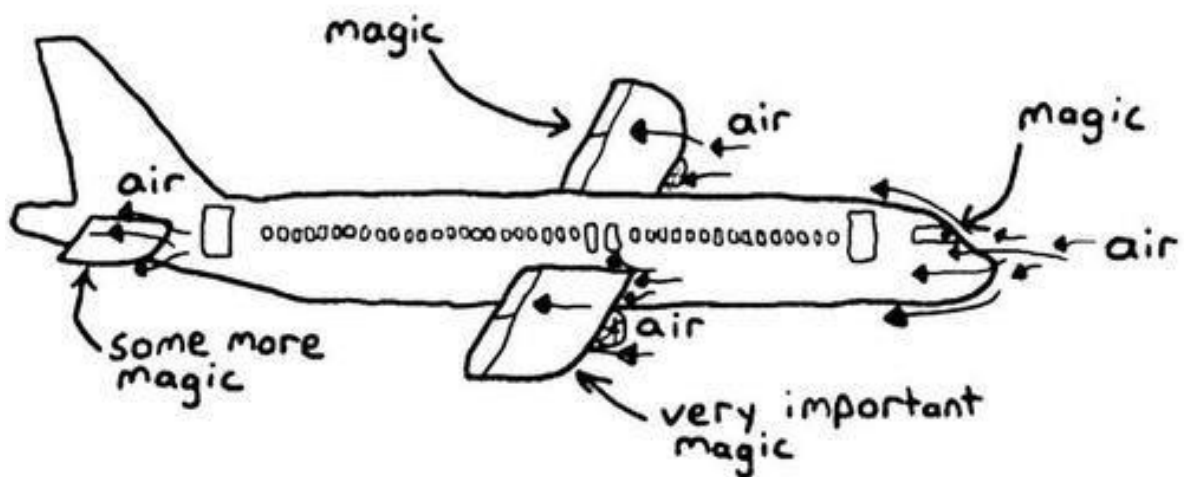
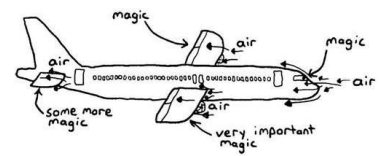


how planes fly



AERODYNAMIK

SKREVET AF: MARC TIMMER JENSEN 3.X



Abstract

This thesis is about aerodynamics. The focus is on wing profiles and their ability to create lift. The ability for a wing to create lift is explained by Bernoulli's principle which is also evaluated.

In this thesis it is also explained how a theoretical circulation around the wing, can account for the different velocities in windspeed over and under a wing profile. In this part of the thesis the Kutta-Joukowski's theorem will be included.

Kutta-Joukowski's theorem states that, the lift per unit span, can be found as the density of the air multiplied by: The velocity of the air and the circulation around the two-dimensional airfoil of the wing. After this Kelvin's theorem is introduced, and it says that the total circulation over time in an inviscid, incompressible flow is equal to 0.

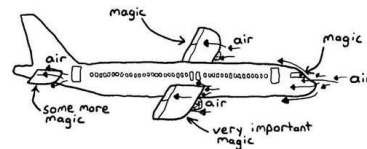
In this thesis it's also proven why Bernoulli's principle and Kutta-Joukowski's theorem are true. Experiments have been carried out to investigate Bernoulli's principle. In the experiment a venturi-tube has been used. Following the experiment, the data were analyzed. The result showed that the static pressure drops, when the dynamic pressure increases, because of increased airspeed.

Experiments were carried out to examine what the lift on a wing model is. In this assignment it was found, that the optimal lift was created at an angle of attack around 10° , when the airspeed was 11 m/s. In the experiment the airspeed was lowered to 8 m/s. At this airspeed it was found that the optimal lift was created at an angle of attack around 15° .

The drag on the wing profile was also measured, and the results showed, that the lowest amount of drag was around an angle of attack of 0° . Analyzing the data, the results showed, that the wing was most aerodynamic at an angle of attack of 10° .

Furthermore, to investigate the relation between Bernoulli's principle and the flow on a wing profile, the pressures along the wing profile was measured.

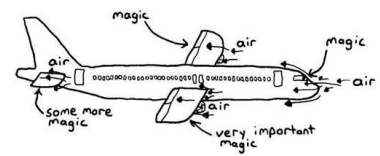
At the end of this thesis, it was discussed and evaluated how a wing might be useful on a car.



Indhold

Abstract.....	1
1: Indledning	3
2: Grundlaget for opdriften på et fly	4
2.1: Kræfterne der påvirker et fly	4
2.2: Bernoullis princip	6
2.3: Vingeprofiler	9
3: Udvalgte aerodynamiske teoremer	13
3.1: Introduktion til parametriske ligninger og kurver	13
3.2: Vector funktioner og parametriske ligninger	15
3.3: Vektorfelter	16
3.3: Integraler og kurveintegraler	18
3.4: Kutta-Joukowski theorem	23
3.5: Kelvins theorem	25
4: Undersøgelse af Bernoullis princip og Kutta-Joukowski theorem	27
4.1: Bernoullis princip	27
4.2: Kutta-Joukowski theorem	29
5: Databehandling af de relevante forsøg	32
5.1: Bernoullis princip efterprøvet ved venturirør	32
5.1.1: Fejlkilder.....	35
5.2: Opdriften på en vinge	36
5.2.1: Fejlkilder.....	41
5.3: Luftmodstanden på vingen	41
5.3.1: Fejlkilder.....	45
5.3.2: Teoretisk overfladeareal	45
5.4: Trykfordelingen på vingeprofilen	47
5.4.1: Fejlkilder.....	49
6: Aerodynamik i dagligdagen	50
7: Konklusion	51
Litteraturliste	53
Bøger	53
Hjemmesider	53
Billeder.....	55

Ordtælling: 47884 tegn = 20,0 sider



1: Indledning

Denne SRP omhandler aerodynamik, og har specielt fokus på aerodynamikkens betydning for vingeprofiler.

Indledningsvist vil der blive redegjort for, hvorfor en flyvemaskine kan flyve, idet der specielt ses på vingerne. I redegørelsen vil de fysiske kræfter der påvirker et fly blive gennemgået. Herefter vil blive forklaret, hvordan en vingeprofil bidrager til at danne den opdrift, der holder et fly i luften. Vingens bidrag til at holde flyet i luften kan forklares med Bernoullis princip. Derfor vil der blive redegjort for Bernoullis princip.

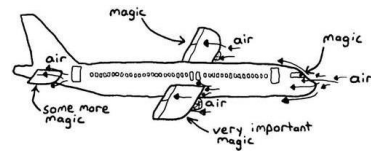
I opgaven vil det også blive forklaret hvordan cirkulationen om en vingeprofil bidrager til opdrift. Herudover præsenterer opgaven, hvordan udformningen af vingeprofilen påvirker opdriften på vingen. Her vil der tages udgangspunkt i en symmetrisk og en cambered vinge. Det vil også blive forklaret, hvornår en vinge staller.

For at fremme forståelsen for de relevante teoremer, vil der indledningsvist blive redegjort for de matematiske elementer der indgår i disse. Herunder vil opgaven komme ind på elementerne: Parametriske ligninger, kurver, vektorfunktioner, vektorfelter og kurveintegraler. I opgaven vil det herefter blive undersøgt, hvad Kutta-Joukowskis theorem og Kelvins theorem kan fortælle os om teorierne bag aerodynamik. Her vil det blive analyseret hvordan teoremerne kan forklare luftstrømningerne rundt om vingeprofilen. I denne SRP vil det også blive bevist, at Bernoullis princip passer, og at Kutta-Joukowskis theorem er sandt.

Der vil i opgaven blive inddraget udførte eksperimenter med en vingeprofil og venturirør. Forsøgene vil blive analyseret med henblik på at påvise: Konsekvenserne af Bernoullis princip og herudover opdriften på, luftmodstanden af, og trykfordelingen på en vinge. Bernoullis princip bliver undersøgt ved analyse af hvad der sker med luftstrømningen igennem et venturirør.

Det vil blive undersøgt, hvad opdriften og luftmodstanden er på en vingemodel. Ud fra disse data, vil løftkoefficienten og luftmodstandskoefficienten blive opmålt. Derudover vil trykket på vingen blive undersøgt med et manometer.

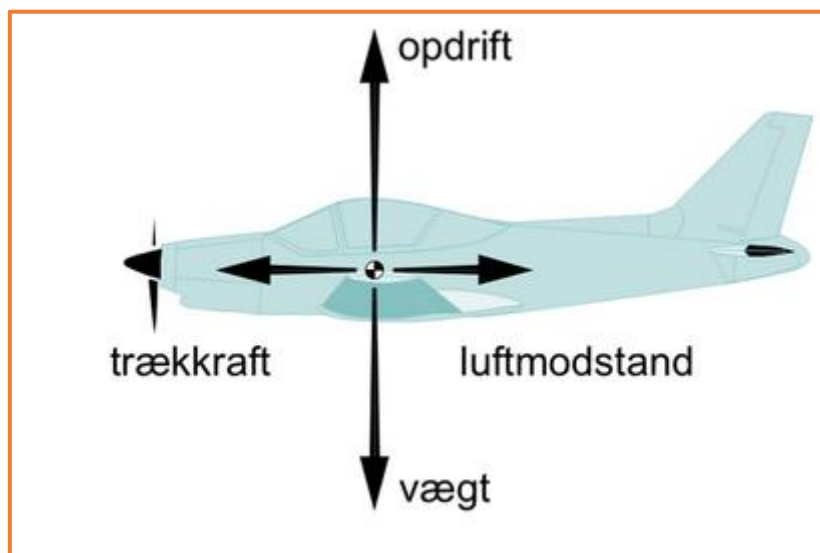
De aerodynamiske data, -teoremer og -teorier vil afslutningsvist blive diskuteret og vurderet med henblik på dagligdagens hændelser, hvor det vil blive diskuteret og vurderes hvordan aerodynamikken har en effekt på biler.



2: Grundlaget for opdriften på et fly

2.1: Kræfterne der påvirker et fly

I nedenstående illustration ses en flyvemaskine, og de kræfter der påvirker den, mens den flyver ligeud i luften.



For at et fly kan flyve, så skal den have en hastighed. Dette kan dannes ved fx en motor, som trækker flyet fremad. Når flyet flyver fremad, så vil luften påvirke den med en modsatrettet kraft i form af luftmodstand.

Et fly har en vægt (masse) som påvirkes af tyngdekraften. Ud fra vægten kan man udregne tyngdekraftens påvirkning af flyet ved formlen for tyngdekraft:

$$F_t = m \cdot g$$

Hvor g er defineret som tyngdeaccelerationen.¹

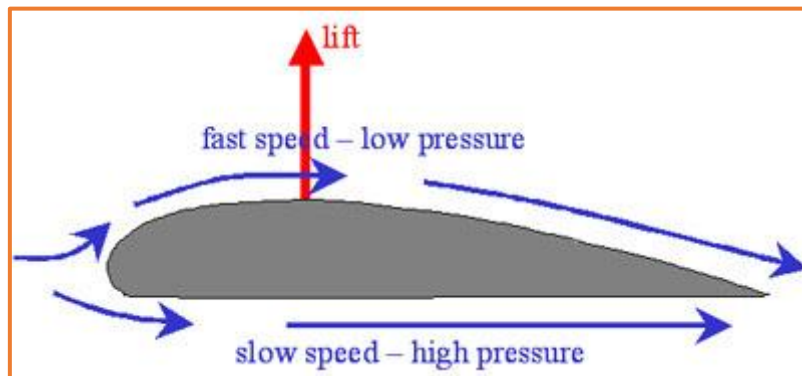
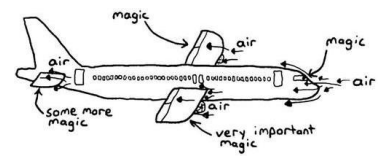
Hvis ikke der er en kraft på flyet som er modsatrettet tyngdekraften, så ville den falde. Den modsatrettede kraft kalder man opdrift, og denne skal være større end eller lig med tyngdekraften, for at et fly kan holde sig flyvende².

Opdriften for et fly dannes på dens vinger, som har en speciel form. Denne form kunne se således ud³:

¹ <https://orbitbhtx.systime.dk/index.php?id=166>

² <https://spoerg-piloten.dk/hvordan-kan-det-lade-sige-gore-at-sa-mange-tons-kan-haengeflyve-i-luften/>

³ <https://spoerg-piloten.dk/hvordan-kan-det-lade-sige-gore-at-sa-mange-tons-kan-haengeflyve-i-luften/>



Vingens form gør, at lufthastigheden over vingen er større end under. Bernoullis princip siger, at der vil dannes et lavere tryk over vingen end under vingen. Dette vil trykke vingen opad og danne opdriften (lift på engelsk)⁴.

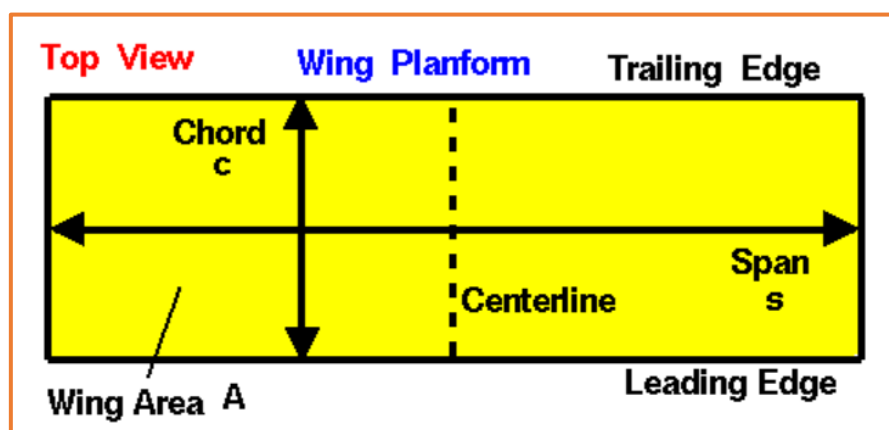
Opdriften på et fly kan udregnes med formlen⁵:

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot c_L \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Hvor " ρ " er densiteten af luften, A er arealet af vingerne, " v " er hastigheden af flyet og " c_L " er en proportionalitetskonstant som hedder "lift coefficient".

Man ser i udtrykket, at opdriften er ligefrem proportional med farten i anden (v^2), dette betyder, at desto hurtigere flyet flyver, desto mere opdrift danner vingerne⁶.

Arealet af vingen findes som vingens planform areal. Dette areal er det man kan se, hvis man ser vingen ovenfra. Hvis vingen set ovenfra er firkantet, så kan man finde arealet ved at gange længden med bredden af vingen (se billedet). Det er altså ikke det totale overfladeareal der skal bruges!⁷



For at fremdriften på et fly skal blive så stor som muligt, så betyder det, at luftmodstanden skal være så lille som muligt. Man kan udregne luftmodstanden på et bestemt areal af et fly ved⁸:

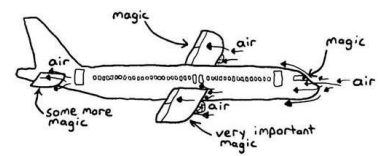
⁴ <https://spoerg-piloten.dk/hvordan-kan-det-lade-sige-gore-at-sa-mange-tons-kan-haengeflyve-i-luften/>

⁵ Baktoft, Allan side 137

⁶ <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/lifteq.html>

⁷ <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/geom.html>

⁸ <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/drageq.html>



$$F_D = \frac{1}{2} \cdot c_D \rho \cdot A \cdot v^2$$

Hvor "D"-et står for det engelske ord "drag" som betyder modstand. I udtrykket er " ρ " densiteten af luften som flyet flyver i, " v " er farten af flyet, A er referencearealet og " c_D " er en proportionalitetskonstant, som hedder "drag koefficient". Drag koefficienten er den, der tager højde for den meget komplekse luftmodstand, der kan påvirke et fly⁹.

Arealet A er et referenceareal, og det betyder, at man kan vælge et hvilket som helst areal på flyet og finde luftmodstanden på arealet. Det er flyets overfladareal, der definerer den samlede luftmodstand. Men da der arbejdes med aerodynamiske kræfter, så kan man vælge et hvilket som helst areal på flyet. Bemærk at modstandskraften varierer på de forskellige arealer. Hvis man vil sammenligne luftmodstanden mellem fly, bliver man nød til at vælge det samme område på flyene. Hvis man gerne vil sammenligne opdriftskoefficienten (c_L) med luftmodstandskoefficienten (c_D) så skal man vælge det samme arealet af vingerne¹⁰.

2.2: Bernoullis princip

Inden for aerodynamik anvender man følgende variable og konstanter:

Navn	Betegnelse	Enhed
Densitet	ρ	$\frac{g}{ml}$ el. $\frac{g}{cm^3}$
Temperatur	T	K
Masse	m	Kg
Volumen	V	L
Kinetisk energi	E_{kin}	J
Hastighed	v	$\frac{m}{s}$
Statisk tryk	P_s	Pa
Dynamisk tryk	P_d	Pa
Totalt tryk	P_t	Pa
Højde	h	m

Densiteten bestemmer hvor meget masse der er pr. volumen. Densiteten findes ved¹¹:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Det er dog vigtigt at bemærke, at temperaturen har en effekt på densiteten. Fx falder vands densitet når man varmer det op fra 3,8 °C til 100,0 °C¹². Trykket har også en effekt på densiteten.

Så hvis man skal sammenligne forskellige materials densiteter, så skal det være ved samme temperatur og tryk. Densiteten af luft ved 20 °C og 1 atmosfæres tryk (101,3 kPa) er 1,2041 $\frac{kg}{m^3}$ ¹³.

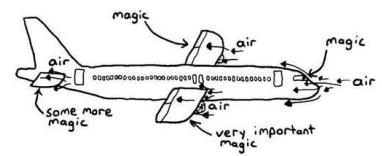
⁹ <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/drageq.html>

¹⁰ <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/drageq.html>

¹¹ <https://da.wikipedia.org/wiki/Massefylde>

¹² Andersen, Jespersgaard & Østergaard, side 149

¹³ https://en.wikipedia.org/wiki/Density_of_air



Den kinetiske energi er den energi, et objekt med en masse får, når den bevæger sig med en hastighed "v". Derfor kaldes dette også for bevægelsesenergi.

Den kinetiske energi af et objekt med massen "m" og farten "v" kan findes ved¹⁴:

$$E_{kin} = 0,5 \cdot m \cdot v^2$$

Da luft også har en masse, så får denne også en kinetisk energi, fx når der er blæst udenfor.

Af densitetsformlen kan man udlede, at den kinetiske energi kan findes ved¹⁵:

$$E_{kin} = 0,5 \cdot \rho \cdot V \cdot v^2$$

Hvor "ρ" er densiteten af luften ved den givne temperatur, "V" er volumen af luften, og "v" er farten af luften.

Det dynamiske tryk opstår når luften bevæger sig. Det dynamiske tryk kan findes som:

$$P_d = \frac{E_{kin}}{V}$$

Man kan herefter indsætte udtrykket fra før¹⁶:

$$P_d = \frac{0,5 \cdot \rho \cdot V \cdot v^2}{V} \Leftrightarrow P_d = 0,5 \cdot \rho \cdot v^2$$

Så man kan finde det dynamiske tryk, af fx en luft der bevæger sig med hastigheden "v", og som har densiteten ρ¹⁷.

Det statiske tryk er det tryk, en volumen af fx luft. På et barometer kan man aflæse det statiske tryk.

Det totale tryk af en luft vil altid være konstant, medmindre luften optager eller afgiver energi i form af varme¹⁸.

Bernoullis princip siger, at summen af det statiske tryk og det dynamiske tryk vil være konstant¹⁹.

Dette kan skrives på følgende måde²⁰:

$$P_s + P_d = P_t$$

Bernoullis princip virker på både flydende væsker og gasser. Hvis ovenstående formel skal bruges, så må der ikke ske en højdeforskel²¹.

Hvis der indgår en højdeforskel, så skal der også tages højde for denne. Herved bliver Bernoullis princip:

$$P_t = P_s + 0,5 \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

Hvor g er tyngdeaccelerationen. Dette er en konstant, som i Danmark er $9,82 \frac{N}{kg}$.

¹⁴ Raletz, side 12

¹⁵ Raletz, side 12

¹⁶ Raletz, side 12

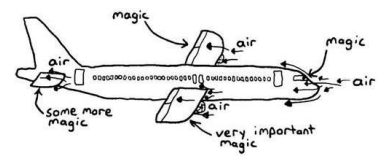
¹⁷ Raletz, side 12

¹⁸ Ternvig, side 12

¹⁹ <https://fysikleksikon.nbi.ku.dk/h/hydrodynamik/>

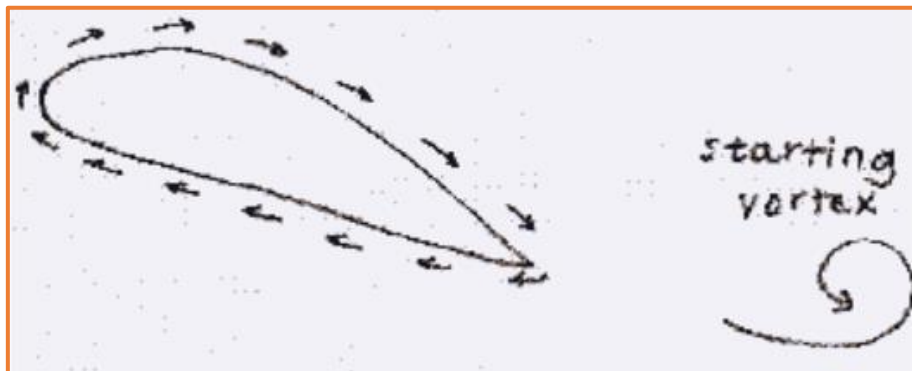
²⁰ Raletz, side 12

²¹ <https://fysikleksikon.nbi.ku.dk/h/hydrodynamik/>



Bernoullis princip er essentiel for at forklare løftet på en vingeprofil. Det er bevist, at lufthastigheden over vingeprofilen er hurtigere end under. Derfor siger Bernoullis princip, at der vil dannes en trykforskel i det statiske tryk. På oversiden af vingen dannes et undertryk i forhold til et overtryk på undersiden. Dette medfører, at undertrykket "suger" vingen opad, og danner opdrift²².

For at kunne forklare forskellen i hastigheds-flowet omkring vingen, bruges begrebet "circulation". Man siger, at der er en slags vind, der kører i ring rundt om vingen. Dette kan ses i illustrationen²³:



Når man så summerer denne cirkulation sammen med vindhastigheden (det uniforme flow), så giver det:

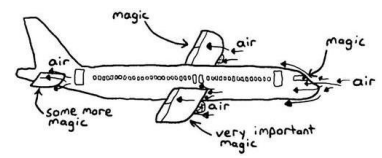


En hurtigere lufthastighed over vingen end under vingen²⁴.

²² <https://spoerg-piloten.dk/hvordan-kan-det-lade-sige-gore-at-sa-mange-tons-kan-haengeflyve-i-luften/>

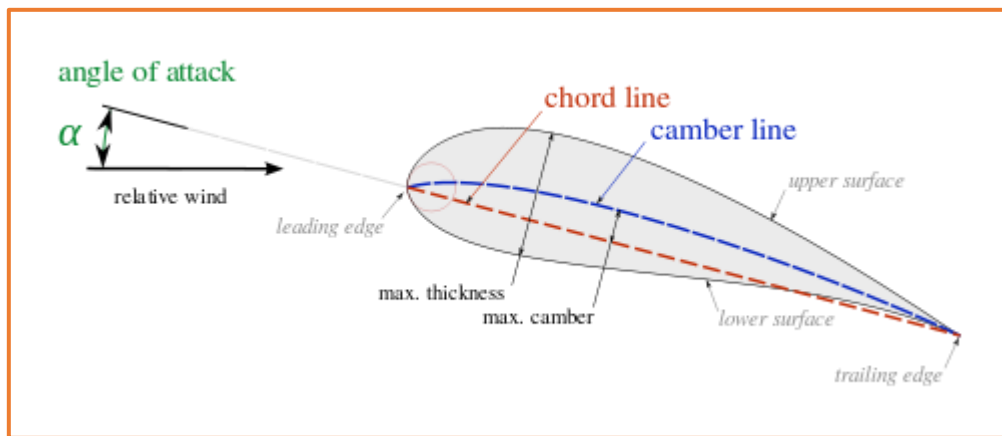
²³ <http://web.mit.edu/2.972/www/reports/airfoil/airfoil.html>

²⁴ <http://web.mit.edu/2.972/www/reports/airfoil/airfoil.html>



2.3: Vingeprofiler

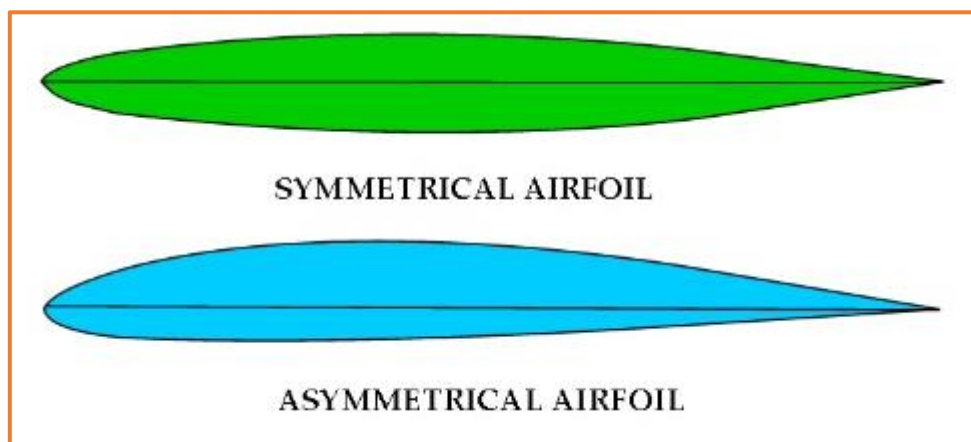
Nedenfor er en vinge illustreret med forskellige fagtermer:



Chord-linjen (chord line) er den direkte linje fra vingespids til vingens bagkant.

Camberlinjen er den linje, der løber i midten igennem vingen, fra vingeforkant til vinge bagkant. Så afstanden fra camberlinjen til den øvre overflade er lige så stor som afstanden til den nedre overflade. Angrebsvinklen "angle of attack" er den vinkel, der dannes mellem flyveretningen (i illustrationen er den vandret) og vingens chordlinje²⁵.

Nedenfor ses en illustration af to vingeprofiler:



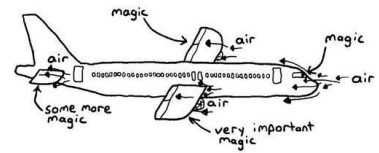
En symmetrisk vinge (airfoil) forekommer, når chordlinjen ligger oveni camberlinjen. Dette kan ses på den grønne vinge.

Man kan også bygge en vinge med lidt mere kurve, disse hedder cambered vinger, og de er asymmetriske (se den blå vinge)²⁶.

