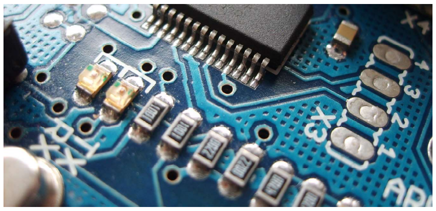
Tema 04: Sistemas LTI, convolución y correlación discreta

Análisis de señales



Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2018I

Outline

Sistemas de tiempo discreto

- Un sistema discreto en el tiempo es un dispositivo o algoritmo que manipula y transforma señales de entrada (excitación) de tiempo discreto. Sujeto a una regla determinada, produce una señal de salida de tiempo discreto.

Sistema discreto

Un **sistema discreto** es una transformación $T\{\cdot\}$ (una regla o formula) que *mapea* una señal de entrada discreta en el tiempo $x[n]$ en una señal de salida de tiempo discreto $y[n]$

$$y[n] = T\{x[n]\} \tag{1}$$

donde, $T\{\cdot\}$ — es el operador de transformación.

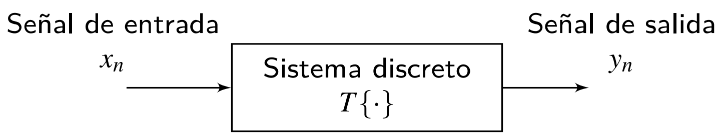


Figura 1: Sistema de tiempo discreto con transformación $T\{\cdot\}$.

Sistemas

- Las señales de entrada y salida son discretas/continuas en el tiempo
- Los sistemas se representan mediante ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencias
- Una expresión matemática, mediante un modelo, relaciona las señales de entrada con las de salida.
- La estructura interna del sistema puede ignorarse, y representar el sistema mediante una caja negra — representación sistémica.

Ejemplos de sistemas discretos en el tiempo

Algunos ejemplos de sistemas de tiempo discreto:

- Identidad $y[n] = x[n]$, $\forall n$
- Escala $y(t) = 2x(t)$
- Offset $y[n] = x[n] + y_0$, $\forall n$
- Señal cuadrada $y(t) = (x(t))^2$
- Desplazamiento en el tiempo TD: $y[n] = x[n - n_0]$, $n_0 \in \mathbb{Z}$, $\forall n$
- Tiempo cuadrado $y(t) = x(t^2)$

Sistemas discretos con memoria y sin memoria

- Los sistemas sin memoria (o estáticos) son aquellos cuya salida solo depende de la entrada en el instante actual (pero no de muestras pasadas o futuras).
- Los sistemas con memoria (o dinámicos) son aquellos cuyas salidas pueden estar determinadas por entradas en tiempos distintos al actual (pasados y futuros).

Se dice que un sistema que utilice intervalos de tiempo máximo de tipo $n-N$, donde $N \geq 0$, es un sistema con memoria de duración N.

- Un sistema donde $N = 0$ es un sistema estático.
- Un sistema donde $0 < N < \infty$ es un sistema de memoria finita.
- Un sistema en el cual $N \to \infty$ es un sistema de memoria infinita.

Sistemas discretos con memoria y sin memoria

Sistemas discretos con memoria y sin memoria

Determinar la clasificación de estos sistemas de acuerdo a su memoria, en caso de tener memoria, determinar su valor

a) $y[n] = ax[n]$
b) $y[n] = nx[n] + bx^3[3]$
c) $y[n] = T\{x[n], n\}$
d) $h[n] = x[n] - 3x[n-1]$
e) $y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x[n-k]$ — operador promedio
f) $y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]$

Sistemas invariantes y variantes en el tiempo

Los sistemas invariantes en el tiempo (TI, *ing.* time invariant) son saquellos cuyas caracteristicas no cambian en el tiempo. Es decir, para las mismas entradas, sin importar cuando ocurran, generaran las mismas salidas.
Un atraso de la señal o adelanto de esta, causará el mismo desplazamiento temporal en la señal de salida. Como se mencionó, para una señal de entrada $x[n]$, existe una señal de salida $y[n]$, relacionadas por:

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

Si la señal de entrada se retarda k unidades, es decir $x[n-k]$, entonces la señal de salida también se retrazara las mismas k unidades:

$$y[n-k] = T\{x[n-k]\}$$

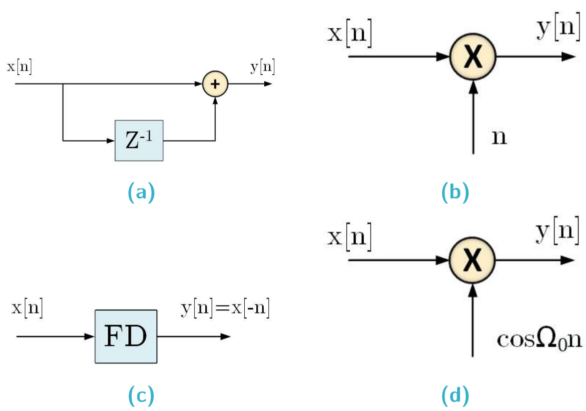
Donde $y[n-k]$ es la versión de $y[n]$ desplazada k unidades.

