Tema 06: Análisis espectral de señales: Serie de Fourier

Análisis de señales

Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2018II

Outline

Formula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x} (\cos y + i \sin y)$$

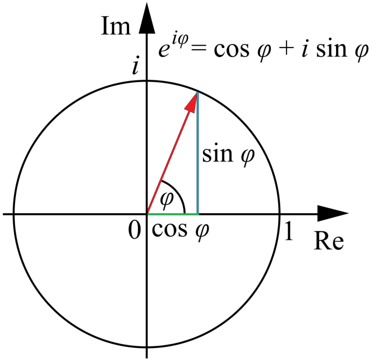

Figura 1: Formula de Euler

Si s solo tiene parte imaginaria, $s = i\omega$:

Tiempo continuo:

$x(t) = Ae^{i\omega t} = A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$

Tiempo discreto:

$x[n] = Ae^{i\Omega n} = A(\cos(\Omega n) + i\sin(\Omega n))$

- Dentro de sus propiedades se encuentra la periodicidad, cuyo periodo fundamental
  - Tiempo continuo: $T_0 = T\{x(t)\} = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
  - Tiempo discreto: $N_0 = T\{x[n])\} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

Señales sinusoidales de tiempo continuo

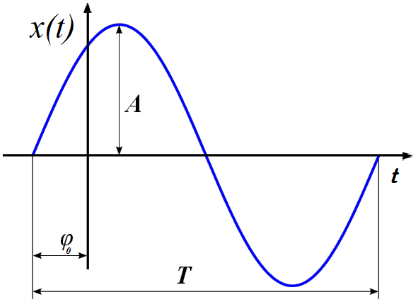

Figura 2: Parámetros de una señal sinusoidal de tiempo continuo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0),$$

donde,

$$\begin{aligned} A \quad &- \quad \text{amplitud real de la señal;} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \quad &- \quad \text{frecuencia angular } [rad/s]; \\ T = \frac{1}{f} \quad &- \quad \text{periodo fundamental } [s], \text{ frecuencia } f\ [H \\ \phi_0 \quad &- \quad \text{fase inicial } [rad], \text{ entre } 0 \text{ y } 2\pi.\ \phi_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Introducción

Es posible descomponer cualquier señal en elementos sinusoidales, y el análisis de Fourier muestra como hacerlo.

Análisis:

- Del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia
- Encontrar la contribución de cada frecuencia distinta
- Encontrar propiedades ocultas de la señal

Síntesis

- Del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo
- Crear señales a partir del conocimiento de la frecuencia
- Fijar señales en regiones especificas de frecuencia

Historia

Según el físico matemático francés *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (Auxerre, Francia, 21 de marzo de 1768 - París, 16 de mayo de 1830) cualquier señal, sin importar su complejidad, se puede generar a partir de la suma de armónicos, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental (ligada a un periodo fundamental), con distintas fases y amplitudes.

Figura 3: Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier realizado por el pintor y dibujante francés Louis Léopold Boilly

Bases matemáticas

- El análisis de Fourier se puede representar mediante un cambio de base.
- Un cambio de base es un cambio de perspectiva para el análisis.
- Si las bases a las cuales se realizará el cambio son bien escogidas, esta nueva base revelará características hasta ahora desconocidas de la señal.
- Señal continua periódica con periodo T y secuencia discreta periódica con periodo N.

Series de Fourier para señales periódicas

- Especial para el análisis de señales y sistemas.
- Muchas similitudes entre la serie de Fourier de tiempo continuo y la serie de tiempo discreto.

DTFS

Una señal periódica, de periodo T/N (dependiendo del caso), se puede representar mediante la Serie de Fourier (FS, *ing.* Fourier Series) y consta de la suma de funciones armónicamente relacionadas.

Series de Fourier para señales periódicas

Tiempo continuo:

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}kt} = e^{j\omega kt} = e^{j\omega_k t}, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Donde $\omega_k = \frac{2\pi}{T}k$.

