

## Tema 04: Sistemas LTI y convolución de señales

### Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería  
Universidad Sergio Arboleda

2018II

# OUTLINE

## 1 Sistemas de tiempo discreto

- Ejemplos de sistemas discretos en el tiempo
- Clasificación de los sistemas
  - Sistemas discretos con memoria y sin memoria
  - Sistemas invariantes y variantes en el tiempo
  - Sistemas causales y no causales
  - Sistemas estables e inestables
  - Sistemas lineales y no lineales de tiempo discreto

## 2 Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto

- Respuesta de un sistema LTI al impulso unitario
- Respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria

## 3 Convolución

- Integral de convolución
- Suma de convolución
- Operación de la convolución
  - Duración de la suma de convolución
- Propiedades de la suma de convolución
- Ejemplos de convolución



# SISTEMAS

- Las señales de entrada y salida son discretas/continuas en el tiempo
- Los sistemas se representan mediante ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencias
- Una expresión matemática, mediante un modelo, relaciona las señales de entrada con las de salida.
- La estructura interna del sistema puede ignorarse, y representar el sistema mediante una caja negra — representación sistémica.

# EJEMPLOS DE SISTEMAS DISCRETOS EN EL TIEMPO

Algunos ejemplos de sistemas de tiempo discreto:

- Identidad  $y[n] = x[n], \forall n$
- Escala  $y(t) = 2x(t)$
- Offset  $y[n] = x[n] + y_0, \forall n$
- Señal cuadrada  $y(t) = (x(t))^2$
- Desplazamiento en el tiempo  $TD: y[n] = x[n - n_0], n_0 \in \mathbb{Z}, \forall n$
- Tiempo cuadrado  $y(t) = x(t^2)$

## SISTEMAS DISCRETOS CON MEMORIA Y SIN MEMORIA

- Los sistemas sin memoria (o estáticos) son aquellos cuya salida solo depende de la entrada en el instante actual (pero no de muestras pasadas o futuras).
- Los sistemas con memoria (o dinámicos) son aquellos cuyas salidas pueden estar determinadas por entradas en tiempos distintos al actual (pasados y futuros).

Se dice que un sistema que utilice intervalos de tiempo máximo de tipo  $n - N$ , donde  $N \geq 0$ , es un sistema con memoria de duración  $N$ .

- Un sistema donde  $N = 0$  es un sistema estático.
- Un sistema donde  $0 < N < \infty$  es un sistema de memoria finita.
- Un sistema en el cual  $N \rightarrow \infty$  es un sistema de memoria infinita.

# SISTEMAS DISCRETOS CON MEMORIA Y SIN MEMORIA

## Sistemas discretos con memoria y sin memoria

Determinar la clasificación de estos sistemas de acuerdo a su memoria, en caso de tener memoria, determinar su valor

**(a)**  $y[n] = ax[n]$

**(b)**  $y[n] = nx[n] + bx^3[3]$

**(c)**  $y[n] = T\{x[n], n\}$

**(d)**  $h[n] = x[n] - 3x[n-1]$

**(e)**  $y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x[n-k]$  — operador promedio

**(f)**  $y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]$



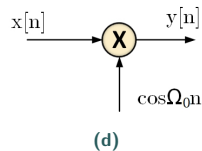
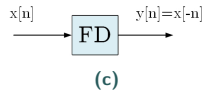
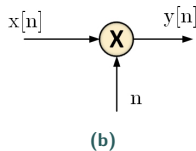
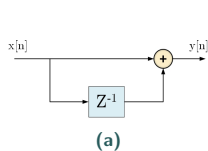


# SISTEMAS INVARIANTES Y VARIANTES EN EL TIEMPO

## Sistemas invariantes y variantes en el tiempo

Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo.

- (a)  $y[n] = x[n] - x[n-1]$  — diferenciador.
- (b)  $y[n] = nx[n]$  — multiplicador por tiempo discreto
- (c)  $y[n] = x[-n]$  — *fading* (reflexión en el tiempo)
- (d)  $y[n] = x[n] \cos \Omega_0 n$  — modulador.



Un sistema causal es aquel cuya salida depende de entradas presentes y pasadas, mas no de entradas futuras. Es decir no tiene memoria futura. No se puede obtener una salida sin antes aplicar una entrada.  $y[n]$  solo podría depender de valores del tipo de  $x[n]$ ,  $x[n+1]$ ,  $x[n+2]$ , etc.

Un sistema no causal es aquel cuya salida depende solo de valores futuros de la entrada. Ejemplo:  $y[n] = x[-n]$ .

