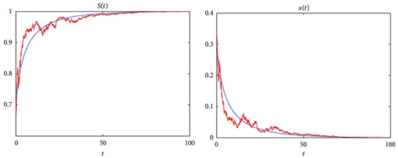
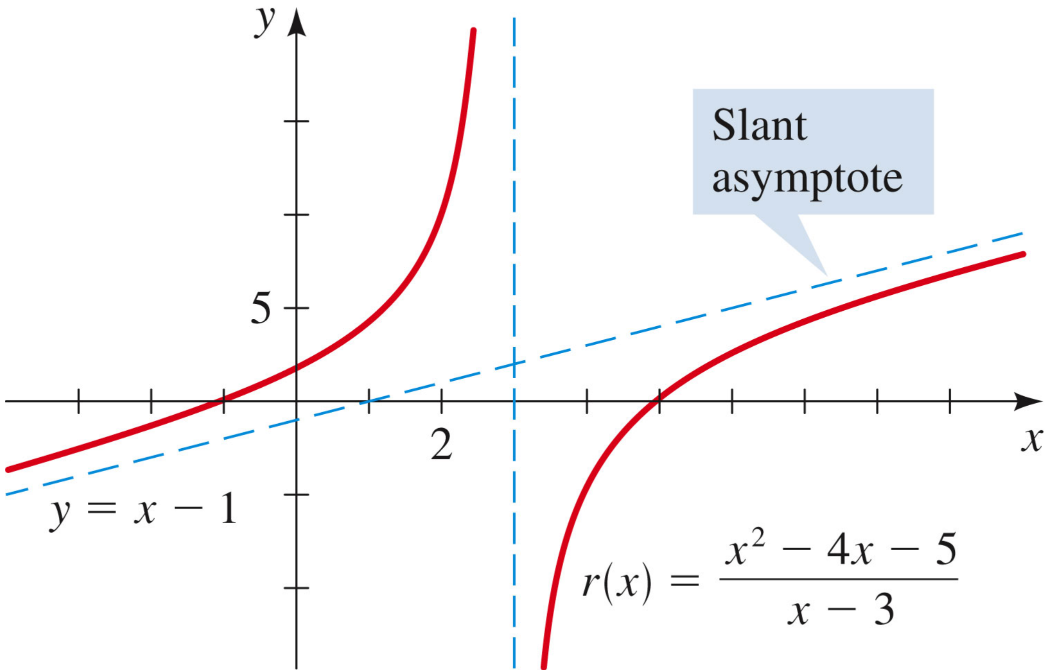


Figure 4: Los modelos matemáticos como relación entre el mundo real y el matemático.


y
Slant asymptote
5
2
x
$y = x - 1$
$r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$

Función escalón unitario

También conocida como *función unitaria de Heaviside* y representada de la forma $u[n]$.

Historia

Es una función discontinua, es decir definida por partes (a trozos). Su nombre es en honor al matemático inglés *Oliver Heaviside* (18 de mayo de 1850, Londres — 3 de febrero de 1925, Torquay, Inglaterra), cuyo trabajo estuvo dirigido al estudio de la transmisión de señales.

Figure 5: Oliver Heaviside.

Theory is the essence of facts. Without theory scientific knowledge would be only worthy of the madhouse.

Oliver Heaviside

Función escalón unitario de tiempo continuo

Es una función que básicamente representa el empezar de una señal, como una especie de interruptor.

- En el origen, $t = 0$, la función tiene un valor indeterminado

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0; \\ \text{ind}, & \text{si } t = 0; \\ 0, & \text{si } t < 0; \end{cases} \tag{1}$$

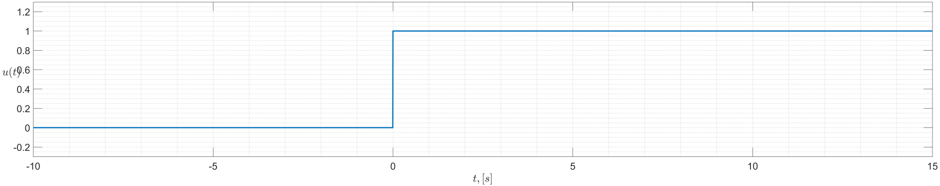


Figure 6: Función escalón unitario de tiempo continuo

Función escalón unitario de tiempo continuo

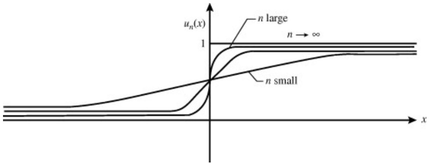


Figure 7: Comportamiento asintótico de $u(t)$

Función escalón unitario de tiempo continuo

- Para aproximaciones de calculo, asumiremos en **este curso** que $u(0) = 1$, a menos que se especifique lo contrario.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0; \\ 0, & \text{si } t < 0; \end{cases} \tag{2}$$

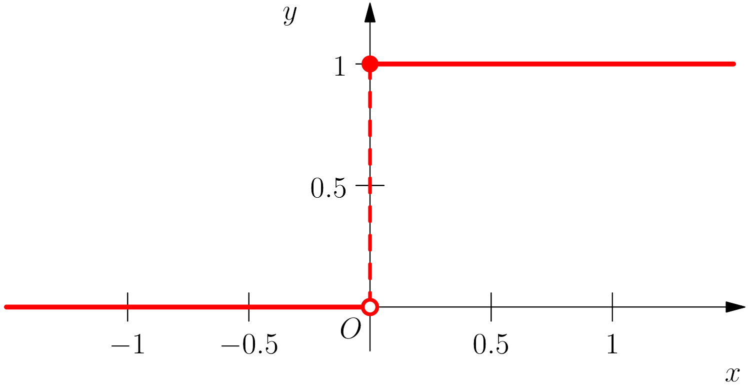
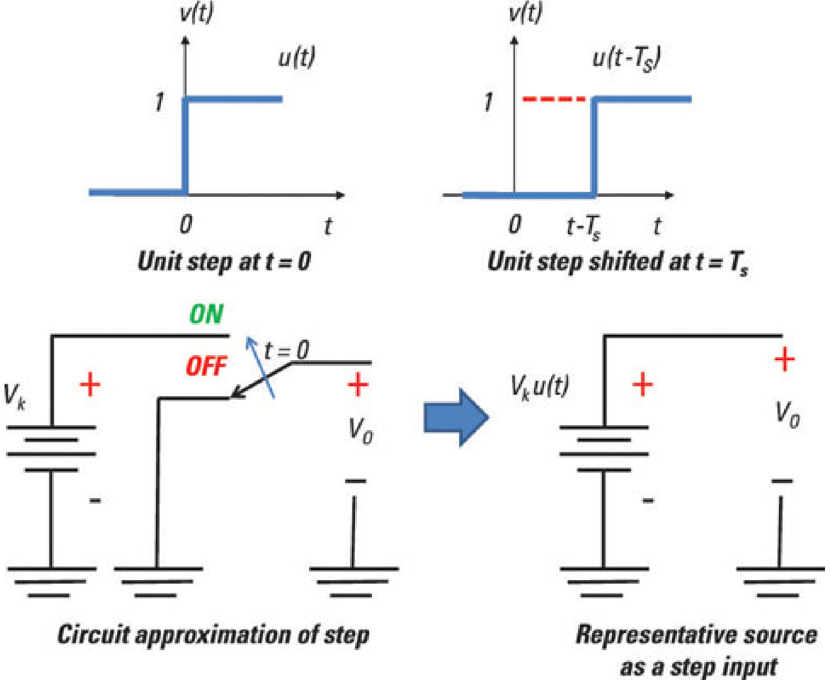


Figure 8: Función escalón unitario de tiempo continuo



v(t)
u(t)
1
0
t
Unit step at t = 0
v(t)
u(t-T_S)
1
0
t-T_s
t
Unit step shifted at t = T_s
ON
OFF
t = 0
V_k
+
-
+
V_0
−
Circuit approximation of step
V_k u(t)
+
-
+
V_0
−
Representative source
as a step input

Función escalón unitario de tiempo discreto

- En el origen, $n = 0$, la función toma el valor de 1 a diferencia de la variante de tiempo continuo

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0; \\ 0, & \text{si } n < 0; \end{cases} \tag{3}$$

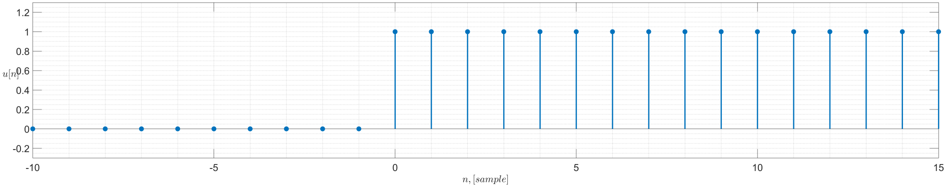


Figure 9: Función escalón unitario de tiempo discreto

Función impulso unitario

- También conocida como *función delta-Dirac*
- La delta-Dirac es una función generalizada introducida por primera vez por el físico británico *Paul Dirac*
- Se conoce como *función Kronecker* para el caso específico discreto

Función impulso unitario

Historia

Recibió su nombre en honor al matemático alemán *Leopold Kronecker* (7 de diciembre 1823, Legnica, Polonia — 29 diciembre 1891,Berlín, Alemania), cuyo trabajo estuvo dirigido a la teoría de números, álgebra y lógica

Figure 10: Leopold Kronecker

Función impulso unitario

- Se representa de la forma δ, la letra griega *delta* minúscula.
- Esta señal es muy importante para el análisis de los sistemas.
- Esta función constituye una aproximación muy útil para funciones picudas y constituye el mismo tipo de abstracción de un instante de tiempo puntual.

