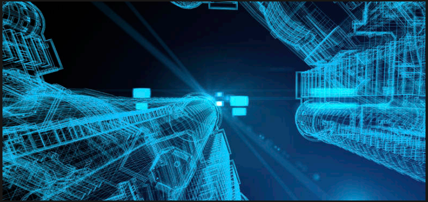
Transformada z

Teoría de Sistemas lineales



Marco Teran
Universidad Sergio Arboleda

2023

Contenido

Introducción

Introducción

- Aplicada a señales de tiempo discreto. Es la contraparte de la transformada de **Laplace**.
    - Es análoga a la transformada de Laplace (para la representación de señales de tiempo continuo).
- Representa señales de tiempo discreto en el dominio de z.
    - Donde z es la variable compleja (dominio de frecuencia compleja).

Introducción

- La transformada z convierte ecuaciones de diferencias en ecuaciones algebraicas, es decir las *linealiza* y *simplifica*.
- Se puede interpretar como una generalización de **DTFT**. Pero se amplia a un rango más amplio de señales.
- Para computar la transformada z (ZT) es necesario definir la región de convergencia (ROC, *ing.* Region Of Convergence).

Definición de la Transformada Z

Definición de la Transformada Z

La Transformada Z es una herramienta matemática que convierte una secuencia de números en una función de una variable compleja.

Formulación matemática de la Transformada Z

La Transformada Z de una secuencia discreta $x[n]$ se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

donde z es una variable compleja.

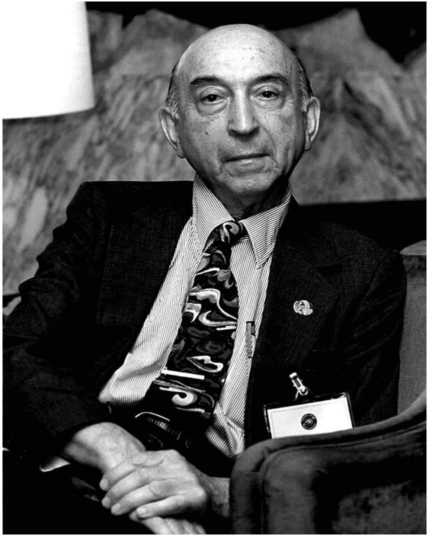
Importancia y aplicaciones en el análisis de señales y sistemas

- La Transformada Z es esencial en el análisis y diseño de **sistemas digitales** y de **control**.
- Se utiliza para modelar **sistemas de tiempo discreto** y resolver **ecuaciones en diferencias**.
- **Aplicaciones notables:** procesamiento de señales digitales, diseño de filtros digitales, análisis de sistemas de control digitales, entre otros.

Comparación con otras transformadas

- Mientras la **Transformada de Laplace** se aplica a señales **continuas**, la **Transformada Z** se utiliza para señales **discretas**.
- La **Transformada de Fourier de tiempo discreto** puede considerarse como un *caso especial* de la Transformada Z para $|z| = 1$.
- Ambas transformadas proporcionan una descripción en el dominio de la frecuencia de una señal o sistema.

Historia



- La Transformada Z fue introducida por primera vez en la literatura de control y señales por Ragazzini y Zadeh en 1952.
- La Transformada Z recibe su nombre en honor a Lotfi Aliasker Zadeh
- Esta transformación se desarrolló principalmente para el análisis y diseño de sistemas de control discretos.

Historia de la Transformada Z

- A finales de los años 50 y principios de los 60, la Transformada Z se convirtió en una herramienta fundamental en el campo de la ingeniería de sistemas y control.
- La Transformada Z permitió un enfoque más sistemático y computacionalmente eficiente para el análisis de sistemas de tiempo discreto.
- En la actualidad, la Transformada Z sigue siendo una técnica esencial en la teoría y aplicación de sistemas y señales de tiempo discreto.

