matte
integrasjon av omdreiningslegeme

Marcus Denslow

Contents

Chapter 1

1.1 volum av omdreningslegemer

Definition 1.1.1

Hvis du deler opp et hardlokt egg med en eggdeler, får du skiver. Volumet av egger er lik summen av vilumene av de enkelte skivene

Tilsvarende kan vi tenke oss at vi deler opp et omdreiningslegeme i skiver, og finner volumet av elegemet ved å summere volumet av skivene

Solution: vi fil finne volumet V av romfiguren ovenfor mellom $x = a$ og $x = b$.

vi tenker oss da at den er delt opp i n skiver, hver med tykkelse $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

alle snittflatene står vinkelrett på x-aksen.

avstandene fra origo til snittflatene er $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n,$ der $x_0 = a$ og $x_n = b$.

i hvert intervall velger vi en verdi for x, som vi kaller x_i^*.
arealet av snittflaten ved x_i^* kaller vi $A(x_i^*)$.
samlet volum av skivene er tilnærmet lik summen av volumet av hver skive

$$A(x_1^*) \times \Delta x + A(x_2^*) \times \Delta x + A(x_3^*) \times \Delta x + \cdots + A(x_n^*) \times \Delta x = \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*) \times \Delta x$$

dette kjenner vi igjen som en riemannsum. Jo flere skiver vi deler volumet i, desto mindre blir forskjellen på denne summen og volumet V. Etter definisjonen av det bestemte integralet får vi da

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*) \times \Delta x = \int_a^b A(x)\,dx.$$

arealet av snittflaten er en sirkel med radius $r = f(x)$. da er $A(x) = \pi r^2 = \pi \times (f(x))^2$

derfor er volumet

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi \times (f(x))^2\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

1.2

Note:-

vi kan også finne volumet av et annet omdreiningslegeme ved å dreie grafen om y-aksen. dette gjøres ved å integrere med hensyn på y (dy).

$$V = \pi \int_a^b (g(y))^2 \, dy.$$

der g den omvendte funksjonen til f, $c = f(a)$ og $d = f(b)$

1.3 EKSEMPEL 21

Question 1: eksempel 21

på figuren har vi tegnet grafen til en funksjon f gitt ved $f(x) = -x + 4$

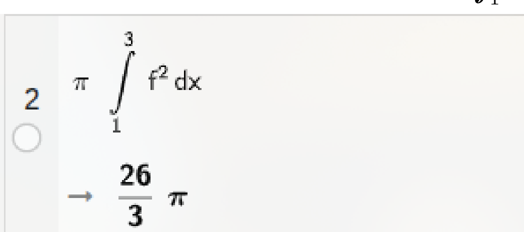
Grafen til f, x-aksen og linjene $x = 1$ og $x = 3$ avgrenser et flatestykke. det er vist med lyseblått i figuren.

når dette flatestykket dreies 360 grader om x-aksen, framkommer en romfigur som kalles es avkortet kjegle. tversnittet i den avkortede kjegla er vist med lyseblått og mørkeblått i figuren.

finn den eksakte verdien av volumet av denne romfiguren.

Solution: vi får det samme volumet når vi dreier flatestykket om x-aksen som ved å dreie grafen til f i intervallet $[1, 3]$ om x-aksen.

volumet er derfor gitt ved uttrykket $\pi \times \int_1^3 -x + 4 \, dx$



1.4 oppgaver

Question 1: 2.106

et omdreiningsobjekt framkommer ved at grafen til funksjonen f blir dreid 360 grader om førsteaksen. Finn volumet av omdreiningslegemet når

a) $f(x) = 3x$ og $D_f = [1, 2]$, b) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ og $D_f = [1, 4]$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \text{ og}} D_f = [3, 7]$, d) e^xog $D_f = [0, \ln 3]$

.

Solution: vi må bare bruke formlen $\pi \times \int_a^b (f(x))^2 \, dx$

a)

$$
\begin{aligned}
&\pi \times \int_1^2 f^2 \, dx \\
&= \pi \times \int_1^2 (3x)^2 \, dx \\
&= \pi \times \int_1^2 9x^2 \, dx \\
&= 9\pi \times \int_1^2 x^2 \, dx \\
&= 9\pi \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= 9\pi \times \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
&= 9\pi \times \frac{7}{3} \\
&= \pi \times \frac{63}{3} \\
&= \boxed{21\pi}
\end{aligned}
$$

.

b)

$$
\begin{aligned}
&\pi \times \int_1^4 f^2 \, dx \\
&= \pi \times \int_1^4 \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 \, dx \\
&= \pi \times \int_1^4 2x + 3 \, dx \\
&= \pi \times \left(\int_1^4 2x \, dx + \int_1^4 3 \, dx\right) \\
&= \pi \times \left(\left[\frac{2x^2}{2}\right]_1^4 + \left[\frac{3x}{1}\right]_1^4\right) \\
&= \pi \times \left(\left(\frac{32}{2} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{12}{1} - \frac{3}{1}\right)\right) \\
&= \pi \times \left(\left(\frac{30}{2}\right) + \left(\frac{9}{1}\right)\right) \\
&= \pi \times (15 + 9) \\
&= \boxed{24\pi}
\end{aligned}
$$

