Tema 10: Conversión análoga digital

Análisis de señales

Marco Teran

Escuela de Ciencias exactas e Ingeniería
Universidad Sergio Arboleda

2019I

Outline

Introducción

Para realizar procesamiento digital de señales — **Las señales deben ser digitales**.
El mundo es **análogo** por naturaleza — es necesario convertirlas al formato digital.
La *mayoría* de las señales discretas se originan mediante muestreo y cuantificación de señales análogas. Nuestras señales de interés practico (de origen análogo) para realizar procesamiento digital de señales son:

- Señales de voz y audio;
- Señales biomedicas, de radar y sonar;
- Diversas señales de comunicación — inclusive video;
- Variables físicas:
  - Cantidad de luz;
  - Temperatura;
  - Presión.

Conversión análoga-digital

Definición

La conversión análoga-digital es el proceso de transformar una señal análoga en una señal digital (secuencia de valores discretos).
En la practica el **convertidor análogo-digital** es el dispositivo electrónico cuya tarea es realizar este proceso. La señal analoga se coloca en su entrada y en la salida obtenemos la señal digital.

- La entrada del convertidor análogo-digital es una señal real y continua en la variable independiente del tiempo.
- Se representa de la siguiente forma $x_a(t)$, donde para cada valor de t, existe un valor real de $x_a(t)$, el subindice a indica su característica análoga.

$$\forall t \in \Re, \quad \exists x_a(t) \tag{1}$$

Etapas de la conversión análoga-digital

El proceso de conversión análoga-digital consta de tres pasos. En la figura se puede observar el diagrama de un convertidor análogo-digital y sus distintas etapas.

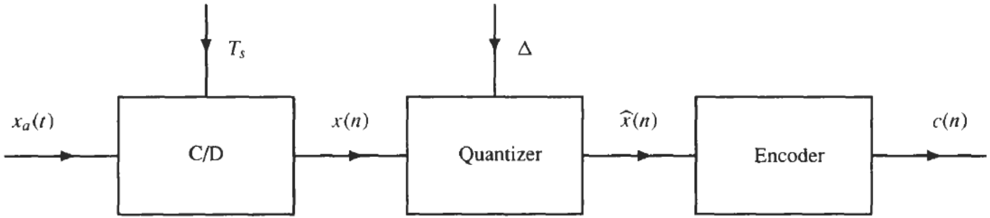


Figura 1: Componentes de un convertidor ADC.

Muestreo

Definición

Muestreo (*ing.* sampling) es el proceso de convertir una señal continua en el dominio del tiempo por una señal de tiempo discreto.
El dispositivo que realiza la tarea de conversión continua-discreta se denomina muestreador (*ing.* sampler).

- El proceso de muestreo consiste en la extracción de valores de $x_{\tilde{\delta}}(t)$ en instantes discretos de t.
- Cada una de estos valores se denominan muestras (*ing.* samples).

Podemos representar una señal muestreada de la siguiente forma:

$$x[n] = x_a(nT_s), \text{ donde } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Donde Ts es el intervalo de muestreo.

Muestreo

En la figura se observa una representación mecánica de un muestreador, que se representa mediante un interruptor que se cierra de forma periódica cada T_s.

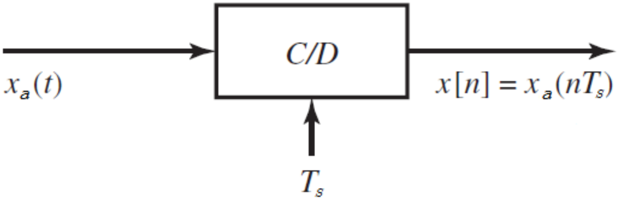


Figura 2: Diagrama de bloques de un conversor ideal TC a TD.

Cuantificación

Definición

Es el proceso mediante el cual una señal con valores continuos de amplitud se transforma en otra señal con valores en un conjunto discreto de amplitud, con un rango de valores posibles finitos.
El dispositivo que realiza la tarea de cuantificación se denomina cuantificador (*ing.* quantizer).

- Para un cuantificador uniforme, el proceso de cuantificación esta definido por el numero de bits resultantes de la codificación (numero de bits contsantes) y el intervalo de cuantificación Δ.

Codificación

Definición

Es el proceso mediante el cual cada valor discreto $\hat{x}[n]$ se representa mediante una secuencia binaria (palabra) de B-bits.
El dispositivo que realiza la tarea de cuantificación se denomina codificador (*ing.* enconder).

- Toma la señal discretizada $\hat{x}[n]$ y genera una secuencia de código binario equivalente $c[n]$.

Muestreo periódico de señales analógicas

- Existen muchas formas de realizar el *muestreo* una señal analógica.
- El método mas utilizado, por su simplicidad, es el muestreo periódico o muestreo uniforme.
- El intervalo de muestreo, tiempo cada cuanto se toman las muestras, esta igualmente espaciado, por tal razón se le conoce también con el nombre de **periodo de muestreo**.

