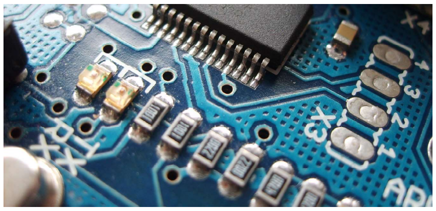
# Tema 05: Análisis espectral de señales: Serie de Fourier

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2018I

# Outline

# Formula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

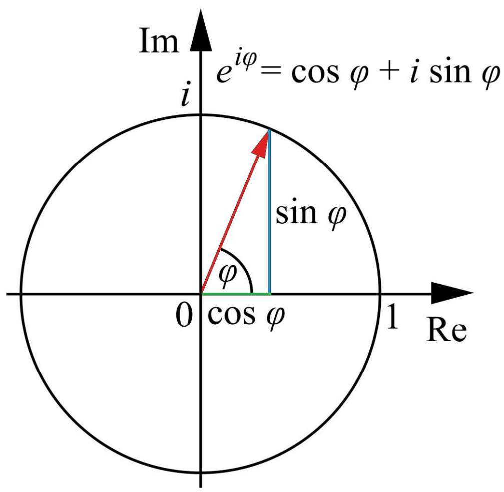



**Figura 1:** Formula de Euler

Si $s$ solo tiene parte imaginaria, $s = i\omega$:
**Tiempo continuo:**
$x(t) = Ae^{i\omega t} = A(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$
**Tiempo discreto:**
$x[n] = Ae^{i\Omega n} = A(\cos(\Omega n) + i \sin(\Omega n))$

- Dentro de sus propiedades se encuentra la periodicidad, cuyo periodo fundamental
  - Tiempo continuo: $T_0 = T\{x(t)\} = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
  - Tiempo discreto: $N_0 = T\{x[n])\} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

## Señales sinusoidales de tiempo continuo

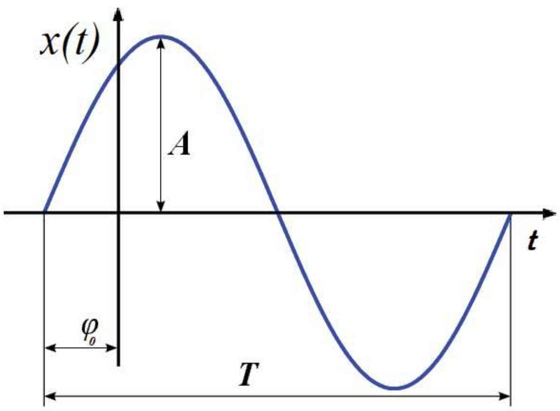



**Figura 2:** Parámetros de una señal sinusoidal de tiempo continuo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0),$$

donde,

| | | |
|---|---|---|
| $A$ | – | amplitud real de la señal; |
| $\omega = \frac{2\pi}{T}$ | – | frecuencia angular $[rad/s]$; |
| $T = \frac{1}{f}$ | – | periodo fundamental $[s]$, frecuencia $f$ $[Hz]$ ; |
| $\phi_0$ | – | fase inicial $[rad]$, entre 0 y $2\pi$. $\phi_0 \in \mathbb{R}$. |

# Introducción

Es posible descomponer cualquier señal en elementos sinusoidales, y el análisis de Fourier muestra como hacerlo.
**Análisis:**

- Del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia
- Encontrar la contribución de cada frecuencia distinta
- Encontrar propiedades ocultas de la señal

**Síntesis**

- Del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo
- Crear señales a partir del conocimiento de la frecuencia
- Fijar señales en regiones especificas de frecuencia

## Historia

Según el físico matemático francés *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (Auxerre, Francia, 21 de marzo de 1768 - París, 16 de mayo de 1830) cualquier señal, sin importar su complejidad, se puede generar a partir de la suma de armónicos, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental (ligada a un periodo fundamental), con distintas fases y amplitudes.


**Figura 3:** Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier realizado por el pintor y dibujante francés Louis Léopold Boilly

# Bases matemáticas

- El análisis de Fourier se puede representar mediante un cambio de base.
- Un cambio de base es un cambio de perspectiva para el análisis.
- Si las bases a las cuales se realizará el cambio son bien escogidas, esta nueva base revelará características hasta ahora desconocidas de la señal.
- Señal continua periódica con periodo $T$ y secuencia discreta periódica con periodo $N$.

# Series de Fourier para señales periódicas

- Especial para el análisis de señales y sistemas.
- Muchas similitudes entre la serie de Fourier de tiempo continuo y la serie de tiempo discreto.

**DTFS**

Una secuencia periódica, de periodo $T/N$ (dependiendo del caso), se puede representar mediante la Serie de Fourier (FS, *ing.* Fourier Series) y consta de la susuma de funciones armónicamente relacionadas.

