Tydzień 5

Wprowadzenie do układów nieliniowych - Linearyzacja

I metoda Lapunowa

Punkt równowagi, dla którego system zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeżeli zaś chociaż jedna z wartości własnych macierzy systemu zlinearyzowanego ma dodatnią część rzeczywistą to punkt równowagi jest niestabilny.

Macierz Hurwitz'a

Wielomian charakterystyczny: $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitz'a

Jeśli wszystkie minory wiodące są większe od zera, to jest asymptotycznie stabilny.

tw. Grobmana-Hartmana:

Jeżeli $\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad j^2 = -1$ to trajektorie fazowe systemu nieliniowego w pewnym otoczeniu równowagi zachowują się podobnie jak trajektorie układu zlinearyzowanego w tym punktcie w otoczeniu zera. Warunek jest równoważny temu, że macierz $J(x_r)$ nie może posiadać wartości własnych na osi urojonej.

Lapunowem zbadać stabilność punktów równowagi

1. wyznaczamy punkt równowagi. Przyrównujemy równanie układu do zera.
2. Podstawiamy do macierzy Jacobiego punkt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

3. Wyliczamy wartości własne macierzy Jacobiego i sprawdzamy czy ich część rzeczywista jest mniejsza od 0. Jeśli tak to punkt jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeśli nie to punkt równowagi jest niestabilny.

Jeśli wyjdzie 0 to "Twierdzenie to nie rozstrzyga o stabilności punktu równowagi, jeżeli system zlinearyzowany jest jedynie stabilny"

Zadanie 5.1.1

Dany jest system dynamiczny
$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$\dot{x}(t) = \cos(x(t))e^{-x(t)^2}$
$\dot{x}(t) = f(x(t))$
x_r jest punktem równowagi $\Leftrightarrow f(x_r) = 0$
$f(x_r) = \cos(x_r) \cdot \underbrace{e^{-}x_r^2}_{<0} = 0 \Rightarrow cos(x_r) = 0 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

System zlinearyzowany: $\dot{x}(t) = J(x_r)x(t)$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x) \cdot e^{-x^2} + \cos(x) \cdot (-2xe^{-x^2}) = -e^{-x^2}(\sin(x) + 2x\cos(x))$
$J(x_r) = \underbrace{-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}}_{<0}(\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)}_{=1 \vee =-1}) + \underbrace{2(\frac{\pi}{2} + k\pi)\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi)}_{=0} = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}(\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi))$

I metoda Lapunowa
Punkt równowagi, dla którego system zlinearyzowany jest asymptotycznie stabilny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Jeżeli zaś chociaż jedna z wartości własnych macierzy systemu zlinearyzowanego ma dodatnią część rzeczywistą to punkt równowagi jest niestabilny.

$\lambda = -e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)$
niestabilny :
$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + (2k\pi + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
(z Hurwitza)
$-e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) > 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1 \Rightarrow x_r = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.1.2

Dany jest system dynamiczny
$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 3x_1(t)^2 - x_2(t)$
Wyznaczyć jego punkty równowagi i za pomocą I metody Lapunowa zbadać ich stabilność.

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-6x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$-2x_1 - 3x_1^2 = 0$$

$$x_1(2+3x_1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_1 = -\frac{2}{3}$$

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + \lambda + 2$$

$$\Delta = -7$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

$\lambda = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ Stabilny

$\vee$

$$x_r = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\Delta = 9$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = -2$$

$\lambda = 1 > 0 \Rightarrow$ Niestabilny

Zadanie 5.2.1

Wyznaczyć punkty równowagi układu generatora synchronicznego, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -Dx_2 - \sin x_1 + \sin \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 = 0$

$-\sin x_1 + \sin \delta_0 = 0 \Rightarrow \sin \delta_0 = \sin x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \delta_0 + 2k\pi \quad \vee \quad x_1 = -\delta_0 + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Zadanie 5.2.2

Wyznaczyć punkty równowagi dla obwodu Chuy, który jest systemem dynamicznym opisanym następującymi równaniami:

$C_1\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R}x_1(t) + \frac{1}{R}x_2(t) - g(x_1(t))$

$C_2\dot{x}_2(t) = \frac{1}{R}x_1(t) - \frac{1}{R}x_2(t) + x_3(t)$

$L\dot{x}_3(t) = -x_2(t) - R_0x_3(t)$

przy czym $g(v) = g_1v + g_2v^3$

$$\begin{cases} -\frac{1}{RC_1}x_1 + \frac{1}{RC_1}x_2 - \frac{g_1}{C_1}x_1 - \frac{g_2}{C_1}x_1^3 = 0 \\ \frac{1}{RC_2}x_1 - \frac{1}{RC_2}x_2 + \frac{x_3}{C_2} = 0 \\ -\frac{1}{L}x_2 - \frac{R_0}{L}x_3 = 0 \qquad\qquad \Rightarrow x_2 = -R_0x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1Rx_1 + g_2Rx_1^3 + x_1 = x_2 \\ x_1 + Rx_3 = x_2 \\ x_2 = -R_0x_3 \end{cases}$$

z drugiego i trzeciego:

$x_3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$

z pierwszego i drugiego:

$g_1Rx_1 + g_2Rx_1^3 = Rx_3$

$g_1x_1 + g_2x_1^3 = x_3$

podstawiam x_3 z trzeciego:

$g_1x_1 + g_2x_1^3 = \frac{-x_1}{R+R_0}$

$g_1x_1 + x_1^3g_2 + \frac{x_1}{R+R_0} = 0$

$x_1^3g_2 + x_1(g_1 + \frac{1}{R+R_0}) = 0$

podstawiam pomocnicze zmienne:

$a = g_2, \quad b = g_1 + \frac{1}{R+R_0}$

$ax_1^3 + bx_1 = 0$

$x_1(ax_1^2 + b) = 0$

1 $x_1 = 0 \quad \vee \quad ax_1^2 + b = 0$

2 $x_1 = \sqrt{\frac{-b}{a}} \quad \vee \quad$ 3 $x_1 = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$

podstawiam $x_1 = 0$:

$$x_r = \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ x_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1 $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$②\ x_r = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -R_0 \frac{-\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \\ \frac{-\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \end{bmatrix}$$

$$③\ x_r = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}} \\ -R_0 \frac{\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \\ \frac{\sqrt{\frac{-g_1 - \frac{1}{R+R_0}}{g_2}}}{R+R_0} \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.3.1

Dla jakich wartości parametru ϵ zerowy punkt równowagi układu zwanego oscylatorem Van der Pola będzie niestabilny
$\ddot{x}(t) - \epsilon(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \epsilon(1 - x(t)^2) \cdot \dot{x}(t) - x(t) = \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \epsilon(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\epsilon x_1 x_2 - 1 & \epsilon(1 - x_1^2) \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{bmatrix}$$

Z Lapunowa:
$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \lambda\epsilon + 1 = 0$
$\Delta = \epsilon^2 - 4 \Rightarrow \lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}$
niestabilny: Jeżeli część rzeczywista $> 0 \Rightarrow \frac{\epsilon}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon > 0}$
asymptotycznie stabilny : $\begin{bmatrix} -\epsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Hurwitz $-\epsilon > 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon < 0}$

Zadanie 5.4.1

Dla jakich wartości parametru a linearyzacja przestaje spełniać warunki twierdzenia Grobmana-Hartmana dla układu opisanego równaniami:
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$

$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$$

Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_2 \neq 0 \wedge x_1 \neq 0$:

$$\begin{cases} -\frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{-x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow -x_2^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ (sprzeczność)}$$

więc $x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

z tw. Grobmana-Hartmana:

$\det(j\omega I - J(x_r)) \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} j\omega - a & -1 \\ 1 & j\omega - a \end{vmatrix} = 0$$

$(j\omega - a)^2 + 1 = 0$

$j\omega - a = \pm j \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$J(x_r)$ nie ma wartości własnych na osi urojonej

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{bmatrix}$$

$(a - \lambda)^2 + 1 = 0$

$a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$

$\Delta = 4a^2 - 4a^2 - 4$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$

dla $a = 0$ wartości własne są na osi urojonej

Zadanie 5.5.1

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie niestabilny.