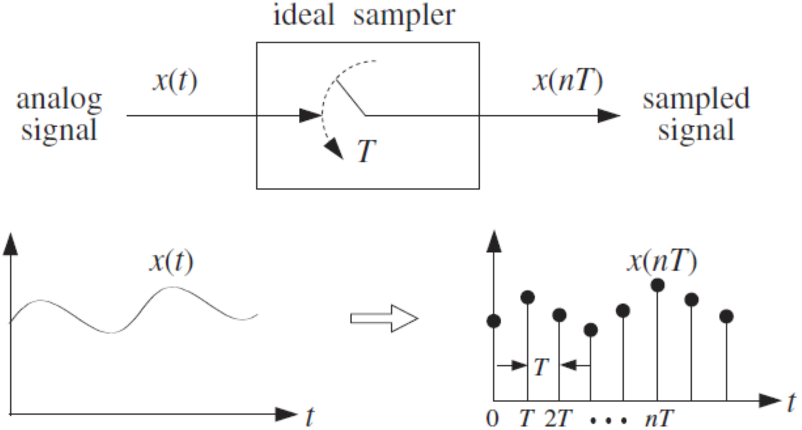
$$\underbrace{x[n]}_{\text{Señal discreta en el tiempo}} = \underbrace{x_a(nT_s)}_{\text{toma de muestras cada } T_s}, \forall\, n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

donde, $T_s = \dfrac{1}{f_s}$ — intervalo de muestreo, $[s]$;

f_s — frecuencia o tasa de muestreo, $[Hz]$ o $[\frac{samples}{s}]$.

Muestro periódico de señales analógicas

Dependiendo del tipo de análisis será mas recurrente hablar de frecuencia de muestreo o periodo de muestreo, hay que tener claro la relación entre cada una en términos de muestras y tiempo en s.



Procedimiento de muestreo periódico

La señal análoga $x_a(t)$ es multiplicada por una *función de pesos* $\tilde{\delta}(t)$, que esta definida por una secuencia de impulsos unitarios periódicos denominada *tren de impulsos*:

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s). \tag{4}$$

Procedimiento de muestro periódico

- Las muestras de una señal discreta se pueden representar mediante una sucesión de impulsos unitarios (*funciones delta-Dirac*) **escalados** en amplitud y **retardados** en el tiempo.
- La señal muestreada puede se expresará como una señal auxiliar $x_{\tilde{\delta}}(t)$, que es una versión en el tiempo continuo de $x[n]$ (antes de convertirse en una secuencia de impulsos)

$$x_{\tilde{\delta}}(t) = x_a(t)\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\delta(t - nT_s). \tag{5}$$

Es necesario modelar esta señal como el producto de la señal análoga $x_a(t)$ y una secuencia de impulsos unitarios $\tilde{\delta}(t)$.

$$x_{\tilde{\delta}}(t) = x_a(t)\tilde{\delta}(t) = x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\delta(t - nT_s). \tag{6}$$

Se puede afirmar que $\delta(t - nT_s) = 0$ en todos los instantes de tiempo, menos donde se cumple que $t = kT_s$.

Procedimiento de muestro periódico

La señal muestreada es convertida en una secuencia discreta $x[n]$ mediante *mapping* a partir de $x_{\tilde{\delta}}(t)$ de los impulsos espaciados cada intervalo T_s denominados muestras.

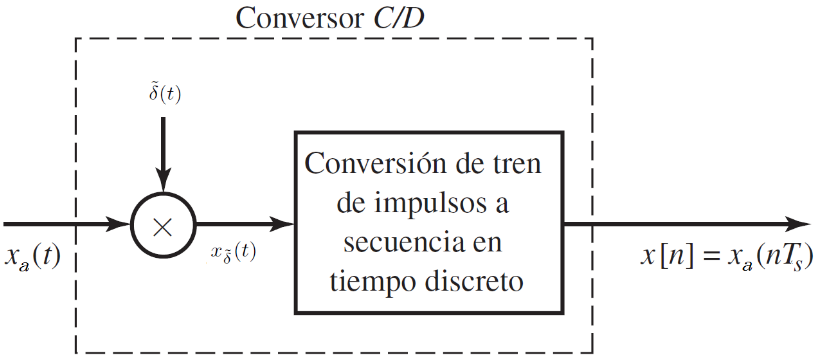


Figura 4: Sistema de muestreo con tren de impulsos periódico seguido de la conversión a una secuencia en tiempo discreto.

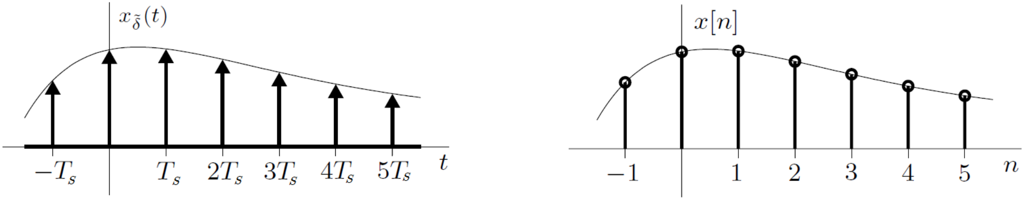


Figura 5: Proceso de muestreo: Muestreo de impulsos y muestro de puntos.