Sistemas invariantes y variantes en el tiempo

Sistemas invariantes y variantes en el tiempo

Determinar si los siguientes sistemas son invariantes o variantes en el tiempo.

- (a) $y[n] = x[n] - x[n-1]$ — diferenciador.
- (b) $y[n] = nx[n]$ — multiplicador por tiempo discreto
- (c) $y[n] = x[-n]$ — *fading* (reflexión en el tiempo)
- (d) $y[n] = x[n]\cos\Omega_0 n$ — modulador.



Sistemas causales y no causales

Un sistema causal es aquel cuya salida depende de entradas presentes y pasadas, mas no de entradas futuras. Es decir no tiene memoria futura. No se puede obtener una salida sin antes aplicar una entrada. $y[n]$ solo podría depender de valores del tipo de $x[n]$, $x[n+1]$, $x[n+2]$, etc.
Un sistema no causal es aquel cuya salida depende solo de valores futuros de la entrada. Ejemplo: $y[n]=x[-n]$.

Sistemas estables e inestables

Un sistema inestable es aquel que presenta un comportamiento errático y extremo, es decir, que a pesar de que las entradas sean acotadas, no necesariamente las salidas estarán acotadas.
Un sistema estable es uy sistema en reposo de tipo entradas acotadas y salidas acotadas BIBO (*ing.* bounded input-bounded output).

$$\exists M_x, M_y \in \Re \tag{2}$$

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \rightarrow |y[n]| \leq M_y < \infty \tag{3}$$

Example

Determinar si los siguientes sistemas son estables (acotados) o no:

a. $y[n] = (n+1)x[n]$
b. $x[n] = u[n]$

Sistemas lineales y no lineales de tiempo discreto

Un sistema lineal es aquél que satisface el principio de superposición.
El principio de superposición se cumple cuando se satisfacen dos condiciones:

- Aditividad (*ing.* additivity) — se debe cumple la propiedad:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= T\{x_1[n]\} \\ y_2[n] &= T\{x_2[n]\} \\ y_1[n]+y_2[n] &= T\{x_1[n]+x_2[n]\} \\ &= T\{x_1[n]\}+T\{x_2[n]\} \end{aligned}$$

- Homogeneidad (escalamiento, *ing.* scaling) — si se escala la señal de entrada, la señal de salida también es escalada.

$$\begin{aligned} x[n] &\rightarrow y[n]=T\{x[n]\} \\ ax[n] &\rightarrow T\{ax[n]\}=aT\{x[n]\}=ay[n] \end{aligned}$$

Sistemas lineales y no lineales de tiempo discreto

En un sistema lineal, la respuesta a una suma (aditividad) de señales escaladas (homogeneidad) es igual a la correspondiente suma de las salidas escaladas, si cada una de las entradas se tomaran de forma individual, es decir:

Tiempo continuo:

$$\begin{aligned} x(t) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x_k(t) &\quad \rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k y_k(t) \\ a_0 x_0(t) + a_1 x_1(t) + \ldots + a_{M-1} x_{M-1}(t) &\quad \rightarrow \quad a_0 y_0(t) + a_1 y_1(t) + \ldots + a_{M-1} y_{M-1}(t) \end{aligned}$$

donde, $y_k(t) = T\{x_k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots, M-1$

Tiempo discreto:

$$\begin{aligned} x[n] = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x_k[n] &\quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} a_k y_k[n] \\ a_0 x_0[n] + a_1 x_1[n] + \ldots + a_{M-1} x_{M-1}[n] &\quad \rightarrow \quad a_0 y_0[n] + a_1 y_1[n] + \ldots + a_{M-1} y_{M-1}[n] \end{aligned}$$

donde, $y_k[n] = T\{x_k[n]\}$, $k = 1, 2, \ldots, M-1$

Sistemas lineales y no lineales de tiempo discreto

Si conocemos que cuando la entrada es la función $x(t)$ y obtenemos la salida $y(t)$

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

?'que obtendremos en la salida si la nueva entrada es de la forma?

$$0{,}5x(t+2) + 3x(t) + x(t-10) \rightarrow \mathbf{?}$$

Sistemas lineales y no lineales de tiempo discreto

Si conocemos que cuando la entrada es la función $\delta[n]$ y obtenemos la salida $y[n] = 2^n\cos(2\pi n)$

$$\delta[n] \to y[n] = 2^n\cos(2\pi n)$$

?'que obtendremos en la salida si la nueva entrada es de la forma?

$$3\delta[n+1] + \frac{1}{3}\delta[n] + \delta[n-3] \to \textbf{?}$$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto

Sistema LTI

Un **sistema LTI** es el que cumple los atributos de **linealidad** e **invarianza en el tiempo**. Por tal razón es posible relacionar la entrada de un sistema LTI y su salida mediante la *suma de convolución*.