Ved en angrebsvinkel på 0°, vil den asymmetriske vinge ikke danne opdrift, da vindhastigheden over og under vingen er den samme. Derfor siger Bernoullis princip, at der ikke vil dannes en trykforskel i det statiske tryk. Men hvis man forøger angrebsvinklen, så kan en symmetrisk vinge godt danne opdrift.

²⁵ Baktoft, Allan side 137

²⁶ Baktoft, Allan side 148

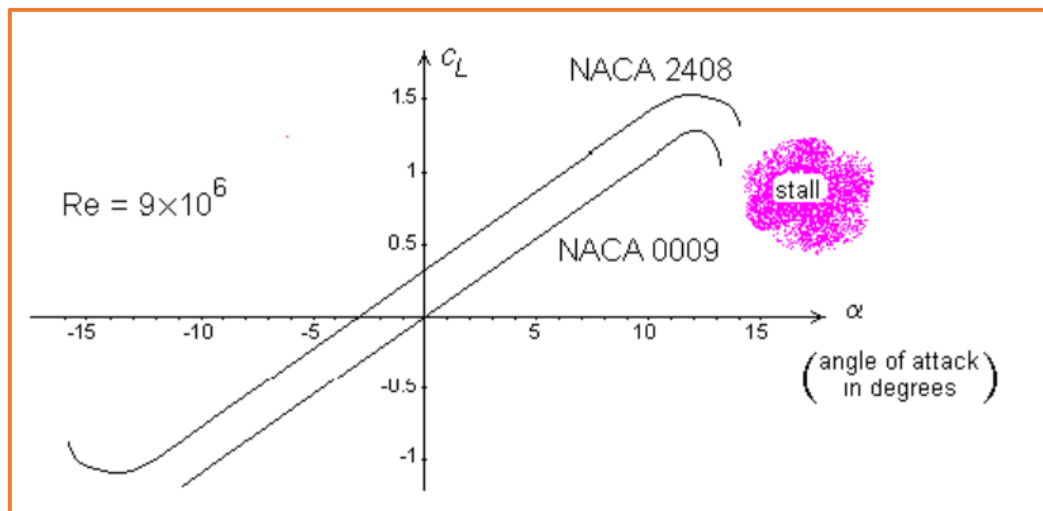


I modsætning til symmetriske vinger, så vil de fleste cambered vinger danne opdrift ved en angrebsvinkel på 0° ²⁷. Man kan altså se, at der er en sammenhæng mellem løftet og vingeformen. Formlen for løft er:

$$F_l = \frac{1}{2} \cdot c_L \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

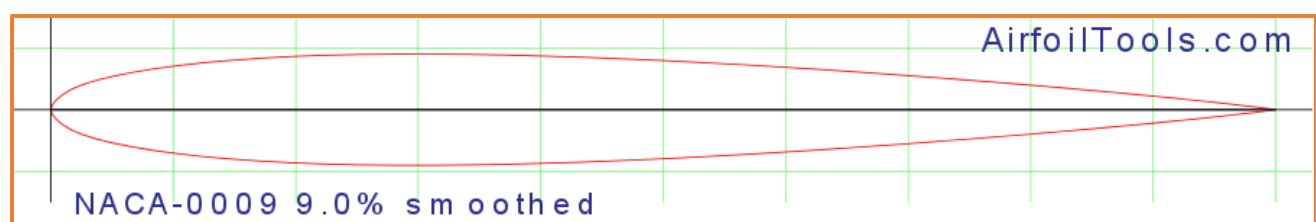
Ved det tilfælde, at vingernes areal er ens, så kan man se, at der må være en sammenhæng mellem løftkoefficienten og vingens form samt angrebsvinklen.

Dette kan også ses i grafen^{28 29}:



I følgende illustration kan man aflæse løftkoefficienten for de forskellige vingeprofiler: NACA 0009 og NACA 2408^{30 31}.

I det følgende kan vingeprofilerne ses:



Jf. tidligere ses det at NACA-0009 er symmetrisk, da chordlinjen løber gennem camberlinjen.

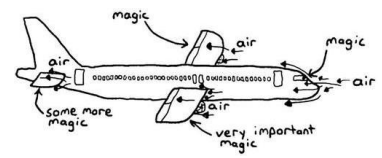
²⁷ <https://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>

²⁸ (Det bør bemærkes, at de optagede værdier er numerisk fundet ved computersimuleringer)

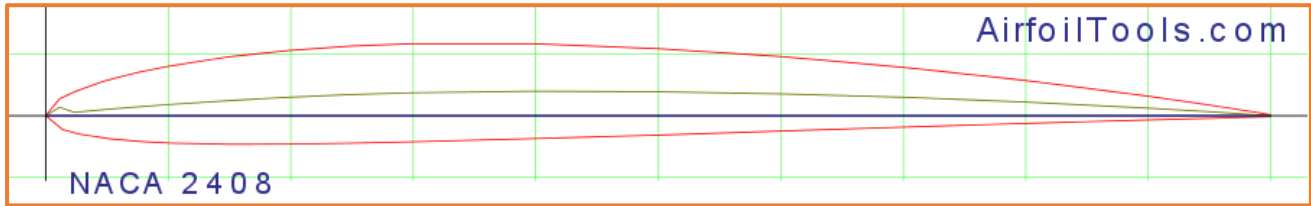
²⁹ <http://galileo.phys.virginia.edu/classes/311/notes/aero/node4.html>

³⁰ (NACA er en forløber til NASA)

³¹ https://da.wikipedia.org/wiki/National_Advisory_Committee_for_Aeronautics



Nedenfor ses NACA 2408:



Af denne illustration kan man se, at chordlinjen ligger udenfor camberlinjen, derfor er det en cambered vingeprofil.

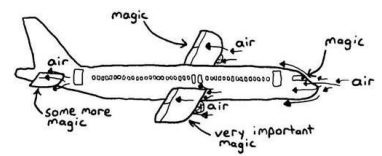
Af illustrationen øverst på siden, kan man aflæse angrebsvinklen ud af 1. akse og løftkoefficienten opad 2. akse.

For den symmetriske vingeprofil NACA 0009 kan man se, at dens løftkoefficient ved en angrebsvinkel på 0° er 0, og derfor opstår der ikke et løft på vingen. Når angrebsvinklen forøges, så forøges løftkoefficienten også. Der er en proportional stigning frem til en angrebsvinkel på $12-13^\circ$, hvorefter løftkoefficienten for vingen begynder at falde. Når angrebsvinklen overskrider $12-13^\circ$, så begynder vingen at "stalle", hvilket betyder, at vingen mister mere af sin løfteevne.

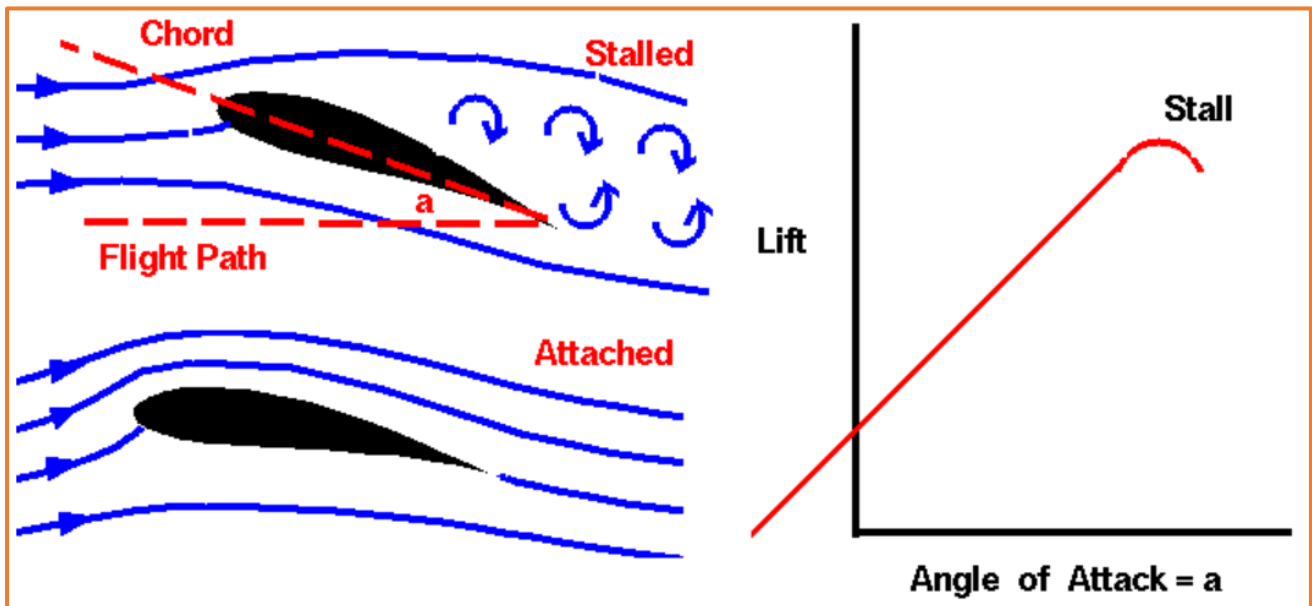
For NACA 2408, som er en cambered vinge, kan man se, at denne har en løftkoefficient på 0,35 ved en angrebsvinkel på 0° . Herefter stiger løftkoefficienten lineært frem til de $12-13^\circ$ i angrebsvinkel. Efter dette punkt går løftet koefficienten for vinge nedad. Bemærk også, at vingerne kan opnå en negativ løftkoefficient, når angrebsvinklen bliver negativ. Nedenfor ses formelen for løft:

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot c_L \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Da løftet regnes som et produkt af alle leddene, og leddene: " ρ , A og v^2 " alle er positive, så må en vinge altså også kunne danne et negativt løft. Dette fremkommer, når angrebsvinklen bliver negativ for vingeprofilerne.

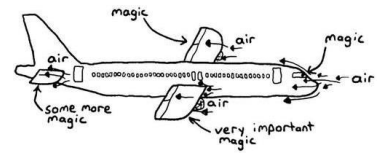


Hvis man bliver ved med at forøge angrebsvinklen (α) efter optimum er opnået, så begynder vingen at stalle. Dette ses i følgende illustration:



Når vingen kommer op i en høj angrebsvinkel, så kommer luftstrømningen længere væk fra overfaldearealet på oversiden af vingen (se illustrationen). Dermed følger luften ikke længere vingeprofilen. Dette medfører at luften ikke samles lige bag bagkanten på vingen og derved mister vingen mere og mere af sin opdrift. Angrebsvinklen kan forøges så meget, at vingen mister al sin opdrift³².

³² <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/incline.html>



3: Udvalgte aerodynamiske teoremer

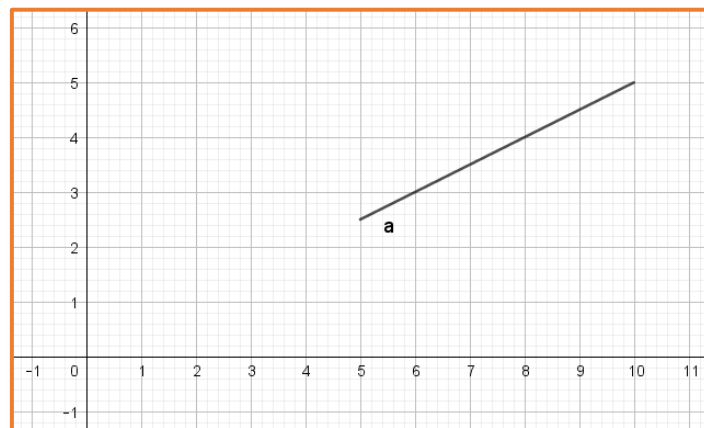
Kutta-Joukowskis theorem beskriver cirkulationen af luft rundt om en vingeprofil. For at kunne forstå matematikken i theoremet, vil der blive redegjort for de elementer der indgår.

3.1: Introduktion til parametriske ligninger og kurver

Et koordinatsystem består af (x, y) , og x og y beskrives ved funktionerne $x=f(t)$ og $y=g(t)$, hvor der indgår den ekstra variabel "t", som også kaldes for en parameter.

Hvis x og y danner en kurve, så er x og y en parametriske ligning for kurven³³.

Nedenfor ses en kurve:



Den parametriske ligning for kurven er:

$$x = t, \quad y = \frac{t}{2}, \quad 5 \leq t \leq 10$$

Det ses her, at parameteren "t" er begrænset til intervallet $[5;10]$.

Den måde man finder x og y værdierne på, er ved at indsætte "t"-værdierne i funktionerne for x og y .

Fx ved $t=5$, vil x og y blive:

$$x = 5$$

$$y = \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = 2,5$$

Derfor vil koordinatsættet for $t=5$ blive $(5; 2,5)$.

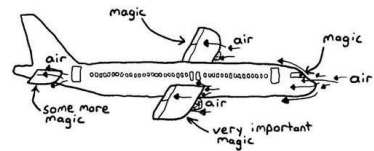
Man kan også undersøge $t=10$, og her bliver x og y :

$$x = 10$$

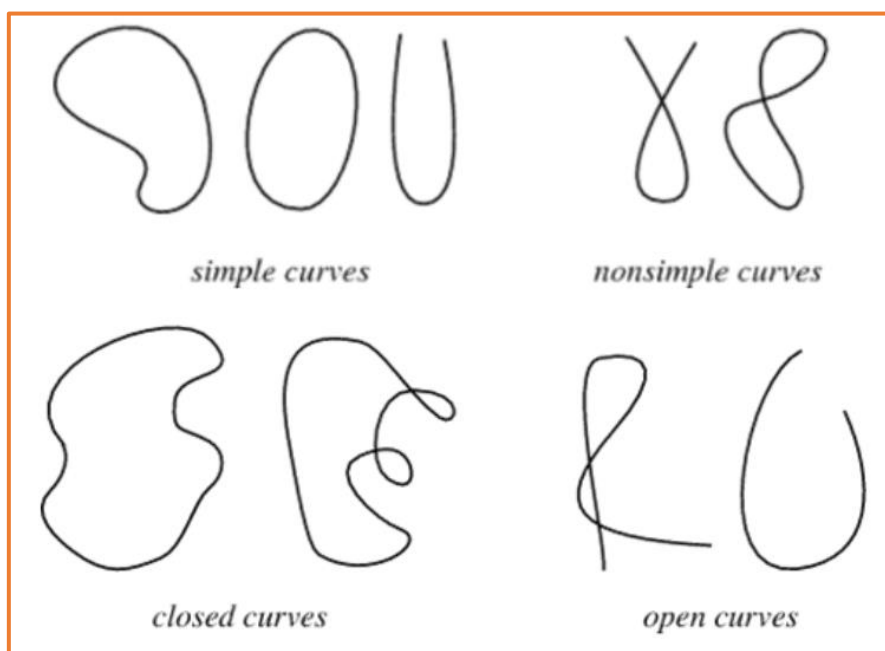
$$y = \frac{10}{2} \Leftrightarrow y = 5$$

Derfor vil koordinatsættet for $t=10$ blive $(10, 5)$.

³³ Ayres & Mendelson side 307



Nedenfor ses forskellige typer af kurver, der kan dannes af parametriske ligninger:



En simpel åben kurve, er en kurve hvor endepunkterne ikke mødes, og kurven ikke krydser sig selv. En simpel lukket kurve er en kurve hvor endepunkterne mødes, men kurven krydser ikke sig selv. En ikke simpel kurve er en kurve, der krydser sig selv. Denne kan både være åben og lukket³⁴.

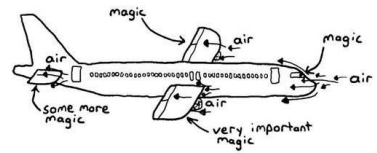
Hvis man finder alle punkterne for x og y i definitionsområdet af parameteren, og indsætter dem i et (x, y) -koordinatsystem, vil man opnå en parametriske kurve.

Hvis man i en parametriske fremstilling, har en begrænsning på parameteren, så vil den dannede kurve få en defineret længde. Længden af kurven kan findes ved³⁵:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

³⁴ <https://www.math-only-math.com/simple-closed-curves.html>

³⁵ Ayres & Mendelson side 307-308



3.2: Vector funktioner og parametriske ligninger

I en todimensionel plan kan en kurve beskrives ved vektorfunktionen:

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Hvor $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.³⁶

I dette tilfælde opstår $x(t)$ og $y(t)$ også som parametriske ligninger, da disse afhænger af en parameter.

Når man anvender vektorfunktionen " $\vec{r}(t)$ ", så finder den koordinatsættet til punktet "P" på kurven "C" til parameteren " t ".³⁷ Vektorfunktionen starter sin vektor i origo $(0, 0)$.

Et eksempel på en kurve beskrevet ved en vektorfunktion:

Den parametriske fremstilling er:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= 2t \end{aligned}$$

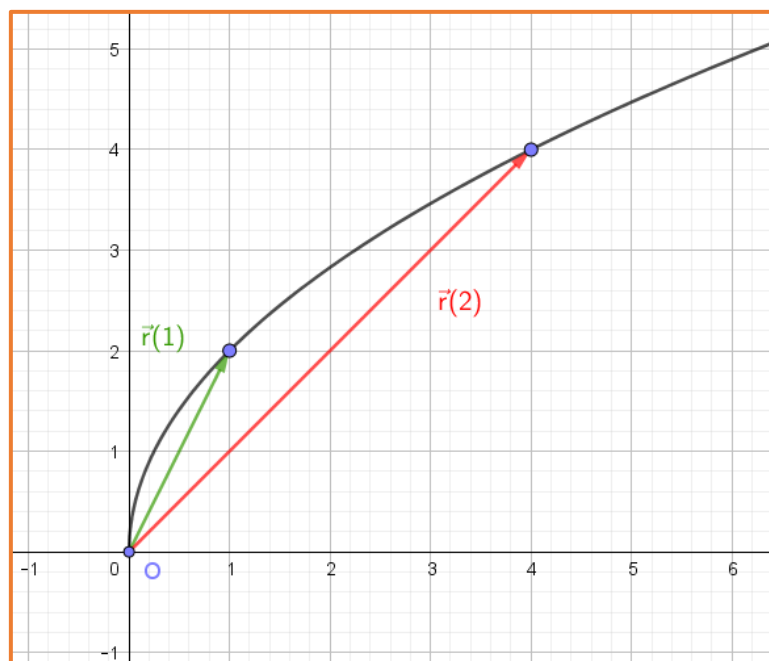
Parameteren er begrænset ved:

$$0 \leq t \leq 5$$

Vektorfunktionen bliver derfor:

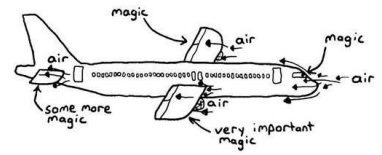
$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

Grafisk fremstilling af kurven:



³⁶ <https://matematik3.systime.dk/index.php?id=15>

³⁷ " t " kunne fx være tid



I figuren er vektorfunktionen ($\vec{r}(t)$) for $t=1$ og $t=2$ ind plottet ind. I virkeligheden er der uendelige mange vektorer, der går fra origo og ud til kurven.

3.3: Vektorfelter

Et vektorfelt i \mathbb{R}^2 er defineret i et todimensionelt koordinatsystem. Som i fx et (x, y) -koordinatsystem. Vektorfeltet defineres som følgende:

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hvor x og y kan være funktioner afhængig af et koordinatsæt. Den dannede vektor starter i det koordinatsæt som vælges³⁸.

Fx kunne en vektorfelt være:

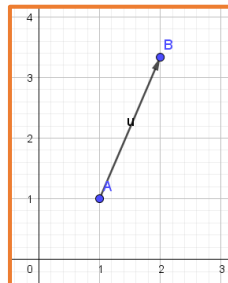
$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + x \\ \frac{y}{3} + y \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Her kan man kigge på vektoren der starter i $(1,1)$, denne vil blive:

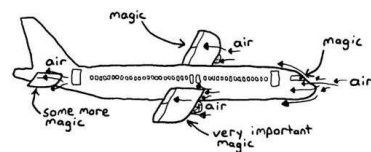
$$\left(1^2 + 1, \quad \frac{1}{3} + 1 \cdot 3 \right) = \left(2, \frac{10}{3} \right)$$

Så vektoren vil starte i $(1,1)$ og gå ud til punktet $(2, \frac{10}{3})$.

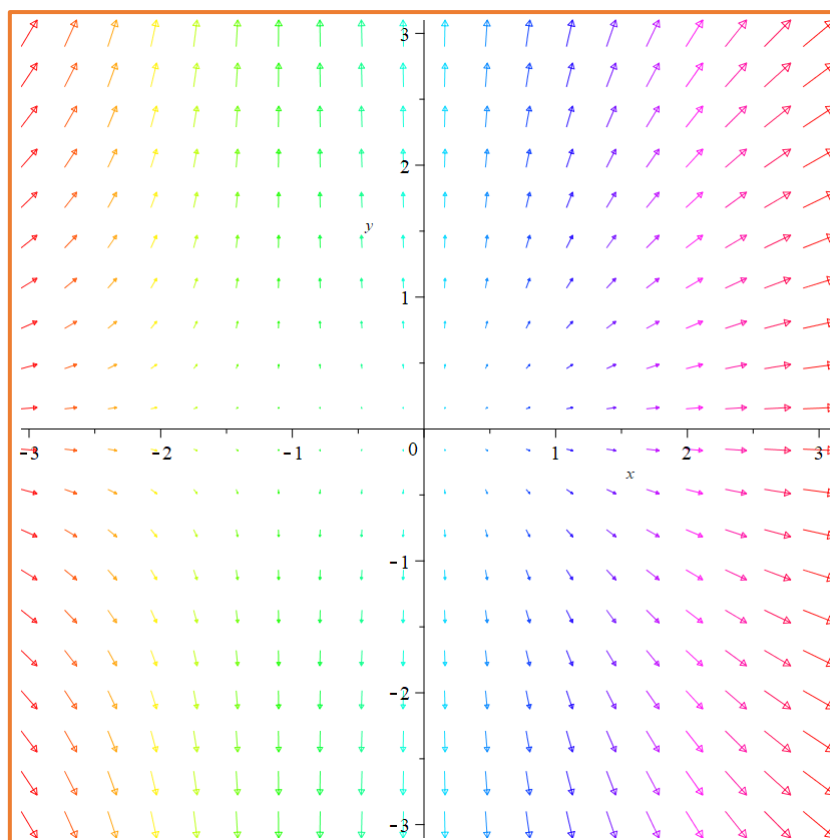
Dette kan grafisk illustreres:



³⁸ https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/section16.01.html



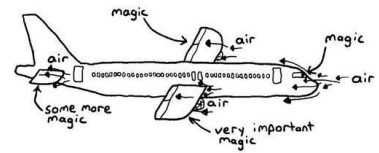
Dette er dog kun én vektor ud af de uendeligt mange vektorer, der er i det definerede vektorfelt. Feltet kommer til at se således ud:



Længden af vektorerne er ikke rigtige, da dette vil give et rimeligt rodet diagram. Dog er størrelsen af vektorerne antydnet med en relativ længde i forhold til hinanden. Farven antyder også længden af vektorerne. En blå farve betyder en kort vektor, og en rød farve angiver en lang vektor.

Man kan forstå vektorfeltet som lufts bevægelsesmønster. Vektorernes retning indikerer i hvilken retning luften bevæger sig, og vektorernes længde angiver luftens hastighed³⁹.

³⁹ <https://mathinsight.org/vector-field-fluid-flow>



3.3: Integraler og kurveintegraler

Et normalt bestemt integrale opskrives på følgende måde:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Dette integrale finder arealet af stykket mellem grafen $f(x)$ og 1. akse fra punkt a til punkt b. Man integrerer altså funktionen langs x-aksen. Dog er der nogle betingelser for $f(x)$, og det er, at den skal være defineret i intervallet $[a;b]$ ⁴⁰.

I et kurveintegrale integrerer man langs en kurve (i stedet for x-aksen), og den integrerede funktion vil være defineret mellem punkt a og b på kurven. Ved kurveintegration starter man også i punkt a og bevæger sig mod punkt b. Punkt b kan også ligge i punkt a, så er der tale om en lukket kurve.

En kurve kan repræsenteres ved en vektorfunktion:

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)] = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Når vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ bliver differentieret, så skal den være uafbrudt og den må ikke give 0.

Et kurveintegrale er defineret ved:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Hvor \vec{F} kan være et vektorfelt⁴¹.

I dette tilfælde er kurven ikke lukket (eller cirkelsluttet).

C er betegnelsen for længden af kurven (arc length). Hvis man integrerer på et bestemt område, fra a til b, så bliver integralet:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Det gælder at:

$$d\vec{r} = [dx, dy]$$

Derfor kan udtrykket skrives:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy) = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y') dt$$

Hvis kurven er cirkelsluttet, vil man opskrive kurveintegralet som:

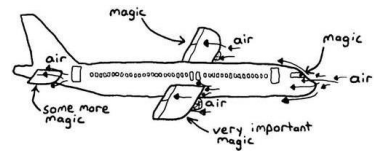
$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Det integrationen af en kurve ved et kurveintegrale i et vektorfelt angiver, er om vektorfeltet bidrager til en cirkulation, der følger integrationsretningen på kurven⁴².

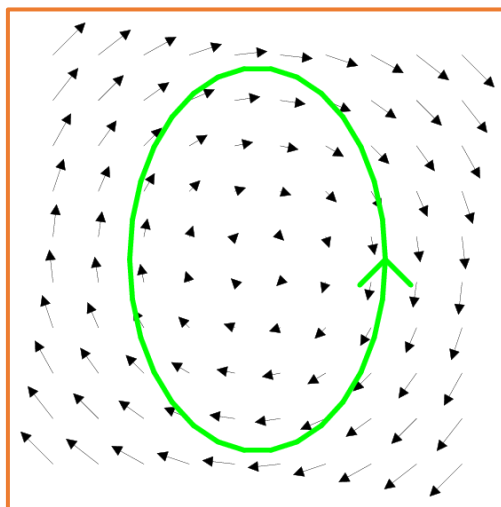
⁴⁰ Kreyszig, side 512

⁴¹ https://mathinsight.org/line_integral_circulation

⁴² https://mathinsight.org/line_integral_circulation



Nedenfor ses en kurve med ellipseform i et vektorfelt:



Da omdrejningsretningen af ellipsen er modsat af strømningen af vektorerne, så vil det lukkede kurveintegralt for kurven blive negativ.

Det er derfor vigtigt, at omløbsretningen for den vej man integrerer, er valgt korrekt. Omløbsretningen er valgt således, at det afgrænsede areal af den simple kurve, ligger til venstre for pilen, der indikerer integrationsretningen⁴³. Dette kunne fx også vinden om en vingeprofil.

Følgende gælder:

$$-\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Hvor "C" kan være en hvilken som helst kurve, og det gælder at:

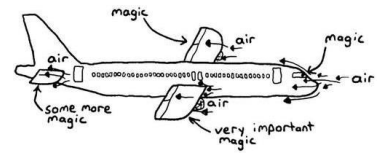
$$-\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Minus "C" betyder egentligt, at kurveintegralet beregnes i modsat integrationsretning^{44 45}.

