

Luz Estruturada

Monografia para a conclusão de disciplina
Eletromagnetismo - CBPF 2021.2

Marcos Gil de Oliveira

18 de outubro de 2022

1	Introdução	2
2	O regime paraxial	3
2.1	A equação paraxial	3
2.2	Método de operadores	4
3	Separabilidade de Feixes	7
4	Modos Hermite-Gaussianos	8
4.1	Operadores Escada	8
4.2	Construção dos modos	9
4.3	Análise das soluções	12
5	Momento Angular	13
5.1	Decomposição de Helmholtz	13
5.2	Momento Angular Eletromagnético	14
5.3	Momento Angular Orbital de Feixes Paraxiais	17
6	Ótica não linear	20
6.1	A equação de onda na matéria	20
6.2	Os tensores de susceptibilidade	21
6.3	Feixes estruturados em meios não lineares	23
7	Conclusão	25
	Bibliografia	26

Resumo

Luz estruturada se refere genericamente à exploração de diversos graus de liberdade da luz — polarização, modos espaciais, paridade e momento angular, para citar alguns — que, combinados, dão origem a ondas eletromagnéticas intrincadas cujas aplicações incluem informação quântica, comunicação e em armadilhas óticas, por exemplo. Neste trabalho desenvolvemos a teoria básica da luz estruturada e apontamos algumas conexões com desenvolvimentos recentes.

Capítulo 1

Introdução

Nos cursos usuais de eletromagnetismo, estuda-se apenas modelos simples para a luz, como ondas esféricas ou a mitológica onda plana [1, 2, 3]. Entretanto, existem diversos graus de liberdade que não são contemplados nesses modelos, como momento angular [4], paridade [5], além de variedade de possíveis estruturas espaciais. Denomina-se genericamente por luz estruturada um regime no qual estes graus de liberdade são explorados e combinados para a obtenção de ondas eletromagnéticas mais complexas [6]. Tais ondas possuem aplicações em áreas como informação quântica [7], comunicação [8], armadilhas óticas [9], além de uma formulação teórica fascinante que, mesmo quando restrita ao eletromagnetismo clássico, traz diversas conexões inesperadas com tópicos usualmente classificados como pertencentes exclusivamente ao domínio da mecânica quântica.

Este texto tem então por objetivo expor os aspectos fundamentais da teoria da luz estruturada, incluindo desenvolvimentos recentes. No capítulo 2, discutiremos o chamado regime paraxial, que é caracterizado por feixes óticos cuja propagação se dá próxima a um eixo, como é o caso da luz emitida por um laser. No capítulo 3, introduziremos o conceito de separabilidade de feixes, e como feixes não separáveis podem ser classificados como *emaranhados*. No capítulo 4 construiremos uma família importante de modos espaciais, denominados Hermite-Gaussianos. No capítulo 5, discutiremos o momento angular da luz. Por fim, no capítulo 6, faremos uma exposição dos conceitos básicos da ótica não linear e da propagação de feixes estruturados em meios não lineares.

Capítulo 2

O regime paraxial

Uma parte considerável dos experimentos realizados em ótica utiliza lasers como fonte de luz. As ondas eletromagnéticas emitidas por estes dispositivos possuem a peculiaridade de se propagarem próximas a um eixo, o que configura o chamado regime paraxial. Este regime simplifica as equações obedecidas pelo campo eletromagnético, e dedicaremos então este capítulo a estudá-lo.

2.1 A equação paraxial

A partir da teoria da difração básica, sabemos que, quando uma onda de comprimento λ atravessa uma fenda de diâmetro γ_0 , observa-se um padrão de difração em que o ângulo θ subtendido entre o máximo da intensidade e o primeiro mínimo é dado por

$$\gamma_0 \sin \theta = \lambda. \quad (2.1)$$

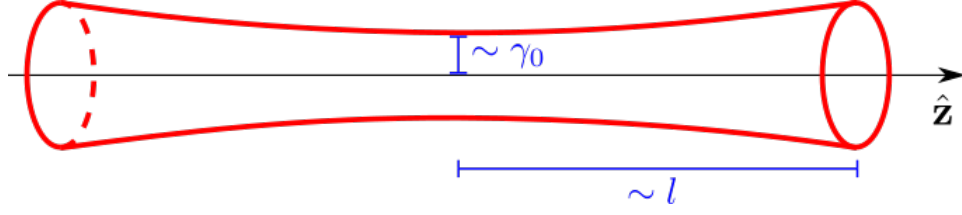
Desta forma, o regime paraxial pode ser caracterizado pelo fato de que θ é muito pequeno, o que é equivalente a impor que $\delta = 1/k\gamma_0 \ll 1$, sendo $k = 2\pi/\lambda$ o número de onda. Como referência, um laser típico de hélio-neônio opera em um comprimento de onda de aproximadamente 633 nm, o que está na faixa do vermelho. Tomando $\gamma_0 = 1$ cm, obtemos $\delta \sim 10^{-5}$.

Considere agora um feixe monocromático de frequência $\omega = ck$ se propagando ao longo da direção $\hat{\mathbf{z}}$ no vácuo. ¹ Propomos que seu campo elétrico seja expresso por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.2)$$

o que representa uma onda plana modificada por um envelope definido pela função $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ o vetor posição. Uma segunda forma de pensar no regime paraxial seria perceber que uma variação apreciável do envelope \mathbf{u} na direção transversa à propagação ocorre na escala de comprimento definida por γ_0 , enquanto que, na direção de propagação, esta variação ocorre em uma escala l , sendo $\gamma_0/l \ll 1$, como ilustrado na figura 2.1.

¹Ao longo deste trabalho, convencionamos que quantidades em negrito representam vetores.

Figura 2.1: Curva de nível de $|\mathbf{u}|$

Como já identificamos uma quantidade δ que satisfaz essa condição, a simples manipulação

$$1 \gg \delta = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} \delta = \frac{\gamma_0}{k\gamma_0^2} \quad (2.3)$$

nos induz a tomar $l = k\gamma_0^2$, que é a chamada distância de Rayleigh.

Das equações de Maxwell no vácuo, é possível deduzir que o campo elétrico satisfaz

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} = 0, \quad (2.4)$$

o que implica que \mathbf{u} obedece

$$(\nabla^2 + 2ik\partial_z) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.5)$$

Agora, para se aproveitar da diferença de escalas entre γ_0 e l , definimos as variáveis adimensionais

$$\xi = \frac{x}{\gamma_0}; \quad \eta = \frac{y}{\gamma_0}; \quad \zeta = \frac{z}{l}, \quad (2.6)$$

como proposto em [10], e, expressando (2.5) em termos destas, obtemos

$$\frac{1}{\gamma_0^2} \left[\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2 + \left(\frac{\gamma_0}{l} \right)^2 \partial_\zeta^2 + 2i\partial_\zeta \right] \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.7)$$

Finalmente, o regime paraxial nos permite desprezar o termo que contém $\delta^2 = (\gamma_0/l)^2$, o que nos dá, voltando às coordenadas x, y, z ,

$$[\nabla_T^2 + 2ik\partial_z] \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.8)$$

onde introduzimos o operador del restrito ao plano transversal $\nabla_T = \hat{\mathbf{x}}\partial_x + \hat{\mathbf{y}}\partial_y$. A expressão (2.8) é a chamada equação paraxial da onda e é a base de todo o desenvolvimento que virá a seguir.

2.2 Método de operadores

Uma propriedade curiosa do regime paraxial é o fato de que, a menos de constantes, (2.8) é idêntica à (três cópias da) equação de Schrödinger, na representação de posições, para uma partícula livre em duas dimensões, sendo que z faz o papel do tempo. Essa similaridade nos permitirá aplicar métodos desenvolvidos no contexto da mecânica quântica para o estudo dos feixes paraxiais [11, 12].

Como ponto de partida, representaremos o campo $\mathbf{u}(x, y, z)$ como um conjunto de elementos $|\mathbf{u}(z)\rangle$ de um espaço vetorial abstrato Π . Sobre este espaço está definido um produto interno tal que

$$\langle \mathbf{v}(z) | \mathbf{u}(z) \rangle = \int d\boldsymbol{\rho} \, \mathbf{v}_T^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_T(\mathbf{r}), \quad (2.9)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ e o sub escrito T denota a componente no plano xy de um vetor. Não consideramos a contribuição da componente z para esse produto interno pelo seguinte motivo — da equação $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ podemos deduzir que \mathbf{u} satisfaz ²

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + ik u_z = 0, \quad (2.10)$$

ou, ainda,

$$u_z = i\delta (\partial_\xi u_x + \partial_\eta u_y) + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (2.11)$$

Desta forma, vemos que u_z não é necessariamente nulo, como seria o caso para uma onda plana, mas é pequeno, da ordem de δ . Por outro lado, temos $u_z^2 \sim \delta^2$, e, portanto, pode ser desprezado no regime paraxial. Observamos ainda que, de acordo com (2.11), uma vez fornecidos u_x e u_y , determina-se completamente u_z , isto é, apenas duas componentes de \mathbf{u} constituem graus de liberdade independentes.

