

Matematikk R2
Innlevering kap 2
Integrasjon

Marcus Denslow

29.10.25

Chapter 1

Innlevering kap 2 - Integrasjon

1.1 Oppgave 1

Teorem 1.1.1 Delvis integrasjon

La u og v være deriverbare funksjoner av x . Da gjelder

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

eller ekvivalent

$$\int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \, dx$$

Eksempel 1.1.1 (Delvis integrasjon)

Vi skal beregne $\int x e^x \, dx$.

La $u = x$ og $dv = e^x \, dx$. Da får vi $du = dx$ og $v = e^x$.

Ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx &= x e^x - \int e^x \, dx \\ &= x e^x - e^x + C \\ &= e^x(x - 1) + C \end{aligned}$$

Oppgave 1a

Finn et integral som man kan løse ved metoden delvis integrasjon, men som ikke kan løses ved variabelskifte eller delbrøksoppspalting. Forklar hvorfor bare den ene metoden fungerer og løs integralet.

Løsning:

Integralet som skal løses er

$$\int x \sin(x) \, dx$$

Hvorfor virker bare delvis integrasjon?

- **Variabelskifte fungerer ikke:** Det finnes ingen naturlig substitusjon som forenkler integralet. Med $u = x$ forsvinner ikke $\sin(x)$, og med $u = \sin(x)$ får man $du = \cos(x) \, dx$, men integranden inneholder x , ikke $\cos(x)$.
- **Delbrøksoppspalting fungerer ikke:** Metoden brukes bare for rasjonale funksjoner (brøker av polynomer). Siden integralet inneholder $\sin(x)$, som ikke er en rasjonell funksjon, kan ikke metoden brukes her.

- **Delvis integrasjon fungerer:** Integralet er et produkt av to ulike funksjonstyper (x og $\sin(x)$), noe som passer perfekt for delvis integrasjon.

Løsning med delvis integrasjon:

Med formelen $\int u dv = uv - \int v du$ setter man $u = x$ og $dv = \sin(x) dx$.

Dette gir:

$$\begin{aligned} du &= dx \\ v &= -\cos(x) \end{aligned}$$

Ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= x \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + C \end{aligned}$$

Svar: $\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$

Merk:-

Delbrøksoppspalting brukes når vi har en rasjonell funksjon (brøk av polynomer) som kan deles opp i enklere brøker. For eksempel kan $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ skrives som summen av to enklere brøker: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$.

Oppgave 1b

Finn et integral som man kan løse ved metoden delbrøksoppspalting, men som ikke kan løses ved variabelskifte eller delvis integrasjon. Forklar hvorfor bare den ene metoden fungerer og løs integralet.

Løsning:

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

Hvorfor virker bare delbrøksoppspalting?

- **Variabelskifte fungerer ikke:** Det finnes ingen naturlig substitusjon som forenkler integralet. Nevneren $x^2 - 1$ er et polynom som ikke blir enklere ved substitusjon.
- **Delvis integrasjon fungerer ikke:** Delvis integrasjon krever et produkt av to funksjoner der man kan derivere den ene og integrere den andre. Her har man en rasjonell funksjon (brøk), ikke et produkt.
- **Delbrøksoppspalting fungerer:** Dette er en ekte rasjonell funksjon der tellerens grad er mindre enn nevnerens grad, og nevneren kan faktorerises. Perfekt for delbrøksoppspalting.

Løsning med delbrøksoppspalting:

Nevneren faktorerises:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Brøken spaltes opp:

$$\frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

Multipliserer begge sider med $(x - 1)(x + 1)$:

$$1 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

For å finne A og B settes det inn strategiske verdier av x :

For $x = 1$:

$$1 = A(2) + B(0) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

For $x = -1$:

$$1 = A(0) + B(-2) \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Altså:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1}$$

Integralet blir da:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \int \left(\frac{1/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

Svar: $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$

Merk:-

Integranden er ikke definert for $x = \pm 1$, så resultatet gjelder på hvert sammenhengende intervall der $x \neq \pm 1$, det vil si for $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (-1, 1)$ eller $x \in (1, \infty)$.