Definición de la transformada z

Definición de la transformada z

Un sistema LTI con respecto al impulso $h[n]$ y salida $y[n]$ a una entrada $x[n]$:

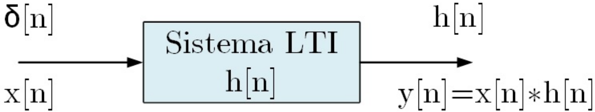


Figura 1: Diagrama de bloques respuesta al impulso

Si la entrada es

$$x[n] = z^n$$

Entonces la salida será

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{z^n\} = H(z)z^n$$

donde

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Transformada z bilateral

transformada z bilateral

$$\begin{aligned} X(z) &= Z\{x[n]\} \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \end{aligned} \tag{1}$$

donde, $z = re^{j\Omega}$ — representación polar de la variable compleja (VC);
$|z| = r$ — magnitud de la VC;
$\angle z = \Omega$ — fase de la VC (angulo).

Transformada z unilateral

transformada z unilateral

Se utiliza para casos donde $x[n] = 0$ para $n < 0$.

$$\begin{aligned} X_I(z) &= Z_I\{x[n]\} \\ X_I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Par de la transformada z

Par de la transformada z

La relación entre la secuencia de tiempo discreto $x[n]$ y su transformada z se denota por:

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \tag{3}$$

Donde la transformada z se expresa mediante

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

Conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

A continuación se muestra la conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

$$
\begin{aligned}
X(z)|_{z=re^{j\Omega}} &= X(re^{j\Omega}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}(e^{-j\Omega n}) \\
&= F\left\{x[n]r^{-n}\right\}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

En el caso $r = 1$ se representa la DTFT. Donde $z = e^{j\Omega}$.

Plano Z y Región de convergencia

Plano Z

- El plano complejo Z se representa mediante el circulo unitario de la región de convergencia.
- Si consideramos el plano Z, podemos observar que $H(e^{j\Omega})$ corresponde a evaluar $H(z)$ en el círculo unitario.

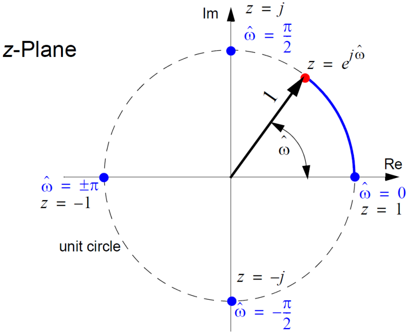


Figura 2: Circulo unitario en el plano complejo z

Región de convergencia, ROC

Región de convergencia, ROC

- La transformada z no converge para todas las secuencias. Si converge lo hace solo en la región de convergencia ROC.
- La ROC son los intervalos de valores de r para los que la variable compleja z converge.
- Es importante saber donde para que valores converge las series infinita.

Es importante saber donde para que valores converge las series infinita.
Condición de convergencia:

$$\begin{aligned} X(z) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Definición y significado de la Región de Convergencia (ROC)

Definición de la ROC

La Región de Convergencia (ROC) para una función dada por una Transformada Z es el conjunto de valores de z para los cuales la serie converge.

Significado de la ROC

La ROC es esencial para interpretar correctamente la función representada por una Transformada Z. Diferentes secuencias pueden tener la misma Transformada Z, pero difieren en su ROC.

Propiedades de la ROC

- La ROC contiene anillos en el plano z, centros en el origen.
- Si la ROC contiene el círculo unitario, entonces el sistema es estable.
- Para una secuencia causal, la ROC es exterior a un círculo de radio igual al polo de mayor magnitud.
- Para una secuencia anticausal, la ROC es interior a un círculo de radio igual al polo de menor magnitud.

Implicaciones de la ROC en la estabilidad del sistema

- La estabilidad de un sistema de tiempo discreto se puede determinar a partir de la ROC de su Transformada Z.
- Si la ROC de la Transformada Z de un sistema incluye el círculo unitario, el sistema es estable.
- Si la ROC no incluye el círculo unitario, el sistema no es estable.

Región de convergencia, ROC

Se puede apreciar que la convergencia depende exclusivamente de $|z| = r$ un círculo de radio r. A continuación ejemplos de la ROC.