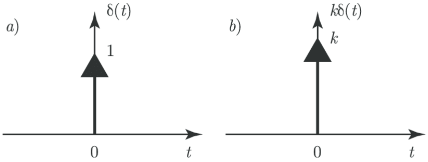
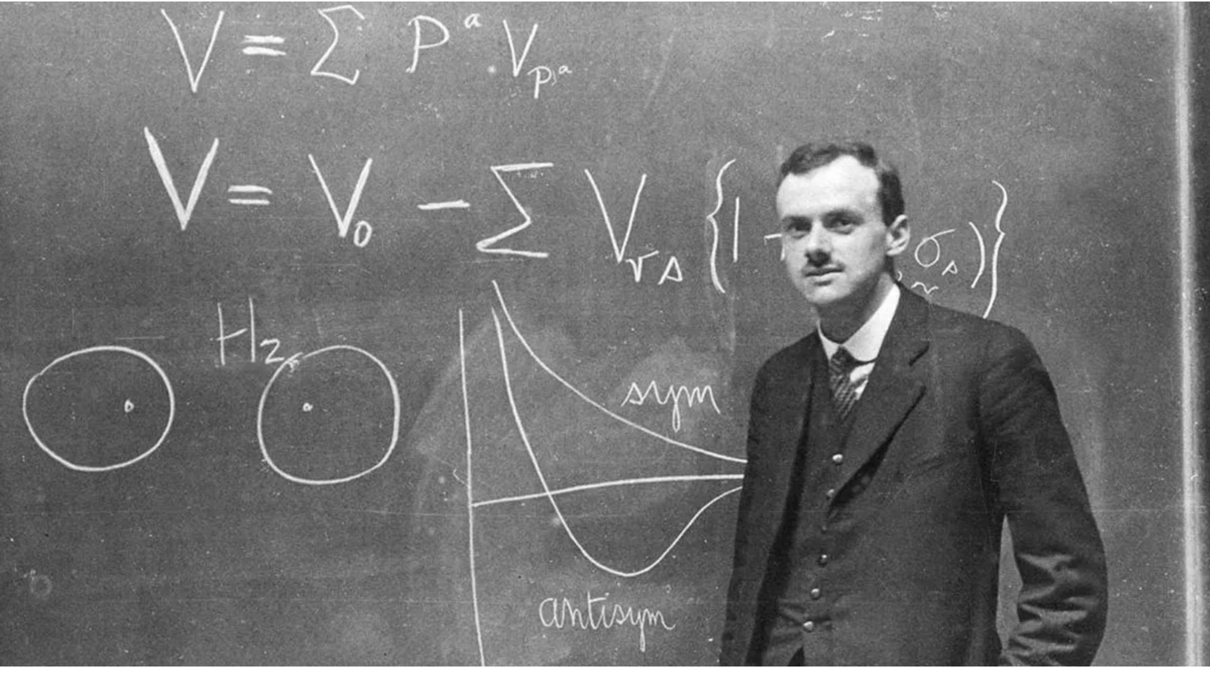
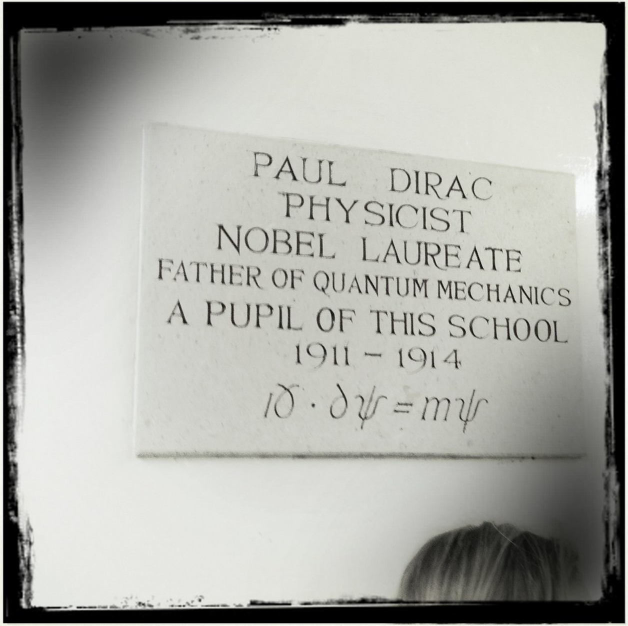
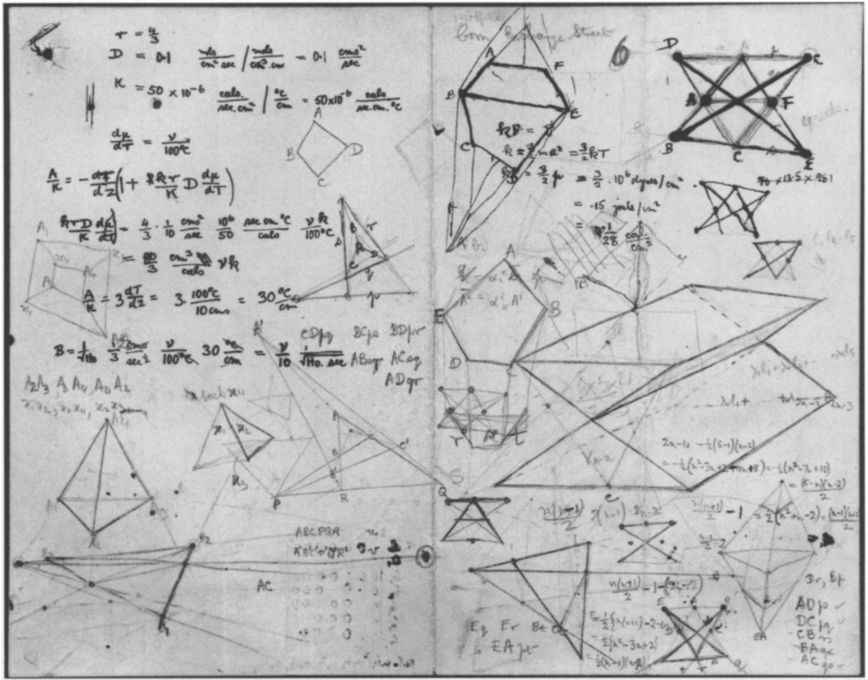


Figure 11: Impulso unitario


sym
antisym


PAUL DIRAC
PHYSICIST
NOBEL LAUREATE
FATHER OF QUANTUM MECHANICS
A PUPIL OF THIS SCHOOL
1911 – 1914
iγ · ∂ψ = mψ

DEC 80



$r = \frac{4}{3}$

$D = 0.1 \ \frac{\text{mols}}{\text{cm}^2\,\text{sec}} \Big/ \frac{\text{mols}}{\text{cm}^3\,\text{cm}} = 0.1 \ \frac{\text{cms}^2}{\text{sec}}$

$K = 50 \times 10^{-6} \ \frac{\text{calo.}}{\text{sec.cm}^2} \Big/ \frac{{}^\circ\text{C}}{\text{cm}} = 50 \times 10^{-6} \ \frac{\text{calo}}{\text{sec.cm.}{}^\circ\text{C}}$

$\frac{d\mu}{dT} = \frac{\nu}{100^\circ\text{C}}$

$\frac{A}{K} = -\frac{dT}{dz}\left(1 + \frac{k r}{K} D \frac{d\mu}{dT}\right)$

$\frac{k r D}{K}\frac{d\mu}{dT} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{10} \ \frac{\text{cms}^2}{\text{sec}} \ \frac{10^6}{50} \ \frac{\text{sec cm}\,{}^\circ\text{C}}{\text{calo}} \ \frac{\nu k}{100^\circ\text{C}}$

$= \frac{80}{3} \ \frac{\text{cm}^3}{\text{calo}} \ \nu k$

$\frac{A}{K} = 3\frac{dT}{dz} = 3 \cdot \frac{100^\circ\text{C}}{10\,\text{cms}} = 30 \frac{{}^\circ\text{C}}{\text{cm}}$

$B = \frac{1}{\sqrt{110}} \ \frac{A^2}{3} \ \frac{\text{cms}}{\text{sec}^{\frac{1}{2}}} \ \frac{\nu}{100^\circ\text{C}} \ 30 \frac{{}^\circ\text{C}}{\text{cm}} = \frac{\nu}{10} \ \frac{1}{\sqrt{110}.\,\text{sec}}$

CDpq BCpo BDpr
ABoq ACoq
ADqr

A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2

x_1x_2, x_3x_4, x_2x_3

ABCPQR
A'B'C'P'Q'R'

AC

Corn Exchange Street

$kT = \frac{1}{2}$

$k = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}kT$

$= \frac{3}{2}p = \frac{3}{2} \cdot 10^6 \text{ dynes}/\text{cm}^2$

$76 \times 13.5 \times 981$

$= .15 \text{ joule}/\text{cm}^3$

$= \frac{1}{28} \ \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3}$

$A^2 = \alpha_x^2 A'$

$2n-4 \quad -\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

$= -\frac{1}{2}(n^2-3n+2+4n+8) = -\frac{1}{2}(n^2-7n+10)$

$= \frac{(5-n)(n-2)}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2} \quad 2(n-1) - 2n - 2$

$\frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{1}{2}(n^2+n-2) = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2} - 1 - (2n-2)$

