

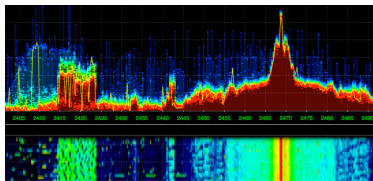
LA CLASE ESTÁ A PUNTO DE COMENZAR



Por favor: mantenga en silencio su micrófono y
apague su cámara

Tema 07: Análisis espectral de señales: Transformada de Fourier

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2020I

OUTLINE

- 1 De la Serie de Fourier de tiempo continuo a la transformada de Fourier
- 2 De la Serie de Fourier de tiempo discreto a la transformada de Fourier
- 3 Par de la transformada de Fourier, FT
 - Espectro de Fourier
- 4 Propiedades de la transformada de Fourier
- 5 Ejemplos y ejercicios
- 6 Tarea

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Si una señal $x(t)$ de tiempo continuo es periódica con periodo T se puede representar de forma analítica mediante la **serie de Fourier**
- Representar mediante la composición de una **suma** de funciones *armónicamente relacionadas*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t}$$

Donde,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

¿Pero qué ocurre cuando la señal de análisis no es periódica?

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En este caso tenemos a $x(t)$ una señal no periódica de duración finita, es decir $x(t) = 0$ para $|t| > T_1$, tal cual como se puede observar en la siguiente gráfica:

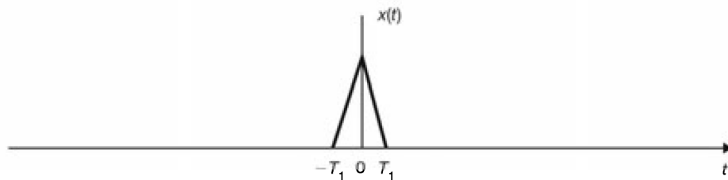


Figura 1: Señal continua de duración finita

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Definimos la secuencia $x_{T_0}(t)$ — representación periódica de $x(t)$
- Se obtiene mediante la periodización, es decir repetición
- T_0 el periodo fundamental de la señal.

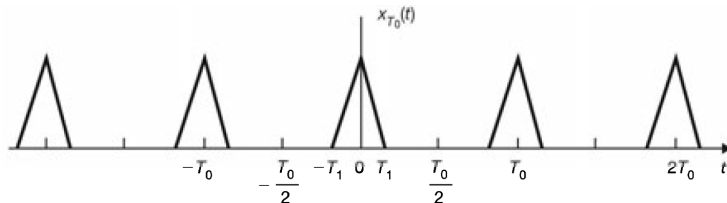


Figura 2: Señal continua periódica obtenida de la periodización de $x(t)$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La secuencia $x_{T_0}(t)$ puede ser representada mediante la serie de Fourier

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t} \quad (1)$$

donde,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

con coeficientes de la serie de Fourier

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

Podemos afirmar que

$$x_{T_0}(t) = x(t), \text{ para } |t| \leq T_1 \quad (3)$$

y $x(t) = 0$ fuera de los límites de $[-T_1, T_1]$.

Podemos describir la ecuación 2 de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Definamos de acuerdo la ecuación 4 una nueva función de una variable independiente ω de la siguiente manera:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Reescribamos la ecuación 4 implementando la nueva función definida por la ecuación 5, donde para este caso $\omega = k\omega_0$:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \quad (6)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Podemos representar el periodo T_0 de la siguiente forma:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (7)$$

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (8)$$

reescribimos,

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (9)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Si $T_0 \rightarrow \infty$ entonces

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t) \quad (10)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Podemos representar el periodo T_0 de la siguiente forma:

$$\text{si } T_0 \rightarrow \infty \text{ entonces } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow 0 \text{ entonces } \omega_0 \rightarrow \Delta\omega$$

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 7) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 1)

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (11)$$

entonces,

$$x(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t}}_{\text{altura}} \underbrace{\Delta\omega}_{\text{ancho}} \quad (12)$$

rectangulo

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

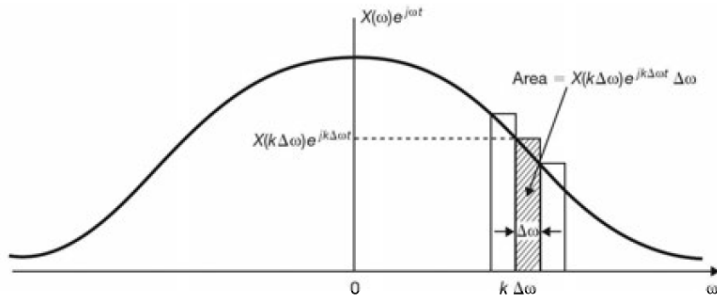


Figura 3: Interpretación de la ecuación analítica de Fourier como suma de integral