- Los sistemas LTI son el fundamento del procesamiento de señales.
- Si se conoce la respuesta de un sistema cuando la entrada es un impulso unitario $\delta(t)/\delta[n]$, es posible conocer la salida para cualquier señal arbitraria en su entrada.
- Gracias a los sistemas LTI, la salida del sistema se puede expresar en función de respuestas del sistema a entradas de impulso unitario escaladas y desplazadas en el tiempo.

Respuesta de un sistema LTI

Tiempo continuo:

Cualquier señal arbitraria de tiempo continuo $x(t)$ se puede descomponer como una sucesión y suma infinita (integral) de impulsos unitarios escalados y desplazados en el tiempo. De las propiedades del impulso unitario:

$$
\begin{aligned}
x(t)\delta(t) &= x(0)\delta(t) \\
x(t)\delta(t-\tau) &= x(\tau)\delta(t-\tau) \\
x(t)\delta(t-\tau) &= 0,\ \forall t \neq \tau.
\end{aligned}
$$

Tiempo discreto:

Cualquier señal arbitraria de tiempo discreto $x[n]$ se puede descomponer como una suma de impulsos unitarios escalados y desplazados en el tiempo. De las propiedades del impulso unitario:

$$
\begin{aligned}
x[n]\delta[n] &= x[0]\delta[n] \\
x[n]\delta[n-k] &= x[k]\delta[n-k] \\
x[n]\delta[n-k] &= 0,\ \forall n \neq k.
\end{aligned}
$$

Respuesta de un sistema LTI

Las *respuesta al impulso* $h(t)/h[n]$ de un sistema LTI, es la transformación que experimenta el sistema cuando la entrada del sistema es señal singular del **impulso unitario** $\delta(t)/\delta[n]$.

Tiempo continuo:

$$h(t) = T\{\delta(t)\} \tag{4}$$

Tiempo discreto:

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \tag{5}$$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo continuo

Una señal de tiempo continuo $x(t)$ es posible representarla de la forma:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto

Sea la secuencia

$$x[n] = \{\ldots, x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, \underset{\uparrow}{x_0}, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots\}$$

es posible representarla de la forma:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n-k]$$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto al impulso unitario

Dibujar y determinar mediante suma de impulsos escalados y desplazados la siguiente secuencia:

$$x[n] = \{2, 3, \underset{\uparrow}{2}, 0, 4\}$$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo continuo

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto al impulso unitario

Representar mediante una integral de impulsos escalados y desplazados la siguiente señal:

$$x(t) = e^{-3t}\sin^2(6\pi t)$$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto al impulso unitario

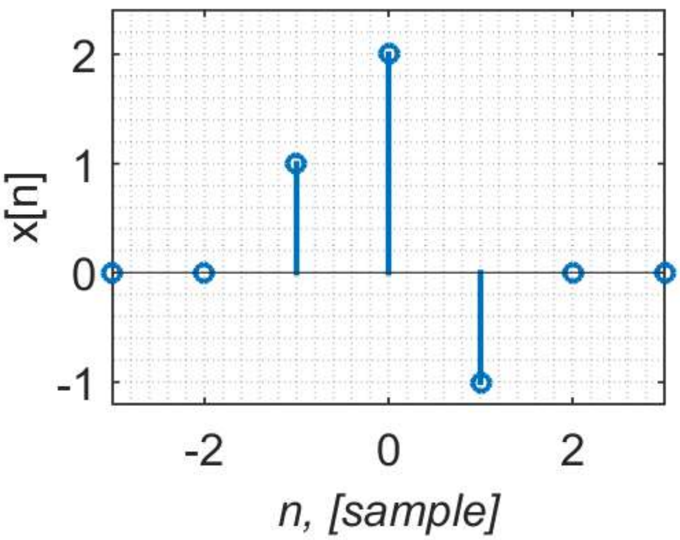
La respuesta $h[n]$ al impulso unitario $\delta[n]$ se puede representar mediante la siguiente función por partes y gráfica:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n = -1; \\ 2, & \text{para } n = 0; \\ -1, & \text{para } n = 1; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

Encontrar la respuesta para:

a. $2\delta[n]$
b. $\delta[n+2]$
c. $\delta[n-1]$
d. $2\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n+2]$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto



Respuesta de un sistema LTI de tiempo continuo a una entrada arbitraria

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo con transformación $T\{\cdot\}$. Su salida $y(t)$ para una entrada $x(t)$ se puede expresar mediante:

$$y(t) = T\{x(t)\} \tag{6}$$

La señal $x(t)$ puede ser representada por una suma infinitesimal de impulsos unitarios,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Entonces la salida se puede reescribir

$$y(t) = T\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\} \tag{7}$$

Por propiedades de linealidad, es posible introducir el operador de transformación dentro de la integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T\{x(\tau)\delta(t-\tau)\}\,\mathrm{d}\tau$$

como $x(\tau)$ es una constante, valor de $x(t)$ en τ por la propiedad de homogeneidad, es posible extraerla de la transformación lineal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T\{\delta(t-\tau)\}\,\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo continuo a una entrada arbitraria

Tal cual como se demostró en anteriormente, la expresión $T\{\delta(t-\tau)\}$ representa la respuesta al impulso desplazada τ unidades de tiempo $h(t-\tau)$. Por eso podemos reescribir la anterior ecuación de la siguiente manera

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

La ecuación anterior se conoce como integral de convolución.

- Podemos asegurar que si conocemos la respuesta de un sistema al impulso unitario, es posible conocer la respuesta a cualquier tipo de señal.
- Un sistema LTI de tiempo continuo se puede caracterizar completamente con su respuesta al impulso unitario $h(t)$.
- Un sistema LTI solo se caracteriza mediante una sola respuesta al impulso $h(t)$.

Integral de convolución

La integral de convolución de dos secuencias (señales de tiempo discreto $x(t)$ y $h(t)$), esta definida mediante la siguiente integral:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

Donde, $*$ representa la operación de suma de convolución. La salida de cualquier sistema LTI de tiempo discreto es la suma de convolución de la señal de entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso del sistema $h(t)$.

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto a una entrada arbitraria

Se un sistema lineal e invariante en el tiempo con transformación $T\{\cdot\}$. Su salida $y[n]$ para una entrada $x[n]$ se puede expresar mediante:

$$y[n] = T\{x[n]\} \tag{11}$$

Como se muestra en la ecuación 12, es posible descomponer cualquier señal arbitraria $x[n]$ como una suma de secuencias de impulso unitario escaladas y desplazadas en el tiempo. De la anterior ecuación

$$y[n] = T\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n-k]\} \tag{12}$$

Es posible por linealidad, introducir la transformación dentro de la suma

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x_k \delta[n-k]\}$$

como $x_k = x[k]$ es una constante, por la propiedad de homogeneidad, es posible extraerla de la transformación lineal

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n-k]\} \tag{13}$$

Respuesta de un sistema LTI de tiempo discreto a una entrada arbitraria

La expresión $T\{\delta[n-k]\}$ representa la respuesta al impulso desplazada k unidades en el tiempo $h[n-k]$. Por eso podemos reescribir 13 de la siguiente manera

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{14}$$

La ecuación 14 se conoce como suma de convolución. Podemos asegurar que si conocemos la respuesta de un sistema al impulso unitario, es posible conocer la respuesta a cualquier tipo de señal.
Un sistema LTI de tiempo discreto se puede caracterizar completamente con su respuesta al impulso unitario $h[n]$. Un sistema LTI solo se caracteriza mediante una sola respuesta al impulso $h[n]$.

Suma de convolución

La suma de convolución de dos secuencias (señales de tiempo discreto $x[n]$ y $h[n]$), esta definida mediante la siguiente suma:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{15}$$

Donde, $*$ representa la operación de suma de convolución. La salida de cualquier sistema LTI de tiempo discreto es la suma de convolución de la señal de entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso del sistema $h[n]$.

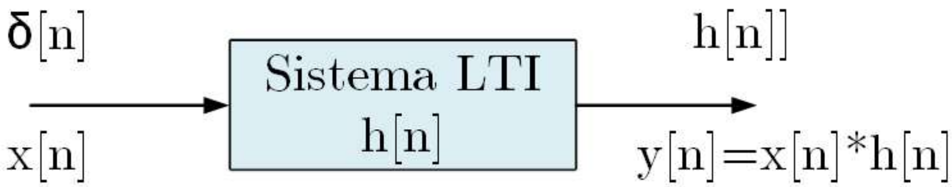


Figura 2: Bloque de convolución.

Operación de la integral de convolución

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

1. Se realiza un **cambio de dominio**, es decir toda t es remplazada por el nuevo dominio τ.
2. Luego la respuesta al impulso $h(\tau)$ se **invierte en el tiempo** (se refleja sobre el origen $\tau = 0$).
3. Después de realizar la reflexión, la señal $h(\tau)$ se **desplazará** t en todo el espacio del eje-τ desde $-\infty$ a ∞, $h(t-\tau)$.
4. Las dos secuencias $x(t)$ y $h(t-\tau)$ se **multiplican** entre si para formar una *señal producto* para todos los valores de τ obteniendo una nueva señal, con una t fija en un valor de conveniencia, explorando como ya se mencionó todo el espació del eje-τ.
5. La salida será una muestra de la función $y(t)$ y es igual a la integral de todos los valores resultados de la multiplicación $x(\tau)h(t-\tau)$ (se suman para toda τ). Donde la muestra en n especifico fue determinado por el corrimiento en ese instante $t-\tau$.
6. Se repiten estos pasos para el intervalo de $-\infty < n < \infty$