Agora, desejamos resolver (2.8) através do uso de operadores, ilustrando assim sua utilidade. Para isso, postulamos a existência uma certa base ortonormal de Π , cujos elementos denotamos por $|x, y\rangle$, e que satisfaz $\mathbf{u}(x, y, z) = \langle x, y | \mathbf{u}(z) \rangle$. Definimos ainda os operadores hermitianos \hat{x}, \hat{p}_x tais que $\hat{x} |x, y\rangle = x |x, y\rangle$, $\langle x, y | \hat{p}_x | \mathbf{u}(z) \rangle = -i\partial_x \mathbf{u}(x, y, z)$, e, de forma análoga, introduzimos \hat{y} e \hat{p}_y . Desta maneira, (2.8) pode ser escrita como

$$ik\partial_z |\mathbf{u}(z)\rangle = \hat{H} |\mathbf{u}(z)\rangle; \quad \hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2), \quad (2.12)$$

equação esta que admite uma solução na forma

$$|\mathbf{u}(z)\rangle = \hat{U}_z |\mathbf{u}(0)\rangle, \quad \hat{U}_z = \exp\left(-iz \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2k}\right). \quad (2.13)$$

Atuando com $\langle x, y |$ no lado esquerdo da expressão acima, obtemos

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \langle x, y | \hat{U}_z |\mathbf{u}(0)\rangle = \int d\boldsymbol{\rho}' \langle x, y | \hat{U}_z |x', y'\rangle \mathbf{u}(x', y', 0). \quad (2.14)$$

Para chegar a uma forma explícita de $\langle x, y | \hat{U}_z |x', y'\rangle$, é conveniente introduzir a base de autoestados de \hat{p}_x e \hat{p}_y , cujos elementos são denotados por $|p_x, p_y\rangle$ e satisfazem

$$\langle x, y | p_x, p_y \rangle = \frac{e^{i(xp_x + yp_y)}}{2\pi}. \quad (2.15)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \langle x, y | \hat{U}_z |x', y'\rangle &= \int dp_x dp_y \langle x, y | \hat{U}_z |p_x, p_y\rangle \langle p_x, p_y |x', y'\rangle \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int dp_x dp_y \exp\left(-iz \frac{p_x^2 + p_y^2}{2k}\right) e^{i[p_x(x-x') + p_y(y-y')]} \\ &= K(x - x', y - y', z), \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde, após calcular a integral, obtém-se

$$K(x, y, z) = \frac{k}{2\pi iz} \exp\left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2)\right]. \quad (2.17)$$

²Subscritos em letras que representam vetores denotam uma componente do vetor. u_z é então a componente na direção $\hat{\mathbf{z}}$ de \mathbf{u} .

Assim sendo, (2.14) se reduz a

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int d\boldsymbol{\rho}' K(x - x', y - y', z) \mathbf{u}(x', y', 0), \quad (2.18)$$

o que nos permite realizar a propagação de uma condição inicial $\mathbf{u}(x, y, 0)$ arbitrária.

No contexto da mecânica quântica, K seria o propagador para a partícula livre. Por outro lado, na ótica, este é o núcleo da integral de difração de Fresnel [13], que vemos, então, constituir uma solução exata da equação paraxial da onda.

Capítulo 3

Separabilidade de Feixes

Neste capítulo introduziremos a noção de separabilidade de feixes, e como estas ideias podem ser utilizadas para caracterizar o *emaranhamento clássico*.

Diremos que um feixe paraxial é separável quando a parte transversa de seu envelope puder ser escrita da forma

$$\mathbf{u}_T(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}, \quad (3.1)$$

sendo ψ uma função escalar, que denominaremos função espacial, e $\hat{\mathbf{e}}$ um vetor de polarização independente de \mathbf{r} . Nesse caso, podemos escrever $|\mathbf{u}(z)\rangle$ como o produto tensorial $|\psi(z)\rangle \otimes |\hat{\mathbf{e}}\rangle = |\psi, \hat{\mathbf{e}}\rangle$ de um estado espacial $|\psi(z)\rangle$ com um estado de polarização $|\hat{\mathbf{e}}\rangle$, pois, ao definir os produtos internos

$$\langle \hat{\mathbf{d}} | \hat{\mathbf{e}} \rangle = d_x^* e_x + d_y^* e_y \quad (3.2)$$

$$\langle \phi(z) | \psi(z) \rangle = \int d\boldsymbol{\rho} \phi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

temos

$$\langle \phi(z), \hat{\mathbf{d}} | \psi(z), \hat{\mathbf{e}} \rangle = \langle \phi(z) | \psi(z) \rangle \langle \hat{\mathbf{d}} | \hat{\mathbf{e}} \rangle, \quad (3.4)$$

que é a propriedade que caracteriza o produto tensorial.

É conveniente normalizar os estados de polarização por $\langle \hat{\mathbf{e}} | \hat{\mathbf{e}} \rangle = 1$. Por outro lado, $\langle \psi(z) | \psi(z) \rangle$ está relacionado à intensidade do feixe, mas, para discussões puramente teóricas, como é o nosso caso, é possível tomar $\langle \psi(z) | \psi(z) \rangle = 1$.

É claro que também existe a possibilidade de feixes não separáveis, como por exemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_x(z), \hat{\mathbf{x}}\rangle + |\psi_y(z), \hat{\mathbf{y}}\rangle) \quad (3.5)$$

com $\psi_x \neq \psi_y$. Fisicamente, estes feixes representam situações em que a polarização muda de acordo com a posição no plano transversal.

Do ponto de vista da estrutura matemática, os feixes não separáveis são completamente equivalentes a um sistema quântico com dois graus de liberdade emaranhados, de forma que não há nenhum abuso de linguagem ao se referir a esta situação por emaranhamento clássico [14]. Por outro lado, é importante ressaltar que, no caso clássico, o emaranhamento se dá entre dois graus de liberdade de um mesmo sistema, enquanto que, no caso quântico, existe a possibilidade de emaranhamento entre duas partículas afastadas espacialmente. Ainda sim, mesmo contando apenas com esse emaranhamento *local*, é possível reproduzir com feixes não separáveis, e, mais geralmente, com luz estruturada, diversas situações que geralmente são pensadas como essencialmente quânticas, como violações da desigualdade de Bell-CHSH [15, 16] e o algoritmo de teleporte [17].

Capítulo 4

Modos Hermite-Gaussianos

Neste capítulo, que é baseado em [18], construiremos um importante conjunto de soluções para a equação paraxial da onda, que são os chamados modos Hermite-Gaussianos. Para isso, consideramos um feixe separável, de forma que é suficiente determinação da função espacial $\psi(\mathbf{r}) = \langle x, y | \psi(z) \rangle$. Podemos simplificar ainda mais o problema ao buscar soluções na forma

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi_x(x, z)\phi_y(y, z), \quad (4.1)$$

pois, assim, temos

$$ik\partial_z\phi_q = -\frac{1}{2}\partial_q^2\phi_q, \quad q = x, y. \quad (4.2)$$

Em analogia com o que fizemos para o caso bidimensional, introduzimos então um novo espaço vetorial com uma base ortonormal $|q\rangle$ tal que $\phi(q, z) = \langle q | \phi(z) \rangle$. Também definimos o operador \hat{p} por $\langle q | \hat{p} | \phi(z) \rangle = -i\partial_q\phi(q, z)$, de forma que (4.2) equivale a

$$ik\partial_z |\phi(z)\rangle = \hat{H} |\phi(z)\rangle; \quad \hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2, \quad (4.3)$$

equação cuja solução pode ser expressa por

$$|\phi(z)\rangle = \hat{U}_z |\phi(0)\rangle, \quad \hat{U}_z = \exp\left(-iz\frac{\hat{p}^2}{2k}\right). \quad (4.4)$$

Nosso objetivo é então obter um conjunto completo e ortonormal de soluções explícitas de (4.3), que, combinadas de acordo com (4.1), nos darão soluções para a equação paraxial da onda, que constituirão precisamente os modos Hermite-Gaussianos.

4.1 Operadores Escada

Para obter a solução desejada, utilizaremos o método de operadores escada. Nesta seção, exibiremos alguns resultados genéricos relacionados a esse método, e, na seção seguinte, os aplicaremos.

Começamos lembrando que \hat{U}_z satisfaz $\hat{U}_z^\dagger = \hat{U}_z^{-1}$ e $\hat{U}_0 = \hat{I}$. Dado um operador \hat{O} qualquer, podemos definir uma família de operadores $\hat{O}(z)$ por

$$\hat{O}(z) = \hat{U}_z \hat{O} \hat{U}_z^\dagger. \quad (4.5)$$

Desta forma, para um estado $|\phi(z)\rangle = \hat{U}_z |\phi(0)\rangle$, temos

$$\hat{O}(z) |\phi(z)\rangle = \hat{U}_z \hat{O} |\phi(0)\rangle. \quad (4.6)$$

Vemos então que $\hat{O}(z) |\phi(z)\rangle$ também é uma solução de (4.3), correspondente a um estado inicial $\hat{O} |\phi(0)\rangle$. Além disso, se $|\psi(0)\rangle$ é autoestado de \hat{O} , $|\psi(z)\rangle$ é autoestado de $\hat{O}(z)$, com o mesmo autovalor. Notamos ainda que, sendo \hat{R} outro operador, o comutador $[\hat{O}, \hat{R}]$ evolui de acordo com

$$\hat{U}_z [\hat{O}, \hat{R}] \hat{U}_z^\dagger = [\hat{O}(z), \hat{R}(z)]. \quad (4.7)$$

Introduzimos agora o operador de abaixamento

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\gamma_0} \hat{q} + i\gamma_0 \hat{p} \right), \quad (4.8)$$

que satisfaz a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Devido à (4.7), vemos que também temos $[\hat{a}(z), \hat{a}(z)^\dagger] = 1$. Isso é suficiente [19] para concluir que o operador número $\hat{N}(z) = \hat{a}(z)^\dagger \hat{a}(z)$ possui autoestados $|\phi_n(z)\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, tais que

$$\hat{N}(z) |\phi_n(z)\rangle = n |\phi_n(z)\rangle. \quad (4.9)$$

Além disso, o estado $|\phi_n(z)\rangle$ pode ser obtido do estado fundamental $|\phi_0(z)\rangle$, que satisfaz $\hat{a}(z) |\phi_0(z)\rangle = 0$, a partir da aplicação sucessiva do operador de levantamento:

$$|\phi_n(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger(z) \right)^n |\phi_0(z)\rangle. \quad (4.10)$$

O que essa discussão nos mostra é que a existência de operadores escada não é uma particularidade do oscilador harmônico. Entretanto, o que temos até aqui é, no máximo, um esquema para classificar soluções. O que há de especial no oscilador é que, como a hamiltoniana comuta com o operador número, estes dois operadores compartilham o mesmo conjunto de autoestados, de forma que é suficiente encontrá-los no instante inicial, e a evolução segue trivialmente. Em geral, esse esquema de classificação só nos permite de fato encontrar as soluções se: (i) conseguirmos obter uma expressão simples para o operador evoluído $\hat{a}(z)$; (ii) conseguirmos resolver $\hat{a}(z) |\psi_0(z)\rangle = 0$. O que mostraremos a seguir é que estas duas condições se cumprem no caso de um feixe paraxial.

