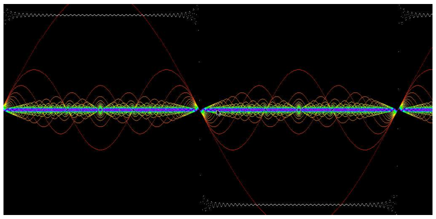
Tema 06: Análisis espectral de señales: Transformada de Fourier

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2018I

Outline

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

- Si una señal $x(t)$ de tiempo continuo es periódica con periodo T se puede representar de forma analítica mediante la **serie de Fourier**
- Representar mediante la composición de una **suma** de funciones *armónicamente relacionadas*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t}$$

Donde,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\omega_k t} \, \mathrm{d}t$$

¿Pero que ocurre cuando la señal de análisis no es periódica?

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

En este caso tenemos a $x(t)$ una señal no periódica de duración finita, es decir $x(t) = 0$ para $|t| > T_1$, tal cual como se puede observar en la siguiente gráfica:

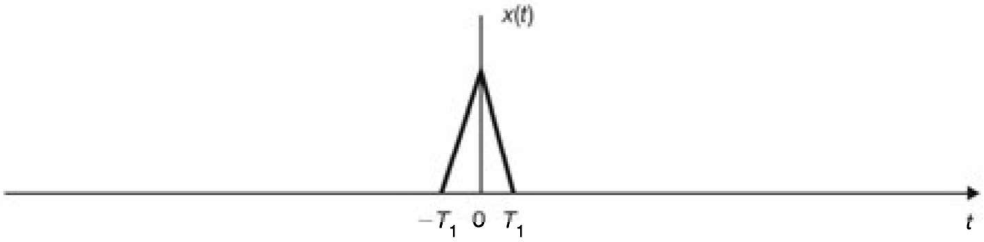


Figura 1: Señal continua de duración finita

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

- Definimos la secuencia $x_{T_0}(t)$ — representación periódica de $x(t)$
- Se obtiene mediante la periodización, es decir repetición
- T_0 el periodo fundamental de la señal.

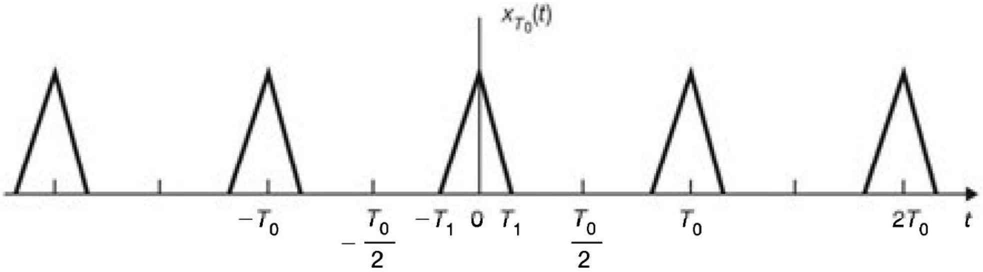


Figura 2: Señal continua periódica obtenida de la periodización de $x(t)$

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Si $T_0 \to \infty$ entonces

$$\lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = x(t) \tag{1}$$

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

La secuencia $x_{T_0}(t)$ puede ser representada mediante la serie de Fourier

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \tag{2}$$

donde,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

con coeficientes de la serie de Fourier

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_k t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_k t}\, \mathrm{d}t \tag{3}$$

Podemos afirmar que

$$x_{T_0}(t) = x(t), \text{ para } |t| \leq T_1 \tag{4}$$

y $x(t) = 0$ fuera de los limites de $[-T_1, T_1]$.
Podemos rescribir la ecuación 3 de la siguiente forma:

$$c_k = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, \mathrm{d}t = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, \mathrm{d}t \tag{5}$$

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Definamos de acuerdo la ecuación 5 una nueva función de una variable independiente ω de la siguiente manera:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Reescribamos la ecuación 5 implementando la nueva función definida por la ecuación 6, donde para este caso $\omega = k\omega_0$:

$$c_k = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \tag{7}$$

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Podemos representar el periodo T_0 de la siguiente forma:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{8}$$