Operación de la suma de convolución

1. Se realiza un **cambio de dominio**, es decir toda n es remplazada por el nuevo dominio k. Luego la respuesta al impulso $h[k]$ se **invierte en el tiempo** (se refleja sobre el origen $k = 0$). Después de realizar la reflexión, la señal $h[-k]$ se **desplazará** n en todo el espacio del eje-k desde $-\infty$ a ∞, $h[n-k]$.
2. Las dos secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ se **multiplican** entre si para formar una *secuencia producto* para todos los valores de k obteniendo una nueva secuencia, con una n fija en un valor de conveniencia, explorando como ya se mencionó todo el espació del eje-k.
3. La salida será una muestra de la función $y[n]$ y es igual a la suma de todos los valores resultados de la multiplicación $x[k]h[n-k]$ (se suman para toda k). Donde la muestra en n especifico fue determinado por el corrimiento en ese instante $n-k$.
4. Se repiten estos pasos para el intervalo de $-\infty < n < \infty$

Operación de la suma de convolución

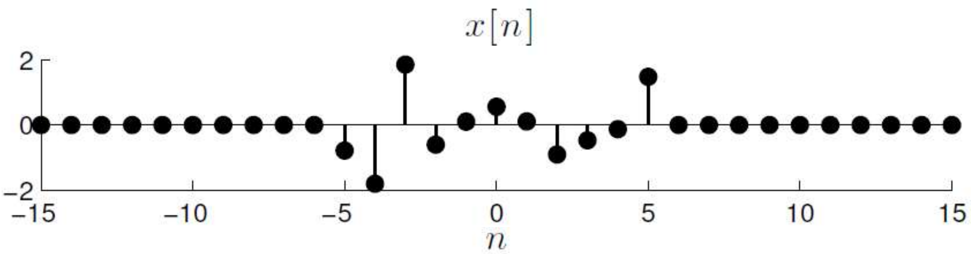
Duración de la suma de convolución

Se dice que la señal $x[n]$ esta definida para un **intervalo soporte** $[N_1; N_2]$, donde $N1 \leq N2$, si $x[n] = 0$ para todo $n < N_1$ y $n > N_2$. La duración de $x[n]$ $D_x = \text{length}\{x[n]\}$ es igual a $N_2 - N_1 + 1$.

Si x[n] tiene una duración D_x muestras y $h[n]$ tiene una duración de D_h muestras, entonces la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ tendrá una duración $D_x + D_h - 1$ muestras.

Duración de una señal

Una señal con un intervalo soporte $[-5; 5]$ y duración de 11 muestras.



Propiedades de la convolución: Conmutativa

$$
\begin{aligned}
x[n] * h[n] &= h[n] * x[n] \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]
\end{aligned}
$$

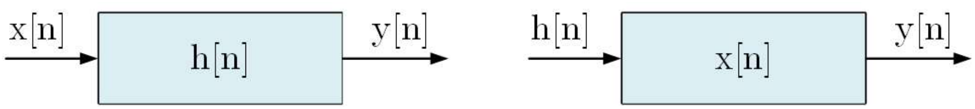


Figura 3: Propiedad conmutativa de la convolución.

Propiedades de la convolución: Asociativa

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

Tomamos a $y_1[n] = x[n] * h_1[n]$, y a $y[n] = y_1[n] * h_2[n]$, si hacemos $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$, podríamos rescribir la anterior ecuación de la forma clásica $y[n] = x[n] * h[n]$.