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Por tanto la ecuación 11 se transforma en una integral,

$$x(t) = \lim_{\substack{T_0 \rightarrow \infty \\ \Delta\omega_0 \rightarrow 0}} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (13)$$

área bajo la función,

$$X(\omega) e^{j\omega t}$$

entonces,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Si una señal $x[n]$ de tiempo discreto es periódica con periodo N se puede representar de forma analítica mediante la **serie de Fourier**
- Representar mediante la composición de una **suma** de funciones *armónicamente relacionadas*

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\Omega_k n} = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Donde,

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

¿Pero qué ocurre cuando la señal de análisis no es periódica?

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En este caso tenemos a $x[n]$ una secuencia no periódica de duración finita, es decir $x[n] = 0$ para $|n| > N_1$, tal cual como se puede observar en la siguiente gráfica:

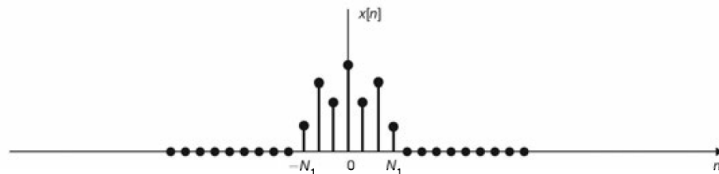


Figura 4: Señal discreta de duración finita

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Definimos la secuencia $x_{N_0}[n]$ — representación periódica de $x[n]$
- Se obtiene mediante la periodización, es decir repetición
- N_0 el periodo fundamental de la señal.

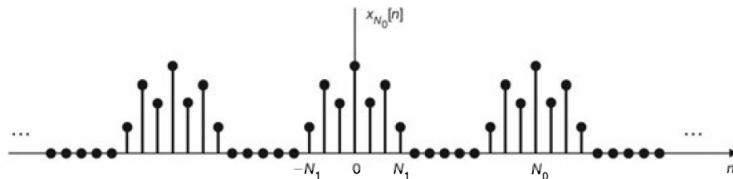


Figura 5: Señal discreta periódica obtenida de la periodización de $x[n]$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La secuencia $x_{N_0}[n]$ puede ser representada mediante la serie de Fourier

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n}. \quad (14)$$

donde,

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

con coeficientes de la serie de Fourier

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{N_0}[n] e^{-jk\Omega_0 n}. \quad (15)$$

Podemos afirmar que

$$x_{N_0} = x[n], \text{ para } |n| \leq N_1 \quad (16)$$

y $x[n] = 0$ fuera de los límites de $[-N_1, N_1]$.

Podemos describir la ecuación 15 de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \quad (17)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Definamos de acuerdo la ecuación 17 una nueva función de una variable independiente Ω de la siguiente manera:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (18)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Reescribamos la ecuación 17 implementando la nueva función definida por la ecuación 18, donde para este caso $\Omega = k\Omega_0$:

$$c_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) \quad (19)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Podemos representar el periodo N_0 de la siguiente forma:

$$\frac{1}{N_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \quad (20)$$

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 20) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 14)

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{\Omega_0}{2\pi} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (21)$$

reescribimos,

$$x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{\Omega_0}{2\pi} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad (22)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Si $N_0 \rightarrow \infty$ entonces

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_{N_0}[n] = x[n] \quad (23)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Podemos representar el periodo T_0 de la siguiente forma:

$$\text{si } N_0 \rightarrow \infty \text{ entonces } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \rightarrow 0 \text{ entonces } \Omega_0 \rightarrow \Delta\Omega$$

Reemplacemos el inverso del periodo (ecuación 20) en la ecuación de síntesis de la serie de Fourier (ecuación 14)

$$x[n] = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_{N_0}[n] = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \underbrace{X(k\Delta\Omega_0)}_{\text{altura}} \underbrace{e^{jk\Delta\Omega_0 n} \Delta\Omega_0}_{\substack{\text{ancho} \\ \text{rectangulo}}} \quad (24)$$

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

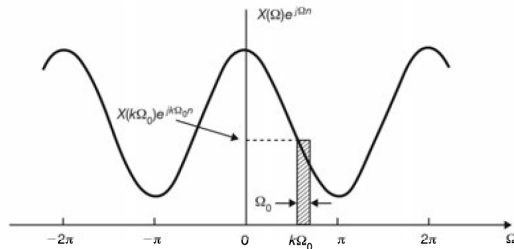


Figura 6: Interpretación de la ecuación analítica de Fourier como suma de integral

$X(\Omega)$ es periódica con periodo 2π . La secuencia $e^{j\Omega n}$ también lo es. Por tanto el producto $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ es periódico con periodo $N = 2\pi$.

