

Theorem
Materialtheorien
Raumableitung
Hyperelastizität
Plastizität
Bilanzgleichungen
Zeitableitung
Platzierung
Zerlegung
additive
Isotropie
Kontinuum
Kinematik
Inelastizität
Mechanik
Randwertprobleme
Viskoplastizität
Tensorfunktion
Symmetrie
Axiom
Raum
multiplikative
Bewegungsgesetze
Spannungsanalyse
Thermodynamik
Thermoplastizität
Thermoelastizität
Zwangsbedingungen
Elastizität
Invarianzen
Thermoplastizität
Materialplastizität
Isomorphie
reduzierte
Formen

Kontinuumsmechanik & Elastizität+Plastizität

Prof. Dr.-Ing. habil. Albrecht Bertram

Dr.-Ing. Rainer Glüge

Prüfungsvorbereitung

Nomenklatur

Schreibweise

- a - Skalar, Tensor 0. Stufe
(klein, kursiv, normales Schriftgewicht)
- \boldsymbol{a} - Vektor, Tensor 1. Stufe
(klein, kursiv, fett)
- \boldsymbol{A} - Dyade, Tensor 2. Stufe
(groß, kursiv, fett)
- $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ - Tetrade, Tensor 4. Stufe
(groß, kursiv, fett, kalligraphisch)

Lateinische Symbole

- t - Zeit
- u - Strukturverschiebung
- E - innere Energie
- F - Kraft
- A - Fläche
- J - JACOBI-Determinante
- K - kinetische Energie
- L - Spannungsleistung
- l - spezifische Spannungsleistung
- V - Volumen
- m - Masse
- p - Druck
- I - erste Invariante
- II - zweite Invariante
- III - dritte Invariante

Griechische Symbole

- ν - POISSON-Zahl
- α - irgendein Skalar
- λ_i - Eigenwerte von \boldsymbol{C} und \boldsymbol{B}
- μ_i - Eigenwerte von \boldsymbol{U} und \boldsymbol{V}
- ε - spezifische innere Energie
- σ_Y - spezifische innere Energie
- τ - Prozesszeit
- θ - Temperatur
- α_θ - thermischer Ausdehnungskoeffizient
- γ - Schubwinkel
- Γ - CHRISTOFFEL-Symbol
- ξ - natürliche Koordinate
- ρ - Dichte
- Ψ - spezifische freie Energie

χ - Bewegung

Symbole: Fraktur und Kalligraphie

- \mathcal{B} - materieller Körper, Kontinuum
- \mathcal{B}_0 - Referenzplatzierung
- \mathcal{B}_t - Momentanplatzierung
- \boldsymbol{C} - konstitutiver Tensor, Tensor 4. Stufe
- \mathcal{F} - FOURIER-Transformation
- \mathfrak{F} - Funktional
- \mathfrak{p} - ???
- \mathfrak{e} - ???
- \mathfrak{K} - ???

Mengen

- \mathbb{N} - natürliche Zahlen
- \mathbb{R} - reelle Zahlen
- \mathbb{R}^+ - positive reelle Zahlen
- \mathbb{Z} - integers

Räume

- \mathbb{R}^3 - Raum der reellen Zahlen ($ND = 3$)
- \mathbb{E}^3 - EUKLIDISCHER Raum ($ND = 3$)
- \mathcal{V} - Vektorraum

Indizes

- i, j, k, l - Laufindizes
- e - Elementzähler
- sym - symmetrisch
- skw - antimetrisch, schiefsymmetrisch
- vol - volumetrisch, Kugelanteil
- dev - deviatorisch
- min - Minimum, minimal
- max - Maximum, maximal

Mathematische Operationen

- \cdot - Skalarprodukt, inneres Produkt
- $\cdot\cdot$ - zweifache Verjüngung
- $:$ - Abbildung
- $:=, =:$ - Definition
- \equiv - identisch

\mapsto	- bildet ab in
\times	- Kreuz-, Vektorprodukt
\otimes	- dyadisches Produkt
$*$	- RAYLEIGH-Produkt
Π	- Produkt
\sum	- Summe
$(\dot{})$	- erste Ableitung nach der Zeit
$(\ddot{})$	- zweite Ableitung nach der Zeit
$(\dddot{})$	- dritte Ableitung nach der Zeit
$(\ddddot{})$	- vierte Ableitung nach der Zeit
d	- Differential
∂	- partielles Differential
\det	- Determinante
div	- Divergenz
grad	- Gradient
rot	- Rotation
sp, tr	- Spur (trace)
Δ	- LAPLACE-Operator
∇	- Nabla-Operator

Weitere mathematische Symbole

\wedge	- und
\vee	- oder
\in	- Element von
\forall	- für alle
\mathcal{E}, \mathbb{E}	- EUKLIDischer Raum
\mathcal{E}_{lap}	- elast. Bereich bei Plastifizierung
\mathcal{G}	- Symmetriegruppe
\mathcal{L}_{lin}	- Raum der linearen Abbildungen
\mathcal{L}_{lin}	- Raum der Verfestigungsvariablen
\mathcal{S}_{sym}	- Raum der sym. Tensoren 2. Stufe
\mathcal{P}_{sym}	- positiv symmetrisch
\mathcal{S}_{skw}	- Raum der antisym. Tensoren 2. Stufe
\mathcal{O}_{th}	- orthogonal
$\mathcal{O}_{\text{th}}^+$	- orthogonal
$\mathcal{O}_{\text{th}}^-$	- orthogonal
\mathcal{I}_{nv}	- Inverse
$\mathcal{I}_{\text{nv}}^+$	- positiv invers
$\mathcal{I}_{\text{nv}}^-$	- negativ invers
\mathcal{I}_{so}	- isotrop
$\mathcal{I}_{\text{so}}^+$	- isotrop, positiv
$\mathcal{I}_{\text{so}}^-$	- isotrop, negativ
\mathcal{U}	- Unterraum von \mathcal{E}
\mathcal{U}_{im}	- unimodular
$\mathcal{U}_{\text{im}}^+$	- unimodular, positiv
$\mathcal{U}_{\text{im}}^-$	- unimodular, negativ
\mathcal{D}_{ev}	- deviatorisch
$\mathcal{D}_{\text{ev}} \mathcal{S}_{\text{ym}}$	- deviatorisch

Kontinuum

x_0, \mathbf{X}	- Positionsvektor in Referenzplatzierung
\mathbf{x}	- Positionsvektor in Momentanplatzierung
$d\mathbf{X}$	- Linienelement in Referenzplatzierung
$d\mathbf{x}$	- Linienelement in Momentanplatzierung
\mathbf{a}	- Beschleunigung
\mathbf{b}	- spezifische Körperkraft
\mathbf{e}_i	- Orthonormalbasisvektor
\mathbf{f}	- resultierende Kraft
\mathbf{g}	- räumlicher Temperaturgradient
\mathbf{g}_0	- materieller Temperaturgradient
\mathbf{g}_i	- Dualbasisvektor (reziprok)
\mathbf{p}	- lineares Moment
\mathbf{q}	- räumlicher Wärmeflussvektor
\mathbf{q}_0	- materieller Wärmeflussvektor
\mathbf{n}	- Normalenvektor
\mathbf{t}	- Tangentenvektor
\mathbf{r}	- Positionsvektor
\mathbf{u}	- Verschiebungsvektor
\mathbf{o}	- Null-Vektor
\mathbf{A}	- Symmetrietransformation
\mathbf{B}	- linker CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$
\mathbf{C}	- rechter CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$
\mathbf{D}	- sym. Streckungstensor
\mathbf{D}_e	- Rate der elastischen Verzerrung
\mathbf{D}_p	- Rate der plastischen Verzerrung
\mathbf{E}	- Verzerrungstensor
\mathbf{F}	- Deformationsgradiententensor
\mathbf{H}	- Verschiebungsgradiententensor
\mathbf{J}	- JACOBI-Matrix
\mathbf{K}	- lokale Änderung der Referenzplatzierung
\mathbf{L}	- Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{L}_e	- elastischer Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{L}_p	- plastischer Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{T}	- Spannungstensor ohne Spezifikation: CAUCHY
\mathbf{Q}	- Rotationstensor
\mathbf{R}	- Rotationstensor
\mathbf{S}	- materieller Spannungstensor
\mathbf{U}	- rechter Streckungstensor $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$
\mathbf{V}	- linker Streckungstensor $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$
\mathbf{P}	- plastische Transformation
\mathbf{W}	- schiefsym. Streckungstensor
\mathbf{W}_e	- elastischer Rotationstensor
\mathbf{W}_p	- plastischer Rotationstensor
\mathbf{Y}_p	- inkrementelle Verfestigungsvariable
\mathbf{Z}	- Verfestigungsvariablen
$\mathbf{I}, \mathbf{1}$	- Einheitstensor 2. Stufe
\mathcal{I}	- Einheitstensor 4. Stufe
\mathcal{I}^S	- Symmetrisierer 4. Stufe
\mathcal{I}^A	- Antimetrisierer 4. Stufe
$\mathbf{0}$	- Null-Tensor

Tensoralgebra & Tensoranalysis

1. Was ist ein Tensor?

- eine lineare Abbildung $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ mit \mathbf{A} als Tensor 2. Stufe
- ein Funktional, dass von einem Raum in den anderen Raum abbildet
- \mathcal{V} ist eine Menge, ein Vektorraum
- Bsp. LEVI-CIVITA-Symbol: $\epsilon_{i,j,\dots,n}$; im \mathbb{R}^n

2. Dualbasis?

- sind aus 2 Vektorräumen
 - haben die selbe Dimension
 - lineare Struktur
 - haben ein inneres Produkt
 - sind reziprok: entgegengesetzt

■ $g_i \cdot g^j = \delta_i^j$ mit $i, j = 1, 2, 3$

3. Warum sind sie praktisch?

- wenn wir die Darstellung der beiden Vektoren mit gleicher Basis verwenden, erhalten die längere Ergebnisse
- keine Metrikkoeffizienten, siehe Skalarprodukt hinsichtlich gleicher Basis

4. Satz von CAYLEY-HAMILTON?

- charakteristisches Polynom wird 0
- $\mathbf{A}^3 - I_A \mathbf{A}^2 + II_A \mathbf{A} - III_A \mathbf{1} = 0$ wenn $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_{lin}$

5. Spektraldarstellung

- Darstellung des Tensors über Eigenwerte und Eigenbasen
- sym.: $\mathbf{A} = \sum_{r=1}^3 \mu_r \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}^r$ coaxial: $\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^3 f(\mu_r) \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}^r$
mit r als Laufvariable, \mathbf{p} als Eigenbasis, μ als Eigenwert
- Tensor ist diagonalisierbar

6. Welche speziellen Mengen von Tensoren gibt es?

- alles was keine Gruppe zugeordnet wden kann, ist 'nur' eine Menge
- abhängig von Mengen bzgl. Multiplikation und Mengen bzgl. Addition
- beispielhafte Eigenschaften: schiefsymmetrisch \rightarrow spurfrei

7. Was ist eine Gruppe?

- eine Menge von Elementen zusammen mit einer Operation, die zwei Elemente der Menge auf ein drittes Element derselben Menge abbildet und dabei noch drei weitere Bedingungen, die Gruppenaxiome, erfüllt
- Gruppenaxiome: assoziativ (austauschbar), neutrales Element, inverses Element
- Gruppen:
 - Inv general linear group
 - $Inv^+ = Lin^+$ special linear group
 - $Unim$ general unimodular group
 - $Unim^+$ special unimodular group
 - $Orth$ general orthogonal group
 - $Orth^+$ special orthogonal group (rotational group)
 - + bedeutet, dass der Tensor eine positive Determinante hat

8 Was ist eine Metrik?

- dient dazu, mathematische Räume, insbesondere differenzierbare Mannigfaltigkeiten, mit einem Maß für Abstände und Winkel auszustatten

9. Nabla-Operator? CHRISTOFFEL-Symbole?

- Nabla-Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$
 - Operations-Symbol, das benutzt wird, um die drei Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation zu bezeichnen
 - $\nabla f = \text{grad} f$
 - $\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div} \mathbf{V}$
 - $\nabla \times \mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{V}$
- CHRISTOFFEL-Symbole: Γ
 - Hilfsgrößen zur Beschreibung der kovarianten Ableitung auf RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten
 - ihre definitorische Eigenschaft besteht in der Forderung, dass die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet
 - der Hauptsatz der RIEMANNschen Geometrie stellt sicher, dass sie durch diese Definition eindeutig bestimmt sind
 - Γ_{ik}^j , 3 Indizes, der mittlere Index transformiert alle Vektor-Indizes durch Metrik-Koeffizienten, die anderen Indizes sind symmetrisch
 - dienen der Vereinfachung zur Abkürzung von Ableitungen

