

Tema 08: Transformada de Laplace

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2018II

OUTLINE

- 1 Introducción
- 2 Región de convergencia, ROC
- 3 Región de convergencia, ROC
- 4 Polos y ceros
 - Propiedades de la ROC
- 5 Propiedades de la Transformada de Laplace
- 6 Transformada inversa de Laplace

INTRODUCCIÓN

Historia

Pierre-Simon Laplace (Francia, 28 de marzo de 1749 – París, 5 de marzo de 1827), Astrónomo y matemático francés de origen humilde. Presentó la transformada que lleva su nombre en 1779, aplicada a la resolución de ecuaciones diferenciales.



Figura 1: Pierre-Simon Laplace.

INTRODUCCIÓN

- Sistemas que se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales (*técnicas de análisis*)
- Convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas (*facilita solución*)
- Dominio temporal \rightarrow Dominio frecuencial \rightarrow solución \rightarrow dominio temporal
- Permite trabajar con las condiciones iniciales de los sistemas

Transformada de Laplace

Herramienta matemática que permite la *representación alternativa* de las señales y los sistemas LTI: del dominio del tiempo continuo al dominio de la **variable compleja** s , mediante una integral de transformación.

DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Transformar una señal $x(t)$ del dominio del tiempo continuo t al dominio de la variable compleja s

La transformada de Laplace (LT, *ing.* Laplace transform) se denota en términos de una integral de transformación:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

donde,

$\mathcal{L}\{\cdot\}$	—	operador de la transformada de Laplace;
$X(s)$	—	transformada de Laplace de $x(t)$;
$s = \sigma + j\omega$	—	variable compleja;
$\sigma = \Re\{s\}$	—	parte real de s ;
$\omega = \Im\{s\}$	—	parte imaginaria de s .

- Se le conoce como Transformada de Laplace bilateral (dos lados)
- st es adimensional. s , $[s^{-1}]$

DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE: TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL

- De un extremo (lado)

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

donde, $0^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [0 - \varepsilon]$ — tiempo justo antes de $t = 0$

- $X(s) = X_I(s)$ si $x(t) = 0$ para $t < 0$

CONDICIÓN DE EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

- $x(t)$ es una señal, función real de la variable independiente continua t (tiempo, coordenadas, etc.)

La Transformada de Laplace **existe**, si se cumplen las siguientes condiciones (*condiciones de Dirichlet*):

- $x(t) = 0$, para $t < 0$
- $x(t)$ es continua a tramos para $t \geq 0$:
 - Contiene discontinuidades de primer orden en cada subintervalo de t
 - El numero de discontinuidades y de maximos y minimos es finito.
- Existe $M > 0$ y un $\sigma \geq 0$, que para todos los valores de t , se cumple la condición:

$$|x(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad (3)$$

σ — exponente de crecimiento de $x(t)$

- Estas propiedades se cumplen en casi todos los procesos físicos
- La señal se multiplica por un exponencial que acota la función en sus valores extremos

$$Me^{-\sigma t}|x(t)| \rightarrow 0, \text{ si } t \rightarrow \infty \quad (4)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE: EJEMPLOS

Ejemplo

Encontrar la transformada de Laplace de

$$x(t) = u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la transformada de Laplace de

$$x(t) = \delta(t)$$

REGIÓN DE CONVERGENCIA

- La LT usualmente no converge para todo el plano complejo s

Región de convergencia

Intervalo de valores de la variable compleja s , para los cuales la transformada de Laplace converge.
ROC — region of convergence

