PUC Minas

CÁLCULO I
PROFA. MAGALI MEIRELES

<u>Aproximações Lineares</u>

A **<u>fórmula de Taylor</u>** permite o cálculo do valor de uma função por aproximação por meio de uma função polinomial. Supondo-se que *f* seja uma função derivável em um intervalo contendo um ponto *a*, a fórmula de Taylor fornece uma regra para determinar um polinômio de grau *n* que aproxima a função do ponto *a*.

$$P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Determinação dos coeficientes

$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots \quad Logo, \boldsymbol{f(a) = a_0}$

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) \quad + 3a_3(x-a)^2 + \cdots \quad Logo, \boldsymbol{f'(a) = a_1}$

$f''(\mathrm{x}) = 2\mathrm{a}_2 + 6\mathrm{a}_3(\mathrm{x-a}) \quad + \ldots$ Logo, $\mathrm{f}(a) = 2a_2 \quad e \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{f''(a)}{2}}$

$f'''(x) = 6a_{3+\ldots} \quad Logo, f'''(x) = 6a_3 \ \ e \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}}$

Logo:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Se tomarmos *n* suficientemente grande e *x* próximo de *a*, *f(x)* se aproxima de $\boldsymbol{P_n(x)}$.

Exemplos:

1. Encontre os 4 primeiros termos do Polinômio de Taylor para $f(x) = \frac{1}{1+x}\ e\ a = 0$ e calcule a função $f(x)$ e o Polinômio de Taylor para $\boldsymbol{x = 0,1\ e\ x = 0,5}$.
2. Encontre os 5 primeiros termos do Polinômio de Taylor para $f(x) = sen\ x\ e\ a = \frac{\pi}{4}$.

Exercícios:

1. Encontre o Polinômio de Taylor de grau 4, para a função $f(x) = \frac{1}{x+2}\ e\ a = 1$.
2. Determine o valor da função f(x) do exercício 1 para *x=2*, usando a fórmula da função e a fórmula do Polinômio de Taylor.

3. Encontre o Polinômio de Taylor de grau 3, para a função $f(x) = ln|1 + x|\ e\ a = 0$.

4. Determine o valor da função f(x) do exercício 3 para *x=0,1* e *x=0,2*, usando a fórmula da função e a fórmula do Polinômio de Taylor.