$= \frac{1}{2}\{n(n+1) - 2 - 4n + 4\}$

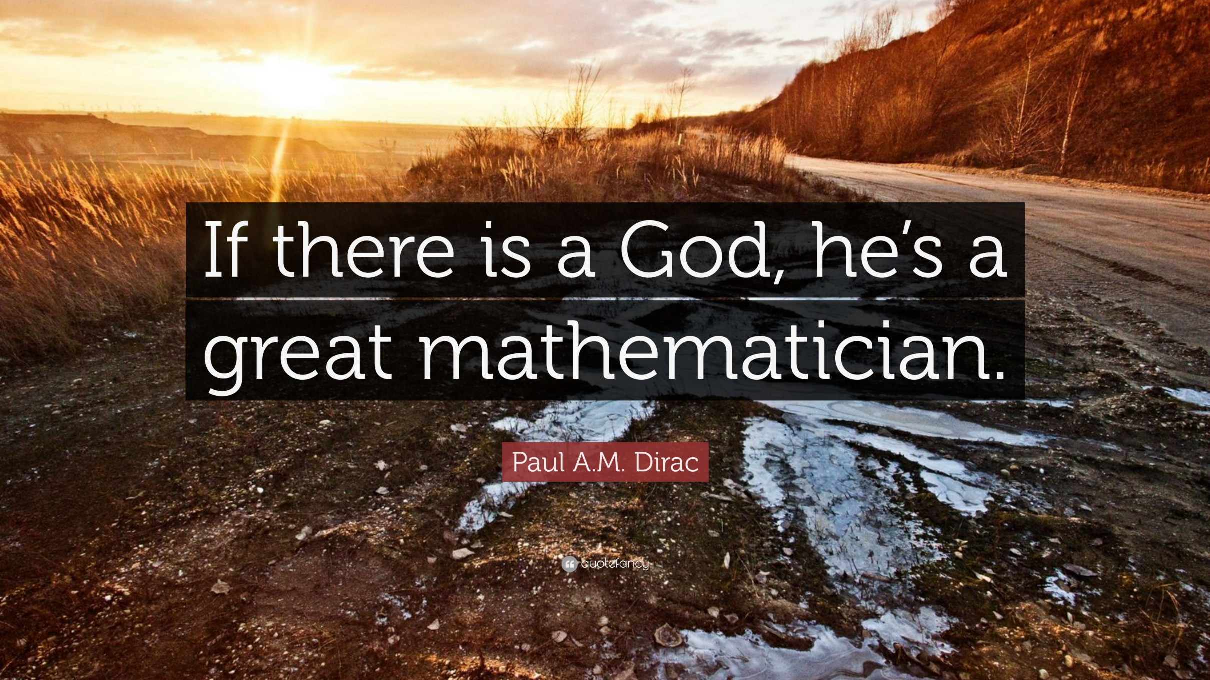
$= \frac{1}{2}\{n^2 - 3n + 2\}$

$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

Eq Er Bt
EA μ

Br, Bp

ADp
DCrq
CBs
BAqx
ACqo


If there is a God, he's a great mathematician.
Paul A.M. Dirac
quotefancy

Función impulso unitario

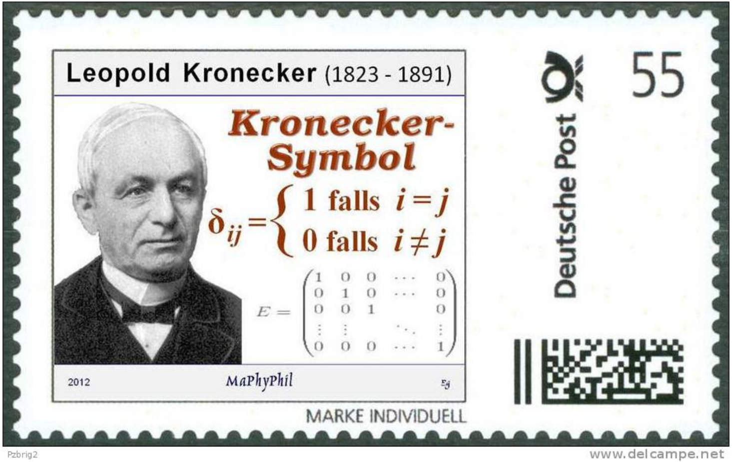


Figure 12: Apostilla de Leopold Kronecker

Función impulso unitario de tiempo continuo

- $\delta(t)$ tiende a ∞ en $t = 0$, y siempre igual cero para otros valores de t.
- Se puede decir que matemáticamente es menos complicada que su homologa de tiempo continuo .

$$
\begin{aligned}
\delta\left(t\right) = &\quad 0, \mathrm{si}\, t \neq 0; \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t\right) \mathrm{d}t = &\quad 1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

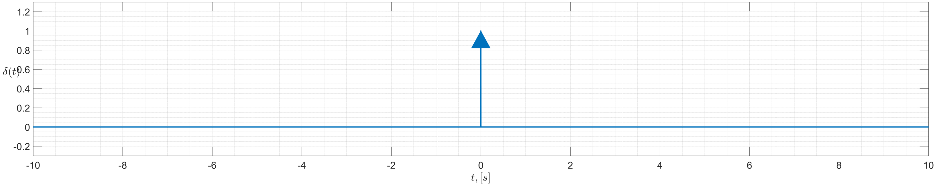


Figure 13: Función impulso unitario de tiempo continuo

¿Cuales son las dimensiones de $\delta(t)$?

Función impulso unitario de tiempo continuo

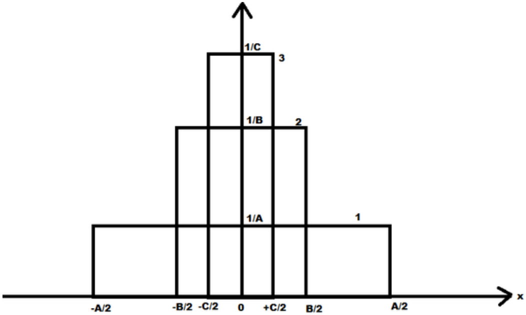
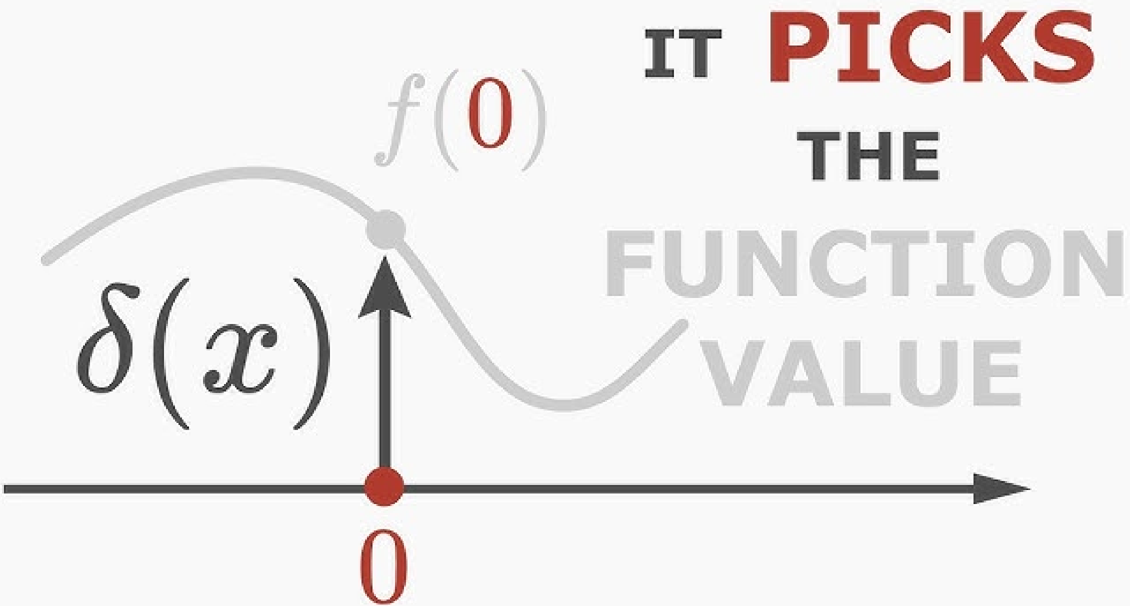
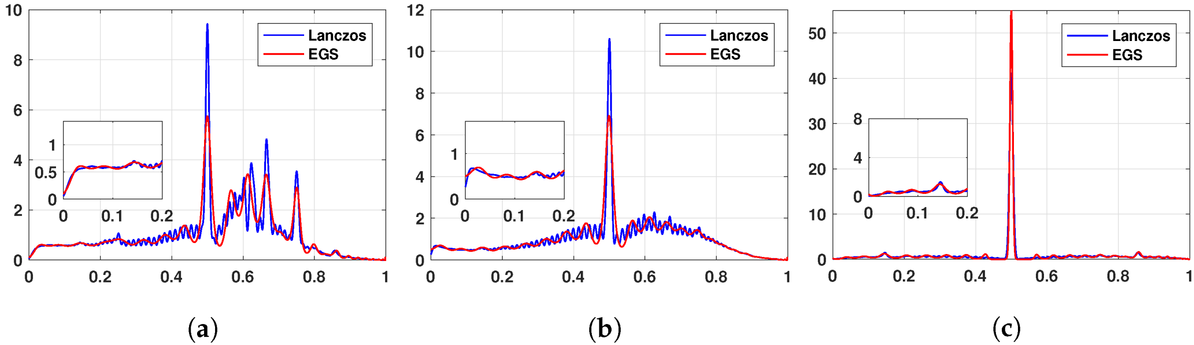


Figure 14: Aproximación de la función impulso unitario de tiempo continuo


IT PICKS
THE
FUNCTION
VALUE
f(0)
δ(x)
0



(a) (b) (c)

Función impulso unitario de tiempo discreto

- $\delta[n]$ es igual a 1 en $n = 0$, y siempre igual cero para otros valores de n.
- Se puede decir que $\delta[n]$ matemáticamente es menos complicada que su homologa de tiempo continuo $\delta(t)$.

$$\delta\left[n\right] = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 0; \\ 1, & \text{si } n = 0; \end{cases} \tag{5}$$

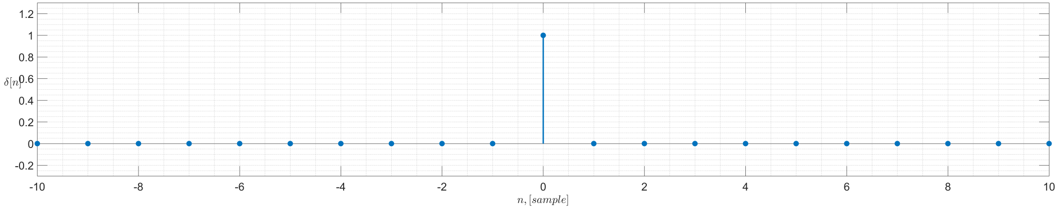


Figure 15: Función impulso unitario de tiempo discreto

Función impulso unitario de tiempo continuo

Propiedades:
Área igual a la unidad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1 \tag{6}$$

Repaso matemático: Números complejos

Números complejos

Números complejos

El *conjunto de los números complejos* son una extensión de los números reales, y se designan mediante la notación $\mathbb{C}$, donde el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ esta contenido dentro de los números complejos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

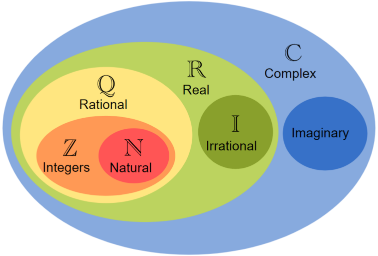


Figure 16: Conjunto de los números complejos

Números complejos

Un número complejo se escribe de la forma

$$z = x + iy, \tag{7}$$

donde,

z	—	numero complejo;
$x = \Re\{z\}$	—	parte real;
$y = \Im\{z\}$	—	parte imaginaría;
$\Re\{\cdot\}$ y $\Im\{\cdot\}$	—	operador de parte real y de parte imaginaria.