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 8) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 2)

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}}_{altura} \underbrace{\omega_0}_{ancho}}_{rectangulo}. \tag{9}$$

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

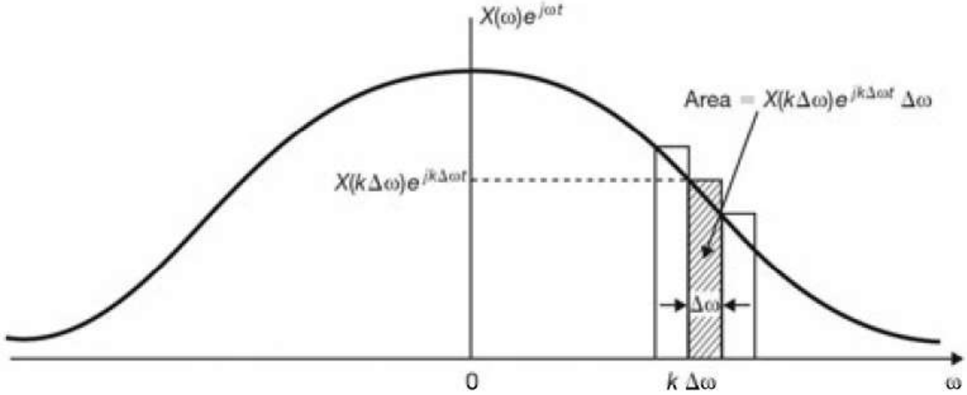


Figura 3: Interpretación de la ecuación analítica de Fourier como suma de integral

De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier

Podemos afirmar que

$$\text{si } T_0 \to \infty \text{ entonces } \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \to 0 \text{ entonces } \omega_0 \to \Delta\omega$$

Por tanto la ecuación 9 se transforma en una integral,

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \tag{10}$$

área bajo la función,

$$X(\omega)e^{j\omega t}$$

entonces,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\omega$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

- Si una señal $x[n]$ de tiempo discreto es periódica con periodo N se puede representar de forma analítica mediante la **serie de Fourier**
- Representar mediante la composición de una **suma** de funciones *armónicamente relacionadas*

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}}.$$

Donde,

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

¿Pero que ocurre cuando la señal de análisis no es periódica?

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

En este caso tenemos a $x[n]$ una secuencia no periódica de duración finita, es decir $x[n] = 0$ para $|n| > N_1$, tal cual como se puede observar en la siguiente gráfica:

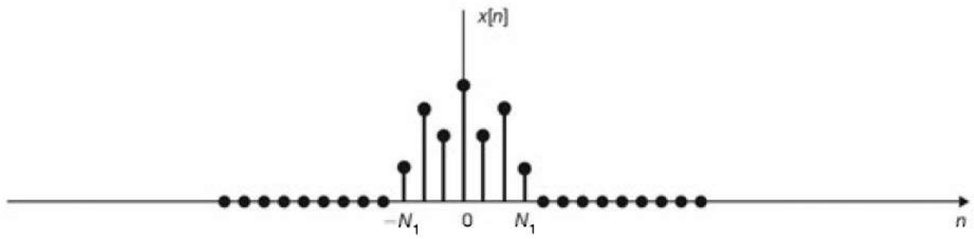


Figura 4: Señal discreta de duración finita

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

- Definimos la secuencia $x_{N_0}[n]$ — representación periódica de $x[n]$
- Se obtiene mediante la periodización, es decir repetición
- N_0 el periodo fundamental de la señal.

