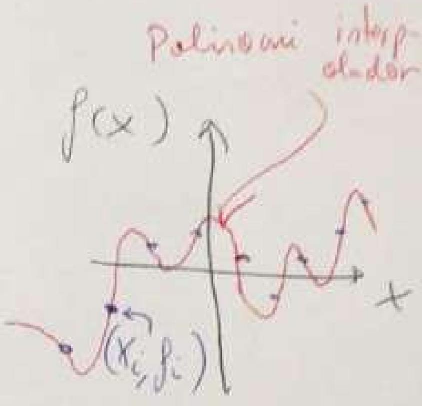
Interpolació polinòmica de Lagrange

Suposem que tenim ~~una~~ ~~els~~ conjunt de punts $(x_0, f_0), (x_1, f_2), \ldots, (x_N, f_N)$ on $f_i \equiv f(x_i)$. Gràficament seria algo com



Volem trobar un polinomi ~~que~~ $P(x)$ tal que $P(x_0) = f_0$, $P(x_2) = f_1$, ..., $P(x_N) = f_N$, de manera que $P(x)$ és una funció "generalitza" els nostres punts ja que "passa" per tots ells.

Podem començar plantejant l'equació del Polinomi que s'anul·la en $x_0, x_1, \ldots, x_2$. No és el que volem exactament ~~però~~ és algo que sabem fer. Aquest és

$\Pi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - \cancel{x_N})$. Si el derivem resp x, tenim

$$\Pi'(x) = \underbrace{\overset{\text{No hi és } (x-x_1)}{(x - x_2) \cdots (x - x_N)}}_{1^r \text{ terme}} + \underbrace{(x - x_1)\overset{\text{No hi és } (x-x_2)}{(x - x_3)} \cdots (x - x_N)}_{2^n \text{ terme}} + \cdots +$$

$$+ \underbrace{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{N-1})}_{n\text{-èssim terme}} \quad \text{No hi és } (x - x_N)$$

Llavors, si escollim x_i dels nostres $x_1, x_2, \ldots, x_N$ i avaluem la derivada allà, tots els termes que contenen el factor $(x-x_i)$ s'anul·len. Llavors només sobreviu el terme i-èssim que és l'únic que no conté $(x-x_i)$

$$\Pi'(x=x_i) = 0+0+\ldots+\underbrace{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_N)}_{\text{terme i-èssim}}+0+\ldots+0$$

Com el primer polinomi era

$\Pi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_N)$, veiem que

$$l_i(x) \equiv \frac{\Pi(x)}{(x-x_i)\,\Pi'(x=x_i)} =$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cancel{(x-x_i)}\cdots(x-x_N)}{\cancel{(x-x_i)}\cdot(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_N)}$$

compleix que $l_i(x_i)=1$ ja que el numerador i denom són iguals i que $l_i(x_j)$ on $x_j \neq x_i$ val $l_i(x_j)=0$.

Llavors $f_i \cdot l_i(x) = \begin{cases} f_i & \text{si } x=x_i \\ 0 & \text{si } x=x_j \text{ on } x_j \neq x_i \text{ és un dels punts} \end{cases}$

(No sabem quant val $f_i\, l_i(x)$ si x NO es un dels nostres punts, però dona igual).

Això era per ~~...~~ un i qualsevol ~~dels~~

$i \in \{0,1,2,\dots,N\}$.

Llavors, si sumem

$$P(x) \equiv \sum_{i=0}^{N} f_i\, l_i(x) = \sum_{i=0}^{N} f_i \left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_N)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_N)} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{N} f_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{k=N} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

, es pot demostrar que és un polinomi, i $P(x=x_j) = f_j$ on x_j és qualsevol dels nostres punts. Clarament, ja que hem dit que cadascun dels sumands val

$$f_i\, l_i(x) = \begin{cases} f_i & \text{si } x = x_i \\ 0 & \text{si } x = x_j \text{ és un dels punts, on } x_j \neq x_i. \end{cases}$$