- Suma de un numero real y un numero imaginario (ecu. 7) — representación rectangular o *binómica*
- El dominio imaginario se define como el múltiplo entre una magnitud real con la *unidad imaginaria* i
  - $i^2 = i \cdot i = -1 \rightarrow i = \sqrt{-1}$.

Representación polar y Plano complejo

- Los números complejos pueden ser representados en un plano llamado diagrama de *Argand*, plano *gaussiano* o simplemente plano complejo
- Sea (x, y) el punto $\mathbf{P}$ en el plano que representa el número complejo $z = x + iy$
  - $|z|$ es la distancia del origen O hasta el punto $\mathbf{P}$
  - El punto $\mathbf{P}$ puede representarse por medio de coordenadas polares (r, φ)

$$z = r \cdot \exp(i\varphi), \tag{8}$$

donde,

$$\begin{aligned} \varphi &\quad \text{— fase del numero complejo;} \\ r = |z| &\quad = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — magnitud (módulo)} \\ &\quad \text{del numero complejo;} \\ x &\quad = r\cos\varphi; \\ y &\quad = r\sin\varphi. \end{aligned}$$

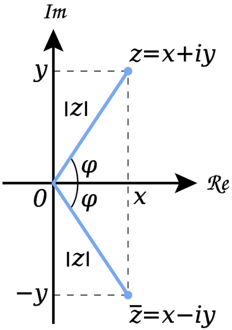
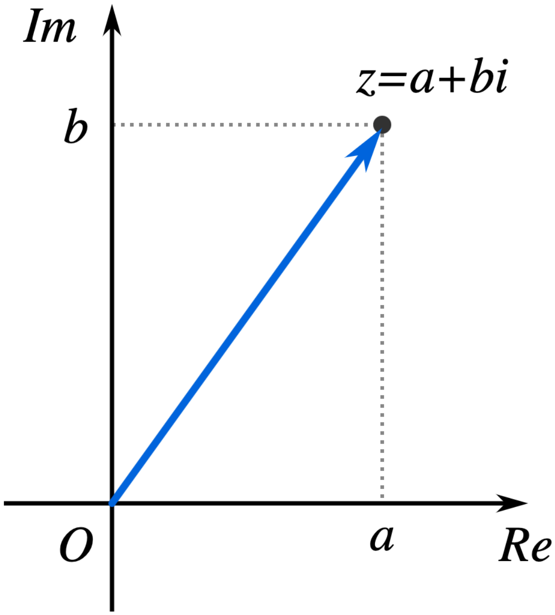
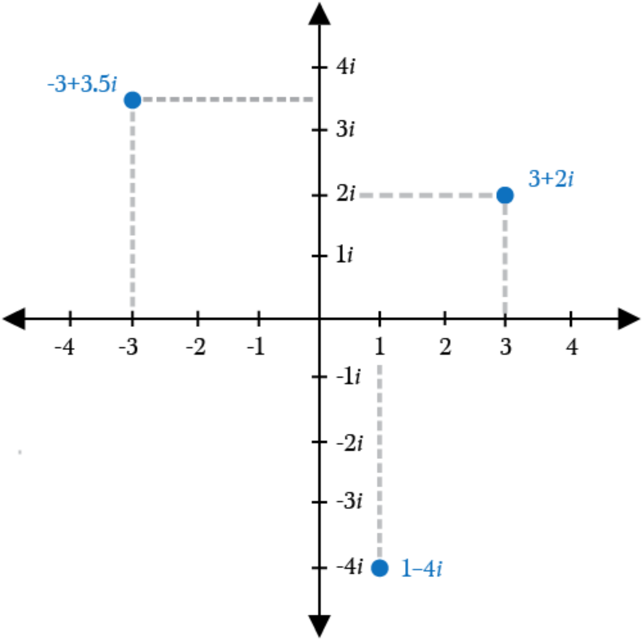


Figure 17: Plano complejo

$$\underset{\text{Real part}}{\underset{\uparrow}{a}} + \underset{\text{Imaginary part}}{\underset{\uparrow}{b}}\,i$$


Im
z=a+bi
b
O
a
Re



-3+3.5i
3+2i
1–4i
4i
3i
2i
1i
-1i
-2i
-3i
-4i
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

Propiedades de los números complejos

$$
\begin{aligned}
rz &= rx + iry && \text{— producto escalar, donde } r \text{ es un numero escalar;} \\
|z|^2 &= x^2 + y^2 && \text{— magnitud al cuadrado;} \\
|z| &= \sqrt{z \cdot z*} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} && \text{— magnitud;} \\
z* &= \bar{z} = x - iy && \text{— complejo conjugado de } z = x + iy, \text{ imagen/reflexión respecto al eje } \mathbb{R}; \\
\varphi &= \arg\{z\} = \arctan 2(\Im(z), \Re(z)) && \text{— fase del numero complejo;} \\
&= \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right)
\end{aligned}
$$

Formula de Euler

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$
$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)$$

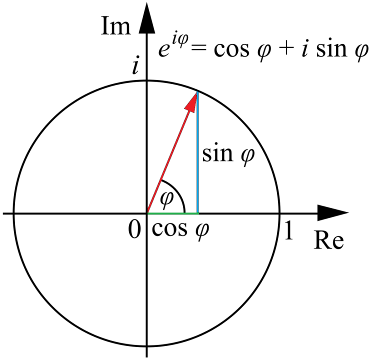


Figure 18: Formula de Euler

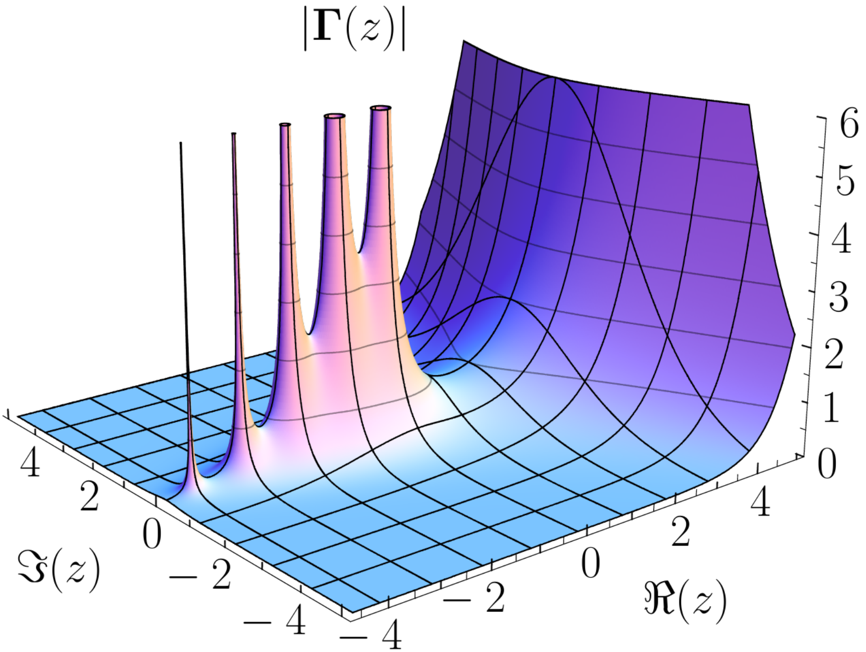
Teorema de De Moivre:
Para cualquier número real p

$$\left[re^{i\phi}\right]^{p} = \left[r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)\right]^{p} = r^{p}\left(\cos p\phi + i\sin p\phi\right) \tag{9}$$

Señales exponenciales complejas

Señales exponenciales complejas

- Son señales mucha importancia para el **análisis**. Ocurren frecuentemente en la naturaleza.
- Se **utilizan** como señales básicas para construcción señales mucho más complejas, mediante *análisis armónico* (Fourier).
- Es una función *holomórfa* en el plano complejo
  - No presentar un orden definido
  - **Continua:** puede ser derivada en cualquier punto, $x \in \mathbb{C}$
- Esta función está constituida por una parte real y otra imaginaria.



$|\Gamma(z)|$
$\Im(z)$
$\Re(z)$
0
1
2
3
4
5
6
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

Señales exponenciales complejas

Tiempo continuo:

$$x(t) = Ae^{st}, \tag{10}$$

Tiempo discreto:

$$x[n] = Ae^{Sn}, \tag{11}$$

donde, A, S y s generalmente son números complejos.
Dependiendo de estos valores, especialmente los de S y s, la señal compleja x puede tener características distintas.

Señales exponenciales de acuerdo a la variable compleja s

Señales exponenciales de acuerdo a la variable compleja s

`Tiempo continuo:`

Por convención para tiempo continuo se usará el *omega* y el *sigma* minúsculas ω y σ

$$\begin{aligned} s &= \sigma + i\omega && \text{— parte real e imaginaria;} \\ s &= i\omega && \text{— solo parte imaginaria;} \\ s &= \sigma && \text{— solo parte real.} \end{aligned}$$

`Tiempo discreto:`

Por convención para tiempo discreto se usara el *omega* y el *sigma* mayúsculas Ω y Σ

$$\begin{aligned} S &= \Sigma + i\Omega && \text{— parte real e imaginaria;} \\ S &= i\Omega && \text{— solo parte imaginaria;} \\ S &= \Sigma && \text{— solo parte real.} \end{aligned}$$

Señales exponenciales de acuerdo a la variable compleja

Si la variable compleja solo tiene parte real:

Tiempo continuo	**Tiempo discreto**
$s = \sigma$, $\omega = 0$	$S = \Sigma$, $\Omega = 0$
$x(t) \in \mathbb{R}$	$x[n] \in \mathbb{R}$
$x(t) = Ae^{\sigma t}$,	$x[n] = Ae^{\Sigma n}$,

Donde la función exponencial **crece** si $\sigma, \Sigma > 0$ y **decrece** si $\sigma, \Sigma < 0$.