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$
$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$(a - \lambda)^2 - 1 = 0$
$(a - \lambda - 1)(a - \lambda + 1) = 0$
$\lambda = a - 1 \quad \vee \quad \lambda = a + 1$
niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$
$a - 1 > 0 \qquad a + 1 > 0$
$a > 1 \qquad a > -1$
$(a > 1 \quad \vee \quad a > -1) \Rightarrow \boxed{a > -1}$

Alternatywnie: Bez podanego punktu równowagi
$\dot{x_1}(t) = x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t) = f_1(x(t))$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t) = f_2(x(t))$
$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 = 0 \\ x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$$
Zauważamy, że albo $x_1 = x_2 = 0$ albo dla $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$:
$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \\ \frac{x_1}{x_2} + (a - x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow \begin{matrix} x_2^2 = x_1^2 \\ x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \end{matrix}$$
więc $\overset{1}{x_r} = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \vee \overset{2}{x_r} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$
$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J\left(\begin{matrix}\textcircled{1}\\ x_r\end{matrix}\right)=\begin{bmatrix}a-4k^2 & 1-2k^2\\ 1-2k^2 & a-4k^2\end{bmatrix} \quad\vee\quad J\left(\begin{matrix}\textcircled{2}\\ x_r\end{matrix}\right)=\begin{bmatrix}a-4k^2 & 1+2k^2\\ 1+2k^2 & a-4k^2\end{bmatrix}$$

$$(a-4k^2-\lambda)^2-(1-2k^2)^2=0 \quad\vee\quad (a-4k^2-\lambda)^2-(1+2k^2)^2=0$$

$$(a-4k^2-\lambda-1+2k^2)(a-4k^2-\lambda+1-2k^2)=0 \quad\vee\quad (a-4k^2-\lambda-1-2k^2)(a-4k^2-\lambda+1$$

$$\lambda=a-1-2k^2\vee\lambda=a+1-6k^2 \quad\vee\quad \lambda=a-1-6k^2\vee\lambda=a+1-2k^2$$

$$niestebilny:$$

$$Re\lambda>0$$

$$a-1-2k^2>0\vee a+1-6k^2>0 \qquad a-1-6k^2>0\vee a+1-2k^2>0$$

$$\underset{\textcircled{1}}{a>1+2k^2}\quad \underset{\textcircled{2}}{a>6k^2-1} \qquad \underset{\textcircled{3}}{a>1+6k^2}\quad \underset{\textcircled{4}}{a>2k^2-1}$$

odp. niestabilny dla $a>\textcircled{1}\vee a>\textcircled{2}\vee a>\textcircled{3}\vee a>\textcircled{4}$

Zadanie 5.5.2

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x_1}(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x_2}(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie niestabilny.

$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$

$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$

$\Delta = -4$

$\lambda = \frac{2a \pm 2i}{2} = a \pm i$

niestabilny, gdy $Re(\lambda) > 0$

$\boxed{a > 0}$

Zadanie 5.6.1

Dla jakich wartości parametru a zerowy punkt równowagi układu opisanego równaniami
$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_1(t)$
$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + (a - x_1(t)^2 - x_2(t)^2)x_2(t)$
będzie asymptotycznie stabilny.

$$x_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$J(x) = \begin{bmatrix} a - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_2x_1 \\ 1 - 2x_1x_2 & a - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$
$$J(x_r) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0$$

Macierz Hurwitz'a
Wielomian charakterystyczny: $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n$
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2a & 0 \\ 1 & a^2+1 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitz'a
Jeśli wszystkie minory wiodące są większe od zera, to jest asymptotycznie stabilny.

$-2a > 0 \Rightarrow a < 0$
$-2a(a^2+1) > 0 \Rightarrow \boxed{a < 0}$