4.2 Construção dos modos

Explicitamente, a evolução de \hat{a} é dada por

$$\begin{aligned} \hat{a}(z) &= \hat{U}_z \hat{a} \hat{U}_z^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\gamma_0} \exp \left(-\frac{iz}{2k} \hat{p}^2 \right) \hat{q} \exp \left(\frac{iz}{2k} \hat{p}^2 \right) + i\gamma_0 \hat{p} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Utilizando $[\hat{q}, \hat{p}] = i$, é possível mostrar que

$$[\hat{q}, F(\hat{p})] = iF'(\hat{p}), \quad [F(\hat{q}), \hat{p}] = iF'(\hat{q}), \quad (4.12)$$

sendo F qualquer função analítica [20]. Utilizando essa fórmula, podemos simplificar o termo que contém as exponenciais em (4.11), o que nos dá

$$\begin{aligned} \hat{a}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\gamma_0} \hat{q} + \left(i\gamma_0 - \frac{z}{k\gamma_0} \right) \hat{p} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\gamma_0} \hat{q} + i\gamma(z) e^{i\chi} \hat{p} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde introduzimos os parâmetros

$$\chi = \arctan\left(\frac{z}{l}\right), \quad (4.14)$$

que é a chamada fase de Gouy, e

$$\gamma(z) = \gamma_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{l}\right)^2} = \gamma_0 \sec(\chi). \quad (4.15)$$

O estado fundamental satisfaz então

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\gamma_0} q + \gamma e^{i\chi} \partial_q \right) \phi_0 = 0, \quad (4.16)$$

de onde obtemos

$$\phi_0(q, z) = \phi_0(0, z) \exp\left(-\frac{q^2}{2\gamma^2} + i\frac{kq^2}{2s}\right), \quad (4.17)$$

sendo

$$s = \frac{2l}{\sin 2\chi} \quad (4.18)$$

o chamado raio de curvatura. A condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_0(q, z)|^2 dq = 1 \quad (4.19)$$

nos permite obter $|\phi_0(0, z)|$, faltando ainda determinar uma fase dependente de z , o que é feito impondo que $\phi_0(q, z)$ satisfaça (4.2). Com isso, chegamos a

$$\phi_0(x, z) = \frac{e^{-i\chi/2}}{\pi^{1/4} \sqrt{\gamma}} \exp\left(-\frac{q^2}{2\gamma^2} + i\frac{kq^2}{2s}\right), \quad (4.20)$$

que é a expressão final para o estado fundamental.

A princípio, poderíamos agora aplicar o operador de levantamento quantas vezes forem precisas e obter assim a expressão para um estado excitado arbitrário. Entretanto, é mais conveniente prosseguir de outra forma — notamos que podemos escrever ϕ_0 como

$$\phi_0(q, z) = e^{-i\chi/2} \exp\left(i\frac{kq^2}{2s}\right) f_0(q, z), \quad (4.21)$$

sendo $f_0(q, z)$ a função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico que corresponde a um operador de abaixamento da forma

$$\hat{b}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\gamma(z)} \hat{q} + i\gamma(z) \hat{p} \right). \quad (4.22)$$

Além disso, existe uma conexão entre o $\hat{a}(z)$ e $\hat{b}(z)$, pois aplicando novamente (4.12), mostra-se que

$$\hat{a}(z) = e^{i\chi} \exp\left(i\frac{k\hat{q}^2}{2s}\right) \hat{b}(z) \exp\left(-i\frac{k\hat{q}^2}{2s}\right). \quad (4.23)$$

e, utilizando esta expressão para o cálculo dos estados excitados, obtemos

$$\begin{aligned} |\phi_n(z)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger(z) \right)^n |\phi_0(z)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-ni\chi} \exp\left(i\frac{k\hat{q}^2}{2s}\right) \left(\hat{b}^\dagger(z) \right)^n \exp\left(-i\frac{k\hat{q}^2}{2s}\right) \left(e^{-i\chi/2} \exp\left(i\frac{k\hat{q}^2}{2s}\right) |0(z)\rangle \right) \\ &= \exp\left[-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\chi\right] \exp\left(i\frac{k\hat{q}^2}{2s}\right) |n(z)\rangle, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde

$$|n(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(b^\dagger(z)\right)^n |0(z)\rangle \quad (4.25)$$

são os autoestados do oscilador harmônico. Como as funções de onda destes estados são conhecidas, e dadas por

$$f_n(q, z) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{(2^n n! \gamma(z))}} H_n \left(\frac{q}{\gamma(z)} \right) \exp \left[-\frac{q^2}{2\gamma^2(z)} \right], \quad (4.26)$$

sendo H_n os polinômios de Hermite, concluímos que

$$\begin{aligned} \phi_n(q, z) = & \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{(2^n n! \gamma(z))}} H_n \left(\frac{q}{\gamma(z)} \right) \\ & \times \exp \left\{ -\frac{q^2}{2\gamma^2(z)} + i \left[\frac{kq^2}{2s(z)} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \chi(z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Finalmente, combinando essas soluções de acordo com (4.1), obtemos os modos Hermite-Gaussianos, cuja expressão explícita é então

$$\begin{aligned} HG_{nm}(x, y, z) = & \phi_n(x, z) \phi_m(y, z) \\ = & \frac{1}{\gamma(z)} \frac{1}{\sqrt{(2^{n+m} \pi n! m!)}} H_n \left(\frac{x}{\gamma(z)} \right) H_m \left(\frac{y}{\gamma(z)} \right) \\ & \times \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2\gamma^2(z)} + i \left[\frac{k}{2s(z)} (x^2 + y^2) - (n + m + 1) \chi(z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

e seus perfis de intensidade projetados no plano xy são mostrados na figura 4.1.

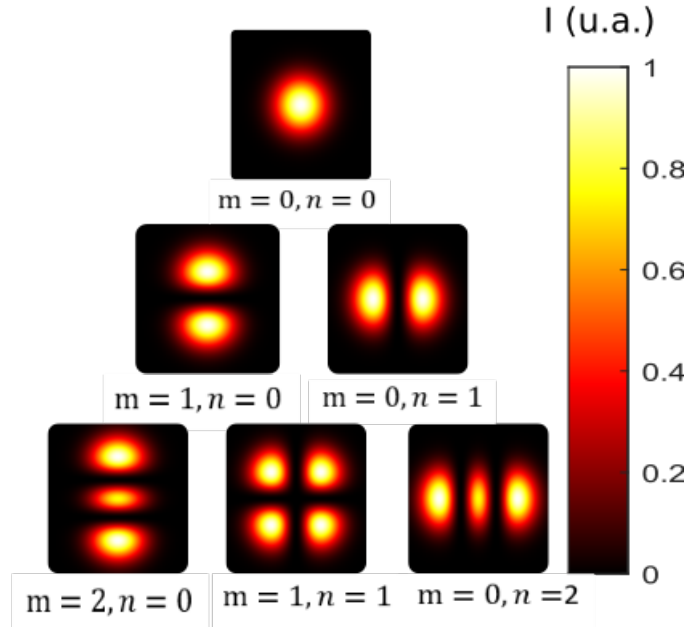


Figura 4.1: Perfil de intensidade dos modos Hermite-Gaussianos

4.3 Análise das soluções

Para entender o significado físico dos diversos parâmetros presentes nessa solução, é conveniente escrever HG_{nm} em termos de uma decomposição polar

$$HG_{nm}(x, y, z) = \sqrt{I \left(\frac{x}{\gamma(z)}, \frac{y}{\gamma(z)}, z \right)} e^{i\alpha_{nm}(x, y, z)}, \quad (4.29)$$

sendo I a intensidade do feixe e α_{nm} o argumento de HG_{nm} .

Vemos que a intensidade I depende das coordenadas transversas à propagação através apenas das combinações $x/\gamma(z)$ e $y/\gamma(z)$. Lembrando que $\gamma(0) = \gamma_0$, vemos que faz sentido a nossa interpretação de γ_0 como um comprimento característico. Além disso, como $\gamma(z)$ é uma função par de z que é crescente em no intervalo $[0, \infty)$, vemos que a propagação do feixe se dá da seguinte forma — ele parte de $z \rightarrow -\infty$ convergindo até o foco em $z = 0$, e, depois, diverge ao se dirigir para $z \rightarrow \infty$, sendo que, durante todo o percurso, os perfis mostrados na figura 4.1 são preservados.