Es importante que el periodo de muestreo T_s se escoja de tal forma que la señal original pueda ser recuperada (sistema reversible).

Muestro periódico de señales analógicas

En la tabla 1 se pueden observar las relaciones de variables en tiempo continuo y tiempo discreto:

Nombre de la variable	Señales de tiempo continuo	Señales de tiempo discreto
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi f$	$\Omega = 2\pi F$
Frecuencia	$f = \frac{1}{T}$	$F = \frac{1}{N}$
Tiempo y periodo	t, T	n, N
	Relaciones entre los dominios discretos y continuos:	
$\Omega = \omega T_s$		$F = \frac{f}{f_s}$
$\omega = \frac{\Omega}{T_s}$		$f = F f_s$
$- < \omega <$		$-\pi < \Omega < \pi$
$- < f <$		$-\frac{1}{2} < F < \frac{1}{2}$

Tabla 1: Relación de variables en tiempo continuo y tiempo discreto

Análisis en el dominio de la frecuencia

- El análisis frecuencial es posible gracias a la implementación de técnicas del análisis de Fourier.
- Mediante la transformada de Fourier es posible encontrar la función de densidad espectral de potencia de una señal (PSD, *ing.* Power Spectral Densisty).
- Una señal discreta es una *serie de intensidades de señal* con valores numéricos definidos.
- Para realizar un análisis en el dominio frecuencial (análisis espectral análogo), es necesario encontrar la función que representa y modela la señal discreta mediante una serie numérica, tal cual como se expresó en la ecuación 5, se obtiene una señal representada mediante una serie de números $x[n]$.

Análisis en el dominio de la frecuencia

Donde $x_{\tilde{\delta}}(t)$ es una señal auxiliar que se utiliza para representar la señal discretizada $x[n]$, no como muestras atemporales, sino como resultado del proceso de muestreo. Su transformada de Fourier:

$$\dot{X}_{\tilde{\delta}}(t)(\omega) = \mathfrak{F}\{x_{\tilde{\delta}}(t)\} = \mathfrak{F}\{x_a(t)\tilde{\delta}(t)\} \tag{7}$$

La transformada de Fourier es una función lineal, cumple el principio de *homogeneidad* y *aditividad*. Cuando la señal es periódica generalmente el análisis espectral resulta sencillo mediante la implementación de series de Fourier.

Figura 6: Señal análoga y su espectro.

Análisis en el dominio de la frecuencia

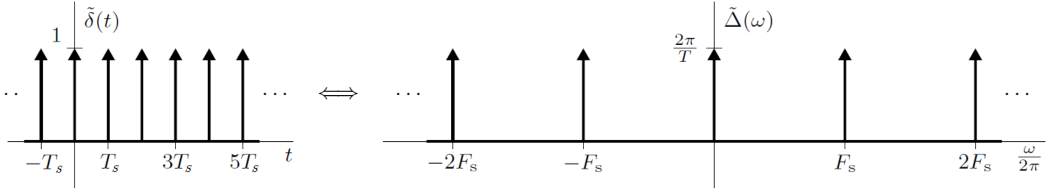


Figura 7: Tren de impulsos y su representación espectral.

Análisis en el dominio de la frecuencia

Del *análisis de señales* se tiene que una señal periódica puede ser representada mediante la suma de sus coeficientes de Fourier, donde la suma y sus cofecientes los encontramos en las ecuaciónes 8 y 9 respectivamente:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}; \tag{8}$$

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\, \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Donde T — periodo fundamental de la señal $f(t)$.

Análisis en el dominio de la frecuencia

- La componente periódica de la señal **??** se puede representar mediante una *serie de Fourier*.
- Para encontrar los coeficientes de Fourier de la*función de pesos* $\tilde{\delta}(t)$ es necesario realizar el análisis dentro de un solo periodo T_s a un solo impulso unitario

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T_s}\int_{\frac{-T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t)e^{-j\omega_s nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_s} \qquad (10)$$

donde, $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$ — frecuencia angular de muestreo, $[s]$;

Análisis en el dominio de la frecuencia

Para expresar *función de pesos* $\tilde{\delta}(t)$ en términos de la suma de sus coeficientes de Fourier implementamos la ecuación 8:

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}nt}. \tag{12}$$

Entonces una serie periódica de impulsos unitarios puede ser expresado mediante a serie de Fourier compleja de la siguiente forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xrightarrow{FS} \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s nt} \tag{13}$$

Análisis en el dominio de la frecuencia

Por consiguiente de la ecuación 6 tenemos:

$$x_{\tilde{\delta}}(t) = x_a(t)\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s nt} = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{j\omega_s nt} \tag{14}$$

La multiplicación de la señal análoga $x_a(t)$ por la secuencia periódica de exponenciales complejas de acuerdo a las propiedades de la transformada de Fourier se ve reflejado mediante un corrimiento de la señal en el dominio de la frecuencia, por tanto tenemos que:

$$\dot{X}_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_a(\omega - \omega_s n) \tag{15}$$

Análisis en el dominio de la frecuencia

Tal cual como se puede inferir de la ecuación 15, el espectro de una señal discreta es una serie de copias del espectro original de la señal análoga original corrida en la frecuencia $\omega_s n$ y escalada con un factor de $\frac{1}{T_s}$. La señal original $X_a(\omega)$ se mantiene y es un resultado esperado.

