

Tema 08: Transformada z

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2018I

OUTLINE

1 Introducción

2 Definición de la transformada z

- transformada z bilateral
- transformada z unilateral
- Par de la transformada z
- Conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

3 Plano z

- Región de convergencia, ROC
 - Pasos para encontrar la ROC

4 Propiedades de la transformada z

5 Transformada inversa de z

INTRODUCCIÓN

- Aplicada a señales de tiempo discreto. Es la contraparte de la transformada de **Laplace**.
 - Es análoga a la transformada de Laplace (para la representación de señales de tiempo continuo).
- Representa señales de tiempo discreto en el dominio de z .
 - Donde z es la variable compleja (dominio de frecuencia compleja).
- La transformada z convierte ecuaciones de diferencias en ecuaciones algebraicas, es decir las *linealiza y simplifica*.
- Se puede interpretar como una generalización de **DTFT**. Pero se amplía a un rango más amplio de señales.
- Para computar la transformada z (ZT) es necesario definir la región de convergencia (ROC, *ing.* Region Of Convergence).

DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA Z

Un sistema LTI con respecto al impulso $h[n]$ y salida $y[n]$ a una entrada $x[n]$:

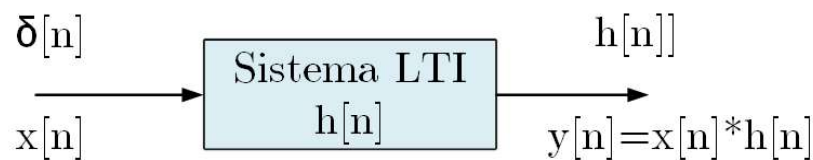


Figura 1: Diagrama de bloques respuesta al impulso

Si la entrada es

$$x[n] = z^n$$

Entonces la salida será

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{z^n\} = H(z)z^n$$

donde

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

TRANSFORMADA Z BILATERAL

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\{x[n]\} \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}. \end{aligned} \tag{1}$$

donde, $z = re^{j\Omega}$ — representación polar de la variable compleja (VC);
 $|z| = r$ — magnitud de la VC;
 $\angle z = \Omega$ — fase de la VC (angulo).

TRANSFORMADA Z UNILATERAL

Se utiliza para casos donde $x[n] = 0$ para $n < 0$.

$$\begin{aligned}
 X_I(z) &= Z_I \{x[n]\} \\
 X_I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

PAR DE LA TRANSFORMADA Z

La relación entre la secuencia de tiempo discreto $x[n]$ y su transformada z se denota por:

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \quad (3)$$

Donde la transformada z se expresa mediante

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

CONEXIÓN CON LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

A continuación se muestra la conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

$$\begin{aligned}
 X(z)|_{z=re^{j\Omega}} &= X(re^{j\Omega}) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}(e^{-j\Omega n}) \\
 &= F\{x[n]r^{-n}\}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

En el caso $r = 1$ se representa la DTFT. Donde $z = e^{j\Omega}$.

PLANO Z

- El plano complejo Z se representa mediante el círculo unitario de la región de convergencia.
- Si consideramos el plano z, podemos observar que $H(e^{j\Omega})$ corresponde a evaluar $H(z)$ en el círculo unitario.

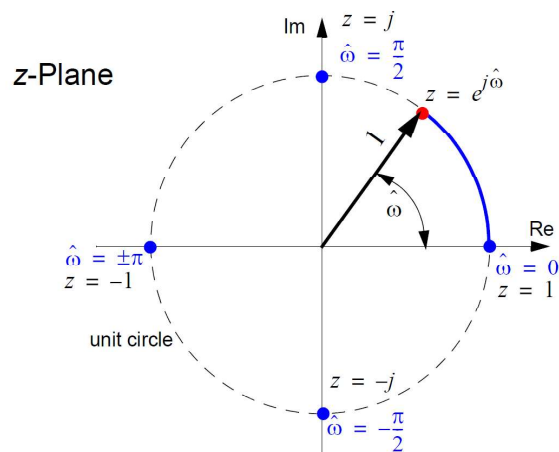


Figura 2: Círculo unitario en el plano complejo z

REGIÓN DE CONVERGENCIA, ROC

- La transformada z no converge para todas las secuencias. Si converge lo hace solo en la región de convergencia ROC.
- La ROC son los intervalos de valores de r para los que la variable compleja z converge.
- Es importante saber donde para que valores converge las series infinita.

Es importante saber donde para que valores converge las series infinita.

Condición de convergencia:

$$\begin{aligned}
 X(z) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

REGIÓN DE CONVERGENCIA, ROC

Se puede apreciar que la convergencia depende exclusivamente de $|z| = r$ un círculo de radio r .
A continuación ejemplos de la ROC.