Variable compleja $s = \sigma$

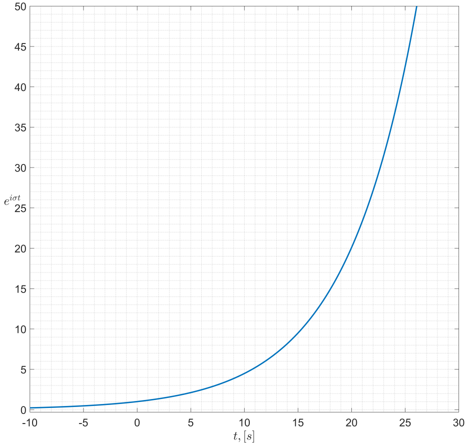


Figure 19: Función exponencial natural de tiempo continuo $e^{0.25t}$

Variable compleja $s = \Sigma$

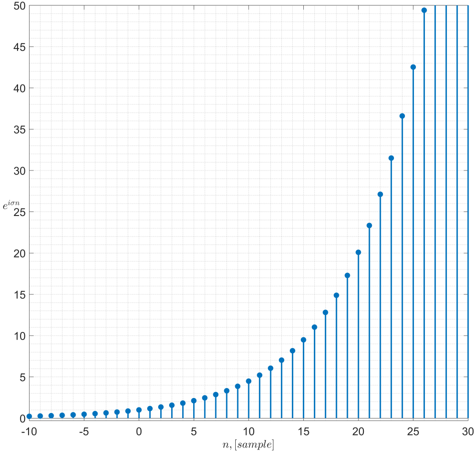


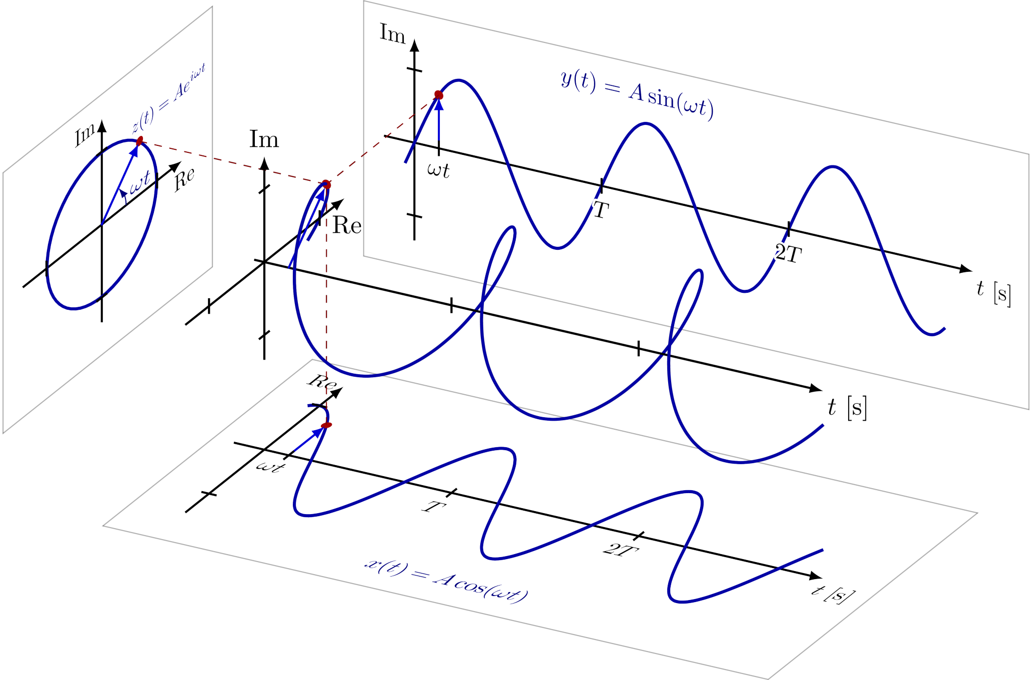
Figure 20: Función exponencial natural de tiempo discreto $e^{0.25n}$

Señales exponenciales de acuerdo a la variable compleja

Si la variable compleja solo tiene parte imaginaria:

Tiempo continuo	**Tiempo discreto**
$s = i\omega,\ \sigma = 0$	$S = i\Omega,\ \Sigma = 0$
$x(t) \in \mathbb{C}$	$x[n] \in \mathbb{C}$
$x(t) = Ae^{i\omega t} = A\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)$	$x[n] = Ae^{i\Omega n} = A\left(\cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n)\right)$

- Dentro de sus propiedades se encuentra la periodicidad, cuyo periodo fundamental
  - Tiempo continuo: $T = \mathtt{T}\{x(t)\} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
  - Tiempo discreto: $N = \mathtt{T}\{x[n])\} = \dfrac{2\pi}{\Omega}$, dónde $N \in \mathbf{Z}$.



$z(t) = Ae^{i\omega t}$
Im
Re
ωt
Im
Re
Im
$y(t) = A\sin(\omega t)$
ωt
T
$2T$
t [s]
t [s]
Re
ωt
T
$2T$
t [s]
$x(t) = A\cos(\omega t)$

Señales exponenciales de acuerdo a la variable compleja

Tiempo continuo:

Si la variable compleja tiene parte real e imaginaria, $s = \sigma + i\omega$:

$$x(t) = Ae^{(\sigma+i\omega)t} = Ae^{\sigma t}e^{i\omega t} = Ae^{\sigma t}\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right), \tag{12}$$

Tiempo discreto:

Para el caso discreto, $S = \Sigma + i\Omega$

$$s[n] = Ae^{(\Sigma+i\Omega)n} = Ae^{\Sigma n}e^{i\Omega n} = Ae^{\Sigma n}\left(\cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n)\right), \tag{13}$$

A $e^{\sigma t}$ y $e^{\Sigma n}$ se les conoce como *envolvente real* de la señal.

Variable compleja $s = \sigma + i\omega$ de tiempo continuo

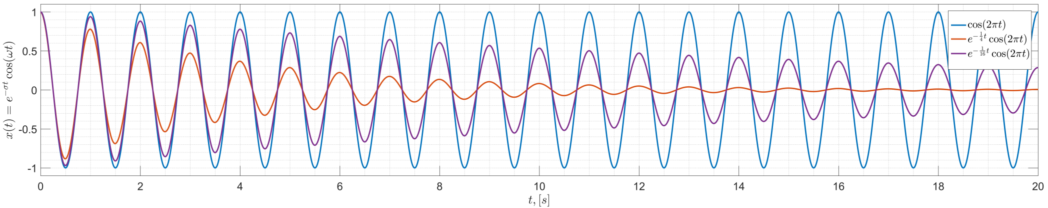


Figure 21: Funciones exponenciales complejas de tiempo continuo con distinto factor de amortiguamiento

Variable compleja $S = \Sigma + i\Omega$ de tiempo discreto

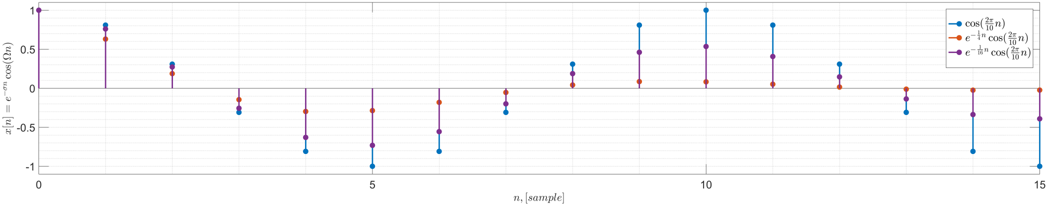


Figure 22: Funciones exponenciales complejas de tiempo discreto con distinto factor de amortiguamiento

Señales sinusoidales

Señales sinusoidales de tiempo continuo

Están ligadas a las señales exponenciales complejas. Una señal sinusoidal en el dominio del tiempo continuo puede expresarse de la forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0), \tag{14}$$

donde,	A	—	amplitud real de la señal;
	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	—	frecuencia angular $[rad/s]$;
	$T = \dfrac{1}{f}$	—	periodo fundamental $[s]$,
			que es el inverso de la frecuencia f $[Hz]$;
	ϕ_0	—	fase inicial $[rad]$, entre 0 y 2π. $\phi_0 \in \mathbb{R}$.