10. Was ist eine Richtungsableitung?

- Ableitung einer von mehreren Variablen abhängigen Funktion die momentane Änderungsrate dieser Funktion in einer durch einen Vektor vorgegebenen Richtung
- allgemein ein GÂTEAUX-Differential

Kinematik

11. Beschreibung von Deformation, wie?

- das Feld der Verschiebungsvektoren ist die Differenz der Postionsvektoren eines materiellen Punktes aus Momentan- und Referenzplatzierung $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) := \chi(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0$
- $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{x}_0$ oder $= \mathbf{F}d\mathbf{X}$, das große \mathbf{X} ist hier allerdings irreführend!
- Deformationsgradientenstensor
 $\mathbf{F} = \text{Grad} [\chi(\mathbf{X}, t)]$
- Verschiebungsgradiententensor
 $\mathbf{H} := \text{Grad} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) = \text{Grad} \chi(\mathbf{x}_0, t) - \text{Grad}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{1}$

12. Wie beschreiben wir Deformationen?

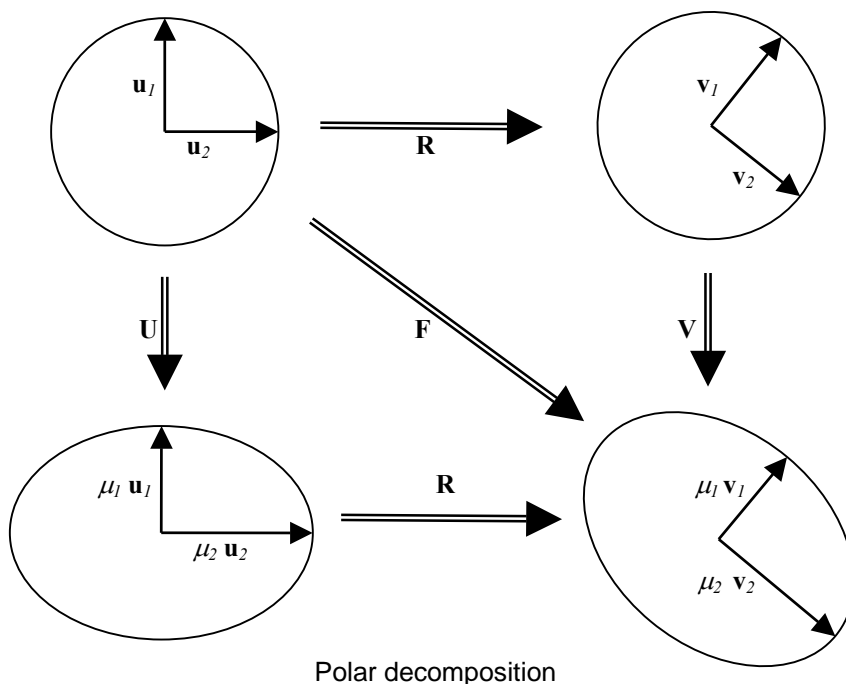
- $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$
- $J = \det \mathbf{F} = \frac{dv}{dV} > 0$

13. Warum nicht nur Deformation?

- Deformationsgradiententensor: $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$
- neben den Deformationen werden auch Rotationen abgebildet (Name daher eigentlich ungeeignet)
- eigentlich Gradient einer Bewegung

14. Polare Zerlegung?

- jeder invertierbare Tensor \mathbf{F} kann auf zwei Arten eindeutig zerlegt werden:
 $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$
- mit \mathbf{R} -orthogonal und \mathbf{V}, \mathbf{U} -positiv-definit und symmetrisch
- rechter \mathbf{U} und linker Streckungstensor \mathbf{V}
- rechter CAUCHY-GREEN-Tensor: $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$
in Referenzplatzierung, materiell, LAGRANGE-Betrachtungsweise
- linker CAUCHY-GREEN-Tensor (auch FINGER-Tensor): $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$
räumlich, EULER-Betrachtungsweise

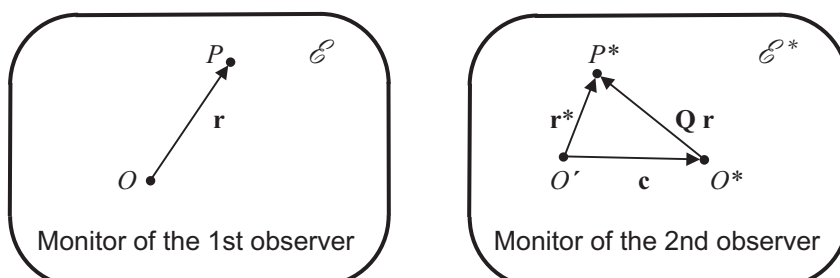


15. Unterscheidung \mathbf{C} und \mathbf{B} ?

- \mathbf{C} ist linker CAUCHY-GREEN-Tensor; \mathbf{B} ist rechter CAUCHY-GREEN-Tensor
- gleiche Streckungen
- gleiche Eigenwerte
- gleiche Eigenwerte wie \mathbf{U} und \mathbf{V} , bloß quadratisch
- Unterschied: Eigenrichtungen

16. Was ist eine EUKLIDISCHE Transformation?

- Transformation der Ortsvektoren unter Änderung der Beobachter (Seite 132)
- $\mathbf{r}^*(P^*, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{r}(P, t) + \mathbf{c}(t) \rightarrow$ Drehung \mathbf{Q} und Verschiebung \mathbf{c}



17. GALILEO-Transformation?

- bilden eine Untergruppe der EUKLIDischen Gruppe
- $\mathbf{r}^* = \mathbf{Q} \mathbf{r} + \mathbf{c}(t)$ mit $\ddot{\mathbf{c}} \equiv \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{0}$ und Konsequenz $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$

18. Objektivität und Invarianz?

- Invarianz: $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$ keine Änderung
- Objektivität: $\mathbf{B}^* = \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}^T$ definierte Änderung

19. bei räumlicher Betrachtung

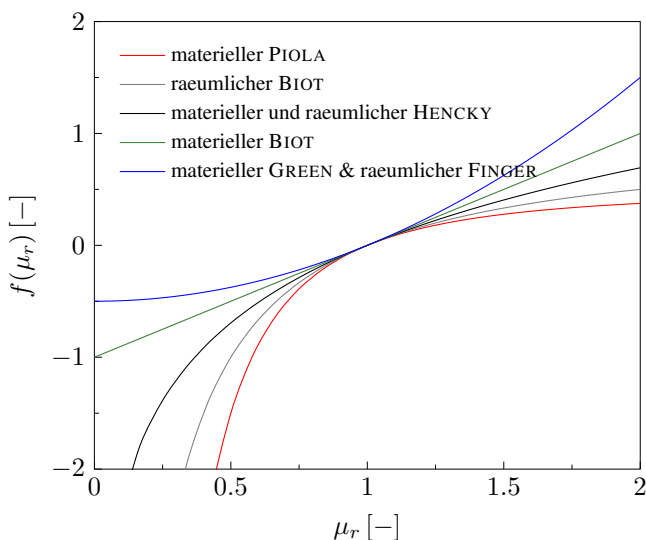
- Materialgesetze müssen auf Objektivität geprüft werden, aber wie?

20. Welche Dehnungstensoren gibt es? Eigenschaften?

- materielle: (invariant)
generalisierter materieller: $\mathbf{E}^{\text{Gen}} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$
GREEN: $\mathbf{E}^{\text{G}} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H})$
BIOT: $\mathbf{E}^{\text{B}} = (\mathbf{U} - \mathbf{1})$
HENKY: $\mathbf{E}^{\text{H}} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C}$
- räumliche: (objektiv)
generalisierter räumlicher: $\mathbf{E}^{\text{gen}} = \mathbf{F}(\mathbf{V})$
ALMANZI: $\mathbf{E}^{\text{a}} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2}[\mathbf{1} - (\mathbf{F} \mathbf{F}^T)^{-1}]$
BIOT: $\mathbf{E}^{\text{b}} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-1})$
HENKY: $\mathbf{E}^{\text{h}} = \ln \mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}$

■ Eigenschaften:

- alle Dehnungstensoren sind symmetrisch
- alle Dehnungstensoren sind coaxial
- in der Referenzplatzierung sind alle Dehnungstensoren null
- Deformation uniaxial: dann gilt das selbe für alle Dehnungsmaße
- Deformation eben: dann gilt das selbe für alle Dehnungsmaße
- Deformation triaxial (alle EW ungleich 0): dann gilt das selbe für alle Dehnungsmaße
- Deformationen ist Dilatation (alle EW 0): dann gilt das selbe für alle Dehnungsmaße
- Ableitungen des Dehnungstensors im Hinblick auf μ_i bei $\mu_i = 1$ sind 1
(μ_i sind die Eigenwerte)



21. Prinzipien der Materialtheorie?

- Prinzip der materiellen Objektivität (**PMO**): Die Spannungsleistung ist objektiv (und damit auch invariant) unter EUKLIDischen Transformationen
- Prinzip der Invarianz gegenüber Starrkörperbewegungen (**PISM**): Starrkörperbewegungen sollen die Spannungen nicht beeinflussen, Spannungen im Körper entstehen nicht direkt durch Translationen oder Rotationen des Körpers
- Prinzip der Forminvarianz (**PFI**): Die materiellen Funktionen sind invariant gegenüber Beobachterwechseln
- zwei von ihnen implizieren das dritte; oder, wenn eines von ihnen gilt, dann sind die beiden anderen äquivalent

22. Welche Prinzipien sind wie gekoppelt?

- Prinzip des Determinismus: Die Spannung in einem Punkt des Körpers ist determiniert durch das Verschiebungsfeld des Körpers in der Vergangenheit bis zur Gegenwart. (nicht der Zukunft!)
- Prinzip der lokalen Wirkungen: Die Spannungen in einem Körperpunkt sind determiniert durch die Bewegung einer endlichen Umgebung dieses Punktes. \mathbf{T} hängt nur von begrenzten Punkt ab
- Prinzip der lokalen Wirkung für einfache Materialien: die Spannung in einem Materialpunkt sind abhängig von der Bewegung seine infinitesimalen Umfelds

23. reduzierte Formen?

- Funktionen nicht über \mathbf{F} , sondern über \mathbf{C} und \mathbf{B} darstellen
- einfache Materialien erfüllen das PISM, wenn es als reduzierte Form dargestellt werden kann

Elastizität

23. nur Augenblick? $\mathbf{T} = f(\mathbf{F})$

- Die momentanen Spannungen hängen nur von den momentanen Deformationen ab, und umgekehrt.
- $\mathbf{T} = f(\mathbf{C})$
- Forderung: Existenz einer elastischen Energie $W = f(\mathbf{C})$
- es folgt: $\mathbf{T} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}$
- Warum wichtig: Integration der Spannungsleistung muss 0 sein, entlang eines Kreisprozesses

24. Darstellungssätze, CALEY-HAMILTON

- das 'Einsetzen' einer Matrix in ihr eigenes charakteristisches Polynom ergibt stets die Nullmatrix
- jeder Tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n$ erfüllt die charakteristische Gleichung:
$$\mathbf{A}^3 - I_A \mathbf{A}^2 + II_A \mathbf{A} - III_A \mathbf{1} = 0 \quad \text{wenn } \mathbf{A} \in \mathcal{L}_n$$

Hyperelastizität

25. Theorem von COLEMAN-NOLL

- Die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung ist für alle zulässigen thermo-kinematischen Prozesse erfüllt, wenn die folgenden Bedingungen für die thermo-elastischen Gesetze gelten:
- 1. Die freie Energie (konsequenterweise auch die Entropie und die Spannungen) ist unabhängig von Temperaturgradienten:
 $\Psi = k_\Psi(\mathbf{C}, \theta)$
- 2. Die freie Energie ist ein Potential für die Spannungen:
 $k_S(\mathbf{C}, \theta) = 2\rho \frac{\partial k_\Psi(\mathbf{C}, \theta)}{\partial \mathbf{C}}$
- 3. ... und für die Entropie:
 $k_\eta(\mathbf{C}, \theta) = \frac{\partial k_\Psi(\mathbf{C}, \theta)}{\partial \theta}$

4. Die Wärmeflüsse gehorchen die Wärmeleitungs-Ungleichheit:

$$\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{g}_0 \leq 0$$

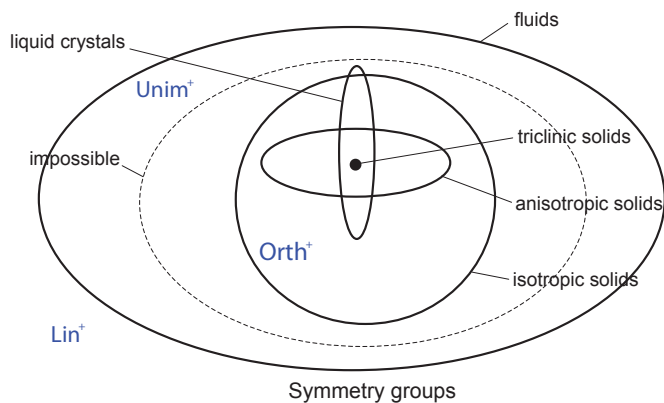
26. Hyperelastische Materialien

- ein Material heißt hyperelastisch, wenn eine spezifische Verzerrungsenergie w_F als differenzierbare Funktion des Deformationsgradienten existiert
- die Rate der spezifischen Verzerrungsenergie ist gleich der spezifischen Spannungsleistung
- jedes hyperelastische Material ist elastisch, aber nicht umgekehrt