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a T, como productos enteros del inverso de este, se denominan *armónicos*.

Tiempo discreto:

Funciones armónicamente relacionadas:

$$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\Omega kn} = e^{j\Omega_k n}, \text{ donde } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ N-1. \tag{2}$$

Donde $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$.

- Cada uno de estos exponenciales complejos, relacionados a N, como productos enteros del inverso de este, se denominan *armónicos*.
- $s_k[n]$ es periódica de periodo N, $s_k[n] = s_k[n+N]$.

Serie exponencial de Fourier para señales de tiempo continuo

Ecuación de síntesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t} \tag{3}$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\omega_k t} \, \mathrm{d}t \tag{4}$$

donde, $\omega_k = \omega_0 k = \dfrac{2\pi}{T} k$ — k-ésimo armónico. ω_0 — frecuencia fundamental de la señal periódica.

SERIES EXPONENCIAL DE FOURIER PARA SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

Ecuación de síntesis

$$x[n] = \sum_{n=\langle N \rangle} c_k e^{j\Omega kn} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5}$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\Omega kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{6}$$

donde, $\Omega_k = \Omega_0 k = \dfrac{2\pi}{N} k$ — k-ésimo armónico. Ω_0 — frecuencia fundamental de la secuencia periódica.

Serie exponencial de Fourier para señales de tiempo discreto

- Los coeficientes de de la serie exponencial de Fourier c_k proporcionan una descripción de $x[n]/x(t)$ en el dominio de la frecuencia.
- c_k, de naturaleza compleja, representa la amplitud y la fase asociada a cada uno de los armónicos, componentes de frecuencia.
- Como $s_k[n]$ es periódica, también lo es c_k y su periodo es N, $c_k = c_{k+N}$.
- El espectro de una sea una señal periódica $x[n]$, de periodo N, es una secuencia periódica de periodo N.

  Coeficiente especial: cuando $k = 0$ obtenemos el valor promedio de la señal $x[n]/x(t)$

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \tag{7}$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

Serie trigonométrica de Fourier

Ecuación de síntesis

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t) \tag{9}$$

Ecuaciones de análisis

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \sin(\omega_k t)\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

Convergencia de la serie de Fourier de tiempo discreto

- ¿Que es la convergencia de una serie (sumatoria)?

Convergencia de la FS

Si la serie de Fourier es **finita**, entonces no existen problemas de **convergencia**.

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Se asume que $x(t)$ es periódica con periodo T.

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \tag{13}$$

Linealidad

$$x(t) \quad \xrightarrow{FS} \quad a_k \tag{14}$$

$$y(t) \quad \xrightarrow{FS} \quad b_k \tag{15}$$

entonces,

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{FS} \alpha a_k + \beta b_k \tag{16}$$

Desplazamiento en el tiempo

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k = c[k] \tag{17}$$

entonces

$$x(t-\tau) \xrightarrow{FS} c_k e^{-j\omega_k \tau}, \;\; \tau \in \mathbb{R} \tag{18}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Inversión temporal

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k \tag{19}$$

$$x(-t) \xrightarrow{FS} c_{-k} \tag{20}$$

Multiplicación

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_k \tag{21}$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_k \tag{22}$$

entonces

$$x(t)y(t) \xrightarrow{FS} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} = a_k * b_k \tag{23}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo continuo

Conjugación y simetría conjugada

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_k \tag{24}$$

$$y(t) = x^*(t) \xrightarrow{FS} c^*_{-k} \tag{25}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Es necesario recordar la propiedad de periodicidad del exponencial complejo de tiempo discreto:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n} \tag{26}$$

Los coeficientes c_k son periódicos con periodo fundamental N_0. Es posible escribir entonces

$$c_{k+N_0} = c_k \tag{27}$$

$$e^{j\Omega_0(k+N_0)n} = e^{j\Omega_0 kn} e^{j\Omega_0 N_0 n} = e^{j\Omega_0 kn} \tag{28}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Para la relación que existe entre $x[n] \to c_k$ y $c[k] \to x_n$.