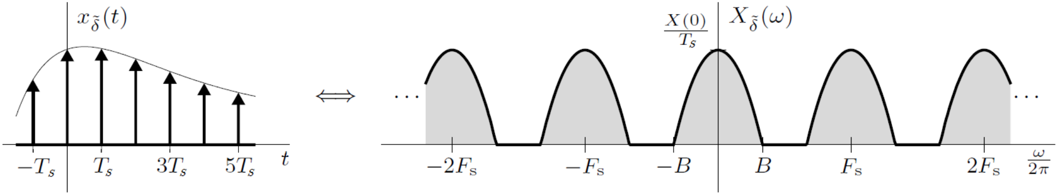


Figura 8: Proceso de muestreo: Muestreo de impulsos y muestro de puntos.

Teorema del muestreo

Conocido también como *teorema del muestreo de Nyquist* o *teorema de Nyquist-Shannon*.

Theorem (Teorema del muestreo)

Si la señal análoga original $x_a(t)$ es estrictamente limitada en banda:

$$\left|\dot{X}_a(f)\right| = 0 \ |f| > B$$

entonces $x_a(t)$ puede ser recuperada sin perdidas e integra a partir de sus muestras $x[n] = x_a(nT_s)$ si,

$$f_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2B$$

$2B$ este limite en frecuencia es conocida como frecuencia o tasa de Nyquist.

Ninguna señal real es limitada en banda, casi todas las señales existentes en la practica presentan espectro infinito, por eso muchas veces es necesaria la implementación de filtros.

Aliasing

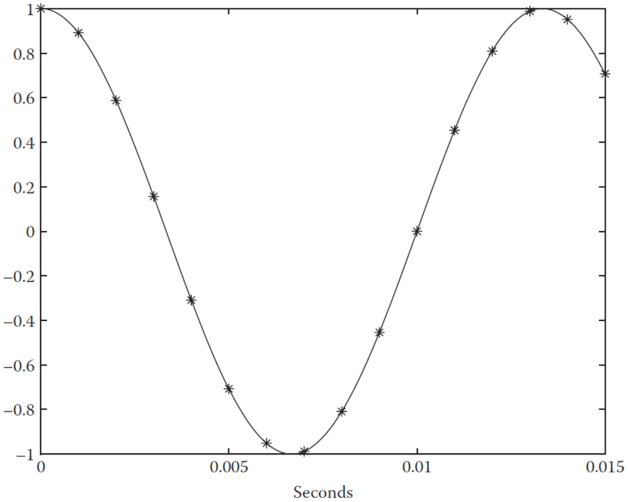


Figura 9: Una sinusoide con una frecuencia de $75\,Hz$ muestreada a $1\,kHz$ donde se pueden apreciar sus

Aliasing

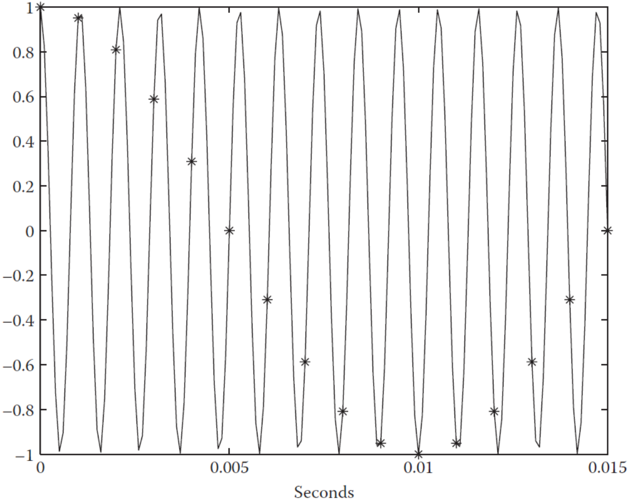
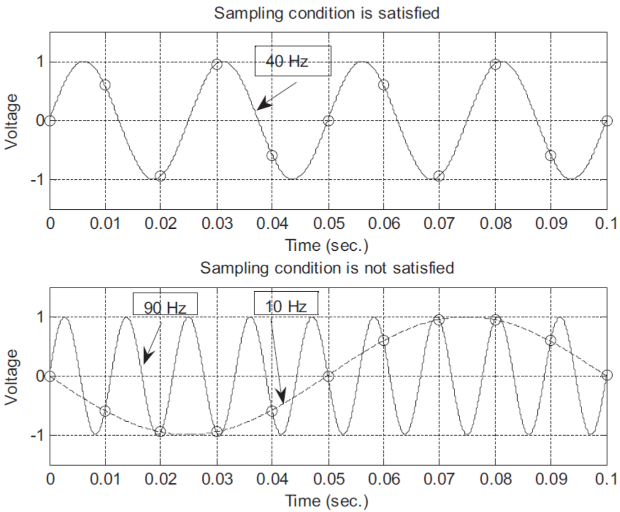


Figura 10: Una sinusoide con una frecuencia de 950 Hz muestreada a 1 kHz donde se puede apreciar

Aliasing


Sampling condition is satisfied
40 Hz
Voltage
1
0
-1
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
Time (sec.)
Sampling condition is not satisfied
90 Hz
10 Hz
Voltage
1
0
-1
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
Time (sec.)