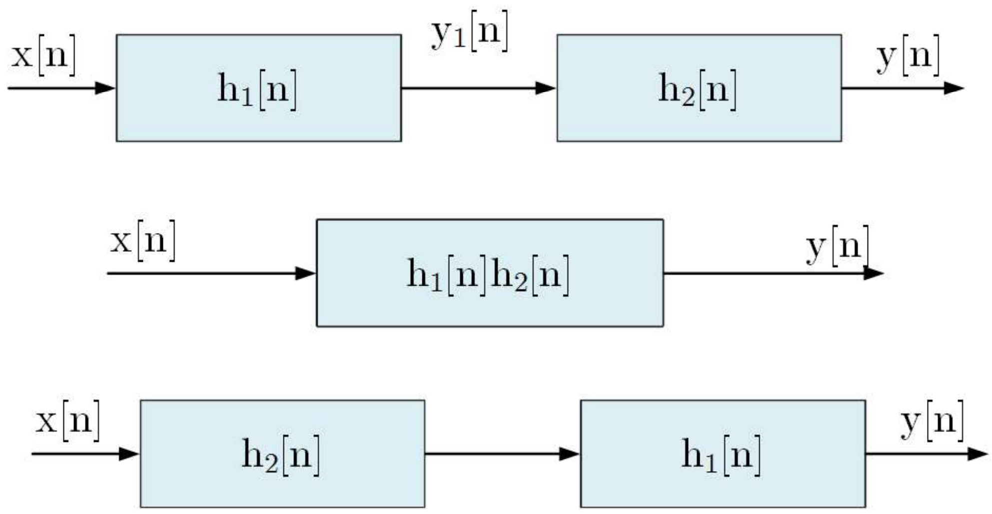


Figura 4: Propiedad asociativa de la convolución.

Propiedades de la convolución: Distributiva

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

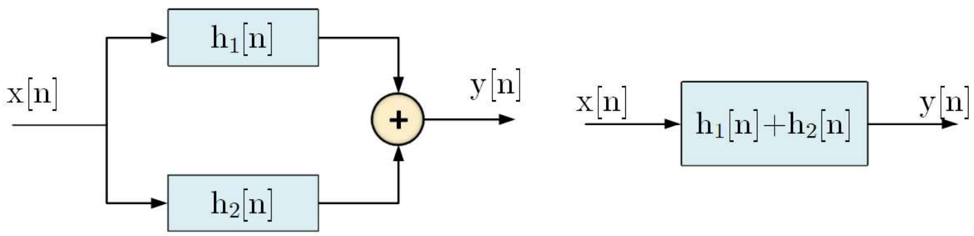


Figura 5: Propiedad distributiva de la convolución.

Suma de convolución

Propiedades

Determine la respuesta al impulso total $h[n]$ para la interconexión de los siguientes subsistemas de la figura 6:

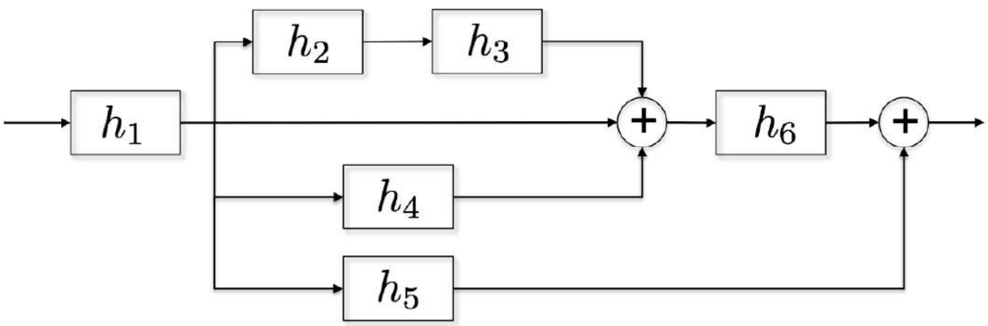


Figura 6: Interconexión de subsistemas.

Operación de la suma de convolución

Ejemplo

Para un sistema LTI cuya respuesta al impulso denota mediante $h[n] = \{1,\ \underset{\uparrow}{2},\ 1,\ -1\}$. Dibuje $h[n]$ y $x[n]$. Determine la respuesta del sistema a la entrada:

$$x[n] = \{\ \underset{\uparrow}{1},\ 2,\ 3\ 1\}$$

Ejemplo

Para un sistema LTI, la respuesta al impulso se puede expresar mediante la siguiente ecuación

$$h[n] = a^n u[n], \text{donde } |a| < 1$$

Calcular la salida $y[n]$ del sistema LTI, si la en la entrada se encuentra la siguiente señal:

$$x[n] = u[n].$$

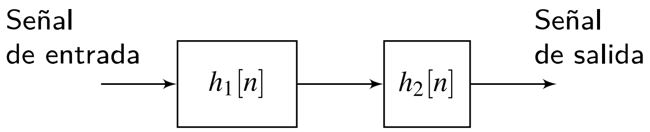
¿ 0

Operación de la suma de convolución

Ejemplo

Determine la respuesta al impulso total $h[n]$ para la interconexión en cascada de dos sistemas LTI, tal cual como se muestra en la gráfica, donde

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]; \\ h_2[n] &= \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]. \end{aligned} \tag{17}$$



Operación de la suma de convolución

Ejercicio

Para un sistema LTI, la respuesta al impulso se puede expresar mediante la siguiente ecuación

$$h[n] = u[n] - u[n-3]$$

Calcular la salida $y[n]$ del sistema LTI, si la entrada se encuentra definida mediante:

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + 2\delta[n-1]$$

Operación de la suma de convolución

Ejercicio

Un sistema LTI tiene como respuesta al impulso la siguiente señal

$$h[n] = \beta^n u[n], \text{donde}$$

Calcular la salida $y[n]$ del sistema LTI, si la a la entrada del sistema se encuentra la señal:

$$x[n] = \alpha^n u[n].$$

Nota: Resuelva para el caso de $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = \beta$.

