

Verifica della legge delle lenti sottili e studio delle aberrazioni ottiche

Marco Vianello
marco.vianello.14@studenti.unipd.it
2158657

Matteo Tila
email
matricola

Abstract

La lunghezza focale di una prima lente convergente è stata determinata utilizzando il metodo dei punti coniugati e il metodo di Bessel. Le aberrazioni cromatica e sferica di una seconda lente sono state analizzate rispettivamente osservando la variazione del punto focale con la lunghezza d'onda e misurando la diversa focalizzazione dei raggi marginali rispetto a quelli parassiali. In questa seconda fase è stato utilizzato un doppietto ottico di lunghezza focale nota per generare un fascio di luce collimata, in quanto la prima lente si è dimostrata non adatta allo scopo.

1 Che cosa manca

- Metodo di Bessel
- Aberrazioni

2 Introduzione

L'equazione fondamentale delle lenti sottili

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (2.1)$$

dove p è la distanza oggetto-lente, q è la distanza lente-immagine nitida e f è la lunghezza focale della lente in esame, si deriva nell'approssimazione parassiale (per raggi poco inclinati rispetto all'asse ottico) e descrive il comportamento ideale di una lente priva di aberrazioni.

2.1 Parte prima: verifica dell'Equazione (2.1) e determinazione della lunghezza focale di una lente

Nella prima parte dell'esperienza la validità dell'Equazione (2.1) è stata verificata e sfruttata per determinare la lunghezza focale di una lente convergente (in seguito «lente numero 1», «prima lente», ecc.). La procedura di misura seguita è riassunta nel «metodo dei punti coniugati» e nel «metodo di Bessel», ora descritti brevemente. I dettagli sul setup sperimentale adottato e sulla procedura di misura sono riportati nella Sezione 3.

Il metodo dei punti coniugati. Su una breadboard ottica sono stati allestiti un oggetto (costituito da una sorgente luminosa a piè della quale è stata posta una maschera opaca forata) e una guida metrica lineare. La lente in esame e una camera CCD sono state disposte a posizione variabile sulla guida metrica in modo da determinare il maggior numero di coppie (p, q) di «punti coniugati» per i quali l'immagine dell'oggetto prodotta dalla lente risultasse a fuoco sulla camera. La lunghezza focale f della prima lente è stata calcolata mediante un fit lineare sulle coppie $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$, la cui relazione funzionale è descritta appunto dall'Equazione (2.1).

Il metodo di Bessel. Sulla breadboard ottica equipaggiata come nel punto precedente la camera è stata fissata a una distanza $d > 4f$ (dove f è la distanza focale stimata con il metodo

precedente) dall'oggetto. In tali condizioni si ricava che esistono due punti distinti tra oggetto e camera nei quali l'immagine è a fuoco. Se Δ è la distanza tra queste due posizioni la lunghezza focale si calcola con la relazione

$$f = \frac{d^2 - \Delta^2}{4d}, \quad (2.2)$$

pertanto è possibile fornire una stima precisa di f ripetendo la procedura di misura della distanza Δ per diverse posizioni della camera. Questa parte dell'esperienza non è stata riportata sulla relazione.

La determinazione diretta dei valori p e q nel metodo dei punti coniugati è soggetta alla difficoltà pratica di individuare con precisione i piani principali della lente, ovvero i punti di riferimento teorici dai quali si misurano le distanze oggetto-lente e lente-camera¹. Inoltre, gli elementi ottici hanno dimensioni fisiche non trascurabili delle quali è opportuno tenere conto, non senza introdurre però un'ulteriore fonte di errore casuale ed eventualmente sistematico nelle misure. Il metodo di Bessel è esente da questo primo tipo di errore sistematico, mentre partecipa degli altri. Nella Sezione 3 sono state discusse le correzioni da apportare alle misure per ovviare alla presenza di questi errori.

2.2 Seconda parte: studio delle aberrazioni ottiche

In questa seconda parte si è affrontato lo studio delle deviazioni dal modello di lente sottile ideale riportato in Equazione (2.1).

