Transformada de Fourier

Análisis de señales

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería

Código: SA2018I_TTQ07

Profesor: Marco Teran

Deadline: 30 de abril de 2017

Transformada de Fourier de tiempo continuo (CTFT)

(1.5 puntos)

1. Encontrar la transformada de Fourier de tiempo continuo **(CTFT)** para cada una de las siguientes señales, dibujar la magnitud de la **CTFT** de los ejercicios pares:

(a) $x(t) = 3\cos^2(60\pi t)$

(b) $x(t) = 2\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

(c) $x(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leqslant 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$

(d) $x(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|t|}\,u(t)$

(e) $x(t) = \dfrac{1}{9+t^2}$

(f) $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

(g) $x(t) = \delta(t - t_0)$.

(h) $x(t) = u(t - t_0)$.

(i) $x(t) = -e^{-6t}u(t)$.

(j) $x(t) = e^{-2t}\left[u(t) - u(t-5)\right]$.

(k) $x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{3t}u(-t)$.

(l) $x(t) = 2\cos(2\pi t + 4\pi)\left[u(t) - u(t-1)\right]$.

(m) $x(t) = e^{-|t|}$.

(n) $x(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$, donde $a > 0$.

(o) $x(t) = 2\cos^2(t)$

2. Si $x(t) = X(\omega)$, determine la transformada de Fourier de

(a) $x(1-t)$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cos t$

(c) $x\left(\frac{t}{2} - 2\right)$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}[x(-2t)]}{\mathrm{d}t}$.

3. Mediante las diversas propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo **(CTFT)**, derive la transformada de Fourier de las siguientes señales de la transformada original de $u(t)$:

(a) $x(t) = \delta(at)$. *(Entienda la función $\delta(t)$ y su relación con la derivada de $u(t)$)*

(b) $x(t) = 3tu(t)$.

(c) $x(t) = -e^{-6t}u(t)$.

(d) $x(t) = te^{-at}u(t)$.

(e) $x(t) = e^{-5\pi t}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$.

(f) $x(t) = \left(e^{-t}\cos(2t) - 5e^{-3t}\right)u(t) + \frac{1}{2}e^{-t}$.

4. Determine la transformada de Fourier de la señal

$$x(t) = e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t)$$

5. Consideremos la señal *Campana de Cauchy* dada por

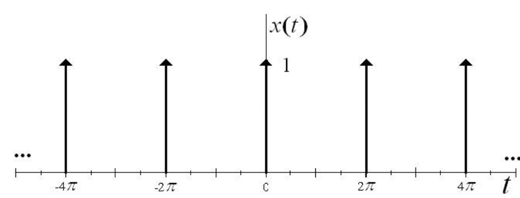
$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(a) Demuestre que $x(t) \in L_1$.

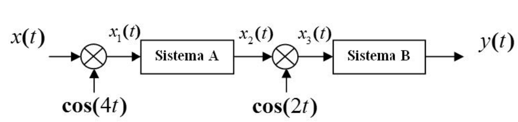
(b) Encuentre la transformada de Fourier de $x(t)$.

Tenga en cuenta que $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + b^2x} = \frac{1}{ab}\operatorname{atan}\left(\frac{bx}{a}\right)$

6. Obtenga la transformada de Fourier de la secuencia de impulsos de peso unitario, que se ilustra en la figura.



7. Considere el sistema que se ilustra en la siguiente Figura

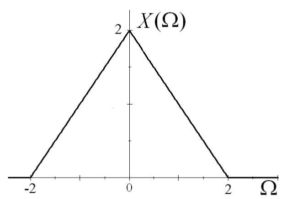


- El sistema A tiene relación entrada salida $x_2(t) = \frac{1}{2}x_1\left(\frac{t}{2}\right)$.

- El sistema B es lineal e invariante con respuesta impulso $h(t)$.

(a) Determine la transformada de Fourier de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ en función de $X(\Omega)$.

(b) Si la señal de entrada tiene la transformada de Fourier $X(\Omega)$ que se presenta en la Figura, dibuje las transformadas de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$.