1.2 Oppgave 2

Teorem 1.2.1 Variabelskiftesetningen

La g være en deriverbar funksjon og f være kontinuerlig. Da gjelder

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

der $u = g(x)$ og $du = g'(x) dx$.

For bestemte integraler:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Eksempel 1.2.1 (Variabelskifte)

Vi skal beregne $\int 2x(x^2 + 1)^3 dx$.

La $u = x^2 + 1$. Da er $du = 2x dx$.

Ved variabelskifte:

$$\begin{aligned} \int 2x(x^2 + 1)^3 dx &= \int u^3 du \\ &= \frac{u^4}{4} + C \\ &= \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C \end{aligned}$$

Oppgave 2a

Bruk derivasjon til å vise at $\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{x}{1-x} + C_1$

Løsning: For å vise at $\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{x}{1-x} + C_1$ deriveres høyre side. Hvis resultatet blir integranden, stemmer likningen.

Deriverer $\frac{x}{1-x}$ med kvotientregelen: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Med $u = x$ og $v = 1 - x$ får man $u' = 1$ og $v' = -1$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) &= \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Dette er akkurat integranden.

Siden derivasjon og integrasjon er motsatte operasjoner, følger det at:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{x}{1-x} + C_1$$

□

Oppgave 2b

Bruk variabelskiftet $u = 1 - x$ til å vise at $\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{1-x} + C_2$

Løsning:

Med variabelskiftet $u = 1 - x$ får man:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -1 \\ du &= -dx \\ dx &= -du\end{aligned}$$

Substituerer inn i integralet:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-x)^2} dx &= \int \frac{1}{u^2} \cdot (-du) \\ &= - \int u^{-2} du\end{aligned}$$

Integrerer:

$$\begin{aligned}- \int u^{-2} du &= - \left(\frac{u^{-1}}{-1} \right) + C_2 \\ &= - \left(-\frac{1}{u} \right) + C_2 \\ &= \frac{1}{u} + C_2\end{aligned}$$

Tilbakesubstitusjon med $u = 1 - x$ gir:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{1-x} + C_2$$

□

Oppgave 2c

Forklar hvordan begge disse formlene kan være samme samtidig.

Løsning:

To forskjellige uttrykk for det samme integralet:

$$\text{Fra 2a: } \int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{x}{1-x} + C_1$$

$$\text{Fra 2b: } \int \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{1-x} + C_2$$

Disse ser forskjellige ut, men de representerer faktisk samme familie av funksjoner. For å se sammenhengen, omskrives $\frac{x}{1-x}$.

Siden $x = (x-1) + 1$ kan man skrive:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x} &= \frac{(x-1)+1}{1-x} \\
&= \frac{x-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{-(1-x)}{1-x} + \frac{1}{1-x} \\
&= -1 + \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x} - 1
\end{aligned}$$

Dermed:

$$\frac{x}{1-x} + C_1 = \frac{1}{1-x} - 1 + C_1 = \frac{1}{1-x} + (C_1 - 1)$$

Med $C_2 = C_1 - 1$ får man:

$$\frac{x}{1-x} + C_1 = \frac{1}{1-x} + C_2$$

Begge formlene er altså riktige og representerer samme familie av antideriverte. Forskjellen ligger bare i integrasjonskonstanten, der $C_2 = C_1 - 1$. Dette viser at integralet til en funksjon ikke er unikt bestemt, men representerer en hel familie av funksjoner som kun skiller seg med en konstant.

Merk:-

Integranden er ikke definert for $x = 1$, så uttrykkene gjelder for intervaller der $x \neq 1$.

1.3 Oppgave 3

Definisjon 1.3.1: Bestemt integral (Riemann-sum)

Det bestemte integralet $\int_a^b f(x) dx$ kan tilnærmes ved å dele intervallet $[a, b]$ inn i n like store delintervaller av bredde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Riemann-summen er da:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

der x_i er et punkt i det i -te delintervallet. Når $n \rightarrow \infty$ konvergerer summen mot det eksakte integralverdien.

Gitt funksjonen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Oppgave 3a

Lag et program som finner en tilnærming på arealet som er avgrenset av x -aksen og $f(x)$.