Il banco ottico è stato riorganizzato in modo da avere a disposizione una sorgente di luce collimata (raggi paralleli). Successivamente,

1. è stata registrata la variazione del punto focale della seconda lente in funzione della lunghezza d'onda della luce emessa dalla sorgente al fine di valutare quantitativamente l'aberrazione cromatica longitudinale (per tre lunghezze d'onda: blu, giallo e rosso);
2. è stato registrato l'offset che separa il punto di focalizzazione dei raggi parassiali da quello dei raggi marginali al fine di valutare l'aberrazione sferica.

Questa parte dell'esperienza non è stata riportata sulla relazione.

3 L'apparato sperimentale e la metodologia di misura

3.1 Componenti

Per svolgere entrambe le parti dell'esperienza sono stati utilizzati

- Breadboard ottica Thorlabs MB4590/M, paletti Thorlabs serie TR, portapaletti Thorlabs serie PH e adeguata viteria.
- Sorgente luminosa equipaggiata con una maschera opaca forata che permette la propagazione dei raggi di luce esclusivamente nella direzione dell'asse ottico (l'«oggetto») e schermabile attraverso filtri a $\lambda_F = 486.1 \text{ nm}$, $\lambda_D = 589.7 \text{ nm}$ e $\lambda_C = 656.3 \text{ nm}$.

¹È stato assunto che ciascun piano principale fosse collocato a circa un terzo dello spessore VV' della lente all'interno del vetro, ovvero a una distanza $\frac{VV'}{3}$ dal vertice corrispondente. Tuttavia, questa rimane una stima approssimata la cui incertezza contribuisce direttamente all'incertezza sistematica nella determinazione diretta di p e q per il metodo dei punti coniugati.

- Alimentatore da banco e cavi (per alimentare la sorgente luminosa).
- Guida metrica Thorlabs RLA240 e carrelli Thorlabs RC1.
- Schermo Thorlabs EDU-VS2M (utile per le procedure di allineamento).
- Bastoncino di plastica di 81 mm di lunghezza.
- Portamenti Thorlabs LMR2S/M.
- Lente di lunghezza focale incognita in vetro N-BK7² di produttore Thorlabs (cotrassegnata da un bollino verde).
- Doppietto ottico (presumibilmente di produttore Thorlabs) di lunghezza focale nota $f = 81$ mm.
- Camera CCD Thorlabs CS165CU/M con cavetto USB.
- Un PC con software ThorImageCAM per controllare la camera.

3.2 Allestimento del banco ottico e determinazione dei fattori di correzione

I componenti principali (camera, lente, ecc.) sono stati montati sulle rispettive strutture di supporto Thorlabs serie TR e PH, ad ognuna delle quali è stato avvitato uno carrello Thorlabs RC1. La sorgente luminosa equipaggiata con maschera e filtri è stata collegata all'alimentatore e assieme alla guida metrica è invece fissata direttamente alla breadboard ottica.

Al momento della stesura di questo documento non è nota l'incertezza con cui sono riportate le misure dei componenti Thorlabs.

3.2.1 Offset oggetto-zero della guida metrica

L'offset δ_1 tra il foro della maschera (l'«oggetto») e lo zero della guida è stato determinato mediante la seguente procedura (cfr. Sezione 4). Lo schermo Thorlabs EDU-VS2M (in seguito «lo schermo») è stato posto perpendicolarmente alla direzione di propagazione dei raggi luminosi a una distanza pari alla lunghezza $l_{\text{bacchetta}} = 81$ mm della bacchetta dall'oggetto. Il valore segnato dal lato sinistro del rispettivo carrello sulla guida metrica è stato registrato come z e gli è stata assegnata l'incertezza di modello triangolare. Il valore di δ_1 è stato pertanto determinato come

$$\delta_1 = l_{\text{bacchetta}} + \frac{1}{2}l_{\text{schermo}} - \frac{1}{2}l_{\text{carrello}} - z = (26.8 \pm 0.2) \text{ mm} \quad (3.3)$$

dove $l_{\text{schermo}} = 3$ mm e $l_{\text{carrello}} = 25.4$ mm sono rispettivamente la misura dello spessore dello schermo e della lunghezza del lato lungo del carrello riportate nei disegni fatti mediante CAD e resi disponibili sulla pagina Moodle del corso o direttamente sul sito del produttore.

