

# Tema 03: Propiedades de las señales, periodicidad y potencia y energía

## Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería  
Universidad Sergio Arboleda

2020I

# OUTLINE

## 1 Introducción

## 2 Simetría de señales

## 3 Periodicidad de señales de tiempo continuo

- Periodo de una señal constituida por otras señales periódicas - caso continuo
- Periodo de una señal constituida por otras señales periódicas - caso discreto

## 4 Señales de potencia y energía

- Valor promedio de una señal
- Potencia promedio de una señal
- Energía promedio de una señal de una señal
- Clasificación de señales de acuerdo a su potencia y energía

# PERIODICIDAD DEL EXPONENCIAL COMPLEJO

Propiedades del exponente:

$$e^{a+b} = e^a e^b$$
$$e^{(a+b)c} = e^{ac} e^{bc}$$

Tiempo continuo:

$$e^{j\frac{2\pi}{T}t}$$

que ocurre si aumentamos la frecuencia angular  $\omega$  con un factor de  $2\pi$

$$e^{j(\frac{2\pi}{T}+k2\pi)t} = e^{j\frac{2\pi}{T}t} e^{jk2\pi t}$$

Tiempo discreto:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}n}$$

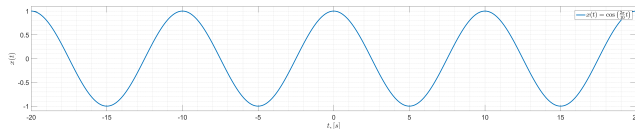
que ocurre si aumentamos la frecuencia angular  $\Omega$  con un factor de  $2\pi$

$$e^{j(\frac{2\pi}{N}+k2\pi)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}n} e^{jk2\pi n} = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$$

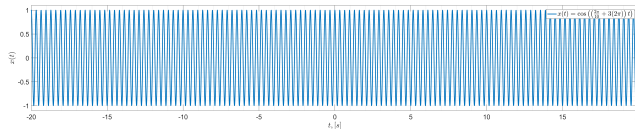
# PERIODICIDAD DEL EXPONENCIAL COMPLEJO

Tiempo continuo:

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$$



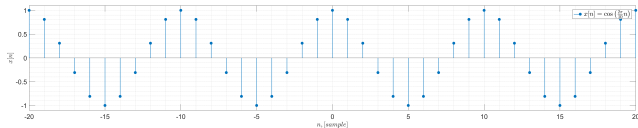
$$x(t) = \cos\left(\left(\frac{2\pi}{10} + 6\pi\right)t\right)$$



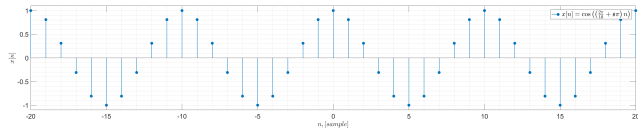
# PERIODICIDAD DEL EXPONENCIAL COMPLEJO

Tiempo discreto:

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right)$$



$$x[n] = \cos\left(\left(\frac{2\pi}{10} + 6\pi\right)n\right)$$



# SIMETRÍA DE SEÑALES EN EL TIEMPO: SIMETRÍA PAR

Se dice que una señal presenta simetría par si se cumple:

Tiempo continuo:

$$x(t) = x(-t) \quad (1)$$

Tiempo discreto:

$$x[n] = x[-n] \quad (2)$$

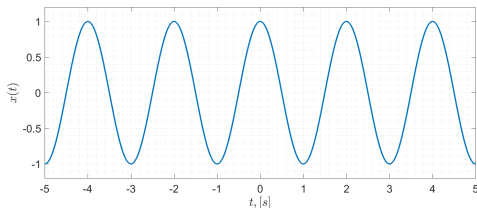


Figura 1: Señal de tiempo continuo par

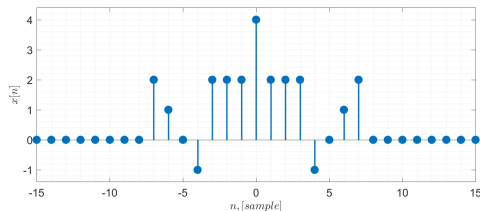


Figura 2: Señal de tiempo discreto par

# SIMETRÍA DE SEÑALES DE TIEMPO: SIMETRÍA IMPAR

Se dice que una señal presenta simetría impar se cumple que

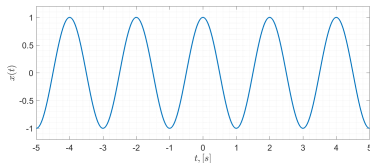
Tiempo continuo:

$$x(t) = -x(-t) \quad (3)$$

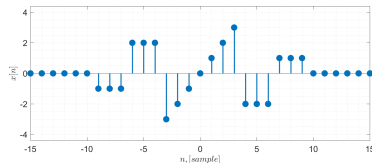
Tiempo discreto:

$$x[n] = -x[-n] \quad (4)$$

Es decir, que si reflejamos una señal y le invertimos su fase (multiplicamos por  $-1$ ) y obtenemos la misma señal original, esta tendría simetría impar.



**Figura 3:** Señal de tiempo continuo impar



**Figura 4:** Señal de tiempo discreto impar

# SIMETRÍA DE SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO

Cualquier señal puede ser presentada como la suma de una componente par y una componente impar de esta:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (5)$$

donde,  $x_e(t)$  — es la componente par de la señal (*ing.* even);  $x_o(t)$  — es la componente impar de la señal (*ing.* odd).

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\} \quad (6)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\} \quad (7)$$



# SIMETRÍA DE SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

Cualquier señal puede ser presentada como la suma de una componente par y una componente impar de esta:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \quad (8)$$

donde,  $x_e[n]$  — es la componente par de la señal (*ing.* even);  $x_o[n]$  — es la componente impar de la señal (*ing.* odd).

$$x_e[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x[-n]\} \quad (9)$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x[-n]\} \quad (10)$$

# SIMETRÍA DE SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

## Simetría de señales de TD

Encontrar la parte par e impar de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 0,5n, & \text{para } -7 \leq n \leq -4; \\ 2, & \text{para } -3 \leq n \leq -1; \\ n-2, & \text{para } 0 \leq n < 4; \\ 5, & \text{para } 4 \leq n \leq 6; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

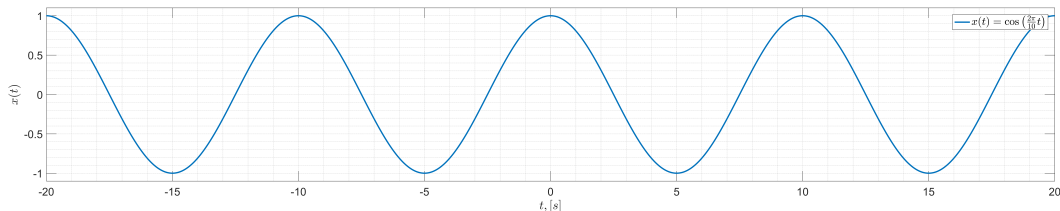
# PERIODICIDAD DE SEÑALES

La señal  $x(t)$  de tiempo discreto es periódica con periodo  $T$ , si existe un valor real positivo distinto de cero para el cual se cumple la *condición de periodicidad*:

$$x(t + T) = x(t), \forall t, T \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

A partir de la expresión anterior se puede generalizar de la siguiente manera:

$$x(t + kT) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \in \mathbb{Z} \quad (12)$$



**Figura 5:** Señal periódica de tiempo continuo

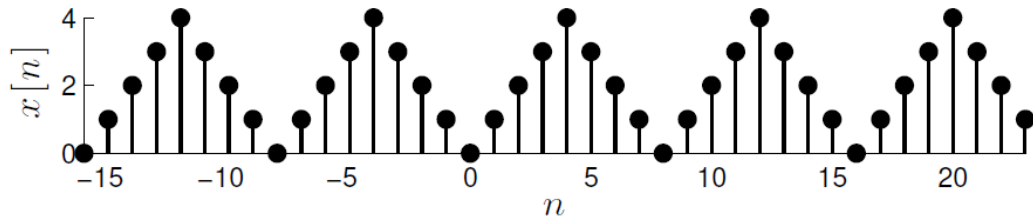
## PERIODICIDAD DE SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

La señal  $x[n]$  de tiempo discreto es periódica con periodo  $N$ , si existe un valor entero positivo distinto de cero para el cual se cumple la *condición de periodicidad*:

$$x[n+N] = x[n], \forall n, N \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