Transformada inversa de Fourier de tiempo continuo (CTIFT)

(1 puntos)

8. Encontrar y dibujar la transformada inversa de Fourier **(IFT)** para cada una de las siguientes señales

(a) $X(\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega)^2}$

(b) $X(\omega) = 1 - e^{-2|\omega|}$

(c) $X(\omega) = \omega \sin^2(2\omega\ )$

(d) $X(\omega) = \dfrac{1}{1-\omega^2+j3\omega}$

9. Resuelva la **(FT)** o la **(IFT)** (dependiendo del caso) aplicando solo propiedades de la **(FT)**.

(a) $x(t) = \sin(\pi t)\, e^{-2t} u(t)$

(b) $x(t) = e^{|3t-2|}$

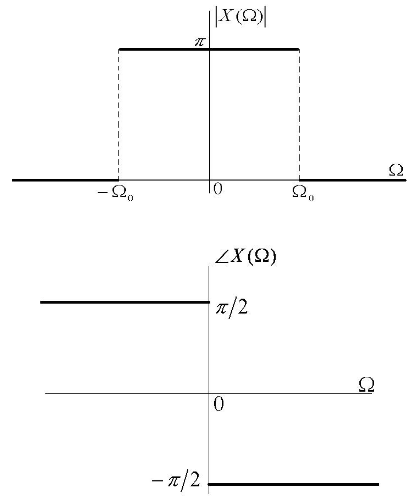
(c) $x(t) = \left[\dfrac{2\sin(\pi t)}{\pi t}\right]\left[\dfrac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right]$

(d) $X(\omega) = \dfrac{2\sin(\omega)}{\omega(j\omega+1)}$

(e) $X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+1)} + 2\pi\delta(\omega)$

(f) $X(\omega) = \dfrac{j\omega}{(j\omega+2)^2}$

10. Determina la señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier se ilustra en la figura.



Transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT)

(1.5 puntos)

11. Encontrar la transformada de Fourier de tiempo discreto **(DTFT)** para cada una de las siguientes señales. Dibujar el valor absoluto remplazando las constantes (incógnitas) por números de su preferencia y comodidad.

(a) $x[n] = \dfrac{3}{2} 2^n u(n)$

(b) $x[n] = -\sqrt{3\pi} a^n u(-n-1)$

(c) $x[n] = u[n] - u(n-N)$

(d) $x[n] = a^{|n|}$, para $|a| < 1$

(e) $x[n] = \{\ldots, 0, 1, 2, \overset{\downarrow}{3}, 2, 1, 0, \ldots\}$

(f) $x[n] = \dfrac{1}{3}\cos(0.5\pi n)$,

12. Para la siguiente señal:

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)\,.$$

(a) Dibujar $x[n]$.

(b) Encontrar la transformada de Fourier de tiempo discreto **(DTFT)** .

(c) Calcular y dibujar la magnitud de la transformada de Fourier $|X(\Omega)|$.

13. Encontrar la transformada de Fourier de tiempo discreto **(DTFT)** para la siguiente señal

$$x[n] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\,,\ para\ |a| < 1$$

Dibujar la magnitud de la transformada de Fourier $|X(\Omega)|$.

Transformada inversa de Fourier de tiempo discreto (DTIFT)

(1 puntos)

14. Encontrar y dibujar la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto **(DTIFT)** para cada una de las siguientes señales

(a) $X(\Omega) = \dfrac{3 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{-\frac{1}{16}e^{-j4\Omega} + 1}$

(b) $X(\Omega) = \dfrac{2 - \frac{5}{3}e^{-j3\Omega}}{\frac{1}{3}e^{-j2\Omega} - \frac{4}{5}e^{-j\Omega} + 1}$

(c) $X(\Omega) = 4\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$

(d) $X(\Omega) = \cos(2\Omega)$

(e) $X(\Omega) = \begin{cases} \beta, & \text{si } |\Omega| \leqslant W \\ 0, & W \leqslant |\Omega| \leqslant \pi \end{cases}$.

15. Encontrar y dibujar la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto **(DTIFT)** de la siguiente señal:

$$X_{2\pi}(\Omega) = 2\frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

16. Encontrar y dibujar la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto **(DTIFT)** de la siguiente señal:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 3\Omega, & \text{si } |\Omega| \leqslant W \\ 0, & W \leqslant |\Omega| \leqslant \pi \end{cases}$$