Señales sinusoidales de tiempo continuo

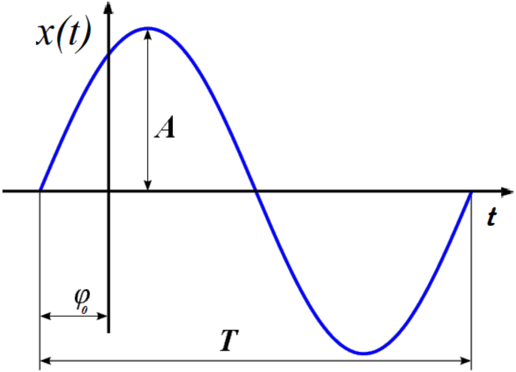


Figure 23: Parámetros de una señal sinusoidal de tiempo continuo

Señales sinusoidales de tiempo continuo

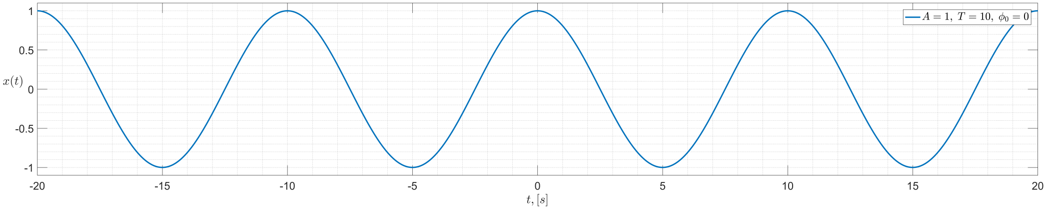
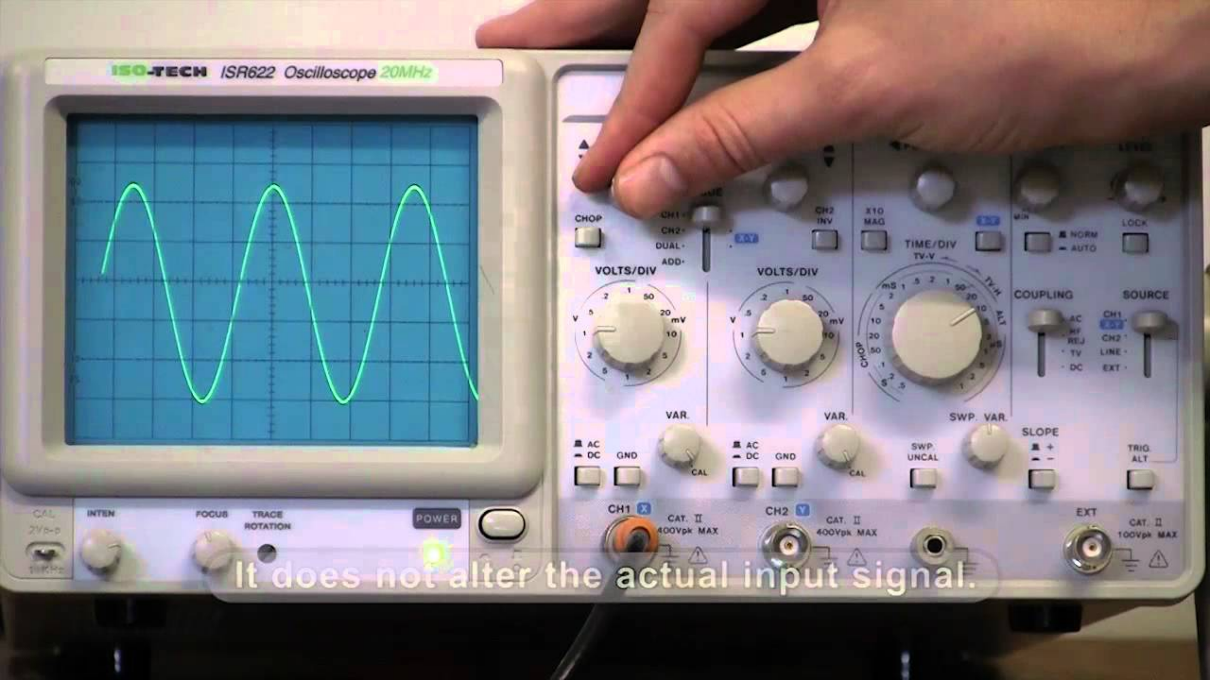


Figure 24: Función coseno para $A = 1$, $T = 10$ y $\phi_0 = 0$ de tiempo discreto


ISO-TECH ISR622 Oscilloscope 20MHz
CHOP
CH1
CH2
DUAL
ADD
CH2 INV
X10 MAG
VOLTS/DIV
VOLTS/DIV
TIME/DIV
TV-V
TV-H
COUPLING
SOURCE
NORM
AUTO
LOCK
AC
HF REJ
TV
DC
CH1
X-Y
CH2
LINE
EXT
VAR.
VAR.
SWP. VAR.
SLOPE
AC
DC
GND
CAL
SWP. UNCAL
TRIG ALT
INTEN
FOCUS
TRACE ROTATION
POWER
CH1 X
CAT. II
400Vpk MAX
CH2 Y
CAT. II
400Vpk MAX
EXT
CAT. II
100Vpk MAX
It does not alter the actual input signal.

Señales sinusoidales de tiempo discreto

Están ligadas a las señales exponenciales complejas. Una señal sinusoidal en el dominio del tiempo discreto puede expresarse de la forma:

$$s[n] = A\cos(\Omega n + \Phi_0), \tag{15}$$

donde,

A	—	amplitud real de la señal;
$\Omega = \dfrac{2\pi}{N}$	—	frecuencia angular $[rad/samples]$;
$N = \dfrac{1}{F}$	—	periodo fundamental $[samples]$, $N \in \mathbf{Z}$ que es el inverso de la frecuencia $F\,[1/samples]$;
Φ_0	—	fase inicial $[rad]$ y $\in \mathbb{R}$.

Señales sinusoidales de tiempo discreto

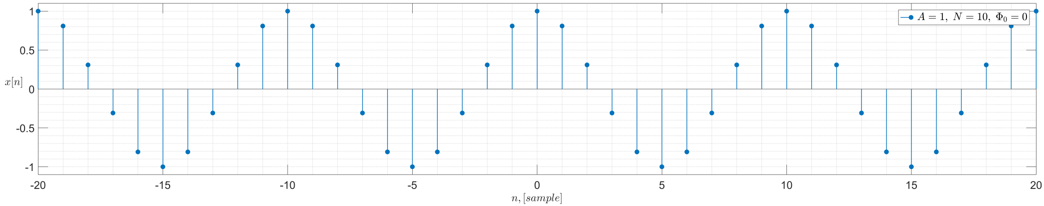


Figure 25: Función coseno para $A = 1,\ N = 10$ y $\Phi_0 = 0$ de tiempo discreto

Señales sinusoidales de tiempo discreto

De la ecuación 12, podemos deducir que $\cos$ es la parte real de esta función, y un $\sin$ sería su parte imaginaria.

$$s[n] = \Re\{Ae^{i\omega t}\} = A\cos(\omega t); \tag{16}$$

$$s[n] = \Im\{Ae^{i\Omega n}\} = A\sin(\Omega n). \tag{17}$$

Función rampa de tiempo continuo

La función rampa es una función real muy útil en el análisis de señales, presenta un solo argumento.
La definición analítica de una señal rampa:

$$\text{ramp}(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \tag{18}$$

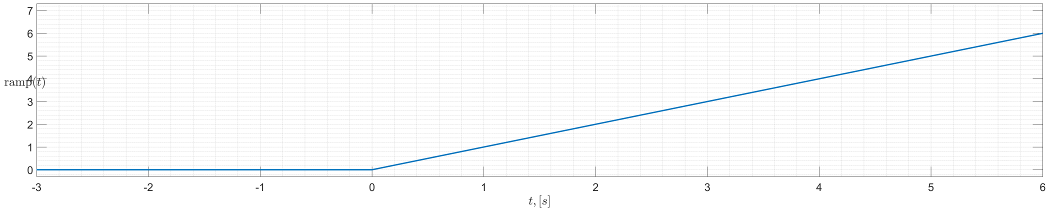


Figure 26: Función rampa de tiempo continuo

Función rampa de tiempo discreto

La definición analítica de una señal rampa:

$$\text{ramp}[n] := \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & n \geq 0 \end{cases} \tag{19}$$

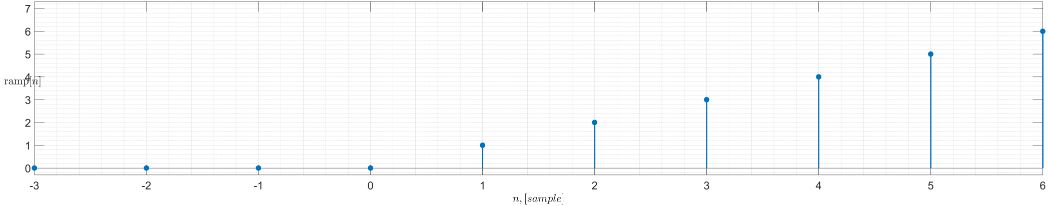


Figure 27: Función rampa de tiempo discreto

Función signo de tiempo continuo

- Una señal matemática especial que puede obtener el signo de cualquier numero real dentro en su argumento.
- Esta función esta al igual que las anteriores definida por partes (a trozos).
- Generalmente utiliza la notación $\operatorname{sgn}(t)$ para su representación.

La definición analítica de la función signo:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ -1 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases} \tag{20}$$

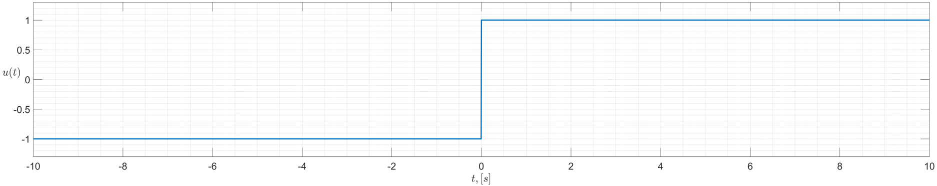


Figure 28: Función signo de tiempo continuo

Función signo de tiempo discreto

La definición analítica de la función signo:

$$\operatorname{sgn}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n > 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ -1 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases} \tag{21}$$