.

c)

$$
\begin{aligned}
&= \pi \times \int_3^7 (\frac{1}{\sqrt{\pi}})^2 \, dx \\
&= \pi \times \int_3^7 \frac{1}{\pi} \, dx \\
&= \pi \times \frac{1}{\pi} \times \int_3^7 1 \, dx \\
&= [x]_3^7 \\
&= 7 - 3 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

.

d)

$$
\begin{aligned}
&\pi \int_0^{\ln 3} (e^x)^2 \;\; dx \\
&= \pi \times \int_0^{\ln 3} e^{2x} \, dx \\
&= \pi \times \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^{\ln 3} \\
&= \pi \times (\frac{1}{2}) \times \left[e^{2 \times \ln 3} - e^0\right] \\
&= \pi \times (\frac{1}{2}) \times \left[e^{\ln 3^2} - 1\right] \\
&= \pi \times \frac{1}{2} \times [3^2 - 1] \\
&= \pi \times \frac{1}{2} \times 8 \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

.

Question 2: 2.107

finn omdreinings volumet til $f(x) = 2x$

Solution:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \times \int_{-5}^{5} (2x)^2 \, dx \\
&= \pi \times \int_{-5}^{5} 4x^2 \, dx \\
&= 4 \times \pi \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} \\
&= 4\pi \times \left(\frac{125}{3} - \frac{-125}{3}\right) \\
&= \pi \times \left(\frac{500}{3} - \frac{-500}{3}\right) \\
&= \frac{1000\pi}{3}
\end{aligned}
$$

.

Question 3: 2.108

finn omdreiningsvolumet til $\sqrt{25 - x}$

Theorem 1.4.1 vi bruker $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$

Solution:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \times \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 \, dx \\
&= \pi \times \int_{-5}^{5} 25 - x^2 \, dx \\
&= \pi \times \left(\int_{-5}^{5} 25 \, dx - \int_{-5}^{5} x^2 \, dx\right) \\
&= \pi \times \left([25x]_{-5}^{5} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5}\right) \\
&= \pi \times \left([125 - (-125)] - \left[\frac{125}{3} - \frac{-125}{3}\right]\right) \\
&= \pi \times \left(250 - \frac{250}{3}\right) \\
&= \pi \times \left(\frac{750}{3} - \frac{250}{3}\right) \\
&= \pi \times \left(\frac{500}{3}\right) \\
&= \frac{500\pi}{3}
\end{aligned}
$$

.

Question 4: 2.109

et omdreiningsobjekt framkommer ved at grafen til funksjonen f blir dreid 360 grader om førsteaksen. Finn volumet av omdreiningslegemet når

$$\begin{aligned}
&a)g(y) = 2y \text{og} d_g = [2,5] \\
&b)g(y) = \sqrt{y+1} \text{og} D_g = [-1,2] \\
&c)f(x) = \ln x \text{og} D_f = [1,e] \\
&d)f(x) = e^x \text{og} D_f = [0, \ln 3]
\end{aligned}$$

.

Solution: a)

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b (g(y))^2\, dy \\
&= \pi \int_2^5 (2y)^2\, dy \\
&= \pi \int_2^5 4y^2\, dy \\
&= \pi \times \left[\frac{4y^3}{3}\right]_2^5 \\
&= \pi \times \left(\frac{500}{3} - \frac{32}{3}\right) \\
&= \pi \times \left(\frac{468}{3}\right) \\
&= \pi \times 156 \\
&= 156\pi
\end{aligned}$$

.

b)

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b (g(y))^2 \, dy \\
&= \pi \int_{-1}^{2} (\sqrt{y+1})^2 \, dy \\
&= \pi \int_{-1}^{2} y + 1 \, dy \\
&= \pi \times \left(\int_{-1}^{2} y \, dy + \int_{-1}^{2} 1 \, dy \right) \\
&= \pi \times \left(\left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{2} + \left[\frac{1x}{1} \right]_{-1}^{2} \right) \\
&= \pi \times \left(\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{1} - \frac{-1}{1} \right) \right) \\
&= \pi \times \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{1} \right) \\
&= \pi \times \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{2} \right) \\
&= \pi \times \left(\frac{9}{2} \right) \\
&= \frac{9\pi}{2}
\end{aligned}
$$

.

c)

$$
\begin{aligned}
&V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 \, dx \\
&y = \ln x, \quad x = e^y, \quad D_y = [\ln 1, \ln e] = [0, 1] \\
&V = \pi \int_0^1 (e^y)^2 \, dy \\
&= \pi \int_0^1 e^{2y} \, dy \\
&= \pi \times \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 \\
&= \pi \times \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} \right] \\
&= \pi \times \left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right] \\
&= \pi \times \frac{1}{2} \left[e^2 - 1 \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \times \left[e^2 - e^0 \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \times \left[e^2 - 1 \right]
\end{aligned}
$$

.

d)

$$V = \pi \int_0^{\ln 3} (e^x)^2 \, dx$$

$$y = e^x, \quad x = \ln y, \quad D_y = \left[e^0, e^{\ln 3}\right] = [1, 3]$$

.