Já o raio de curvatura pode ser interpretado da seguinte forma — a frente de onda é definida como uma superfície na qual a fase do campo elétrico é constante. Essa superfície tem propriedades interessantes, como o fato de ser aproximadamente paralela aos campos elétricos e magnéticos e, portanto aproximadamente perpendicular ao vetor de Poynting. No caso dos feixes Hermite-Gaussianos, essa superfície é dada por

$$\begin{aligned} \text{constante} &= \alpha_{nm}(x, y, z) + kz - \omega t \\ &= \frac{k}{2s(z)} (x^2 + y^2) - (n + m + 1) \chi(z) + kz - \omega t. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Quando $|s(z)| \rightarrow \infty$, como ocorre quando $z \rightarrow 0$ ou $\pm\infty$, a expressão acima se reduz, para cada tempo fixo, à expressão de um plano perpendicular a $\hat{\mathbf{z}}$. Por outro lado, quando $|s(z)| < \infty$, as frentes de onda tornam-se superfícies curvas, o que justifica, então, o nome de raio de curvatura.

Capítulo 5

Momento Angular

O momento angular é uma das propriedades mais exploradas no contexto de feixes estruturados, e é responsável por uma grande quantidade de efeitos interessantes. Lembremos que, para um sistema de partículas não relativístico, o momento angular cinético \mathbf{J}_{kin} é dado por

$$\mathbf{J}_{kin} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha}, \quad (5.1)$$

sendo α um índice que identifica as partículas, m_{α} as massas, \mathbf{r}_{α} as posições e \mathbf{v}_{α} as velocidades. É um resultado conhecido da mecânica clássica o fato de que esta expressão pode ser decomposta como $\mathbf{J}_{kin} = \mathbf{L}_{kin} + \mathbf{S}_{kin}$ [21], onde o momento angular orbital

$$\mathbf{L}_{kin} = M \mathbf{R} \times \mathbf{V} \quad (5.2)$$

é expresso em termos da massa total M , da posição do centro de massa \mathbf{R} e de sua velocidade \mathbf{V} , enquanto o momento angular de spin é dado por

$$\mathbf{S}_{kin} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{v}'_{\alpha}, \quad (5.3)$$

sendo \mathbf{r}'_{α} e \mathbf{v}'_{α} a posição e a velocidade relativos ao centro de massa.

Essa decomposição é interessante pois \mathbf{S}_{kin} é uma quantidade intrínseca do sistema, uma vez que independe do referencial escolhido para analisá-lo, enquanto que o oposto ocorre para \mathbf{L}_{kin} . Neste capítulo, faremos uma decomposição análoga para o momento angular carregado pelo campo eletromagnético, e, em seguida, veremos como essa discussão se particulariza no caso de feixes paraxiais.

5.1 Decomposição de Helmholtz

Para analisar o momento angular eletromagnético, é conveniente utilizar a chamada decomposição de Helmholtz, que descreveremos brevemente nesta seção.

Dizemos que um campo vetorial \mathbf{F}^{\parallel} em \mathbb{R}^3 é longitudinal quando satisfaz $\nabla \times \mathbf{F}^{\parallel} = 0$, enquanto um campo \mathbf{F}^{\perp} que satisfaz $\nabla \cdot \mathbf{F}^{\perp} = 0$ é dito transverso. É possível mostrar que um campo \mathbf{F} que tenda a zero suficientemente rápido no infinito, o que é tacitamente suposto neste trabalho, pode ser univocamente decomposto como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\parallel} + \mathbf{F}^{\perp}, \quad (5.4)$$

que é a chamada decomposição de Helmholtz. Este resultado pode ser provado como corolário do teorema de Helmholtz [1], ou utilizando transformadas de Fourier [22].

Essa decomposição tem implicações interessantes quando aplicada às transformações de calibre. É sabido que, ao transformar o potencial escalar ϕ e o potencial vetor \mathbf{A} de acordo com $\phi \mapsto \phi' = \phi - \partial_t \alpha$ e $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \alpha$, sendo $\alpha(\mathbf{r}, t)$ uma função arbitrária, os campos elétrico e magnético permanecem inalterados. Logo, grandezas mensuráveis que dependem dos potenciais têm que possuir uma forma bastante específica de forma que também sejam invariantes sob transformações de calibre. Grandezas cuja dependência se dê apenas por meio de \mathbf{A}^\perp satisfazem essa condição, uma vez que, como $(\nabla \alpha)^\perp = 0$, vale $(\mathbf{A}')^\perp = \mathbf{A}^\perp$, isto é, \mathbf{A}^\perp em si é um invariante de calibre, resultado este que será utilizado a seguir.

5.2 Momento Angular Eletromagnético

Agora, nos debruçamos, de fato, no cálculo do momento angular eletromagnético. A densidade de momento linear é dada por

$$\mathbf{p}_{EM} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (5.5)$$

de forma que é natural definir a densidade de momento angular

$$\mathbf{j}_{EM} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (5.6)$$

Agora, faremos algumas manipulações sobre (5.6). Primeiro, expressaremos \mathbf{B} em termos de \mathbf{A}^\perp , o que é feito notando que, como $\nabla \times \mathbf{A}^\parallel = 0$, vale $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}^\perp$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i &= \left[\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}^\perp) \right]_i \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j \partial_l A_m^\perp \\ &= E_j \left(\partial_i A_j^\perp - \partial_j A_i^\perp \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

sendo que utilizamos a convenção de que índices repetidos são somados, ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e da segunda para a terceira linha utilizamos a propriedade

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}, \quad (5.8)$$

onde δ_{ij} o delta de Kronecker.

Tomando o produto vetorial com \mathbf{r} , chegamos a

$$[\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i = \epsilon_{ijk} r_j E_l \left(\partial_k A_l^\perp - \partial_l A_k^\perp \right) \quad (5.9)$$

e aplicando a regra da cadeia no segundo termo, obtemos

$$- \epsilon_{ijk} r_j E_l \partial_l A_k^\perp = \left(\mathbf{E} \times \mathbf{A}^\perp \right)_i + \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\mathbf{r} \times \mathbf{A}^\perp \right)_i - \partial_l \left[E_l \left(\mathbf{r} \times \mathbf{A}^\perp \right)_i \right], \quad (5.10)$$

sendo que utilizamos $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, onde ρ é a densidade de carga. Agora, substituindo este resultado de volta em (5.9), integrando, e omitindo o último termo de (5.10), que se reduz a uma integral de superfície no infinito, concluimos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_{EM})_i &= \epsilon_0 \int d^3 \mathbf{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i \\ &= \epsilon_0 \int d^3 \mathbf{r} E_l (\mathbf{r} \times \nabla)_i A_l^\perp + (\mathbf{E} \times \mathbf{A}^\perp)_i + \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\mathbf{r} \times \mathbf{A}^\perp \right)_i. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nesse ponto, é interessante lembrar que, para uma partícula de carga q sob a ação do campo eletromagnético, a lagrangiana é escrita como

$$L = T + q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \phi) \quad (5.12)$$

sendo T a energia cinética e \mathbf{v} sua velocidade. Desta forma, o momento canonicamente conjugado é

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{P}_{kin} + q\mathbf{A}, \quad (5.13)$$

onde $\mathbf{P}_{kin} = \partial T / \partial \mathbf{v}$ é o momento linear cinético. Nesse caso, o momento angular da partícula $\mathbf{J}_{par} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ contém, além do termo cinético usual $\mathbf{r} \times \mathbf{P}_{kin}$, o termo $q\mathbf{r} \times \mathbf{A}$, que coincide com o último termo de (5.11), desde de que trabalhemos no calibre de Coulomb, que é definido por $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, ou, equivalentemente, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\perp$.

Os dois termos restantes em (5.11) têm exatamente as propriedades de um momento angular orbital

$$\mathbf{L} = \epsilon_0 \int d^3\mathbf{r} E_l (\mathbf{r} \times \nabla) A_l^\perp, \quad (5.14)$$

que depende do referencial escolhido para a análise, e de um momento angular de spin

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E} \times \mathbf{A}^\perp, \quad (5.15)$$

que é intrínseco. Além disso, como apenas a componente transversa do potencial vetor aparece, é garantido que (5.14) e (5.15) são invariantes de calibre.

Se supomos a ausência de cargas em conjunto com o calibre de Coulomb, temos $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}^\perp$, o que, no caso de feixes monocromáticos, se reduz a $\mathbf{A}^\perp = \mathbf{E}/i\omega$. Desta forma, ao tomar a média sobre um ciclo ótico, (5.14) e (5.15) tornam-se

$$\mathbf{L} = \frac{\epsilon_0}{2\omega} \int d^3\mathbf{r} E_l^* \frac{(\mathbf{r} \times \nabla)}{i} E_l; \quad (5.16)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\epsilon_0}{2\omega} \int d^3\mathbf{r} \frac{\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}}{i}. \quad (5.17)$$

É interessante notar que o operador $-i(\mathbf{r} \times \nabla)$ que aparece em (5.16) é idêntico, a menos de constantes, ao operador de momento angular orbital da mecânica quântica.