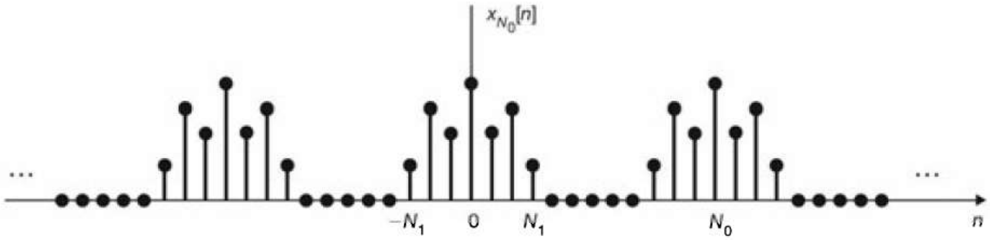


Figura 5: Señal discreta periódica obtenida de la periodización de $x[n]$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Si $N_0 \to \infty$ entonces

$$\lim_{N_0 \to \infty} x_{N_0}[n] = x[n] \tag{11}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

La secuencia $x_{N_0}[n]$ puede ser representada mediante la serie de Fourier

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n}. \tag{12}$$

donde,

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

con coeficientes de la serie de Fourier

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{N_0}[n] e^{-jk\Omega_0 n}. \tag{13}$$

Podemos afirmar que

$$x_{N_0} = x[n], \text{ para } |n| \leq N_1 \tag{14}$$

y $x[n] = 0$ fuera de los limites de $[-N_1, N_1]$.
Podemos rescribir la ecuación 13 de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \tag{15}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Definamos de acuerdo la ecuación 15 una nueva función de una variable independiente Ω de la siguiente manera:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{16}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Reescribamos la ecuación 15 implementando la nueva función definida por la ecuación 16, donde para este caso $\Omega = k\Omega_0$:

$$c_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) \tag{17}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Podemos representar el periodo N_0 de la siguiente forma:

$$\frac{1}{N_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \tag{18}$$

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 18) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 12)

$$x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \underbrace{\underbrace{X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}}_{altura} \underbrace{\Omega_0}_{ancho}}_{rectangulo}. \tag{19}$$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

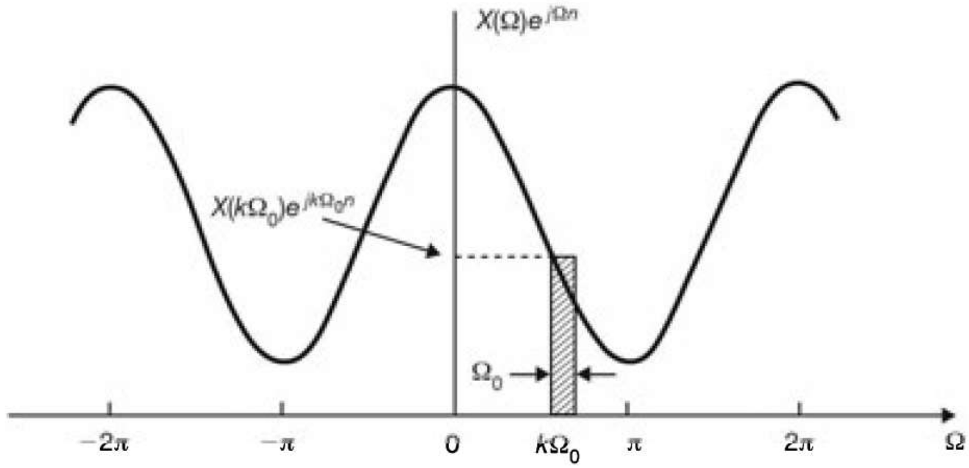


Figura 6: Interpretación de la ecuación analítica de Fourier como suma de integral

$X(\Omega)$ es periódica con periodo 2π. La secuencia $e^{j\Omega n}$ también lo es. Por tanto el producto $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ es periódico con periodo $N = 2\pi$

De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier

Podemos afirmar que

$$\text{si } N_0 \to \infty \text{ entonces } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \to 0. \tag{20}$$

Por tanto la ecuación 19 se transforma en una integral, donde la suma $\sum\limits_{k=\langle N_0 \rangle}$ se realiza sobre N_0–intervalos de ancho cada uno $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$, para un intervalo total de ancho 2π.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} \mathrm{d}\Omega \tag{21}$$