⁴³ <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/GreensTheorem.aspx>

⁴⁴ <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/LineIntegralsVectorFields.aspx>

⁴⁵ <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/LineIntegralsPtII.aspx>

**Eksempel:**

Vektorfeltet $\vec{F}(\vec{r})$ er defineret ved

$$\vec{F}(\vec{r}) = -y \cdot \vec{i} + xy \cdot \vec{j}$$

Hvor kurven C er repræsenteret ved:

$$\vec{r}(t) = \cos(t) \cdot \vec{i} + \sin(t) \cdot \vec{j}$$

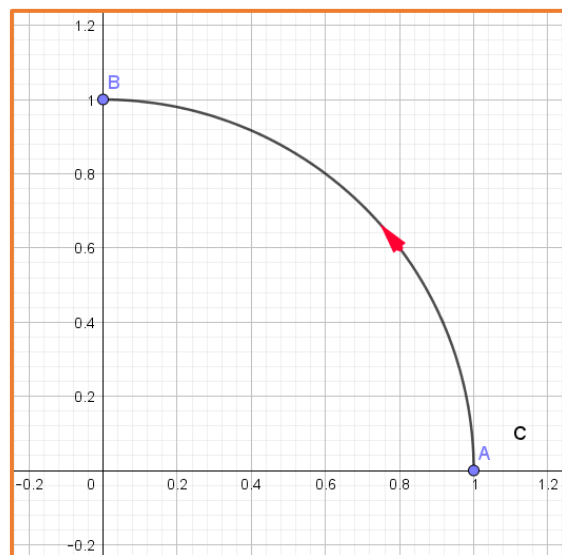
Parameteren "t" er defineret ved:

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Dette kan differentieres:

$$\vec{r}'(t) = -\sin(t) \cdot \vec{i} + \cos(t) \cdot \vec{j}$$

Kurven kan illustreres:



Derfor må det betyde at:

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t)$$

Det ønskes bestemt hvad vektorfeltet er på formen $\vec{F}(x, y)$. Derfor findes y som funktion af x. Men først findes x'ets definitionsmængde:

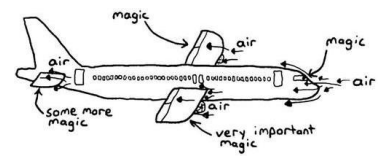
$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Så dvs.

$$0 \leq x \leq 1$$

t isoleres i udtrykket:

$$x = \cos(t) \Leftrightarrow t = \cos^{-1}(x)$$



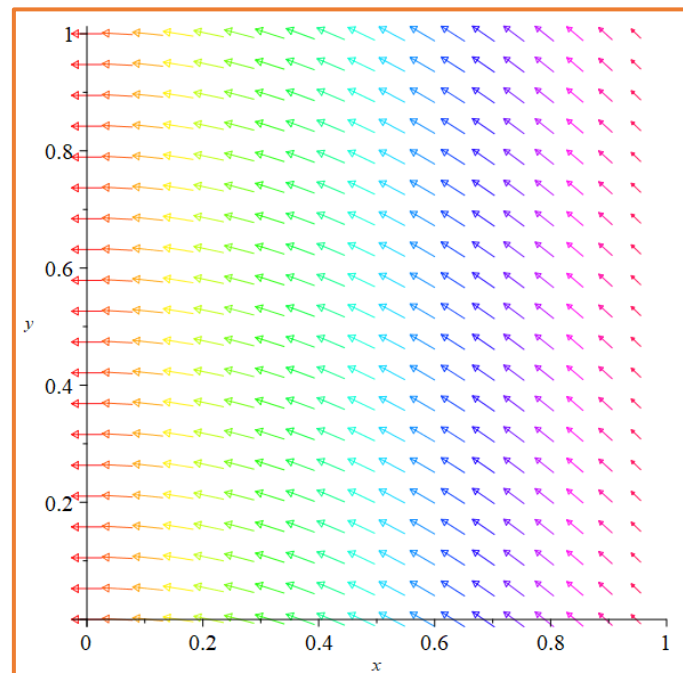
Derfor kan y -funktionen skrives:

$$y(x) = \sin(\cos^{-1}(x))$$

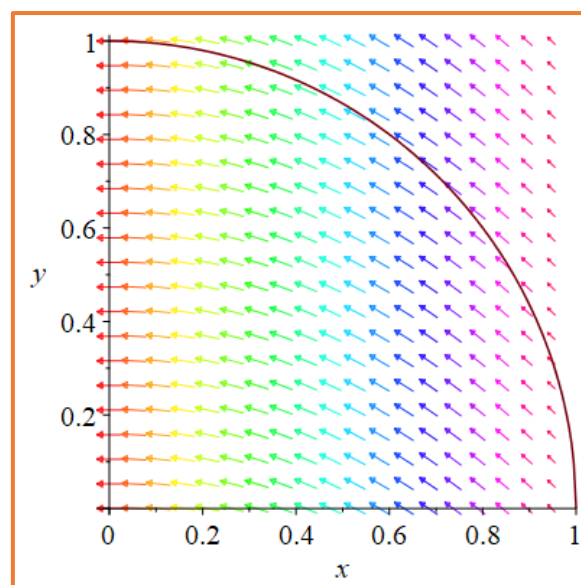
Herved bliver vektorfeltet:

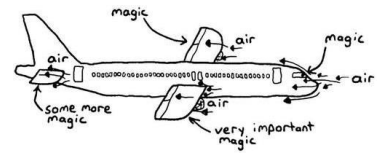
$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(\cos^{-1}(x)) \\ x \cdot \sin(\cos^{-1}(x)) \end{pmatrix}$$

Vektorfeltet kan nu tegnes:



Indtegnes kurven også, så ses det at:





Da strømmingen af vektorerne peger i samme retning som integrationsretningen af kurven, så kan det forventes, at integralet bliver positivt.

Nu kan kurveintegralet findes:

Det ses at vektorfeltet på $\vec{F}(\vec{r})$ er lig med:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\sin(t) \cdot \vec{i} + \cos(t) \cdot \sin(t) \cdot \vec{j}$$

Derfor kan kurveintegralet opskrives som:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t) \cdot \vec{i} + \cos(t) \cdot \sin(t) \cdot \vec{j}) \cdot (-\sin(t) \cdot \vec{i} + \cos(t) \cdot \vec{j}) dt$$

Dette kan opskrives på vektorform:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t) \cdot \vec{i} + \cos(t) \cdot \sin(t) \cdot \vec{j}) \cdot (-\sin(t) \cdot \vec{i} + \cos(t) \cdot \vec{j}) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

Skalarproduktet findes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) + \cos(t) \cdot \sin(t) \cdot (\cos(t)) dt$$

Dette reduceres:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) + \cos(t) \cdot \sin(t) \cdot (\cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) + \cos^2(t) \cdot \sin(t) dt$$

Ved integration bliver dette:

$$\left[-\frac{\cos(t) \cdot \sin(t)}{2} + \frac{t}{2} - \frac{\cos(t)^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Dette bliver derfor:

$$-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} - \left(-\frac{\cos(0) \cdot \sin(0)}{2} + \frac{0}{2} - \frac{\cos(0)^3}{3} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(0)^3}{3}$$

Da det gælder at:

$$\cos(0) = 1$$

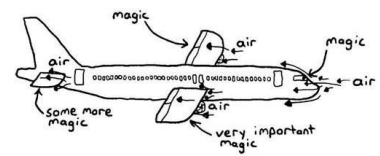
Så må:

$$\cos(0)^3 = 1^3$$

Derfor bliver kurveintegralet lig:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t) \cdot \vec{i} + \cos(t) \cdot \sin(t) \cdot \vec{j}) \cdot (-\sin(t) \cdot \vec{i} + \cos(t) \cdot \vec{j}) dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \approx 1,119$$

Som det ses, så blive integralet positivt som forventet.



3.4: Kutta-Joukowski theorem

Den formel, der er angivet nedenunder, finder cirkulationen rundt om en vinge defineret i et todimensionelt koordinatsystem (\mathbb{R}^2):

$$\Gamma = \sum_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

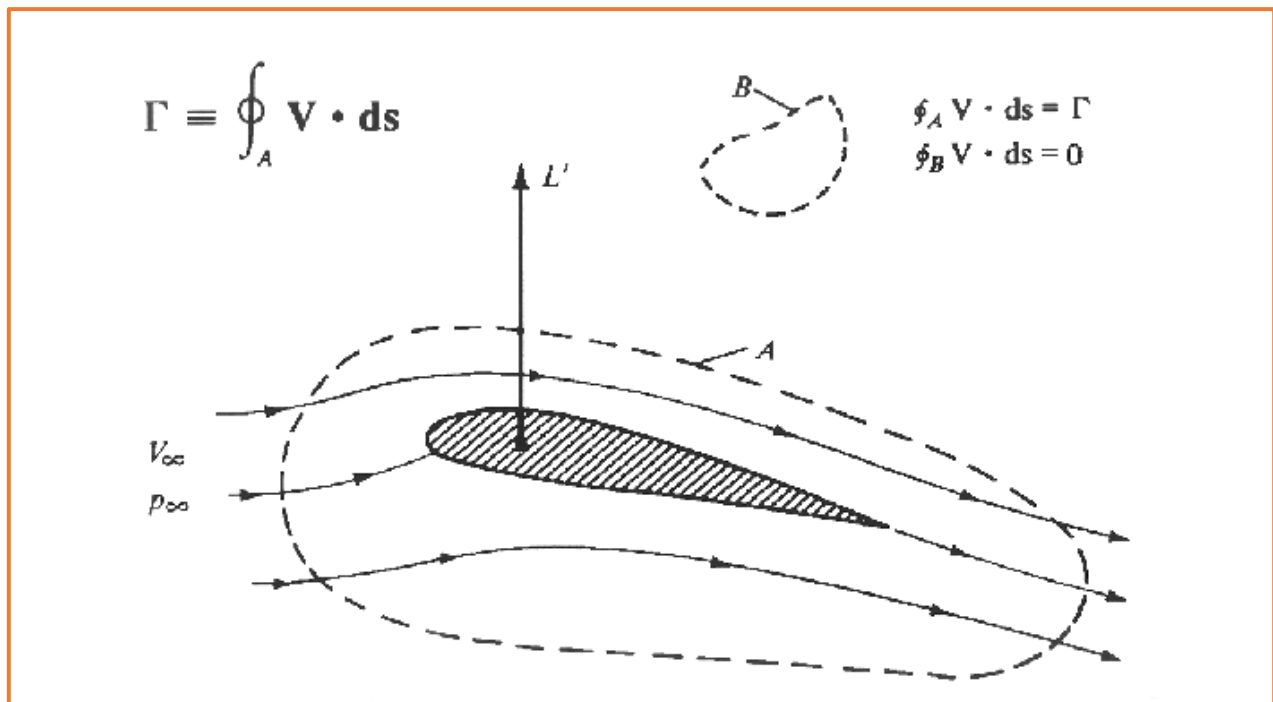
Γ definerer cirkulationen. \vec{v} er et hastighedsfelt (vektorfelt) defineret ved: $\vec{v}(x, y)$ ⁴⁶.

C står for en lukket kurve, der er defineret, så vingen ligger inde i kurven. Langs kurven summerer man skalarproduktet mellem hastighedsfeltet $\vec{v}(x, y)$ og ændringen i afstanden på den lukkede kurve " $d\vec{s}$ ".

Da ændringen af afstanden på kurven kan defineres til at være uendelig lille, så kan cirkulationen findes ved et kurveintegralt⁴⁷:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

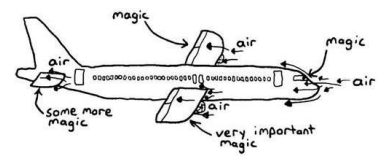
Dette kan grafisk illustreres:



Ligesom beskrevet i afsnittet med kurveintegraler, så undersøger man cirkulationen af vektorfeltet indenfor den lukkede kurve " C ". Hvis omdrejningsretningen af kurven er sat, så den følger vindfeltet $\vec{v}(x, y)$ over vingen, og går modsat retning af luftstrømningen under vingen, så vil integralet blive positivt, hvis vingen får lufthastigheden over til at gå hurtigere end under.

⁴⁶ Baktoft, side 141

⁴⁷ Baktoft, side 142



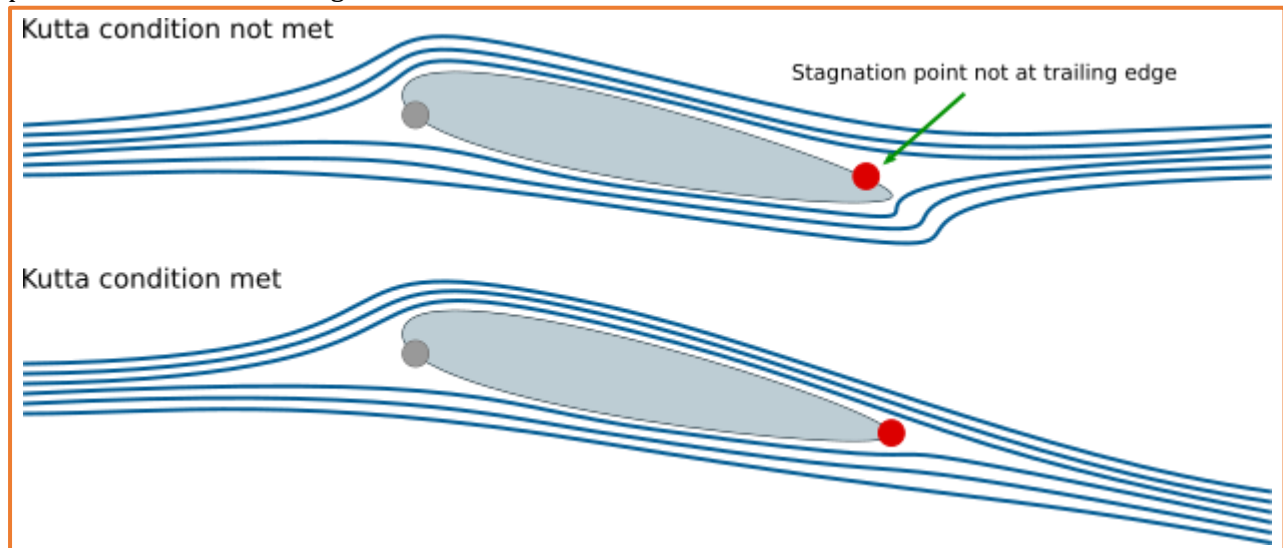
Kutta-Joukowski's theorem siger at:

$$\frac{F_L}{l} = \rho \cdot V \cdot \Gamma$$

Kutta Joukowski's theorem fortæller, at vingens løfteevne pr. dens længde (span "s" jf. billedet side 5), er det samme som produktet af densiteten af luften, farten af luften og cirkulationen.

Der er dog nogle betingelser til formelen, og det er, at luften ikke må presses sammen⁴⁸. Der er også en såkaldt Kutta-betingelse, der skal være opfyldt. Den bliver beskrevet i det følgende:

På en vinge er der to steder, hvor luften står helt stille ($V=0$ m/s). Disse steder kalder man "stagnation points". Dette kan ses i følgende illustration:

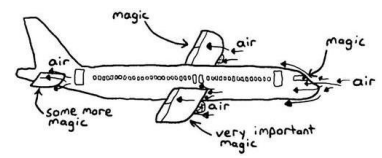


Kutta-betingelsen siger, at det bagerste "stagnation point" skal befinde sig bagerst på vingen⁴⁹, før formelen kan anvendes (se illustrationen⁵⁰).

⁴⁸ Baktoft, side 142

⁴⁹ <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/map.html>

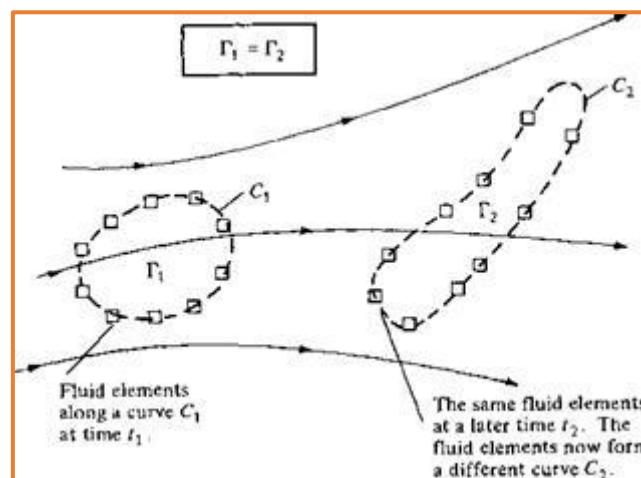
⁵⁰ <https://aviation.stackexchange.com/questions/47251/what-is-the-physical-meaning-of-circulation-found-in-kutta-condition>



3.5: Kelvins theorem

Kelvins theorem tager udgangspunkt i sig en viskositetsløs ikke kompressibel strømning. Strømningen påvirkes ikke af kraftfelter, som tyngdekraften, magnetiske kraftfelt eller elektriske kraftfelter⁵¹. Vand kunne fx påvirkes af tyngdekraften og et elektrisk kraftfelt, da vandet har en masse og er polært⁵².

I strømningen vælger man en arbitrær kurve C . Man identificerer de bestemte elementer som kurven ligger på i strømningen. Dette kunne fx være molekyler. Man kigger på molekylerne til tidspunktet t_1 . Man lader tiden gå til tidspunkt t_2 . Man kigger nu på de bestemte elementer igen, og disse danner en kurve C_2 . Se illustrationen⁵³:



Så siger Kelvins theorem, at cirkulationen af kurven C_1 til tidspunkt t_1 skal være det samme som cirkulationen af kurven C_2 til t_2 .

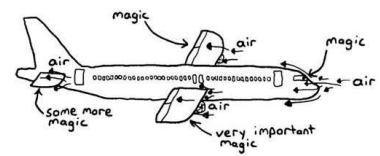
Bemærk, at kurven C_1 er den samme som kurven C_2 i illustrationen, dette er bare til to forskellige tidspunkter. Kurven C_2 ser også anderledes ud, dette skyldes strømningsretningen (indikeret med pilene). Selvom C_2 ændre sin form, så skal cirkulationen være den samme⁵⁴.

⁵¹ <http://heli-air.net/2016/02/25/kelvin-s-circulation-theorem-and-the-starting-vortex/>

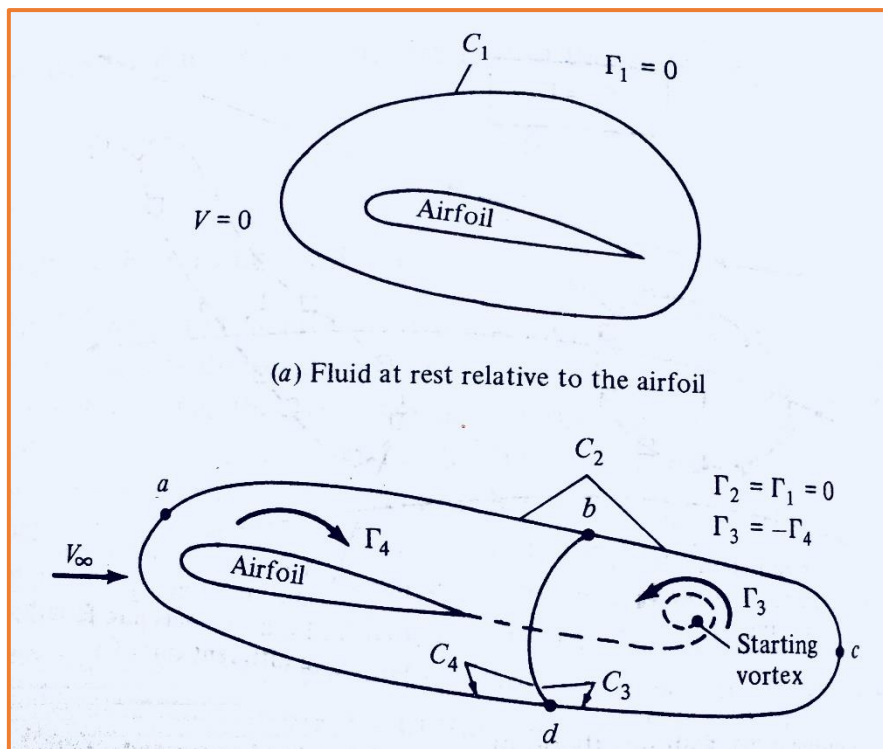
⁵² <https://www.scientificamerican.com/article/static-electricity-bring-science-home/>

⁵³ <http://heli-air.net/2016/02/25/kelvin-s-circulation-theorem-and-the-starting-vortex/>

⁵⁴ <http://heli-air.net/2016/02/25/kelvin-s-circulation-theorem-and-the-starting-vortex/>



Dette kan nu anvendes på en flyvinge:



I 1. del af illustrationen ses det, at væskens hastighed er 0. Vingen danner altså ingen cirkulation.

I 2. del af illustrationen ses det, at der er en hastighed, og kurven ændrer sig. Det første der sker, når der kommer væske ind på vingen er, at der kommer et turbulensområde på vingens bagkant. Denne turbulens danner en slags hvirvel. Denne hvirvel skubbes med væsken, og hvirvlen bliver langsomt til en "Starting vortex". På samme tid dannes der cirkulation rundt om vingen. Jo mere væske, desto længere kommer vortexen væk fra vingen⁵⁵.

Nu kan man opsplitte kurven, så man undersøger cirkulationen om vingen for sig selv (Γ_4 i C_4) og cirkulationen af "Starting vortex" (Γ_3 i C_3) for sig⁵⁶.

Da Kelvins theorem siger følgende:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$$

Så må det gælde at:

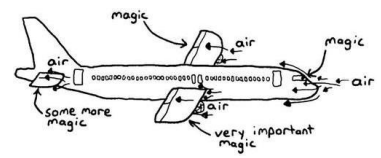
$$\Gamma_4 + \Gamma_3 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_3 = -\Gamma_4$$

Det betyder, at vortexen udligner cirkulationen om vingeprofilen⁵⁷.

⁵⁵ <http://heli-air.net/2016/02/25/kelvin-s-circulation-theorem-and-the-starting-vortex/>

⁵⁶ <http://heli-air.net/2016/02/25/kelvin-s-circulation-theorem-and-the-starting-vortex/>

⁵⁷ <http://heli-air.net/2016/02/25/kelvin-s-circulation-theorem-and-the-starting-vortex/>



4: Undersøgelse af Bernoullis princip og Kutta-Joukowski theorem

4.1: Bernoullis princip

Newtons anden lov siger, at den resulterende kraft for et objekt, er lig massen af objektet ganget med objektets acceleration⁵⁸. Dette kan skrives:

$$F_{res} = m \cdot a$$

Da det gælder at:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Så kan den resulterende kraft skrives:

$$F_{res} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

En hastigheds tilvækst (acceleration) vil resultere i et fald af trykket, derfor angives trykændringen "dp" negativt⁵⁹.

$$-Adp = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Formlen for densitet kan også omskrives:

$$\rho = \frac{m}{A \cdot dx} \Leftrightarrow m = \rho \cdot A \cdot dx$$

Hvor A er arealet af en flade, og dx er længden væk fra fladen (dette giver et volumen).

Dette kan nu indsættes i sætningen:

$$-Adp = \rho \cdot A \cdot dx \frac{dv}{dt}$$

Der deles med -A på begge sider, og der byttes rundt i udtrykket:

$$dp = -\rho \frac{dx}{dt} dv$$

Det gælder at:

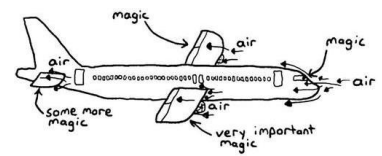
$$\frac{dx}{dt} = v$$

Derfor kan udtrykket skrives:

$$dp = -\rho \cdot v dv$$

⁵⁸ Nielsen & Fogh, side 217

⁵⁹ Baktoft, side 144



Der integreres nu på begge sider⁶⁰:

$$\int 1 dp = -\rho \cdot \int v dv$$

Dette bliver:

$$p + k = -0,5 \cdot \rho \cdot v^2 + c$$

Integrationskonstanten "k" trækkes fra på begge sider:

$$p = -0,5 \cdot \rho \cdot v^2 + c - k$$

Der laves en fælles konstant C:

$$C = c - k$$

Derfor bliver udtrykket:

$$p = -0,5 \cdot \rho \cdot v^2 + C$$

C isoleres:

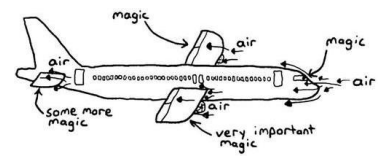
$$p + 0,5 \cdot \rho \cdot v^2 = C$$

Derfor gælder det, at udtrykket er konstant. Dog gælder, der nogle betingelser for Bernoullis princip, og de er, at det medium (luft, væske osv.) man undersøger har et ikke-kompressibelt flow og er viskositetsløs.

Med et ikke-kompressibelt flow menes der, at man regner massefylden (ρ) for konstant langs strømningslinjerne⁶¹.

⁶⁰ Baktoft, side 144

⁶¹ Baktoft, side 144



4.2: Kutta-Joukowski theorem

Det gælder at kraft pr. areal er tryk⁶²:

$$\frac{F}{A} = P$$

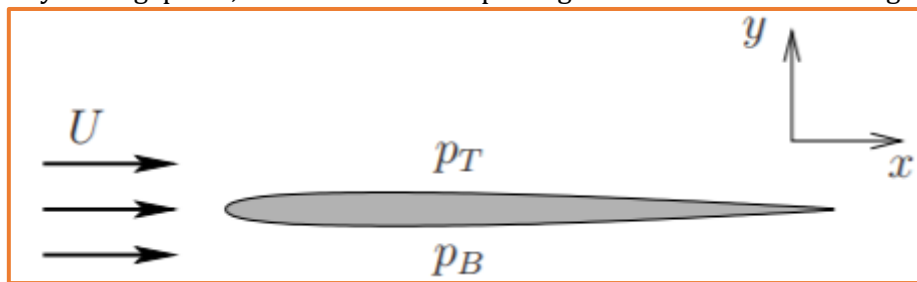
Da kraften varierer, i forhold til arealet på vingen, så kan kraften som funktion skrives⁶³:

$$P(A) = \frac{dF}{dA}$$

Kraften kan derfor findes ved:

$$F = \int P(A) dA$$

Herunder ses en tynd vingeprofil, hvor luften blæser på vingen med en konstant hastighed U :



Det antages at luften ikke kan presses sammen, og at det bagerste "stagnation point" ligger på enden af vingen. Det antages også, at luften ikke har en viskositet, og derfor opstår der ikke luftmodstand på vingen.

Så kan opdriften findes ved trykforskellen mellem det øvre tryk (P_T) og nedre tryk (P_B).

$$\frac{F_l}{l} = \int (P_T - P_B) dx$$

Grunden til at integralets mål er længden x på vingen og ikke arealet, er fordi det areal der er tale om, er overfladearealet på vingen. Altså det areal man finder på vingen (se billedet side 5).