3.2.2 Offset carrello-lente

Gli offset δ_2 e δ_3 rispettivamente tra i lati sinistro e destro del carrello sul quale è alloggiata la prima lente e i suoi vertici sinistro e destro sono stati determinati mediante la seguente procedura (cfr. sempre i disegni alla Sezione 4). Per determinare δ_2 schermo e lente sono stati disposti in quest'ordine sulla guida metrica, con lo schermo a distanza $l_{\text{bacchetta}}$ dal vertice sinistro della lente. È stata segnata la distanza Δ tra il lato destro del carrello portante lo

²Quest'informazione andrebbe verificata.

schermo e il lato sinistro del carrello portante la lente, alla quale è stata assegnata l'incertezza di modello triangolare. Si è quindi posto

$$\delta_2 = \frac{1}{2}l_{\text{schermo}} + l_{\text{bacchetta}} - \frac{1}{2}l_{\text{carrello}} - \Delta = (2.8 \pm 0.3) \text{ mm} \quad (3.4)$$

dove come prima l_{schermo} e l_{carrello} sono rispettivamente la misura dello spessore dello schermo e della lunghezza del lato lungo del carrello riportate nei disegni. In modo analogo è stato determinato δ_3 , ponendo questa volta lo schermo a destra della lente.

3.2.3 Offset carrello-piano principale

Gli offset δ_4 e δ_5 tra rispettivamente il lato sinistro del carrello nel quale è alloggiata la lente e il suo primo piano principale, e tra il suo secondo piano principale e il lato destro del carrello sono stati determinati a partire dagli offset δ_2 e δ_3 carrello-lente nel modo seguente. Come preannunciato, è stato assunto che ciascun piano principale fosse collocato a circa un terzo dello spessore VV' della lente all'interno del vetro. Pertanto è stato posto

$$\delta_4 = \delta_2 + \frac{1}{2}VV' - \frac{1}{2}\frac{VV'}{3} = (6.7 \pm 0.3) \text{ mm} \quad (3.5)$$

dove il valore della quantità VV' è tabulato pari a $VV' = (11.8 \pm 0.1) \text{ mm}$. In modo analogo è stato determinato δ_5 .

3.2.4 Offset carrello-sensore CCD

L'offset δ_6 tra il lato sinistro del carrello sul quale è alloggiata la camera e l'effettiva posizione del sensore CCD all'interno di essa è stato determinato a partire dai disegni tecnici forniti dal produttore come

$$\delta_6 = \frac{1}{2}l_{\text{carrello}} + 3 \text{ mm} = 15.7 \text{ mm} \quad (3.6)$$

dove come sempre l_{carrello} denota la lunghezza del lato maggiore del carrello.

3.3 Determinazione dell'incertezza sulla posizione di fuoco

3.3.1 Incertezza sulla distanza oggetto-lente

Si assume in seguito che l'incertezza statistica $s_{p,\text{prelim}}$ sui valori p_{prelim} di distanza oggetto-lente *non corretti* coincida con l'incertezza di lettura della guida metrica. Si pone cioè

$$s_{p,\text{prelim}} = \frac{1 \text{ mm}}{2\sqrt{6}} = 0.2 \text{ mm} \quad (3.7)$$

assumendo che il modello stocastico che determina l'incertezza sulla misura sia la pdf triangolare.