DE LA SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Por tanto la ecuación 21 se transforma en una integral, donde la suma $\sum_{k=\langle N_0 \rangle}$ se realiza sobre

N_0 -intervalos de ancho cada uno $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, para un intervalo total de ancho 2π .

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (25)$$

Es decir: $k\Omega_0$ va desde $\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ \Omega_0 \rightarrow 0}} k \frac{2\pi}{N_0} \Big|_{k=1} = 0$ a $\lim_{\substack{N_0 \rightarrow \infty \\ \Omega_0 \rightarrow 0}} k \frac{2\pi}{N_0} \Big|_{k=N_0} = 2\pi$ es decir desde $\Omega = 0$ a $\Omega = 2\pi$

PAR DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO, CTFT

Se entiende como al par de la transformada de Fourier de tiempo continuo la siguiente relación

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (26)$$

Donde la transformada de Fourier de tiempo continuo se expresa mediante

$$X(\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (27)$$

y la transformada inversa de Fourier de tiempo continuo se obtiene

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (28)$$

PAR DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO, DTFT

Se entiende como al par de la transformada de Fourier de tiempo discreto la siguiente relación

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (29)$$

Donde la transformada de Fourier de tiempo discreto se expresa mediante

$$X(\Omega) = \mathfrak{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (30)$$

y la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto se obtiene

$$x[n] = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \quad (31)$$

Recordemos que la DTFT $X(\Omega)$ es periódica con periodo 2π , es decir

$$X(\Omega) = X(\Omega + k2\pi) \quad (32)$$

ESPECTRO DE FOURIER

Espectro de Fourier

A $X(\omega)/X(\Omega)$ se le conoce también como la representación en la frecuencia o el espectro de $x(t)/x[n]$.

Tiempo continuo:

La transformada de Fourier de la secuencia $x(t)$ es de carácter complejo.

Forma polar

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\Phi(\omega)} \quad (33)$$

donde $|X(\omega)|$ — espectro de magnitud; $\Phi(\omega)$ — espectro de fase.

Si $x(t) \in \Re$ entonces el espectro de magnitud es **par** y el espectro de fase **impar**.

Tiempo discreto:

La transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ es de carácter complejo.

Forma polar:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\Phi(\Omega)} \quad (34)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: LINEALIDAD

Tiempo continuo:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) \quad (35)$$

Tiempo discreto:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega) \quad (36)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: PERIODICIDAD DEL ESPECTRO DE UNA SEÑAL DISCRETA

$$X(\Omega + k2\pi) = X(\Omega) \quad (37)$$

Ω se da en radianes y es continua de $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ o también $0 \leq \Omega \leq 2\pi$.

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: CORRIMIENTOS DE FRECUENCIA Y TIEMPO

Tiempo continuo:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega) \quad (38)$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0) \quad (39)$$

A la ecuación 39 se le conoce como *modulación compleja*.

Tiempo discreto:

$$x[n - N] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)e^{-j\Omega N} \quad (40)$$

$$x[n]e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega - \Omega_0) \quad (41)$$

A la ecuación 41 se le conoce como *modulación compleja*.

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: CONJUGACIÓN

Tiempo continuo:

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\omega) \quad (42)$$

Tiempo discreto:

$$x^*[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\Omega) \quad (43)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: INVERSIÓN EN EL TIEMPO

Tiempo continuo:

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega) \quad (44)$$

Tiempo discreto:

$$x[-n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-\Omega) \quad (45)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: ESCALAMIENTO EN EL TIEMPO

Tiempo continuo:

Para una versión escalada en el tiempo de $x_s(t) = x(at)$:

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (46)$$

si $a > 1$ la señal se comprime en el tiempo.