Det antages også, at vingeprofilen som den ses på figuren ikke ændre sig langs den ægte "3. dimensionale vinge". (Man kan forestille sig, at man kan trække vingeprofilen på figuren ud ad z -aksen og få en model for vingen).

Derfor kan kraften på vingen deles med længden af den 3. dimensionale vinge (se billedet med span " s " side 5). Dette skyldes også, at hvis " l " ganges på begge sider, så fås et areal som ganges med trykket.

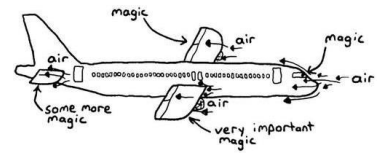
Da Bernoullis princip siger at:

$$P_T + \frac{1}{2} \cdot v_T^2 \cdot \rho = k \Leftrightarrow P_T = k - \frac{1}{2} \cdot v_T^2 \cdot \rho$$

$$P_B + \frac{1}{2} \cdot v_B^2 \cdot \rho = k \Leftrightarrow P_B = k - \frac{1}{2} \cdot v_B^2 \cdot \rho$$

⁶² Nielsen & Fogh, side 9

⁶³ <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/presar.html>



Så kan det skrives at:

$$\frac{F_l}{l} = \int \left(k - \frac{1}{2} \cdot v_T^2 \cdot \rho \right) - \left(k - \frac{1}{2} \cdot v_B^2 \cdot \rho \right) dx$$

Parentesen ophæves:

$$\frac{F_l}{l} = \int k - \frac{1}{2} \cdot v_T^2 \cdot \rho - k + \frac{1}{2} \cdot v_B^2 \cdot \rho dx$$

Udtrykket reduceres og faktoriseres og der ganges med l på begge sider:

$$F_l = l \cdot \int \frac{\rho}{2} \cdot (v_B^2 - v_T^2) dx$$

Da ρ er en konstant, så kan den sættes udenfor integralet:

$$F_l = l \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \int (v_B^2 - v_T^2) dx$$

Vha. kvadratsætningerne kan parentesen omskrives til:

$$F_l = l \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \int (v_B + v_T) \cdot (v_B - v_T) dx$$

Hvis man antager, at stigningen i dynamisk tryk over vingen er lig fald i dynamisk tryk under vingen, så kan det skrives at:

$$u_B + u_T = 2U$$

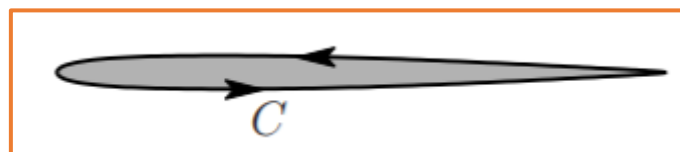
Så bliver:

$$F_l = l \cdot 2 \cdot U \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \int (v_B - v_T) dx$$

Udtrykket reduceres:

$$F_l = l \cdot U \cdot \rho \cdot \int (v_B - v_T) dx$$

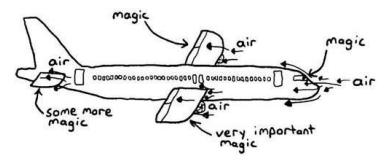
Nu laves en kurve "C" rundt om vingeprofilen:



Bemærk, at integrationsretningen er taget imod luftstrømningen på oversiden af vingen, da arealet, skal ligge til venstre for pilespidsen.

Man kan nu finde cirkulationen for luften i kurven ved:

$$\Gamma = - \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s}$$



Ved at integrere i modsat retning (i dette tilfælde) så bliver:

$$\Gamma = \oint_{-C} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Derfor kan det skrives at:

$$F_l = l \cdot U \cdot \rho \cdot \oint_{-C} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

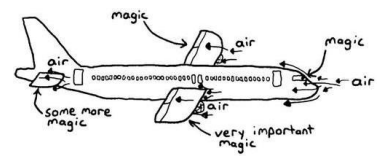
Derfor ses det at:

$$F_l = l \cdot U \cdot \rho \cdot \Gamma \Leftrightarrow \frac{F_l}{l} = U \cdot \rho \cdot \Gamma$$

■⁶⁴

Så det vil sige, at løftet langs vingefanget "l" er produktet af luftens hastighed, densiteten af luften og cirkulationen om vingeprofilen.

⁶⁴ http://www1.maths.leeds.ac.uk/~kersale/2620/Notes/chapter_8.pdf

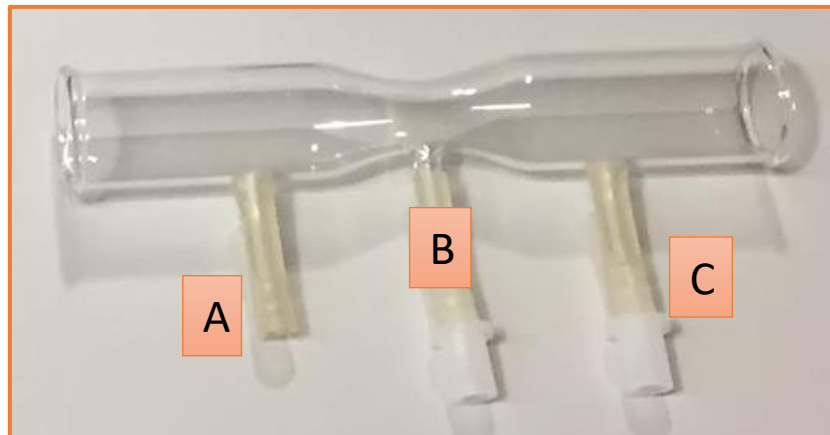


5: Databehandling af de relevante forsøg

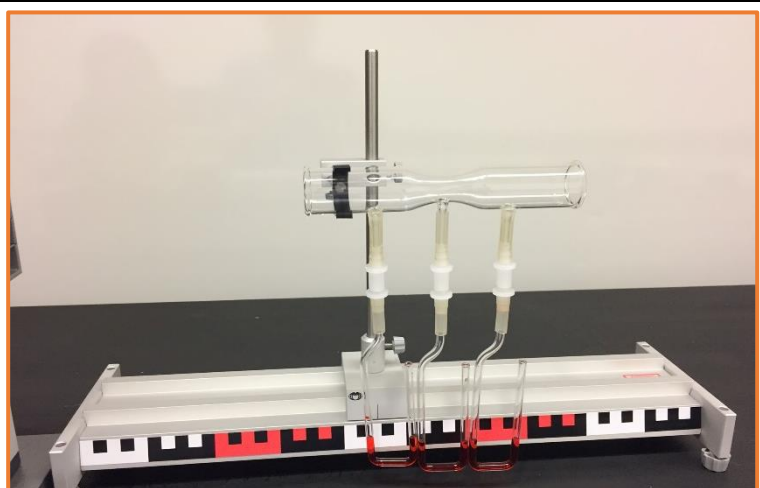
5.1: Bernoullis princip efterprøvet ved venturirør

I undersøgelsen af Bernoullis princip er der lavet et forsøg med et venturirør⁶⁵.

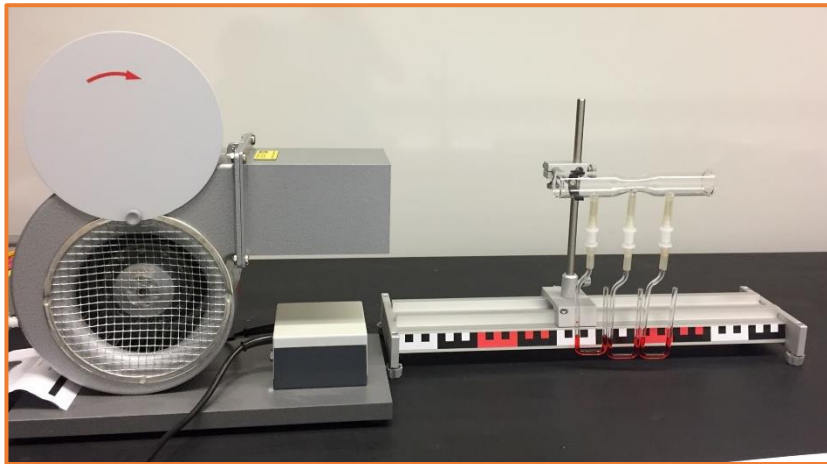
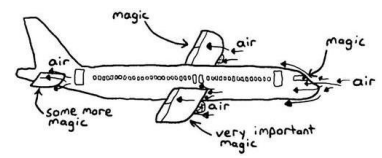
Et venturirør er et symmetrisk rør, hvor diameteren ændrer sig. I starten af røret er diameteren stor, i midten bliver diameteren mindre, og til sidst er diameteren lige så stor som til at starte med. Dette kan ses i følgende illustration:



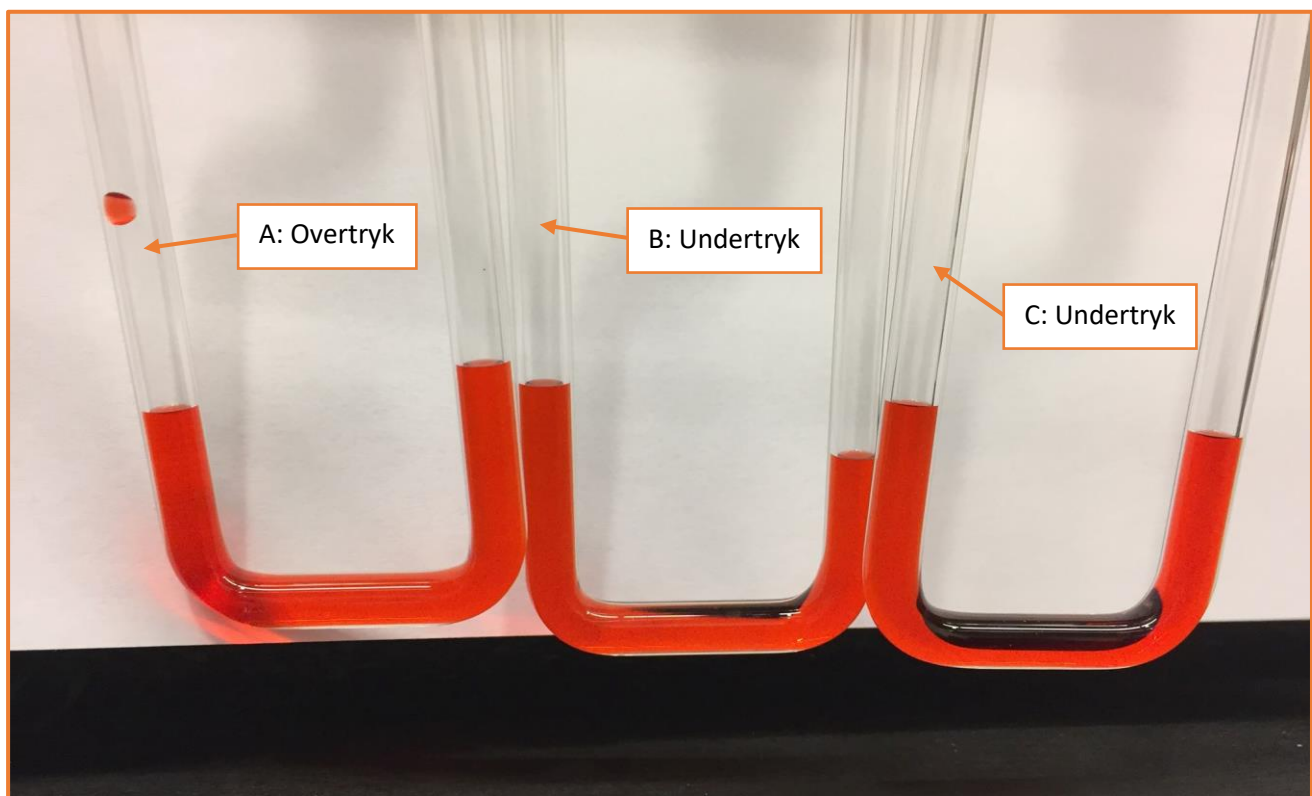
I eksperimentet måles trykket ved henholdsvis "A", "B" og "C". Dette gøres vha. nogle "U-rør" som fungerer som manometere.



⁶⁵ Læs mere om forsøget i bilag 2



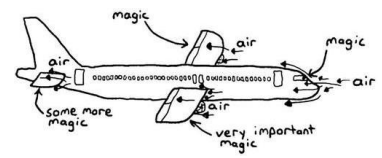
I eksperimentet kunne man observere, at når luftkanonen tændes, så bliver trykfordelingen i venturirøret:



Da højdeforskellen i venturirøret er minimalt, så sættes denne til 0:

$$P_t = P_s + 0,5 \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot 0m \Leftrightarrow P_t = P_s + 0,5 \cdot \rho \cdot v^2$$

Da Bernoullis princip siger, at det totale tryk skal være konstant, så må det gælde, at det totale tryk ved "A" er det samme som ved "B" og "C".



Der kigges på det totale tryk ved punkt "A" og "B":

$$P_{t,A} = P_{t,B}$$

Derfor må det gælde at:

$$P_{s,A} + 0,5\rho v_A^2 = P_{s,B} + 0,5\rho v_B^2$$

Det manometerne egentligt giver udslag på, er det statiske tryk ved det givne punkt i forhold til forsøgslokalets statiske tryk, og heraf kan det ses at:

$$P_{s,A} > P_{s,B}$$

Da ρ er konstant, må det betyde at:

$$v_A < v_B$$

Dette skyldes, at når det statiske tryk falder, så skal det dynamiske tryk stige.

Dog er det ikke korrekt at anvende Bernoullis princip i denne sammenhæng, da det ses, at der er et overtryk ved "A". Dette må betyde at:

$$P_{s,A} > P_{s,rummet}$$

Da luften i rummet (undtaget i luftkanonens skydebane) ikke bevæger sig, kan det skrives at:

$$P_t = P_{s,rummet} + 0,5 \cdot \rho \cdot \left(0 \frac{m}{s}\right)^2 \Leftrightarrow P_t = P_{s,rummet}$$

Derfor kan det ses at:

$$P_t \neq P_{s,A} + 0,5 \cdot \rho \cdot v_A^2$$

For at ligningen kan løses, så skal der arbejdes med en negativ dynamisk energi, hvilket ikke er muligt. En af grundene til, at der opstår problemer i mit forsøg er, at luftstrømningen kan være et såkaldt "kompressibelt flow".

Dette betyder, at luften presses sammen ved punktet "A", hvilket resulterer i en stigning i det statiske tryk.

For at kunne anvende Bernoullis princip i dette forsøg, skal luften ikke kunne presses sammen. Herved vil man faktisk kunne forvente et undertryk ved punkt "A", da luften her også har et dynamisk tryk.

Nu anvendes Bernoullis princip til at beskrive luftstrømningen fra punkt "B" til "C". Heraf må det gælde at:

$$P_{s,B} + 0,5\rho \cdot v_B^2 = P_{s,C} + 0,5\rho \cdot v_C^2$$

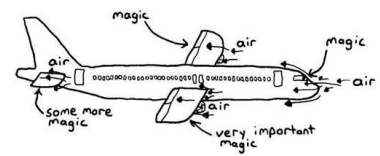
Det ses, at:

$$P_{s,B} < P_{s,C}$$

For at ligningen kan gå op, så må det gælde at:

$$v_B^2 > v_C^2$$

Det betyder, at når diameteren igen forøges, så vil hastigheden af luftstrømningen falde.



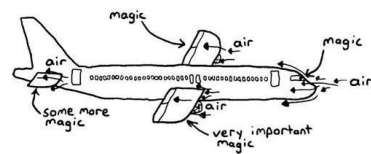
5.1.1: Fejlkilder

Luften kan opføre sig som om det var kompressibel. Densiteten behandles som om den er konstant, men den afhænger faktisk af trykket.

Flowet igennem venturirøret kunne være turbulent og klæbe til indersiden af venturirøret. Dette kunne muligvis give en forskel i tryk.

For at opnå et ikke-kompressibelt flow kunne man have sendt fx vand igennem venturi-røret⁶⁶. Vand er en væske (ved stuetemperatur), som vil opføre sig på samme måde som luften. Bernoullis princip kan også anvendes for væsker.

⁶⁶ <https://water.usgs.gov/edu/compressibility.html>

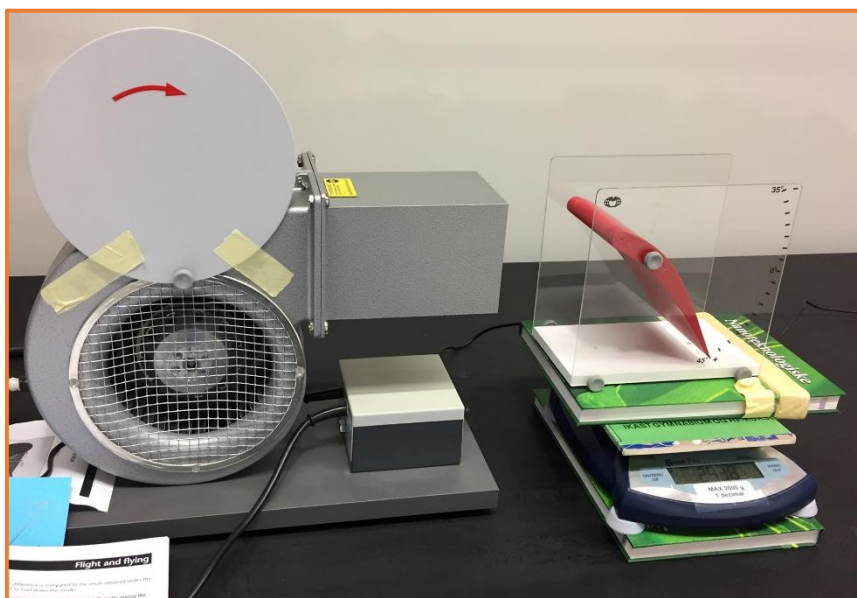


5.2: Opdriften på en vinge

I dette forsøg blev det undersøgt, hvordan luftens strømning omkring en flyvinge påvirker dens løfteevne. Den vinge der blev undersøgt, var en cambered vinge, og derfor vil man kunne forvente en opdrift ved angrebsvinklen (" α ") på 0° .

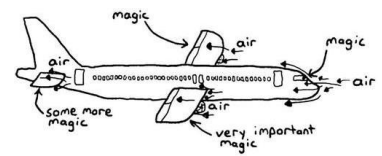
I eksperimentet blev løftet undersøgt ved forskellige angrebsvinkler samt en lufthastighed på henholdsvis 11 m/s og 8 m/s.

Den måde forsøget blev udført på, var ved at opmåle vægten af en vingemodel mens der blæste luft ind på vingen. Massen af vingen blev opmålt før og efter der blev pustet luft på vingen⁶⁷.



I følgende tabel kan man aflæse de opmålte og behandlede værdier for lufthastigheden med 11 m/s:

⁶⁷ Læs mere om forsøget i bilag 3.



Fuld blæs					
α (°)	$m_{\text{før}}$ (g)	m_{efter} (g)	Δm (g)	$F_{\text{løft}}$ (N)	c_L
-35	293,9	320,0	26,1	-0,256	-0,220
-30	293,9	312,5	18,6	-0,183	-0,157
-25	293,9	303,7	9,8	-0,096	-0,083
-20	293,9	294,7	0,8	-0,008	-0,007
-15	293,9	305,8	11,9	-0,117	-0,100
-10	293,9	291,6	-2,3	0,023	0,019
-5	293,9	277,6	-16,3	0,160	0,137
0	293,9	265,3	-28,6	0,281	0,241
5	293,8	253,4	-40,4	0,397	0,340
10	293,9	245,6	-48,3	0,474	0,407
15	293,8	246,4	-47,4	0,465	0,399
20	293,9	253,0	-40,9	0,402	0,345
25	294,0	262,4	-31,6	0,310	0,266
30	293,9	267,6	-26,3	0,258	0,222
35	293,9	268,5	-25,4	0,249	0,214
40	293,9	304,4	10,5	-0,103	-0,088
45	293,9	306,3	12,4	-0,122	-0,104

I tabellen ovenfor kan man aflæse angrebsvinklen (" α "). Det er denne værdi de andre værdier sammenlignes med.

I $m_{\text{før}}$ kolonnen kan man aflæse massen af vinge samt vogn, før der tændes for blæseren.

I m_{efter} kolonnen kan man aflæse massen af vingen og vognen, efter der er tændt for blæseren.

Man kan i Δm kolonnen aflæse ændringen i massen efter blæseren tændes. Det er opdriften på vingen der gør, at vægten måler mere eller mindre, og ikke massen der ændres. Nogle steder kan man aflæse at masseændringen bliver positiv, dette er fordi vingen danner negativ opdrift. Ved negativ opdrift bliver der dannet en nedadrettet kraft (parallel med tyngdekraften). Masse ændringen findes ved: $\Delta m = (m_{\text{efter}} - m_{\text{før}})$.

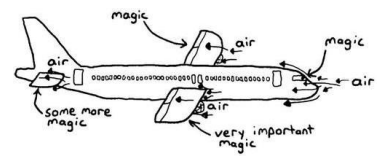
Man kan i $F_{\text{løft}}$ kolonnen aflæse opdriften af vingen. Ved de negative løft værdier, er der en modsatrettet opdrift, som presser vingen nedad. Der er også her, at masseforskellen bliver negativ. Opdriften findes ved formlen:

$$f_{\text{løft}} = -\frac{\Delta m}{1000} \cdot 9,82 \frac{N}{kg}$$

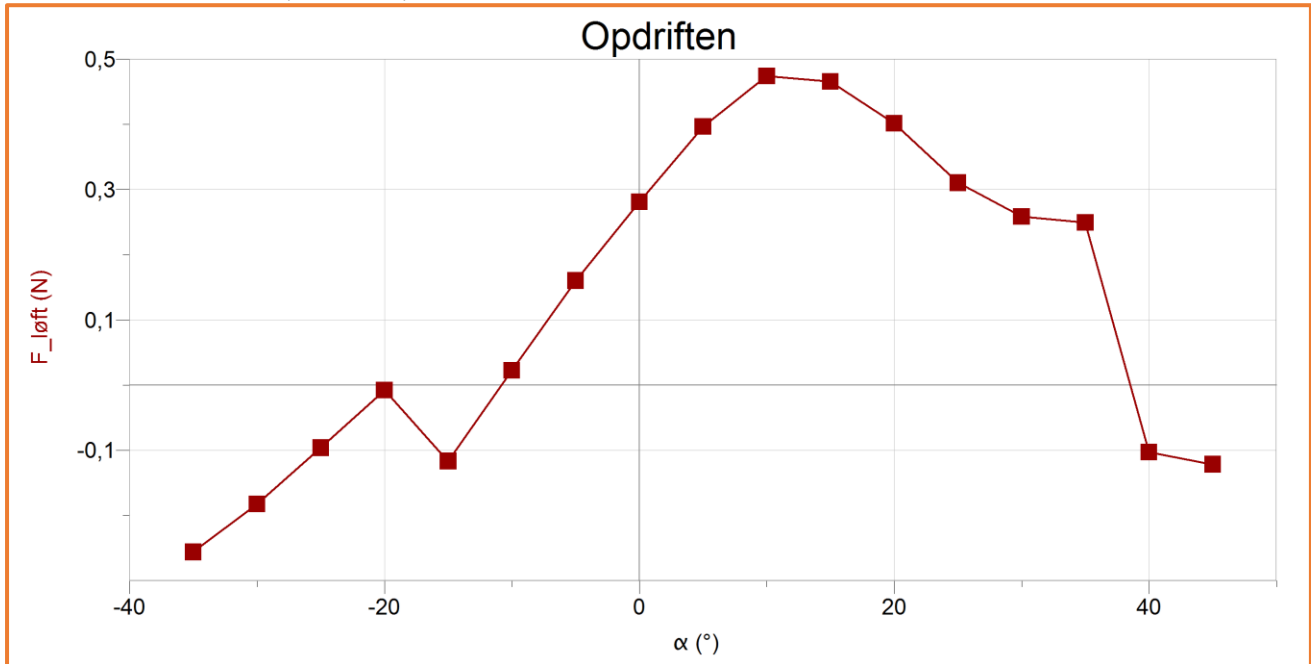
I den sidste kolonne kan man aflæse løftkoefficienten for vingen. Denne bliver også negativ, når vingen danner det nedadgående pres⁶⁸.

$$F_l = \frac{1}{2} \cdot c_l \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

⁶⁸ Vingens areal er (0,160m·0,100m=0,016m²)



Af disse data laves en $(\alpha, F_{\text{løft}})$ -graf, som ses nedenfor:

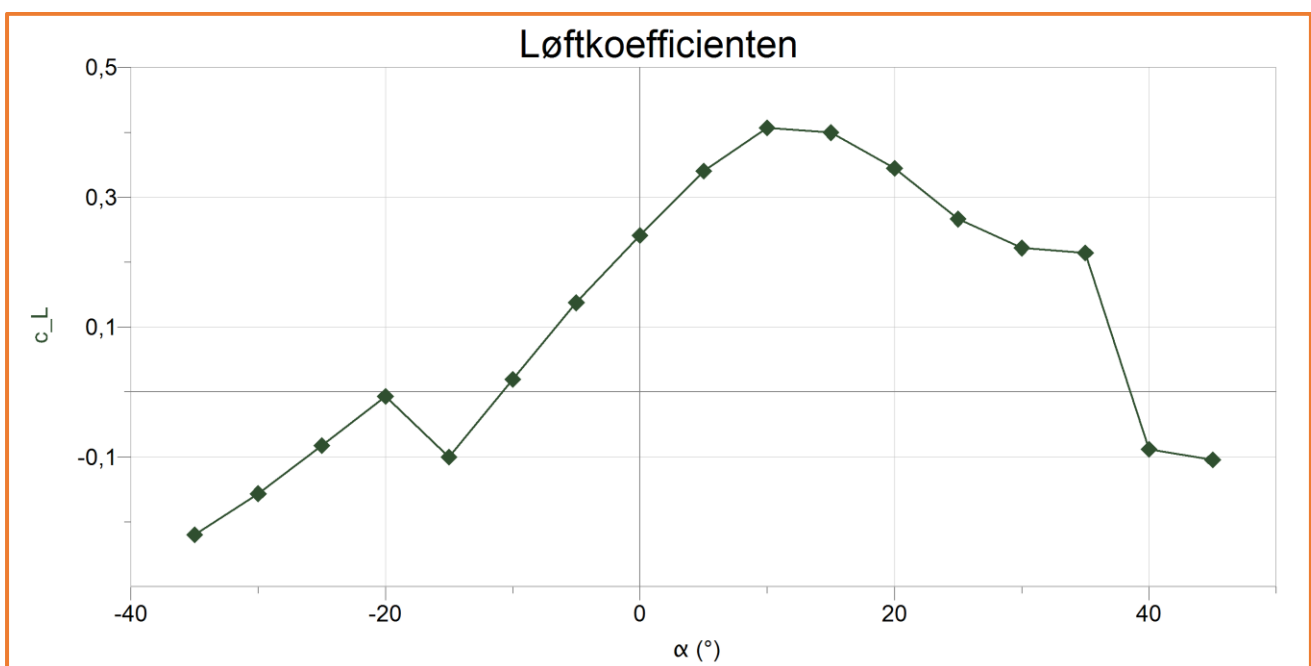


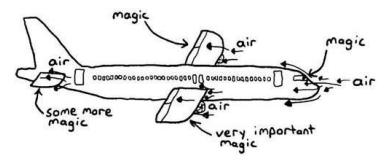
I ovenstående graf kan man aflæse angrebsvinklen " α " udad 1. akse og opdriften opad 2. akse. Man skal bemærke, at opdriften ved $\alpha = -15^\circ$, ligger lavere end forventet. Punktet kunne være en outlayor, men senere ses det, at punktet faktisk bliver positiv, ved en lavere luftfartshastighed.