- La convergencia depende solamente de $\Re s = \sigma$

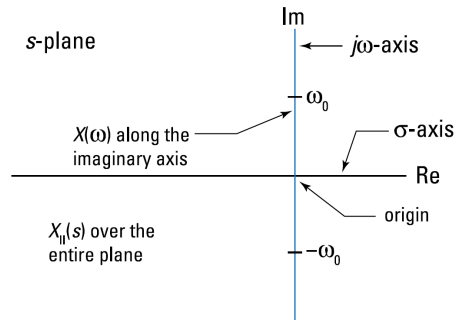


Figura 2: Plano complejo s

REGIÓN DE CONVERGENCIA, ROC

- Generalmente la ROC es una banda vertical controlada por σ_1 y σ_2

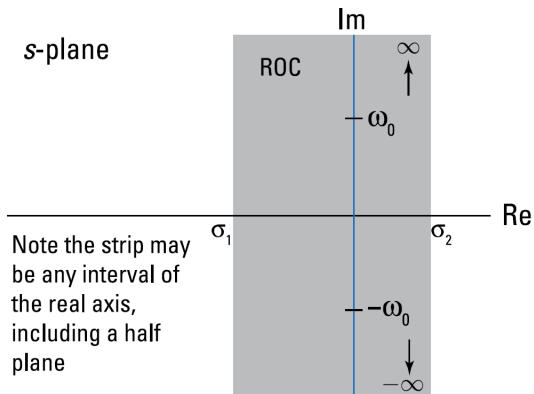


Figura 3: Ejemplo de ROC en el plano complejo

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace y la región de convergencia de la señal

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

Graficar la ROC en el plano complejo

Ejemplo

Encontrar la trasformada de Laplace y la region de convergencia de

$$f(t) = te^{-at}u(t)$$

POLOS Y CEROS

- Generalmente $X(s)$ es una función racional en s

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m a_k s^{m-k}}{\sum_{k=0}^n b_k s^{n-k}} \quad (5)$$

donde, b_k y a_k — coeficientes constantes reales;
 m y n — el orden de los polinomios son enteros positivos.

POLOS Y CEROS

- Es necesario asegurarse de que $X(s)$ es propiamente una **función racional racional propia** $N > M$.
EN caso contrario (función racional impropia),

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{r=0}^{M-N} K_r s^r + \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad (6)$$

donde $N_1(s)$ es el residuo de la división polinomial

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \dots + a_m}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m} = \frac{a_0 (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{b_0 (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)} \quad (7)$$

- Las raíces del numerador se conocen como ceros — z_k
- Las raíces del denominador se conocen como polos — p_k

POLOS Y CEROS

Ejemplo

Encontrar los polos y ceros de la siguiente función racional de Laplace

$$X(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3}$$

PROPIEDADES DE LA ROC

- $X(s)$ depende de la naturaleza de $x(t)$
- $X(s)$ es una función racional de s

1 La ROC no contiene ningún polo

2 $x(t)$ es una señal de duración finita, $x(t) = 0$, excepto en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$

3 Si $x(t)$ es una señal por la derecha, es decir $x(t) = 0$, para $t < t_1 < \infty$, la ROC es de la forma

$$\Re\{s\} > \sigma_{max}$$

σ_{max} — línea vertical (medio plano a la derecha)

4 Si $x(t)$ es una señal por la izquierda, es decir $x(t) = 0$, para $t > t_2 > -\infty$, la ROC es de la forma

$$\Re\{s\} < \sigma_{min}$$

σ_{min} — línea vertical (medio plano a la izquierda)

5 Si $x(t)$ es una señal de dos lados, es decir $x(t)$ es una señal de duración infinita (no es extrema derecha e izquierda)