Para um feixe, que possui uma direção de propagação bem definida, estamos interessados, em geral, na componente do momento angular na direção de propagação, que, no nosso caso, é a direção $\hat{\mathbf{z}}$. Para o momento angular de spin, esta componente pode ser escrita como

$$S_z = \frac{1}{\omega} \int d^3\mathbf{r} w(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \quad (5.18)$$

onde $w = \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 / 2$ é a densidade de energia e a helicidade σ é dada por

$$\sigma = \frac{(\hat{\mathbf{e}}^* \times \hat{\mathbf{e}})_z}{i}, \quad (5.19)$$

sendo $\hat{\mathbf{e}}$ o vetor de polarização *local*, que possivelmente depende de \mathbf{r} . O integrando em (5.18) pode então ser interpretado como o produto de uma densidade de fótons $w/\hbar\omega$ por uma quantidade $\hbar\sigma$ de momento angular por fóton, sendo \hbar a constante de Planck.

Para entender melhor o significado da helicidade, introduzimos a base de polarização circular

$$\hat{\mathbf{e}}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \quad (5.20)$$

e expressamos um vetor de polarização arbitrário por

$$\hat{\mathbf{e}}(\theta, \phi) = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{e}}_+ + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \hat{\mathbf{e}}_- . \quad (5.21)$$

As quantidades $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$ podem ser interpretadas como especificando pontos em uma esfera, a chamada esfera de Poincaré, ilustrada na figura 5.1, de forma que $\hat{\mathbf{e}}_{\pm}$ correspondem aos polos, enquanto que polarizações lineares se localizam no equador. Em termos dessas coordenadas, a helicidade é dada simplesmente por

$$\sigma = \cos \theta \quad (5.22)$$

e, portanto, vale ± 1 para polarização circular e se anula para polarização linear.

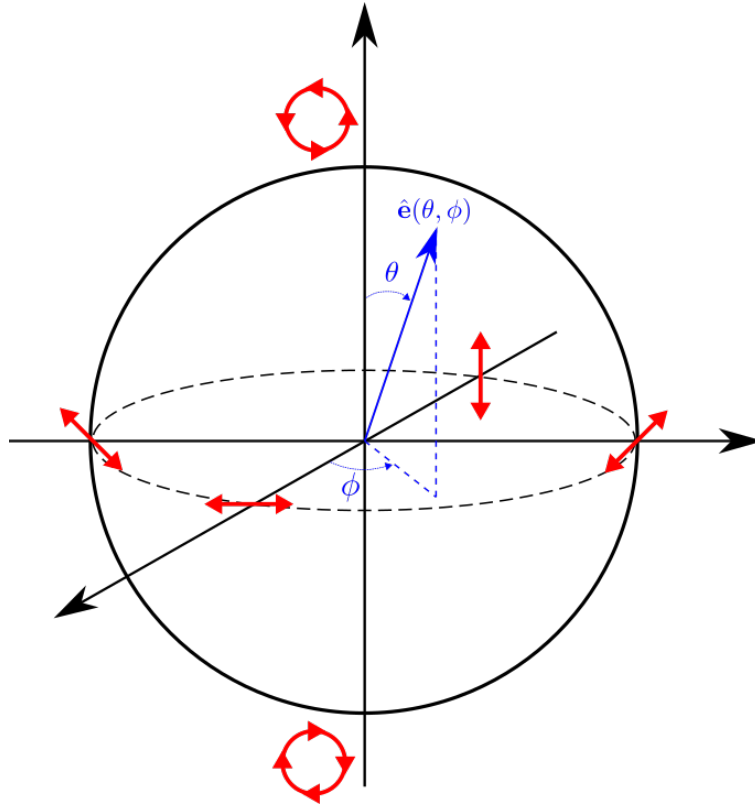


Figura 5.1: Esfera de Poincaré

Observamos também que, se \mathbf{E} é um autoestado de $-i\partial_\phi = -i(\mathbf{r} \times \nabla)_z$, cujo autovalor, por continuidade, deve ser il , sendo l um inteiro, também podemos decompor a componente z do momento angular orbital como o produto da densidade de fótons com um momento angular $\hbar l$ por fóton.

Por fim, as integrais da componente z de (5.16) e (5.17) realizadas sobre um plano transversal à direção de propagação nos dão momentos angulares por unidade de comprimento, e, no contexto do método de operadores que desenvolvemos para feixes paraxiais, podem ser escritos como

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon_0}{2\omega} \langle \mathbf{u} | \hat{L} | \mathbf{u} \rangle ; \quad (5.23a)$$

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon_0}{2\omega} \langle \mathbf{u} | \hat{S} | \mathbf{u} \rangle , \quad (5.23b)$$

sendo $\hat{L} = -i\partial_\phi$ e $\hat{S}|u_x, u_y\rangle = -i|-u_y, u_x\rangle$. É possível mostrar que estas quantidades são conservadas sob a propagação livre ao checar que \hat{L} e \hat{S} comutam com $\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2$.

5.3 Momento Angular Orbital de Feixes Paraxiais

Nesta seção, veremos como o momento angular orbital enriquece a estrutura dos estados espaciais de feixes paraxiais. Para isso, consideramos os operadores escada

$$\hat{b}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\gamma} \hat{x} + i\gamma \hat{p}_x \right); \quad \hat{b}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\gamma} \hat{y} + i\gamma \hat{p}_y \right), \quad (5.24)$$

cujas versão unidimensional foi introduzida na seção 4.2. Lembramos que γ é uma função de z , embora tenhamos omitido esta dependência. Definindo a combinação linear

$$\hat{B}^\dagger = c_x \hat{b}_x^\dagger + c_y \hat{b}_y^\dagger \quad (5.25)$$

vemos que

$$[\hat{B}, \hat{B}^\dagger] = |c_x|^2 + |c_y|^2 \quad (5.26)$$

e então, ao impor $|c_x|^2 + |c_y|^2 = 1$, equação que também permite mapear c_x e c_y em uma esfera, a chamada esfera de Hermite-Laguerre, ilustrada na figura 5.2, garantimos que \hat{B} e \hat{B}^\dagger constituem operadores escada. Em analogia com a construção da esfera de Poincaré, definimos os operadores

$$\hat{b}_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_x^\dagger \pm i\hat{b}_y^\dagger \right), \quad (5.27)$$

e expressamos um ponto arbitrário na esfera por

$$\hat{B}_+^\dagger(\theta, \phi) = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \hat{b}_+^\dagger + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \hat{b}_-^\dagger. \quad (5.28)$$

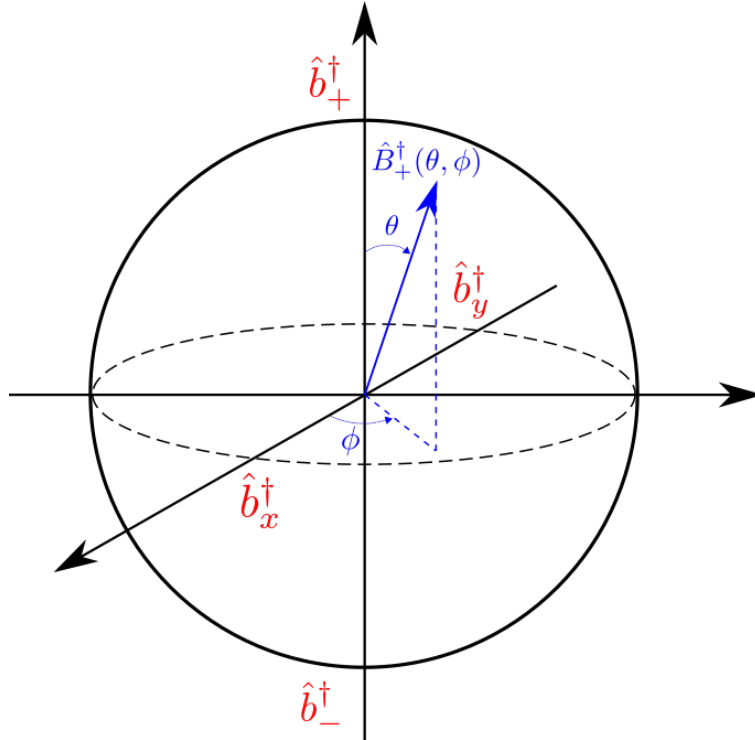


Figura 5.2: Esfera de Hermite-Laguerre

Também será conveniente definir o ponto antípoda a $\hat{B}_+^\dagger(\theta, \phi)$, que é dado por

$$\hat{B}_-^\dagger(\theta, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{B}_+^\dagger(\pi - \theta, \phi + \pi) = -e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \hat{b}_+^\dagger + e^{i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \hat{b}_-^\dagger, \quad (5.29)$$

onde, por simplicidade, omitimos uma fase global. Naturalmente, também podemos introduzir os operadores número

$$\hat{N}_\pm(\theta, \phi) = \hat{B}_\pm^\dagger(\theta, \phi) \hat{B}_\pm(\theta, \phi). \quad (5.30)$$

Observamos que comutadores que envolvem operadores do tipo $+$ e do tipo $-$ se anulam, de forma que existe uma base comum de autoestados de $\hat{N}_\pm(\theta, \phi)$, denotados por $|n_+, n_-, \theta, \phi\rangle$, sendo n_\pm os autovalores correspondentes. O estado fundamental $|0, 0\rangle$, que satisfaz $\hat{B}_\pm(\theta, \phi) |0, 0\rangle = 0$, é independente de θ e ϕ . Já os estados excitados são dados por

$$|n_+, n_-, \theta, \phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+! n_-!}} \left(\hat{B}_+^\dagger(\theta, \phi) \right)^{n_+} \left(\hat{B}_-^\dagger(\theta, \phi) \right)^{n_-} |0, 0\rangle. \quad (5.31)$$

Utilizando as relações (5.24), (5.27) e (5.28), podemos reescrever o operador momento angular $\hat{L} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ como

$$\hat{L} = \cos \theta \left(\hat{N}_+ - \hat{N}_- \right) - \sin \theta \left(\hat{B}_+^\dagger \hat{B}_- + \hat{B}_+ \hat{B}_-^\dagger \right). \quad (5.32)$$

sendo que, por brevidade, omitimos a dependência em θ e em ϕ dos operadores. Essa fórmula nos permite calcular

$$\langle n_+, n_-, \theta, \phi | \hat{L} | n_+, n_-, \theta, \phi \rangle = (n_+ - n_-) \cos \theta \quad (5.33)$$

onde utilizamos o fato de que o produto interno envolvendo o operador que acompanha $\sin \theta$ se anula, já que autoestados de $\hat{N}_\pm(\theta, \phi)$ com autovalores distintos são ortogonais.