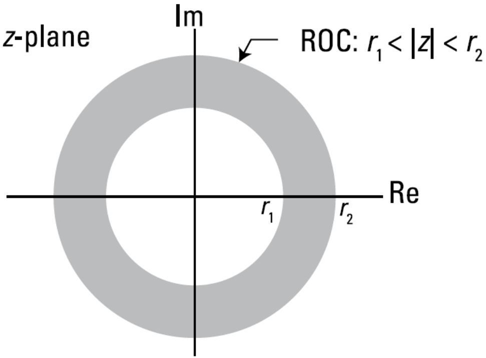


Figura 3: Generalmente la ROC es un anillo

Región de convergencia, ROC

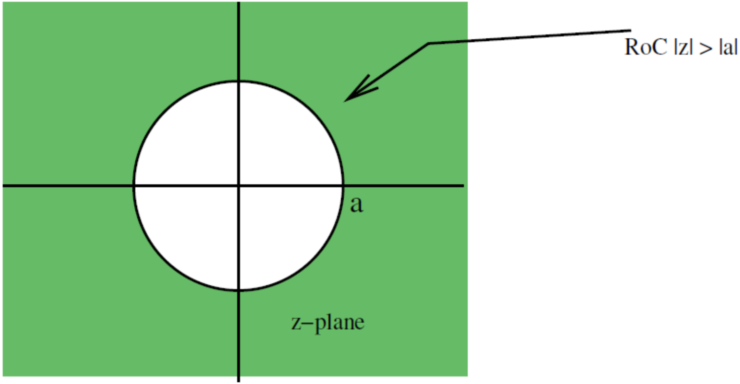


Figura 4: ROC (región verde) para una señal causal

Región de convergencia, ROC

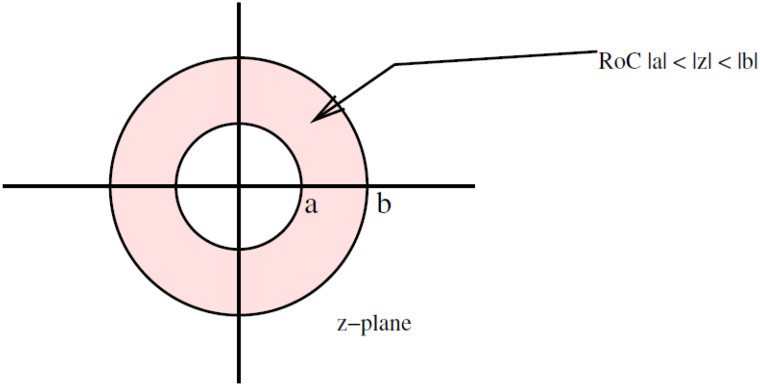


Figura 5: ROC (región de rosa) de una transformada z bilateral

Significado de la ROC

1. Cuando la ZT produce un denominador polinomio — relacionado al ROC
2. Cuando el resultado de la ROC es un racional, la ROC está relacionada a estabilidad — BIBO (*ing.* Bounded Input Bounded Output)

En este plano es posible dibujar los polos y los ceros

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{6}$$

donde, $N(z)$ — aporta los ceros "0";
$D(z)$ — aporta los polos "x".

Pasos para encontrar la ROC

Paso 1:
Utilice la definición de zT para determinar la suma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Pasos para encontrar la ROC

Paso 2:
Encuentre las condiciones de convergencia que son suministradas por la definición de una serie geométrica infinita:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n = \frac{1}{1 - |az^{-1}|} < \infty$$

lo cual determina que

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \;\rightarrow\; |z| > |a|$$

Entonces la ROC es $|z| > |a|$

Pasos para encontrar la ROC

Paso opcional:
Otra forma de encontrar la ROC es a partir del resultado de la suma de serie geométrica

$$X(z) = \frac{1}{\underbrace{1 - az^{-1}}_{\text{pots. neg. de z}}} \frac{z}{z} = \frac{z}{\underbrace{z - a}_{\text{pots. pos. de z}}}, \text{ ROC: } |z| > |a|$$

Pasos para encontrar la ROC de la Transformada Z

- Paso 1: Determinar la ecuación de la Transformada Z.
- Paso 2: Identificar los polos de la ecuación, que son los valores de z que hacen que la ecuación sea indefinida.
- Paso 3: Marcar los polos en el plano z.
- Paso 4: Identificar si la secuencia es causal (derecha), anticausal (izquierda) o de dos lados.
- Paso 5: Para una secuencia causal, la ROC es el área fuera del círculo formado por el polo de mayor magnitud. Para una secuencia anticausal, la ROC es el área dentro del círculo formado por el polo de menor magnitud.
- Paso 6: Para una secuencia de dos lados, la ROC es el anillo entre los círculos formados por los polos de mayor y menor magnitud.
- Paso 7: Verificar que el círculo unitario está incluido en la ROC para determinar si el sistema es estable.
- Paso 8: Representar la ROC en el plano z.