Par de la transformada de Fourier de tiempo continuo, CTFT

Se entiende como al par de la transformada de Fourier de tiempo continuo la siguiente relación

$$x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\omega) \tag{22}$$

Donde la transformada de Fourier de tiempo continuo se expresa mediante

$$X(\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{23}$$

y la transformada inversa de Fourier de tiempo continuo se obtiene

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,\omega \tag{24}$$

Par de la transformada de Fourier de tiempo discreto, DTFT

Se entiende como al par de la transformada de Fourier de tiempo discreto la siguiente relación

$$x[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega) \tag{25}$$

Donde la transformada de Fourier de tiempo discreto se expresa mediante

$$X(\Omega) = \mathfrak{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{26}$$

y la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto se obtiene

$$x[n] = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\mathrm{d}\Omega \tag{27}$$

Recordemos que la DTFT $X(\Omega)$ es periódica con periodo 2π, es decir

$$X(\Omega) = X(\Omega + k2\pi) \tag{28}$$

Espectro de Fourier

Espectro de Fourier

A $X(\omega)/X(\Omega)$ se le conoce también como la representación en la frecuencia o el espectro de $x(t)/x[n]$.

`Tiempo continuo:`

La transformada de Fourier de la secuencia $x(t)$ es de carácter complejo.

Forma polar

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\Phi(\omega)} \tag{29}$$

donde $|X(\omega)|$ — espectro de magnitud; $\Phi(\omega)$ — espectro de fase.

Si $x(t) \in \Re$ entonces el espectro de magnitud es **par** y el espectro de fase **impar**.

`Tiempo discreto:`

La transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ es de carácter complejo.

Forma polar:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\Phi(\Omega)} \tag{30}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Linealidad

Tiempo continuo:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) \tag{31}$$

Tiempo discreto:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega) \tag{32}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Periodicidad del espectro de una señal discreta

$$X(\Omega + k2\pi) = X(\Omega) \tag{33}$$

Ω se da en radianes y es continua de $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ o también $0 \leq \Omega \leq 2\pi$.

Propiedades de la transformada de Fourier: Corrimientos de frecuencia y tiempo

Tiempo continuo:

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathscr{F}} e^{-j\omega t_0}X(\omega) \tag{34}$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\omega-\omega_0) \tag{35}$$

A la ecuación 35 se le conoce como *modulación compleja*.

Tiempo discreto:

$$x[n-N] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)e^{-j\Omega N} \tag{36}$$

$$x[n]e^{j\Omega_0 N} \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega-\Omega_0) \tag{37}$$

A la ecuación 37 se le conoce como *modulación compleja*.

Propiedades de la transformada de Fourier: Conjugación

Tiempo continuo:

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X^*(-\omega) \tag{38}$$

Tiempo discreto:

$$x^*[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X^*(-\Omega) \tag{39}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Inversión en el tiempo

Tiempo continuo:

$$x(-t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(-\omega) \qquad (40)$$

Tiempo discreto:

$$x[-n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(-\Omega) \qquad (41)$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Escalamiento en el tiempo

Tiempo continuo:

Para una versión escalada en el tiempo de $x_s(t) = x(at)$:

$$x(at) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a}) \tag{42}$$

si $a > 1$ la señal se comprime en el tiempo.

Propiedades de la transformada de Fourier: Paridad de la transformada de Fourier

Tiempo continuo:

Para $x(t) \in \Re$

$$x(t) = x_{even}(t) + x_{odd}(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \tag{43}$$

donde,

$$x_{even}(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega) \tag{44}$$

$$x_{odd}(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega) \tag{45}$$

Tiempo discreto:

Para $x[n] \in \Re$

$$x[n] = x_{even}[n] + x_{odd}[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) \tag{46}$$

donde,

$$x_{even}[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \tag{47}$$

$$x_{odd}[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \tag{48}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Teorema de Parseval

Tiempo continuo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \omega \tag{49}$$

Tiempo discreto:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{50}$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S_x(\Omega)\mathrm{d}\Omega \tag{51}$$

donde $S_x(\Omega)$ se conoce como densidad espectral de potencia y se calcula

$$S_x(\Omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{|X_N(\Omega)|^2}{2N+1}. \tag{52}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Diferenciación y diferencia