Agora, sendo $\hat{\rho}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$, definimos os operadores

$$\hat{A}_\pm^\dagger(\theta, \phi) = e^{-i\chi} \exp \left(\frac{ik\hat{\rho}^2}{2s} \right) \hat{B}_\pm^\dagger(\theta, \phi) \exp \left(\frac{-ik\hat{\rho}^2}{2s} \right), \quad (5.34)$$

o estado fundamental

$$|\psi_{0,0}(z)\rangle = e^{-i\chi/2} \exp \left(\frac{ik\hat{\rho}^2}{2s} \right) |0, 0\rangle \quad (5.35)$$

e os estados excitados

$$\begin{aligned} |\psi_{n_+, n_-, \theta, \phi}(z)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_+! n_-!}} \left(\hat{A}_+^\dagger \right)^{n_+} \left(\hat{A}_-^\dagger \right)^{n_-} |\psi_{0,0}(z)\rangle \\ &= \exp \left[-i \left(n_+ + n_- + \frac{1}{2} \right) \chi \right] \exp \left(i \frac{k\hat{\rho}^2}{2s} \right) |n_+, n_-, \theta, \phi\rangle, \end{aligned} \quad (5.36)$$

sendo estas soluções da equação paraxial da onda, o que pode ser mostrado ao utilizar o mesmo argumento exposto nas seções 4.1 e 4.2. Além disso, combinando (5.33) e (5.36) com o fato de que \hat{L} e $\hat{\rho}^2$ comutam, podemos concluir que também vale

$$\langle \psi_{n_+, n_-, \theta, \phi} | \hat{L} | \psi_{n_+, n_-, \theta, \phi} \rangle = (n_+ - n_-) \cos \theta. \quad (5.37)$$

É interessante notar a similaridade desta expressão com (5.22).

Para $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$, estes estados se reduzem aos modos Hermite-Gaussianos já discutidos. Por outro lado, para $\theta = 0$, obtemos, de acordo com (5.32), autoestados de \hat{L} , com autovalor $l = n_+ - n_-$. Estes são os modos Laguerre-Gaussianos, cuja função espacial em coordenadas cilíndricas é dada por

$$LG_{pl}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\gamma(z)} \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{p!}{(p+|l|)!}} \left(\frac{\rho}{\gamma(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{\rho^2}{\gamma^2(z)} \right) e^{il\phi} \times \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2\gamma^2(z)} + i \left[\frac{k\rho^2}{2s(z)} - (2p + |l| + 1) \chi(z) \right] \right\}, \quad (5.38)$$

onde, por conveniência, é introduzido o parâmetro $p = \min\{n_+, n_-\}$ e $L_p^{|l|}$ são os polinômios de Laguerre generalizados. Seu perfil de intensidade projetado sobre o plano xy é dado na figura 5.3.

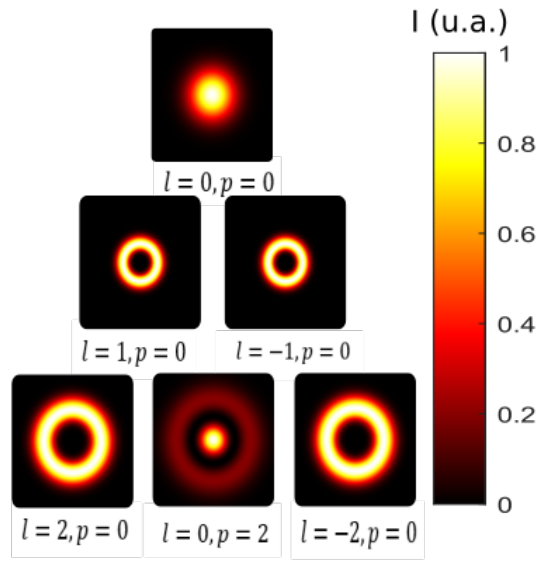


Figura 5.3: Perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gaussianos

O termo $e^{il\phi}$ transforma a frente de onda desse feixe em uma superfície helicoidal como mostrado na figura 5.4, de forma que o vetor de Poynting \vec{S} realiza um movimento de precessão em torno do eixo \hat{z} , o que é uma forma de interpretar a origem do momento angular desses modos.

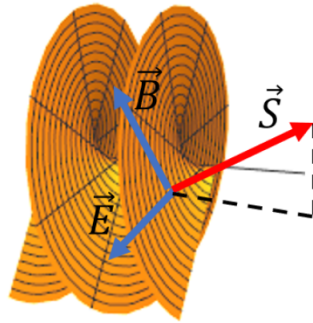


Figura 5.4: Frente de onda dos modos Laguerre-Gaussianos

Capítulo 6

Ótica não linear

Na física em geral e no eletromagnetismo em particular, é comum colocar grande ênfase no estudo de regimes lineares, o que se deve, provavelmente, a sua simplicidade. Entretanto, uma enorme quantidade de fenômenos interessantes e úteis podem ocorrer quando começa-se a considerar efeitos não lineares. No caso do eletromagnetismo, esses efeitos geralmente se dão na propagação de ondas em meios materiais, embora seja predito que até mesmo o vácuo da eletrodinâmica quântica apresente processos deste tipo quando há a presença campos eletromagnéticos suficientemente intensos [23, 24].

De maneira geral, efeitos não lineares são fracos e só podem ser realizados experimentalmente com o uso de lasers, pois apenas estas fontes de luz conseguem produzir a intensidade adequada para sondar tais fenômenos. Neste sentido, embora a consideração de ondas planas possa ser suficiente para o estudo teórico de alguns processos, são os feixes gaussianos obedecendo a equação paraxial, cujas propriedades já foram expostas ao longo deste trabalho, que são mais adaptados para o estudo do regime não linear.

Neste capítulo, pretendemos então expor os aspectos básicos da ótica não linear, além de estudar alguns efeitos envolvendo feixes estruturados submetidos a este regime.

6.1 A equação de onda na matéria

Em um meio material sem cargas livres, as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (6.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (6.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}, \quad (6.1d)$$

sendo os campos auxiliares \mathbf{D} e \mathbf{H} dados por

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (6.2b)$$

onde \mathbf{P} e \mathbf{M} são a polarização ¹ e a magnetização, respectivamente. Estas grandezas, por sua vez, se relacionam com os campos elétrico e magnético a partir das chamadas relações constitutivas, que são uma característica do meio.

¹Chamamos atenção ao inoportuno fato de que tanto a direção na qual oscila o campo elétrico, que representamos ao longo desse trabalho pelo símbolo $\hat{\mathbf{e}}$, como a quantidade \mathbf{P} que acabamos de apresentar levam o nome de polarização.

Focaremos nossa atenção em um meio não magnético, isto é, com $\mathbf{M} = 0$. Desta forma, tomando o rotacional em (6.1c) e utilizando (6.1d), obtemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t^2 \mathbf{D}. \quad (6.3)$$

Agora, utilizamos a definição de \mathbf{D} , expandimos o duplo rotacional e desprezamos $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$, o que é legítimo no presente contexto [25], o que nos dá

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \partial_t^2 \mathbf{P}. \quad (6.4)$$

Vemos então que o campo elétrico continua obedecendo uma equação de onda, mas na qual a segunda derivada temporal da polarização atua como fonte. Uma vez fornecida a equação constitutiva, conseguimos, portanto, em tese, determinar o campo elétrico.

6.2 Os tensores de susceptibilidade

Embora a solução completa para a propagação do campo eletromagnético em um meio não linear dependa da forma exata das relações constitutivas, ainda sim é possível obter uma quantidade considerável de informação considerando somente expressões genéricas. Supondo que a polarização é induzida apenas pelo campo elétrico, podemos expandi-la em termos de uma série de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} P_i(\mathbf{E}) &= \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_{j,k=1}^3 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{j,k,l=1}^3 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \cdots \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(P_i^{(1)} + P_i^{(2)} + P_i^{(3)} + \cdots \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde pressupomos que $\mathbf{P}(\mathbf{E} = 0) = 0$. As quantidades $\chi_{j_1 \dots j_n}^{(\alpha)}$ são as componentes do chamado tensor de susceptibilidade de ordem α enquanto $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ é a polarização de ordem α . As suscetibilidades podem ser calculadas a partir de modelos microscópicos para o meio, e em geral, esses valores dependem da frequência na qual a polarização oscila. Além disso, sob certas hipóteses, é possível mostrar que essas componentes obedecem uma série de simetrias quanto à permutação de seus índices, o que pode diminuir consideravelmente a dificuldade de sua determinação [26, 25].

