# Tema 08: Transformada z

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería Universidad Sergio Arboleda

2018

Marco Teran 2018**I** Transformada z 1 / 34



Introducció

Definición de la transformada :

Propiedades de la transformada z 0000000 Transformada inversa de z

#### OUTLINE

- 1 Introducción
- 2 Definición de la transformada z
  - transformada z bilateral
  - transformada z unilateral
  - Par de la transformada z
  - Conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto
- 3 Plano z
  - Región de convergencia, ROC
    - Pasos para encontrar la ROC
- 4 Propiedades de la transformada z
- 5 Transformada inversa de z

 Marco Teran
 2018
 Transformada z
 2 / 34

#### Introducción

- Aplicada a señales de tiempo discreto. Es la contraparte de la transformada de Laplace.
  - Es análoga a la transformada de Laplace (para la representación de señales de tiempo continuo).
- Representa señales de tiempo discreto en el dominio de z.
  - Donde z es la variable compleja (dominio de frecuencia compleja).
- La transformada z convierte ecuaciones de diferencias en ecuaciones algebraicas, es decir las *linealiza* y *simplifica*.
- Se puede interpretar como una generalización de **DTFT**. Pero se amplia a un rango más amplio de señales.
- Para computar la transformada z (ZT) es necesario definir la región de convergencia (ROC, *ing*. Region Of Convergence).

 Marco Teran
 2018
 Transformada z
 4 / 3·

OOOOOOO

Transformada inversa de z

### Definición de la transformada z

Un sistema LTI con respecto al impulso h[n] y salida y[n] a una entrada x[n]:

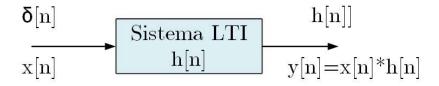


Figura 1: Diagrama de bloques respuesa al impulso

Si la entrada es

$$x[n] = z^n$$

Entonces la salida será

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{z^n\} = H(z)z^n$$

donde

$$H(z) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 6 /

transformada z bilateral

Definición de la transformada z 00000

#### TRANSFORMADA Z BILATERAL

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$
(1)

donde,  $z=re^{j\Omega}$  — representación polar de la variable compleja (VC); |z|=r — magnitud de la VC;  $\angle z=\Omega$  — fase de la VC (angulo).

Marco Teran Transformada z 0

Introducciór O Definición de la transformada z ○○●○○

OOOOOOOOOOO

Propiedades de la transformada z 0000000 Transformada inversa de z

rancformada z unilatoral

#### TRANSFORMADA Z UNILATERAL

Se utiliza para casos donde x[n] = 0 para n < 0.

$$X_I(z) = Z_I \{x[n]\}$$
  
 $X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}.$  (2)

 Marco Teran
 2018
 Transformada z
 8 /

0

Introducción O Definición de la transformada z

Propiedades de la transformada z OOOOOO Transformada inversa de z

Par de la transformada z

# Par de la transformada z

La relación entre la secuencia de tiempo discreto x[n] y su transformada z se denota por:

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \tag{3}$$

Donde la transformada z se expresa mediante

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Marco Teran 2018l Transformada z 9 / 3

Introduccion

Definición de la transformada z ○○○○●

Propiedades de la transformada

ransformada inversa de : DO

Conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

# Conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

A continuación se muestra la conexión con la transformada de Fourier de tiempo discreto

$$X(z)|_{z=re^{j\Omega}} = X(re^{j\Omega})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}(e^{-j\Omega n})$$

$$= F\{x[n]r^{-n}\}.$$
(4)

En el caso r=1 se representa la DTFT. Donde  $z=e^{j\Omega}$ .

 Marco Teran
 2018
 Transformada z
 10 / 3

### Plano z

- El plano complejo Z se representa mediante el circulo unitario de la región de convergencia.
- Si consideramos el plano z, podemos observar que  $H(e^{j\Omega})$  corresponde a evaluar H(z) en el círculo unitario.

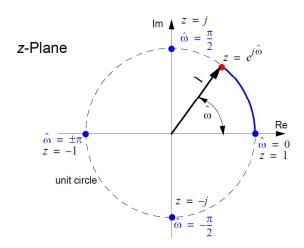


Figura 2: Circulo unitario en el plano complejo z

 Marco Teran
 2018
 Transformada z
 12 / 3

### Región de convergencia, ROC

- La transformada z no converge para todas las secuencias. Si converge lo hace solo en la región de convergencia ROC.
- La ROC son los intervalos de valores de r para los que la variable compleja z converge.
- Es importante saber donde para que valores converge las series infinita.

Es importante saber donde para que valores converge las series infinita. Condición de convergencia:

$$X(z) \le \sum_{n = -\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| = \sum_{n = -\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n}$$

$$= \sum_{n = -\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty.$$
(5)

Marco Teran Transformada : Outline Intro

Región de convergencia, ROC

ón Definición de la transform 00000 Plano z ○0●000000000

OOOOOO

Fransformada inversa de : DO

# REGIÓN DE CONVERGENCIA, ROC

Se puede apreciar que la convergencia depende exclusivamente de |z|=r un círculo de radio r. A continuación ejemplos de la ROC.

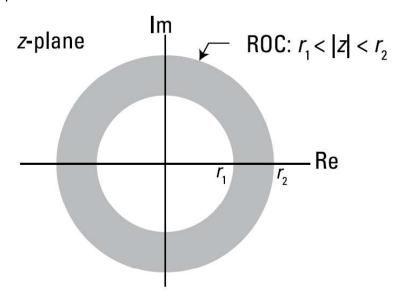


Figura 3: Generalmente la ROC es un anillo

Marco Teran 2018l Transformada z

# Región de convergencia, ROC

Región de convergencia, ROC

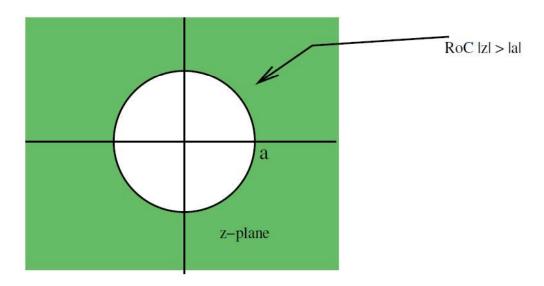


Figura 4: ROC (región verde) para una señal causal

Marco Teran 2018**I** Transformada z 15/3

Outline Introducci

Definición de la transformada

Plano z ○000●0000000

Propiedades de la transformada : 2000000 Transformada inversa de z

Región de convergencia, ROC

RECIÓN DE CONVE

# Región de convergencia, ROC

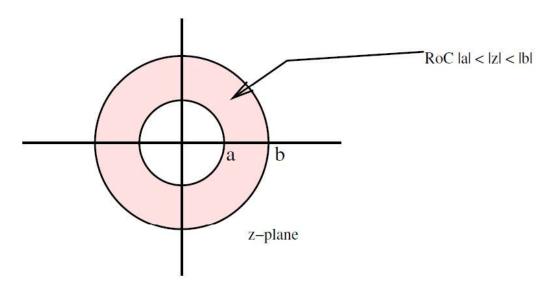


Figura 5: ROC (región de rosa) de una transformada z bilateral

 Marco Teran
 2018
 Transformada z
 16 /

Plano z 000000000000

Propiedades de la transformada 000000

Transformada inversa de z

Región de convergencia, ROC

#### Significado de la ROC

- 1 Cuando la ZT produce un denominador polinomio relacionado al ROC
- 2 Cuando el resultado de la ROC es un racional, la ROC está relacionada a estabilidad BIBO (ing. Bounded Input Bounded Output)

En este plano es posible dibujar los polos y los ceros

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$
 (6)

donde, N(z) — aporta los ceros "0"; D(z) — aporta los polos "x".

Marco Teran 2018 Transformada z 17 /

Introduccion O Definición de la transformada

Plano z ○00000●00000

Propiedades de la transformada

Transformada inversa de z OO

Región de convergencia, ROC

### Pasos para encontrar la ROC

Utilice la definición de zT para determinar la suma:

$$X(z) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n = 0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Marco Teran 2018 Transformada z

Outilité

Introducción O Definición de la transformada

Plano z 0000000000000

Propiedades de la transformada

Transformada inversa de z

Región de convergencia, ROC

# Pasos para encontrar la ROC

Encuentre las condiciones de convergencia que son suministradas por la definición de una serie geométrica infinita:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n = \frac{1}{1 - |az^{-1}|} < \infty$$

lo cual determina que

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \to |z| > |a|$$

Entonces la ROC es |z| > |a|

Marco Teran 2018 Transformada z 19 / 3

Introducción O Definición de la transformada

Plano z ○0000000●000

Propiedades de la transformada 2 000000 Transformada inversa de z OO

Región de convergencia, ROC

### Pasos para encontrar la ROC

Otra forma de encontrar la ROC es a partir del resultado de la suma de serie geométrica

$$X(z) = \frac{1}{\underbrace{1 - az^{-1}}_{\text{pots. neg. de z}}} \frac{z}{z} = \frac{z}{\underbrace{z - a}_{\text{pots. pos. de z}}}, \text{ ROC: } |z| > |a|$$

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 20 /

Introduccion O Definición de la transformada

Plano z 00000000000000

Propiedades de la transformada 000000

Fransformada inversa de :

Región de convergencia, ROC

#### TRANSFORMADA Z

### Ejemplo

Encontrar la transformada z de x[n]:

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0. \end{cases}$$

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 21 / 3

Introducción O Definición de la transformada :

Plano z 000000000000

Propiedades de la transformada

Fransformada inversa de :

Región de convergencia, ROC

#### TRANSFORMADA Z

# Ejemplo

Encontrar la transformada z de x[n]:

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n) u[n]$$

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 22 / 3

Outime

Introducción O Definición de la transformada

Plano z 00000000000

Propiedades de la transformada 000000

ransformada inversa de

Región de convergencia, ROC

#### TRANSFORMADA Z

#### Ejercicio

Encontrar las transformadas z de las siguientes señales:

(a) 
$$x[n] = \delta[n]$$

**(b** 
$$s[n] = \{5, 3, -2, 0, 4, -3\}$$

(c)

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & \text{para } 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}, a > 0.$$

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 23 / 3

Introducción

Definición de la transformada z

OOOOOOOOOOO

Propiedades de la transformada z ●000000

Fransformada inversa de : DO

### LINEALIDAD

Para

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$$

$$y[n] \xrightarrow{Z} Y(z)$$

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{Z} \alpha X(z) + \beta Y(z)$$
(7)

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes.

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 25 / 3

Introducción O Definición de la transformada :

Plano z 000000000000 Propiedades de la transformada z ○○○○○○○

Transformada inversa de z OO

### Desplazamiento en el tiempo

$$x[n-n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$$
, donde  $n_0 \in \mathbb{Z}$  constante. (8)

ROC:

$$R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\}$$

Casos especiales:

- $lacksquare x[n-1] \xrightarrow{Z} z^{-1}X(z)$ , con ROC:  $R' = R \cap \{0 < |z|\}$  operador de retardo unitario.
- $x[n+1] \xrightarrow{Z} zX(z)$ , con ROC:  $R' = R \cap \{|z| < \infty\}$  operador de adelanto unitario.

Marco Teran 2018l Transformada z 26 / 3

Introducció

Definición de la transformada :

O00000000000

Propiedades de la transformada z 000000

Transformada inversa de z

# Multiplicación por $z_0^n$ (corrimiento en frecuencia)

$$z_0^n x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{9}$$

Polo o cero dependerá del valor de n. Polos o ceros en  $z=z_k$  en X(z). Después  $z=z_0z_k$  y la ROC se expande.

Caso especial:

 $lacksquare e^{-j\Omega_0 n}x[n] \stackrel{Z}{ o} X\left(e^{-j\Omega_0}z
ight)$ , con ROC: R'=R son los mismos pero girados un angulo  $\angle\Omega_0$ .

ROC se expande o contrae dependiendo del valor de  $|z_0|$ .

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 27 /

Introducció O Definición de la transformada z

Propiedades de la transformada z ○○○●○○○

Transformada inversa de z OO

# Inversión en el tiempo

$$x[-n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right) \tag{10}$$

Con ROC:  $R' = \frac{1}{R}$ .

Polos en  $z = z_k$  se desplazan a  $z = \frac{1}{z_k}$ . Implica inversión de la ROC.

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 28 / 3

Outille

Introducción O Definición de la transformada z

Plano z 000000000000 Propiedades de la transformada z 0000€00

Transformada inversa de z

# Multiplicación por n (diferenciación en z)

$$nx[n] \xrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$
 (11)

Con ROC: R' = R.

 Marco Teran
 2018
 Transformada z
 29 / 34

Introducción

Definición de la transformada a

Plano z 000000000000 Propiedades de la transformada z ○○○○○○ Transformada inversa de z

# Acumulación (suma)

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$$
 (12)

Con ROC:  $R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$ .

 Marco Teran
 2018I
 Transformada z
 30 / 3

Introducción O Definición de la transformada z

Plano z 000000000000 Propiedades de la transformada z ○○○○○○

Transformada inversa de z OO

(13)

# Convolución

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$$
, ROC:  $R_1$ 

$$y[n] \xrightarrow{Z} Y(z)$$
, ROC:  $R_2$ 

$$x[n] * y[n] \xrightarrow{Z} X(z)Y(z)$$

Con ROC:  $R' \supset R_1 \cap R_2$ .

 Marco Teran
 2018
 Transformada z
 31 / 3

#### Transformada inversa de z

La transformada inversa de z se puede encontrar mediante la integral

$$x[n] = 3^{-1} \{X(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$
 (14)

Donde C — contorno de integración en el sentido contrario a las manecillas del reloj que encierra el origen.

Como resolver:

- Uso de tablas de transformada z (aplicar fracciones parciales en lo posible).
- Expansión en series de potencias.

Es recomendable expresar la secuencia en el dominio de z de la forma:

$$x(z) = x_1(z) + x_2(z) + ... + x_n(z)$$

Marco Teran 2018l Transformada z 33 /

Transformada inversa de z

### Transformada inversa de z

#### Ejercicio

Encontrar las transformadas inversas de z de las siguientes señales:

$$S(z) = \frac{z}{(z-3)(z+4)}$$

2 
$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})^2}$$
  
3  $T(z) = \frac{z}{(z - 5)(z - 2)^2}$ 

$$T(z) = \frac{z}{(z-5)(z-2)^2}$$

Marco Teran Transformada z