I valori p_{prelim} sono stati corretti applicando i fattori discussi alla Sezione 3.2. In particolare si è posto (cfr. disegni tecnici alla Sezione 4)

$$p = p_{\text{prelim}} + \delta_1 + \delta_4, \quad (3.8)$$

e l'incertezza s_p sui valori p di distanza oggetto-lente è stata ricavata propagando le singole incertezze dei fattori che compongono p . Trattandosi di quantità indipendenti si pone dunque

$$s_p = \sqrt{s_{p,\text{prelim}}^2 + s_{\delta,1}^2 + s_{\delta,4}^2} = 0.41 \text{ mm} \quad (3.9)$$

per tutto il resto del documento.

3.3.2 Incertezza sulla distanza lente-camera

Posizionata la lente a una distanza p oggetto-lente fissata non è stato possibile determinare un unico valore q di distanza lente-camera tale per cui l'immagine generata dall'oggetto sulla camera attraverso la lente risultasse a fuoco. Si è dunque cercato di fornire una stima dell'incertezza sulla posizione relativa q_{prelim} della camera. In altre parole, quale incertezza va assegnata alla misura del valore segnato sulla guida metrica dal lato sinistro del carrello di supporto della camera? Si riportano alcune ipotesi.

Modello uniforme su ampiezza dell'intervallo di fuoco. Fissata una distanza p oggetto-lente è stato determinato un intervallo $[q_{\text{prelim,min}}, q_{\text{prelim,max}}]$ di valori di distanza relativa q_{prelim} entro i quali l'immagine generata dall'oggetto sulla camera attraverso la lente fosse a fuoco (leggermente più grande di quanto effettivamente fosse risultato l'intervallo reale, per necessità di leggere bene la tacca sulla guida). L'incertezza $s_{q,\text{prelim}}$ associata alla misura è stata dunque posta pari a

$$s_{q,\text{prelim}} = \frac{q_{\text{prelim,max}} - q_{\text{prelim,min}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \text{ mm}}{2\sqrt{3}} = 0.3 \text{ mm} \quad (3.10)$$

assumendo il modello uniforme.

Fit gaussiano su profilo di intensità. La procedura non è stata portata a termine in quanto sono stati riscontrati dei problemi di natura non ancora chiarita durante la determinazione della FWHM. Si riportano comunque i passaggi seguiti.

- Fissata come nel caso precedente una distanza p oggetto-lente è stata individuata una distanza alla quale l'immagine generata dall'oggetto sulla camera attraverso la lente risultasse soggettivamente più nitida sul monitor del PC.
- Attorno a questa posizione sono state acquisite cinque immagini a distanze note: una con la camera alla distanza in cui l'immagine era fuoco; una con la camera a $\pm 0.5 \text{ mm}$ e una con la camera a $\pm 1.0 \text{ mm}$ dalla posizione di fuoco.
- È stato utilizzato il software ImageJ per tracciare su ciascuna immagine lo stesso profilo diametrale come riportato ad esempio in Figura 1. È stato Successivamente impiegato lo strumento Analyze > Plot Profile di ImageJ per esportare il profilo di intensità selezionato.
- Sui cinque profili è stato utilizzato il pacchetto `LsqFit.jl` di Julia per fittare il profilo con una curva gaussiana a quattro parametri tra cui la deviazione standard σ .
- A partire dalla stima della deviazione standard si è ricavata la larghezza a metà massimo (FWHM) del profilo in intensità come

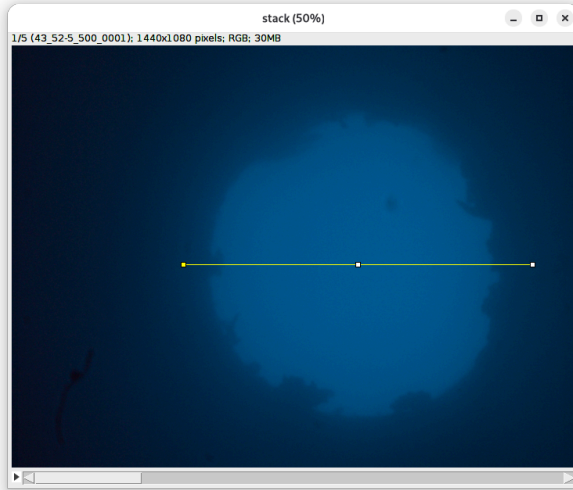


Figura 1: Sezione diametrale selezionata.