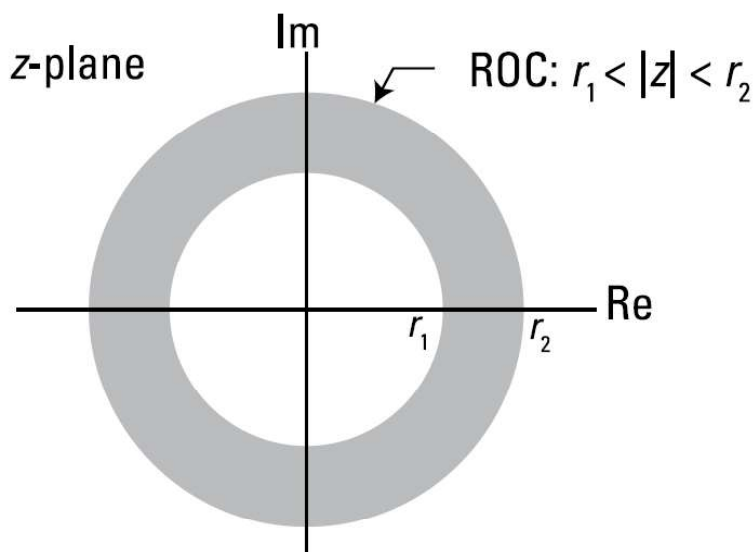


Figura 3: Generalmente la ROC es un anillo

REGIÓN DE CONVERGENCIA, ROC

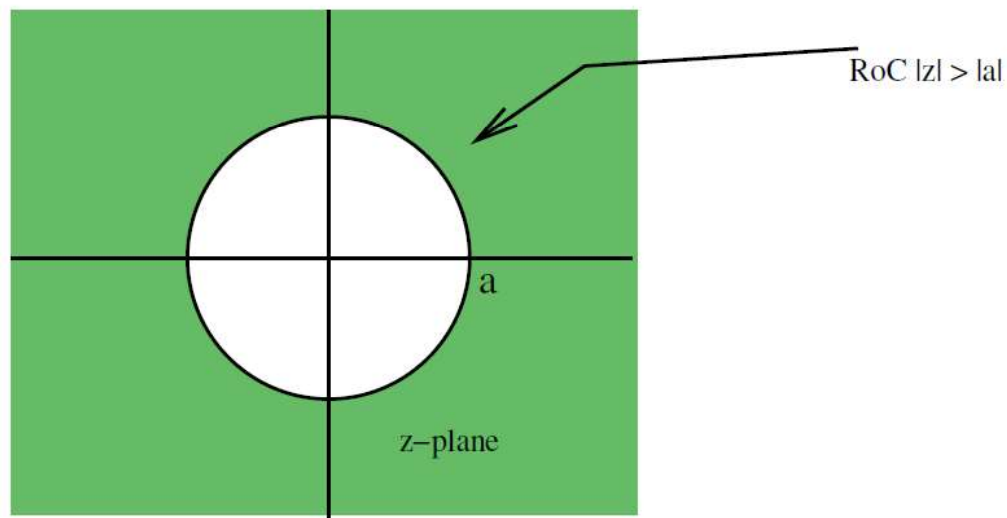


Figura 4: ROC (región verde) para una señal causal

REGIÓN DE CONVERGENCIA, ROC

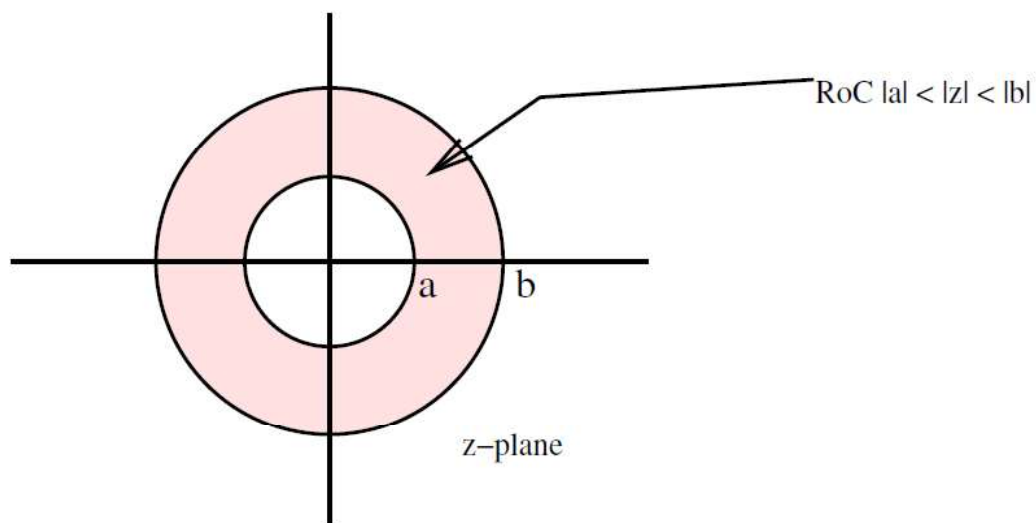


Figura 5: ROC (región de rosa) de una transformada z bilateral

SIGNIFICADO DE LA ROC

- 1 Cuando la ZT produce un denominador polinomio — relacionado al ROC
- 2 Cuando el resultado de la ROC es un racional, la ROC está relacionada a estabilidad — BIBO (*ing.* Bounded Input Bounded Output)

En este plano es posible dibujar los polos y los ceros

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (6)$$

donde, $N(z)$ — aporta los ceros "0";
 $D(z)$ — aporta los polos "x".