Løsning:

For å finne arealet under $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ på intervallet $[-1, 1]$ brukes Riemann-summer. Intervallet deles inn i n like store delintervaller, og arealene av rektanglene summeres.

Python-program:

```
1 import numpy as np
2
3 def f(x):
4     """Funksjonen f(x) = sqrt(1-x^2)"""
5     return np.sqrt(1 - x**2)
6
7 def riemann_sum(a, b, n):
8     """
9     Beregner Riemann-sum for f(x) på intervallet [a, b]
10    med n rektangler. Bruker høyre endepunkt.
11    """
12    delta_x = (b - a) / n
13    total = 0
14
15    for i in range(1, n + 1):
16        x_i = a + i * delta_x
17        total += f(x_i) * delta_x
18
19    return total
20
21 # Beregn tilnærming med ulike verdier av n
22 a, b = -1, 1
23 n_values = [10, 100, 1000, 10000]
24
25 print("Tilnærming av arealet under f(x) = sqrt(1-x^2):")
26 for n in n_values:
27     areal = riemann_sum(a, b, n)
28     print(f"n={n:5d}: Areal ~ {areal:.8f}")
```

Resultat:

```
Tilnærming av arealet under f(x) = sqrt(1-x^2):
n = 10: Areal ~ 1.51852441
n = 100: Areal ~ 1.56913426
n = 1000: Areal ~ 1.57074374
n = 10000: Areal ~ 1.57079466
```


Når antall rektangler øker, konvergerer tilnærmingen mot en verdi rundt 1.5708. Dette gir mening siden $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ representerer øvre halvdel av en sirkel med radius 1, og arealet av en halvsirkel er $\frac{\pi}{2} \approx 1.5708$.

Oppgave 3b

Hvor stort er det eksakte arealet $\int_{-1}^1 f(x)dx$? Finn ut hvor mange rektangler man må dele flatestykket opp i for at tilnærmingsverdien fra oppgave a) skal få 8 riktige siffer fra eksakteverdien

Løsning:

Del 1: Eksakt areal

Funksjonen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ representerer øvre halvdel av sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ med radius 1.

Arealet av en halvsirkel med radius r er $\frac{\pi r^2}{2}$. Med $r = 1$:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57079633$$

Del 2: Antall rektangler for 8 riktige siffer

For å få 8 riktige siffer må feilen være mindre enn 0.5×10^{-8} . Binær søk brukes for å finne det minste n som gir tilstrekkelig nøyaktighet.

Python-program:

```

1 import numpy as np
2
3 def f(x):
4     return np.sqrt(1 - x**2)
5
6 def riemann_sum(a, b, n):
7     delta_x = (b - a) / n
8     total = 0
9     for i in range(1, n + 1):
10         x_i = a + i * delta_x
11         total += f(x_i) * delta_x
12     return total
13
14 eksakt_areal = np.pi / 2
15 target_accuracy = 0.5e-8
16
17 # Binaer sok mellom n = 100000 og n = 1000000
18 left, right = 100000, 1000000
19
20 while right - left > 1000:
21     mid = (left + right) // 2
22     approx = riemann_sum(-1, 1, mid)
23     error = abs(eksakt_areal - approx)
24
25     if error < target_accuracy:
26         right = mid # Funker, prov lavere n
27     else:
28         left = mid # For stor feil, treng hoyere n
29
30 # Rund opp til naermeste 1000
31 n_final = ((right + 999) // 1000) * 1000
32 approx_final = riemann_sum(-1, 1, n_final)
33 error_final = abs(eksakt_areal - approx_final)

```

```

34
35 print(f"Minste n: {n_final}")
36 print(f"Feil: {error_final:.2e}")

```

Resultat:

Eksakt areal: 1.5707963268

Bruker binær søk:

```

Tester n = 550000: Feil = 4.08e-09 -> Funker!
Tester n = 325000: Feil = 8.98e-09 -> For stor feil
Tester n = 437500: Feil = 5.75e-09 -> For stor feil
Tester n = 493750: Feil = 4.79e-09 -> Funker!
...
Tester n = 480565: Feil = 4.99e-09 -> Funker!