Ejemplo

Example (Discretización de una señal: muestreo, submuestreo y sobremuestreo)

Para la siguiente señal $x(t) = \sin^2(5t)$ con espectro de banda limitada definido por $X(\omega) = 0{,}2\Lambda(\frac{\omega}{20\pi})$ (Fig. 12), dibujar las señales muestreadas y sus respectivos espectros si la tasa de muestreo que se toman son las siguientes:

(a) La tasa de Nyquist

(b) La mitad de la tasa de Nyquist (submuestreo)

(c) El doble de la tasa de Nyquist (sobremuestreo)

Ejemplo

La señal en el dominio temporal y su espectro de ancho de banda limitado se pueden observar en la figura 12.

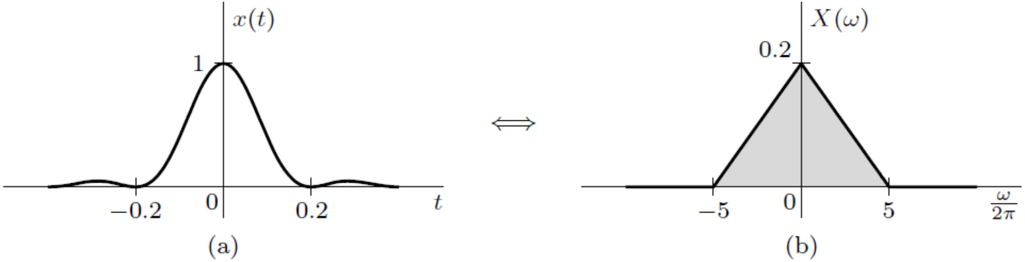


Figura 12: Señal análoga $x(t)$ y su espectro $X(\omega)$.

Ejemplo

Si la señal es discretizada con una frecuencia de muestreo igual a la tasa de Nyquist $f_s = 2B$, el periodo de repetición en frecuencia (separación entre las copias) sería lo estricto mínimo necesario (fig. 13).

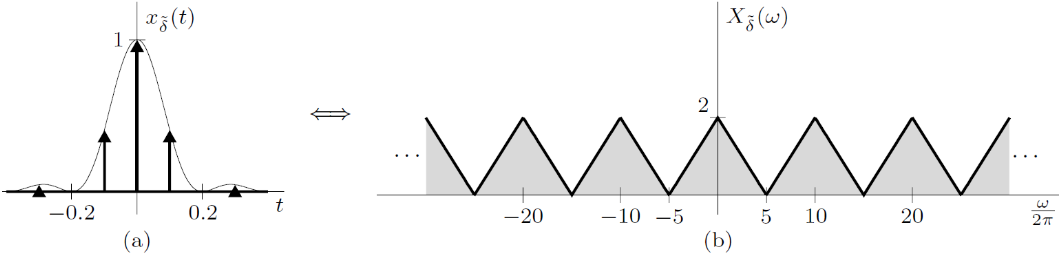


Figura 13: Distintas frecuencias de muestreo: Tasa de Nyquist.

Ejemplo

Para el caso de una frecuencia de muestreo menor a la tasa de Nyquist, la mitad, el intervalo de repetición de las copias es menor a $2B$ y se crea traslape espectral (*ing.* overlap). Este error en forma de traslape de espectros (fig. 14) se denomina *aliasing* (errores de solape).

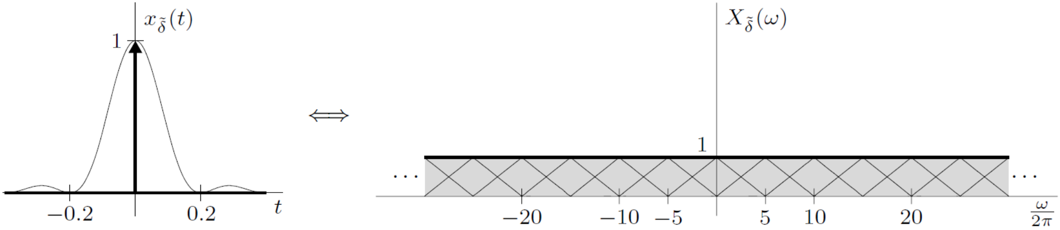


Figura 14: Proceso de muestreo: Submuestreo.