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: PARIDAD DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Tiempo continuo:

Para $x(t) \in \Re$

$$x(t) = x_{even}(t) + x_{odd}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \quad (47)$$

donde,

$$x_{even}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega) \quad (48)$$

$$x_{odd}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\text{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega) \quad (49)$$

Tiempo discreto:

Para $x[n] \in \Re$

$$x[n] = x_{even}[n] + x_{odd}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) \quad (50)$$

donde,

$$x_{even}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \quad (51)$$

$$x_{odd}[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} j\text{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \quad (52)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: TEOREMA DE PARSEVAL

Tiempo continuo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (53)$$

Tiempo discreto:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (54)$$

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S_x(\Omega) d\Omega \quad (55)$$

donde $S_x(\Omega)$ se conoce como densidad espectral de potencia y se calcula

$$S_x(\Omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|X_N(\Omega)|^2}{2N+1}. \quad (56)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: DIFERENCIACIÓN Y DIFERENCIA

Tiempo continuo:

Diferenciación:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega) \quad (58)$$

Tiempo discreto:

Diferencia:

$$\underbrace{x[n] - x[n-1]}_{\text{secuencia de primera diferencia}} \xrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega) \quad (59)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: DIFERENCIACIÓN EN LA FRECUENCIA

Tiempo continuo:

$$-jtx(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (60)$$

Tiempo discreto:

$$nx[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (61)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: INTEGRACIÓN Y ACUMULACIÓN

Tiempo continuo:

Integración

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad (62)$$

Tiempo discreto:

Acumulación

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi X(0) \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) \quad (63)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Integral de convolución en el dominio del tiempo es multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (64)$$

Dominio de la frecuencia es el producto de ambas señales:

$$\underbrace{Y(\omega)}_{\text{espectro de salida } y(t)} = \underbrace{X(\omega)}_{\text{espectro de entrada } x(t)} \underbrace{H(\omega)}_{\text{respuesta en frecuencia del sistema}} \quad (65)$$

Se cumple que

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)| \quad (66)$$

$$\angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega) \quad (67)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: SUMA DE CONVOLUCIÓN

Suma de convolución en el dominio del tiempo es multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (68)$$

en el dominio de la frecuencia se puede realizar mediante el calculo del producto de ambos argumentos de la suma de convolución

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad (69)$$

Se cumple que

$$|Y(\Omega)| = |X(\Omega)||H(\Omega)| \quad (70)$$

$$\angle Y(\Omega) = \angle X(\Omega) + \angle H(\Omega) \quad (71)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: MULTIPLICACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Tiempo continuo:

$$x(t)y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) \circledast Y(\omega) \quad (72)$$

Tiempo discreto:

$$x[n]y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \circledast Y(\Omega) \quad (73)$$

donde \circledast — implica **convolución circular**, que se calcula de la forma

$$X(\Omega) \circledast Y(\Omega) = \int_{2\pi} X(\Theta) Y(\Omega - \Theta) d\Theta \quad (74)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER: DUALIDAD

Tiempo continuo:

si

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad (75)$$

entonces,

$$X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega) \quad (76)$$

Tiempo discreto:

si

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (77)$$

entonces,

$$X[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\Omega) \quad (78)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO: EJEMPLO

Ejemplo

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} A, & \text{para } -M \leq n \leq M; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO: EJEMPLO

Ejemplo

Encuentre la iCTFT de la siguiente señal:

$$X(\omega) = \cos(\omega) \left\{ u\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CONTINUO: EJEMPLO

Ejemplo

Encuentre la CTFT de la siguiente señal:

$$s(t) = |3t| \{u(t+2) - u(t-2)\}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO: EJEMPLO

Ejemplo

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = r^n u[n], \text{ donde } |r| < 1.$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO: EJEMPLO

Ejemplo

Encuentre la iDTFT del siguiente pulso rectangular $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{para } |\Omega| \leq W;; \\ 0, & \text{para } W < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO: EJERCICIO

Ejercicio

Encuentre la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } |n| \leq N_1; \\ 0, & \text{para } |n| > N_1. \end{cases}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO: EJERCICIO

Ejercicio

Encuentre la DTFT de la siguientes señales:

(a) $x[n] = a^{|n|}$, para $-1 < a < 1$.

(b) $s[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4} (u[n] - u[n-5])\right)$

(c) $x[n] = -a^n u[-n-1]$, donde $a \in \mathbb{R}$.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO: EJERCICIO

Ejercicio

Encuentre la iDTFT de la siguientes señales:

(a)

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{para } \Omega_0 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

(b) $P(\Omega) = \cos^2(\Omega)$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO: EJERCICIO

Ejercicio

Encuentre la iDTFT de la siguientes señales:

(a)

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0; \\ 1, & \text{para } \Omega_0 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

(b) $P(\Omega) = \cos^2(\Omega)$

TAREA

Ejercicio

Determine y dibuje la densidad espectral de potencia $S_x(\Omega)$ de la siguiente señal $x[n]$:

$$x[n] = a^n u[n]$$