27. Theorem von NOLL (7.4, Seite 210)

- hyperelastische Materialien: Objektivität der Dehnungsenergiefunktion sowie der Spannungsfunktion, lokales Gleichgewicht der Drallbilanz

28. Symmetriegruppen (Tabelle Buch)



No.	crystal classes	generators in $Orth^+$	number of elements in $Orth^+$
1.	triclinic systems	I	1
2.	monoclinic systems	\mathbf{R}_k^π	2
3.	rhombic systems	$\mathbf{R}_i^\pi, \mathbf{R}_j^\pi$	4
4.	tetragonal systems tetragonal-disphenoidal tetragonal-pyramidal tetragonal-dipyramidal	$\mathbf{R}_k^{\pi/2}$	4
5.	tetragonal-skalenohedral ditetragonal-pyramidal tetragonal-trapezohedral ditetragonal-dipyramidal	$\mathbf{R}_k^{\pi/2}, \mathbf{R}_i^\pi$	8
6.	cubic systems tetratoidal diploidal	$\mathbf{R}_i^\pi, \mathbf{R}_j^\pi, \mathbf{R}_d^{2\pi/3}$	12
7.	hextetrahedral gyroidal hexoktahedral	$\mathbf{R}_i^{\pi/2}, \mathbf{R}_j^{\pi/2}$	24
8.	hexagonal systems trigonal-pyramidal rhombo-hedral	$\mathbf{R}_k^{2\pi/3}$	3
9.	ditrigonal-pyramidal trigonal-trapezohedral hexagonal-skalenohedral	$\mathbf{R}_k^{2\pi/3}, \mathbf{R}_i^\pi$	6
10.	trigonal-dipyramidal hexagonal-pyramidal hexagonal-dipyramidal	$\mathbf{R}_k^{\pi/3}$	6
11.	ditrigonal-dipyramidal dihexagonal-pyramidal hexagonal-trapezohedral dihexagonal-dipyramidal	$\mathbf{R}_k^{\pi/3}, \mathbf{R}_i^\pi$	12

Bilanzgleichungen

29. Impulsbilanz?

- Impuls (linear momentum)
- die Änderungsrate des linearen Impuls p ist gleich der resultierenden Kraft f auf den Körper
 $p(\mathcal{B}, t)^* = f(\mathcal{B}, t)^*$
- ALTENBACH: Die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtimpulses bei der Deformation eines Körpers ist gleich der Summe aller auf den Körper von außen wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte.
- Drehimpuls (moment of momentum)
- die Änderungsrate des Drehimpulses d_O mit Bezug auf einen festen Bezugspunkt $O \in \mathbb{E}$ ist gleich des resultierenden Momentes m_O bezüglich O auf den Körper
 $d_O(\mathcal{B}, t)^* = m_O(\mathcal{B}, t)$

30. Massebilanz? (einfachste)

- die Masse eines Körpers ist konstant bei allen Deformationen
- wenn κ die Platzierung des Körpers, dann ist dessen Massendichte in dieser Platzierung ein skalares Feld $\rho = \rho_E(\mathbf{x}, t)$ auf \mathcal{B}_t , so dass
$$m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}_t} \rho_E(\mathbf{x}, t) dv$$
- ALTENBACH: Die Masse eines materiellen Volumens ist zu allen Zeiten konstant.

31. Drallbilanz?

- $T = T^T$
- ALTENBACH: Die Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtdrehimpulses des Körpers in Bezug auf einen gewählten Punkt ist gleich dem Gesamtmoment aller von außen auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte bezüglich des gleichen Punktes.

32. Bei Prof. Bertram: massespezifisch

- Vorteil: Masse bleibt bei materieller Ableitung konstant

33. GAUSSscher Satz?

- $$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dv = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \mathbf{v} dv$$

34. Weitere Bilanzen?

- Energiebilanz: (1. Hauptsatz der Thermodynamik). Bei der Energiebilanz eines Systems ergeben die ausgetauschte Arbeit und die Wärme zusammen die totale Energieänderung. Bei allen Energieaustauschprozessen bleibt die Summe der mechanischen und der thermischen Energie konstant.
- Entropiebilanz: (2. Hauptsatz der Thermodynamik). Wärme kann nie von selbst von einem System niedriger Temperatur auf Systeme höherer Temperatur übergehen. Für abgeschlossenen Systeme nimmt die Entropie bei irreversiblen Prozessen stets zu ($d\eta > 0$), für Gleichgewichtszustände nimmt sie einen Extremwert an ($d\eta = 0$).
- weitere Bilanzen:
 - (0. Hauptsatz der Thermodynamik). Alle Systeme, die mit einem System im thermodynamischen Gleichgewicht stehen, sind auch untereinander im Gleichgewicht.
 - (3. Hauptsatz der Thermodynamik). Jedes System besitzt am absoluten Nullpunkt ($\theta = 0$) die Entropie $\eta = 0$.

Thermodynamik

35. CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung?

- räumliche Form: $\frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta} \geq \dot{\psi} + \dot{\theta} \eta$
- materielle Form: $\frac{1}{2\rho} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} - \frac{\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{g}_0}{\rho_0 \theta} \geq \dot{\psi} + \dot{\theta} \eta$

Plastizität

36. Postulat von DRUCKER?

- Für jeden Spannungskreisprozess, beginnend und endend mit einer beliebigen Spannung \mathbf{T}_A im momentanen elastischen Bereich und nur wenig über diesen hinausgehend (so dass auch \mathbf{T}_A den elastischen Bereich während des Prozesses nicht verlässt), sei das Ringintegral $\oint_{\mathbf{T}_A} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \cdot d\mathbf{E}$ nie negativ
- Schlussfolgerungen:
 1. die Konvexität der Fließfläche im Spannungsraum
 2. die Normalenregel: die Fließregel ist assoziiert
 3. die Ungleichung $d\mathbf{T} \cdot d\mathbf{E} \geq 0$

37. Symmetrie-Transformationen?

- $\mathbf{S}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}^T \mathbf{S}(\mathbf{C}) \mathbf{Q}$
mit $\mathbf{Q} \in \mathcal{S}ym$ -Gruppe

Universelle Lösungen

38. Innere Zwangsbedingungen?

- Einschränkungen der Deformationsmöglichkeiten eines Materials
- Kette von Argumenten
- Extraspannungen und Reaktionsspannungen
- $\det \mathbf{F} = 1$
- man verlangt, dass keine Arbeit entsteht \rightarrow Aufspaltung Spannungstensor
- Projektor
- Innere Zwänge: mechanisch und thermodynamisch
- homogenen Deformationen: jeder Punkt identisch verformt
- ohne innerer Zwangsbedingungen keine weiteren Lösungen

39. Objektive Raten?

- $\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$
- $\dot{\mathbf{T}}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T$
- Zeitableitung eines Tensors ist objektiv

Weiteres

40. Mannigfaltigkeiten?

- ein topologischer Raum, der lokal EUKLIDisch ist

41. Endomorphismus?

- ein Homomorphismus $f: A \rightarrow A$ einer mathematischen Struktur A in sich selbst.

42. Isomorphismus?

- eine Abbildung zwischen zwei mathematischen Strukturen, durch die Teile einer Struktur auf „bedeutungsgleiche“ Teile einer anderen Struktur umkehrbar eindeutig (bijektiv) abgebildet werden
- Gleichheit einer Struktur

43. Automorphismus?

- eine Abstraktion des Symmetriebegriffs

44. Symmetrische Tensoren (siehe 60.)

45. Determinante

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

46. Materieller Körper \mathcal{B}

- dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, bestehend aus Punkten die Material genannt werden

47. Bewegung

- zeitabhängige Sequenz von Platzierungen, definiert in einem bestimmten geschlossenen Zeitintervall

48. Erster Hauptsatz der Thermodynamik

- Die Wärmezufuhr Q und die Leistung der äußeren Kräfte L_e führen zu einer Veränderung der kinetischen Energie K in einem Inertialsystem und der inneren Energie E des Körpers:
 $Q + L_e = \dot{K} + \dot{E}$

49. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

- Für alle Körper zu jedem Zeitpunkt gilt die folgende Ungleichung
$$\int_{\mathcal{B}_t} \dot{\eta} \, dm \geq \int_{\mathcal{B}_t} \frac{r}{\theta} \, dm - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} \, da$$

50. Theorem von CAUCHY

- Die Spannung in einem Punkt \mathbf{X} zur Zeit t auf einer Fläche mit Normale \mathbf{n} ist gegeben durch
 $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$

51. CAUCHY Lemma

- Reaktionsprinzip: Auf gegenüberliegenden Schnittufern sind die Spannungen gleich groß und entgegengesetzt
 $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$

52. Erste CAUCHYSche Gleichung

- lokale Impulsbilanz
 $\operatorname{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}$

53. Zweite CAUCHYSche Gleichung

- BOLTZMANNsches Axiom
- Die Drallbilanz ist lokal identisch erfüllt, wenn der Spannungstensor symmetrisch ist
 $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$

54. Spur?

- Summe der Hauptdiagonalelemente

$$\operatorname{spur} \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{jj} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

- groß geschrieben: materiell
- klein geschrieben: räumlich

55. Divergenz?

- reduziert dessen Stufe, verringert die Wertigkeit

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{spur} [\nabla \mathbf{a}] = a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = A_{ij,j} \mathbf{e}_i$$

56. Rotation?

- erhält die Wertigkeit

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

57. Gradient?

- erhöht die Wertigkeit
- auch FRÉCHET-Ableitung

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}} = \operatorname{grad} \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}'(\mathbf{v})$$

- Ableitung von \mathbf{a} nach dem Ortsvektor \mathbf{X}

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial a_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

58. Invarianten eines Tensors ($ND = 3$)

- Invarianten sind dem Tensor charakterisierende skalarwertige Größen, die unabhängig vom gewählten KOOS sind
- $I_A = \operatorname{sp} [\mathbf{A}]$
- $II_A = \frac{1}{2} [\operatorname{sp}^2 [\mathbf{A}] - \operatorname{sp} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}]]$
- $III_A = \det [\mathbf{A}] = |\mathbf{A}|$

59. Eigenwertproblem

- Eigenwertproblem beliebiger Tensoren zweiter Stufe
 $[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}] \cdot \Phi = \mathbf{0}$

- Eigenwerte (nichttriviale Lösung)
 $\det [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}] = 0$
- charakteristisches Polynom
 $\lambda^3 - I_A \lambda^2 + II_A \lambda - III_A = 0$ dreidimensional $i, j \in [1, 3]$
 $\lambda_{1|2|3} = \dots$ Anzahl der Eigenwerte λ_i entsprechend der räumlichen Dimensionen!
- entsprechende Eigenvektoren Φ^i sind die Lösungen der linearen Gleichung
 $[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}] \cdot \Phi^i = \mathbf{0}$
- Nullstellen kubischer Polynome: Substitution von λ , CARDANO-Lösungsformeln

60. Tensoreigenschaften

- orthogonale Tensoren:
 - ein Tensor ist orthogonal wenn die Inverse gleich der Transponierten ist $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$
 - Determinante ist 1
- Transposition eines Tensors in symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil

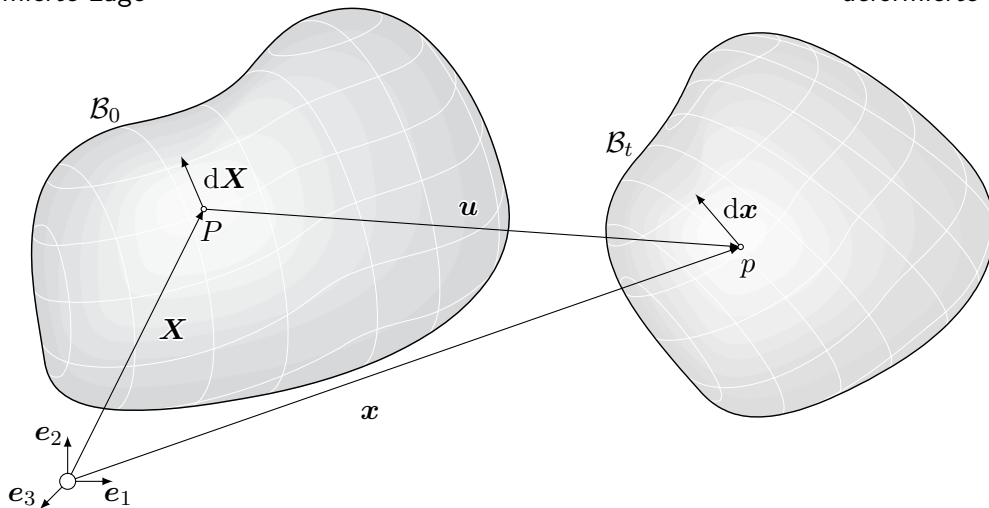
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\text{sym}} + \mathbf{A}^{\text{skw}} = \frac{1}{2} [\mathbf{A} + \mathbf{A}^T] + \frac{1}{2} [\mathbf{A} - \mathbf{A}^T]$$
- symmetrische Tensoren:
haben nur reelle Eigenwerte
- schiefsymmetrische Tensoren:
- volumetrisch/deviatorische Zerlegung eines Tensors ($ND = 3$)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\text{vol}} + \mathbf{A}^{\text{dev}} = \frac{1}{3} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{1}] \mathbf{1} + \frac{1}{2} [\mathbf{A} - \mathbf{A}^T]$$
- unimodulare: Determinante = +/-1
- lineare: lineare Abbildung eines Tensors
- Psym: symmetrisch und positiv definit

61. Betrachtungsweisen: LAGRANGE \longleftrightarrow EULER

Referenzplatzierung
undeformierte Lage

Momentanplatzierung
deformierte Lage



- bezogene Beschreibungsweise mit Orthonormalbasen
 χ - Abbildung des Ortsvektors $\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i$ eines materiellen Punktes in Referenzplatzierung in dessen Ortsvektor $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ zu einer Zeit t in der Momentanplatzierung abbildet
- nach obiger Abbildung also:
 $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \iff \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$
- in Komponentenschreibweise ergibt sich:
 $X_i = \chi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t)$ bzw. $x_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t)$
- Differenzvektor: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \chi(\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, t_0) = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$
 $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$

- materielle Betrachtungsweise: LAGRANGE, Bewegung eines Teilchens in Bezug auf seine Referenzplatzierung
 $\phi_L(\mathbf{X}, t) = \phi_L(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$
- räumliche Betrachtungsweise: EULER, Beschreibung, in welcher Referenzplatzierung sich ein Teilchen befunden hat, daß sich zum Zeitpunkt t in der aktuellen Position \mathbf{x} befindet
 $\phi_E(\mathbf{x}, t) = \phi_E(\chi(\mathbf{X}, t), t)$
- überführen beider Betrachtungsweisen:
 $\phi_E(\mathbf{x}, t) = \phi_L(\mathbf{X}, t)$

62. Spannungstensoren

- $\in \mathcal{S}_{ym}$
 - CAUCHY
 $\mathbf{T} = \mathcal{C} \cdot \mathbf{E} = \lambda \text{spur}(\mathbf{E}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{E}$ mit \mathbf{E} als linearisierter GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
 - materieller (invariant, 'pull back')
 $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$
 - relativer (invariant)
 $\mathbf{T}_r = \mathbf{R}^T \mathbf{T} \mathbf{R}$
 - konvektiver (invariant)
 $\mathbf{T}_k = \mathbf{F}^T \mathbf{T} \mathbf{F}$
 - zweiter PIOLA-KIRCHHOFF (invariant)
 $\mathbf{T}^{2PK} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$
 - BIOT
 $\mathbf{T}^B = \text{sym}(\mathbf{T}^{2PK} \mathbf{U})$
 - KIRCHHOFF (objektiv)
 $\mathbf{T}^K = J \mathbf{T}$
- $\in \mathcal{L}_{in}$
 - plastischer
 $\mathbf{S}^p = -\mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{P}^{-T}$
 - erster PIOLA-KIRCHHOFF (weder invariant noch objektiv)
 $\mathbf{T}^{1PK} = J \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$
 - MANDEL (invariant)
 $\mathbf{T}^M = \mathbf{C} \mathbf{T}^{2PK}$

63. Reelle isotrope Tensorfunktionen φ

- können dargestellt werden als Funktion der Hauptinvarianten des Tensors
 $\varphi(\mathbf{C}) = \phi(I_C, II_C, III_C)$
- oder als symmetrische Funktion der Eigenwerte von \mathbf{C}
 $\varphi(\mathbf{C}) = \underline{\phi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \underline{\phi}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \underline{\phi}(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1)$

64. Tensorielle isotrope Tensorfunktionen

- $\mathbf{Q} * k(\mathbf{C}) = k(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) \quad \forall \mathbf{C} \in \mathcal{S}_{ym}, \mathbf{Q} \in \mathcal{Orth}^+$

65. RICHTERScher Darstellungssatz

- Darstellung einer tensoriellen isotropen Tensorfunktionen!
 $k(\mathbf{C}) = \eta_0 \mathbf{1} + \eta_1 \mathbf{C} + \eta_2 \mathbf{C}^2$
mit 3 reellen Funktionen η_i der Hauptinvarianten von \mathbf{C}
- in der Spektralform

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{C}) = & \sigma(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \\
& + \sigma(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1) \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_3 \\
& + \sigma(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2) \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{u}_3
\end{aligned}$$

mit 3 reellen Funktionen σ der 3 reellen Argumente, ist symmetrisch im dritten und vierten (???) wenn C die Eigenwerte λ_i und die Einheits-Eigenvektoren u_i hat

66. Satz von VIETA

- nach dem VIETASchen Wurzelsatz kann jedes Polynom durch seine Wurzeln (Nullstellen) dargestellt werden gemäß

$$\begin{aligned}\lambda^3 - I_A \lambda^2 + II_A \lambda - III_A &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 \\ &\quad - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 \\ &\quad + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda \\ &\quad - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\end{aligned}$$

- durch Vergleich mit dem charakteristischen Polynom folgt dann für die Eigenwerte λ_i die einfachere Darstellung der Hauptinvarianten;

$$I_T = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$II_T = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

$$III_T = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

67. RAYLEIGH-Produkt

- bildet alle Basisvektoren eines Tensors gleichzeitig ohne Veränderung seiner Komponenten ab

68. Spannungspotential

- ein Material heißt hyperelastisch, falls es eine Funktion $w(\mathbf{F})$ gibt, so daß
- aus Hyperelastizität folgt Elastizität, aber nicht andersrum

69. uniformer Körper

- all seine Punkte sind zueinander isomorph

70. homogener Körper

- $K = 1$

Inelastizität

71. Kurzzusammenfassung

- Geschichtsfunktionale: mathematisch klar, physikalisch unklar
- Prozessfunktionale: intrinsische Notation, physikalisch klar
- man benötigt Evolutionsgleichung (Zustandsvariable)

Tensorkalkül

72. Produkte von Tensoren

Multiplikation mit Skalar	dyadisches Produkt	einfache Verjüngung	zweifache Verjüngung
Assoziativgesetz			
$\alpha[\beta \mathbf{A}] = [\alpha\beta] \mathbf{A}$	$\alpha \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes [\alpha \mathbf{b}]$	$\alpha \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot [\alpha \mathbf{b}]$	$\alpha \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : [\alpha \mathbf{B}]$
Distributivgesetze			
$[\alpha + \beta] \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}$ $\alpha[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \otimes [\mathbf{b} + \mathbf{c}] = \mathbf{A} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{c}$ $[\mathbf{A} + \mathbf{B}] \otimes \mathbf{c} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{c}$	$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{b} + \mathbf{c}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}$ $[\mathbf{A} + \mathbf{B}] \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$	$\mathbf{A} : [\mathbf{B} + \mathbf{C}] = \mathbf{A} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \mathbf{C}$ $[\mathbf{A} + \mathbf{B}] : \mathbf{C} = \mathbf{A} : \mathbf{C} + \mathbf{B} : \mathbf{C}$
Kommutativgesetz			
$\alpha \mathbf{A} = \mathbf{A} \alpha$			
identisches Element			
$1 \mathbf{A} = \mathbf{A}$		$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$	$\mathcal{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A}$
inverses Element			
$1 \mathbf{A} + [-1] \mathbf{A} = \mathbf{0}$			
Nullelement			
	$\mathbf{0} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{0}$	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$	$\mathcal{O} : \mathbf{A} = \mathbf{0}$

73. Dyadisches Produkt

■ $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = [a_i \mathbf{e}_i] \otimes [\mathbf{e}_j b_j] = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = C_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

Essenz aus Elastizität und Plastizität großer Deformationen

1 Mathematik

1.1 Vektor-Algebra

- wenn f eine Abbildung sei, dann ist sie linear, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) \quad (1)$$

$$f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) \quad (2)$$

- Norm oder Länge $|\mathbf{v}| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}$

- Schiefsymmetrisch $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

- Dualbasen

- jede Basis ist aus einem Vektorraum \mathcal{V}

- Skalare Definition beider Dualbasen ist gegeben durch Kronecker-Symbol:

$$\delta_i^j := 1 \text{ wenn } i = j; 0 \text{ wenn } i \neq j$$

- Nutzung von Dualbasis am Beispiel:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^i \mathbf{g}_i \cdot w_k \mathbf{g}^k = v^i w_k \delta_i^k = v^i w_i \quad (3)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^i \mathbf{g}_i \cdot w^k \mathbf{g}_k = v^i w^k G_{ik} \quad (4)$$

- Kreuzprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \pm \sqrt{\det[G_{mn}]} \varepsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{g}^k$

1.2 Tensor Algebra

- Gruppenaxiome

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{G} \rightarrow (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) \in \mathcal{G} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \in \mathcal{G} \rightarrow (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3) \quad (6)$$

$$\mathbf{I} \in \mathcal{G} \quad (7)$$

$$\mathbf{A} \in \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{G} \quad (8)$$

- Deviatoranteil $\mathbf{A}' := \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$

- Kugelanteil $\mathbf{A}^\circ := \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$

- Unimodulare Gruppe $\det() = \pm 1$

- Jeder Invertierbare Tensor kann aufgeteilt werden in seinen unimodularen und kugel Anteil
 $\mathbf{F} = \mathbf{F}^\circ \hat{\mathbf{F}}$

1.2.1 Tensor Produkt und Komponenten

1.2.2 Eigenwertproblem

- rechter Eigenwert: $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{p} = \mathbf{0}$

- es gibt linke und rechte Eigenwerte, wobei der linke als der rechte EW des Transponierten Tensors definiert ist (mit jeweils eigenen Eigenvektoren)

- charakteristisches Polynom

$$\lambda^3 - I_A \lambda^2 + II_A \lambda - III_A = 0 \quad (9)$$

- Tensoren sind invertierbar, wenn alle Eigenwerte nicht Null sind

- **A** und **C** sind ähnlich, wenn ein invertierbarer Tensor $\mathbf{B} \in \mathcal{I}_{vv}$ existiert, so dass gilt $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$
→ damit haben **C** und **A** die gleichen Invarianten und Eigenwerte
- Spektralform

$$\mathbf{A} = \sum_{r=1}^3 \lambda_r \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r^T \quad (10)$$

- Wenn die rechten und linken EW identische sind, dann ist der Tensor diagonalisierbar
- CAYLEY-HAMILTON (diese Bedingung erfüllt jeder Tensor)

$$\mathbf{A}^3 - I_A \mathbf{A}^2 + II_A \mathbf{A} - III_A \mathbf{I} = 0 \quad (11)$$

- Symmetrische Tensoren haben nur reale EW
- Eigenprojektoren: $\mathbf{P}_s := \sum_{r=1}^{N_s} \mathbf{p}_r \otimes \mathbf{p}_r$ mit den Projektorenregeln
 1. $\mathbf{P}_r \mathbf{P}_r = \mathbf{P}_r$ (idempotent)
 2. $\mathbf{P}_r \mathbf{P}_s = \mathbf{0}$ für $r \neq s$ (orthogonal)
 3. $\sum_{r=1}^K \mathbf{P}_r = \mathbf{I}$ (komplett)

- Tensoren mit gleichen EV werden als koaxial bezeichnet (Bedingung für symm. Tensoren: $\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{A}$)
- jeder Tensor **A** ist invertierbar wenn $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ positiv definit ist

1.2.3 spezielle Tensoren

- Schiefsymmetrische Tensoren
 - mit ONB

$$\mathbf{W}\mathbf{e}_j = \varepsilon_{kji} w^k \mathbf{e}_i = -\varepsilon_{ijk} w^k \mathbf{e}_i \quad (12)$$