A partir de la expresión anterior se puede generalizar de la siguiente manera:

$$x[n+mN] = x[n], \forall n \in \mathbb{Z}, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (14)$$



**Figura 6:** Señal periódica de tiempo discreto impar

# PERIODO DE UNA SEÑAL CONSTITUIDA POR OTRAS SEÑALES PERIÓDICAS DE TIEMPO CONTINUO

- El valor entero mínimo positivo de  $T/N$  distinto de cero que satisface esta condición de periodicidad se denomina periodo fundamental  $T_0 = \min\{T\}$  y  $N_0 = \min\{N\}$ .
- Una señal periódica es de longitud infinita.
- Una señal que no tiene periodo se conoce como *aperiódica*.

## Periodicidad de señales

- ¿A que igual el periodo de una señal aperiódica?
- ¿Que significa que una señal tenga un periodo igual a cero?
- Encontrar el periodo de la señal  $x(t) = \sin(25t)$
- Encontrar el periodo de la señal  $x[n] = \sin\left(\frac{22\pi}{10}n\right)$

# PERIODO DE UNA SEÑAL CONSTITUIDA POR OTRAS SEÑALES PERIÓDICAS DE TIEMPO CONTINUO

Sea una señal igual a la suma/producto de distintas señales periódicas

Tiempo continuo:

$$f(t) = \sum_{i=1}^K x_i(t), \text{ donde } K \text{ — numero total de señales} \quad (15)$$

será periódica con periodo fundamental igual

$$T_{suma} = T\{f(t)\} = \text{mcm}\{T_1, T_2, T_3, \dots, T_K\} \quad (16)$$

Entonces se puede decir que  $f(t) = f(t + kT_{suma})$   $k \in \mathbb{Z}$ .

# PERIODO DE UNA SEÑAL CONSTITUIDA POR OTRAS SEÑALES PERIÓDICAS DE TIEMPO DISCRETO

Sea una señal igual a la suma/producto de distintas señales periódicas

Tiempo discreto:

$$f[n] = \sum_{i=1}^K x_i[n], \text{ donde } K \text{ — numero total de señales} \quad (17)$$

será periódica con periodo fundamental igual

$$N_{suma} = N\{f[n]\} = \text{mcm}\{N_1, N_2, N_3, \dots, N_K\} \quad (18)$$

Entonces se puede decir que  $f[n] = f[n + mN_{suma}]$   $m \in \mathbb{Z}$ .

# PERIODICIDAD DE SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO - EL PROBLEMA DE $\Omega_0$

Las señales exponenciales complejas de tiempo continuo son distintas para cada valor de  $\omega_0$ , en cambio para el caso discreto no ocurre lo mismo.

Considere,  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} \underbrace{e^{j2\pi kn}}_{=1} = e^{j\Omega_0 n} \quad (19)$$

- Las secuencias con frecuencia angular  $\Omega_0 \pm 2\pi$ ,  $\Omega_0 \pm 4\pi$ , etc., son las mismas.
- Las señales discretas solo se tiene en cuenta un intervalo de  $2\pi$  para cual se toma  $\Omega_0$ . Es decir  $0 \leq \Omega_0 < 2\pi$  o  $-\pi \leq \Omega_0 < \pi$ .



# PERIODO DE UNA SEÑAL CONSTITUIDA POR OTRAS SEÑALES PERIÓDICAS DE TIEMPO DISCRETO

## Periodicidad de señales

Encontrar el periodo de las siguientes señales:

a.  $x[n] = e^{j\frac{t}{4}}$

b.  $\phi[n] = \cos \frac{1}{4}n$

c.  $x(t) = \cos \frac{96\pi}{25}t \sin \frac{120\pi}{7}t$

d.  $x[n] = \cos \frac{\pi}{117}n + \sin \frac{4\pi}{368}n$

e.  $s[n] = 4\cos(3\pi n + 8\pi) + \frac{1}{2\pi} \tan\left(\frac{12\pi}{5}n\right) - \sec(0,25\pi n)$

f.  $y[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{12}t\right)}$

# SEÑALES DE POTENCIA Y ENERGÍA

La **potencia** y la energía es uno de los dos recursos más importantes de las telecomunicaciones, el otro recurso es el **espectro**.

Las funciones **físicamente realizables** son aquellas que pueden ser **observables** (se pueden medir), por ejemplo en un laboratorio.

