PUC Minas

CÁLCULO I
PROFA. MAGALI MEIRELES

Funções racionais e algébricas

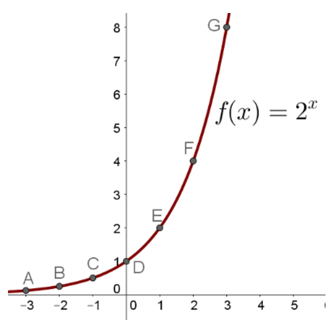
São funções que podem ser obtidas por meio de um número finito de operações algébricas (adição, multiplicação, subtração, divisão e radiciação com índice inteiro positivo)

Exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2}$$
$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

Funções exponenciais e logarítmicas

A função $f(x) = a^x$ $(se\ a > 0)$ é chamada função exponencial, pois a variável x é o expoente. Esta função não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável x é a base. Vamos avaliar o gráfico de $f(x) = 2^x$:



Existem, basicamente, três tipos de função exponencial para a função $f(x) = a^x$:

- Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce;
- Se $a = 1$, a função é uma constante;
- Se $a > 1$, a função exponencial cresce.

Propriedades:
Se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

A <u>função exponencial</u> ocorre frequentemente em modelos matemáticos relacionados à natureza e à sociedade. Surgem, usualmente, na descrição do crescimento populacional e no decaimento radioativo.

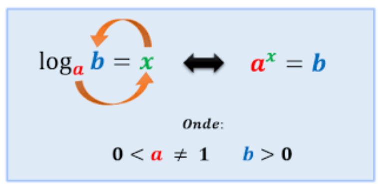
Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é muito utilizada no Cálculo, o número *e*. A <u>função exponencial natural</u> é a função **exponencial** cuja base é o número de Euler (um número irracional que vale aproximadamente 2,718281828).

<u>Exemplo1:</u> Esboce o gráfico de $y = 3 - 2^x$ e determine o seu domínio e a sua imagem.

<u>Exemplo2:</u> Esboce o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ e determine o seu domínio e a sua imagem.

Existe uma <u>função inversa</u>, denominada **função logarítmica**, tal que:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

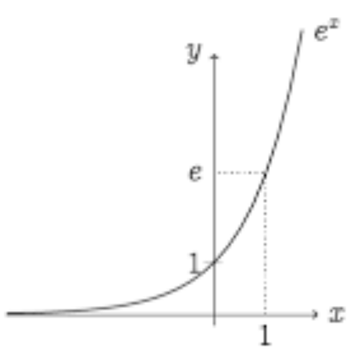


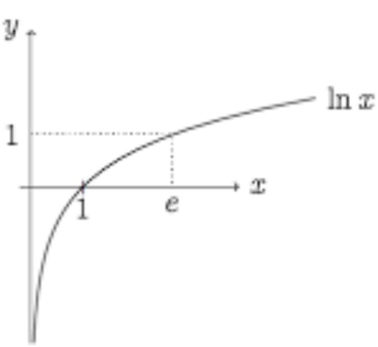
Propriedades:

Se x e y forem números positivos, então:

1. $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (onde r é qualquer número real)

Os logaritmos na base *e* são chamados de <u>logaritmos naturais</u> e têm uma notação especial.





$$\boldsymbol{\log_e x = ln\, x}$$

As propriedades se tornam:

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Para fazer mudança de base:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

<u>Exemplo 3:</u> Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$

<u>Exemplo 4:</u> Expresse $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como um único logaritmo

<u>Exercícios propostos:</u>

Solucione cada equação em x:

1. $2\ln x = 1$
2. $e^{-x} = 5$
3. $e^{2x+3} - 7 = 0$
4. $\ln(5 - 2x) = -3$
5. $2^{x-5} = 3$
6. $\ln x + \ln(x - 1) = 1$