Tiempo continuo:

Diferenciación:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\mathscr{F}} j\omega X(\omega) \tag{54}$$

Tiempo discreto:

Diferencia:

$$\underbrace{x[n] - x[n-1]}_{\text{secuencia de primera diferencia}} \xrightarrow{\mathscr{F}} (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega) \tag{55}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Diferenciación en la frecuencia

Tiempo continuo:

$$-jtx(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{\mathrm{d}X(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \tag{56}$$

Tiempo discreto:

$$nx[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} j\frac{\mathrm{d}X(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega} \tag{57}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Integración y Acumulación

Tiempo continuo:

Integración

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow{\mathscr{F}} \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega) \tag{58}$$

Tiempo discreto:

Acumulación

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} \pi X(0)\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega) \tag{59}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Integral de convolución

Integral de convolución en el dominio del tiempo es multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{60}$$

Dominio de la frecuencia es el producto de ambas señales:

$$\underbrace{Y(\omega)}_{\text{espectro de salida } y(t)} = \underbrace{X(\omega)}_{\text{espectro de entrada } x(t)} \underbrace{H(\omega)}_{\text{respuesta en frecuencia del sistema}} \tag{61}$$

Se cumple que

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)| \tag{62}$$

$$\angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega) \tag{63}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Suma de convolución

Suma de convolución en el dominio del tiempo es multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{64}$$

en el dominio de la frecuencia se puede realizar mediante el calculo del producto de ambos argumentos de la suma de convolución

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \tag{65}$$

Se cumple que

$$|Y(\Omega)| = |X(\Omega)||H(\Omega)| \tag{66}$$

$$\angle Y(\Omega) = \angle X(\Omega) + \angle H(\Omega) \tag{67}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Multiplicación en el dominio del tiempo

Tiempo continuo:

$$x(t)y(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2\pi}X(\omega) \circledast Y(\omega) \tag{68}$$

Tiempo discreto:

$$x[n]y[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2\pi}X(\Omega) \circledast Y(\Omega) \tag{69}$$

donde $\circledast$ — implica **convolución circular**, que se calcula de la forma

$$X(\Omega) \circledast Y(\Omega) = \int_{2\pi} X(\Theta)Y(\Omega - \Theta)\mathrm{d}\Theta \tag{70}$$

Propiedades de la transformada de Fourier: Dualidad

Tiempo continuo:

si

$$x(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\omega) \tag{71}$$

entonces,

$$X(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi x(-\omega) \tag{72}$$

Tiempo discreto:

si

$$x[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega) \tag{73}$$

entonces,

$$X[n] \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi x(-\Omega) \tag{74}$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejemplo

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} A, & \text{para } -M \leq n \leq M; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Ejemplo

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = r^n u[n], \text{ donde } |r| < 1.$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejemplo

Encuentre la iDTFT del siguiente pulso rectangular $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{para } |\Omega| \leq W;; \\ 0, & \text{para } W < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

Ejercicio

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } |n| \leq N_1; \\ 0, & \text{para } |n| > N_1. \end{cases}$$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

Ejercicio

Encuentre la DTFT de la siguientes señales:

(a) $x[n] = a^{|n|}$, para $-1 < a < 1$.

(b) $s[n] = \sin(\dfrac{\pi n}{4}(u[n] - u[n-5]))$

(c) $x[n] = -a^n u[-n-1]$, donde $a \in \mathbb{R}$.

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

Ejercicio

Encuentre la iDTFT de la siguientes señales:

(a)

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{para } \Omega_0 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

(b) $P(\Omega) = \cos^2(\Omega)$

Transformada de Fourier de tiempo discreto: Ejercicio

Ejercicio

Encuentre la iDTFT de la siguientes señales:

(a)

$$X(\Omega) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{para } \Omega_0 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

(b) $P(\Omega) = \cos^2(\Omega)$

Tarea

Ejercicio

Determine y dibuje la densidad espectral de potencia $S_x(\Omega)$ de la siguiente señal $x[n]$:

$$x[n] = a^n u[n]$$