- Invarianten:

$$I_W = 0 = \lambda_2 + \lambda_3 \quad (13)$$

$$II_W = w^2 = \lambda_2 \lambda_3 \quad (14)$$

$$III_W = 0 \quad (15)$$

- für beliebige $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ ist $\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{b}$ schiefsymmetrisch

- Orthogonale Tensoren
 - $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$
 - Eigenwerte sind real und ± 1

- polare Zerlegung
 - Wenn **F** ein invertierbarer Tensor ist, dann kann er wie folgt zerlegt werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (16)$$

mit **R** orthogonal; **VU** pos. definit und symmetrisch

1.2.4 Tensoren höherer Ordnung

- es gibt Tensoren die symmetrisieren und antisymmetrieren
- Tetraden
 1. eine Tetrade mit linke Subsymmetrie formt alle Tensoren in symmetrische um
 2. bei symmetrischen Tetraden sind linke und rechte Subsymmetrie identisch
 3. Einstensor ist symmetrisch
 4. Symmetrisierer sind symmetrisch und haben beide Subsymmetrien
 5. Eine Tetrade mit jeder Subsymmetrie ist singulär (nicht invertierbar)
 6. 81 unbekannte Komponenten
 7. Tetrade mit zwei Subsymmetrien hat 36 unbek. Komponenten
 8. Symmetrische Tetrade hat 45 unbek. Komponenten
 9. symmetrische Tetrade mit zwei Subsymmetrien hat 21 Unbek.
- RAYLEIGH-Produkt
 - $\mathbf{A} * \mathbf{T} = \mathbf{A} * (T^{ik..l} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k \otimes \dots \otimes \mathbf{g}_l)$
 - Tensor 2. Stufe: $\mathbf{A} * \mathbf{T} = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{A}^T$
 - für **isotrope** Tensoren gilt: $\mathbf{Q} * \mathbf{T} = \mathbf{T}$

1.2.5 Isotrope Tensorfunktionen

- echte isotrope Tensorfunktionen:

$$\varphi(\mathbf{C}) = \varphi(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) \quad (17)$$

- Darstellung einer realen isotropen Tensorfunktion

$$\varphi(\mathbf{C}) = \phi(I_C, II_C, III_C) \quad (18)$$

oder als symmetrische Funktion der Eigenwerte

$$\varphi(\mathbf{C}) = \underline{\phi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \underline{\phi}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \underline{\phi}(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1) \quad (19)$$

$$(20)$$

- tensoriale isotrope Tensorfunktion

$$\mathbf{Q} * k(\mathbf{C}) = k(\mathbf{Q} * \mathbf{C}) \quad (21)$$

1.3 Tensor Analysis

- eine Funktion f ist differenzierbar, wenn es ein Differenzial $d\mathbf{f}(\mathbf{v}, d\mathbf{v})$ gibt für alle $\mathbf{v}, d\mathbf{v} \in \mathcal{V}$
- Differenziale sind homogen, additiv und weiterhin gelten folgende Regeln:

$$(f^{-1})' = (f')^{-1} \quad (22)$$

$$(f_1(v) + \alpha f_2(v))' = f_1'(v) + \alpha f_2'(v) \text{ (punktweise linear)} \quad (23)$$

$$(S(v) \otimes T(v))' = S'(v) \otimes T(v) + S(v) \otimes T'(v) \text{ (LEIBNIZ- oder Produktregel)} \quad (24)$$

- Funktionen:

$$\text{div} \mathbf{f} := \text{tr} \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}} \quad (25)$$

$$\text{rot} \mathbf{f} \text{ (siehe S. 57)} \quad (26)$$

1.4 EUKLIDISCHER RAUM

- besteht aus Punkten im Raum, welche über Koordinaten bestimmt werden können
- Koordinatensysteme:

$$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3 | x \mapsto \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3 \quad (27)$$

- Nutzen der JACOBI-Matrix für den Koordinatensystem-Wechsel $[J_k^i] = \left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial \psi^k} \right]$
- für jeden Punkt gibt es eine tangentialen Basis (\mathbf{r}_{φ^i}) und eine gradienten Basis (\mathbf{r}_{φ}^i) die zusammen duale Basen bilden

1.4.1 Kovariante Ableitungen (Covariant Derivative)

- CHRISTOFFEL Symbole

- sind symmetrisch bzgl. des mittleren Index $\Gamma_{ki}^j = \Gamma_{ik}^j$ bzw. $\Gamma_{kji} = \Gamma_{ijk}$
- ist die Ableitung der Basis \mathbf{r}_k nach der Koordinate φ^i

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \varphi^i} = \Gamma_{ij}^{kj} \mathbf{r}_j \text{ oder } \Gamma_{ij}^{kj} := \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \varphi^i} \cdot \mathbf{r}^j$$

- Bestimmung des Gradienten eines Tensors:

1. Tensorfeld als Funktion der Koordinaten darstellen
2. ableiten der Komponenten und Basisvektoren partiell nach der Produktregel und multiplizieren der Ableitungen von Rechts Tensormäßig mit dem zugehörigen Gradientenvektor
3. Gradienten, Divergenz und Rot-Funktionen mit Nabla auf S. 83f

1.4.2 Integrale Theoreme

- Gebiet sollte konvex sein, damit die Regel gilt, dass jeder Punkt direkt mit einem Punkt innerhalb des Gebietes verbunden werden kann.
- daher müssten Löcher in dem Gebiet nachträglich entfernt werden um das Theorem zu verwenden
- GAUSS-Integral

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\mathcal{B}} \text{div} \mathbf{v} dv \quad (28)$$

mit Ersetzen des Vektors $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{a}$, wobei α ein Skalar-Feld ist und \mathbf{a} ein konstantes Vektorfeld, ergibt sich:

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \alpha \mathbf{n} da = \int_{\mathcal{B}} \text{grad}(\alpha) dv \quad (29)$$

oder durch Ersetzen mit $\mathbf{v} = \mathbf{T}^T \mathbf{u}$

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \mathbf{n}) da = \int_{\mathcal{B}} \text{div}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{u} da + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \cdot \text{grad}(\mathbf{u}) da \quad (30)$$

2 Kinematik

2.1 Platzierung von Körpern

- Ein materieller Körper ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und besteht aus Punkten
- Die Einbindung des Körpers in jedem Moment in den EUKLIDischen Raum heißt Platzierung und ist eine Funktion des Körpers \mathcal{B} und der Zeit t

$$\kappa(\cdot, t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E} \quad (31)$$

- Eine Bewegung kann als zeitabhängige Sequenz der Platzierung betrachtet werden.
- $\kappa(X, \cdot)$ ist der Weg des Punktes X und κ_0 ist die Referenzplatzierung
- der Verschiebungsvektor einer Bewegung wird beschrieben durch:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) := \chi(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0 \quad (32)$$

- es werden zwei Koordinatensysteme (für zwei Zeitpunkte) gewählt: φ^i in \mathcal{B}_t (räumlich) und ψ^i in \mathcal{B}_0 (materiell)

2.2 Zeitableitungen

- die LAGRANGE oder Materielle Beschreibung bezieht sich auf \mathcal{B}_0
- die EULER oder räumliche Beschreibung bezieht sich auf \mathcal{B}_t
- beliebiges Feld ϕ abgeleitet, wird wie folgt beschrieben:

$$\dot{\phi} := \frac{\partial \phi_L}{\partial t} = \frac{\partial \phi_E}{\partial t} + \frac{\partial \phi_E}{\partial \mathbf{x}} \chi' \quad (33)$$

2.3 Raumbableitungen

- materiell $d\phi_L(\mathbf{x}_0, t, d\mathbf{x}_0) = \text{Grad}\phi_L(\mathbf{x}_0, t)d\mathbf{x}_0$
- räumlich $d\phi_E(\mathbf{x}, t, d\mathbf{x}) = \text{grad}\phi_E(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}$
- \mathbf{F} ist der Deformationsgradient und enthält zusätzlich Starrkörperrotationen
- $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{x}_0$
- $d\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}$
- $\mathbf{F} = d\mathbf{x}_i \otimes d\mathbf{x}^i$ (rechter Fuss ist in Referenzplatzierung und linker in der Momentanplatzierung)
- $d\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_{\psi^i} d\psi^i$
- polare Zerlegung: $\mathbf{F} := \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$
- rechter CAUCHY-GREEN-Tensor: $\mathbf{C} := \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \in \mathcal{P}_{sym}$
- linker CAUCHY-GREEN-Tensor: $\mathbf{B} := \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{R} * \mathbf{C} \in \mathcal{P}_{sym}$
- $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{u}_i$
- Verschiebungsgradient $\mathbf{H} := \mathbf{F} - \mathbf{I} \in \mathcal{L}_{lin}$
- Verzerrungstensoren

□ GREEN: $\mathbf{E}^G := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$

□ ALMANZI: $\mathbf{E}^a := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$

□ usw.

□ Merkmale

1. Alle sind symmetrisch
2. alle materiellen sind coaxial mit EV \mathbf{u}
3. alle räumlichen sind coaxial mit EV \mathbf{v}

4. in der Referenzplatzierung sind die Verzerrungstensoren Null

- Es ist möglich durch generalisierten räumlichen/materiellen Verzerrungstensoren alle Verzerrungstensoren zu erzeugen

■ ist $\det(\mathbf{F})$ konstant, dann ist es eine isochore Bewegung

■ NANSONSche Formel: $d\mathbf{a} = \mathbf{E}^F d\mathbf{a}_0$ mit dem Flächen Platzierungstensor \mathbf{E}^F

■ Transformationen für nicht triviale Differenziale:

$$\text{Linienelemente: } d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{x}_0 \quad (34)$$

$$\text{Flächenelemente: } d\mathbf{a} = \mathbf{E}^F d\mathbf{a}_0 \quad (35)$$

$$\text{Volumenelemente: } dv = J dv_0 \quad (36)$$

■ räumlicher Geschwindigkeits-Gradient: $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^\circ \mathbf{F}^{-1}$

- CAUCHY-STROKES Zerlegung: $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$

mit dem symmetrischen Streckungs-Tensor $\mathbf{D} := \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$

und dem schiefen Drehtensor $\mathbf{W} := \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$

■ Deformationsrate: $\mathbf{E}^{Go} = \mathbf{F}^T * \mathbf{D}$

■ Differenzialrate: $d\mathbf{x}^\circ = \mathbf{L} d\mathbf{x}$

■ eine Bewegung ist isochore, wenn überall im ganzen Körper folgende Bedingungen gelten:

- $\mathbf{F} \in \mathcal{U}_{im}^+$

- $J = 1$

- $J^\circ = 0$

- $tr(\mathbf{L}) = tr(\mathbf{D}) = div(\mathbf{v}) = 0$

■ Starrkörperbewegung:

- kann durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\chi(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}(t) \quad (37)$$

- $\mathbf{L} \equiv \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{D} \equiv 0$

■ Theorie kleiner Verformungen

- Terme höherer Ordnung von ε werden vernachlässigt

$$\varepsilon \equiv \mathbf{L}$$

- dadurch fällt der lineare Dehnungstensor mit dem GREEN-Tensor zusammen (in etwa):

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^G$$

- der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor wird zu $\mathbf{C} \approx (\mathbf{I} + \mathbf{E})^2$ und $\mathbf{U} \approx \mathbf{I} + \mathbf{E}$

- $\det \mathbf{F} = \mu_1 \mu_2 \mu_3$ mit $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ sind EW von \mathbf{E}

■ Spezielle Deformationen → Einfache Scherung (S. 113) und COUETTE-Fließen (S. 116)

■ Jeder Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} kann additiv zerlegt werden als

$$\mathbf{L} = \mathbf{W} + \alpha \mathbf{I} + sym(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1) + sym(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2)$$

- Drehung $\mathbf{W} \in \mathcal{Skw}$

- Volumenrate $\alpha \mathbf{I}$

- zwei Scherraten $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i$

3 Bilanzgleichungen

3.1 Masse

- Massendichte für Platzierung κ : $m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}_t} \rho_E(\mathbf{x}, t) dv$
- Massenelement in der Momentanplatzierung: $dm := \rho dv$
- Massenelement in der Referenzplatzierung: $dm_0 := \rho_0 dv_0$
- mit Massengleichheit gilt $\frac{\rho_0}{\rho} = J = \det(\mathbf{F})$