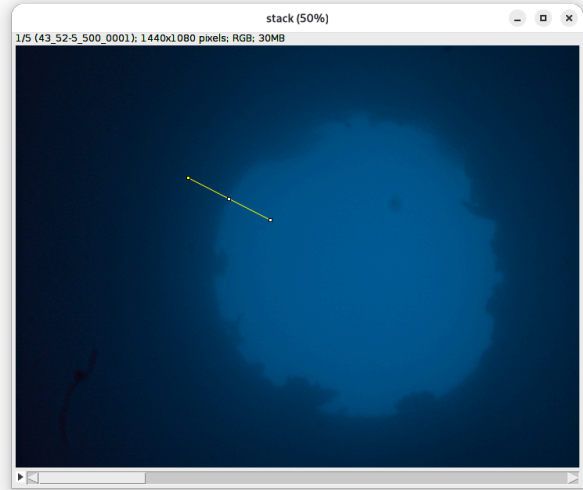


Figura 2: Sezione del bordo selezionata.

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2\log 2}\sigma \approx 2.355\sigma. \quad (3.11)$$

I risultati del fit e la stima della FWHM con il relativo errore a posteriori sono riportati in Tabella 1. Purtroppo l'ipotesi fondamentale che la FWHM minima corrisponda alla posizione ottimale di fuoco risulta non verificata. Non è stata trovata una spiegazione per questo fenomeno, e si è dunque proceduto a utilizzare un metodo diverso per determinare l'incertezza sulla posizione di fuoco.

3.4 Verifica della legge delle lenti sottili e determinazione della lunghezza focale della prima lente

Come accennato nell'Introduzione sono stati impiegati due metodi distinti per determinare la lunghezza focale della prima lente. Entrambi i metodi richiedono di essere svolti in un ambiente buio. Gli elementi ottici sono stati maneggiati indossando dei guanti in lattice.

Una volta che la breadboard ottica è stata allestita come indicato sopra alla Sezione 3.2, la camera è stata collegata al PC per visualizzare in tempo reale il suo output sul monitor, e la sorgente luminosa è stata alimentata con una tensione variabile da 0 V a 10 V. Per svolgere la misura è stato utilizzato il filtro blu a lunghezza $\lambda_F = 486.1 \text{ nm}$.

posizione	σ	s_σ	FWHM	s_{FWHM}
(mm)	pixel	pixel	pixel	pixel
0.0	769.75	80.03	1812.75	188.46
0.5	746.08	65.7	1757.01	154.72
-0.5	1062.18	234.27	2501.45	551.72
1.0	592.21	21.48	1394.65	50.59
-1.0	28618.88	4.02846581e6	67397.45	9.48703698e6

Tabella 1: Risultati del fit gaussiano sui profili di intensità.

3.4.1 Metodo dei punti coniugati

La procedura delineata alla voce «Metodo dei punti coniugati» della Sezione 2.1 è stata implementata nel modo seguente.

1. La lente è stata posizionata ripetutamente sulla guida metrica (con il logo «THORLABS» del portalenti che guarda nella direzione di arrivo dei raggi luminosi) in modo che il lato sinistro del suo carrello di supporto corrispondesse a una serie di valori preliminari p_{prelim} di distanza oggetto-lente da 60 mm a 490 mm, con un passo di 10 mm.
2. Per ciascuna di queste posizioni è stata regolata la posizione della fotocamera lungo la guida, spostandola avanti e indietro finché l'immagine mostrata sullo schermo del PC è risultata sufficientemente nitida. Il valore segnato dal lato sinistro del carrello di supporto per la camera è stato registrato come distanza preliminare q_{prelim} lente-camera.
3. I valori p_{prelim} sono stati corretti come in Sezione 3.3 applicando i fattori discussi in Sezione 3.2, e sempre utilizzando i fattori di Sezione 3.2 sono stati corretti i valori q_{prelim} . In particolare si è posto