$$\text{ROC: } \sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2$$

σ_1, σ_2 — ROC es una franja entre esos dos polos

PROPIEDADES DE LA ROC

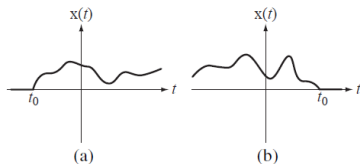


Figura 4: a) Señal por la derecha, (b) Señal por la izquierda

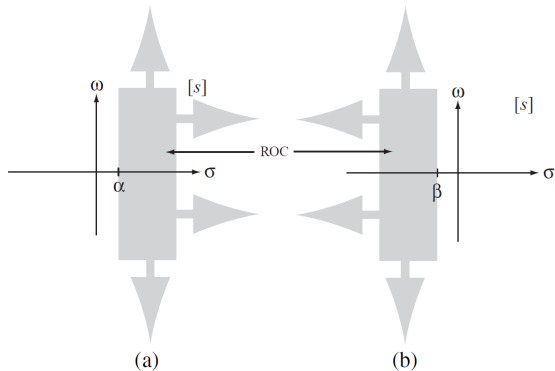


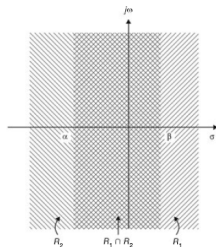
Figura 5: Propiedades de la ROC

LINEALIDAD

$$x_1(t) \rightarrow X_1(s), \text{ ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \rightarrow X_2(s), \text{ ROC} = R_2$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	$R' = R_1 \cap R_2$



DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

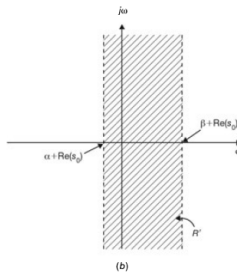
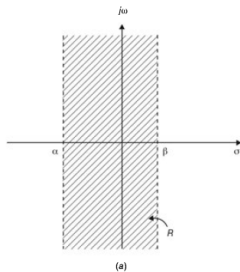
$$x(t) \rightarrow X(s), ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	$R' = R$

DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA

$$x(t) \rightarrow X(s), \text{ROC} = R$$

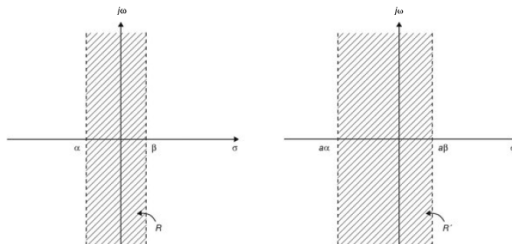
Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R' = R + \Re\{s_0\}$



ESCALAMIENTO EN EL TIEMPO

$$x(t) \rightarrow X(s), \text{ROC} = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$R' = aR$

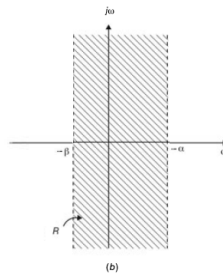
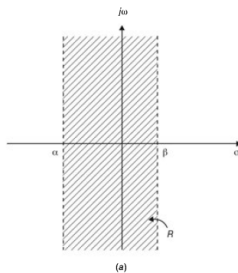


■ Escalamientos inversos en las variables

INVERSIÓN EN EL TIEMPO

$$x(t) \rightarrow X(s), \text{ROC} = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$x(-t)$	$X(-s)$	$R' = -R$



DIFERENCIACIÓN EN EL TIEMPO

$$x(t) \rightarrow X(s), ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R' \supset R$

- No se modifica a menos que se elimine un polo

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - s^{(n-1)} x(0^-) - \dots - s x^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-)$	$R' \supset R$

DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DE s

$$x(t) \rightarrow X(s), ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R' \supset R$

INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO DE st

$$x(t) \rightarrow X(s), ROC = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R' = R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$

- Se agrega un polo más al sistema

INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO DE s

$$x(t) \rightarrow X(s), \text{ ROC} = R$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} X(s) ds$	$R' = R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$

- Se agrega un polo más al sistema

CONVOLUCIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

$$x_1(t) \rightarrow X_1(s), ROC = R_1$$

$$x_2(t) \rightarrow X_2(s), ROC = R_2$$

Dominio del tiempo, $x(t)$	Dominio de la variable s , $X(s)$	ROC
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ejemplo