## Series de Fourier para señales periódicas

**Tiempo continuo:**

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = e^{j\omega_k t}, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Donde $\omega_k = 2\pi \dfrac{k}{T}$.

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a $T$, como productos enteros del inverso de este, se denominan *armónicos*.

**Tiempo discreto:**

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\Omega_k n}, \text{ donde } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ N-1. \tag{2}$$

Donde $\Omega_k = 2\pi \dfrac{k}{N}$.

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a $N$, como productos enteros del inverso de este, se denominan *armónicos*.
- $s_k[n]$ es periódica de periodo $N$, $s_k[n] = s_k[n+N]$.

# Series de Fourier para señales de tiempo continuo

**Ecuación de síntesis**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t} \tag{3}$$

**Ecuación de análisis**

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\omega_k t}\, \mathrm{d}t \tag{4}$$

donde, $\omega_k = \omega_0 k = \frac{2\pi}{T} k$ — $k$-ésimo armónico. $\omega_0$ — frecuencia fundamental.

# Series de Fourier para señales de tiempo discreto

**Ecuación de síntesis**

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \tag{5}$$

**Ecuación de análisis**

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \tag{6}$$

# Serie trigonométrica de Fourier

**Ecuación de síntesis**

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t) \quad (7)$$

**Ecuaciones de análisis**

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cos(\omega_k t)\, \mathrm{d}t \quad (8)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \sin(\omega_k t)\, \mathrm{d}t \quad (9)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)\, \mathrm{d}t \quad (10)$$

# Series de Fourier para señales de tiempo discreto

- Los coeficientes de de la serie de Fourier $c_k$ proporcionan una descripción de $x[n]/x(t)$ en el dominio de la frecuencia.
- $c_k$, de naturaleza compleja, representa la amplitud y la fase asociada a cada uno de los armónicos, componentes de frecuencia.
- Como $s_k[n]$ es periódica, también lo es $c_k$ y su periodo es $N$, $c_k = c_{k+N}$.
- El espectro de una sea una señal periódica $x[n]$, de periodo $N$, es una secuencia periódica de periodo $N$. **Coeficiente especial:** cuando $k = 0$ obtenemos el valor promedio de la señal $x[n]$

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \tag{11}$$

# Convergencia de la serie de Fourier de tiempo discreto

- ¿Que es la convergencia de una serie (sumatoria)?

**Convergencia de la FS**

Si la serie de Fourier es **finita**, entonces no existen problemas de **convergencia**.

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Se asume que $x(t)$ es periódica con periodo $T$.

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \tag{12}$$

**Linealidad**

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \tag{13}$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k \tag{14}$$

entonces,

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{FS} \alpha a_k + \beta b_k \tag{15}$$

**Desplazamiento en el tiempo**

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \tag{16}$$

entonces

$$x(t-\tau) \xrightarrow{FS} a_k e^{-j\omega_0 k\tau},\ \tau \in \mathbb{R} \tag{17}$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

**Inversión temporal**

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad (18)$$

$$x(-t) \xrightarrow{FS} a_{-k} \quad (19)$$

**Multiplicación**

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \quad (20)$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k \quad (21)$$

entonces

$$x(t)y(t) \xrightarrow{FS} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} = a_k \star b_k \quad (22)$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

**Conjugación y simetría conjugada**

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k \tag{23}$$

$$y(t) = x^*(t) \xrightarrow{FS} a^*_{-k} \tag{24}$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Es necesario recordar la propiedad de periodicidad del exponencial complejo de tiempo discreto:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi x n} = e^{j\Omega_0 n} \tag{25}$$

Los coeficientes $c_k$ son periódicos con periodo fundamental $N_0$. Es posible escribir entonces

$$c_{k+N_0} = c_k \tag{26}$$

$$e^{j\Omega_0(k+N_0)n} = e^{j\Omega_0 kn} e^{j\Omega_0 N_0 n} = e^{j\Omega_0 kn} \tag{27}$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Para la relación que existe entre $x[n] \to c_k$ y $c[k] \to x_n$.

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-j\Omega_0 kn} \tag{28}$$

si hacemos $n = -m$, entonces

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m] e^{j\Omega_0 kn} \tag{29}$$

hacemos $k = n$ y $m = k$

$$c[n] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k] e^{j\Omega_0 kn} \tag{30}$$

Si comparamos resultados obtenemos que

$$x[n] \quad \xrightarrow{DTFS} \quad c_k = c[k] \tag{31}$$

$$c[n] \quad \xrightarrow{DTFS} \quad \frac{1}{N_0} x[-k] \tag{32}$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

$$c_{-k} = c_{N_0 - k} = c_k^* \tag{33}$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Una secuencia $x[n] \in \mathbb{R}$ se puede expresar mediante la suma de sus componentes par e impar:

$$x[n] = x_o[n] + x_e[n] \tag{34}$$

Si $x[n]$ es real y par, sus coeficientes de Fourier $c_k$ son reales. Si $x[n]$ es real e impar, sus coeficientes de Fourier $c_k$ son imaginarios.