I grafen ser man også, at det passer, at nogle cambered vinger danner opdrift ved en angrebsvinkel på 0° .

Af grafen kan man se, at vingens opdrift har et maksimum ved 10° og denne ligger på 0,474 N. Hvis man forøger angrebsvinklen efter dette punkt, så ses det, at opdriften bliver lavere, indtil vingen staller, og den mister alt bærevne ved $35-40^\circ$.

Nedenfor ses en (α, c_L) -graf:



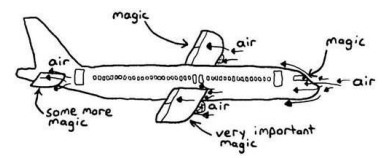


I ovenstående graf kan man aflæse angrebsvinklen " α " udad 1. aksen og løftkoefficienten " c_L " opad 2. aksen. Grafen følger den samme udvikling som $(\alpha, F_{\text{løft}})$ -graf. Det ses også, at der er tale om en meget lav værdi ved -15° s angrebsvinkel. Man ser også, at vingen har den største løftkoefficient ved angrebsvinklen på 10° .

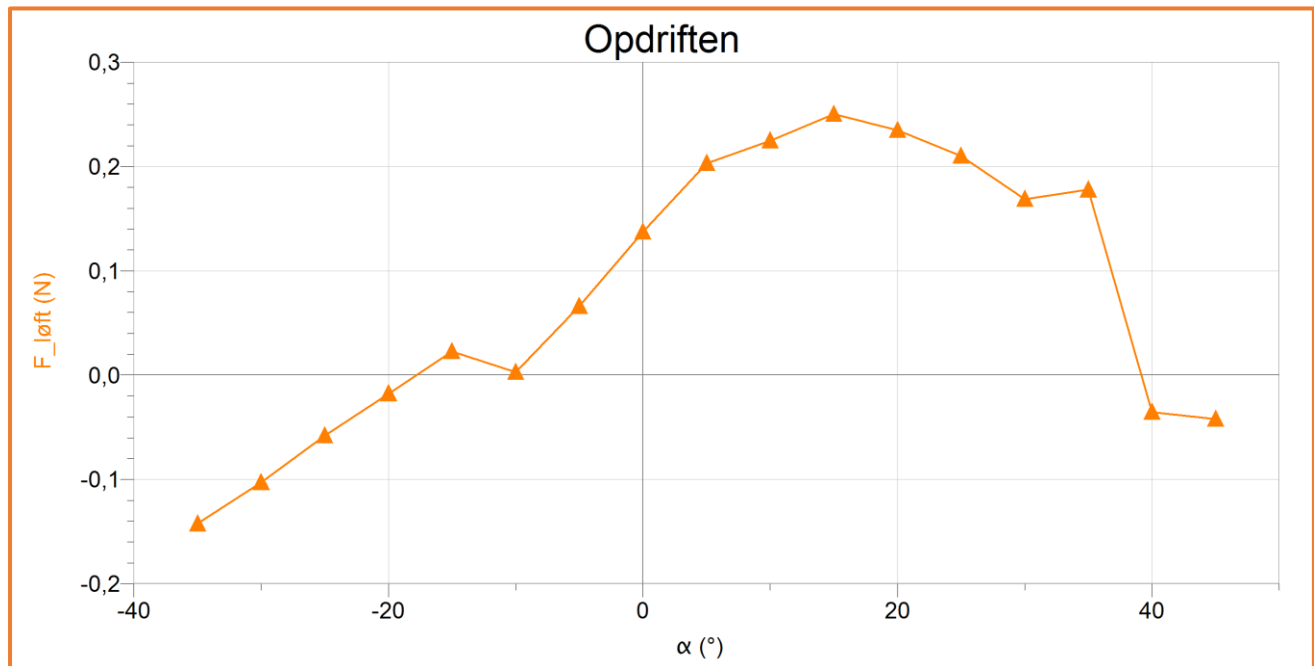
I tabellen nedenfor kan man aflæse opsamlede og databehandlede værdier for vingen med en lufthastighed på 8 m/s.

Halv blæs					
α (°)	$m_{\text{før}}$ (g)	m_{efter} (g)	Δm (g)	$F_{\text{løft}}$ (N)	c_L
-35	293,8	308,3	14,5	-0,142	-0,231
-30	293,9	304,4	10,5	-0,103	-0,167
-25	293,9	299,8	5,9	-0,058	-0,094
-20	293,9	295,7	1,8	-0,018	-0,029
-15	293,9	291,6	-2,3	0,023	0,037
-10	293,9	293,6	-0,3	0,003	0,005
-5	293,8	287,1	-6,7	0,066	0,107
0	293,8	279,8	-14,0	0,137	0,223
5	293,9	273,2	-20,7	0,203	0,330
10	293,9	271	-22,9	0,225	0,365
15	293,8	268,3	-25,5	0,250	0,406
20	293,9	270	-23,9	0,235	0,381
25	293,9	272,5	-21,4	0,210	0,341
30	293,9	276,7	-17,2	0,169	0,274
35	293,8	275,7	-18,1	0,178	0,288
40	293,8	297,4	3,6	-0,035	-0,057
45	293,8	298,1	4,3	-0,042	-0,068

Man ser i første kolonne angrebsvinklen (α), i de næste to kolonner ses henholdsvis massen før og massen efter luftkanonen tændes. Så ses en masseforskelskolonne, som er fundet ved $(m_{\text{efter}} - m_{\text{før}})$. Opdriftskolonnen er fundet ved $(-\Delta m \cdot g)$ og angiver opdriften på vingen. Sidst ses løftkoefficientkolonnen, denne er fundet ved formlen: $(2 \cdot F_{\text{løft}}) / (1,2041 \cdot 0,16 \cdot 0,1 \cdot (8)^2)$.

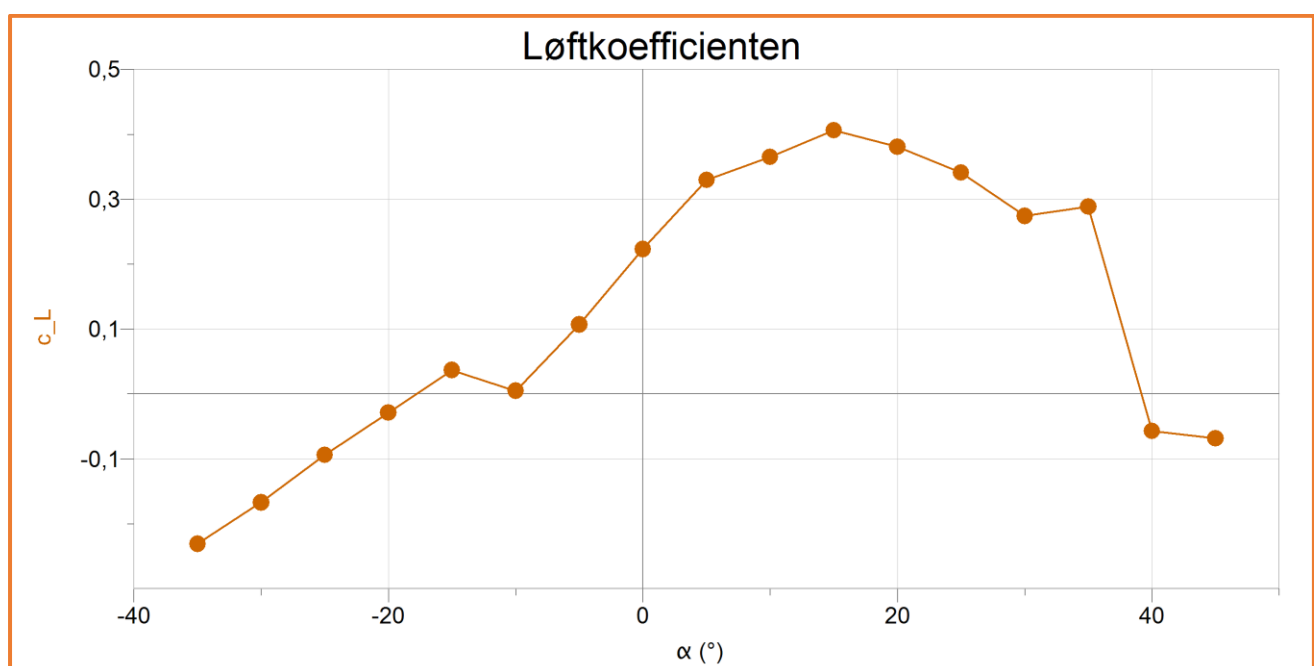


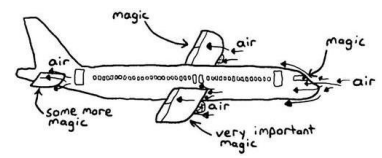
Der er lavet to grafer, henholdsvis en $(\alpha, F_{\text{løft}})$ - og en (α, c_L) -graf:



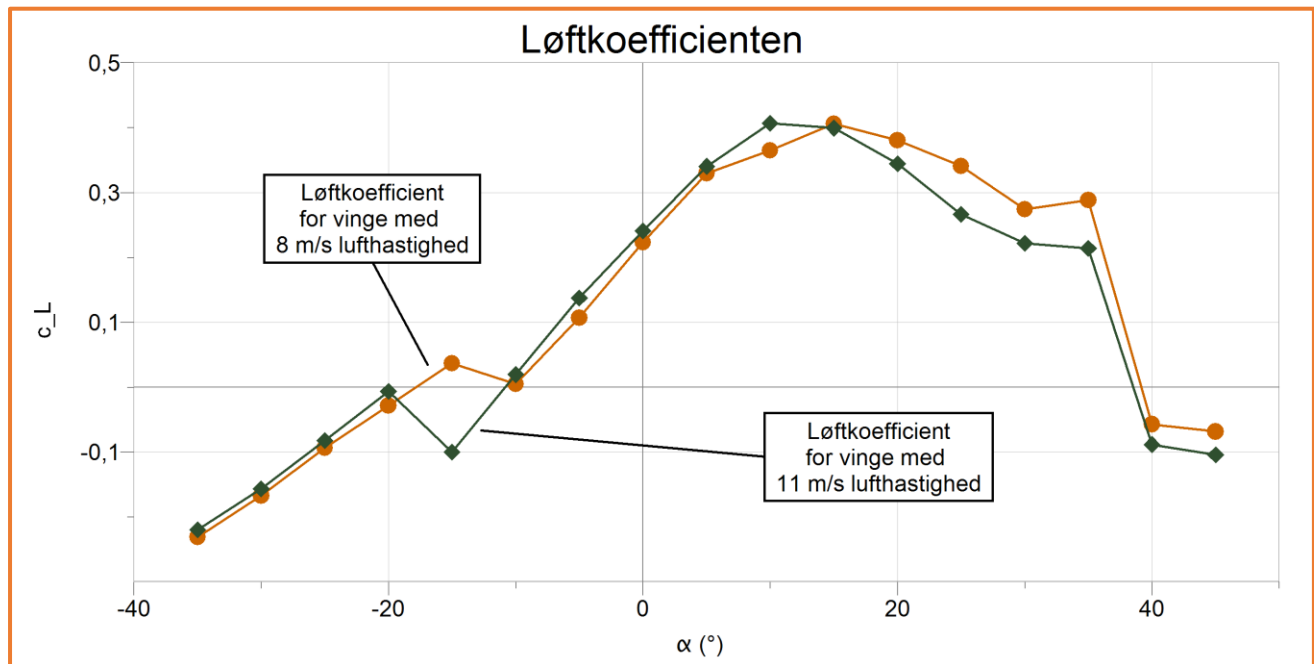
I ovenstående graf kan man aflæse angrebsvinklen " α " ud ad 1. akse og opdriften " $F_{\text{løft}}$ " op ad 2. akse.

Man ser, at denne tilpasning har samme tendens som løftet for vingen ved en lufthastighed på 11 m/s. Optimum bliver dog i dette tilfælde ved en angrebsvinkel på 15° . Optimumsværdien bliver 0,250 N. Bemærker man punktet ved en angrebsvinkel på -15° ser man, at den nu er blevet positiv. Så vingeprofilen opfører sig anderledes ved $\alpha = -15^\circ$ når lufthastigheden forøges eller formindskes. Man kan også se, at vingen mister alt bæreevne ved en angrebsvinkel på 35° - 40° , som er det samme for vingen med lufthastigheden på 11 m/s.





I ovenstående graf kan man aflæse angrebsvinklen ud ad 1. akse og løftkoefficienten opad 2. akse. Denne kurve minder meget om kurven for løft. Optimum ligger også ved de 15°. For at sammenligne løftkoefficienterne i de to forsøg så plottes de ind på samme koordinatsystem:



Her ses det, at løftkoefficienterne følges meget pænt ad i de to forsøg. Det ses, at vingen opfører sig mærkeligt ved en angrebsvinkel på -15°. Det ses også, at når farten forøges, så flyttes optimum ned i en lavere angrebsvinkel.

5.2.1: Fejlkilder

Da vingen blev taget af vægten (for at indstille angrebsvinklen) kunne den være sat tilbage, så den stod lidt skæv på luftretningen.

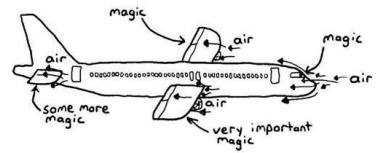
Vægten ændrede sig over tiden, da der dannes turbulens fra vingen. Turbulensen er svær at styre, og er slet ikke konstant. Denne kunne påvirke opdriften af vingen i forsøget.

5.3: Luftmodstanden på vingen

I dette forsøg blev det undersøgt hvordan luften påvirker vingen med en kraft rettet i samme retning som vinden.

Dataene indtastet i Logger Pro⁶⁹.

⁶⁹ Læs mere om forsøget i bilag 7



De opmålte og databehandlede værdier i Logger Pro ses i tabellen:

α (°)	F_drag (N)	c_D	Overfladeareal (cm ²)	c_w
-35	0,12	0,10	100	0,164
-30	0,10	0,09	88	0,156
-25	0,09	0,07	76	0,155
-20	0,06	0,05	62	0,133
-15	0,05	0,04	49	0,141
-10	0,04	0,03	40	0,136
-5	0,03	0,03	34	0,121
0	0,02	0,02	29	0,0960
5	0,03	0,02	34	0,102
10	0,03	0,03	45	0,0921
15	0,10	0,09	56	0,245
20	0,17	0,15	68	0,356
25	0,36	0,31	79	0,637
30	0,45	0,39	91	0,682
35	0,55	0,47	102	0,742
40	0,63	0,54	113	0,760
45	0,72	0,62	123	0,809

I ovenstående tabel kan man aflæse de forskellige angrebsvinkler " α ", som vingen var indstillet til. Man kan herefter aflæse luftmodstanden som blev opsamlet. Dernæst er luftmodstandskoefficienten fundet " c_D ". Dette er gjort med formlen:

$$c_d = \frac{2 \cdot F_d}{\rho \cdot A \cdot v^2}$$

Det teoretiske overfladeareal (set forfra på vingen) er også fundet. Senere beskrives det, hvordan denne findes.

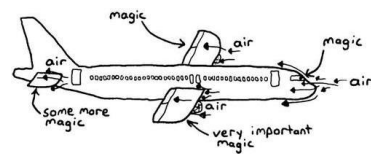
I tabellen er den dimensionsløse konstant: " c_w " fundet. Denne fortæller hvor "aerodynamisk" det objekt man tester er.

Denne er blevet fundet vha. formlen for luftmodstand:

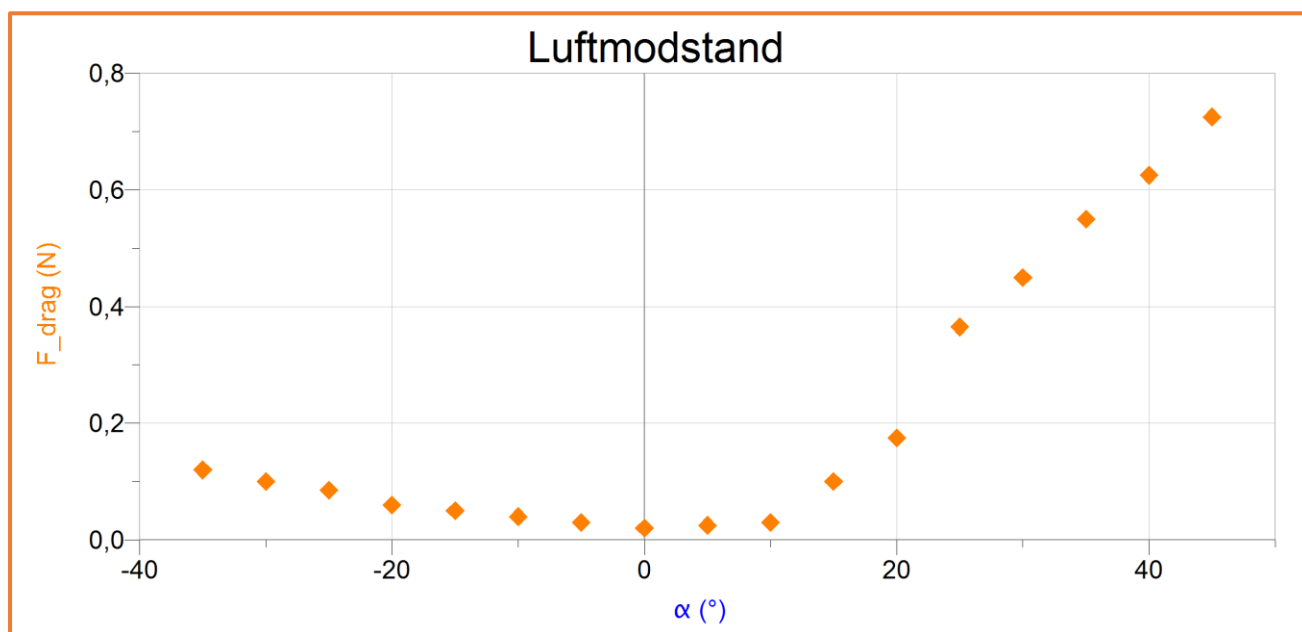
$$F_d = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot c_w \Leftrightarrow c_w = \frac{2 \cdot F_d}{\rho \cdot v^2 \cdot A}$$

Hvor A er tværsnitsarealet vinkelret på luftretningen, og " c_w " er en faktor, der tager højde for formen af arealet⁷⁰.

⁷⁰ <http://denstoredanske.dk/Bil, b%C3%A5d, fly m.m./Biler/Teknik/luftmodstand>

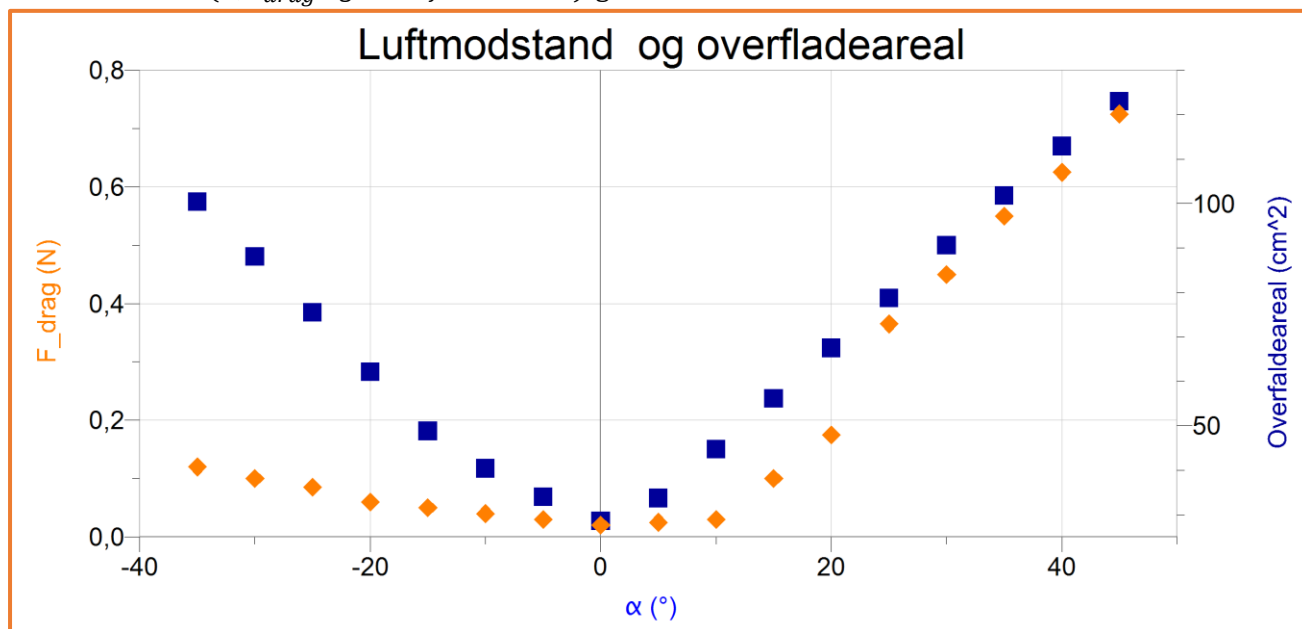


Af de optagede data laves en (α, F_{drag}) -graf. Denne ses nedenfor:

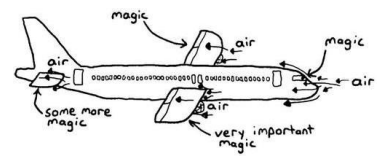


I ovenstående graf kan man aflæse angrebsvinklen (" α ") udad 1. akse og luftmodstanden (F_{drag}) opad 2. akse. Man kan se, at luftmodstanden er mindst ved en angrebsvinkel på 0° . Hvis man forøger angrebsvinklen, så stiger luftmodstanden også. Hvis man mindsker angrebsvinklen efter 0° , så øges luftmodstanden også.

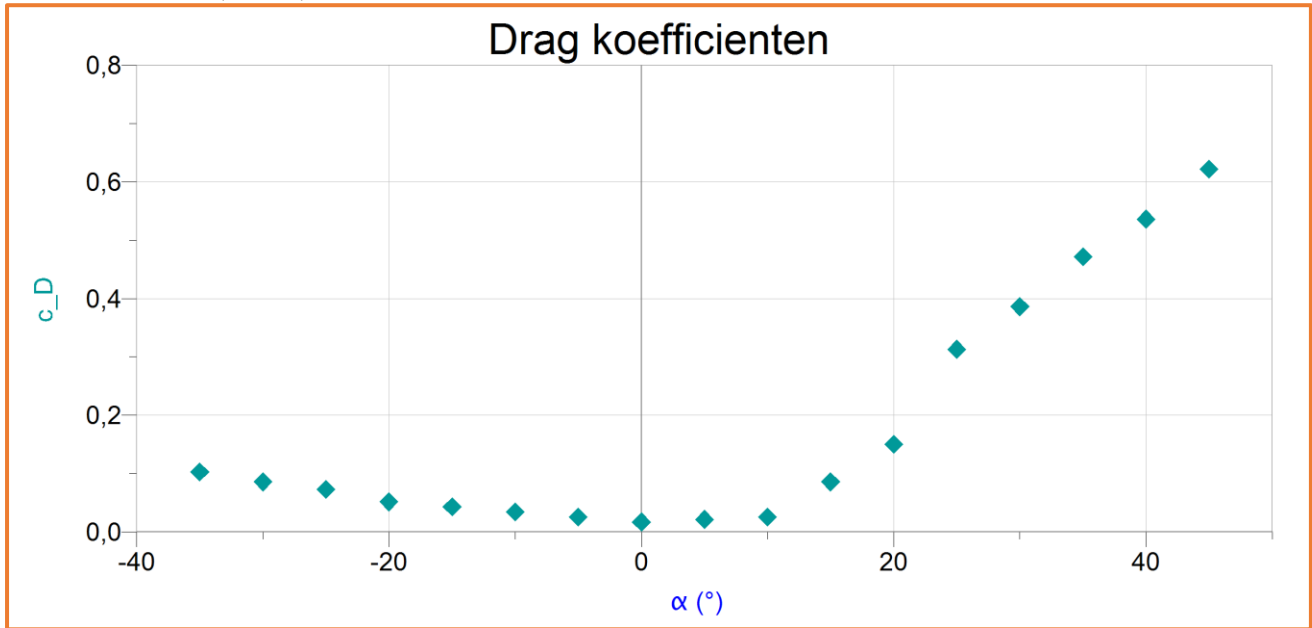
Der laves nu en $(\alpha, F_{drag}$ og Overfaldeareal)-graf



I ovenstående graf kan det ses, at overfaldeareal værdierne ved de forskellige angrebsvinkler har den samme tendens som luftmodstanden, specielt når angrebsvinklen forøges fra 0° til 45° . Dog ser det ud til, at luftmodstanden ikke følger overfaldearealet så pænt, når angrebsvinklen går fra 0° til -35° .

