

Tema 06: Análisis espectral de señales: Serie de Fourier

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2018II

OUTLINE

- 1 Introducción
- 2 Series de Fourier
- 3 Serie exponencial de Fourier para señales de tiempo continuo
- 4 Serie exponencial de Fourier para señales de tiempo discreto
- 5 Serie trigonométrica de Fourier
- 6 Convergencia de la serie de Fourier de tiempo discreto
- 7 Propiedades de la serie de Fourier

FORMULA DE EULER

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

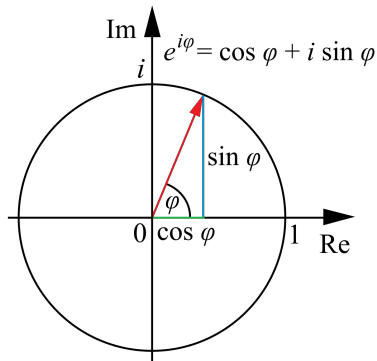


Figura 1: Formula de Euler

Si s solo tiene parte imaginaria, $s = i\omega$:

Tiempo continuo:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} = A (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

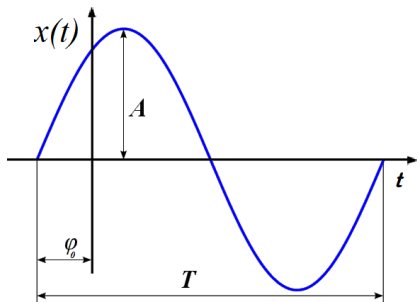
Tiempo discreto:

$$x[n] = Ae^{i\Omega n} = A (\cos(\Omega n) + i \sin(\Omega n))$$

■ Dentro de sus propiedades se encuentra la periodicidad, cuyo periodo fundamental

- Tiempo continuo: $T_0 = T\{x(t)\} = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- Tiempo discreto: $N_0 = T\{x[n]\} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

SEÑALES SINUSOIDALES DE TIEMPO CONTINUO



$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0),$$

donde,

- | | | |
|---------------------------|---|---|
| A | – | amplitud real de la señal; |
| $\omega = \frac{2\pi}{T}$ | – | frecuencia angular $[rad/s]$; |
| $T = \frac{1}{f}$ | – | periodo fundamental $[s]$, frecuencia $f [Hz]$; |
| ϕ_0 | – | fase inicial $[rad]$, entre 0 y 2π . $\phi_0 \in \mathbb{R}$. |

Figura 2: Parámetros de una señal sinusoidal de tiempo continuo

INTRODUCCIÓN

Es posible descomponer cualquier señal en elementos sinusoidales, y el análisis de Fourier muestra como hacerlo.

Análisis:

- Del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia
- Encontrar la contribución de cada frecuencia distinta
- Encontrar propiedades ocultas de la señal

Síntesis

- Del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo
- Crear señales a partir del conocimiento de la frecuencia
- Fijar señales en regiones específicas de frecuencia

HISTORIA

Según el físico matemático francés *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (Auxerre, Francia, 21 de marzo de 1768 - París, 16 de mayo de 1830) cualquier señal, sin importar su complejidad, se puede generar a partir de la suma de armónicos, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental (ligada a un periodo fundamental), con distintas fases y amplitudes.



Figura 3: Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier realizado por el pintor y dibujante francés Louis Léopold Boilly

BASES MATEMÁTICAS

- El análisis de Fourier se puede representar mediante un cambio de base.
- Un cambio de base es un cambio de perspectiva para el análisis.
- Si las bases a las cuales se realizará el cambio son bien escogidas, esta nueva base revelará características hasta ahora desconocidas de la señal.
- Señal continua periódica con periodo T y secuencia discreta periódica con periodo N .

SERIES DE FOURIER PARA SEÑALES PERIÓDICAS

- Especial para el análisis de señales y sistemas.
- Muchas similitudes entre la serie de Fourier de tiempo continuo y la serie de tiempo discreto.

DTFS

Una secuencia periódica, de periodo T/N (dependiendo del caso), se puede representar mediante la Serie de Fourier (FS, *ing.* Fourier Series) y consta de la susuma de funciones armónicamente relacionadas.

SERIES DE FOURIER PARA SEÑALES PERIÓDICAS

Tiempo continuo:

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = e^{j\omega_k t}, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Donde $\omega_k = 2\pi \frac{k}{T}$.

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a T , como productos enteros del inverso de este, se denominan *armónicos*.

Tiempo discreto:

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\Omega_k n}, \text{ donde } k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (2)$$

Donde $\Omega_k = 2\pi \frac{k}{N}$.

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a N , como productos enteros del inverso de este, se denominan *armónicos*.
- $s_k[n]$ es periódica de periodo N , $s_k[n] = s_k[n+N]$.

SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER PARA SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO

Ecuación de síntesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t} \quad (3)$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\omega_k t} dt \quad (4)$$

donde, $\omega_k = \omega_0 k = \frac{2\pi}{T} k$ — k -ésimo armónico. ω_0 — frecuencia fundamental.

SERIES EXPONENCIAL DE FOURIER PARA SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

Ecuación de síntesis

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (5)$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad (6)$$

SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER PARA SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

- Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier c_k proporcionan una descripción de $x[n]/x(t)$ en el dominio de la frecuencia.
- c_k , de naturaleza compleja, representa la amplitud y la fase asociada a cada uno de los armónicos, componentes de frecuencia.
- Como $s_k[n]$ es periódica, también lo es c_k y su periodo es N , $c_k = c_{k+N}$.
- El espectro de una sea una señal periódica $x[n]$, de periodo N , es una secuencia periódica de periodo N .