Transformada z: ejemplos

Transformada z: ejemplos

Ejemplo

Encontrar la transformada z de $x[n]$:

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0. \end{cases}$$

transformada z

Ejemplo

Encontrar la transformada z de $x[n]$:

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n)u[n]$$

transformada z

Ejercicio

Encontrar las transformadas z de las siguientes señales:

(a) $x[n] = \delta[n]$

(b) $s[n] = \{5, 3, \underset{\uparrow}{-2}, 0, 4, -3\}$

(c)

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}, a > 0.$$

Propiedades de la transformada z

Linealidad de la Transformada Z

Para

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$$
$$y[n] \xrightarrow{Z} Y(z)$$

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{Z} \alpha X(z) + \beta Y(z) \tag{7}$$

donde α y β son constantes.

Desplazamiento Temporal de la Transformada Z

$$x[n-n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0}X(z), \text{ donde } n_0 \in \mathbf{Z} \text{ constante.} \quad (8)$$

ROC:

$$R^{'} = R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

Casos especiales:

- $x[n-1] \xrightarrow{Z} z^{-1}X(z)$, con ROC: $R^{'} = R \cap \{0 < |z|\}$ — operador de retardo unitario.
- $x[n+1] \xrightarrow{Z} zX(z)$, con ROC: $R^{'} = R \cap \{|z| < \infty\}$ — operador de adelanto unitario.

Multiplicación por z_0^n (corrimiento en frecuencia)

Multiplicación por una Secuencia exponencial

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{9}$$

Polo o cero dependerá del valor de n. Polos o ceros en $z = z_k$ en $X(z)$. Después $z = z_0 z_k$ y la ROC se expande.
Caso especial:

- $e^{-j\Omega_0 n} x[n] \xrightarrow{Z} X\left(e^{-j\Omega_0} z\right)$, con ROC: $R' = R$ son los mismos pero girados un angulo $\angle\Omega_0$.

ROC se expande o contrae dependiendo del valor de $|z_0|$.

Inversión en el tiempo

$$x[-n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right) \tag{10}$$

Con ROC: $R^{'} = \frac{1}{R}$.

Polos en $z = z_k$ se desplazan a $z = \frac{1}{z_k}$. Implica inversión de la ROC.

Multiplicación por n (diferenciación en z)

$$nx[n] \xrightarrow{Z} -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} \tag{11}$$

Con ROC: $R^{'} = R$.

Acumulación (suma)

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}X(z) = \frac{z}{z-1}X(z) \tag{12}$$

Con ROC: $R^{'} \supset R \cap \{|z| > 1\}$.

Convolución

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z), \text{ ROC: } R_1$$
$$h[n] \xrightarrow{Z} H(z), \text{ ROC: } R_2$$

$$x[n] * h[n] \xrightarrow{Z} X(z)H(z) \tag{13}$$

Con ROC: $R^{'} \supset R_1 \cap R_2$.

Conjugación de la Transformada Z

La conjugación de una secuencia $x[n]$ produce una secuencia $y[n] = x*[n]$

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z), \text{ ROC: } R_1$$
$$x*[n] \xrightarrow{Z} X*(z*), \text{ ROC: } R_2$$

Transformada inversa de z

Definición de la Transformada Z Inversa

Definición

La Transformada Z inversa se utiliza para recuperar la señal original a partir de su representación en el dominio Z. Es el proceso de encontrar la secuencia de tiempo discreto $x[n]$ a partir de su Transformada Z $X(z)$.