Un sistema estable es un sistema en reposo de tipo entradas acotadas y salidas acotadas BIBO (*ing.* bounded input-bounded output).

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \rightarrow |y[n]| \leq M_y < \infty \quad (3)$$

Determinar si los siguientes sistemas son estables (acotados) o no:

**(b)**  $x[n] = u[n]$

El principio de superposición se cumple cuando se satisfacen dos condiciones:

- Aditividad (*ing.* additivity) — se debe cumplir la propiedad:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= T\{x_1[n]\} \\ y_2[n] &= T\{x_2[n]\} \\ y_1[n] + y_2[n] &= T\{x_1[n] + x_2[n]\} \\ &= T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \end{aligned}$$

- Homogeneidad (escalamiento, *ing.* scaling) — si se escala la señal de entrada, la señal de salida también es escalada.

$$\begin{aligned} x[n] &\rightarrow y[n] = T\{x[n]\} \\ ax[n] &\rightarrow T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n] \end{aligned}$$

## SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES DE TIEMPO DISCRETO

En un sistema lineal, la respuesta a una suma (aditividad) de señales escaladas (homogeneidad) es igual a la correspondiente suma de las salidas escaladas, si cada una de las entradas se tomaran de forma individual, es decir:

Tiempo continuo:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x_k(t) \rightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k y_k(t)$$

$$a_0 x_0(t) + a_1 x_1(t) + \dots + a_{M-1} x_{M-1}(t) \rightarrow a_0 y_0(t) + a_1 y_1(t) + \dots + a_{M-1} y_{M-1}(t)$$

donde,  $y_k(t) = T\{x_k(t)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, M-1$

Tiempo discreto:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x_k[n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} a_k y_k[n]$$

$$a_0 x_0[n] + a_1 x_1[n] + \dots + a_{M-1} x_{M-1}[n] \rightarrow a_0 y_0[n] + a_1 y_1[n] + \dots + a_{M-1} y_{M-1}[n]$$

donde,  $y_k[n] = T\{x_k[n]\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, M-1$



# SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES DE TIEMPO DISCRETO

Si conocemos que cuando la entrada es la función  $\delta[n]$  y obtenemos la salida  $y[n] = 2^n \cos(2\pi n)$

$$\delta[n] \rightarrow y[n] = 2^n \cos(2\pi n)$$

? 'que obtendremos en la salida si la nueva entrada es de la forma?

$$3\delta[n+1] + \frac{1}{3}\delta[n] + \delta[n-3] \rightarrow ?$$

# RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI DE TIEMPO DISCRETO

## Sistema LTI

Un **sistema LTI** es el que cumple los atributos de **linealidad** e **invarianza en el tiempo**. Por tal razón es posible relacionar la entrada de un sistema LTI y su salida mediante la *suma de convolución*.

- Los sistemas LTI son el fundamento del procesamiento de señales.
- Si se conoce la respuesta de un sistema cuando la entrada es un impulso unitario  $\delta(t)/\delta[n]$ , es posible conocer la salida para cualquier señal arbitraria en su entrada.
- Gracias a los sistemas LTI, la salida del sistema se puede expresar en función de respuestas del sistema a entradas de impulso unitario escaladas y desplazadas en el tiempo.



## RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI

### Tiempo continuo:

Cualquier señal arbitraria de tiempo continuo  $x(t)$  se puede descomponer como una sucesión y suma infinita (integral) de impulsos unitarios escalados y desplazados en el tiempo. De las propiedades del impulso unitario:

$$\begin{aligned} x(t)\delta(t) &= x(0)\delta(t) \\ x(t)\delta(t-\tau) &= x(\tau)\delta(t-\tau) \\ x(t)\delta(t-\tau) &= 0, \forall t \neq \tau. \end{aligned}$$

### Tiempo discreto:

Cualquier señal arbitraria de tiempo discreto  $x[n]$  se puede descomponer como una suma de impulsos unitarios escalados y desplazados en el tiempo. De las propiedades del impulso unitario:

$$\begin{aligned} x[n]\delta[n] &= x[0]\delta[n] \\ x[n]\delta[n-k] &= x[k]\delta[n-k] \\ x[n]\delta[n-k] &= 0, \forall n \neq k. \end{aligned}$$

## RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI

Las *respuesta al impulso*  $h(t)/h[n]$  de un sistema LTI, es la transformación que experimenta el sistema cuando la entrada del sistema es señal singular del **impulso unitario**  $\delta(t)/\delta[n]$ .