Coeficiente especial: cuando $k = 0$ obtenemos el valor promedio de la señal $x[n]$

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \quad (7)$$

SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Ecuación de síntesis

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t) \quad (8)$$

Ecuaciones de análisis

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cos(\omega_k t) dt \quad (9)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \sin(\omega_k t) dt \quad (10)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt \quad (11)$$

CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

- ¿Que es la convergencia de una serie (sumatoria)?

Convergencia de la FS

Si la serie de Fourier es **finita**, entonces no existen problemas de **convergencia**.

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Se asume que $x(t)$ es periódica con periodo T .

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \quad (12)$$

Linealidad

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad (13)$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k \quad (14)$$

entonces,

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{FS} \alpha a_k + \beta b_k \quad (15)$$

Desplazamiento en el tiempo

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \quad (16)$$

entonces

$$x(t - \tau) \xrightarrow{FS} a_k e^{-j\omega_0 k \tau}, \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (17)$$

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Inversión temporal

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad (18)$$

$$x(-t) \xrightarrow{FS} a_{-k} \quad (19)$$

Multiplicación

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad (20)$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k \quad (21)$$

entonces

$$x(t)y(t) \xrightarrow{FS} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} = a_k \star b_k \quad (22)$$

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Conjugación y simetría conjugada

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k \quad (23)$$

$$y(t) = x^*(t) \xrightarrow{FS} a_{-k}^* \quad (24)$$

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Es necesario recordar la propiedad de periodicidad del exponencial complejo de tiempo discreto:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n} \quad (25)$$

Los coeficientes c_k son periódicos con periodo fundamental N_0 . Es posible escribir entonces

$$c_{k+N_0} = c_k \quad (26)$$

$$e^{j\Omega_0(k+N_0)n} = e^{j\Omega_0 kn} e^{j\Omega_0 N_0 n} = e^{j\Omega_0 kn} \quad (27)$$

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Para la relación que existe entre $x[n] \rightarrow c_k$ y $c[k] \rightarrow x_n$.

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-j\Omega_0 kn} \quad (28)$$

si hacemos $n = -m$, entonces

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m] e^{j\Omega_0 km} \quad (29)$$

hacemos $k = n$ y $m = k$

$$c[n] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k] e^{j\Omega_0 kn} \quad (30)$$

Si comparamos resultados obtenemos que

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} c_k = c[k] \quad (31)$$

$$c[n] \xrightarrow{DTFS} \frac{1}{N_0} x[-k] \quad (32)$$

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

$$c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^* \quad (33)$$

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Una secuencia $x[n] \in \mathbb{R}$ se puede expresar mediante la suma de sus componentes par e impar:

$$x[n] = x_o[n] + x_e[n] \quad (34)$$

Si $x[n]$ es real y par, sus coeficientes de Fourier c_k son reales. Si $x[n]$ es real e impar, sus coeficientes de Fourier c_k son imaginarios.

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} c_k \quad (35)$$

$$x_e[n] \xrightarrow{DTFS} \Re c_k \quad (36)$$

$$x_o[n] \xrightarrow{DTFS} j\Im c_k \quad (37)$$

PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} |c_k|^2 \quad (38)$$

SERIES DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Ejemplo

Considera la siguiente señal periódica con periodo $N = 10$. Calcule el espectro de la señal.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{para } 5 \leq n \leq 9. \end{cases}$$

SERIES DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO

Ejemplo de la onda cuadrada

Determine el espectro de las siguiente señal:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ -1, & \text{para } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

SERIES DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Ejemplo

Determine el espectro de las siguientes señales:

a $x[n] = \cos \sqrt{2}\pi n$

b $y[n] = \cos \frac{\pi n}{3}$

c $p[n]$ es periódica con periodo $N = 4$ y $p[n] = 1, 2, 0, 0$

SERIES DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Ejercicio

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$ mostrada en la figura

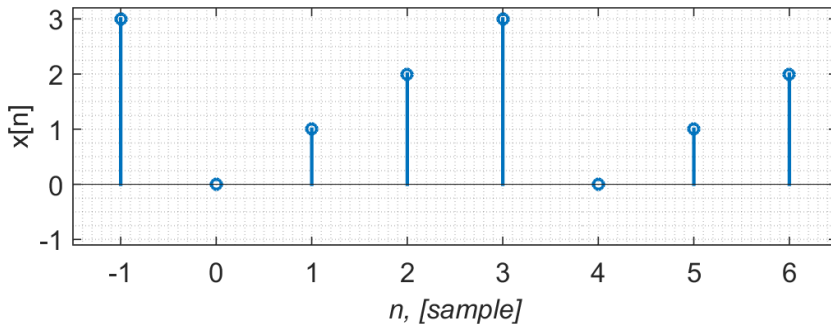


Figura 4: Señal periódica

SERIES DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Ejercicio

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k]$$

SERIES DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

Ejercicio

Determine el espectro de las siguientes señales:

a $x[n] = \cos \frac{\pi}{4}n$

b $y[n] = \cos^2 \frac{\pi n}{8}$

c $w[m] = \cos \frac{\pi}{4}(m-3)$

d $s[n] = \cos \frac{\pi}{2}n + \cos \frac{2\pi n}{5}$

e $x[n]$ es una señal periódica con periodo $N = 8$, y está definida en un periodo por $x[n] = \{-2, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}$