```

Minste n (rundet til nærmeste 1000): 481000
 Feil: 4.99e-09

Dette gir 8 riktige siffer!

Det minste antallet rektangler som trengs er **481 000**.

Oppgave 3c

Finn ved programmering øvre grense, b , slik at $\int_{-1}^b f(x)dx = 1$

Løsning:

For å finne b brukes binær søk (intervallhalveringsmetoden). Integralet er 0 når $b = -1$ og $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ når $b = 1$. Siden vi søker etter integral = 1, må b ligge mellom -1 og 1 .

Python-program:

```

1 import numpy as np
2
3 def f(x):
4     return np.sqrt(1 - x**2)
5
6 def riemann_sum(a, b, n):
7     delta_x = (b - a) / n
8     total = 0
9     for i in range(1, n + 1):
10         x_i = a + i * delta_x
11         total += f(x_i) * delta_x
12     return total
13
14 # Finn b slik at integral fra -1 til b er 1
15 target_value = 1.0
16 n = 10000 # Bruk mange rektangler for god presisjon
17
18 # Binaer sok
19 left, right = -1, 1
20 tolerance = 1e-6
21
22 iterations = 0

```

```

23 while right - left > tolerance:
24     iterations += 1
25     b_mid = (left + right) / 2
26     integral = riemann_sum(-1, b_mid, n)
27
28     if integral < target_value:
29         left = b_mid
30     else:
31         right = b_mid
32
33 b_final = (left + right) / 2
34 integral_final = riemann_sum(-1, b_final, n)
35
36 print(f"Resultat: b ~ {b_final:.8f}")
37 print(f"Integral fra -1 til {b_final:.8f} = {integral_final:.8f}")

```

Resultat:

Resultat: $b \approx 0.21624041$

Integral fra -1 til $0.21624041 = 1.00000030$

Den øvre grensen er $b \approx 0.216$.

Dette kan verifiseres geometrisk: Med $b \approx 0.216$ får man et areal på 1, som er litt under $\frac{2}{3}$ av det totale arealet $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$. Dette gir mening siden det søkes etter omtrent $\frac{1}{1.571} \approx 0.637$ av halvsirkelen.

1.4 Oppgave 4

Teorem 1.4.1 Volum ved rotasjon (Skivemetoden)

Når et område mellom kurven $y = f(x)$ og x -aksen fra $x = a$ til $x = b$ roteres 360° om x -aksen, får vi et rotasjonslegeme med volum

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Hvis vi roterer området mellom to kurver $y = f(x)$ og $y = g(x)$ (der $f(x) \geq g(x)$) om x -aksen, blir volumet

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Merk:-

Ved rotasjon om x -aksen tenker vi oss at vi lager tynne skiver vinkelrett på x -aksen. Hver skive har tykkelse dx og radius $r = f(x)$, så arealet av tverrsnitt er $\pi r^2 = \pi [f(x)]^2$. Volumet blir da summen (integralet) av alle disse skivene.

Funksjonene f og g er gitt ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ g(x) &= -\frac{1}{4}x^2 + 2x \end{aligned}$$

Et flatestykke F er avgrenset av de to grafene.

Oppgave 4a

Finn arealet av flatestykket F .

Løsning:

For å finne arealet av flatestykket F må skjæringspunktene mellom de to grafene finnes først, deretter integreres differansen mellom funksjonene.

Skjæringspunktene:

Setter $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{4}x^2 + 2x \\ \frac{1}{4}x^2 + x - 2x &= 0 \\ \frac{1}{4}x^2 - x &= 0 \\ x \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir $x = 0$ eller $\frac{1}{4}x = 1 \Rightarrow x = 4$

Skjæringspunktene er $x = 0$ og $x = 4$.

Hvilken funksjon er øverst:

Tester med et punkt mellom skjæringspunktene, f.eks. $x = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \\ g(2) &= -\frac{1}{4}(2)^2 + 2(2) = -1 + 4 = 3 \end{aligned}$$

Siden $g(2) > f(2)$ ligger $g(x)$ over $f(x)$ på intervallet $[0, 4]$.