$$\begin{aligned} p &= p_{\text{prelim}} + \delta_1 + \delta_4 \\ q &= q_{\text{prelim}} - p_{\text{prelim}} - l_{\text{carrello}} + \delta_5 + \delta_6 \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove come in precedenza l_{carrello} è la lunghezza del lato maggiore del carrello. L'incertezza $s_{q,\text{prelim}}$ su q_{prelim} è stata valutata pari a $s_{q,\text{prelim}} = 0.3 \text{ mm}$ nella Sezione 3.3. L'andamento generale delle nuove coppie (p, q) è riportato in Figura 3.

4. È stato usato il pacchetto `LsqFit.jl` citato in precedenza per fare un fit ai minimi quadrati pesato sull'andamento delle coppie (p, q) con un modello non lineare parametrico del tipo

$$q(p) = \left(\alpha - \frac{1}{p} \right)^{-1} \quad (3.13)$$

di modo che il parametro α^{-1} fornisca una stima della lunghezza focale della lente in esame. Il valore di α ottenuto dal minimizzatore è $\alpha = 0.0137048 \text{ mm}^{-1}$ e l'incertezza s_α su α assegnata $s_\alpha = 0.000003 \text{ mm}^{-1}$. Questo fornisce la prima stima $f_{(p,q)}$ della lunghezza focale della prima lente come

$$f_{(p,q)} = (72.97 \pm 0.02) \text{ mm} \quad (3.14)$$

mediante propagazione delle incertezze. La curva interpolante è riportata in Figura 3.

5. Analogamente, poste $X = \frac{1}{p}$ e $Y = \frac{1}{q}$ è stato usato il pacchetto `LsqFit.jl` per fare un fit con il modello lineare

$$Y(X) = \beta_1 + \beta_2 X \quad (3.15)$$

l'andamento delle coppie (X, Y) , di modo che la quantità β_1^{-1} fornisca una stima della lunghezza focale. Il valore di β ottenuto dal minimizzatore è $\beta = 0.013601 \text{ mm}^{-1}$ e l'incertezza s_β su β assegnata $s_\beta = 0.000012 \text{ mm}^{-1}$. Questo fornisce la seconda stima $f_{(X,Y)}$ della lunghezza focale della prima lente come

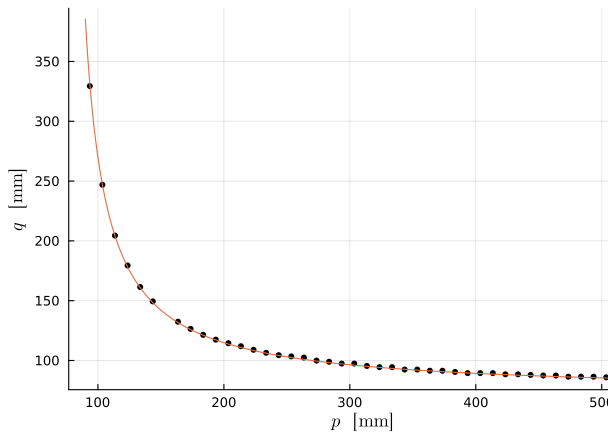


Figura 3: Andamento delle coppie (p, q) .

