



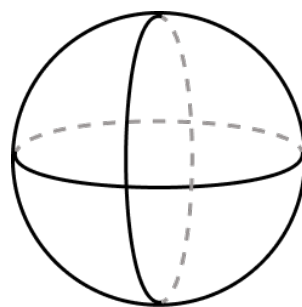
PUC Minas

CÁLCULO I
PROFA. MAGALI MEIRELES

Taxas de Variação Relacionadas

O objetivo destes problemas é determinar a taxa de variação de uma grandeza em relação à taxa de variação de outra. Em algumas situações, a função estudada é composta e é preciso usar a regra da cadeia para determinar a taxa de variação.

Exemplo1: Um balão esférico está sendo preenchido com gás a uma taxa constante de $8 \text{ m}^3/\text{min}$. Calcule com que variação o raio r do balão aumenta quando $r = 2\text{m}$ e $r = 4\text{m}$.



O volume da esfera é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Sabemos que $\frac{dv}{dt} = 8$.

Precisamos encontrar $\frac{dr}{dt}$.

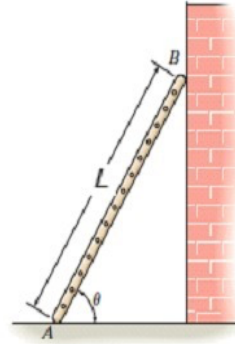
Derivando a expressão do volume em relação ao tempo, $\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

Isolando $\frac{dr}{dt}$, teremos $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot 8 = \frac{2}{\pi r^2}$

Para $r = 2$, $\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi 2^2} = \frac{1}{2\pi} \approx 0,16\text{m}/\text{min}$

Para $r = 4$, $\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi 4^2} = \frac{1}{8\pi} \approx 0,04\text{m}/\text{min}$

Exemplo 2: Uma escada de 13 m está apoiada em uma parede. A base da escada está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede, a uma taxa constante de 6 m/min. Com que variação o topo da escada se move para baixo, encostado à parede, quando a base da escada está a 5m da parede?



Siga os passos:

1. Identifique as variáveis envolvidas no problema;
2. Determine a taxa de variação dada pelo problema;
3. Determine a taxa de variação solicitada pelo problema;
4. Encontre a equação que relaciona as variáveis do problema;
5. Derive a equação em relação ao tempo;
6. Isole a taxa de variação solicitada pelo problema na derivada da equação;
7. Substitua a taxa de variação informada pelo problema na derivada da equação.

Exemplo 3: Um tanque em forma de cone com o vértice para baixo mede 12m de altura e tem, no topo, um diâmetro de 12m. A água é bombeada à taxa de $4\text{m}^3/\text{min}$. Encontre a taxa com que o nível da água sobe.

- (a) Quando a água tem 2m de profundidade;
- (b) Quando a água tem 8m de profundidade.