PASOS PARA ENCONTRAR LA ROC

Utilice la definición de zT para determinar la suma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

PASOS PARA ENCONTRAR LA ROC

Encuentre las condiciones de convergencia que son suministradas por la definición de una serie geométrica infinita:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n = \frac{1}{1 - |az^{-1}|} < \infty$$

lo cual determina que

$$\left| \frac{a}{z} \right| < 1 \rightarrow |z| > |a|$$

Entonces la ROC es $|z| > |a|$

PASOS PARA ENCONTRAR LA ROC

Otra forma de encontrar la ROC es a partir del resultado de la suma de serie geométrica

$$X(z) = \frac{1}{\underbrace{1 - az^{-1}}_{\text{pots. neg. de } z}} \frac{z}{z} = \frac{z}{\underbrace{z - a}_{\text{pots. pos. de } z}}, \text{ ROC: } |z| > |a|$$

TRANSFORMADA Z

Ejemplo

Encontrar la transformada z de $x[n]$:

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0. \end{cases}$$

TRANSFORMADA Z

Ejemplo

Encontrar la transformada z de $x[n]$:

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n)u[n]$$

TRANSFORMADA Z

Ejercicio

Encontrar las transformadas z de las siguientes señales:

(a) $x[n] = \delta[n]$

(b) $s[n] = \{5, 3, -2, 0, 4, -3\}$
↑

(c)

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}, a > 0.$$

LINEALIDAD

Para

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$$

$$y[n] \xrightarrow{Z} Y(z)$$

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{Z} \alpha X(z) + \beta Y(z) \quad (7)$$

donde α y β son constantes.

DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x[n - n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z), \text{ donde } n_0 \in \mathbb{Z} \text{ constante.} \quad (8)$$

ROC:

$$R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

Casos especiales:

- $x[n - 1] \xrightarrow{Z} z^{-1} X(z)$, con ROC: $R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\}$ — operador de retardo unitario.
- $x[n + 1] \xrightarrow{Z} z X(z)$, con ROC: $R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\}$ — operador de adelanto unitario.

MULTIPLICACIÓN POR z_0^n (CORRIMIENTO EN FRECUENCIA)

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (9)$$

Polo o cero dependerá del valor de n . Polos o ceros en $z = z_k$ en $X(z)$. Después $z = z_0 z_k$ y la ROC se expande.

Caso especial:

- $e^{-j\Omega_0 n} x[n] \xrightarrow{Z} X\left(e^{-j\Omega_0} z\right)$, con ROC: $R' = R$ son los mismos pero girados un ángulo $\angle \Omega_0$.

ROC se expande o contrae dependiendo del valor de $|z_0|$.

INVERSIÓN EN EL TIEMPO

$$x[-n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad (10)$$

Con ROC: $R' = \frac{1}{R}$.

Polos en $z = z_k$ se desplazan a $z = \frac{1}{z_k}$. Implica inversión de la ROC.

MULTIPLICACIÓN POR N (DIFERENCIACIÓN EN Z)

$$nx[n] \xrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (11)$$

Con ROC: $R' = R$.

ACUMULACIÓN (SUMA)

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) = \frac{z}{z-1} X(z) \quad (12)$$

Con ROC: $R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$.

CONVOLUCIÓN

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z), \text{ ROC: } R_1$$

$$y[n] \xrightarrow{Z} Y(z), \text{ ROC: } R_2$$

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{Z} X(z)Y(z) \quad (13)$$

Con ROC: $R' \supset R_1 \cap R_2$.

TRANSFORMADA INVERSA DE Z

La transformada inversa de z se puede encontrar mediante la integral

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (14)$$

Donde C — contorno de integración en el sentido contrario a las manecillas del reloj que encierra el origen.

Como resolver:

- Uso de tablas de transformada z (aplicar fracciones parciales en lo posible).
- Expansión en series de potencias.

Es recomendable expresar la secuencia en el dominio de z de la forma:

$$x(z) = x_1(z) + x_2(z) + \dots + x_n(z)$$

TRANSFORMADA INVERSA DE Z

Ejercicio

Encontrar las transformadas inversas de z de las siguientes señales:

$$\mathbf{1} \quad S(z) = \frac{z}{(z-3)(z+4)}$$

$$\mathbf{2} \quad X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}$$

$$\mathbf{3} \quad T(z) = \frac{z}{(z-5)(z-2)^2}$$