Transformada Z Inversa

La transformada inversa de z se puede encontrar mediante la integral

$$x[n] = \mathfrak{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{n-1}\, \mathrm{d}z \tag{14}$$

Donde C — contorno de integración en el sentido contrario a las manecillas del reloj que encierra el origen.

Transformada Z Inversa

Como resolver:

- Uso de tablas de transformada z (aplicar fracciones parciales en lo posible).
- Expansión en series de potencias.

Es recomendable expresar la secuencia en el dominio de z de la forma:

$$x(z) = x_1(z) + x_2(z) + ... + x_n(z)$$

Método de la Expansión en Fracciones Parciales

- Este método se utiliza cuando la Transformada Z de una señal es una fracción racional y el grado del numerador es menor que el del denominador.
- Involucra la descomposición de la fracción racional en un conjunto de fracciones más simples.
- Cada una de estas fracciones más simples corresponde a una secuencia exponencial en el dominio del tiempo.

Transformada inversa de z: ejemplos

Transformada inversa de z: ejemplos

Ejercicio

Encontrar las transformadas inversas de z de las siguientes señales:

1. $$F(z) = \frac{z}{(z-3)(z+4)}$$
2. $$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}$$
3. $$H(z) = \frac{z}{(z-5)(z-2)^2}$$

Aplicación de la Transformada Z en el análisis de Sistemas LTI

Definición de Sistemas LTI y su relación con la Transformada Z

Sistemas LTI

Los Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI) son aquellos que cumplen con los principios de superposición y de invariancia temporal.

- La Transformada Z proporciona un método eficiente para el análisis de estos sistemas.
- Facilita el cálculo de la respuesta del sistema a una entrada dada.
- Es útil en el diseño y análisis de filtros digitales y sistemas de control.

Análisis de sistemas utilizando la Transformada Z

- La Transformada Z convierte las ecuaciones diferenciales que describen el sistema LTI en ecuaciones algebraicas.
- Este enfoque simplifica enormemente el análisis del sistema.
- La Transformada Z también es útil para encontrar la función de transferencia del sistema.
- Esto a su vez puede usarse para determinar la respuesta del sistema a diferentes tipos de señales de entrada.
- Por lo tanto, facilita el estudio de la estabilidad del sistema, la respuesta en frecuencia, entre otras características.

Respuesta al impulso y a la escalón

- La respuesta al impulso es la salida del sistema cuando la entrada es un impulso de Dirac.
- La Transformada Z de la respuesta al impulso es la función de transferencia del sistema.
- La respuesta al escalón es la salida del sistema cuando la entrada es una función de escalón.
- El análisis de estas respuestas proporciona información crucial sobre la dinámica del sistema.
- Ambas respuestas se pueden calcular fácilmente utilizando la Transformada Z.

Estabilidad

- La estabilidad de un sistema LTI se puede determinar utilizando la Transformada Z.
- Un sistema es estable si y solo si todos los polos de su función de transferencia se encuentran dentro del círculo unitario en el plano Z.
- Esta es una característica crucial para el diseño y análisis de sistemas de control y filtros digitales.
- Los sistemas estables son esenciales en muchas aplicaciones de ingeniería.
- La Transformada Z proporciona un enfoque sistemático para el estudio de la estabilidad de los sistemas.

Respuesta en frecuencia

- La respuesta en frecuencia es una característica crucial de los Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI) que describe cómo el sistema procesa diferentes componentes de frecuencia de la señal de entrada.
- Se obtiene al evaluar la función de transferencia del sistema (la Transformada Z de la respuesta al impulso) en el círculo unitario del plano Z.
- Para un sistema LTI discreto, la respuesta en frecuencia es periódica con un período de 2π.
- El módulo de la respuesta en frecuencia representa la atenuación que el sistema proporciona a una componente sinusoidal de la entrada, mientras que el argumento representa el desfase introducido.
- La Transformada Z proporciona una forma sistemática y eficiente de calcular la respuesta en frecuencia de los sistemas LTI.

¡Muchas gracias por su atención!

¿Preguntas?

Contacto: Marco Teran
webpage: marcoteran.github.io/
e-mail: marco.teran@usa.edu.co

UNIVERSIDAD
SERGIO ARBOLEDA