3.2 Allgemeine Bilanzgleichungen

- Bilanzgleichungen von Tensoren
- globale physikalische Quantität als Tensor $\Gamma(\mathcal{B}, t)$
- Vergleich der Dichten: $\phi_0 = J\phi$
- REYNOLDS-Transport Gleichung: $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \phi_E dv = \int_{\mathcal{B}_t} \frac{\partial \phi_E}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \phi_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}) da$
- ϕ ersetzen durch die zugehörige Massendichte ergibt sich die spezifische Intensität der Momentanplatzierung:

$$\gamma := \frac{\phi}{\rho} = \frac{d\Gamma}{dm}$$
- und analog dazu für die Referenzplatzierung:

$$\gamma_0 := \frac{\phi_0}{\rho_0} = \frac{J\phi}{J\rho} = \gamma$$
- damit ergibt sich die globale Form zu: $\Gamma(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{B}_t} \gamma_E dm = \int_{\mathcal{B}_0} \gamma_L dm$
- Impulsbilanz mit der Gleichstellung $\gamma = \mathbf{v}$:

$$\mathbf{p}(\mathcal{B}, t) := \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v} dm = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r}^\bullet dm$$
- und die Drallbilanz mit Referenzpunkt O : $\mathbf{d}_O(\mathcal{B}, t) := \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{r}^\bullet dm = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm$
- Um die Bilanzen auf der Oberfläche zu analysieren wird das Tensorfeld \mathbf{q} bel. Ordnung und das normalen Feld zur Oberfläche genutzt: $\int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{da} = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da$ und mit der NANSON-Formel ergibt sich für die Referenzplatzierung $\int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{n}_0 da_0$
- unter Nutzung der GAUSS-Transformation werden die Ränder-Integrale zu Volumen-Integralen umgeformt:

$$\int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\mathcal{B}_0} \text{Div} \mathbf{q} dv_0$$
- Somit ergibt sich die globale Bilanzgleichung zu: $\Gamma(\mathcal{B}, t)^\bullet = \int_{\mathcal{B}_t} r dm - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da$
 Dabei ist r ein repräsentativer Masseteil und \mathbf{q} der Kraftfluss
- lokale Bilanzgleichung: $\rho \gamma^\bullet = \rho r - \text{Div} \mathbf{q}$ (muss für den Körper und seine Teilabschnitte gelten)
- zusätzlich gibt es noch Sprungbilanzen

3.3 Beobachteabhängige Bewegungsgesetze

- EULERSchen Gesetze
 - Impulsgesetz: Der Änderung der Ableitung des Impulses ist gleich der resultierenden Kraft
 - Drallbilanz: Änderung des Drall ist gleich dem resultierenden Moment

- **Euklidische Transformation** unter Änderung des Beobachters:

$$\mathbf{r}^*(P^*, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(P, t) + \mathbf{c}(t)$$

- bezüglich der Betrachtung zweier Punkte von zwei Beobachtern ergibt sich folgendes Gleichnis:

$$|\mathbf{r}^*(P^*) - \mathbf{r}^*(R^*)| = |\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}(R)|$$

⇒ dieses Gesetz gilt, sofern \mathbf{c} und \mathbf{Q} zeitabhängig sind und der Beobachter sich unabhängig bewegen kann

- Die Transformation von ϕ nach ϕ^* wird **EUKLIDISCHE** Gruppe genannt. Wenn man nun davon ausgeht, dass der Referenzplatzierung unabhängig vom Beobachter ist, dann gilt folgender Zusammenhang:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}_0, t) \Leftrightarrow \mathbf{x}^* = \chi^*(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{Q}(t)\chi(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{c}(t)$$

- Daraus ergeben sich folgende Zusammenhänge für einen Beobachterwechsel in der **EUKLIDISCHEN** Gruppe:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad (38)$$

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U} \quad (39)$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (40)$$

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T \quad (41)$$

$$\mathbf{F}^{G*} = \mathbf{E}^G \quad (42)$$

$$\mathbf{E}^{a*} = \mathbf{Q}\mathbf{E}^a\mathbf{Q}^T \quad (43)$$

- Alle Beobachter nehmen die Beschleunigung in unterschiedlicher Menge und Richtung wahr.
- Ein Tensor wird als objektiv bezeichnet, wenn er nur der Rotation im **EUKLIDISCHEN** Raum unterliegt, z.B.: $\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} * \mathbf{T}$
- Der Tensor wird als invariant bezeichnet, wenn er für alle Betrachter identisch ist. So z.B.: $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$
- Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Raten der Drall und Impulsbilanz sind weder objektiv noch invariant.

3.4 Spannungsanalyse

- Die Kräfte eines Körpers setzen sich zusammen aus Kontaktkräften \mathbf{f}_c und Körperkräften \mathbf{f}_b . Beide Vektorfelder sind dabei objektiv.
- Spannungsvektorfeld ist die Dichte der Kräfte, welche beschrieben wird durch den Richtungsvektor und der Normalen zur Oberfläche (Spannungsprinzip nach **EULER** und **CAUCHY**, s. S.138)
- Satz von **CAUCHY**: Der Spannungsvektor eines Punktes des Körpers hängt linear von der Normalen der Oberfläche ab. $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$
- zusätzlich gilt noch das Reaktionsprinzip zwischen Körpern: $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$
- **CAUCHY's** erstes Gesetz der Bewegung:
An jedem Punkt des Körpers muss folgender Zusammenhang der Impulsbilanz gelten:
 $\text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}$
- das reduzierte zweite Gesetz nach **EULER** lautet: $\text{div} \mathbf{M} + \rho \mathbf{m}_b + 2\mathbf{t}^A = \mathbf{o}$ (Materialien mit solchen Momenten werden polare Medien genannt)
- mit nicht-polaren Medien ist jeder Spannungstensor symmetrisch (**CAUCHY's** zweites Bewegungsgesetz) → Darstellung in Spektralform möglich
- Prinzip der virtuellen Energie:
CAUCHY's Gesetze gelten dann, wenn für alle Vektorfelder $\delta \mathbf{v}$ für den Körper und seine Teilkörper gilt:
$$\int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dm = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{v} dm + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{D} dv$$
 (Es ist schwächer als **EULER's** Bewegungsgesetze)

- Bilanz der Energien: $L_e = L + K^\bullet$

Energie der äußeren Kräfte: $L_e := \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dm$

Spannungsenergie: $L := \int_{\mathcal{B}_t} l dm$

kin. Energie: $K := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}^2 dm$

- alle diese Gesetze gelten nur für träge/untätige Beobachter, also nur GALILEI Invariante
- Spannungstensoren:

- 1. PIOLA-KIRCHHOFF $\mathbf{T}^{1PK} := J \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$
- 2. PIOLA-KIRCHHOFF $\mathbf{T}^{2PK} := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}^{1PK}$
- materieller Spannungstensor: $\mathbf{S} := J^{-1} \mathbf{T}^{2PK}$

- Ein Spannungstensor \mathbf{T}^x heißt Arbeitkongruent zum Verzerrungstensor \mathbf{E}^x , wenn die Spannungsenergie in der Referenzplatzierung:

$$\rho_0 l = J \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{T}^x \cdot \mathbf{E}^{x^\bullet}$$

Ein Beispiel ist der \mathbf{T}^{2PK} zu \mathbf{E}^G

- Spannungsraten

- Diese Transformation kann entweder als Beobachterwechsel oder überlagerte Starrkörperbewegung interpretiert werden.
- für die materielle Spannungsrate ergibt sich mit dem CAUCHY-Spannungstensor:
 $\mathbf{S}^\bullet = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{T}^\bullet - \mathbf{L}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{L}^T)\mathbf{F}^{-T}$
- die OLDROYD-Rate lautet: $\mathbf{T}^\nabla = \mathbf{T}^\bullet - \mathbf{L}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{L}^T$
 die Rate ist objektiv und mathematisch gesehen eine LIE-Ableitung eines Spannungstensors entlang der Geschwindigkeit
- Alle Spannungsraten sind auf der linken Seite invariant bzgl. der EUKLID Transformation, während die rechte Seite objektiv ist.

3.5 Thermodynamische Bilanzen

- ε spezifische innere Energie
- r spezifische Wärmequelle, q Wärmefluss eines Gebietes über eine Zeit (ist lin. bzgl. der äußeren Normalen der Oberfläche)
- Erstes Gesetz der Thermodynamik:

Die Wärmezufuhr Q und die Energie der äußeren Kräfte L_e führt zu einer Änderung der kinetischen Energie K in einem internen Gebiet und der internen Energie E des Körpers:

$$Q + L_e = K^\bullet + E^\bullet$$

- für die rationale Thermodynamik werden zusätzliche Größen benötigt:

- θ die absolute Temperatur
- $\mathbf{g} := \text{grad} \theta_E$ räumlicher Temperatur Gradient
- $\mathbf{g}_0 := \text{Grad} \theta_L = \mathbf{F}^T \mathbf{g}$ materieller Temperatur Gradient
- η spezifische Entropie

- Zweites Gesetz der Thermodynamik:

Für alle Körper zu jedem Zeitpunkt muss folgende Ungleichung gelten

$$\int_{\mathcal{B}_t} \eta^\bullet dm \geq \int_{\mathcal{B}_t} \frac{r}{\theta} dm - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} da$$

- Diese Ungleichung kann auch in eine räumliche Form gebracht werden mit dem GAUSS-Integral und führt zu:

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta} \geq \psi^\bullet + \theta^\bullet \eta \quad (\text{CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung, 2. Term ist die spezifische thermische Dissipation})$$

- diese Gesetze sind Einschränkungen für die späteren Formulierungen von Materialmodellen und -verhalten

4 Prinzip der Materialtheorien

- beliebiges Verhalten von verschiedenen Materialien
- reine mechanische Variablen

4.1 Determinismus

- Prinzip des Determinismus:
Die Spannungen eines materiellen Punktes sind den momentanen und vergangenen Bewegungen des Körpers unterworfen.
- vergangene Bewegungen: $\chi(\mathbf{x}_0, \tau)_{\tau=0}^t$

4.2 Lokale Betrachtung

- Spannungen von materiellen Punkten hängen nicht von Bewegungen anderer Punkte ab.
- **Prinzip der lokalen Betrachtung:**
Die Spannungen eines materiellen Punktes hängen nur von der Bewegung einer nahen Nachbarschaft des Punktes ab.
- **Prinzip der lokalen Betrachtung für einfache Materialien** Die Spannungen eines materiellen Punktes hängen nur von der Bewegung einer infinitesimalen Nachbarschaft des Punktes ab.
 - \Rightarrow nur die Deformationsprozess im Tangentenraum am Punkt hat Einfluss
 - Einfache Materialien sind bezeichnet durch Abbruch der Ableitungen nach der ersten Ableitung
 - Ansatz für die Materialfunktion: $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0, t) = \mathfrak{F}\chi(\mathbf{x}_0, \tau), \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \tau)_{\tau=0}^t$
 - zusätzliche Einschränkungen werden durch die Wahl der benötigten Invarianten Spannungen und Dehnungen gemacht

4.3 EUKLIDISCHE INVARIANZEN

- **Prinzip der materiellen Objektivität (PMO)**
Die Spannungsleistung ist objektiv (und auch invariant) unter EUKLIDischer Transformation:
 $l = l^*$
- CAUCHY's Spannungstensor ist objektiv, wodurch sich folgende Gleichung ergibt:
 $\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$ (kann dazu genutzt werden für jeden Beobachter die materielle Funktion zu identifizieren)
- **Prinzip der Invarianz von überlagerter Starrkörperbewegung (PISM)**
Wenn $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0, t)$ die CAUCHY-Spannungen nach einer Bewegung $\chi(\mathbf{x}_0, \tau)_{\tau=0}^t$ sind, dann sind $\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{Q}(t)^T$ die Spannungen nach einer überlagerten Starrkörperbewegung über die originale Bewegung $\mathbf{Q}(\tau)\chi(\mathbf{x}_0, \tau) + \mathbf{c}(\tau)_{\tau=0}^t$
 - Trägheit beeinflusst die Spannungen nicht direkt
 - es gibt keine Gegenbeispiele, die zeigen, dass dieses Prinzip kein Naturgesetz ist.
 - Starkes Werkzeug um allgemeine Materialfunktionen zu konkretisieren
- **Prinzip der Forminvarianz (PFI)**
Die Materialfunktionen sind invariant gegenüber Beobachterwechsel: $\mathfrak{F}^* \cdot = \mathfrak{F} \cdot$
- wenn zwei der drei Prinzipien gelten, dann gilt automatisch auch das dritte Prinzip
- im weiteren Verlauf beschränken wir uns auf Materialien, welche die Prinzipien erfüllen

4.4 Erweiterung der Prinzipien für Thermodynamik

- **unabhängige Variablen** sind die Bewegung $\chi(\mathbf{x}_0, t)$ und das Temperaturfeld $\theta(\mathbf{x}_0, t)$, womit ein thermo-kinematischer Prozess beschrieben wird.

