

Задача 1

Метод прогонки для решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Условие

Задача взята из учебного пособия В. В. Демченко «Вычислительный практикум по прикладной математике», — М.: МФТИ, 2007, — 196 с, лабораторной работы №4, варианта №3, задания №10.

Найти численное решение краевой задачи для одномерного стационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] - q(x)u(x) = -f(x)$$

в 11-ти равноудалённых точках отрезка $[0,1]$ с относительной точностью 0,0001. Отладку программы произвести на модельной задаче с постоянными коэффициентами.

Краевые условия задачи

$$u(0) = 0; u(1) = 1.$$

Дополнительные условия в точке разрыва

$$\begin{cases} u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0); \\ k(x_0 - 0)u_x(x_0 - 0) = k(x_0 + 0)u_x(x_0 + 0); \\ x < x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} : k(x) = x^2 + \frac{1}{2}; q(x) = e^{-x^2}; f(x) = \cos x; \\ x > x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} : k(x) = x^2 + \frac{1}{2}; q(x) = 1; f(x) = 1; \end{cases}$$

Модельная задача

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}; k(x) = k(x_0); q(x) = q(x_0); f(x) = f(x_0).$$

Решение

Решение задачи состоит из трёх частей:

1. Аналитическое решение модельной задачи.
2. Численное решение модельной задачи с заданной точностью. Для отладки следует использовать сеточную функцию, построенную на аналитическом решении.
3. Численное решение задачи с переменными коэффициентами с заданной точностью. Необходимо проверить сходимость решения на последовательно удваиваемых сетках.

Для численного решения задачи используется метод аппроксимации производной конечными разностями. Для решения системы уравнений разностной задачи применяется метод прогонки. Из-за того, что функции в исходном уравнении имеют точку разрыва второго рода, прогонка производится в двух направлениях: от каждого из краёв с известными условиями до точек, ближайших к разрыву, и обратно. Для определения точности полученного решения сравнивается максимальное отклонение значения функции, полученной на сетке с шагом h , от значения функции, полученного на сетке с шагом $h/2$.

Вывод программы производится в два этапа:

1. Три столбца с решениями: первое вычислено с шагом до последнего удвоения сетки, второе — после; второе — после; третье решение аналитическое.
2. Два столбца с решениями: первое вычислено с шагом до последнего удвоения сетки; второе — после.