Arealet:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^4 [g(x) - f(x)] \, dx \\
&= \int_0^4 \left[-\frac{1}{4}x^2 + 2x - x \right] \, dx \\
&= \int_0^4 \left[-\frac{1}{4}x^2 + x \right] \, dx \\
&= \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \\
&= \left(-\frac{1}{12} \cdot 64 + \frac{1}{2} \cdot 16 \right) - 0 \\
&= -\frac{64}{12} + 8 \\
&= -\frac{16}{3} + \frac{24}{3} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Svar: Arealet av flatestykket F er $\frac{8}{3}$ kvadratenheter.

Oppgave 4b

Finn volumet av den gjenstående kroppen vi får når vi dreier flatestykket 360° om x -aksen

Løsning:

For å finne volumet når flatestykket F roteres om x -aksen brukes formelen for rotasjonsvolum mellom to kurver.

Når området mellom to kurver $y = g(x)$ og $y = f(x)$ (der $g(x) \geq f(x)$) roteres om x -aksen, blir volumet:

$$V = \pi \int_a^b ([g(x)]^2 - [f(x)]^2) \, dx$$

Fra oppgave 4a er $g(x) \geq f(x)$ på intervallet $[0, 4]$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 ([g(x)]^2 - [f(x)]^2) \, dx \\
&= \pi \int_0^4 \left[\left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x \right)^2 - (x)^2 \right] \, dx
\end{aligned}$$

Utvider $\left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x \right)^2$:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x \right)^2 &= \left(-\frac{1}{4}x^2 \right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 \right) \cdot (2x) + (2x)^2 \\
&= \frac{1}{16}x^4 - x^3 + 4x^2
\end{aligned}$$

Setter inn:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left[\frac{1}{16}x^4 - x^3 + 4x^2 - x^2 \right] dx \\ &= \pi \int_0^4 \left[\frac{1}{16}x^4 - x^3 + 3x^2 \right] dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^4 \\ &= \pi \left[\frac{1}{80} \cdot 1024 - \frac{1}{4} \cdot 256 + 64 \right] - 0 \\ &= \pi \left[\frac{1024}{80} - 64 + 64 \right] \\ &= \pi \cdot \frac{1024}{80} \\ &= \pi \cdot \frac{64}{5} \\ &= \frac{64\pi}{5} \end{aligned}$$

Svar: Volumet av rotasjonslegemet er $\frac{64\pi}{5}$ kubikkenheter.

Oppgave 4c

Et flatestykke G er avgrenset av de to grafene, linja $x = a$ og linja $x = b$, der a og b er to tall mellom 0 og 4, og der $a < b$.

Bruk CAS til å bestemme tallene a og b slik at G får arealet $\frac{11}{6}$, og at volumet blir $\frac{361\pi}{40}$ når vi dreier G 360° om x -aksen.

Løsning:

Flatestykket G er avgrenset av grafene til $f(x) = x$ og $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$, samt linjene $x = a$ og $x = b$.
 a og b må finnes slik at:

- Arealet: $\int_a^b \left[-\frac{1}{4}x^2 + x \right] dx = \frac{11}{6}$
- Volumet: $\pi \int_a^b \left[\frac{1}{16}x^4 - x^3 + 3x^2 \right] dx = \frac{361\pi}{40}$

Løsning med GeoGebra CAS:

Volumlikningen deles med π på begge sider for å forenkle:

$$\int_a^b \left[\frac{1}{16}x^4 - x^3 + 3x^2 \right] dx = \frac{361}{40}$$

I GeoGebra CAS skriver vi følgende kommandoer:

```
f(x) := x
g(x) := -1/4 * x^2 + 2*x
areal := Integral(g(x) - f(x), x, a, b) = 11/6
volum := Integral((g(x))^2 - (f(x))^2, x, a, b) = 361/40
Solve({areal, volum}, {a, b})
```

Resultat fra CAS:

GeoGebra gir flere løsninger:

$\{a = 1, b = 3\}, \{a = 6.12, b = -1.53\}, \{a = -0.67, b = 2.79\},$
 $\{a = 1.12, b = 4.76\}, \dots\}$