- **abhängige Variablen** sind $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0, t), \mathbf{q}(\mathbf{x}_0, t), \varepsilon(\mathbf{x}_0, t), \eta(\mathbf{x}_0, t)$ und werden als kaloro-dynamischer Status bezeichnet am Punkt \mathbf{x}_0
- **Prinzip des Determinismus für thermo-mechanische Materialien**
Der thermokinematische Prozess eines Körpers determiniert den kaloro-dynamischen Zustand.
- **Prinzip der lokalen Wirkung für thermo-mechanische Materialien**
Der kaloro-dynamische Zustand eines materiellen Punktes wird hängt nur ab von seine thermo-kinematischen Prozess einer finiten Nachbarschaft.
- materieller Gradient: $F(\mathbf{x}_0, \tau)|_{\tau=0}^t := \text{Grad}\chi(\mathbf{x}_0, \tau)|_{\tau=0}^t$ und $g_0(\mathbf{x}_0, \tau)|_{\tau=0}^t := \text{Grad}\theta_L(\mathbf{x}_0, \tau)|_{\tau=0}^t$
→ Annahme, dass Temperaturfeld und räumliche Temperaturgradient objektive Felder sind → $\theta_E^* = \theta_E$ und $\mathbf{g}^* = \mathbf{Q} \mathbf{g}$
→ die Temperatur in der LAGRANGE-Beschreibung und der materielle Temperaturgradient können als invariante Felder angenommen werden: $\theta_L^* = \theta_L$ und $\mathbf{g}_0^* = \mathbf{g}_0$
- **Prinzip der materiellen Objektivität für thermo-mechanische Materialien**
Die totale Dissipation ist objektiv (sowie invariant) bzgl. der EUKLIDischen Transformation:
$$\delta - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho\theta} = \delta^* - \frac{\mathbf{q}^* \cdot \mathbf{g}^*}{\rho^*\theta^*}$$
- für alle untätigen Beobachter gelten damit der 1. und 2. HS der Thermodynamik
- **Prinzip der Invarianz von überlagerter Starrkörperbewegung für thermo-mechanische Materialien(PISM)**
Wenn $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0, t), \mathbf{q}(\mathbf{x}_0, t), \psi(\mathbf{x}_0, t), \eta(\mathbf{x}_0, t)$ ein kaloro-dynamischer Zustand sein soll, dann ist der resultierende thermo-kinematische Prozess $\chi(\mathbf{x}_0, \tau), \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \tau), \theta(\mathbf{x}_0, \tau), \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \tau)|_{\tau=0}^t$ dann ist
 $\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{Q}^T(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{q}(\mathbf{x}_0, t), \psi(\mathbf{x}_0, t), \eta(\mathbf{x}_0, t)$
der kaloro-dynamische Zustand der aus dem modifizierten Prozess
 $\mathbf{Q}(\tau)\chi(\mathbf{x}_0, \tau) + \mathbf{c}(\tau), \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \tau), \theta(\mathbf{x}_0, \tau), \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \tau)|_{\tau=0}^t$ resultiert.
- Reduzierte Formen von einfachen Materialien
 - $\mathbf{T}_r(\mathbf{x}_0, t) = \mathfrak{F}_1 \mathbf{U}(\mathbf{x}_0, \tau)|_{\tau=0}^t$
 - PISM ist nur erfüllt, wenn man das Material in eine reduzierte Form überführen kann
 - weitere reduzierte Formen auf S. 164

5 Innere Zwangsbedingungen

5.1 Mechanische Zwangsbedingungen

- Materialien reagieren auf die aufgezwungenen Deformationen durch Reaktionsspannungen.
- **innere Zwangsbedingungen** sind Materialfunktionen
 $\gamma_{\mathbf{F}} : \mathcal{I}^{+} \rightarrow \mathcal{R} \mid \mathbf{F} \mapsto \gamma_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$
 so dass für alle kinematischen Prozesse $\mathbf{F}(\tau)|_{\tau=0}^t$ gilt
 $\gamma_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}(\tau)) = 0$
- als reduzierte Form durch den Rotationstensor \mathbf{R} : $\gamma_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})|_{\mathcal{S}ym} =: \gamma_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) =: \gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$
- wenn die Gleichung differenzierbar ist, dann lautet die Rate: $\frac{d\gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})}{d\mathbf{C}} \cdot \mathbf{C}^{\bullet} = \text{grad}\gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}^{\bullet} = 0$
 daher müssen alle Deformationsraten \mathbf{C}^{\bullet} tangential zur Hyperoberfläche sein
- **Prinzip des Determinismus der inneren Zwangsbedingungen**
 Die momentanen Spannungen sind durch die Bewegung des Körpers determiniert außer einem Reaktionsteil, der bei keiner kompatiblen Arbeiten leistet. ($\mathbf{S} = \mathbf{S}_E + \mathbf{S}_R$)
 mit $\mathbf{S}_E = \mathcal{R}\mathbf{C}(\tau)|_{\tau=0}^t$ und $\mathbf{S}_R = \alpha \text{grad}\gamma_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ (und beide müssen symmetrisch sein auf CAUCHYs 2nd Law)

5.2 Thermo-Mech. Zwangsbedingungen

- bestehen aus materiellen Funktionen:

$$\mathbf{J} : \mathcal{P}_{sym} \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{S}_{ym} \quad \mathbf{j} : \mathcal{P}_{sym} \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{V} \quad \mathbf{j} : \mathcal{P}_{sym} \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R} \quad (44)$$

so dass der thermo-kinematische Prozess wie folgt beschrieben werden kann:

$$\mathbf{J}(\mathbf{C}, \theta) \cdot \mathbf{C}^{\bullet} + \mathbf{j}(\mathbf{C}, \theta) \cdot \mathbf{g}_0 + j(\mathbf{C}, \theta) \cdot \theta^{\bullet} = 0$$

- dabei sind die verwendet Variablen bereits in reduzierter Form z.B. objektiver Form
- **Annahme: Prinzip des Determinismus für Materialien mit thermo-mechanischen inneren Zwangsbedingungen** Die momentanen Spannungen, Wärmeflüsse, internen Energien und Entropie sind determiniert durch den thermo-kinematischen Prozess nur mit additiven Teilen, die nicht dissipieren für alle zulässigen Prozesse.
- Zerlegung der Variablen in Extra und Reaktions-Anteile (s. S. 172)

6 Elastizität

- HOOKEsche Gesetz: $\mathbf{T} = \mathbf{C}[\mathbf{E}]$

6.1 Reduzierte elastische Formen

- Ein einfaches Material ist elastisch, wenn die momentane Spannung bei der Momentanen Platzierung bestimmt ist.

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_0, t) = f(\chi(\mathbf{x}_0, t), \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t))$$

- Spannungen sind unabhängig von der Bewegung χ
- somit ergeben sich die reduzierten Formen zu:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}f_1(\mathbf{U})\mathbf{R}^T \quad (45)$$

$$\mathbf{S} = k(\mathbf{C}) \quad (46)$$

- wegen der Geschwindigkeitsunabhängigkeit der Elastizität ist es ausreichend die Invarianten unter GALILEIScher Transformation zu betrachten

6.2 Thermo-Elastizität

- Ein einfaches Material heißt thermisch-elastisch, wenn der momentane kaloro-dynamische Zustand bestimmt ist durch den momentanen thermisch-kinematischen Zustand
- mögliche reduzierte Formen

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}f_T(\mathbf{U}, \theta, \mathbf{g}_0)\mathbf{R}^T \quad (47)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}f_q(\mathbf{U}, \theta, \mathbf{g}_0) \quad (48)$$

$$\psi = f_\psi(\mathbf{U}, \theta, \mathbf{g}_0) \quad (49)$$

$$\eta = f_\eta(\mathbf{U}, \theta, \mathbf{g}_0) \quad (50)$$

6.3 Änderung der Bezugsplatzierung

- $\mathbf{T} = f(\kappa_0, \mathbf{F})$ \mathbf{T} hängt auch von der Referenzplatzierung ab
- \mathbf{K} ist eine Umformung mit reiner Starrkörperbewegung
- $\underline{\mathbf{C}} = \mathbf{K}^T \mathbf{C} \mathbf{K}$
- Für den materiellen Spannungstensor erhält man: $\underline{\mathbf{S}} = \mathbf{F}f(\underline{\kappa}_0, \underline{\mathbf{F}})\mathbf{F}^T$
 $\mathbf{S} = \mathbf{K}\underline{\mathbf{S}}\mathbf{K}^T$

6.4 Elastische Isomorphie

- wird genutzt um das elastische Gesetz für zwei unterschiedliche Punkte zu betrachten
- **Definition** Zwei elastische materielle Punkte X und Y sind **elastisch isomorph**, wenn wir Referenzplatzierungen finden κ_X und κ_Y , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Massendichten sind identisch $\rho_{0X} = \rho_{0Y}$
- elastischen Gesetze sind identisch: $f_X(\kappa_X, \cdot) = f_Y(\kappa_Y, \cdot)$
- Diese Bedingungen sind erfüllt, sofern gilt:

$$\frac{\rho_{0X}}{f_X(\underline{\kappa}_X, \mathbf{F} \mathbf{K}_X)^{-1}} = \frac{\rho_{0Y}}{f_Y(\underline{\kappa}_Y, \mathbf{F} \mathbf{K}_Y)^{-1}}$$

- Damit sind die materiellen Punkte elastisch isomorph, wenn ein elastischer Isomorphismus $\mathbf{K} \in \mathcal{I}^{++}$ existiert, so dass gilt:

$$\rho_{0X} = \rho_{0Y} \det(\mathbf{K})$$

$$f_X(\mathbf{F} \mathbf{K}) = f_Y(\mathbf{F})$$

- Wenn zwei elastische Punkte isomorph sind, dann haben sie die gleichen elastischen Eigenschaften.

- \rightarrow Wenn der Körper aus einem Material besteht, dann sind alle Punkte elastisch isomorph, was uniform genannt wird.
- Wenn es einen Referenzpunkt gibt, so dass für alle Punkt bzgl. dieser Platzierung $\mathbf{K} \equiv \mathbf{I}$ gilt, dann wird der Körper als **homogen** bezeichnet.

6.5 Elastische Symmetrie

- Automorphismus sagt aus, dass jeder Punkt zu sich selbst isomorph ist.
- Wenn $\mathbf{T} = f(\mathbf{F})$ ein elastisches Gesetz ist. Ein Tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{I}nv$ heißt Symmetrie-Transformator, wenn $f(\mathbf{F}) = f(\mathbf{F} \mathbf{A})$ gilt.
 $\rightarrow \kappa_X \equiv \kappa_Y$ und $\rho_{0X} \equiv \rho_{0Y} \rightarrow \det \mathbf{A} = 1$
- die Symmetriegruppe \mathcal{G} ist eine Untergruppe der unimodularen Gruppe
- für die reduzierte Form k ist die Symmetrietransformation $k(\mathbf{C}) = \mathbf{A}k(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})\mathbf{A}^T$
- Symmetrietransformation der inneren Zwangsbedingungen $\gamma_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \gamma_{\mathbf{F}}(\mathbf{F} \mathbf{A})$
- **Theorem von NOLL**
 Wenn $k(\kappa_0, \mathbf{C})$ ein elastisches Gesetz mit dem Referenzpunkt κ_0 und der Symmetriegruppe \mathcal{G} ist und $k(\underline{\kappa}_0, \mathbf{C})$ ein elastisches Gesetz des selben Materials mit dem Referenzpunkt $\underline{\kappa}_0$ und der Symmetriegruppe $\underline{\mathcal{G}}$ ist. Dann ist $\underline{\mathcal{G}} = \mathbf{K} \mathcal{G} \mathbf{K}^{-1}$
- **Theorem** k_X und k_Y zwei elastische Gesetze mit je einer Symmetriegruppe \mathcal{G}_X und \mathcal{G}_Y
 1. \mathbf{K} elast. Isomorphismus, dann gilt $\mathcal{G}_Y = \mathbf{K} \mathcal{G}_X \mathbf{K}^{-1}$
 2. ... S. 186
- \mathbf{I} ist die kleinste Symmetriegruppe. Ein Material mit dieser Gruppe wird **triklin** bezeichnet.
- die maximale Symmetriegruppe ist die unimodulare Gruppe, welche Fluide darstellt.
- elastisches Material ist ein Fluid, wenn gilt:
 $\mathbf{T} = -p(\rho)\mathbf{I}$ und $\mathbf{S} = -p(\rho)\mathbf{C}^{-1}$
- eine Referenzplatzierung ist unverzerrt, wenn die Symmetriegruppe in der pos. orthogonale Gruppe enthalten ist
- Wenn ein Material eine unverzerrt Referenzplatzierung besitzt, dann ist der Körper ein Festkörper.
- Wenn die Symmetriegruppe \mathcal{G} die pos. orthogonale Gruppe für eine Referenzplatzierung enthält, so wird dies als Isotropie bezeichnet.
- Materialien, welche weder Fluide noch Festkörper sind, werden als Fluidkristalle bezeichnet.