Para analisar melhor os efeitos causados pela presença da polarização, supomos que o campo elétrico possa ser expandido como uma soma de termos monocromáticos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} \mathcal{E}(\omega_{\mu}, \mathbf{r}) e^{-i\omega_{\mu} t} \quad (6.6)$$

onde, para garantir que os campos sejam quantidades reais, impomos que $\mathcal{E}(-\omega_{\mu}, \mathbf{r}) = \mathcal{E}(\omega_{\mu}, \mathbf{r})^*$. Desta forma, vemos que a polarização de ordem α pode ser escrita como

$$\mathbf{P}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} \mathcal{P}^{(\alpha)}(\omega_{\nu}, \mathbf{r}) e^{-i\omega_{\nu} t} \quad (6.7)$$

sendo

$$\left[\mathcal{P}^{(\alpha)}(\omega_{\nu}, \mathbf{r}) \right]_i = \sum_{j_1, \dots, j_{\alpha}} \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_{\alpha})} \chi_{ij_1 \dots j_{\alpha}}^{(\alpha)} [\mathcal{E}(\omega_{\mu_1}, \mathbf{r})]_{j_1} \cdots [\mathcal{E}(\omega_{\mu_{\alpha}}, \mathbf{r})]_{j_{\alpha}} \quad (6.8)$$

e $(\mu_1, \dots, \mu_{\alpha})$ indica que estes índices percorrem todos os valores tais que $\omega_{\nu} = \omega_{\mu_1} + \cdots + \omega_{\mu_{\alpha}}$. Observamos então que, quando susceptibilidades de ordem maior que 1 estão

presentes, a interação de um feixe, mesmo que inicialmente monocromático, com o material faz surgir polarizações que oscilam em diversos múltiplos da frequência original. Essas polarizações, por sua vez, atuam como fontes para a equação (6.4), produzindo assim campos elétricos que também oscilam nestas novas frequências.

Susceptibilidade Linear

A susceptibilidade de ordem 1, também chamada de susceptibilidade linear, é, em geral, bastante conhecida, já que costuma ser discutida em cursos de eletromagnetismo a nível de graduação. Para descrever seus efeitos, é útil introduzir a transformação linear $\epsilon^{(1)}$ tal que

$$\epsilon^{(1)} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}^{(1)}, \quad (6.9)$$

que vemos ter componentes $\epsilon_{ij}^{(1)} = \delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)}$. Desta forma, definindo também a parte não linear da polarização $\mathbf{P}^{NL} = \mathbf{P} - \mathbf{P}^{(1)}$, podemos reescrever (6.4) como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon^{(1)}}{c^2} \cdot \partial_t^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \partial_t^2 \mathbf{P}^{NL}. \quad (6.10)$$

Para materiais não magnéticos e transparentes, é possível mostrar que $\epsilon_{ij}^{(1)}$ é uma matriz simétrica [27] e, portanto, existe uma base ortonormal $\{\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{\mathbf{f}}_2, \hat{\mathbf{f}}_3\}$ na qual é diagonal, sendo assim conveniente tomá-la como a base canônica daqui em diante. O índice de refração de um feixe monocromático de frequência ω e polarização $\hat{\mathbf{f}}_i$ é dado então por $n(\omega, \hat{\mathbf{f}}_i) = \sqrt{\epsilon_{ii}^{(1)}(\omega)}$. Quando os $\epsilon_{ii}^{(1)}(\omega)$ não são todos iguais, o índice de refração depende tanto da direção de propagação como da polarização $\hat{\mathbf{f}}_i$, que é o fenômeno denominado de birrefringência.

Para prosseguir com a nossa análise, será conveniente decompor os $\mathcal{E}(\omega_\mu, \mathbf{r})$ como

$$\mathcal{E}(\omega_\mu, \mathbf{r}) = \psi_\mu(\mathbf{r}) e^{ik_\mu z} \hat{\mathbf{e}}_\mu, \quad \hat{\mathbf{e}}_\mu \in \{\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{\mathbf{f}}_2, \hat{\mathbf{f}}_3\}, \quad (6.11)$$

sendo $k_\mu = \omega_\mu n_\mu / c$ e $n_\mu = n(\omega_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\mu)$. Supondo ainda o regime paraxial, obtemos, substituindo (6.6), (6.7) e (6.11) em (6.10)

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik_\mu \partial_z) \psi_\mu \hat{\mathbf{e}}_\mu = -\frac{\omega_\mu^2}{\epsilon_0 c^2} e^{-ik_\mu z} \sum_{\alpha \geq 2} \mathcal{P}_\mu^{(\alpha)}, \quad (6.12)$$

onde usamos a notação $\mathcal{P}_\mu^{(\alpha)} = \mathcal{P}^{(\alpha)}(\omega_\mu, \mathbf{r})$.

Susceptibilidade Quadrática

Os primeiros efeitos não lineares ocorrem quando consideramos a susceptibilidade quadrática. Para explorá-los, analisaremos a interação de três modos, com frequências ω_1 , ω_2 e ω_3 satisfazendo $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, um processo denominado de soma de frequências. Suporemos que apenas a susceptibilidade quadrática é relevante, e, para aliviar a notação, omitiremos a ordem da polarização e da susceptibilidade. Temos então

$$\frac{1}{\epsilon_0} (\mathcal{P}_1)_i = \psi_2^* \psi_3 e^{i(k_3 - k_2)z} \sum_{j,k} \chi_{ijk}(\omega_1) (\hat{\mathbf{e}}_2^*)_j (\hat{\mathbf{e}}_3)_k, \quad (6.13a)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} (\mathcal{P}_2)_i = \psi_1^* \psi_3 e^{i(k_3 - k_1)} \sum_{j,k} \chi_{ijk}(\omega_2) (\hat{\mathbf{e}}_1^*)_j (\hat{\mathbf{e}}_3)_k, \quad (6.13b)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} (\mathcal{P}_3)_i = \psi_1 \psi_2 e^{i(k_1 + k_2)} \sum_{j,k} \chi_{ijk}(\omega_3) (\hat{\mathbf{e}}_1)_j (\hat{\mathbf{e}}_2)_k. \quad (6.13c)$$

Além disso, de acordo com (6.12), é necessário que se ajuste os vetores $\hat{\mathbf{e}}_\mu$ de forma que

$$\sum_{j,k} \chi_{ijk}(\omega_1) (\hat{\mathbf{e}}_2^*)_j (\hat{\mathbf{e}}_3)_k \propto (\hat{\mathbf{e}}_1)_i, \quad (6.14a)$$

$$\sum_{j,k} \chi_{ijk}(\omega_2) (\hat{\mathbf{e}}_1^*)_j (\hat{\mathbf{e}}_3)_k \propto (\hat{\mathbf{e}}_2)_i, \quad (6.14b)$$

$$\sum_{j,k} \chi_{ijk}(\omega_3) (\hat{\mathbf{e}}_1)_j (\hat{\mathbf{e}}_2)_k \propto (\hat{\mathbf{e}}_3)_i. \quad (6.14c)$$

Supondo que este ajuste é feito, e que as constantes de proporcionalidade são todas iguais à um certo valor χ , obtemos de (6.12) as expressões

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik_1 \partial_z) \psi_1 = -\chi \frac{\omega_1^2}{c^2} e^{i\Delta k z} \psi_2^* \psi_3 \quad (6.15a)$$

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik_2 \partial_z) \psi_2 = -\chi \frac{\omega_2^2}{c^2} e^{i\Delta k z} \psi_1^* \psi_3 \quad (6.15b)$$

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik_3 \partial_z) \psi_3 = -\chi \frac{\omega_3^2}{c^2} e^{-i\Delta k z} \psi_1 \psi_2 \quad (6.15c)$$

sendo $\Delta k = k_3 - k_2 - k_1$. É possível mostrar que, quando $\Delta k = 0$, uma condição conhecida como *phase matching*, a conversão entre os diferentes modos se dá de forma mais eficiente [25], tornando-se, assim, um aspecto que deve ser levado em conta na formulação de experimentos.

Este fato também justifica a possibilidade de se considerar a interação de apenas três modos. A rigor, a existência de um campo elétrico de frequência ω_1 geraria, por exemplo, polarizações de frequência $2\omega_1$, $3\omega_1 = 2\omega_1 + \omega_1$, $4\omega_1 = 3\omega_1 + \omega_1 = 2\omega_1 + 2\omega_1$ e assim indefinidamente. Entretanto, só é possível, do ponto de vista prático, impor *phase matching* para um certo conjunto de frequências, o que, efetivamente, seleciona quais modos poderão participar da interação.