Operación de la suma de convolución

Ejercicio

Un sistema LTI tiene como respuesta al impulso la siguiente señal

$$h[n] = \alpha^{-n}u[-n], \text{donde } 0 < alpha < 1$$

Calcular la salida $y[n]$ del sistema LTI, si la a la entrada del sistema se encuentra la señal:

$$x[n] = \alpha^{n}u[n].$$

Operación de la suma de convolución

Ejercicio

La respuesta $h[n]$ al impulso unitario $\delta[n]$ se puede representar mediante la siguiente función por partes:

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & \text{para } 0 \leq n \leq 6; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

Calcular la salida si la entrada $x[n]$ se encuentra definida mediante

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq n \leq 4; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

Operación de la suma de convolución

Ejercicio

La respuesta $h[n]$ al impulso unitario $\delta[n]$ se puede representar mediante la siguiente función por partes:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } 2 \leq n \leq 7,\ 11 \leq n \leq 16; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

Calcular la salida si la entrada $x[n]$ se encuentra definida mediante

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq n \leq 5; \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases}$$

Correlación de señales

La teoría de la correlación es importante en la teoría de señales.

Correlación

La **correlación** es una operación matemática del procesamiento de señales que genera como resultado el *grado de similitud* entre dos señales, aunque no exista *coincidencia temporal*, es decir, la verificación se realiza en todo el espacio temporal de ambas señales.
Objetivo: Medir el grado de semejanza entre ambas señales.

La aplicación de la suma de convolución es el determinar la respuesta de sistemas LTI a cualquier tipo de entrada, aunque esta operación puede efectuarse de una manera mas sencilla en el dominio de la frecuencia (Fourier, Laplace o Z).

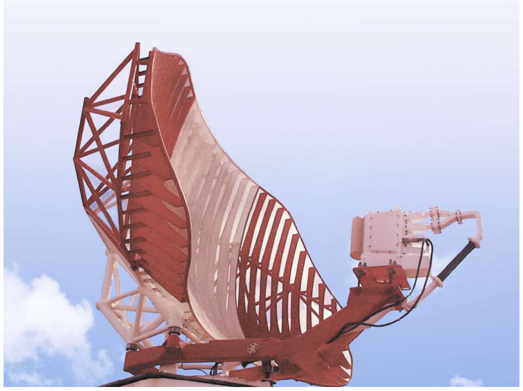
Correlación de señales

La correlación, aunque es una operación parecida, tiene una gran cantidad de aplicaciones por el tipo de resultado que ella arroja. Discriminación de señales. Ejemplos:

- La estimación de retardos en radar y sonar
- La detección y sincronización en comunicaciones digitales
- El control predictivo de máquinas y procesos
- El reconocimiento de patrones, con aplicaciones en procesado de voz y de imágenes
- Estimación espectral
- Identificación de sistemas

Son dos señales $x[n]$ y $y[n]$ las que deseamos comparar.

Problema radar



Radar

Se entiende por **RADAR** (*ing.* RAdio Detection And Ranging) un sistema de radiodetección y radiolocalización. Los sistemas de radar tienen dos funciones principales

1. Detectar los blancos.
2. Localizar estos blancos por medio de coordenadas.

La localización del blanco se hace por terminación de sus coordenadas polares. Es preciso:

- Determinar la distancia Radar—Blanco
- Determinar la dirección del blanco con respecto al radar.

Problema radar

En un radar de vigilancia (2D) la indicación de dirección es unicamente acimutal, y no de altitud (*cenital*).

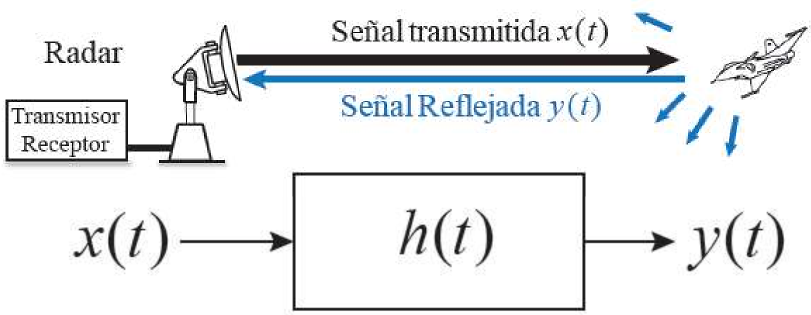


Figura 7: Modelo básico del sistema radar.

Para determinar la distancia R es preciso medir el tiempo t_{ret} de ir y volver de un impulso de energía electromagnética.

$$R = \frac{c_0 t_{ret}}{2} \tag{18}$$

Donde, c_0 — Velocidad de propagación de la onda electromagnética ($c_0 = 3 \cdot 10^8\ m/s$).