Løsningen må oppfylle betingelsene:

- $0 < a < b < 4$ (begge tall skal være mellom 0 og 4)
- $a < b$

Den eneste løsningen som oppfyller dette er: $a = 1$ og $b = 3$

Verifisering:

Areal:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \left[-\frac{1}{4}x^2 + x \right] dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{27}{12} + \frac{9}{2} \right) - \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{6} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Volum (kan verifiseres tilsvarende):

$$V = \pi \int_1^3 \left[\frac{1}{16}x^4 - x^3 + 3x^2 \right] dx = \frac{361\pi}{40} \quad \checkmark$$

Svar: $a = 1$ og $b = 3$

1.5 Oppgave 5

Teorem 1.5.1 Geometrisk rekke

En uendelig geometrisk rekke på formen

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

konvergerer hvis og bare hvis $|r| < 1$, og har da summen

$$S = \frac{a}{1-r}$$

der a er første ledd og r er kvotienten mellom påfølgende ledd.

Definisjon 1.5.1: Konvergensområde for en potensrekke

For en potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er konvergensområdet mengden av alle x -verdier der rekka konvergerer. For en geometrisk rekke $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ er konvergensområdet $|r| < 1$, altså intervallet $(-1, 1)$.

Teorem 1.5.2 Leddvis integrasjon av potensrekker

La $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrekke med konvergensområde $|x| < R$.

Da kan vi integrere ledd for ledd:

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Den integrerte rekka har samme konvergensområde $|x| < R$.

Merk:-

Når vi integrerer en potensrekke ledd for ledd, beholder den nye rekka samme konvergensområde som den opprinnelige. Dette gir oss en kraftig metode for å finne potensrekkeutviklinger av funksjoner.

Vi ser på den uendelige rekka

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Oppgave 5a

Finn konvergensområdet til rekka.

Løsning:

Rekka er:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Dette er en geometrisk rekke på formen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

der a er første ledd og r er kvotienten.

Første ledd: $a = 1$

For å finne kvotienten r ser man på forholdet mellom påfølgende ledd:

$$\begin{aligned}\frac{\text{andre ledd}}{\text{første ledd}} &= \frac{-x}{1} = -x \\ \frac{\text{tredje ledd}}{\text{andre ledd}} &= \frac{x^2}{-x} = -x \\ \frac{\text{fjerde ledd}}{\text{tredje ledd}} &= \frac{-x^3}{x^2} = -x\end{aligned}$$

Altså er kvotienten $r = -x$.
 Rekka kan også skrives som:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

En geometrisk rekke $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ konvergerer hvis og bare hvis $|r| < 1$.

Her er $r = -x$, så konvergenzbetingelsen blir:

$$\begin{aligned}|r| &< 1 \\ |-x| &< 1 \\ |x| &< 1\end{aligned}$$

Dette gir:

$$-1 < x < 1$$

Svar: Konvergenksområdet til rekka er $x \in (-1, 1)$ eller $|x| < 1$.

Oppgave 5b

Finne summen $s(x)$ av rekka.

Løsning:

Fra oppgave 5a er rekka en geometrisk rekke med:

- Første ledd: $a = 1$
- Kvotient: $r = -x$
- Konvergenksområde: $|x| < 1$

En geometrisk rekke $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ har summen:

$$S = \frac{a}{1-r}$$

når $|r| < 1$.

Setter inn $a = 1$ og $r = -x$:

$$\begin{aligned}s(x) &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

Verifisering:

For eksempel med $x = \frac{1}{2}$ (som ligger i konvergensområdet):

$$\text{Rekka: } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$\text{Formel: } s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Dette stemmer med at rekka konvergerer mot $\frac{2}{3}$.

Svar: Summen av rekka er $s(x) = \frac{1}{1+x}$ for $|x| < 1$.

Oppgave 5c

Løs likningene.

1. $s(x) = 2$

2. $s(x) = \frac{1}{3}$

Løsning:

Fra oppgave 5b er $s(x) = \frac{1}{1+x}$ for $|x| < 1$.