Encontrar la LT a partir de la trasformada de Laplace de $u(t)$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la LT a partir de la trasformada de Laplace de $u(t)$

$$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal

$$s(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$$

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal, para $t \geq 0$

$$f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}$$

Ejemplo

Encontrar la LT de la siguiente señal, para $t \geq 0$

$$r(t) = \cos(2t) + e^{-3t}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Fórmula de inversión de Rieman-Mellin:

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (8)$$

donde, $\mathfrak{L}^{-1}\{\cdot\}$ — — — operador de la transformada inversa de Laplace

PASOS PARA ENCONTRAR LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

- 1 Descomponga $X(s)$ en términos simples usando una expansión de fracciones parciales
- 2 Se encuentra el inverso de cada término contrastándolo con las entradas de la tabla

PASOS PARA ENCONTRAR LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Polos simples:

- Polo simple es un polo de **primer orden**
- $D(s)$ se vuelve un producto de factores

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)} \quad (9)$$

donde, $s = p_1, p_2, \dots, p_m$ son polos simples, no repetidos $p_i \neq p_j$ para toda $i \neq j$
entonces:

$$X(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_m}{s-p_m} \quad (10)$$

donde k_1, k_2, \dots, k_m se conocen como residuos de $X(s)$. El coeficiente de expansión se determina:

$$k_i = (s-p_i)X(s)|_{s=p_i} \quad (11)$$

entonces:

$$x(t) = (k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_m e^{p_m t})u(t) \quad (12)$$

PASOS PARA ENCONTRAR LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Polos repetidos:

- $X(s)$ tiene r polos repetidos en $s = p_1$

entonces se representa $X(s)$ como:

$$X(s) = \frac{k_r}{(s-p_1)^r} + \frac{k_{r-1}}{(s-p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{k_2}{(s-p_1)^2} + \frac{k_1}{s-p_1} + X_1(s) \quad (13)$$

donde, $X_1(s)$ es el residuo de $X(s)$ que no tiene un polo en $s = p_1$

PASOS PARA ENCONTRAR LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Polos repetidos: Los coeficientes de expansión se determinan:

$$\begin{aligned}
 k_r &= (s - p_1)^r X(s) \Big|_{s=p_1} \\
 k_{r-1} &= \frac{d}{ds} [(s - p_1)^r X(s)] \Big|_{s=p_1} \\
 k_{r-2} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s - p_1)^r X(s)] \Big|_{s=p_1} \\
 &\vdots \\
 k_{r-n} &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} [(s - p_1)^r X(s)] \Big|_{s=p_1}
 \end{aligned}$$

$$x(t) = \left(k_1 e^{p_1 t} + k_2 t e^{p_1 t} + \frac{k_3}{2!} t^2 e^{p_1 t} + \dots + \frac{k_m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{p_1 t} \right) u(t) + x_1(t) \quad (14)$$

PASOS PARA ENCONTRAR LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Polos complejos:

- Un par de polos complejos es simple si no están repetidos
- Es un par de polos complejos dobles o múltiples si están repetidos
- La mejor solución expresar cada par de polos complejos como un *cuadrado total*, de la forma $(s + \alpha)^2 + \beta$

$X(s)$ se puede representar de la forma:

$$X(s) = \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + as + b} + X_1(s) \quad (15)$$

donde, $X_1(s)$ es el residuo de $X(s)$ que no tiene este par de polos complejos

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = (s + \alpha)^2 + \beta$$

también se hace que

$$X(s) = \frac{A_1 s + A_2}{(s + \alpha)^2 + \beta} + \frac{B_1 \beta}{(s + \alpha)^2 + \beta} + X_1(s) \quad (16)$$

entonces:

$$x(t) = (A_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + B_1 e^{-\alpha t} \sin(\beta t)) u(t) + x_1(t) \quad (17)$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$X(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$F(s) = 1 + \frac{4}{s+3} - \frac{5s}{s^2+16}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2+4}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace

$$X(s) = \frac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$

Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de Laplace por tablas

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2 + 8s + 25)}$$