- La medición de la distancia se reduce a la medición del tiempo de retardo de la señal.

Problema radar

Para determinar la distancia R es preciso medir el tiempo t_{ret} de ir y volver de un impulso de energía electromagnética.

$$R = \frac{c_0 t_{ret}}{2} \tag{19}$$

Donde, c_0 — Velocidad de propagación de la onda electromagnética ($c_0 = 3 \cdot 10^8\ m/s$).

- La medición de la distancia se reduce a la medición del tiempo de retardo de la señal. Tenemos dos señales:
  - $x(t)$ - versión de la señal a trasmitir.
  - $y(t)$ - Versión de la señal recibida en la salida

Si existe un blanco en la *linea de vista* del radar, entonces:

- $y(t)$ será una versión retardada de la señal transmitida: $x(t - t_{ret})$ reflejada desde el blanco
- Estará muy atenuada
- Estará contaminada con ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN).

Podemos representar la secuencia recibida como:

$$y(t) = \alpha x(t - t_{ret}) + w(t)$$

Donde, α —- factor de atenuación (pérdida de potencia por la propagación, difracción y absorción en el blanco). (t) —- es el retardo de la señal. $w(t)$ — ruido blanco gaussiano aditivo.

Correlación cruzada de señales tiempo continuo

Se le conoce como a la secuencia secuencia $r_{xy}(\tau)$

$$r_{xy}(\tau) = x(t) \oplus y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)\,\mathrm{d}t \tag{20}$$

Donde, τ — desplazamiento en el tiempo o retardos; xy — subindice de correlación cruzada.
El restardo $\tau \in \mathbb{R}$.
Es posible hallar $r_{xy}(\tau)$ mediante,

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(t)\,\mathrm{d}t$$

Correlación cruzada de señales tiempo continuo

Si se invierte tenemos que:

$$r_{yx}(\tau) = y(t) \oplus x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t-\tau)\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

La correlación no es una operación conmutativa.

$$r_{xy}(\tau) \neq r_{yx}(\tau)$$

porque,

$$r_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)x(t)\,\mathrm{d}t$$

Al comparar las las ecuaciones de $r_{xy}(\tau)$ y $r_{yx}(\tau)$ obtenemos la relación:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau) \tag{22}$$

Las similitudes con la convolución son evidentes.

$$r_{xy} = x(t) \oplus y(t) = x(t) * y(-t) \tag{23}$$

Autocorrelación de señales tiempo continuo

Se considera un caso especial de la correlación cruzada cuando $x[n] = y[n]$ entonces se dice que us una copia de si misma retardada l muestras y se denota:

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

que es lo mismo que,

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t)\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

Correlación cruzada de señales tiempo discreto

Se le conoce como a la secuencia secuencia $r_{xy}[l]$

$$r_{xy}[l] = x[n] \oplus y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l] \tag{26}$$

Donde, l — desplazamiento en el tiempo o retardos; xy — subindice de correlación cruzada.
El restardo $l \in \mathbb{Z}$.
Se dice que se desplaza l unidades a la derecha si l es positivo y se desplaza l unidades a la izquierda si l es negativo.
Es posible hallar $r_{xy}[l]$ mediante,

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l]y[n]$$

Correlación de señales periódicas tiempo discreto

Se considera un caso especial de dos señales periódicas $x[n]$ y $y[n]$, con periodo total de ambas N:

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]y[n-l] \tag{27}$$

para el caso de la autocorrelación,

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]x[n-l] \tag{28}$$

Correlación cruzada de señales tiempo discreto

Si se invierte tenemos que:

$$r_{yx}[l] = y[n] \oplus x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]x[n-l] \tag{29}$$

La correlación no es una operación conmutativa.

$$r_{xy}[l] \neq r_{yx}[l]$$

porque,

$$r_{yx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n+l]x[n]$$

Al comparar las las ecuaciones de r_{xy} y r_{yx} obtenemos la relación:

$$r_{xy}[l] = r_{yx}[-l] \tag{30}$$

Las similitudes con la convolución son evidentes.

$$r_{xy}[l] = x[n] \oplus y[n] = x[n] * y[-n] \tag{31}$$

Autocorrelación de señales tiempo discreto

Se considera un caso especial de la correlación cruzada cuando $x[n] = y[n]$ entonces se dice que us una copia de si misma retardada l muestras y se denota:

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-l] \tag{32}$$

que es lo mismo que,

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l]x[n] \tag{33}$$

Propiedades de la autocorrelación:

- La función de autocorrelación es una señal real y par $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau)$
- El valor máximo de la función de autocorrelación ocurre en un retardo τ y $l = 0$
  $|r_{xx}[l]| \leq r_{xx}[0]$
- Si $x(t)$ es periódica, entonces la función de auto-correlación es periódica.