Para una señal ser físicamente realizable es necesario que cumpla las siguientes condiciones:

- Ser diferente de cero en algún momento;
- Debe tener valor en el espectro en un intervalo determinado de frecuencias;
- Sus valores de intensidad deben ser reales y finitos.

# OPERADOR PROMEDIO DE TIEMPO CONTINUO

## Operador promedio de tiempo continuo

$$\langle \cdot \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\cdot] dt \quad (20)$$

- El operador anterior suma (integra) todo lo que se encuentra dentro del operador y lo promedia en el tiempo
- Este operador es lineal, por tanto cumple el principio de superposición.

Para el caso de una señal periódica con periodo  $T_0$ :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} [\cdot] dt \quad (21)$$

Donde  $T_0$  es el mínimo valor positivo entero que satisface  $x(t) = x(t + T_0)$

# OPERADOR DE SUMA PROMEDIO DE TIEMPO DISCRETO

## Operador de suma promedio de tiempo discreto

$$\langle \cdot \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N [\cdot] \quad (22)$$

- El operador anterior suma todo lo que se encuentra dentro del operador y lo promedia en el numero de muestras
- Este operador es lineal, por tanto cumple el principio de superposición.

Para el caso de una señal periódica con periodo  $N_0$ :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle n=N_0 \rangle} [\cdot] \quad (23)$$

Donde  $N_0$  es el mínimo valor positivo entero que satisface  $x[n] = x[n + N_0]$

# VALOR PROMEDIO DE UNA SEÑAL EN EL TIEMPO CONTINUO

También conocida como valor DC (*ing.* direct current) de la señal.

**Tiempo continuo:**

Se aplica mediante el operador:  $\langle x(t) \rangle$

$$x_{DC} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (24)$$

Generalmente se utiliza para evaluar promedios en tiempos definidos de tiempo, por ejemplo de un  $t_1$  a  $t_2$ :

$$x_{DC} = \langle x(t) \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \quad (25)$$

# VALOR PROMEDIO DE UNA SEÑAL EN EL TIEMPO DISCRETO

Tiempo discreto:

Se aplica mediante el operador:  $\langle x[n] \rangle$

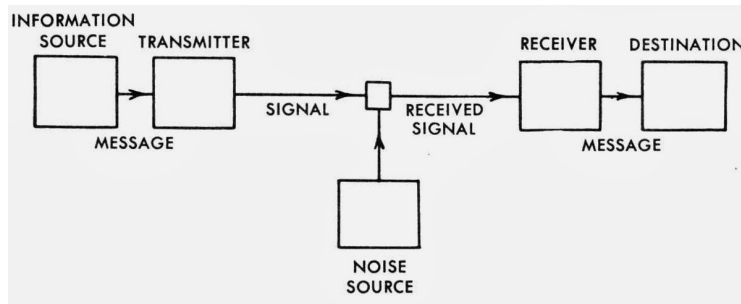
$$x_{DC} = \langle x[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] \quad (26)$$

Generalmente se utiliza para evaluar promedios en tiempos definidos de tiempo, por ejemplo de un  $n_1$  a  $n_2$  (+1 si pasa por cero la suma):

$$x_{DC} = \langle x[n] \rangle = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n], \text{ donde } n_2 > n_1 \quad (27)$$

# POTENCIA PROMEDIO DE UNA SEÑAL

En los sistemas de comunicación es de suma importancia esta magnitud



**Figura 7:** Diagrama general de un sistema de comunicación de Shannon

Desde un punto de vista físico, la potencia es trabajo por unidad de tiempo.

# POTENCIA PROMEDIO DE UNA SEÑAL

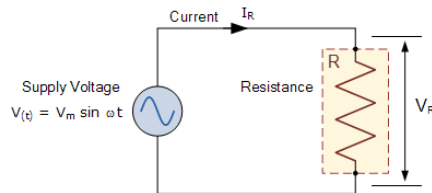
$$v = \frac{W}{q}, \text{ donde } i = \frac{q}{t} \quad (28)$$

para este caso, la potencia instantánea

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{W}{q} \frac{q}{t} = \frac{W}{t} \quad (29)$$