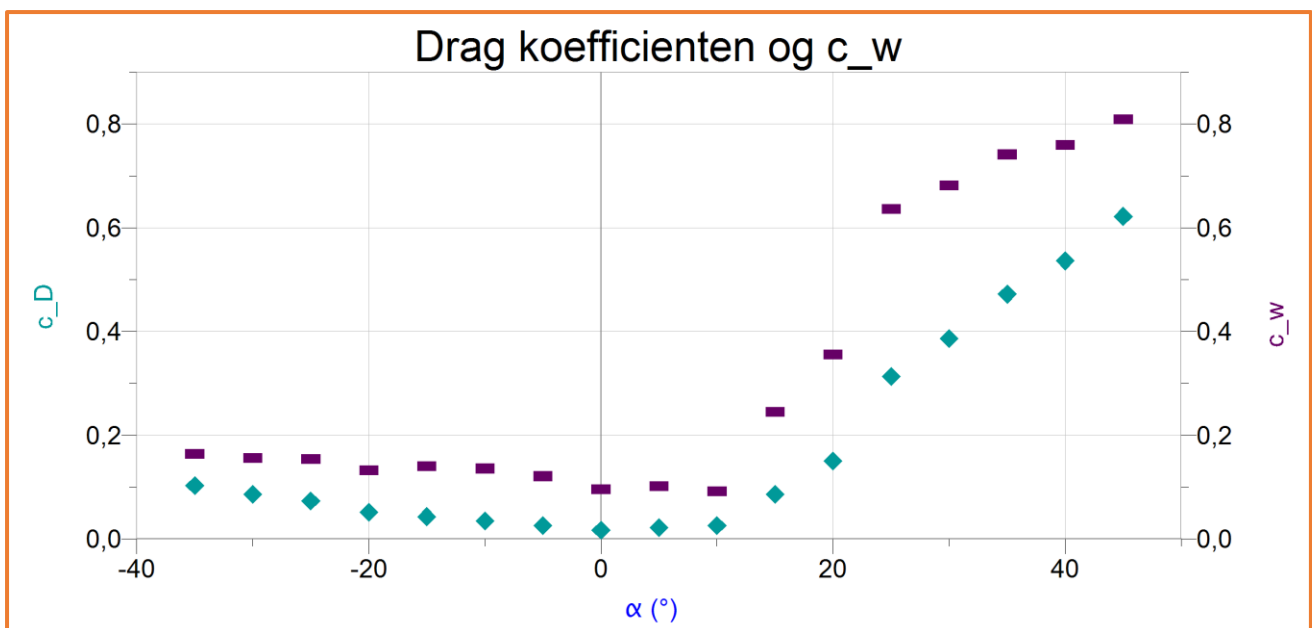


Nedenfor ses en (α, c_D) -graf:

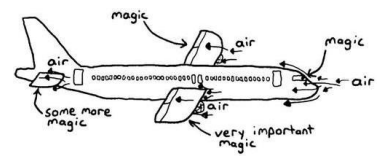


Man kan aflæse angrebsvinklen udad 1. akse og luftmodstandskoefficienten opad 2. akse. Man ser, at modstandskoefficienten stiger, når angrebsvinklen kommer længere fra 0° . Dette er både i positiv og negativ retning.

I grafen nedenfor plottes den dimensionsløse konstant c_w ind i koordinatsystemet:



I ovenstående graf kan man se, at dataene for c_w er plottet ind på (α, c_D) -grafen. Man kan se, at punkterne følges ad. Dog er c_w større end luftmodstandskoefficienten ved alle angrebsvinkler. Man skal bemærke, at vingen er mest aerodynamisk ved 10° . Det er også denne vinkel der giver den største opdrift. Grunden til, at vingen bliver mest aerodynamisk her er, at luftmodstanden er lav, mens overfladearealet er højt.

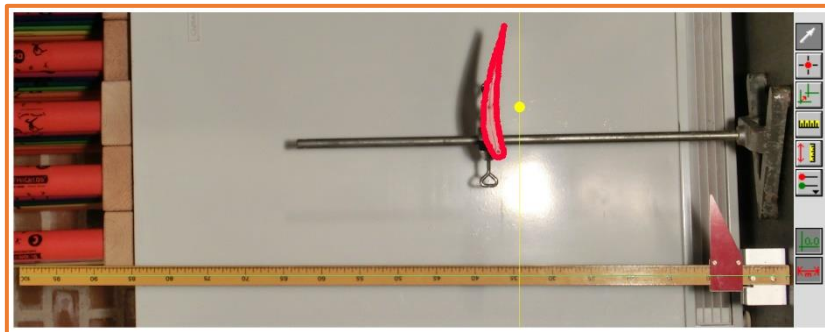


5.3.1: Fejlkilder

Turbulensen kunne variere, da denne størrelse er svær at styre, og har en effekt på luftmodstanden. Vingen var sat op på en vogn, der var sat op på en skinne, gnidningsfriktionen på hjulene kunne måske have stoppet vognen ved en for lav værdi.

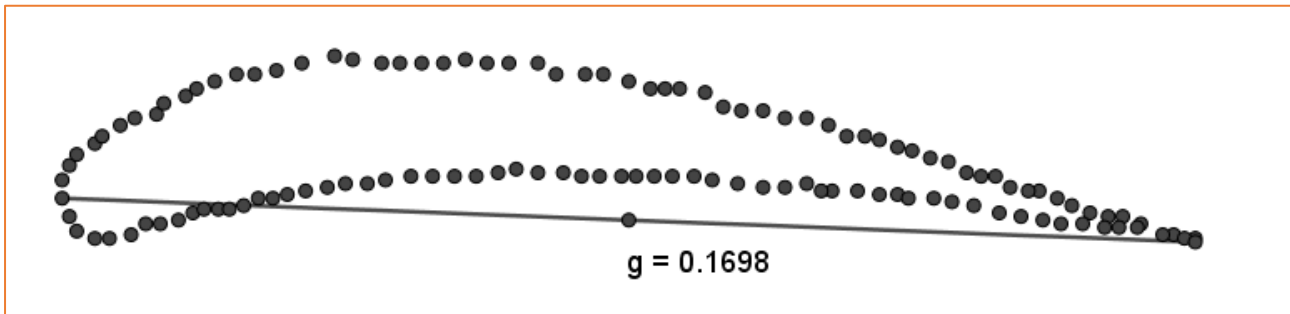
5.3.2: Teoretisk overfladeareal

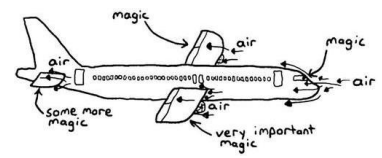
Til at starte med tages et billede af vingen, sammen med en målestok med bestemt længde. Denne indsættes i Logger Pro, hvor der laves fotoanalyse:



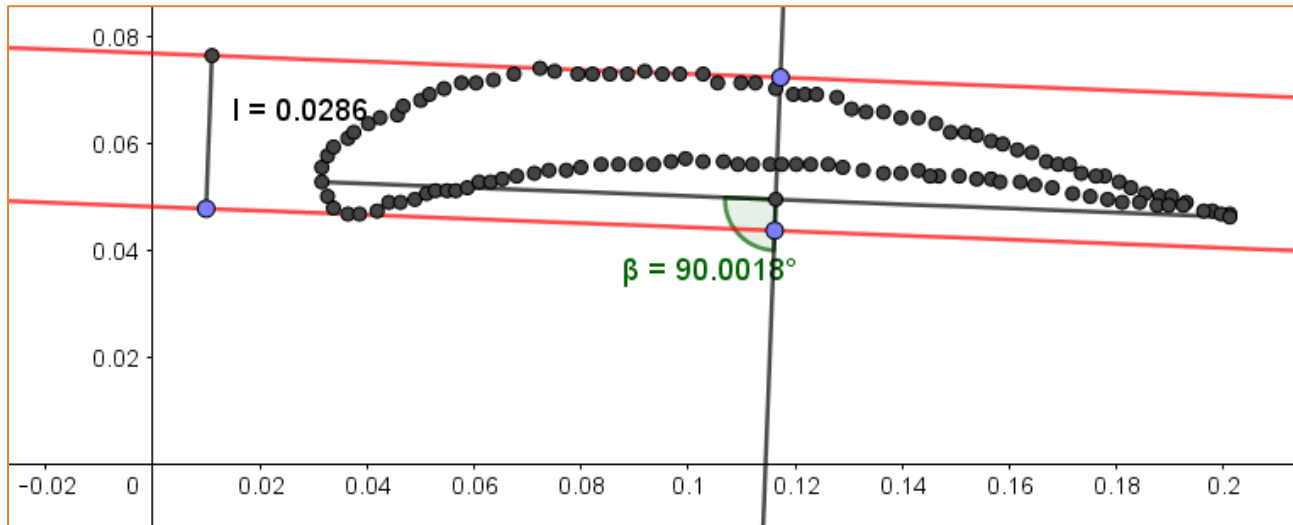
I Logger Pro defineres længden af målebrættet til 1,00m. Der indsættes også et koordinatsystem. Da billede er drejet 90°, så sættes koordinatsystemet, så x-aksen går opad og y-aksen henad. Herefter indsættes punkterne langs yderkanten af vingeprofilen.

Dataene fra Logger Pro tabellen eksporteres til i GeoGebra. I GeoGebra findes chord-linjen:





Herefter laves følgende opsætning:



Hvor de to røde linjer symboliserer den vind, der rammer vingen. I ovenstående model afhænger angrebsvinklen af vinklen " β " på følgende måde:

$$\alpha = \beta - 90^\circ$$

Så man kan ændre vinklen på " β " for at få en anden angrebsvinkel på vingen. Arealet af vingen set forfra findes som arealet af en firkant⁷¹. Arealet bliver større, når angrebsvinklen forøges eller formindskes efter 0° 's angrebsvinkel.

Hvor højden af firkanten er længden " l " og bredden er 0,100m, som blev fundet på vingen.

Den normale luftmodstandsfunktion ser således ud:

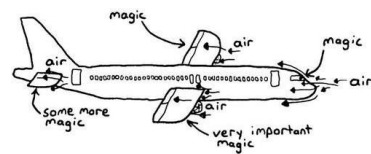
$$F_D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \cdot c_w$$

Hvor A er tværsnitsarealet vinkelret til luftretningen, og " c_w " er en faktor, der tager højde for formen af arealet⁷².

Bemærk, at når punkterne indtastes, så er der en afvigelse. Den vurderes til $\pm 4mm$.

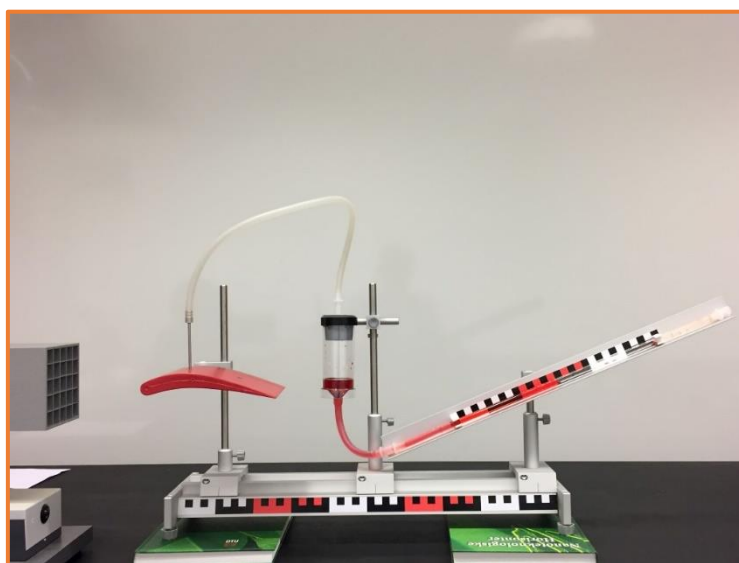
⁷¹ Se bilag 6 for at se de udregnede værdier.

⁷² <http://denstoredanske.dk/Bil, b%C3%A5d, fly m.m./Biler/Teknik/luftmodstand>



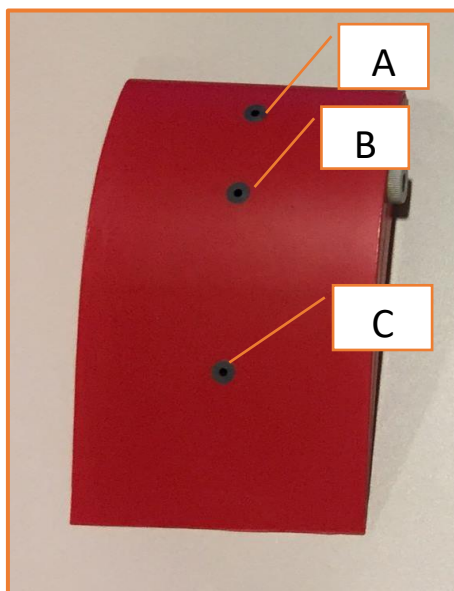
5.4: Trykfordelingen på vingeprofilen

Følgende opstilling er lavet til at undersøge trykket på vingen⁷³:



Manometeret indikerer via væskehøjden på måleren, om der er undertryk eller overtryk. Ved ingen vind kan det statiske tryk i lokalet aflæses til 15,0 cm. Dette er referenceværdien.

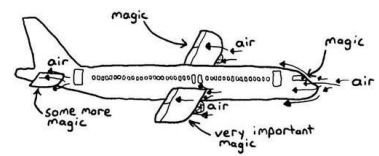
I forsøget anvendes vingeprofilen:



I forsøget kan man måle trykket på oversiden og undersiden af vingen via de tre huller.

I forsøget ændres angrebsvinklen også, og det undersøges hvad der sker med trykfordelingen, når vingen kommer i forskellige vinkler i forhold til vinden.

⁷³ Læs mere om forsøget i bilag 4.



I forsøget blev angrebsvinklerne brugt:

$$\alpha = 0^\circ, \alpha = -15^\circ, \alpha = 15^\circ \text{ og } \alpha = 25^\circ$$

Forsøgsdataene kan ses i tabellen:

	Oversiden af vingen			Undersiden af vingen		
	A (cm)	B (cm)	C (cm)	A (cm)	B (cm)	C (cm)
$\alpha = 0^\circ$	14,5	14,0	14,5	14,0	14,5	16,0
$\alpha = 15^\circ$	14,0	14,0	14,5	14,5	16,0	15,5
$\alpha = -15^\circ$	16,0	14,2	15,0	14,2	14,2	15,5
$\alpha = 25^\circ$	13,6	14,0	14,6	15,1	15,5	15,4

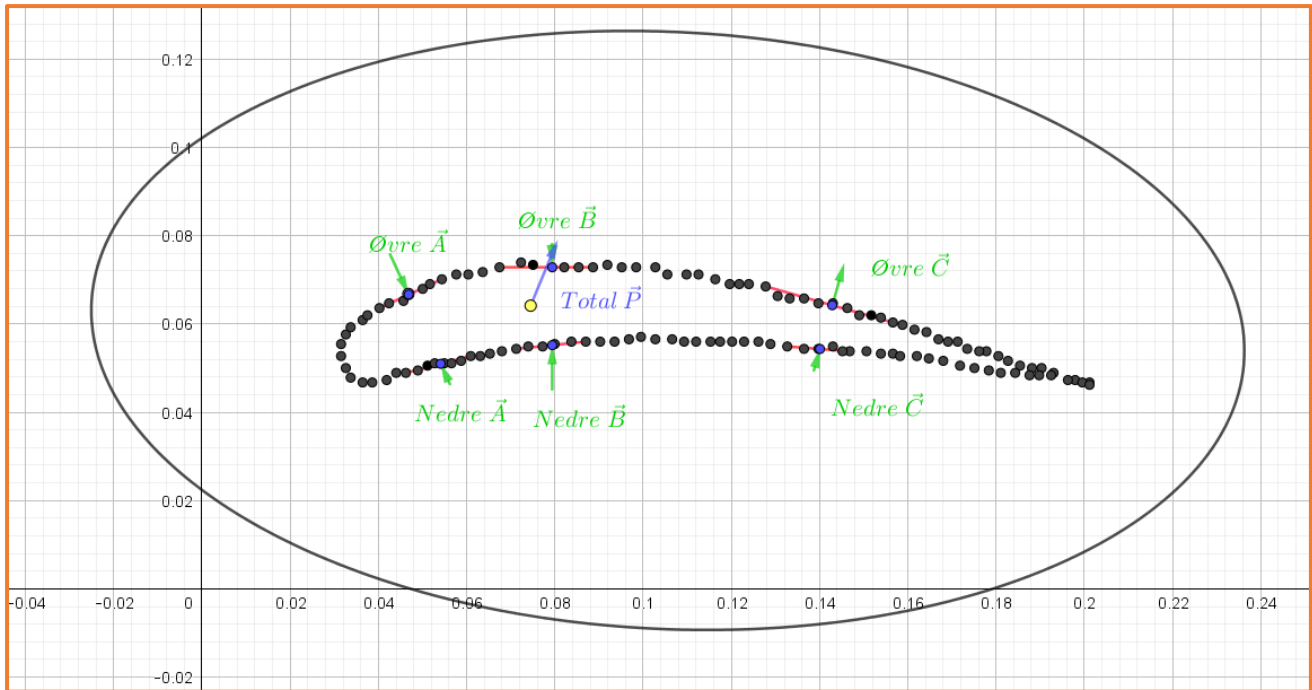
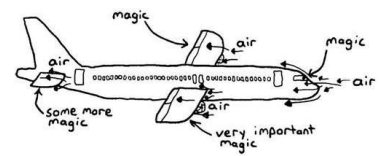
For at undersøge om der totalt set er en opdrift, har jeg valgt at summere tallene fra oversiden og fundet differens med den summerede værdi af undersidens data:

	Oversiden af vingen	Undersiden af vinge	Differens
$\alpha = 0^\circ$	$14,5cm + 14,0cm + 14,5cm$ $= 43,0 cm$	$14,0cm + 14,5cm + 16,0cm$ $= 44,5 cm$	$44,5cm - 43cm$ $= 1,5cm$
$\alpha = 15^\circ$	$14,0cm + 14,0cm + 14,5cm$ $= 42,5 cm$	$14,5cm + 16,0cm + 15,5cm$ $= 46,0 cm$	$46,0cm - 42,5cm$ $= 3,5 cm$
$\alpha = -15^\circ$	$16,0cm + 14,2cm + 15,0cm$ $= 45,2 cm$	$14,2cm + 14,2cm + 15,5cm$ $= 43,9 cm$	$43,9cm - 45,2cm$ $\approx (-1,3) \cdot cm$
$\alpha = 25^\circ$	$13,6cm + 14,0cm + 14,6cm$ $= 42,2 cm$	$15,1cm + 15,5cm + 15,4cm$ $= 46,0 cm$	$46,0cm - 42,2cm$ $\approx 3,8 cm$

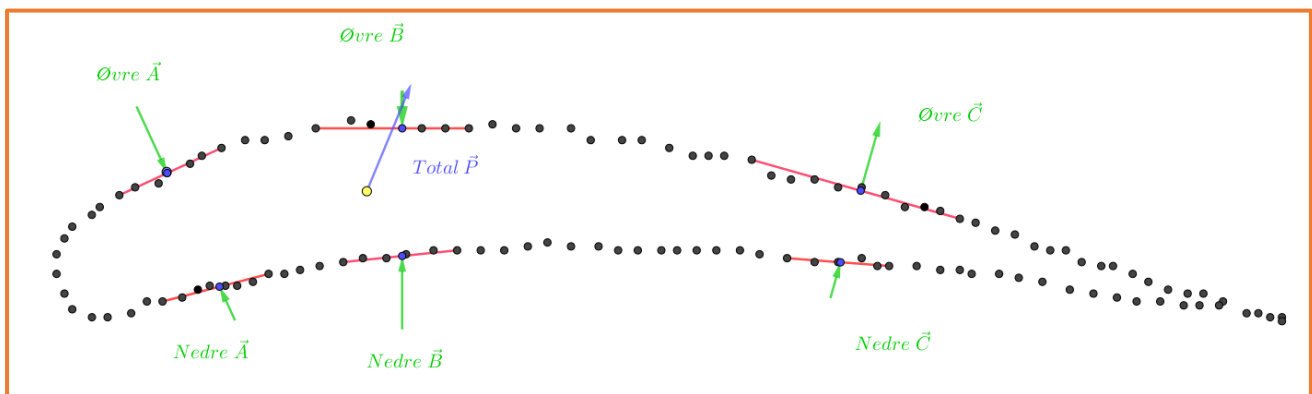
Når differensen bliver positiv, vil der være et lavere tryk for oven på vingen end under vingen. Dette vil bidrage til opdrift på vingen.

For at undersøge fordelingen af tryk på vingeprofilen, så er hullerne blevet lokaliseret på vingemodellen. Dette er blevet indført på den 2. dimensionale vinge.

Længden af vektorerne passer med forskellen fra referenceværdien 15,0 cm. Pilene der hedder "Øvre" står for trykket under vingeprofilen (hvis pilen peger ned på vingen så betyder det, at vingen skubbes i den retning). Bemærk, at "Øvre \vec{C} " er omvendt, da der er et overtryk under vinge, som bidrager til at vingen skubbes opad. De nedre vektorer er så trykket over vingen.



Nedenfor ses illustrationen på tættere hold:

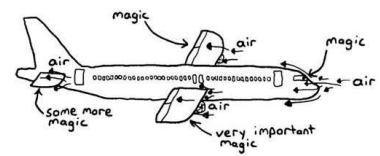


For at finde den "Totale \vec{P} " - trykvektor, så er alle de andre vektorer lagt sammen. Man skal bemærke, at denne vektor viser, i hvilken retning vingen vil "trykkes". Dette er også den retning man vil forvente, at den aerodynamiske kraftvektor vil få. Længden af vektoren i x-retningen er luftmodstanden, og højden af vektoren i y-retningen er opdriften på vingen.

I forsøget var trykforskellen dog så lav, at man ikke kunne måle den med den kraftsensor som var til rådighed. Hvis man kunne finde det specifikke tryk, så kunne man udregne lufthastigheden ud for hullerne vha. Bernoullis princip. Så vil man forvente, at luften på oversiden af vingen flyver hurtigere end på undersiden.

5.4.1: Fejlkilder

Der opmåles kun seks steder på hele vingeprofilen. Dette fortæller noget om trykket lige nøjagtigt der hvor der opmåles. Det giver en god indikation af hvad trykfordelingen er på vingen, men flere målinger vil give et mere nøjagtigt resultat. Det kunne fx være interessant at opmåle trykket ved de to "stagnation points".



6: Aerodynamik i dagligdagen

I hverdagen er der mange mennesker, der er afhængig af deres bil. Nogle biler har fastmonteret en vinge (spoiler) over bagagerummet. Vingens formål er at danne en kraft, der går i retning af tyngdekraften. Denne kraft "presser" bilen ned på vejen, hvilket giver bedre håndtering ved højere hastigheder⁷⁴.

Hvis spoileren skulle have samme form som vingen der blev testet i forsøgene, så kan det diskuteres hvordan denne skal orienteres.

Jf. forsøget med opdrift på vingen, ses det, at vingen opnår negativ opdrift, ved meget høje eller lave negative angrebsvinkler. Dog viser forsøgene også, at vingen har stallet, og at vingen ikke er aerodynamisk når den står i en meget høj angrebsvinkel.

Ifølge Bernoullis princip og teorien, så bør det være muligt at vende vingen på hoved og få den modsatte effekt, da luften nu bør strømme hurtigere på undersiden end oversiden. Dette vil teoretisk bidrage til en negativ opdrift. Som presser bilen ned på vejen.

I tilfældet med en bil, kan man argumentere for, at det er bedre, at lave et design hvor vingen vender på hoved, da luftmodstanden, luftmodstandskoefficienten og den dimensionsløse konstant " c_w " er lavere ved små angrebsvinkler.

I henhold til de forsøg der blev lavet med vingeprofilen, vil det teoretisk danne den største nedadrettede kraft, hvis vingen vender på hovedet, og har en angrebsvinkel på -10° . Dette vil også give en relativ lav luftmodstand og luftmodstandskoefficient, samt den bedste teoretiske aerodynamiske koefficient (c_w).

Hvis det antages, at løftkoefficienten ikke ændres, så kan det vurderes, at vingen vil være specielt effektiv for biler der kører med høj fart. Dette skyldes, at farten er kvadreret i udtrykket for løft:

$$F_l = \frac{1}{2} \cdot c_l \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$$

Dette kan være grunden til, at nogle F1 racerbiler har disse vinger. Dog kan det diskuteres, hvornår vingen er effektiv. I F1 kører bilerne med meget høj hastighed, og deres styreegenskaber er meget vigtige, derfor kan det i dette tilfælde være en god ide at have en vinge. Men i en hverdagssituation med bykørsel på ca. $50 \frac{km}{time}$, så er vingen ikke nyttig. Vingen kan ligefrem være i vejen, da den både tilfører vægt, og forøger luftmodstanden.

Se bilag 6 for at finde ud af, hvor meget den vingeform der blev testet i forsøgene betyder for en bil.

Det kunne være smart, hvis man "bare" kunne vende en vinge på hovedet og få den omvendte effekt. Dog lader dette ikke til at være tilfældet, da nogle fly med cambered vinger godt kan flyve på hovedet, selv ved lave angrebsvinkler⁷⁵.

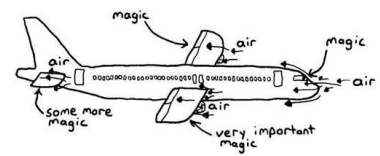
Man kan diskutere hvad dette skyldes. Man kan kigge på Kutta-Joukowskis theorem:

$$\frac{F_l}{l} = v \cdot \rho \cdot \Gamma$$

Hvis man tager udgangspunkt i situationen med bilen, så vil det eneste der kan ændre sig i udtrykket være cirkulationen. Hvis cirkulationen om vingen er svag, eller går den forkerte vej, så vil vinge blive ineffektiv. Hvis man følger Kelvins theorem, så skal cirkulationen om vingen summeret med cirkulationen om "starting vortex" være 0. Derfor kan det diskuteres, om der overhoved teoretisk er en cirkulation om vingen hvis man vender den på hovedet.

⁷⁴ <https://videnskab.dk/sporg-videnskab/hvad-er-et-aerodynamisk-design>

⁷⁵ Baktoft, side 146



7: Konklusion

Aerodynamik har større betydning, for vores hverdag end vi går og tænker over. Denne SRP har fortrinsvis haft fokus på, hvordan flyvinger virker. I opgaven blev det præsenteret, at der er fire kræfter der påvirker et fly. Disse kræfter er: Tyngdekraften, opdriften, luftmodstanden og trækraften. Herefter blev det belyst, at lufthastigheden over vingen er større end under, og at dette resulterer i en trykforskydning som giver flyet opdrift. Det kan konkluderes, at denne trykforskydning sker p.g.a. Bernoullis princip, som også blev gennemgået i opgaven.

Det kan også konkluderes, at opdriften på vingeprofilen teoretisk kan forklares med cirkulation om vingeprofilen. Herudover blev der redegjort for, at opdriften er forskellig i forhold til hvilken vingeform man kigger på. I opgaven blev der inddraget en symmetrisk vinge, som ikke danner opdrift ved en 0°'s angrebsvinkel, og en cambered vinge som danner opdrift ved en 0°'s angrebsvinkel. Desuden blev det analyseret, at når angrebsvinklen bliver for stor, så vil vingeprofilerne stalle. Dette kunne man også se, i forsøget med opdriften på en vingeprofil.

Det kan konkluderes, at der blev redegjort for de matematiske elementer i formelen for cirkulation og Kutta-Joukowskis theorem. Kutta-Joukowskis theorem kan ses nedenfor:

$$\frac{F_L}{l} = \rho \cdot V \cdot \Gamma$$

Hvor $\frac{F_L}{l}$ er kraften pr. vingelængde (se span "s" jf. billedet side 5), ρ er luftens densitet, V er farten af luften inden den rammer vingen, og Γ er cirkulationen.

Det kan konkluderes, at Kutta-Joukowski og Kelvins theoremer omhandler cirkulationen omkring en vingeprofil. Kutta-Joukowski theorem kan b.l.a. bruges til at finde opdriften på en vingeprofil.