6.3 Feixes estruturados em meios não lineares

Uma forma útil de estudar feixes estruturados em um regime não linear é decompor os ψ_μ dados em (6.11) como

$$\psi_\mu(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\omega_\mu}{n_\mu}} \sum_{p,l} A_{pl}^\mu(z) LG_{pl}^\mu(\mathbf{r}), \quad (6.16)$$

onde LG_{pl}^μ indica um modo Laguerre-Gaussiano com número de onda k_μ , e, por conveniência, toma-se a distância de Rayleigh idêntica para todos os modos. Lembrando que

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik_\mu \partial_z) LG_{p,l}^\mu = 0, \quad (6.17)$$

vemos que, supondo *phase matching*, (6.15) se reduz à

$$\sum_{p,l} LG_{pl}^1 \partial_z A_{pl}^1 = ig \sum_{p',l'} \sum_{p'',l''} (A_{p'l'}^2)^* A_{p''l''}^3 (LG_{p'l'}^2)^* LG_{p''l''}^3 \quad (6.18a)$$

$$\sum_{p,l} LG_{pl}^2 \partial_z A_{pl}^2 = ig \sum_{p',l'} \sum_{p'',l''} (A_{p'l'}^3)^* A_{p''l''}^1 (LG_{p'l'}^1)^* LG_{p''l''}^3 \quad (6.18b)$$

$$\sum_{p,l} LG_{pl}^3 \partial_z A_{pl}^3 = ig \sum_{p',l'} \sum_{p'',l''} A_{p'l'}^1 A_{p''l''}^2 LG_{p'l'}^1 LG_{p''l''}^2, \quad (6.18c)$$

onde definimos a constante de acoplamento

$$g = \frac{\chi}{2c} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3}}. \quad (6.19)$$

Finalmente, utilizando a relação de ortonormalidade

$$\int d\boldsymbol{\rho} (LG_{pl}^n)^* LG_{p'l'}^n = \delta_{pp'} \delta_{ll'}, \quad (6.20)$$

podemos isolar as os coeficientes A_{pl}^n no lado esquerdo de (6.18), o que nos dá

$$\partial_z A_{pl}^1 = ig \sum_{p',l'} \sum_{p'',l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} (A_{p'l'}^2)^* A_{p''l''}^3 \quad (6.21a)$$

$$\partial_z A_{pl}^2 = ig \sum_{p',l'} \sum_{p'',l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} (A_{p'l'}^1)^* A_{p''l''}^3 \quad (6.21b)$$

$$\partial_z A_{pl}^3 = ig \sum_{p',l'} \sum_{p'',l''} \left(\Lambda_{pp'p''}^{ll''l} \right)^* A_{p'l'}^1 A_{p''l''}^2 \quad (6.21c)$$

sendo

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll''} = \int d\boldsymbol{\rho} (LG_{pl}^1)^* (LG_{p'l'}^2)^* LG_{p''l''}^3 \quad (6.22)$$

a sobreposição espacial de três modos.

Embora (6.21) constitua um sistema não linear infinito de equações diferenciais ordinárias, em alguns casos é possível obter soluções exatas. Isso se deve à existência de uma série de regras de seleção que restringem os valores dos parâmetros para os quais $\Lambda_{pp'p''}^{ll''}$ não se anula. Se, por exemplo, realizamos a integração da parte angular de (6.22), vemos que

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll''} \propto \delta_{l'',l+l'} \quad (6.23)$$

isto é, a conversão entre os modos só ocorre quando há conservação de momento angular orbital. Já em [28], incide-se sobre o meio não linear dois modos Laguerre-Gaussianos de frequência ω com $p = 0$ e l distintos, produzindo-se assim modos de frequência 2ω , que é um processo denominado de geração de segundo harmônico. Nesse caso, explorando outras regras de seleção, mostra-se que apenas uma quantidade finita de modos podem participar da interação, e chega-se a uma solução analítica particularmente simples.

Por fim, citamos alguns artigos que relatam outros efeitos interessantes no contexto de feixes estruturados em meios não lineares, mas cuja exposição mais detalhada estenderia demasiadamente o presente trabalho. Em [29], discute-se como um meio não linear pode intermediar a conversão entre momento angular orbital e momento angular de spin. Em [30] é mostrado como a polarização de dois feixes de frequências distintas incidentes sobre um meio não linear pode ser utilizada como uma chave que seleciona se ocorrerá a soma das frequências ou a geração independente de segundos harmônicos.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho expus os aspectos básicos da teoria dos feixes óticos estruturados a partir de uma formulação que se inspira no método de operadores da mecânica quântica, tentando apontar as semelhanças, por vezes completamente inesperadas, bem como as diferenças entre esses dois temas. Essa escolha se deu pela simplicidade com a qual esta formulação é capaz de lidar com certos problemas, e também para propor um exercício intelectual que sempre gosto de repetir de tempos em tempos — se questionar sobre exatamente quais propriedades do mundo quântico são realmente exclusividade deste regime.

Para além dos aspectos puramente estéticos que atraíram meu interesse a este assunto, espero também ter sido capaz de mostrar que os feixes estruturados constituem uma área atual de pesquisa com uma grande variedade de possíveis aplicações, sobre as quais o leitor interessado pode obter mais informações seguindo as referências aqui reunidas.

Agradecimentos

Agradeço imensamente ao André Júnior por me introduzir a este tema interessantíssimo, além de me ajudar com as imagens presentes neste trabalho.

Bibliografia

- [1] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 4 edition, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 13.
- [2] Edward M. Purcell and David J. Morin. *Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, 3 edition, 2013. Citado na página 2.
- [3] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998. Citado na página 2.
- [4] Les Allen, Marco W Beijersbergen, RJC Spreeuw, and JP Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical review A*, 45(11):8185, 1992. Citado na página 2.
- [5] Kumel H Kagalwala, Giovanni Di Giuseppe, Ayman F Abouraddy, and Bahaa EA Saleh. Bell’s measure in classical optical coherence. *Nature Photonics*, 7(1):72–78, 2013. Citado na página 2.
- [6] D.L. Andrews. *Structured Light and Its Applications: An Introduction to Phase-Structured Beams and Nanoscale Optical Forces*. Elsevier Science, 2011. Citado na página 2.
- [7] Manuel Erhard, Robert Fickler, Mario Krenn, and Anton Zeilinger. Twisted photons: new quantum perspectives in high dimensions. *Light: Science & Applications*, 7(3):17146–17146, 2018. Citado na página 2.
- [8] Alan E Willner, Hao Huang, Yan Yan, Yongxiong Ren, Nisar Ahmed, Goudong Xie, Changjing Bao, L Li, Y Cao, Z Zhao, et al. Optical communications using orbital angular momentum beams. *Advances in optics and photonics*, 7(1):66–106, 2015. Citado na página 2.
- [9] Yuanjie Yang, Yuxuan Ren, Mingzhou Chen, Yoshihiko Arita, and Carmelo Rosales-Guzmán. Optical trapping with structured light: a review. *Advanced Photonics*, 3(3):034001, 2021. Citado na página 2.
- [10] Melvin Lax, William H Louisell, and William B McKnight. From maxwell to paraxial wave optics. *Physical Review A*, 11(4):1365, 1975. Citado na página 4.
- [11] David Stoler. Operator methods in physical optics. *JOSA*, 71(3):334–341, 1981. Citado na página 4.
- [12] SJ Van Enk and G Nienhuis. Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light. *Optics Communications*, 94(1-3):147–158, 1992. Citado na página 4.

- [13] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. W. H. Freeman, 2017. Citado na página 6.
- [14] Andrew Forbes, Andrea Aiello, and Bienvenu Ndagano. Classically entangled light. *Progress in Optics*, 64:99–153, 2019. Citado na página 7.
- [15] CVS Borges, M Hor-Meyll, JAO Huguenin, and AZ Khoury. Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam. *Physical Review A*, 82(3):033833, 2010. Citado na página 7.
- [16] Shashi Prabhakar, Salla Gangi Reddy, A Aadhi, Chithrabhanu Perumangatt, Goutam Kumar Samanta, and Ravindra P Singh. Violation of bell’s inequality for phase-singular beams. *Physical Review A*, 92(2):023822, 2015. Citado na página 7.
- [17] B Pinheiro da Silva, M Astigarreta Leal, C E R Souza, E F Galvão, and A Z Khoury. Spin-orbit laser mode transfer via a classical analogue of quantum teleportation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 49(5):055501, feb 2016. Citado na página 7.
- [18] G Nienhuis and L Allen. Paraxial wave optics and harmonic oscillators. *Physical Review A*, 48(1):656, 1993. Citado na página 8.
- [19] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Springer US, 2013. Citado na página 9.
- [20] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. Wiley, 2019. Citado na página 9.
- [21] Nivaldo A. Lemos. *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, 2018. Citado na página 13.
- [22] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, and Gilbert Grynberg. *Photons and Atoms - Introduction to Quantum Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Ltd, 1997. Citado na página 13.
- [23] James K. Koga, Masakatsu Murakami, Alexey V. Arefiev, and Yoshihide Nakamiya. Probing and possible application of the qed vacuum with micro-bubble implosions induced by ultra-intense laser pulses. *Matter and Radiation at Extremes*, 4(3):034401, 2019. Citado na página 20.
- [24] B. King and T. Heinzl. Measuring vacuum polarization with high-power lasers. *High Power Laser Science and Engineering*, 4:e5, 2016. Citado na página 20.
- [25] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Elsevier Science, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- [26] Y.R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. Wiley classics library. Wiley, 2003. Citado na página 21.
- [27] Amnon Yariv and Pochi Yeh. *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*. Oxford University Press, 01 2007. Citado na página 22.
- [28] Leonardo J Pereira, Wagner T Buono, Daniel S Tasca, Kaled Dechoum, and Antonio Z Khoury. Orbital-angular-momentum mixing in type-ii second-harmonic generation. *Physical Review A*, 96(5):053856, 2017. Citado na página 24.

- [29] Braian Pinheiro da Silva, Wagner T. Buono, Leonardo J. Pereira, Daniel S. Tasca, Kaled Dechoum, and Antonio Z. Khoury. Spin to orbital angular momentum transfer in frequency up-conversion. *Nanophotonics*, page 000010151520210493, 2021. Citado na página [24](#).
- [30] WT Buono, J Santiago, LJ Pereira, DS Tasca, K Dechoum, and AZ Khoury. Polarization-controlled orbital angular momentum switching in nonlinear wave mixing. *Optics Letters*, 43(7):1439–1442, 2018. Citado na página [24](#).