Ejemplo

Si la señal es discretizada con una frecuencia $f_s > 2B$ (en nuestro caso el doble), el periodo de repetición en frecuencia (separación entre las copias) sería mucho mayor que el limite de banda del espectro de la señal original, tal cual como se observa en la figura 15.

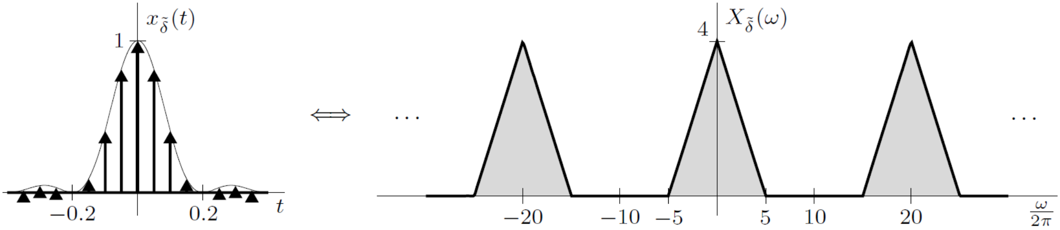


Figura 15: Proceso de muestreo:Muestreo de impulsos y muestro de puntos.

Ejercicio

Discretización de una señal Suponemos una señal análoga $x_a(t)$ de ancho de banda limitado, de tal forma que $\left|\dot{X}_a(f) = 0\right|$ para $|f| > B$. Determinar de forma grafica que efectos ocurren sobre la magnitud del espectro de la señal discretizada si esta es muestreada con una frecuencia de muestreo igual:

(a $f_s \geq 2B$

(b $f_s < 2B$

Ejercicio

Determinar de la Tasa de Nyquist y el intervalo de muestreo Determinar la tasa de Nyquist y el intervalo de Nyquist para las señales:

(a $x_a(t) = \mathrm{sinc}(100t)$

(b $x_b(t) = \mathrm{sinc}(50t) + \mathrm{sinc}(100t)$

(c $x_c(t) = \mathrm{sinc}(50t)\,\mathrm{sinc}(100t)$

(d $x_d(t) = \mathrm{sinc}(50t)\,\mathrm{sinc}(100t))$

Cuantificación y codificación

Definición

La **cuantificación** es el proceso mediante el cual una secuencia discreta $x[n]$ que tiene un rango continuo de amplitud se transforma en una secuencia en la cual cada valor que toma $x[n]$ asumirá ahora un numero finito de posibles valores de intensidad.
El cuantificador es un sistema no lineal y no reversible que realiza la tarea de cuantificar la señal que se encuentre a su entrada.

Este proceso de transformación se puede expresar de la siguiente manera:

$$\hat{x}[n] = Q\{x[n]\} \tag{16}$$

donde, $\hat{x}[n]$ — versión cuantizada de $x[n]$;
$Q\{\cdot\}$ — operador de cuantificación.

Cuantificación y codificación

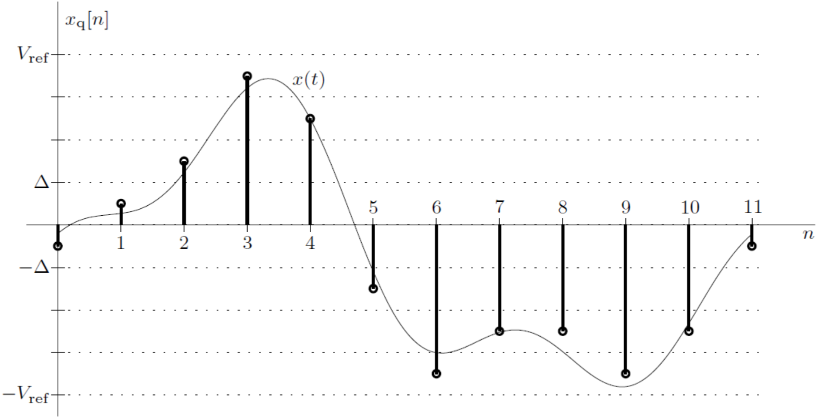


Figura 16: La conversión analoga-digital demanda una cuantificación de la señal.

Cuantificación y codificación

Se dice que un cuantificador tiene $L+1$ niveles de desición, que se expresan mediante la secuencia $x_1, x_2, \ldots, x_L, x_{L+1}$. Que divide el rango de amplitudes de $x[n]$ en L intervalos.

$$L_k = [x_k, x_{k+1}],\ k = 1, 2, \ldots, L$$

En la figura se muestran los limites de decisión de un cuantificador con $9 = L+1$ niveles de decisión.

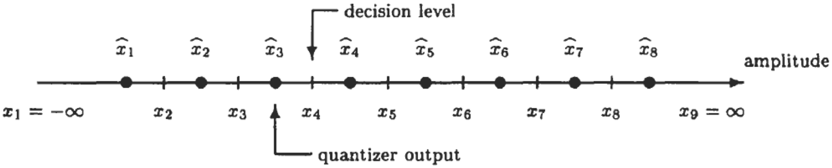


Figura 17: Cuantificador con 9 niveles de decisión, dividiendo la señal en 8 intervalos de cuantificación y solo 8 posibles salidas cuantizadas $\hat{x}_k$.