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-j\Omega_0 kn} \tag{29}$$

si hacemos $n = -m$, entonces

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m] e^{j\Omega_0 kn} \tag{30}$$

hacemos $k = n$ y $m = k$

$$c[n] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k] e^{j\Omega_0 kn} \tag{31}$$

Si comparamos resultados obtenemos que

$$x[n] \quad \xrightarrow{DTFS} \quad c_k = c[k] \tag{32}$$

$$c[n] \quad \xrightarrow{DTFS} \quad \frac{1}{N_0} x[-k] \tag{33}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

$$c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^* \tag{34}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

Una secuencia $x[n] \in \mathbb{R}$ se puede expresar mediante la suma de sus componentes par e impar:

$$x[n] = x_o[n] + x_e[n] \tag{35}$$

Si $x[n]$ es real y par, sus coeficientes de Fourier c_k son reales. Si $x[n]$ es real e impar, sus coeficientes de Fourier c_k son imaginarios.

$$x[n] \xrightarrow{DTFS} c_k \tag{36}$$

$$x_e[n] \xrightarrow{DTFS} \Re e\{c_k\} \tag{37}$$

$$x_o[n] \xrightarrow{DTFS} j\Im m\{c_k\} \tag{38}$$

Propiedades de la serie de Fourier de tiempo discreto

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N_0\rangle}|c_k|^2 \tag{39}$$

Series de Fourier de tiempo discreto

Ejemplo

Considera la siguiente señal periódica con periodo $N = 10$. Calcule el espectro de la señal.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{para } 5 \leq n \leq 9. \end{cases}$$

Series de Fourier de tiempo continuo

Ejemplo de la onda cuadrada

Determine el espectro de las siguiente señal periódica, con periodo 2π:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ -1, & \text{para } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

Series de Fourier de tiempo discreto

Ejemplo

Determine el espectro de las siguientes señales:

a. $x[n] = \cos\sqrt{2}\pi n$

b. $y[n] = \cos\frac{\pi n}{3}$

c. $p[n]$ es periódica con periodo $N = 4$ y $p[n] = \underset{\uparrow}{1}, 2, 0, 0$

Series de Fourier de tiempo discreto

Ejercicio

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$ mostrada en la figura

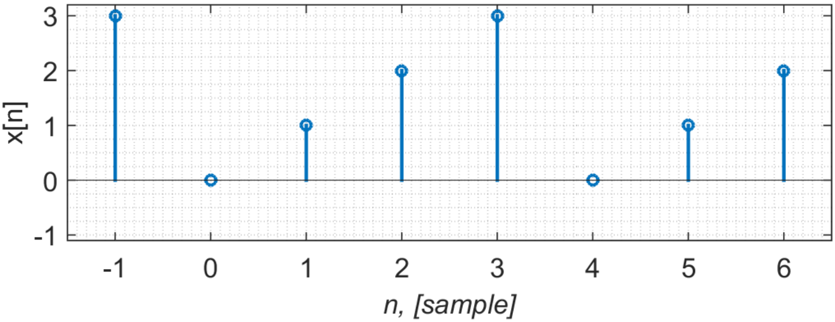

Figura 4: Señal periódica

Series de Fourier de tiempo discreto

Ejercicio

Determine los coeficientes de Fourier para la secuencia periódica $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

Series de Fourier de tiempo discreto

Ejercicio

Determine el espectro de las siguientes señales:

a) $x[n] = \cos \dfrac{\pi}{4} n$

b) $y[n] = \cos^2 \dfrac{\pi n}{8}$

c) $w[m] = \cos \dfrac{\pi}{4}(m-3)$

d) $s[n] = \cos \dfrac{\pi}{2} n + \cos \dfrac{2\pi n}{5}$

e) $x[n]$ es una señal periódica con periodo $N = 8$, y está definida en un periodo por $x[n] = \{\underset{\uparrow}{-2}, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}$