Tiempo continuo:

$$h(t) = T\{\delta(t)\} \quad (4)$$

Tiempo discreto:

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \quad (5)$$



$$x[n] = \{\dots, x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots\}$$
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n-k]$$

## RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI DE TIEMPO DISCRETO

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto al impulso unitario

Dibujar y determinar mediante suma de impulsos escalados y desplazados la siguiente secuencia:

$$x[n] = \{2, 3, 2, 0, 4\}$$



## RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI DE TIEMPO DISCRETO

### Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto al impulso unitario

La respuesta  $h[n]$  al impulso unitario  $\delta[n]$  se puede representar mediante la siguiente función por partes y gráfica:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n = -1; \\ 2, & \text{para } n = 0; \\ -1, & \text{para } n = 1; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

Encontrar la respuesta para:

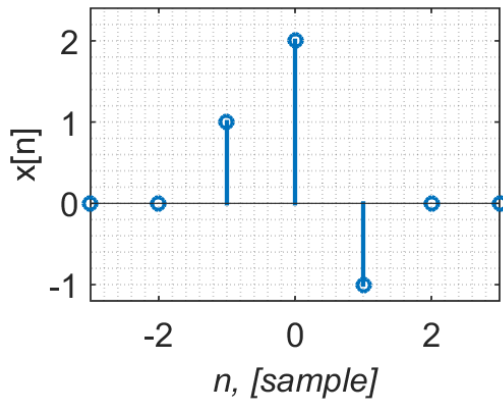
(a)  $2\delta[n]$

(b)  $\delta[n+2]$

(c)  $\delta[n-1]$

(d)  $2\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n+2]$

# RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI DE TIEMPO DISCRETO





## RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI DE TIEMPO CONTINUO A UNA ENTRADA ARBITRARIA

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo con transformación  $T\{\cdot\}$ . Su salida  $y(t)$  para una entrada  $x(t)$  se puede expresar mediante:

$$y(t) = T\{x(t)\} \quad (6)$$

La señal  $x(t)$  puede ser representada por una suma infinitesimal de impulsos unitarios,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Entonces la salida se puede reescribir

$$y(t) = T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} \quad (7)$$

Por propiedades de linealidad, es posible introducir el operador de transformación dentro de la integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T\{x(\tau) \delta(t - \tau)\} d\tau$$

como  $x(\tau)$  es una constante, valor de  $x(t)$  en  $\tau$  por la propiedad de homogeneidad, es posible extraerla

## RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI DE TIEMPO CONTINUO A UNA ENTRADA ARBITRARIA

Tal cual como se demostró en anteriormente, la expresión  $T\{\delta(t - \tau)\}$  representa la respuesta al impulso desplazada  $\tau$  unidades de tiempo  $h(t - \tau)$ . Por eso podemos reescribir la anterior ecuación de la siguiente manera

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (9)$$

La ecuación anterior se conoce como integral de convolución.

- Podemos asegurar que si conocemos la respuesta de un sistema al impulso unitario, es posible conocer la respuesta a cualquier tipo de señal.
- Un sistema LTI de tiempo continuo se puede caracterizar completamente con su respuesta al impulso unitario  $h(t)$ .
- Un sistema LTI solo se caracteriza mediante una sola respuesta al impulso  $h(t)$ .

# INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

La integral de convolución de dos secuencias (señales de tiempo discreto  $x(t)$  y  $h(t)$ ), esta definida mediante la siguiente integral:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (10)$$

Donde,  $*$  representa la operación de suma de convolución. La salida de cualquier sistema LTI de tiempo discreto es la suma de convolución de la señal de entrada  $x(t)$  y la respuesta al impulso del sistema  $h(t)$ .

## RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI DE TIEMPO DISCRETO A UNA ENTRADA ARBITRARIA

Se un sistema lineal e invariante en el tiempo con transformación  $T\{\cdot\}$ . Su salida  $y[n]$  para una entrada  $x[n]$  se puede expresar mediante:

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (11)$$

Como se muestra en la ecuación 12, es posible descomponer cualquier señal arbitraria  $x[n]$  como una suma de secuencias de impulso unitario escaladas y desplazadas en el tiempo. De la anterior ecuación

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n-k]\right\} \quad (12)$$

Es posible por linealidad, introducir la transformación dentro de la suma

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x_k \delta[n-k]\}$$

como  $x_k = x[k]$  es una constante, por la propiedad de homogeneidad, es posible extraerla de la transformación lineal

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n-k]\} \quad (13)$$

## RESPUESTA DE UN SISTEMA LTI DE TIEMPO DISCRETO A UNA ENTRADA ARBITRARIA

La expresión  $T\{\delta[n-k]\}$  representa la respuesta al impulso desplazada  $k$  unidades en el tiempo  $h[n-k]$ . Por eso podemos reescribir 13 de la siguiente manera

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (14)$$

La ecuación 14 se conoce como suma de convolución. Podemos asegurar que si conocemos la respuesta de un sistema al impulso unitario, es posible conocer la respuesta a cualquier tipo de señal.