Kelvins theorem fortæller yderligere, at cirkulationen i en strømning der er viskositetsløs, ikke kompressibel og ikke påvirkes af et kraftfelt, vil være konstant.

Herudover kan det konkluderes, at det i SRP'en er blevet bevist, at Bernoullis princip passer, og at Kutta-Joukowskis theorem er sandt.

Ifølge laboratorie forsøgene kan det konkluderes, at det statiske tryk falder, når hastigheden af luften stiger, ligesom Bernoullis princip siger. Dog kunne man også se, at det statiske tryk steg ved punkt "A" i venturirøret, se fejlkilder for mulig forklaring på dette.

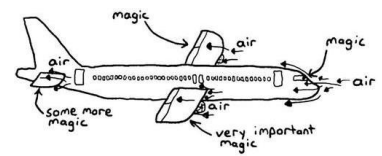
Derudover kan det konkluderes, at analysen af opdriften på en vinge vil blive størst ved en angrebsvinkel på 10° ved en lufthastighed på 11 m/s. Optimum ændrede sig dog til 15° da lufthastigheden blev ændret til 8 m/s.

I forsøget med luftmodstanden på en vinge, blev det fremført, at vingeprofilen var mest aerodynamisk ved en angrebsvinkel på 10°. Dog havde vingen den laveste drag koefficient ved en angrebsvinkel på 0°.

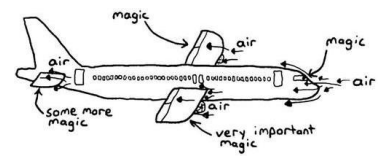
Det kan også konkluderes, at trykket på vingen blev undersøgt ved forskellige angrebsvinkler.

Derudover blev det analyseret, at den samlede "trykvektor", som er alle trykvektorene for forsøget lagt sammen, vil pege i samme retning som en "aerodynamisk kraftvektor" vil.

Det kan afslutningsvis konkluderes, at viden om aerodynamik kan anvendes inden for andre brancher end flyvinger og det kan være en god ide, at montere en vinge på nogle biler. Her blev det b.l.a. diskuteret hvad hastigheden af bilen skal være, før vingen er nyttig. Det blev vurderet, at det vil være en god ide at anvende vinger på racerbiler, som er afhængige af gode styreegenskaber. Racerbiler kører



med høj fart og vingen vil derfor yde den ønskede effekt. Det blev også vurderet, at en vinge ikke vil give samme effekt på en bybil, som ikke kører hurtigere end $50 \frac{\text{km}}{\text{time}}$.



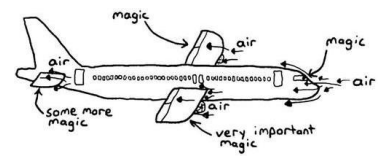
Litteraturliste

Bøger

Andersen, Jespersgaard & Østergaard	Databog fysik kemi F & K Forlaget, 11. udgave 2. oplag 2007
Ayres & Mendelson	Calculus Sixth Edition Schaum's Outline Series, 2013
Baktoft Allan	Matematik i virkeligheden Bind 3 Forlaget Natskyggen, 1. udgave, 1. oplag
Kreyszig, Erwin	Advanced engineering mathematics (sixth edition), 1988
Nielsen Erik & Fogh Esper	Vejen til Fysik A2 Forlaget HAX, 2. udgave, 1. oplag 2011
Raletz Roger	Basic Theory of the Helicopter CEPADUES-EDITIONS, 1990
Ternvig N. P.	Aerodynamics for airline pilots MUNKSGAARD, 1991

Hjemmesider

Birkelind, Chano https://fysikleksikon.nbi.ku.dk/h/hydrodynamik/	Fysikleksikon (sidst set den 09/12 - 2018)
Brydensholt & Ebbesen https://matematik3.systime.dk/index.php?id=150	Systime - Lærebog I matematik bind 3 (sidst set den 16/12 - 2018)
Celli, Vittorio http://galileo.phys.virginia.edu/classes/311/notes/aero/node1.html	Aerodynamics (sidst set den 12/12 - 2018)
Chien, Loring https://www.quora.com/How-many-airplanes-take-off-each-hour-on-average-in-the-world	Quora (sidst set den 17/12 - 2018)
Dawkins, Paul http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/GreensTheorem.aspx	 (sidst set den 17/12 - 2018)



<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/LineIntegralsVectorFields.aspx>

(sidst set den 17/12 - 2018)

<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/LineIntegralsPtII.aspx>

(sidst set den 17/12 - 2018)

Ghosh Priyanka

Math-only-math

<https://www.math-only-math.com/simple-closed-curves.html>

(sidst set den 17/12 - 2018)

Guichard & friends

(Department of Mathematics - Whitman College)

https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/section16.01.html

(sidst set den 16/12 - 2018)

Jonassen Niels, Krag Fritz & Smith Anders

Luftmodstand

Den store danske, Gyldendal

http://denstoredanske.dk/Bil_b%C3%A5d_fly_m.m./Biler/Teknik/luftmodstand

(sidst set den 18/12 - 2018)

Lønstrup, Jakob

Spørg piloten (sidst set den 17/12 - 2018)

<https://spoerg-piloten.dk/hvordan-kan-det-lade-sige-gore-at-sa-mange-tons-kan-haengeflyve-i-luften/>

McLeod, Kagen

Scientific American

<https://www.scientificamerican.com/article/static-electricity-bring-science-home/>

(sidst set den 20/12 - 2018)

Nakamura, Mealani

Reports on how things work

<http://web.mit.edu/2.972/www/reports/airfoil/airfoil.html>

(sidst set den 17/12 - 2018)

Nasa's index for aerodynamik

National aeronautics and space administration

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/drageq.html>

(sidst set den 11/12 - 2018)

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/lifteq.html>

(sidst set den 14/12 - 2018)

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/size.html>

(sidst set den 14/12 - 2018)

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/presar.html>

(sidst set den 17/12 - 2018)

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/incline.html>

(sidst set den 18/12 - 2018)

Nykamp, Duane

Math insight

https://mathinsight.org/line_integral_circulation

https://mathinsight.org/vector_field_fluid_flow

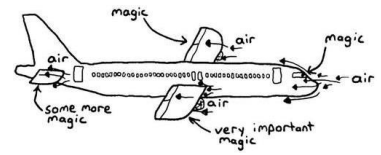
(sidst set den 16/12 - 2018)

Plambech Claes

videnskab.dk

<https://videnskab.dk/sporg-videnskaben/hvad-er-et-aerodynamisk-design>

(sidst set den 19/12 - 2018)



Wiki

<https://en.wikipedia.org/wiki/Airfoil>

https://da.wikipedia.org/wiki/National_Advisory_Committee_for_Aeronautics

https://en.wikipedia.org/wiki/Density_of_air

(sidst set den 18/12 - 2018)

<https://da.wikipedia.org/wiki/Massefylde>

(sidst set den 19/12 - 2018)

Orbit B

<https://orbitbhtx.systime.dk/index.php?id=166>

(sidst set den 14/12 - 2018).

University of leeds

http://www1.maths.leeds.ac.uk/~kersale/2620/Notes/chapter_8.pdf

(sidst set den 17/12 - 2018)

Helicopters and aircrafts

<http://heli-air.net/2016/02/25/kelvin-s-circulation-theorem-and-the-starting-vortex/>

(sidst set den 17/12 - 2018)

The USGS Water Science School

<https://water.usgs.gov/edu/compressibility.html>

(sidst set den 19/12 - 2018)

Billeder

Billedet på forsiden er venligst udlånt af "Sporty's Pilot Shop" fra pinterest:

<https://www.pinterest.dk/pin/150518812518253295/>

Billede af kræfterne der påvirker et fly:

http://denstoredanske.dk/Bil_b%C3%A5d_fly_m.m./Luftfart/Luftfartens_historie/flyvemaskine

Vingeprofilerne (cambered og symmetrisk):

https://www.google.com/search?biw=1280&bih=610&tbm=isch&sa=1&ei=t9EQXMnoOIInpsAfI44vI DA&q=symmetrical+and+curved+airfols&oq=symmetrical+and+curved+airfols&gs_l=img.3...0.0..94 897...0.0..0.0.0.....0.....gws-wiz-img.cvbwhGAIjWw#imgsrc=NO1riAj1 -WpdM:

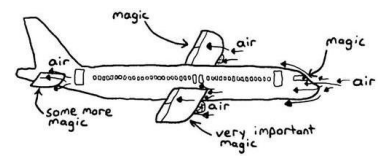
Billede af vingens planform:

<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/geom.html>

Vingeprofilerne fra NACA:

<http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=n0009sm-il>

<http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=naca2408-il>



Ellipse i vektorfelt:

[https://mathinsight.org/line integral circulation](https://mathinsight.org/line_integral_circulation)

Kutta-Joukovskis theorem:

https://www.google.com/search?q=kutta+joukowski+theorem&num=100&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwitooXwsaTfAhUJL1AKHaAFCE4Q_AUIDigB&biw=1280&bih=610#imgsrc=g1KgfsPqSs6rCM:

Billeder af kurverne

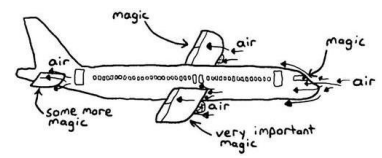
<https://slideplayer.com/slide/10473228/>

Billeder af cirkulation om vingeprofil

<http://web.mit.edu/2.972/www/reports/airfoil/airfoil.html>

Cirkulations figur (Kelvins theorem)

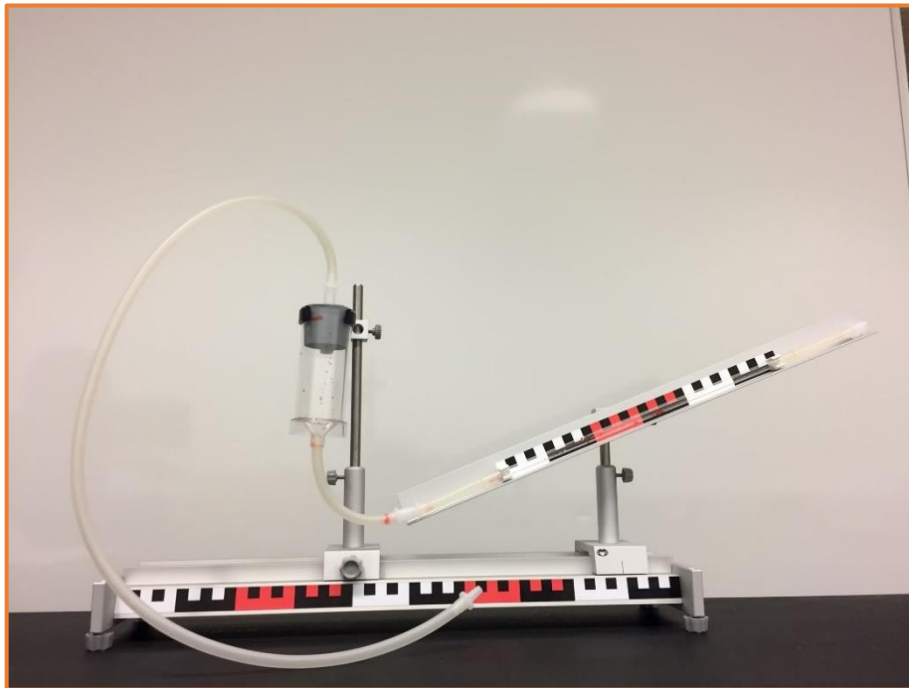
<https://engineering.stackexchange.com/questions/17470/an-argument-from-kelvin-s-circulation-theorem>

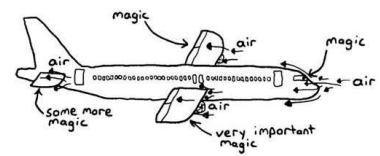


Bilag

Bilag 1: Trykmåleren:

Manometeret laves på følgende måde:





• Tank	• Rør på måleplade	• Slang
• 2 vognskinner	• 2 muff	• 2 skinner
• Tankholder	• 2 stænger	

Jeg sætter nu de to vognsikker på skinnen og sætter dem fast. Jeg påsætter dem stænger og to muff.

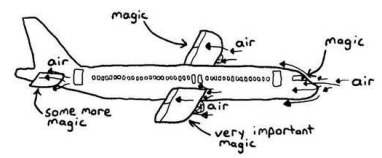
Jeg spænder på en ene muf tankholderen fast, og jeg påsætter tanken på holderen.

På den anden skinnevogn, sætter jeg målepladen med røret fast. Jeg sætter målepladen i en vinkel, (så der ikke render væske ud af røret).

Jeg forbinder nu slangen fra tanken med den fra røret på målepladen. Jeg fylder nu tanken op vha. pipetten.

Når der er tilstrækkeligt med væske i opstillingen, kan højden på tanken fastsættes.

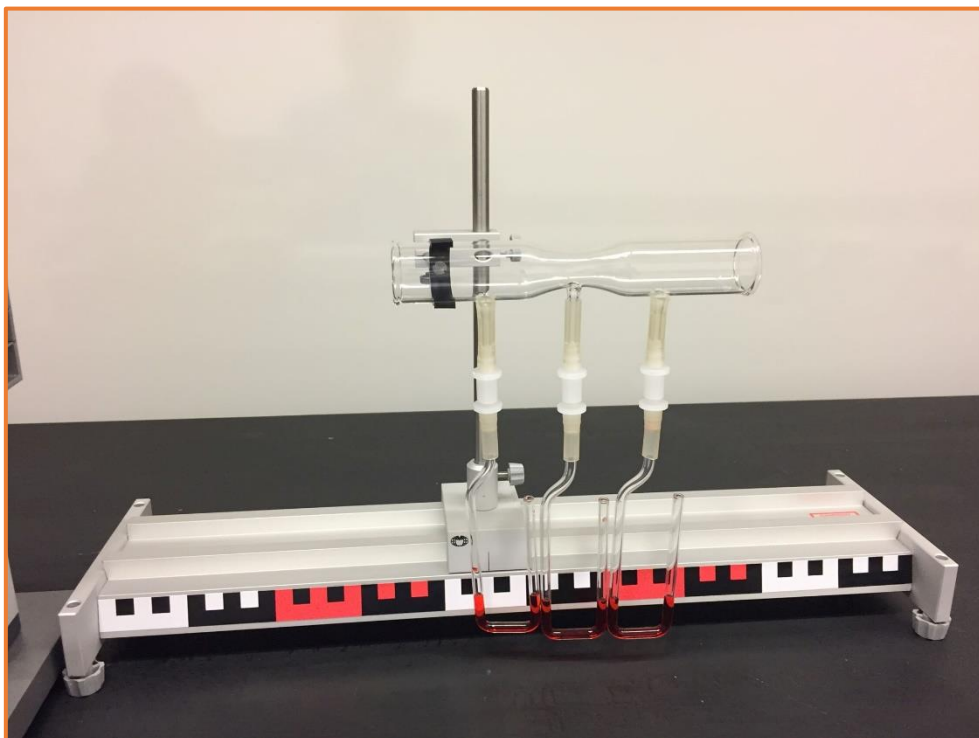
Jeg finder et godt sted for væske niveauet.

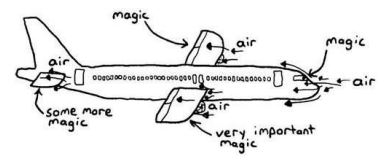


Bilag 2: Bernoullis princip vist ved venturirør:

Materialer:

• Skinne	• Luft "kanon"	• Venturi rør
• Madfarve	• U-rør	• Stang
• Bægerglas	• Spatel	• Plastpipette
• Skinne vogn	• Muffe	• Klamme til venturi rør





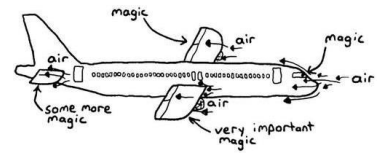
I dette forsøg har jeg lavet opstillingen som vist ovenfor.

Jeg startede med at opsætte luftkanonen, så den blæser med maks styrke. Foran kanonen, har jeg placeret en skinne. På skinnen har jeg placeret en skinnevogn, som kan spændes fast til skinnen.

På skinnevognen har jeg sat en stang. På stangen anvendes en muffe som holder venturirørs klammen fast i 90 grader. I klammen sætter jeg venturirøret. Venturirøret skal sættes så den står midt for ud blæsningen på kanonen, samt den skal placeres ca. 20 cm fra kanonen.

Jeg laver nu noget rødt vand, hvor jeg anvender spatlen, bægerglas og madfarvning. Jeg overfører det farvede vand til "u-rørene" så der er lige meget i hver.

Disse kan nu opsættes på venturirøret. Luftkanonen kan nu tændes, og jeg aflæser højden af væsken. Jeg tager nu billeder af opstillingen.



Bilag 3: Vinges løfte evne

• Bøger	• Tape	• Vægt (2 kg og 1 decimal)
• Logger Pro	• Lab Pro	• Strømforsyning
• Usb kabel	• Vinge i kasse	• Luftkanon
• Vaterpas	•	•

Luftkanonen opsættes et fornuftigt sted, og vægten placeres foran.

Vha. nogle bøger kan højden af vægten justeres, ovenpå vægten placeres vingemodellen.

Der kan også placeres en bog på vægten.

Det skal passe, så vingeprofilen er placeret ca. midt for luftkanonens munding. Vha. noget tape, kan der laves en "stop klods" for vingemodellen, da den ellers godt kan flyve tilbage, da der også er en vind resistans der påvirker vingen.

Et vaterpas anvendes til at justere om bogen på vægten står vandret (ellers passer vinklerne på vingen jo ikke).

Nu nulstilles vægten med bogen ovenpå, men uden vingemodellen.

Lab Pro forbindes til Logger Pro og vægten forbindes også til Logger Pro vha. et usb kabel.

I Logger Pro laver jeg et datasæt, med tre manuelle kolonner. Den ene kolonne kalder jeg α , jeg giver den enheden $^\circ$. I denne kolonne generer jeg også værdier fra -35° til 45° , med en stigning på 5° . De to andre kolonner kalder jeg m_1 og m_2 , jeg giver dem begge enheden g. Jeg laver også en beregnet kolonne som finder masseforskellen. Jeg kalder den Δm , jeg giver den enheden g og udtrykket: " $m_2 - m_1$ ".

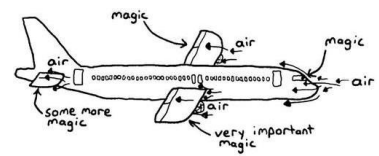
Jeg opsætter Logger Pro til at optage data i 20 sekunder, og med en prøvehastighed på 1 prøve pr. sekund. Jeg laver en (tid, masse)-graf. På grafen anvender jeg statistik. Af statistiken kan man aflæse middelværdien. Denne indtastes i den manuelle kolonne, som passer ved de forskellige vinkler.

I mine første optagelser, sætter jeg luftkanonen til at blæse med halv kraft. Jeg starter forsøget med at sætte vingen til 0° , (man kan også starte med -35°). Jeg er opmærksom på, at jeg nu skal indtaste dataene ca. midt i kolonnen. Jeg opmåler massen af vingemodellen. Herefter tænder jeg blæseren, og venter til, at massen er noget nær konstant. Jeg optager herefter massen over tiden i 20 sekunder. Jeg indtaster middelværdien for massen i Logger Pro-tabellen.

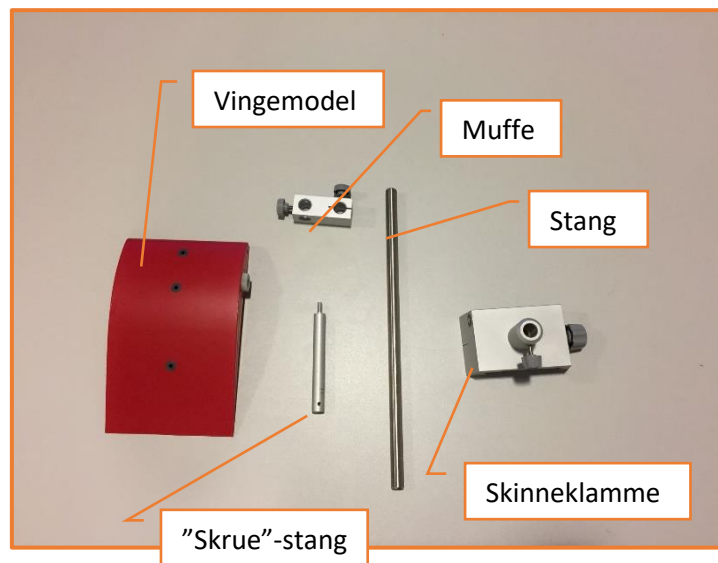
Herefter sænker jeg modellen med 5° , og optager massen igen. Jeg indtaster massen i Logger Pro, dette bliver jeg ved med indtil jeg har opnået en vinkel på 45° .

Herefter tager jeg vinklerne fra -5° og ned til -35° .

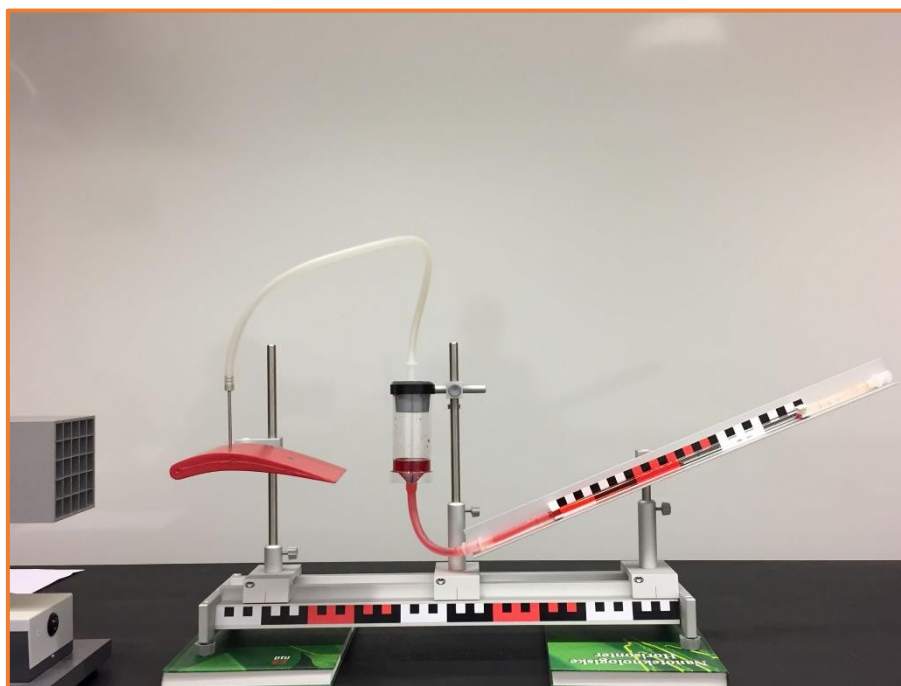
Jeg tester til sidst luftkanonens blæse evne, med en vindmåler. Jeg opmålte ved maks vindstyrke = 11 m/s og halv vindstyrke = 8 m/s



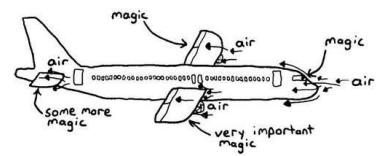
Bilag 4: Undersøgelse af trykfordelingen på en vingeprofil



• Vingemodell	• Skinne	• Luftkanon
• Trykmåler opstilling	• Skinneklamme	• Stang
• Muffe	• Skrue stang	• Bøger
• Vatterpas	• Vinge i vogn	•



Man skal bemærke, at bøgerne under skinnen ikke er nødvendige i forsøget, da man bare kan stille højden af vingen vha. muffen.



I det foregående forsøg (vindmostanden på en vinge) var det dog nødvendigt, at der blev anvendt bøger. Derfor ændrede jeg ikke på opstillingen, da jeg vidste at den stod helt lige (da jeg havde brugt vaterpasset).

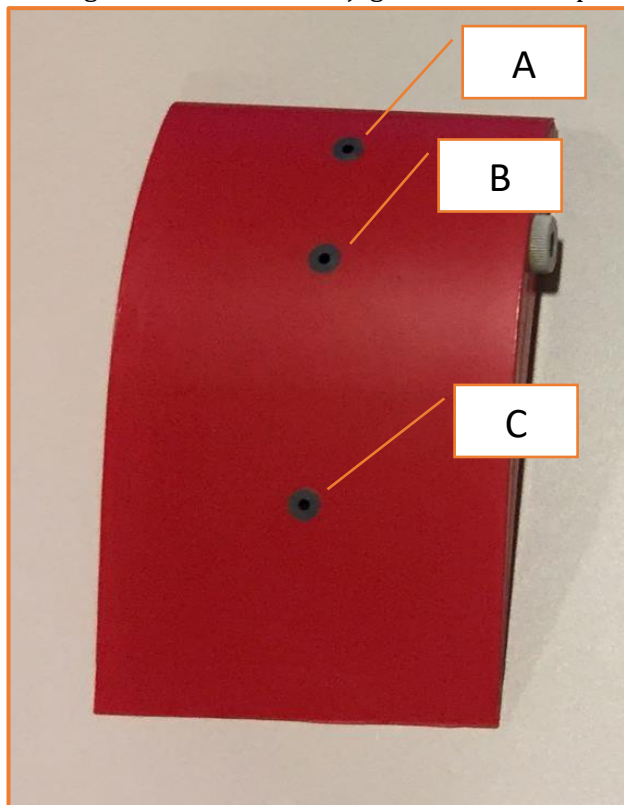
I forsøget opsætter jeg skinnen som i forsøget med "vindmostanden på en vinge", herefter laver jeg "trykmåler" opstillingen fra bilag 1.

Foran trykmåleren hæfter jeg skinneklammen på. I skinneklammen fastsætter jeg en stang, på stangen sætter jeg muffen.

Jeg skurer "skure stangen" i vingen og sætter stangen igennem muffen. Nu indstilles muffen, så vingen er lige udfor luftkanonen. Luftkanonen sættes til at blæse med maks kraft.

Bemærk, at der ikke må være noget af trykmåleropstillingen i vind-strålen

På vingen er der tre huller, jeg definerer dem på følgende måde:

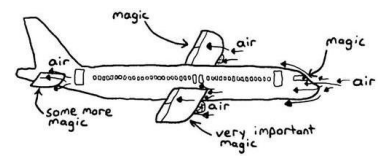


Da hullerne går hele vejen gennem vingen, kan man undersøge trykket både på oversiden og undersiden af vingen.

Jeg undersøger trykfordelingen på vingen i "A, B og C" på både undersiden og oversiden ved følgende angrebsvinkler:

$$\alpha = 0^\circ, \alpha = -15^\circ, \alpha = 15^\circ \text{ og } \alpha = 25^\circ$$

Det kan være en hjælp at bruge vingen der er placeret i kassen med vinkelmåleren til at fastsætte den rigtige vinkel. Disse to vinger er også ens i dimensionerne.