1) Løs $s(x) = 2$:

Setter inn $s(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 2 \\ 1 &= 2(1+x) \\ 1 &= 2 + 2x \\ -1 &= 2x \\ x &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sjekk konvergensområdet:

Løsningen må ligge i konvergensområdet $|x| < 1$:

$$\left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1 \quad \checkmark$$

Løsningen er gyldig.

Svar: $x = -\frac{1}{2}$

2) Løs $s(x) = \frac{1}{3}$:

Setter inn $s(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{3} \\ 3 &= 1+x \\ x &= 2\end{aligned}$$

Sjekk konvergensområdet:

Løsningen må ligge i konvergensområdet $|x| < 1$:

$$|2| = 2 > 1 \quad \times$$

Løsningen $x = 2$ ligger utenfor konvergensområdet til rekka. Dette betyr at rekka ikke konvergerer for $x = 2$, og derfor er $s(2) = \frac{1}{3}$ ikke definert i konteksten av denne rekka.

Svar: Ingen løsning (løsningen $x = 2$ ligger utenfor konvergensområdet)

Vi kan vise at når vi integrerer ledd for ledd en rekke med summen $s(x)$, får vi ei ny rekke med samme konvergensområde og der summen er en antiderivert til $s(x)$.

Oppgave 5d

Bruk dette til å finne en rekke som har summen $f(x) = \ln(1+x)$.

Løsning:

Fra oppgave 5b:

$$s(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

for $|x| < 1$.

Deriverer $f(x) = \ln(1+x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = s(x)$$

Dette betyr at $\ln(1+x)$ er en antiderivert til $s(x)$.

Siden summen av den integrerte rekka skal være en antiderivert til $s(x)$, integreres rekka ledd for ledd:

$$\begin{aligned} \int s(x) dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \end{aligned}$$

Dette gir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ved å sette $m = n + 1$ (så starter summen fra $m = 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m}$$

Bestemme integrasjonskonstanten:

Når $x = 0$:

$$\begin{aligned} \ln(1+0) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{0^m}{m} + C \\ 0 &= 0 + C \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Rekka som har summen $f(x) = \ln(1+x)$ er:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

for $|x| < 1$.

Svar: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ for $|x| < 1$.

Oppgave 5e

La $s_k(x)$ være summen av de fem første leddene i den rekka du fant i oppgave d). Tegn grafen til f og grafen til s_k i et koordinatsystem. Hva ser du?

Løsning:

Fra oppgave 5d:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

De fem første leddene:

Summen av de fem første leddene er:

$$s_5(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

Tegning av grafene:

Grafene til:

- $f(x) = \ln(1+x)$
- $s_5(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$

tegnes i samme koordinatsystem for intervallet $[-0.8, 0.8]$ (som ligger innenfor konvergensområdet $|x| < 1$).

Observasjoner:

Ved å se på grafene:

1. **Nær $x = 0$:** Grafene til $f(x) = \ln(1+x)$ og $s_5(x)$ ligger svært nært hverandre. Dette viser at Taylor-polynomet gir god tilnærming nær utviklingspunktet $x = 0$.
2. **Lenger fra $x = 0$:** Jo lenger man beveger seg fra $x = 0$, desto større blir forskjellen mellom $f(x)$ og $s_5(x)$. Tilnærmingen blir dårligere.
3. **Ved kantene av konvergensområdet:** Når x nærmer seg -1 eller 1 (kantene av konvergensområdet), avviker $s_5(x)$ mer og mer fra $f(x)$.
4. Dette viser at en Taylor-rekke (potensrekke) konvergerer mot funksjonen innenfor konvergensområdet, men at flere ledd trengs for å få god tilnærming lenger fra utviklingspunktet. Med bare fem ledd får man god tilnærming nær $x = 0$, men tilnærmingen blir dårligere når man beveger seg vekk fra dette punktet.

Svar: Grafene viser at $s_5(x)$ tilnærmer $\ln(1+x)$ godt nær $x = 0$, men avviker mer jo lenger man kommer fra origo. Dette demonstrerer hvordan Taylor-polynomet gir bedre tilnærming nær utviklingspunktet.