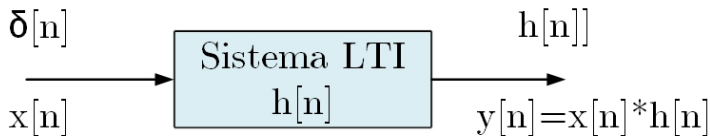
Un sistema LTI de tiempo discreto se puede caracterizar completamente con su respuesta al impulso unitario  $h[n]$ . Un sistema LTI solo se caracteriza mediante una sola respuesta al impulso  $h[n]$ .

## SUMA DE CONVOLUCIÓN

La suma de convolución de dos secuencias (señales de tiempo discreto  $x[n]$  y  $h[n]$ ), esta definida mediante la siguiente suma:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (15)$$

Donde,  $*$  representa la operación de suma de convolución. La salida de cualquier sistema LTI de tiempo discreto es la suma de convolución de la señal de entrada  $x[n]$  y la respuesta al impulso del sistema  $h[n]$ .



**Figura 2:** Bloque de convolución.

## OPERACIÓN DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (16)$$

- 1 Se realiza un **cambio de dominio**, es decir toda  $t$  es remplazada por el nuevo dominio  $\tau$ .
- 2 Luego la respuesta al impulso  $h(\tau)$  se **invierte en el tiempo** (se refleja sobre el origen  $\tau = 0$ ).
- 3 Después de realizar la reflexión, la señal  $h(\tau)$  se **desplazará**  $t$  en todo el espacio del eje- $\tau$  desde  $-\infty$  a  $\infty$ ,  $h(t - \tau)$ .
- 4 Las dos secuencias  $x(t)$  y  $h(t - \tau)$  se **multiplican** entre si para formar una *señal producto* para todos los valores de  $\tau$  obteniendo una nueva señal, con una  $t$  fija en un valor de conveniencia, explorando como ya se mencionó todo el espacio del eje- $\tau$ .
- 5 La salida será una muestra de la función  $y(t)$  y es igual a la integral de todos los valores resultados de la multiplicación  $x(\tau)h(t - \tau)$  (se suman para toda  $\tau$ ). Donde la muestra en  $t$  específico fue determinado por el corrimiento en ese instante  $t - \tau$ .
- 6 Se repiten estos pasos para el intervalo de  $-\infty < t < \infty$

## OPERACIÓN DE LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

- 1 Se realiza un **cambio de dominio**, es decir toda  $n$  es remplazada por el nuevo dominio  $k$ . Luego la respuesta al impulso  $h[k]$  se **invierte en el tiempo** (se refleja sobre el origen  $k = 0$ ). Después de realizar la reflexión, la señal  $h[-k]$  se **desplazará**  $n$  en todo el espacio del eje- $k$  desde  $-\infty$  a  $\infty$ ,  $h[n-k]$ .
- 2 Las dos secuencias  $x[k]$  y  $h[n-k]$  se **multiplican** entre si para formar una *secuencia producto* para todos los valores de  $k$  obteniendo una nueva secuencia, con una  $n$  fija en un valor de conveniencia, explorando como ya se mencionó todo el espacio del eje- $k$ .
- 3 La salida será una muestra de la función  $y[n]$  y es igual a la suma de todos los valores resultados de la multiplicación  $x[k]h[n-k]$  (se suman para toda  $k$ ). Donde la muestra en  $n$  específico fue determinado por el corrimiento en ese instante  $n-k$ .
- 4 Se repiten estos pasos para el intervalo de  $-\infty < n < \infty$



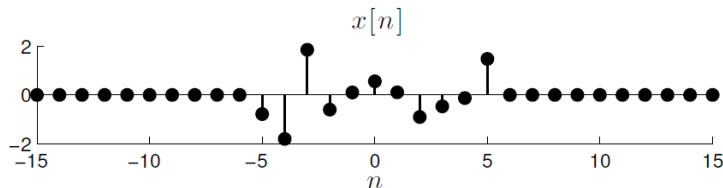
## Duración de la suma de convolución

Se dice que la señal  $x[n]$  esta definida para un **intervalo soporte**  $[N_1; N_2]$ , donde  $N_1 \leq N_2$ , si  $x[n] = 0$  para todo  $n < N_1$  y  $n > N_2$ . La duración de  $x[n]$   $D_x = \text{length}\{x[n]\}$  es igual a  $N_2 - N_1 + 1$ .