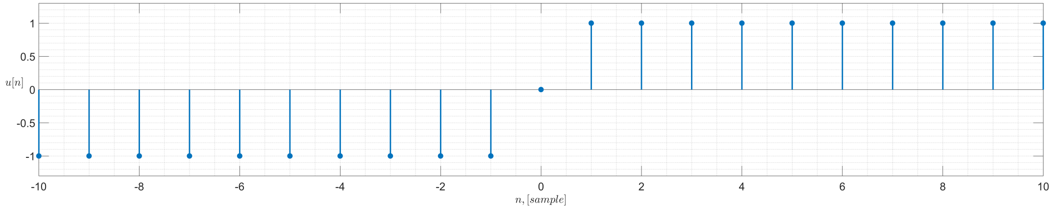


Figure 29: Función signo de tiempo continuo

Función signo

Otra forma de definir la función *signo* sería mediante:

$$\operatorname{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}, \textbf{ para } t \neq 0. \tag{22}$$

$$\operatorname{sgn}[n] = \frac{n}{|n|}, \textbf{ para } n \neq 0. \tag{23}$$

Otros tipos de funciones singulares

Otros tipos de funciones singulares de tiempo continuo

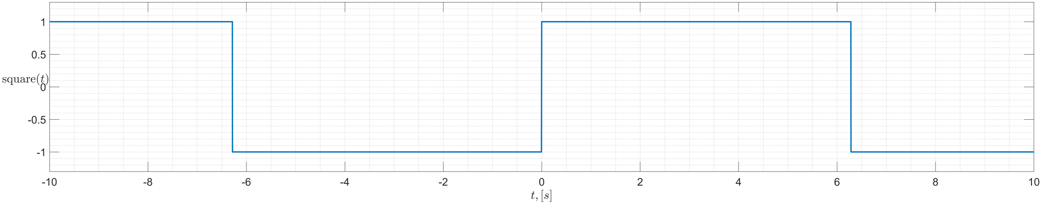


Figure 30: Square wave

Otros tipos de funciones singulares de tiempo continuo

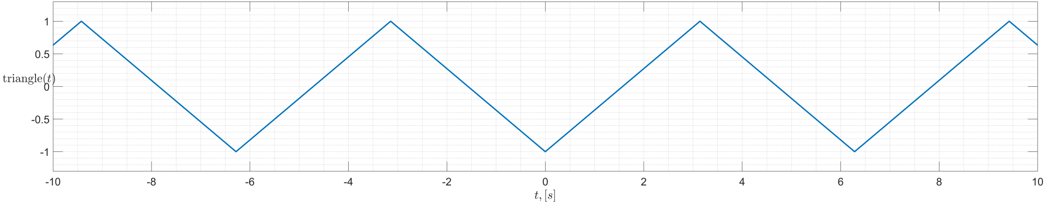


Figure 31: Sawtooth wave

Otros tipos de funciones singulares de tiempo continuo

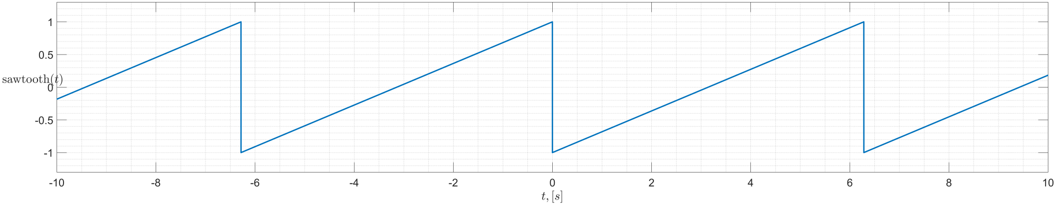


Figure 32: Triangle wave

Otros tipos de funciones singulares de tiempo discreto

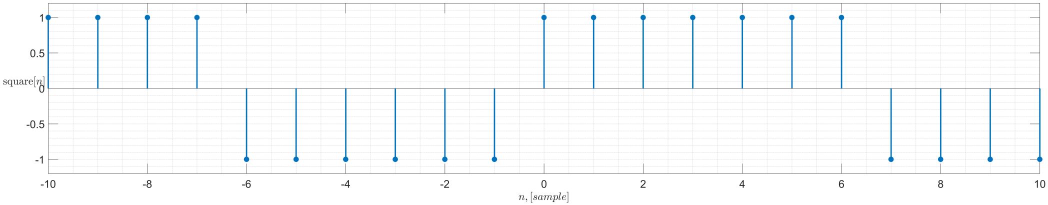


Figure 33: Square wave

Otros tipos de funciones singulares de tiempo discreto

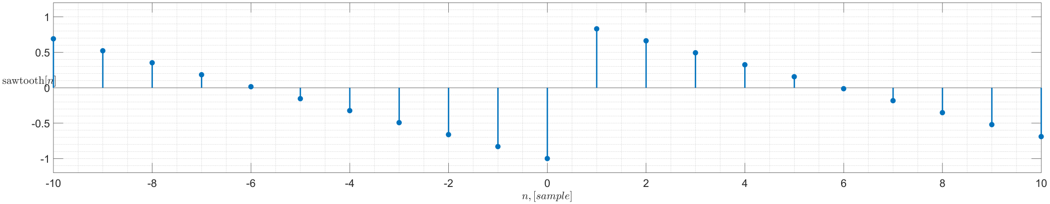


Figure 34: Sawtooth wave

Otros tipos de funciones singulares de tiempo discreto

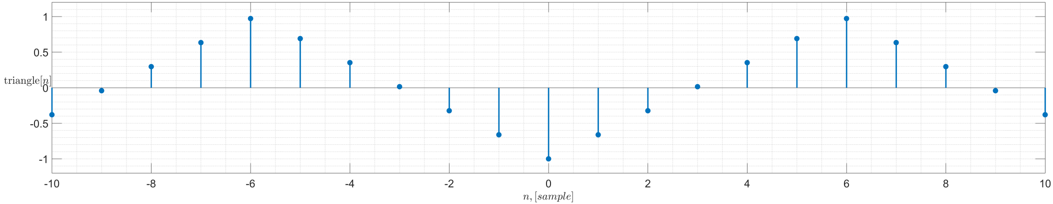


Figure 35: Triangle wave

Operaciones sobre la variable independiente

Desplazamiento en el tiempo

Esta operación solo es realizable para señales almacenadas, en otro caso es irrealizable físicamente.

Definiremos la función de corrimiento en el tiempo con el operador (*ing.* time delay):

Tiempo continuo:

$TD_{t_0}\{\bullet\}$

$$TD_{t_0}\{x(t)\} = x(t-t_0),\; t_0 \in \mathfrak{R}. \tag{24}$$

Tiempo discreto:

$TD_{n_0}\{\bullet\}$

$$TD_{n_0}\{x[n]\} = x[n-n_0],\; n_0 \in \mathbf{Z}. \tag{25}$$

Nota: prestar atención al signo negativo de la formula original.

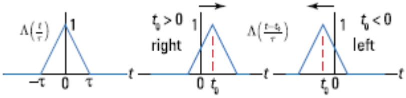


Figure 36: Desplazamiento en el tiempo para un pulso triangular

Desplazamiento en el tiempo

- si $t_0 > 0$ la señal se retrasa t_0, es decir se desplaza a la **derecha**.
- si $t_0 < 0$ la señal se adelanta t_0, es decir se desplaza a la **izquierda**.
- si $n_0 > 0$ la señal se retrasa n_0 unidades, es decir se desplaza a la **derecha**.
- si $n_0 < 0$ la señal se adelanta n_0 unidades, es decir se desplaza a la **izquierda**.

Desplazamiento en el tiempo

De forma analítica — remplazamos en la función analítica de la señal, donde quiera que se encuentre la variable n por $n - n_0$.

Forma analítica

Para la siguiente señal:

$$x[n] = 4ne^{3n}\sin(3\pi n)$$

Encontrar:

a. $x[n+2]$

Desplazamiento en el tiempo

Desplazamiento en el tiempo

Para la siguiente señal representada de forma analítica, encontrar mediante el método analítico:

$$s(t) = t^2 \ln|t| \cos(\frac{1}{4}\pi t)$$

a. $s(t-2)$

Desplazamiento en el tiempo

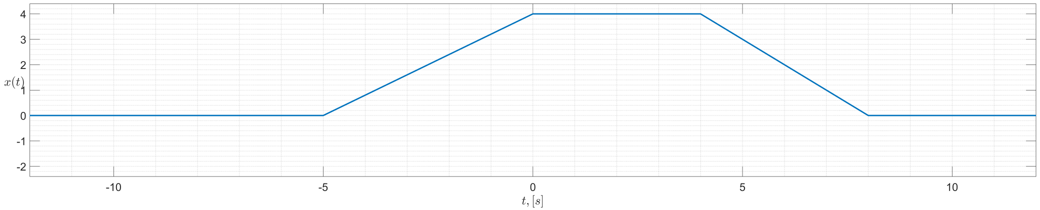
De forma gráfica — una vez contando con la representación gráfica de la señal, se corre t_0 unidades en la variable independiente la señal.

Forma gráfica

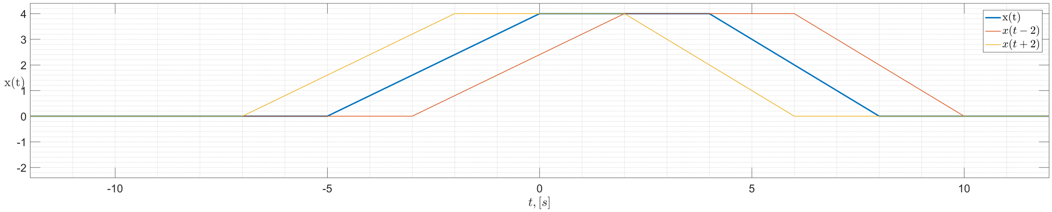
Para la siguiente señal representada de forma gráfica, encontrar mediante el método gráfico $x(t-t_0)$

a. Si $t_0 = 2$

b. Si $t_0 = -2$



Desplazamiento en el tiempo



Desplazamiento en el tiempo

Desplazamiento en el tiempo

Para la siguiente señal representada de forma gráfica (ver gráfica 37), encontrar mediante el método gráfico:

a. $x[n-2]$

b. $x[n+4]$

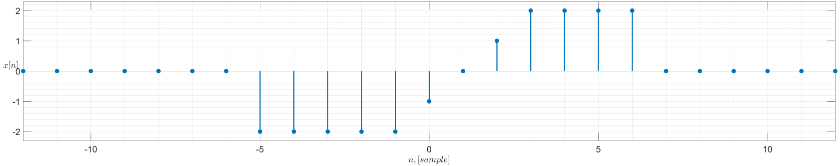


Figure 37: Señal de tiempo discreto

Reflexión en el tiempo

- Conocida también como inversión o solapamiento en el tiempo alrededor del origen.
- Consiste en reflejar alrededor del origen ($t = 0$ para CT y $n = 0$ para DT) la totalidad de la señal.
- Esta operación solo es realizable para señales almacenadas, en otro caso es irrealizable físicamente.

Definiremos la operación de reflexión en el tiempo con el operador $FD\{\bullet\}$, (*ing.* folding):

Tiempo continuo:

$$FD\{x(t)\} = x(-t). \tag{26}$$

Tiempo discreto:

$$FD\{x[n]\} = x[-n]. \tag{27}$$

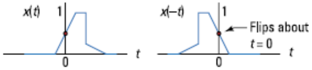


Figure 38: Reflexión en el tiempo para una señal arbitraria

Reflexión en el tiempo

De forma analítica — remplazamos en la función analítica de la señal, donde quiera que se encuentre la variable n por $-n$.