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} c_k \tag{35}$$

$$x_e[n] \xrightarrow{DTFS} \Re c_k \tag{36}$$

$$x_o[n] \xrightarrow{DTFS} j\Im c_k \tag{37}$$

# Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N_0\rangle}|c_k|^2 \tag{38}$$

# Series de Fourier de tiempo discreto

**Ejemplo**

Considera la siguiente señal periódica con periodo $N = 10$. Calcule el espectro de la señal.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{para } 5 \leq n \leq 9. \end{cases}$$

# Series de Fourier de tiempo continuo

**Ejemplo de la onda cuadrada**

Determine el espectro de las siguiente señal:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ -1, & \text{para } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

# Series de Fourier de tiempo discreto

**Ejemplo**

Determine el espectro de las siguientes señales:

a) $x[n] = \cos\sqrt{2}\pi n$

b) $y[n] = \cos\dfrac{\pi n}{3}$

c) $p[n]$ es periódica con periodo $N = 4$ y $p[n] = \underset{\uparrow}{1}, 2, 0, 0$

# Series de Fourier de tiempo discreto

**Ejercicio**

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$ mostrada en la figura

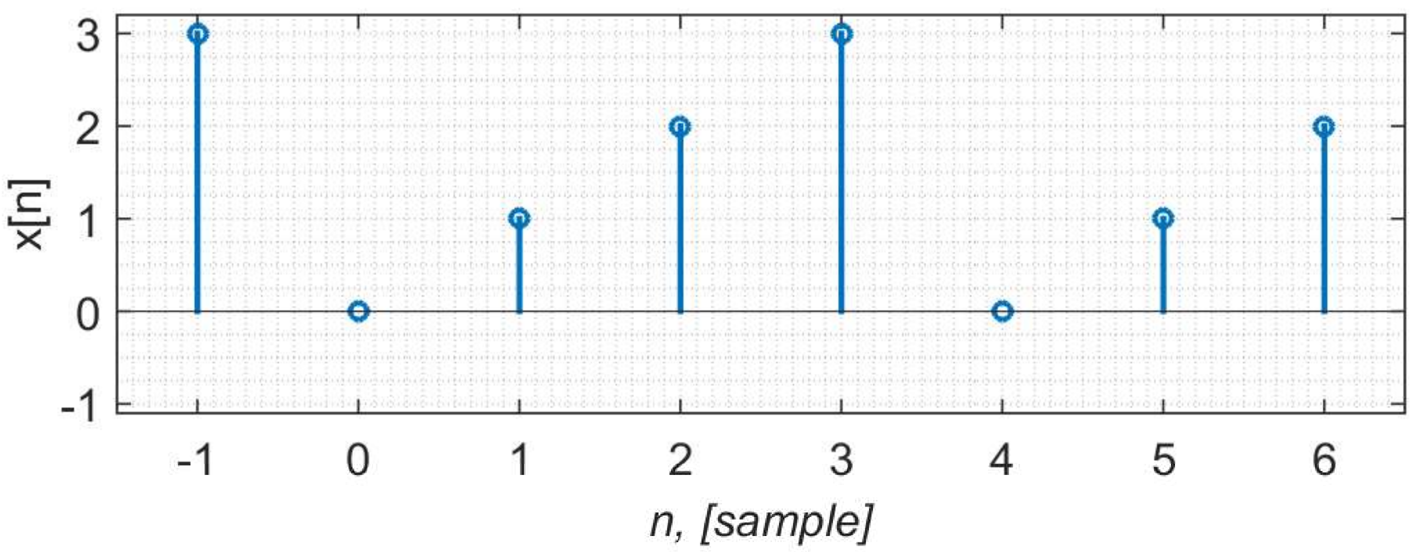



**Figura 4:** Señal periódica

# Series de Fourier de tiempo discreto

**Ejercicio**

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

# Series de Fourier de tiempo discreto

## Ejercicio

Determine el espectro de las siguientes señales:

- (a) $x[n] = \cos \frac{\pi}{4} n$
- (b) $y[n] = \cos^2 \frac{\pi n}{8}$
- (c) $w[m] = \cos \frac{\pi}{4} (m-3)$
- (d) $s[n] = \cos \frac{\pi}{2} n + \cos \frac{2\pi n}{5}$
- (e) $x[n]$ es una señal periódica con periodo $N = 8$, y está definida en un periodo por $x[n] = \{\underset{\uparrow}{-2}, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}$