Si $x[n]$ cae en el intervalo se le asigna el $\hat{x}_k$.

Cuantificación y codificación

- La cuantificación puede ser espaciada uniformemente o no uniformemente. El intervalo de cuantificación (*ing.* step) determina la solución esta operación, y lo representamos:

$$\Delta = x_{k+1} - x_k \tag{17}$$

- El numero de niveles los encontramos depende del numero de bits en la palabra con la que se representara cada valor de la señal cuantificada: $L = 2^B - 1$. Para una codificación binaria con palabras de 3 bits el numero de niveles sería $L + 1 = 2^B - 1 + 1 = 6$.
- El rango de cuantificación si se encuentra limitada la señal $|x[n]| \leq x_{max}$ es igual a:

$$R = 2^{B+1}\Delta, \text{ donde } \Delta = \frac{x_{max}}{2^B}. \tag{18}$$

Cuantificación y codificación

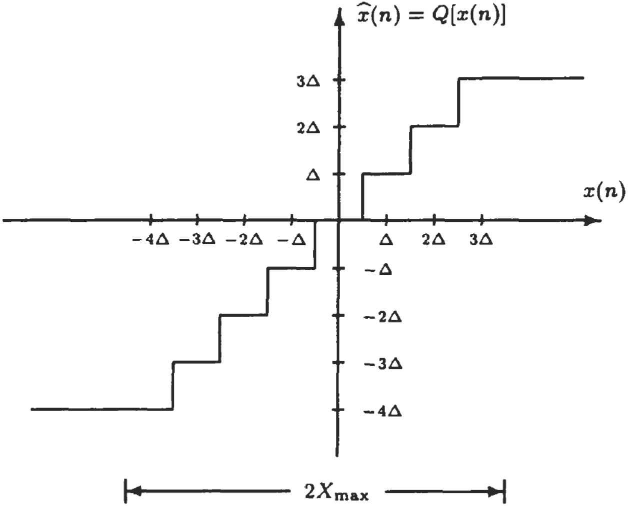
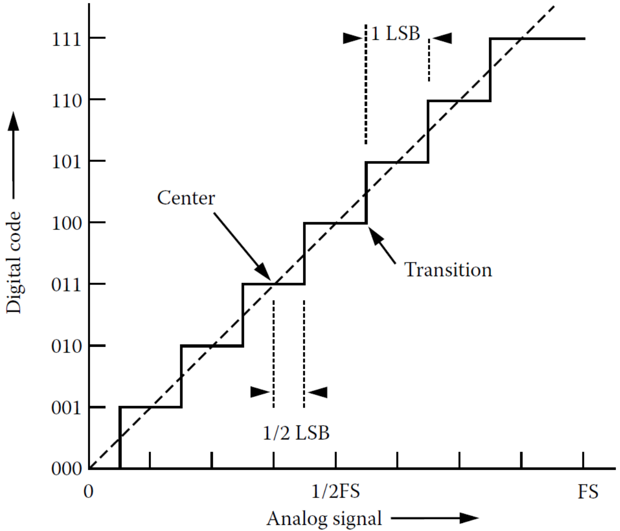


Figura 18: Función de transferencia característica ideal de un ADC

Cuantificación y codificación



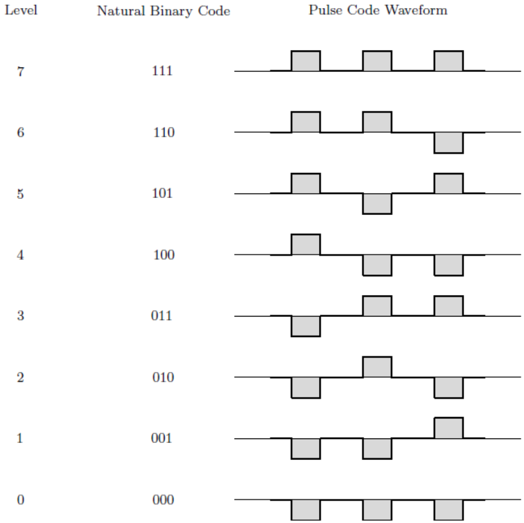
Cuantificación y codificación

La salida del cuantificador es enviada a un codificador, el cual es un sistema no lineal y no regresivo, que asigna a cada nivel de señal cuantificado un único numero binario (palabra de código). Existen muchos esquemas de cuantificación.

$$C = [\underbrace{b_0}_{MSB}, b_1, \ldots, \underbrace{b_B}_{LSB}] \tag{19}$$

Donde MSB — bit mas significativo (*ing.* Most significant bit); LSB — bit menos significativo (*ing.* Least significant bit).