I mit forsøg opmålte jeg følgende værdier:

	Oversiden af vingen			Undersiden af vingen		
	A (cm)	B (cm)	C (cm)	A (cm)	B (cm)	C (cm)
$\alpha = 0^\circ$	14,5	14,0	14,5	14,0	14,5	16,0
$\alpha = 15^\circ$	14,0	14,0	14,5	14,5	16,0	15,5
$\alpha = -15^\circ$	16,0	14,2	15,0	14,2	14,2	15,5
$\alpha = 25^\circ$	13,6	14,0	14,6	15,1	15,5	15,4

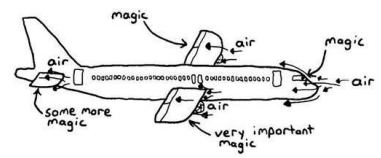
Det statiske tryk i rummet opmålte jeg til 15 cm. Hvis tallet bliver lavere, så må der være et lavere statisk tryk end i rummet. Hvis tallet er højere, må det statiske tryk være større end i rummet.

Man kan derfor vurdere om der kommer en opdrift, ved at se på fordelingen af tryk på vingen. Jeg har i følgende tabel summeret trykket, også kan man se om der samlet set kommer en opdrift på vingen:

	Oversiden af vingen	Undersiden af vinge	Differens:
$\alpha = 0^\circ$	$14,5cm + 14,0cm + 14,5cm$ $= 43,0 cm$	$14,0cm + 14,5cm + 16,0cm$ $= 44,5 cm$	$44,5cm - 43cm$ $= 1,5cm$
$\alpha = 15^\circ$	$14,0cm + 14,0cm + 14,5cm$ $= 42,5 cm$	$14,5cm + 16,0cm + 15,5cm$ $= 46,0 cm$	$46,0cm - 42,5cm$ $= 3,5 cm$
$\alpha = -15^\circ$	$16,0cm + 14,2cm + 15,0cm$ $= 45,2 cm$	$14,2cm + 14,2cm + 15,5cm$ $= 43,9 cm$	$43,9cm - 45,2cm$ $\approx (-1,3) \cdot cm$
$\alpha = 25^\circ$	$13,6cm + 14,0cm + 14,6cm$ $= 42,2 cm$	$15,1cm + 15,5cm + 15,4cm$ $= 46,0 cm$	$46,0cm - 42,2cm$ $\approx 3,8 cm$

Når differensen bliver positiv, vil der være et lavere tryk for oven på vingen end under vingen. Dette vil bidrage til opdrift på vingen.

Man skal bemærke, at punktet ved angrebsvinklen på -15° giver et overtryk på oversiden og undertryk på undersiden. Der vil derfor dannes en negativ opdrift på vingen ved angrebsvinklen -15° .



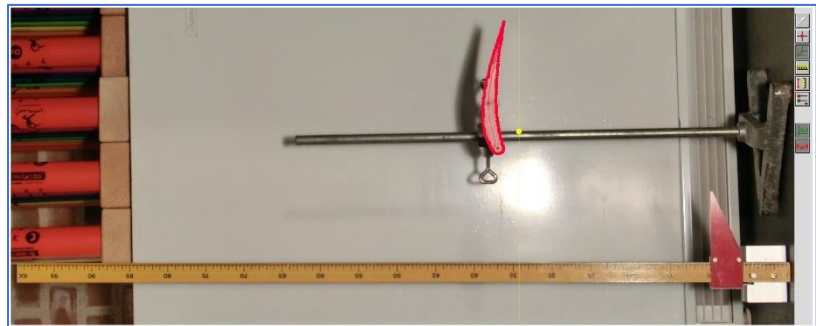
Bilag 5: Undersøgelse af vingeprofilen

I nogle af de udførte forsøg er der anvendt en vinge, som ses følgende:



For at undersøge formen af vingen, så har jeg lavet en fotoanalyse i Logger Pro.

I Logger Pro har jeg defineret længden af målestokken til 1,00 m, også har jeg plottet punkter ind langs yderkanten af vingen. Dette kan ses i billedet:

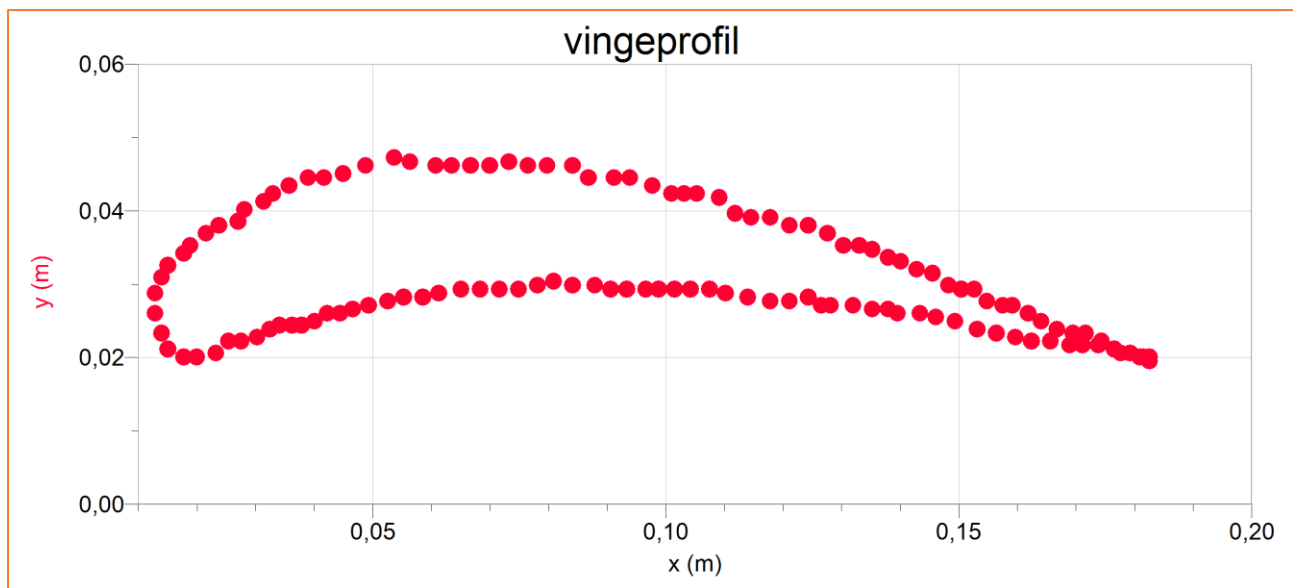
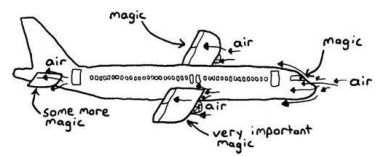


I Logger Pro valgte jeg at ligge billedet ned, så jeg kunne forstørre det mere, og derved kunne jeg klikke punkterne mere præcist ind.

Jeg har i Logger Pro vinklet koordinatsystemet (det gule) så x-aksen går vertikalt, og y-aksen går horisontalt.

I Logger Pro får jeg følgende data:

	Videoanalyse	
	x (m)	y (m)
1	0,01287	0,02876
2	0,01396	0,03093
3	0,01504	0,03256
4	0,01776	0,03419
5	0,01885	0,03528
6	0,02157	0,03691
7	0,02374	0,03800
8	0,02701	0,03854
9	0,02809	0,04017
10	0,03136	0,04126

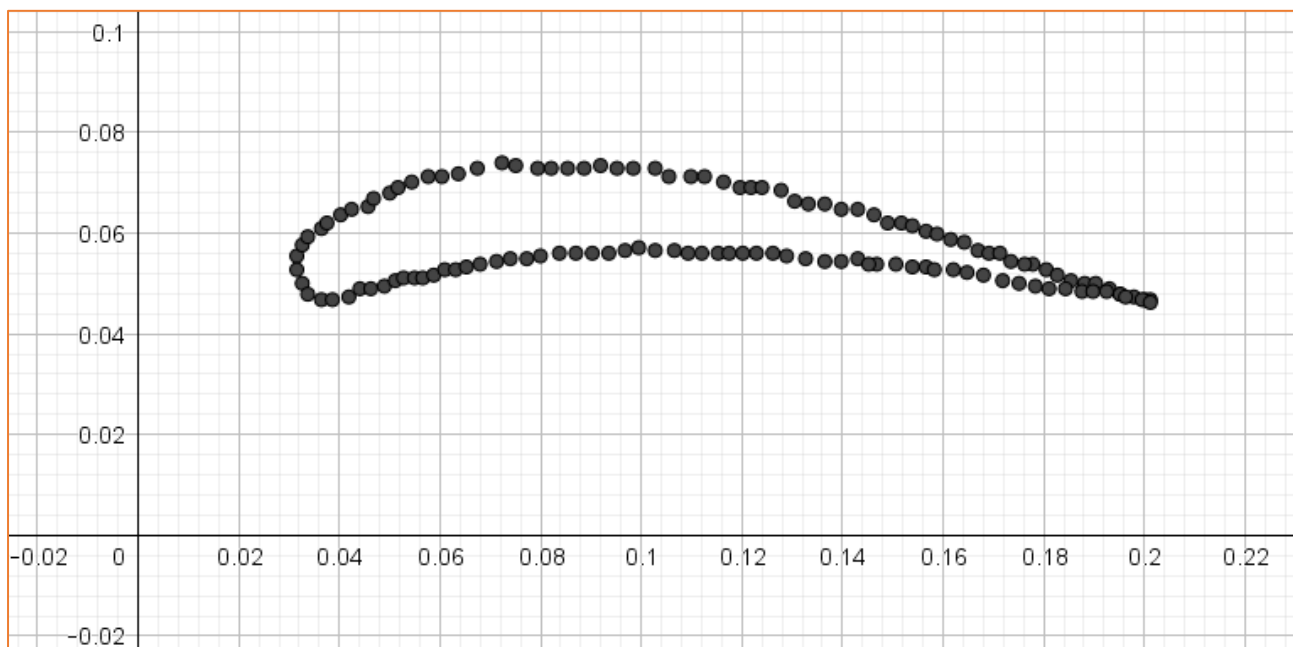


Jeg opmålte også vingen med et målebånd, hvor jeg fik følgende data:

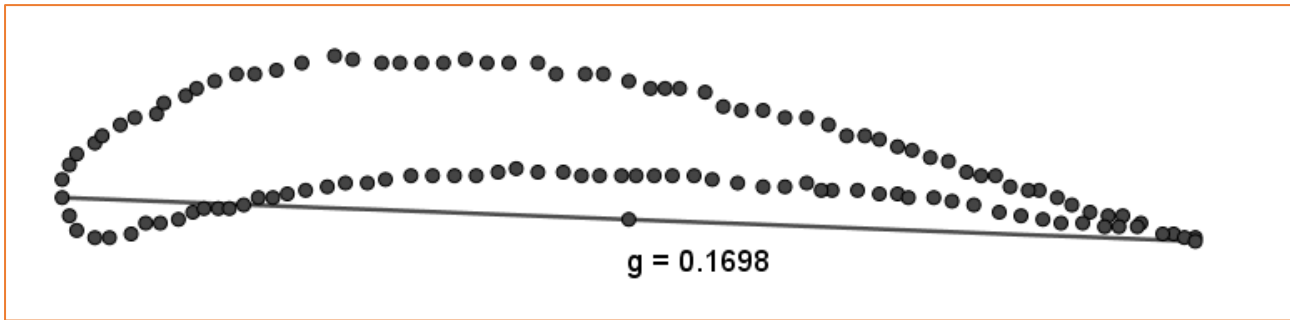
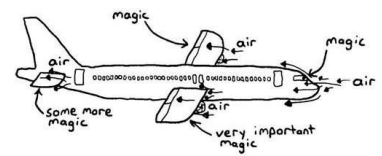
Længde af overside:	Længde af underside:	Bredde:
17,3 cm	16,4 cm	10,0 cm

Dette passer også rimeligt godt, med hvad koordinatsystemet viser.

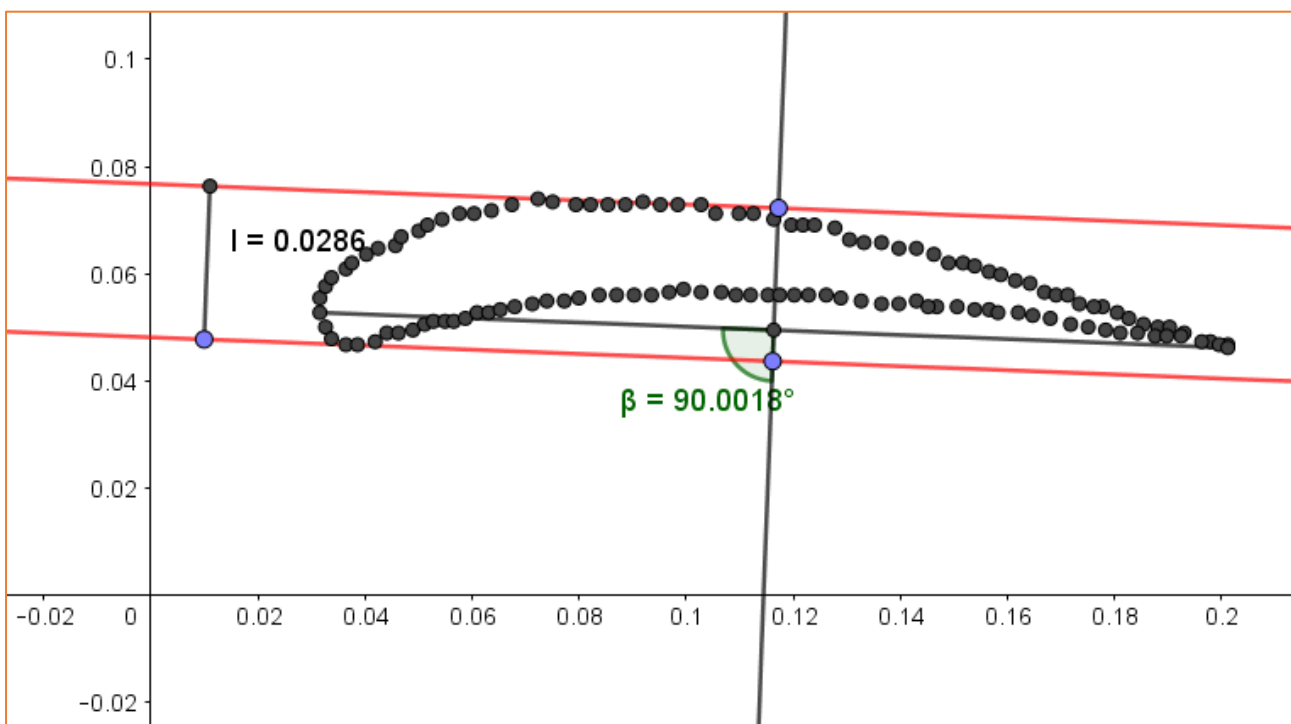
For yderligere at kunne analysere vingen og dens profil, har jeg valgt at overføre dataene til GeoGebra:



Herefter plottede jeg en chord-linje ind:



For at undersøge overfalde arealet af vingen forfra, når der blæses luft ind på den, så har jeg lavet følgende opsætning:



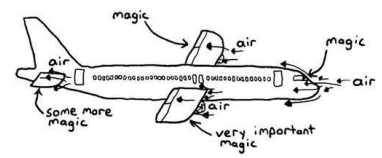
Hvor de røde linjer symboliserer vindretningen. Da punkterne ikke bare kan "drejes", så vælger jeg at ændre vinklen " β ". Angrebsvinklen kan findes på følgende måde:

$$\alpha = \beta - 90^\circ$$

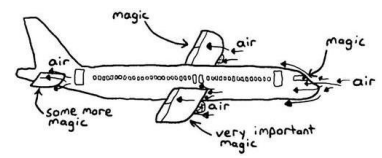
Jeg kan derved ændre vinklen af vinden og finde overfalde arealet af forsiden af vingen.

Ved angrebsvinklen på 0° , kan man se, at overfladarealet bliver:

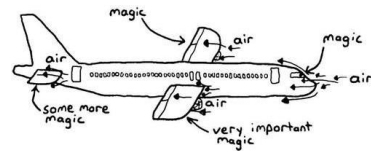
$$0,0286m \cdot 0,100m = \mathbf{28,6 \text{ cm}^2}$$



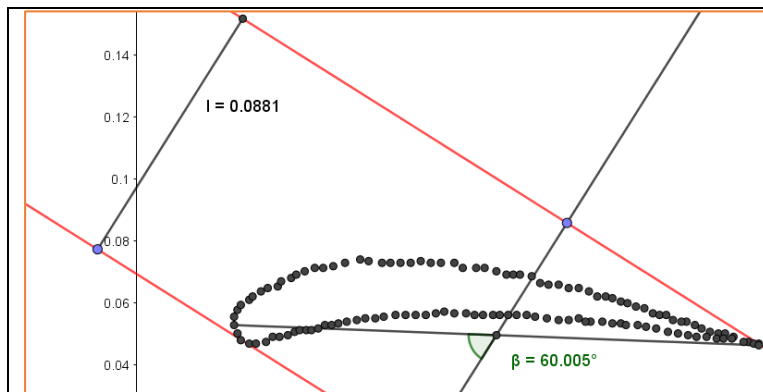
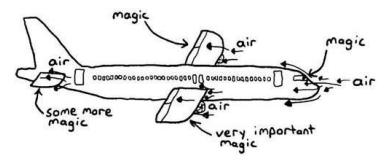
<p>$Cl = 0.0337$</p> <p>$\beta = 95.001^\circ$</p>	$\alpha = 95^\circ - 90^\circ = 5^\circ$ $0,0337m \cdot 0,100m = 33,7 \text{ cm}^2$
<p>$Cl = 0.0447$</p> <p>$\beta = 100.002^\circ$</p>	$\alpha = 100^\circ - 90^\circ = 10^\circ$ $0,0447m \cdot 0,100m = 44,7 \text{ cm}^2$
<p>$Cl = 0.0561$</p> <p>$\beta = 105.008^\circ$</p>	$\alpha = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ$ $0,0561m \cdot 0,100m = 56,1 \text{ cm}^2$
<p>$Cl = 0.0675$</p> <p>$\beta = 110.003^\circ$</p>	$\alpha = 110^\circ - 90^\circ = 20^\circ$ $0,0675m \cdot 0,100m \approx 67,5 \text{ cm}^2$
<p>$Cl = 0.0787$</p> <p>$\beta = 115.005^\circ$</p>	$\alpha = 115^\circ - 90^\circ = 25^\circ$ $0,0787m \cdot 0,100m \approx 0,00787m^2$ $\approx 78,7 \text{ cm}^2$



<p>$\beta = 120.0075^\circ$</p> <p>$I = 0.0906$</p>	$\alpha = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ $0,0906m \cdot 0,100m \approx 0,00906m^2$ $\approx 90,6cm^2$
<p>$\beta = 125.003^\circ$</p> <p>$I = 0.1018$</p>	$\alpha = 125^\circ - 90^\circ = 35^\circ$ $0,1018m \cdot 0,100m = 0,01018m^2$ $\approx 101,8cm^2$
<p>$\beta = 130.0028^\circ$</p> <p>$I = 0.1129$</p>	$\alpha = 130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$ $0,1129m \cdot 0,100m = 0,01129m^2$ $\approx 112,9cm^2$
<p>$\beta = 135.0019^\circ$</p> <p>$I = 0.123$</p>	$\alpha = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ $0,1230m \cdot 0,100m = 0,01230m^2$ $\approx 123,0cm^2$

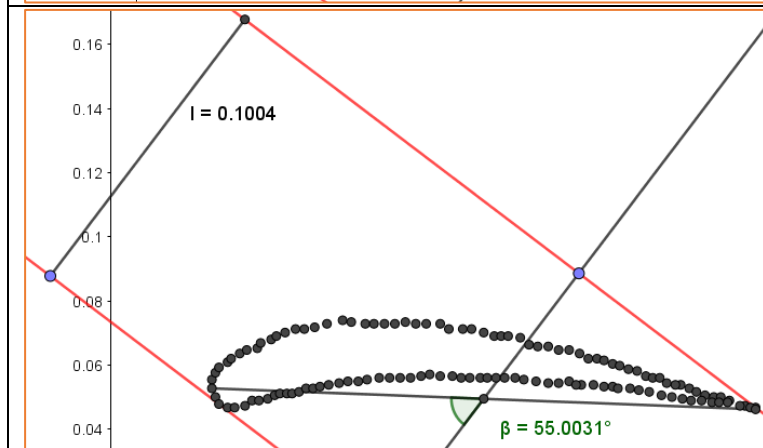


<p>$I = 0.034$</p> <p>$\beta = 85.0045^\circ$</p>	$\alpha = 85^\circ - 90^\circ = -5^\circ$ $0,0340m \cdot 0,100m = 0,00340m^2$ $\approx 34cm^2$
<p>$I = 0.0404$</p> <p>$\beta = 80.007^\circ$</p>	$\alpha = 80^\circ - 90^\circ = -10^\circ$ $0,0404m \cdot 0,100m = 0,00404m^2$ $\approx 40,4cm^2$
<p>$I = 0.0488$</p> <p>$\beta = 75.0013^\circ$</p>	$\alpha = 75^\circ - 90^\circ = 15^\circ$ $0,0488m \cdot 0,100m = 0,00488m^2$ $\approx 48,8cm^2$
<p>$I = 0.0621$</p> <p>$\beta = 70.0018^\circ$</p>	$\alpha = 70^\circ - 90^\circ = -20^\circ$ $0,0621m \cdot 0,100m = 0,00621m^2$ $\approx 62,1cm^2$
<p>$I = 0.0755$</p> <p>$\beta = 65.001^\circ$</p>	$\alpha = 65^\circ - 90^\circ = -25^\circ$ $0,0755m \cdot 0,100m = 0,00755m^2$ $\approx 75,5cm^2$



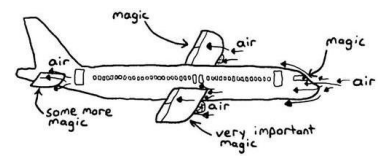
$$\alpha = 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

$$0,0881m \cdot 0,100m = 0,00881m^2 \approx 88,1cm^2$$



$$\alpha = 55^\circ - 90^\circ = -35^\circ$$

$$0,1004m \cdot 0,100m = 0,01004m^2 \approx 100,4cm^2$$



Bilag 6: Udregning af spoilerens effekt

Der bliver fremstillet en vinge som har form, som den i forsøget med et fang på 2,00m og en chordlinje på 0,160m. Denne fastspændes nu på hovedet med en angrebsvinkel af -10° på bagenden af en bil. Det antages, at løftkoefficienten er konstant, og at luftstrømningen på vingen er som i forsøgene (den kommer vandret ind forfra). Løftkoefficienten kan aflæses fra tabellen side 37 til 0,407. Hvis bilen kører rundt i Danmark, så er tyngdeaccelerationen: $g = \frac{9,82N}{kg}$, og densiteten af luft er $1,2041 \frac{kg}{m^3}$.

Den mængde af tryk nedad kan findes ved formlen:

$$F_l = \frac{1}{2} \cdot c_l \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Man kan udregne hvad tyngdekraften påvirker et lods massen med af kraft ved formlen:

$$m_{lod} \cdot g = N \Leftrightarrow m_{lod} = \frac{N}{g}$$

Hvis bilen kører rundt i byen med en fart af $50 \frac{km}{time}$, så kan den nedadrettede kraft findes til:

$$F_l = \frac{1}{2} \cdot 0,407 \cdot 1,2041 \frac{kg}{m^3} \cdot (0,160m \cdot 2,00m) \cdot \left(50 \frac{km}{time}\right)^2 \approx 15,1258 N \approx \mathbf{15 N}$$

Dette kan nu omregnes til en masse der påvirkes af tyngdekraften:

$$m_{lod} = \frac{15,1258 N}{9,82 \frac{N}{kg}} \approx 1,540 kg \approx \mathbf{1,5 kg}$$

Hvis man fraregner vægten af vingen, så vil det være det samme som, at køre med et 1,5 kg lod i bagagerummet.

Hvis bilen kører på motorvejen og har en fart på $130 \frac{km}{time}$ så kan kraften den nedadrettede kraft findes ved:

$$F_l = \frac{1}{2} \cdot 0,407 \cdot 1,2041 \frac{kg}{m^3} \cdot (0,160m \cdot 2,00m) \cdot \left(130 \frac{km}{time}\right)^2 \approx 102,2489 N \approx \mathbf{102 N}$$

Dette kan omregnes til en masse:

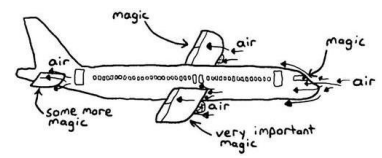
$$\frac{102,2489 N}{9,82 \frac{N}{kg}} \approx 10,412 kg \approx \mathbf{10,4 kg}$$

Hvis man fraregner vægten af vingen, så vil det være det samme som at køre rundt med et 10,4 kg lod i bagagerummet.

Hvis bilens fart øges til $220 \frac{km}{time}$ så bliver kraften:

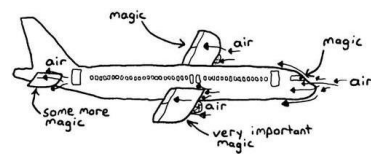
$$F_l = \frac{1}{2} \cdot 0,407 \cdot 1,2041 \frac{kg}{m^3} \cdot (0,160m \cdot 2,00m) \cdot \left(220 \frac{km}{time}\right)^2 \approx 292,8312 N \approx \mathbf{293 N}$$

Dette kan omregnes til en masse:



$$m = \frac{292,8312 \text{ N}}{9,82 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} \approx 29,820 \text{ kg} \approx \mathbf{29,8 \text{ kg}}$$

Fra regnet massen af vingen, så vil det i dette tilfælde, være det samme som at køre rundt med en 29,8 kg lod i bagagerummet.



Bilag 7: Luftmodstanden på en vinge



Materialer:

I dette forsøg undersøger jeg hvordan vingen påvirkes af en luftmodstand. Der er et såkaldt "drag" af vingen, som bevæger sig i en horisontal retning (baglæns).

Undersøgelsen sker ved forskellige angrebsvinkler af vingen. (-35° til 45°)

I dette forsøg skal jeg bruge:

• Vinge model	• Skinne	• Skinne vogn
• Dynamometer 1,0 N	• Logger Pro	• Dynamoholder
• Bøger	• Luftkanon	• Vaterpas

I forsøget bliver vingen påmonteret en vogn og vognen sættes på en skinne. Skinne sættes foran luftkanonen og det sikres, at skinne står vandret.

Herefter monteres et nulstillet dynamometer (på 1 N) forrest på skinne. Vognen hægtes nu på krogen fra dynamometeret.

I forsøget sættes luftkanonen til at blæse med maks. hastighed (11 m/s).

Angrebsvinklen for vingen sættes til -35° og hæves med 5° pr. opsamling til angrebsvinklen 45° opnås.

Luftkanonen tændes og man kan aflæse luftmodstanden som vingen påvirkes af. Dataene indtastes i Logger Pro.