Si  $x[n]$  tiene una duración  $D_x$  muestras y  $h[n]$  tiene una duración de  $D_h$  muestras, entonces la convolución  $y[n] = x[n] * h[n]$  tendrá una duración  $D_x + D_h - 1$  muestras.

## Duración de una señal

Una señal con un intervalo soporte  $[-5;5]$  y duración de 11 muestras.

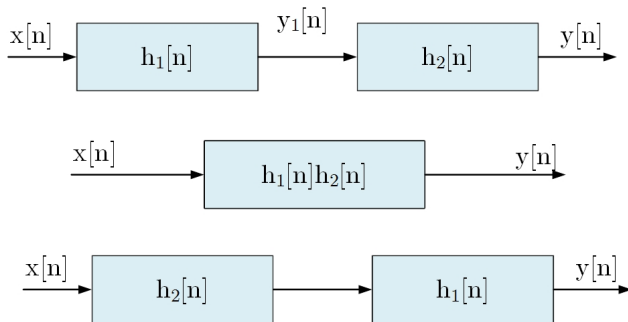




## PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN: ASOCIATIVA

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

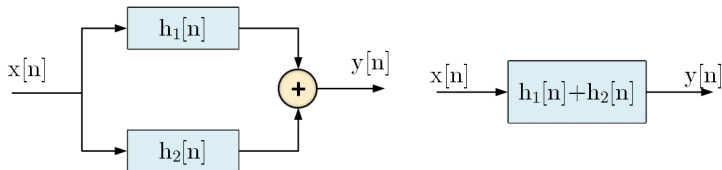
Tomamos a  $y_1[n] = x[n] * h_1[n]$ , y a  $y[n] = y_1[n] * h_2[n]$ , si hacemos  $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$ , podríamos describir la anterior ecuación de la forma clásica  $y[n] = x[n] * h[n]$ .



**Figura 4:** Propiedad asociativa de la convolución.

# PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN: DISTRIBUTIVA

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

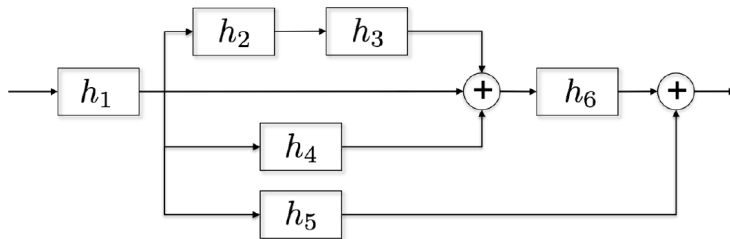


**Figura 5:** Propiedad distributiva de la convolución.

# SUMA DE CONVOLUCIÓN

## Propiedades

Determine la respuesta al impulso total  $h[n]$  para la interconexión de los siguientes subsistemas de la figura 6:



**Figura 6:** Interconexión de subsistemas.

## OPERACIÓN DE LA SUMA DE CONVOLUCIÓN

### Ejemplo

Para un sistema LTI cuya respuesta al impulso denota mediante  $h[n] = \{1, 2, 1, -1\}$ . Dibuje  $h[n]$  y  $x[n]$ . Determine la respuesta del sistema a la entrada:

$$x[n] = \{1, 2, 3, 1\}$$

### Ejemplo

Para un sistema LTI, la respuesta al impulso se puede expresar mediante la siguiente ecuación

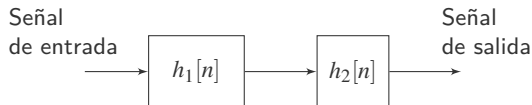
$$h[n] = a^n u[n], \text{ donde } |a| < 1$$

Calcular la salida  $y[n]$  del sistema LTI, si en la entrada se encuentra la siguiente señal:

$$x[n] = u[n].$$

Determine la respuesta al impulso total  $h[n]$  para la interconexión en cascada de dos sistemas LTI, tal cual como se muestra en la gráfica, donde

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]; \\ h_2[n] &= \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]. \end{aligned} \quad (17)$$



Para un sistema LTI, la respuesta al impulso se puede expresar mediante la siguiente ecuación

$$h[n] = u[n] - u[n-3]$$

Calcular la salida  $y[n]$  del sistema LTI, si la entrada se encuentra definida mediante:

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + 2\delta[n-1]$$









