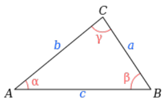
Trigonometrysolver How it Works

Marco Zeller

September 12, 2016

Dieses Dokument erklärt wie der Trigonometrysolver arbeitet. Es werden aber nur die implementierten mathematischen Formeln hergeleitet, die detailierte implementation kann dem Quelltext entnommen werden.

1 Grundlagen



Theorem 1 (Innenwinkelsumme des Dreiecks)
Für ein beliebiges Dreieck ABC mit Winkeln α, β, γ gilt:

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma$$

Theorem 2 (Sinussatz)
Für ein belibiges Dreieck ABC mit Seiten a, b, c und Winkeln α, β, γ gilt:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$$

Theorem 3 (Cosinussatz)
Für ein belibiges Dreieck ABC mit Seiten a, b, c und Winkeln α, β, γ gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \tag{1}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \tag{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \tag{3}$$

2 Formeln

2.1 Drei Seiten bekannt

Fall 1 (a,b,c)
Aus dem Cosinussatz folgt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

2.2 Drei Winkel und eine Seite

Fall 2 (a, α, β, γ)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$b = \frac{\sin(\beta)}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$c = \frac{\sin(\gamma)}{\sin \alpha} \cdot a$$

Fall 3 (b, α, β, γ)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$a = \frac{\sin(\alpha)}{\sin \beta} \cdot b$$

$$c = \frac{\sin(\gamma)}{\sin \beta} \cdot b$$

Fall 4 (c, α, β, γ)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$a = \frac{\sin(\alpha)}{\sin \gamma} \cdot c$$

$$b = \frac{\sin(\beta)}{\sin \gamma} \cdot c$$

2.3 Zwei Winkel und eine Seite bekannt

In diesem Abschnitt wird nicht unterschieden, welche Seite bekannt ist, da der erste Schritt des Verfahrens nicht davon abhängt und die Unterscheidung beim zweiten Schritt (Abschnitt 2.2, Fälle 2 bis 4) bereits gemacht wurde.

Fall 5 (α, β)
Aus der Innenwinkelsumme des Dreiecks folgt:

$$\gamma = \pi - \alpha - \beta$$

Danach wie Fälle 2 bis 4.

Fall 6 (α, γ)
Aus der Innenwinkelsumme des Dreiecks folgt:

$$\beta = \pi - \alpha - \gamma$$

Danach wie Fälle 2 bis 4.

Fall 7 (β, γ)
Aus der Innenwinkelsumme des Dreiecks folgt:

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma$$

Danach wie Fälle 2 bis 4.

2.4 Zwei Seiten und ein Winkel bekannt

Im folgenden sind zwei Fälle zu unterscheiden:

2.4.1 Zwei Seiten schliessen den bekannten Winkel ein

Fall 8 (a,b,γ)
Aus dem Cosinussatz Formel 3 folgt durch Wurzelziehen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}$$

Danach löst man die übrigen Winkel wie im Fall 1 .

Fall 9 (a,c,β)
Aus dem Cosinussatz Formel 3 folgt durch Wurzelziehen:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$

Danach löst man die übrigen Winkel wie im Fall 1.

Fall 10 (b,c,α)
Aus dem Cosinussatz Formel 3 folgt durch Wurzelziehen:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)}$$

Danach löst man die übrigen Winkel wie im Fall 1.

2.4.2 Winkel liegt nur an einer bekannten Seite an

Fall 11 (a,b,α)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin(\alpha)\right)$$

Danach löst man Winkel γ wie im Fall 5 und Seite c wie im Fall 2 oder Fall 3.

Fall 12 (a,b,β)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{b}\sin(\beta)\right)$$

Danach löst man Winkel γ wie im Fall 5 und Seite c wie im Fall 2 oder Fall 3.

Fall 13 (a,c,α)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{c}{a}\sin(\alpha)\right)$$

Danach löst man Winkel β wie im Fall 6 und Seite b wie im Fall 2 oder Fall 4.

Fall 14 (a,c,γ)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\sin(\gamma)\right)$$

Danach löst man Winkel β wie im Fall 6 und Seite b wie im Fall 2 oder Fall 4.

Fall 15 (b,c,β)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{c}{b}\sin(\beta)\right)$$

Danach löst man Winkel α wie im Fall 7 und Seite a wie im Fall 3 oder Fall 4.

Fall 16 (b,c,γ)
Aus dem Sinussatz folgt:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\sin(\gamma)\right)$$

Danach löst man Winkel α wie im Fall 7 und Seite a wie im Fall 3 oder Fall 4.