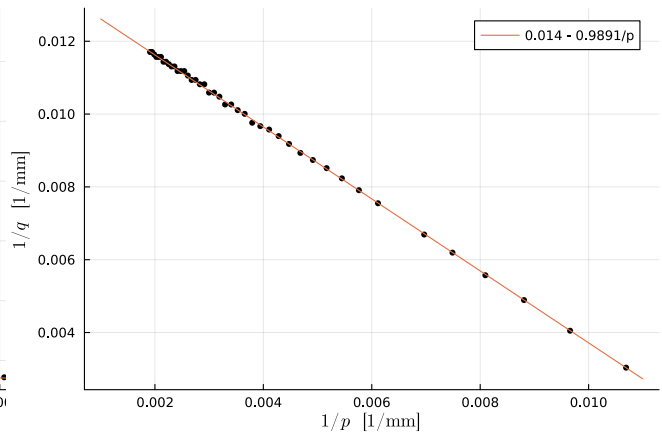


Figura 4: Andamento delle coppie (X, Y) .

$$f_{(X,Y)} = (73.52 \pm 0.06) \text{ mm} \quad (3.16)$$

mediante propagazione delle incertezze. La curva interpolante è ora riportata in Figura 4.

6. Infine si è fornita un'ulteriore stima f_{puntuale} della lunghezza focale in quanto media pesata delle quantità

$$f = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)^{-1} \quad (3.17)$$

calcolate a partire dalle coppie di valori p e q , per le quali l'incertezza è quella propagata. Si è ottenuto

$$f = (73.25 \pm 0.16) \text{ mm} \quad (3.18)$$

L'andamento di questo valore in funzione delle distanze preliminari p_{prelim} oggetto-lente è riportato in Figura 5.

4 Dati, codice e disegni tecnici

Il materiale di supporto alla relazione è archiviato in una repository al link https://www.github.com/marcovianello5/es1_focale.

p_{prelim}	q_{prelim}	p	q	f
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
60.0 ± 0.2	386.0 ± 0.3	93.53 ± 0.41	329.43 ± 0.46	72.85 ± 0.24
170.0 ± 0.2	281.0 ± 0.3	203.53 ± 0.41	114.43 ± 0.46	73.25 ± 0.19
270.0 ± 0.2	364.0 ± 0.3	303.53 ± 0.41	97.43 ± 0.46	73.76 ± 0.26
370.0 ± 0.2	456.0 ± 0.3	403.53 ± 0.41	89.43 ± 0.46	73.21 ± 0.31
470.0 ± 0.2	552.5 ± 0.3	503.53 ± 0.41	85.93 ± 0.46	73.41 ± 0.34

Tabella 2: Campione delle misure grezze e delle relative correzioni per il metodo dei punti coniugati. Nell'ultima colonna c'è la stima puntuale della distanza focale.

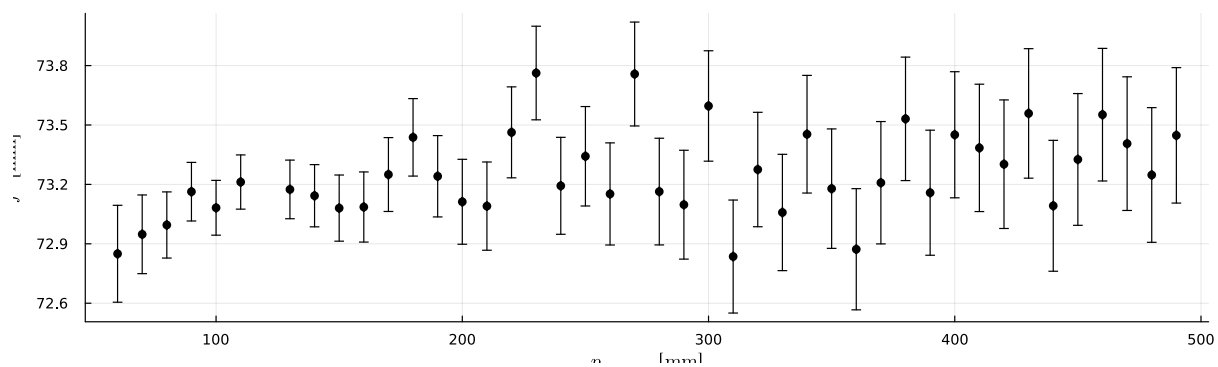


Figura 5: Andamento di f in funzione delle distanze preliminari oggetto-lente.