Задача 2

Метод конечных разностей для решения уравнения с частными производными гиперболического типа

Условие

Задача взята из учебного пособия В. В. Демченко «Вычислительный практикум по прикладной математике», — М.: МФТИ, 2007, — 196 с, лабораторной работы №5, варианта №2, задания №7.

Найти аналитическое и численное решения смешанной задачи для уравнения переноса и сравнить их значения в 11-ти равноудалённых точках в момент времени t = 1.

Дифференциальная задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x,t); a(x,t) \geq 0; \\ u(x,0) = \varphi(x); 0 \leq x \leq 1; \\ u(0,t) = \psi(t); 0 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

где

$a(x,t) = 1; b(x,t) = \cos x; 0 \leq t \leq 1; 0 \leq x \leq 1;$

$\varphi(x) = \ln(1+x^2) + \sin x; 0 \leq x \leq 1;$

$\psi(t) = \ln(1+t^2); 0 \leq t \leq 1;$

Разностная схема:

$$D_h = \left\{(x_l, t^n) : x_l = hl; hL = 1; l = \overline{0,L}; t^n = n\tau; \tau N = 1; n = \overline{0,N}\right\}$$

$$\begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n + \frac{\tau}{2h}(-u_{l-2}^n + 4u_{l-1}^n - 3u_l^n) + \frac{\tau^2}{2h^2}(u_{l-2}^n - 2n_{l-1}^n + u_l^n) + \tau\cos x_l + \frac{\tau^2}{2}\sin x_l; \\ l = \overline{2,L}; n = \overline{0,N-1}; \\ u_l^0 = \ln(1+x_l^2) + \sin x_l; l = \overline{0,L}; \\ u_0^n = \ln(1+(t^n)^2); n = \overline{1,N} \end{cases}$$

Решение

Аналитическое решение имеет вид:

$u(x,t) = \ln(1+(x-t)^2) + \sin x$.

Для корректной постановки разностной задачи требуется задать дополнительное условие, которое находится из разложения следа u_l^n в ряд Тейлора до $O(h^3)$ относительно точки (x_0, t^n). После преобразования производных с помощью уравнений из условия, дополнительное условие принимает вид:

$$u_1^n = \ln\left(1+(t^n)^2\right) + h\left(1 - \frac{2t^n}{1+(t^n)^2}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{2}{1+(t^n)^2} - \frac{(2t^n)^2}{(1+(t^n)^2)^2}\right).$$

Для вычислений были выбраны одинаковые шаги сеток h и τ с их удвоением на каждой итерации. В этом случае всегда выполняется условие устойчивости разностной схемы. Точность полученного решения определяется сравнением максимального отклонения значения функции, полученной на сетке с шагом h и τ, от значения функции, полученного на сетке с шагом $h/2$ и $\tau/2$.

Вывод программы имеет вид пяти столбцов, содержащих значения соответствующих сеток в 11-ти точках: переменной x_l; аналитического решения $u(x_l,1)$;

численного решения u_l^1; погрешности решения, полученного на предпоследней итерации; погрешности решения, полученного на последней итерации.