Cuantificación y codificación



Cuantificación y codificación

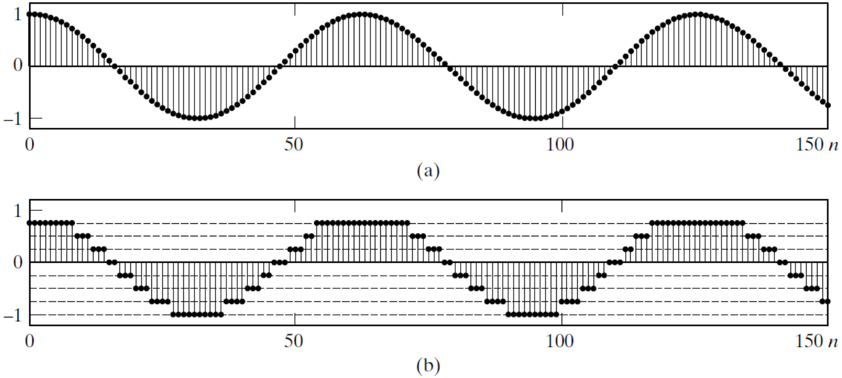
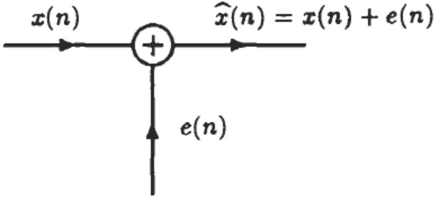


Figura 21: Ejemplo de cuantificación.

Cuantificación y codificación

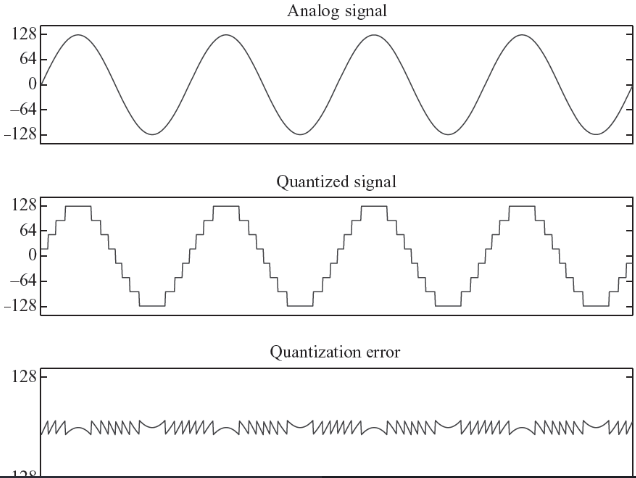
El error de cuantificación se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$e[n] = Q\{x[n]\} - x[n], \text{ limitado por } -\frac{\Delta}{2} \leq e[n] \leq \frac{\Delta}{2} \quad (20)$$



Cuantificación y codificación

El error de cuantificación $e[n]$ se asume como una fuente de ruido aditivo, ya que representa una proceso aleatorio.



Cuantificación y codificación

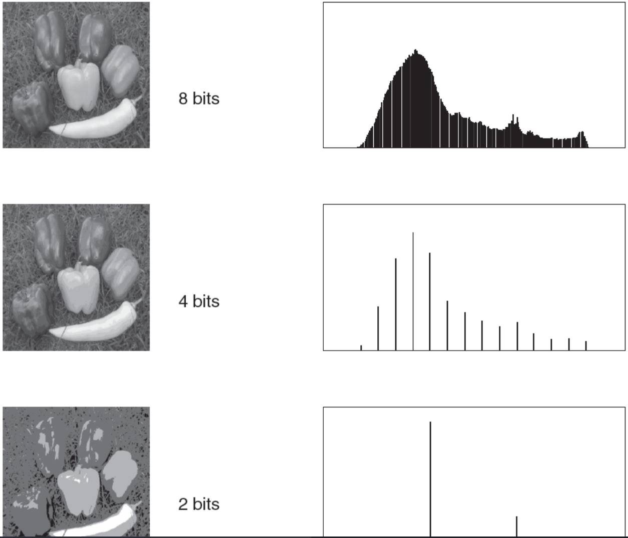
Se describe estadísticamente mediante una secuencia de variables aleatorias. Cuyas principales características son:

- Es un proceso aleatorio estacionario, es decir sus parámetros característicos aleatorios no cambian con el tiempo.
- El ruido de cuantificación es de tipo no correlacionado con otras variables aleatorias (fuentes de ruido).
- El ruido de cuantificación es no correlacionado con la señal $x[n]$ a la entrada del cuantificador.
- La función de densidad de probabilidad se puede aproximar a una función uniformemente distribuida en el intervalo $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$, y su potencia (varianza):

$$\sigma_q^2 = \int_{\frac{-\Delta}{12}}^{\frac{\Delta}{12}} x^2 w(x) \mathrm{d}x = \frac{\Delta^2}{12} \tag{21}$$

donde, $w(x)$ — PDF de la variable aleatoria x;
x — representación de la variable aleatoria del ruido cuantificado $e[n]$

Cuantificación y codificación



Cuantificación y codificación

Figura 25: Cuantificación de imagen utilizando $8, 1, y4\, bits$ (LSB removal).