Forma analítica

Para la siguiente señal:

$$x[n] = ne^{-2n}\sin(3\pi n)$$

Encontrar $x[-n]$

De forma gráfica — una vez contando con la representación gráfica de la señal, se refleja respecto el eje de las abscisas $n = 0$.

Reflexión en el tiempo

Reflexión en el tiempo

Para la siguiente señal representada de forma analítica, encontrar $x(t)$:

$$s(t) = 2t^2 e^{|t|} \cos(3\pi t)$$

a $s(-t)$

Reflexión en el tiempo

Reflexión en el tiempo

Para la siguiente señal representada de forma gráfica, encontrar mediante el método gráfico $x[-n]$.

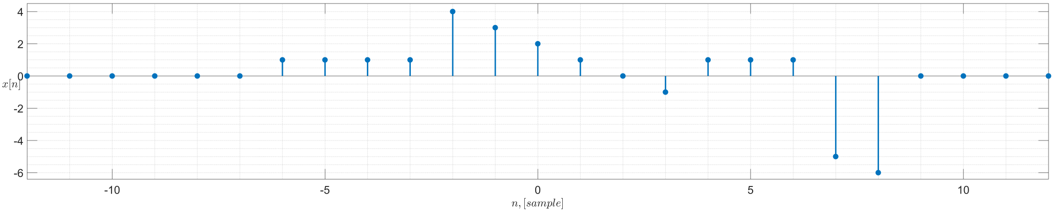


Figure 39: Señal de tiempo discreto

Reflexión en el tiempo

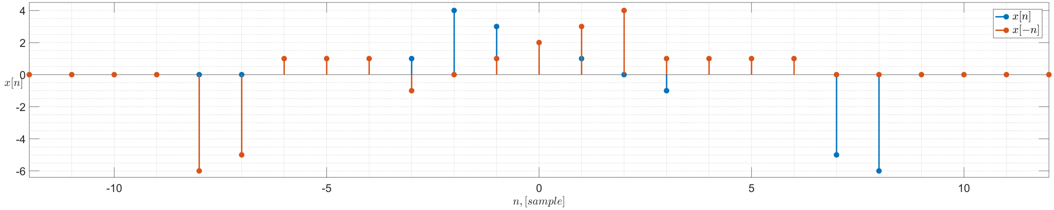


Figure 40: Señal de tiempo discreto

Escalamiento en el tiempo

- Cambio de la variable independiente $t \to at$, es decir $x(t) \to x(at)$
- Dependiendo del valor de a, la señal se ensancha o se contrae - a es constante positiva
- Definiremos la operación de escalamiento en el tiempo con el operador $TS\{\bullet\}$, (*ing.* time scaling):
  - Si $a > 1$, la señal se **contrae**
  - Si $a < 1$, la señal se **ensancha**

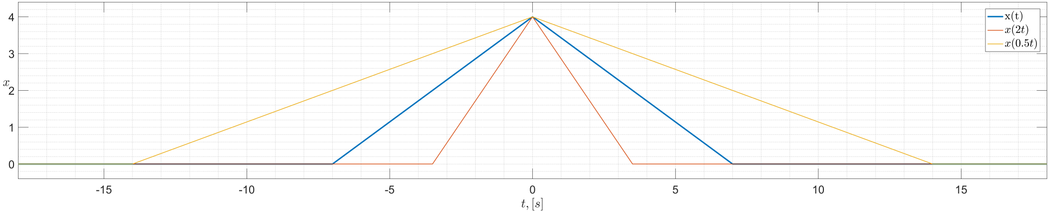


Figure 41: Escalamiento en el tiempo

Combinación de operaciones sobre la variable independiente

Tiempo continuo:

$$T\{x(t)\} = \alpha x(-at - t_0) \tag{28}$$

Tiempo discreto:

$$T\{x[n]\} = \alpha x[-n - n_0] \tag{29}$$

Para realizar esta operación de forma analítica basta con remplazar la variable independiente n, donde quiera que se encuentre, por su respectiva transformación.

Forma analítica para combinación de transformaciones

Para la siguiente señal:

$$x[n] = 3ne^{-n}u(n)$$

Encontrar $x[2-n]$

Combinación de operaciones sobre la variable independiente

De forma gráfica es mucho más fácil de realizar, solo realice las operaciones en el siguiente orden:

orden recomendado

1. Realice la operación de desplazamiento en el tiempo sobre la señal, $TD\{x\}$
2. Realice la operación de reflexión en el tiempo sobre la señal: $FD\{x\}$.
3. Escalar la señal en el dominio del tiempo, para el caso de tiempo continuo: $TS\{x\}$.
4. Modificaciones de amplitud (amplificación o atenuación), α

Para encontrar $\alpha x(-at-t_0)$ es necesario realizar:

$$\alpha x(-at-t_0) = \alpha\{TS\{FD\{TD_{t_0}\{x(t)\}\}\}\}.$$

Para encontrar $x[-n-n_0]$ es necesario realizar:

$$x[-n-n_0] = FD\{TD_{n_0}\{x[n]\}\}.$$

Combinación de operaciones sobre la variable independiente

Forma analítica para combinación de transformaciones

Dibujar las siguientes señales:

- $2u[-n]$
- $u[n+2]+2u[n]-3u[n-5]$
- $u(t)-u(t-5)$
- $\delta[n-3]+2\delta[-n]+1.5\delta[n+4]+0.5\delta[3-n]$
- $0.5t\{u(t-2)-u(t-6)\}$

Combinación de operaciones sobre la variable independiente

Forma gráfica para combinación de transformaciones

Para la siguiente señal representada en la figura 42 gráfica, encontrar mediante el método gráfico $x(-3t+2)$.

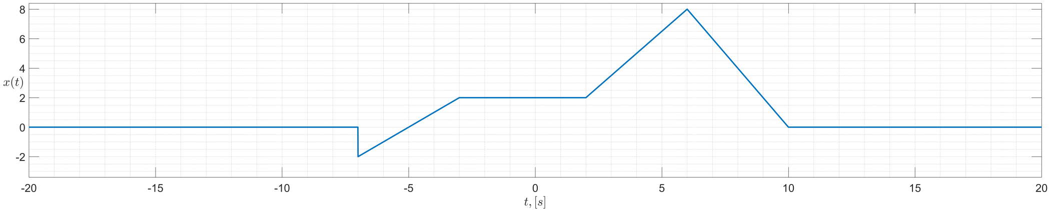


Figure 42: Señal de tiempo continuo

Combinación de operaciones sobre la variable independiente

Forma analítica para combinación de transformaciones

Dibujar las siguientes señales:

- $2e^{t}u(t)$
- $(2n+4)\{u[n+4]-u[n-5]\}$
- $5\delta(t-3)-3\delta(-2t)+\dfrac{3}{2}\delta(0.5t)+\delta(3-t)$
- $u[-n-6]-u[-n+1]$

Propiedades del impulso y el escalón unitario

Propiedades del impulso unitario de tiempo continuo

$$
\begin{aligned}
x(t)\delta(t) &= x(0)\delta(t) && \\
x(t)\delta(t-t_k) &= x(t_k)\delta(t-t_k) && \\
\delta(t) &= \delta(-t) && \text{simetría} \\
\delta(at) &= \frac{1}{|a|}\delta(t) && \text{escalamiento en el tiempo}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Propiedades del impulso unitario de tiempo continuo

Área igual a la unidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \tag{31}$$

Propiedades del impulso unitario de tiempo continuo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = x(0) \tag{32}$$

¿a que es igual?

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_k)\,\mathrm{d}t \tag{33}$$

Propiedades del impulso unitario de tiempo continuo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_k)\,\mathrm{d}t \quad = \quad x(t_k) \quad \textit{selectividad}$$

Relación entre el impulso y escalón unitario de tiempo continuo

Las señales $\delta(t)$ y $u(t)$ están relacionadas de acuerdo a la siguiente ecuación de derivadas e integrales:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}; \\ u(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int\limits_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{34}$$

Propiedades del impulso unitario de tiempo discreto

$$\begin{aligned} x[n]\delta[n] &= x[0]\delta[n]; \\ x[n]\delta[n-k] &= x[k]\delta[n-k]. \end{aligned} \tag{35}$$

Relación entre el impulso y escalón unitario de tiempo discreto

Las señales $\delta[n]$ y $u[n]$ están relacionadas de acuerdo a la siguiente ecuación de diferencias y suma:

$$\begin{aligned}\delta[n] &= u[n]-u[n-1];\\ u[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k].\end{aligned} \tag{36}$$

Representación de señal arbitraria $x(t)$

Cualquier secuencia $x(t)$ puede ser representada mediante la suma de una **secuencia Delta-dirac**, escalada con los valores de la función en los determinados momentos y corrida en el tiempo:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= x(\tau), \forall \tau.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Representación de una señal arbitraria $x(t)$

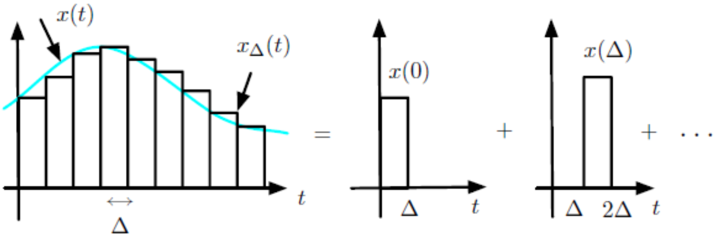


Figure 43: Representación genérica de $x(t)$ como una suma infinita de pulsos de altura $x(k\Delta)$ y base Δ

Cuando $\Delta \to 0$ la suma se vuelve una integral de *impulsos unitarios* ponderados

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{38}$$

Representación de una señal arbitraria $x[n]$

Cualquier secuencia $x[n]$ puede ser representada mediante la suma de una **secuencia Delta-dirac**, escalada con los valores de la función en los determinados momentos y corrida en el tiempo:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]. \tag{39}$$

¡Muchas gracias por su atención!

¿Preguntas?

Contacto: Marco Teran
webpage: marcoteran.github.io/
e-mail: marco.teran@usa.edu.co

UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA