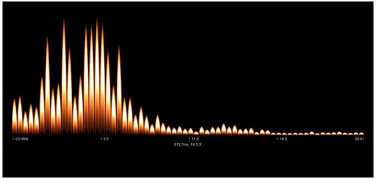
Tema 08: Transformada de Laplace

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2019I

Outline

Introducción

Historia

Pierre-Simon Laplace (Francia, 28 de marzo de 1749 – -París, 5 de marzo de 1827), Astrónomo y matemático francés de origen humilde. Presentó la transformada que lleva su nombre en 1779, aplicada a la resolución de ecuaciones diferenciales.

Figura 1: Pierre-Simon Laplace.

Introducción

- Sistemas que se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales (*técnicas de análisis*)
- Convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas (*facilita solución*)
- Dominio temporal $\rightarrow$ Dominio frecuencial $\rightarrow$ solución $\rightarrow$ dominio temporal
- Permite trabajar con las condiciones iniciales de los sistemas

Trasnformada de Laplace

Herramienta matemática que permite la *representación alternativa* de las señales y los sistemas LTI: del dominio del tiempo continuo al dominio de la **variable compleja** s, mediante una integral de transformación.

Definición de la Transformada de Laplace

- Transformar una señal $x(t)$ del dominio del tiempo continuo t al dominio de la variable compleja s

La transformada de Laplace (LT, *ing.* Laplace transform) se denota en términos de una integral de transformación:

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

donde,

donde,	$\mathfrak{L}\{\cdot\}$	—	operador de la transformada de Laplace;
	$X(s)$	—	transformada de Laplace de $x(t)$;
	$s = \sigma + j\omega$	—	variable compleja;
	$\sigma = \Re\{s\}$	—	parte real de s;
	$\omega = \Im\{s\}$	—	parte imaginaría de s.

- Se le conoce como Transformada de Laplace bilateral (dos lados)
- st es adimensional. s, $[s^{-1}]$

Definición de la Transformada de Laplace: Transformada de Laplace unilateral

- De un extremo (lado)

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

donde, $0^- = \lim_{\varepsilon \to 0} [0 - \varepsilon]$ — tiempo justo antes de $t = 0$

- $X(s) = X_I(s)$ si $x(t) = 0$ para $t < 0$

Condición de existencia de la Transformada de Laplace

- $x(t)$ es una señal, función real de la variable independiente continua t (tiempo, coordenadas, etc.)

La Transformada de Laplace **existe**, si se cumplen las siguientes condiciones (*condiciones de Dirichlet*):

- $x(t) = 0$, para $t < 0$
- $x(t)$ es continua a tramos para $t \geq 0$:
  - Contiene discontinuidades de primer orden en cada subintervalo de t
  - El numero de discontinuidades y de maximos y minimos es finito.
- Existe $M > 0$ y un $\sigma \geq 0$, que para todos los valores de t, se cumple la condición:

$$|x(t)| \leq Me^{\sigma t} \tag{3}$$

  σ — exponente de crecimiento de $x(t)$
- Estas propiedades se cumplen en casi todos los procesos físicos
- La señal se multiplica por un exponencial que acota la función en sus valores extremos

$$Me^{-\sigma t}|x(t)| \to 0, \text{ si } t \to \infty \tag{4}$$

Transformada de Laplace: Ejemplos

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace de

$$x(t) = u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace de

$$x(t) = \delta(t)$$

Región de convergencia

- La LT usualmente no converge para todo el plano complejo s

Región de convergencia

Intervalo de valores de la variable compleja s, para los cuales la transformada de Laplace converge.
ROC — region of convergence

- La convergencia depende solamente de $\Re s = \sigma$

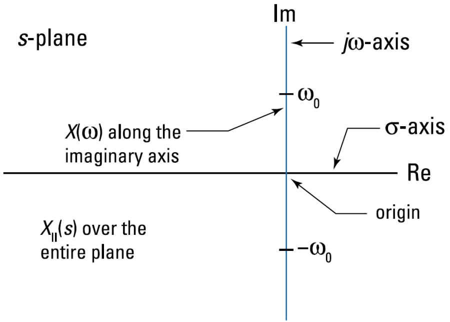


Figura 2: Plano complejo s

Región de convergencia, ROC

- Generalmente la ROC es una banda vertical controlada por σ_1 y σ_2

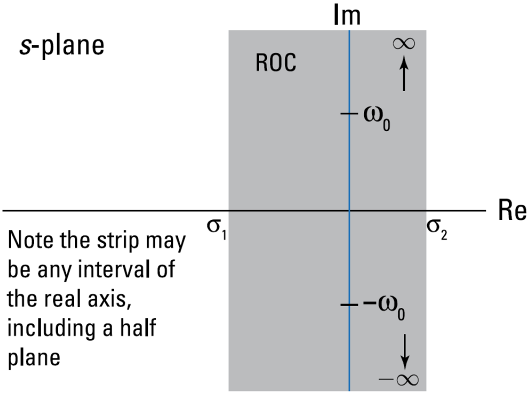


Figura 3: Ejemplo de ROC en el plano complejo

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace y la región de convergencia de la señal

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

Graficar la ROC en el plano complejo

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace y la region de convergencia de

$$f(t) = te^{-at}u(t)$$

Polos y ceros

- Generalmente $X(s)$ es una función racional en s

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k s^{m-k}}{\sum_{k=0}^{n} b_k s^{n-k}} \tag{5}$$

donde, b_k y a_k — coeficientes constantes reales;
m y n — el orden de los polinomios son enteros positivos.

Polos y ceros

- Es necesario asegurarse de que $X(s)$ es propiamente una **función racional racional propia** $N > M$. EN caso contrario (función racional impropia),

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{r=0}^{M-N} K_r s^r + \frac{N_1(s)}{D(s)} \tag{6}$$

donde $N_1(s)$ es el residuo de la división polinomial

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_m} = \frac{a_0 (s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{b_0 (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_m)} \tag{7}$$

- Las raices del numerador se conocen como ceros — z_k
- Las raices del denominador se conocen como polos — p_k

Polos y ceros

Ejemplo

Encontrar los polos y ceros de la siguiente función racional de Laplace

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$$

Propiedades de la ROC

- $X(s)$ depende de la naturaleza de $x(t)$
- $X(s)$ es una función racional de s

1. La ROC no contiene ningún polo
2. $x(t)$ es una señal de duración finita, $x(t) = 0$, excepto en el intervalo $t_1 \leq t \leq t2$
3. Si $x(t)$ es una señal por la derecha, es decir $x(t) = 0$, para $t < t_1 < \infty$, la ROC es de la forma
$$\Re\{s\} > \sigma_{max}$$
σ_{max} — línea vertical (medio plano a la derecha)
4. Si $x(t)$ es una señal por la izquierda, es decir $x(t) = 0$, para $t > t_2 > -\infty$, la ROC es de la forma
$$\Re\{s\} < \sigma_{min}$$
σ_{min} — línea vertical (medio plano a la izquierda)
5. Si $x(t)$ es una señal de dos lados, es decir $x(t)$ es una señal de duración infinita (no es extrema derecha e izquierda)
$$\text{ROC: } \sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2$$
σ_1, σ_2 — ROC es una franja entre esos dos polos

Propiedades de la ROC

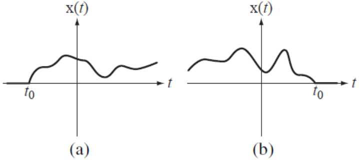


Figura 4: a) Señal por la derecha, (b) Señal por la izquierda

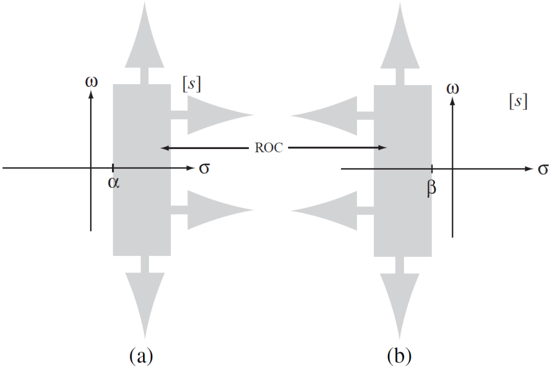
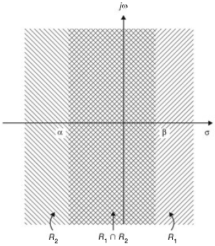


Figura 5: Propiedades de la ROC

Linealidad

$$x_1(t) \rightarrow X_1(s),\ ROC = R_1$$
$$x_2(t) \rightarrow X_2(s),\ ROC = R_2$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	$R' = R_1 \cap R_2$



Desplazamiento en el tiempo

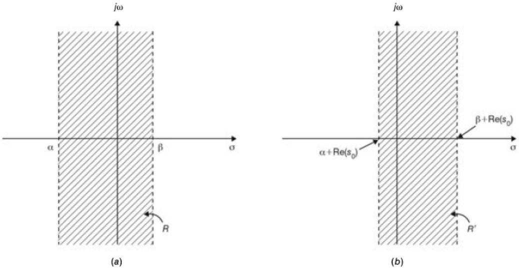
$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	$R' = R$

Desplazamiento en la frecuencia

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

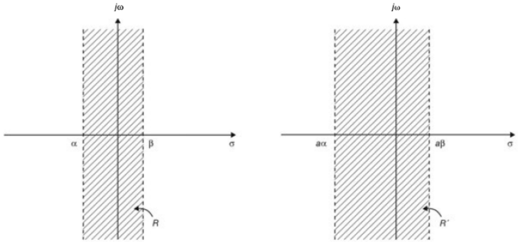
Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R' = R + \Re\{s_0\}$



Escalamiento en el tiempo

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

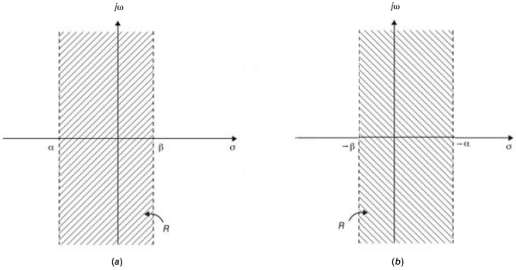
Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	$R' = aR$



Inversión en el tiempo

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$x(-t)$	$X(-s)$	$R' = -R$



Diferenciación en el tiempo

$$x(t) \to X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R' \supset R$

- No se modifica a menos que se elimine un polo

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n X(s) - s^{(n-1)}x(0^-) - \ldots - sx^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-)$	$R' \supset R$

Diferenciación en el dominio de s

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$-tx(t)$	$\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s}$	$R' \supset R$

Integración en el dominio de *st*

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R' = R \cap \{\mathbb{R}\{s\} > 0\}$

- Se agrega un polo más al sistema

Integración en el dominio de s

$$x(t) \rightarrow X(s),\ ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$\frac{x(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} X(s)\,\mathrm{d}s$	$R' = R \cap \{\mathbb{R}\{s\} > 0\}$

- Se agrega un polo más al sistema

Convolución en el dominio del tiempo

$$x_1(t) \to X_1(s),\ ROC = R_1$$
$$x_2(t) \to X_2(s),\ ROC = R_2$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s, $X(s)$	ROC
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo

Encontrar la LT a partir de la trasformada de Laplace de $u(t)$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la LT a partir de la trasformada de Laplace de $u(t)$

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal

$$s(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal, para $t \geq 0$

$$f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}$$

Propiedades de la Transformada de Laplace

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal, para $t \geq 0$

$$r(t) = \cos(2t) + e^{-3t}$$

Transformada inversa de Laplace

Fórmula de inversión de Rieman-Mellin:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} \, \mathrm{d}s \tag{8}$$

donde, $\mathfrak{L}^{-1}\{\cdot\}$ $-$ operador de la transformada inversa de Laplace

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

1. Descomponga $X(s)$ en términos simples usando una expansión de fracciones parciales
2. Se encuentra el inverso de cada término contrastándolo con las entradas de la tabla

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

Polos simples:

- Polo simple es un polo de **primer orden**
- $D(s)$ se vuelve un producto de factores

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)} \tag{9}$$

donde, $s = p_1, p_2, \dots p_m$ son polos simples, no repetidos $p_i \neq p_j$ para toda $i \neq j$ entonces:

$$X(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_m}{s-p_m} \tag{10}$$

donde $k_1, k_2, \dots, k_m$ se conocen como residuos de $X(s)$. El coeficiente de expansión se determina:

$$k_i = (s-p_i)X(s)|_{s=p_i} \tag{11}$$

entonces:

$$x(t) = (k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_m e^{p_m t})u(t) \tag{12}$$

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

Polos repetidos:

- $X(s)$ tiene r polos repetidos en $s = p_1$

entonces se representa $X(s)$ como:

$$X(s) = \frac{k_r}{(s-p_1)^r} + \frac{k_{r-1}}{(s-p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{k_2}{(s-p_1)^2} + \frac{k_1}{s-p_1} + X_1(s) \tag{13}$$

donde, $X_1(s)$ es el residuo de $X(s)$ que no tiene un polo en $s = p_1$

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

Polos repetidos: Los coeficientes de expansión se determinan:

$$k_r = (s-p_1)^r X(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$k_{r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s-p_1)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$k_{r-2} = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[(s-p_1)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$k_{r-n} = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\left[(s-p_1)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$x(t) = \left(k_1 e^{p_1 t} + k_2 t e^{p_1 t} + \frac{k_3}{2!} t^2 e^{p_1 t} + \ldots + \frac{k_m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{p_1 t}\right) u(t) + x_1(t) \tag{14}$$

Pasos para encontrar la transformada inversa de Laplace

Polos complejos:

- Un par de polos complejos es simple si no están repetidos
- Es un par de polos complejos dobles o múltiples si están repetidos
- La mejor solución expresar cada par de polos complejos como un *cuadrado total*, de la forma $(s+\alpha)^2+\beta$

$X(s)$ se puede representar de la forma:

$$X(s)=\frac{A_1s+A_2}{s^2+as+b}+X_1(s) \tag{15}$$

donde, $X_1(s)$ es el residuo de $X(s)$ que no tiene este par de polos complejos

$$s^2+as+b=s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2=(s+\alpha)^2+\beta$$

también se hace que

$$A_1s+A_2=A_1(s+\alpha)+B_1\beta$$

$$X(s)=\frac{A_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta}+\frac{B_1\beta}{(s+\alpha)^2+\beta}+X_1(s) \tag{16}$$

entonces:

Transformada inversa de Laplace

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$X(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$F(s) = 1 + \frac{4}{s+3} - \frac{5s}{s^2+16}$$

Transformada inversa de Laplace

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2+4}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace

$$X(s) = \frac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)}$$

Transformada inversa de Laplace

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$