La potencia promedio es igual a

$$\langle p(t) \rangle = \langle v(t)i(t) \rangle \quad (30)$$



**Figura 8:** Circuito resistivo



# POTENCIA PROMEDIO DE UNA SEÑAL

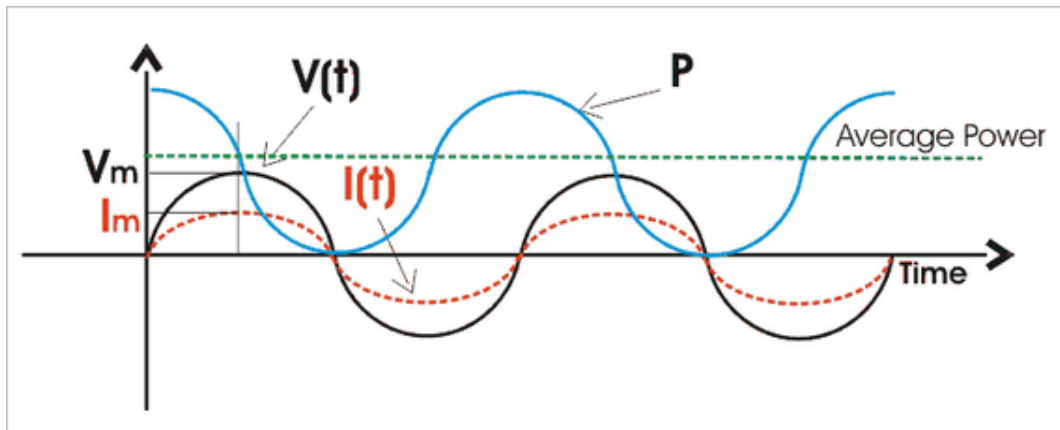


Figura 9: Potencia de un circuito de corriente alterna

# POTENCIA PROMEDIO DE UNA SEÑAL DE TIEMPO CONTINUO

## Potencia normalizada

Tiempo continuo:

$$P_x = \langle |x(t)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (31)$$

La potencia de una señal periódica con periodo  $N_0$  se puede hallar con ayuda de la ecuación :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt \quad (32)$$

# POTENCIA PROMEDIO DE UNA SEÑAL DE TIEMPO DISCRETO

## Potencia normalizada

Tiempo discreto:

$$P_x = \langle |x[n]|^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (33)$$

La potencia de una señal periódica con periodo  $N_0$  se puede hallar con ayuda de la ecuación :

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 \quad (34)$$

# ENERGÍA PROMEDIO DE UNA SEÑAL DE UNA SEÑAL

- La energía es la cantidad de potencia consumida en determinado intervalo de tiempo de acuerdo a lo que dure el trabajo realizado por la señal.
- Se puede expresar de forma normalizada mediante la siguiente ecuación

Tiempo continuo:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (35)$$

Tiempo discreto:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (36)$$

# CLASIFICACIÓN DE SEÑALES DE ACUERDO A SU POTENCIA Y ENERGÍA

- Se dice que  $x$  es una señal (secuencia) de energía, si y solo si  $0 < E_x < \infty$ , y su potencia tiende a cero  $P_x \rightarrow 0$
- Se dice que  $x$  es una señal (secuencia) de potencia, si y solo si  $0 < P_x < \infty$ , y su energía tiende a cero  $E_x \rightarrow 0$
- Si no cumple ninguna de estas propiedades, estas señales no son ni de potencia, ni de energía.

**Nota:** Una señal periódica es de potencia, si su contenido de energía por periodo es finito. La potencia promedio se calcula sobre cada periodo porque se repite.

# CLASIFICACIÓN DE SEÑALES DE ACUERDO A SU POTENCIA Y ENERGÍA

## Potencia y energía

Determine la potencia y la energía de la señal

$$s(t) = 3e^{-at}$$

## Potencia y energía

Determine la potencia y energía de la siguiente señal:

$$s(t) = A \cos(\omega t)$$

# CLASIFICACIÓN DE SEÑALES DE ACUERDO A SU POTENCIA Y ENERGÍA

## Potencia y energía

Determine la potencia y la energía del escalón unitario  $u[n]$ .

## Potencia y energía

Determine la potencia y energía de la siguiente señal:

$$x[n] = (-0,5)^n u[n]$$

# CLASIFICACIÓN DE SEÑALES DE ACUERDO A SU POTENCIA Y ENERGÍA

## Potencia y energía

Determinar si las siguientes señales son de potencia o de energía:

a.  $x[n] = 2e^{j3t}$

b.  $s[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$