6.6 Isotrope Elastizität

- eine isotrope Tensorfunktion in reduzierter Form: $\mathbf{S} = k(\mathbf{C}) = \mathbf{Q}k(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q})\mathbf{Q}^T$
- RICHTER-Darstellung: $k(\mathbf{C}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{C} + \alpha_2 \mathbf{C}^2$ (kann auch in Spektraldarstellung erfolgen)
- S. 194 dritte Variable ist nicht differenzierbar auf Grund der Norm der EW \rightarrow Nachteil der Spektraldarstellung
- Spannungen können auch durch die RICHTER-Darstellung beschrieben werden
- Man muss bei den Tensoren (Spannungen und Verzerrungen) unterscheiden zwischen räumlichen, welche objektiv sind, und materiellen, welche invariant sind (bis auf 1. PK, der weder objektiv noch invariant ist)

6.7 Inkrementelle elastische Gesetze

- $d\mathbf{S} = dk(\mathbf{C}, d\mathbf{C}) =: \mathbf{K}[d\mathbf{E}^G] = \frac{1}{2} \mathbf{K}[d\mathbf{C}]$
- Nutzung für nicht-lineare elastische Gesetze (Steifigkeits-Tetraden für nicht lin. elast. Gesetze sind Funktionen von \mathbf{C} oder \mathbf{E}^G)
- für symmetrisch unabhängige und abhängige Variablen, können wir annehmen, dass sie linke und rechte Subsymmetrie besitzen und man kann die VOIGTSche Darstellung nutzen

- die Geschwindigkeitsformen wären unvollständig ohne die Anfangsbedingungen für die Integration. Daher muss eine Platzierung gefunden werden für die \mathbf{C}_0 oder \mathbf{E}_0^G Spannungsfrei ist.
- **Vorteil** der materiellen Variablen ist, dass alle Größen, wie auch die Steifigkeit, invariant mit der EUKLIDischen Transformation sind.
- Geschwindigkeiten für die Spannungen ist z.B. die TRUESDELL-Rate für den CAUCHY-Spannungstensor: $\mathbf{F}\mathbf{T}^{2PK}\mathbf{F}^T = \mathbf{H}_E(\mathbf{D})$
- Wenn die Steifigkeit solcher Raten nicht von der Konfiguration abhängig ist, aber konstant ist, dann liegt ein physikalisch lineares elastisches Gesetz vor.
- alle enthalten noch die geometrische Nichtlinearität
- Vielfach verwendet sind kleine Dehnungen, aber große Rotationen → die isotropen und anisotropen Formen sind gut bekannt, da sie nur wenige Materialkonstanten besitzen.
- durch die Linearisierung $\mathbf{E}^G \equiv 0$ kann die generalisierte materielle Spannungsrate dargestellt werden:

$$\mathbf{S}^{Gen\bullet} = (\lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I})[\mathbf{E}^{Gen\bullet}]$$
- durch geometrische Linearisierung können wir das Spannungsinkrement ersetzen durch den CAUCHY-Spannungstensor \mathbf{T} und erhalten das isotrope HOOKEsche Gesetz:
 $\mathbf{T} = \lambda tr(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}$ mit den LAMÉ-Konstanten λ und μ .
Dieses Gesetz ist nicht mehr objektiv und es kann nicht mehr in eine reduzierte Form überführt werden.
- Objektive und geometrische lineare elastische Gesetze existieren nicht!

6.8 Symmetrien in Thermo-Elastizität

- $\mathbf{K} := Grad(\kappa_0, \underline{\kappa}_0^{-1})$ Wechsel der Referenzplatzierung
- analog zum mechanischen Fall, wird die Isomorphy von zwei thermisch-elastischen Materialpunkte beschrieben.

$$\rho_{0X} = \rho_{0Y} det(\mathbf{K}) \quad (51)$$

$$k_{SY}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) = \mathbf{K} k_{SX}(\mathbf{K}^T \mathbf{C} \mathbf{K}, \theta, \mathbf{K}^T \mathbf{g}_0) \mathbf{K}^T \quad (52)$$

$$k_{qY}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) = det(\mathbf{K}^{-1}) \mathbf{K} k_{qX}(\mathbf{K}^T \mathbf{C} \mathbf{K}, \theta, \mathbf{K}^T \mathbf{g}_0) \quad (53)$$

$$k_{\psi Y}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) = k_{\psi X}(\mathbf{K}^T \mathbf{C} \mathbf{K}, \theta, \mathbf{K}^T \mathbf{g}_0) + \psi_C - \theta \eta_C \quad (54)$$

$$k_{\eta Y}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) = k_{\eta X}(\mathbf{K}^T \mathbf{C} \mathbf{K}, \theta, \mathbf{K}^T \mathbf{g}_0) + \eta_C \quad (55)$$

- mit dem Automorphismus ($X \equiv Y$) ergibt sich eine Abbildung $\mathbf{A} \in \mathcal{U}^{im+}$, welche als Symmetrietransformation bezeichnet wird.

$$k_S(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) = \mathbf{A} k_S(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}, \theta, \mathbf{A}^T \mathbf{g}_0) \mathbf{A}^T \quad (56)$$

$$k_q(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) = \mathbf{A} k_q(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}, \theta, \mathbf{A}^T \mathbf{g}_0) \quad (57)$$

$$k_{\psi}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) = k_{\psi}(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}, \theta, \mathbf{A}^T \mathbf{g}_0) \quad (58)$$

$$k_{\eta}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) = k_{\eta}(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}, \theta, \mathbf{A}^T \mathbf{g}_0) \quad (59)$$

7 Hyperelastizität

7.1 Thermodyn. Einschränkungen

- reduzierte Formen für das thermisch-elastisches Gesetz:

$$\mathbf{S} = k_S(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) \quad (60)$$

$$\mathbf{q} = k_q(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) \quad (61)$$

$$\Psi = k_\Psi(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) \quad (62)$$

$$\eta = k_\eta(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0) \quad (63)$$

- für die CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung wird die Rate der freien Energie benötigt
→ die Ungleichung muss erfüllt werden für alle zulässigen thermisch-kinematisch Prozesse, wie z.B. alle Bilanzgleichungen. Diese ist erfüllt, wenn folgendes gilt:

1. freie Energie hängt nicht vom Temperatur-Gradienten ab: $\Psi = k_\Psi(\mathbf{C}, \theta)$
2. die freie Energie ist ein Potenzial der Spannungen: $k_S(\mathbf{C}, \theta) = 2\rho \frac{\partial k_\Psi(\mathbf{C}, \theta)}{\partial \mathbf{C}}$
3. und für die Entropie $k_\eta(\mathbf{C}, \theta) = -\frac{\partial k_\Psi(\mathbf{C}, \theta)}{\partial \theta}$
4. der Wärmefluss erfüllt die Wärmeleitungsungleichung: $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{g}_0 \leq 0$

- 2) und 3) sind bekannt als GIBBS-Beziehungen
- vier Fälle führen zur mechanischen Elastizität (sind allerdings eher unrealistisch)

1. isothermisch $\mathbf{S} = 2\rho \frac{\partial k_\Psi(\mathbf{C}, \theta_0)}{\partial \mathbf{C}}$ und $\Psi = k_\Psi(\mathbf{C}, \theta_0)$
2. isentrope $\mathbf{S} = 2\rho \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{C}, \eta_0)}{\partial \mathbf{C}}$
3. freie Energie hängt nicht von der Temperatur ab: $\mathbf{S} = 2\rho \frac{\partial k_\Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$
4. interne Energie hängt nicht von der Entropie ab: $\mathbf{S} = 2\rho \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$

→ Überführung von thermisch-elastisch zu mechanischer Elastizität ist weder trivial noch eindeutig. Man erhält vier unterschiedliche Ausdrücke für die hyperelastischen Spannungen.

7.2 Hyperelastische Materialien

- hyperelastizität heißt auch perfekte Elastizität oder GREEN Elastizität
- ein Material wird als hyperelastisch bezeichnet, wenn eine Dehnungsenergie w_F als Ableitungsfunktion des Deformationsgradienten \mathbf{F} existiert. Die Rate ist gleiche der spezifischen Spannungsleistung.
- die Spannungsleistung ist ein komplettes Differenzial und hängt nicht vom Pfad ab
- jedes hyperelastische Material ist elastisch
- für hyperelastische Materialien sind die folgenden Aussagen äquivalent:
 1. Objektivität der Dehnungsenergiefunktion $w_F = w_F(\mathbf{Q} \mathbf{F})$
 2. Objektivität der Spannungsfunktion (PISM) $\mathbf{Q} f(\mathbf{F}) \mathbf{Q}^T = f(\mathbf{QF})$
 3. lokale Drallbilanz $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$
- reduzierte Formen für hyperelastische Materialgesetze, z.B.: $\mathbf{S} = 2\rho \frac{dw_C}{d\mathbf{C}}$ oder $\mathbf{T} = 2\rho \mathbf{F} \frac{dw_C}{d\mathbf{C}} \mathbf{F}^T$
- wie bei den inkrementalen elastischen Gesetz, wird auch bei dem hyperelastischen Gesetzen die Rate benötigt: $d\mathbf{T}^{2PK} = \frac{1}{2} \mathbf{H}[d\mathbf{C}]$ (\mathbf{H} ist doppelte Ableitung und Symmetrisch bei Hyperelastizität, z.B. $\mathbf{H}_E := 4\rho_0 \mathbf{F} * \frac{d^2 w_C}{d\mathbf{C}^2}$)

- folgende Aussagen sind äquivalent für alle elastischen (?) Materialien:
 1. Material ist hyperelastisch
 2. Steifigkeitsmatrix \mathbf{H}^{Gen} ist symmetrisch für alle $\mathbf{F} \in \mathcal{I}nu^+$
 3. Spannungsarbeit ist Pfadunabhängig
 4. Spannungsarbeit ist Null für Kreisprozesse
- die letzte Aussage würde bedeuten, dass wenn man einen Prozess für elastische Materialien findet, der aber nicht hyperelastisch ist, der Energie zuführt oder abführt, wäre es nicht-physikalisch nachvollziehbar. Dies ist ein starkes Argument gegen jede Elastizitätstheorie, welche nicht automatisch Hyperelastizität enthält.
- Bilanz der Leistung für ein hyperelastischen Körper führt zum Energieerhaltungssatz: $(K + W + U)^\bullet = 0$

7.3 Hyperelastische Isomorphie und Symmetrie

- Betrachtung der Invarianz unter Änderung der Referenzplatzierung
- zwei hyperelastische Materialpunkte X und Y sind isomorph, wenn ein Isomorphismus $\mathbf{K} \in \mathcal{I}nu^+$ und eine Konstante w_c existieren, so dass gilt:

$$\rho_{0X} = \rho_{0Y} \det(\mathbf{K}) \text{ und } w_{\mathbf{F}X}(\underline{\kappa}_X, \mathbf{F} \mathbf{K}) = w_{\mathbf{F}Y}(\underline{\kappa}_Y, \mathbf{F}) + w_c \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{I}nu^+$$
- und eine Symmetrie-Transformation $w_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = w_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})$
- das Integral $dw_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = dw_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A})$ ist nur gleich eine Funktion $w_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$, wenn es ein hyperelastischer Festkörper ist. So ergibt sich:

$$w_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = w_{\mathbf{C}}(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}) + w_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$$
- Für ein hyperelastisches Material ist die Symmetriegruppe der Dehnungsenergiefunktion $w_{\mathbf{C}}$ enthalten in der Symmetriegruppe des elastischen Gesetzes k : $\mathcal{G}_w \subset \mathcal{G}_\sigma$
 Für hyperelastische Festkörper sind beide Gruppen identisch: $\mathcal{G}_w \equiv \mathcal{G}_\sigma$

7.4 Isotrope Hyperelastizität

- Ein objektiver hyperelastischer Festkörper ist isotrope, genau dann wenn die Dehnungsenergiefunktion $w_{\mathbf{F}}$ eine isotrope Funktion von \mathbf{U} , \mathbf{C} , \mathbf{V} , \mathbf{B} oder \mathbf{E}^G ist:
 1. $w_{\mathbf{F}} = w_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = w_{\mathbf{U}}(\mathbf{Q} \mathbf{U} \mathbf{Q}^T)$
 2. $w_{\mathbf{F}} = w_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = w_{\mathbf{C}}(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T)$
 3. $w_{\mathbf{F}} = w_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}) = w_{\mathbf{V}}(\mathbf{Q} \mathbf{V} \mathbf{Q}^T)$
 4. $w_{\mathbf{F}} = w_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = w_{\mathbf{B}}(\mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{Q}^T)$
 5. analog für \mathbf{E}^G
- Ein hyperelastischer Festkörper ist isotrope, wenn die Dehnungsenergie über eine Funktion der drei prinzipiellen Invarianten der symmetrischen Argumente dargestellt werden kann:

$$w_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = w_{\mathbf{Uiso}}(I_{\mathbf{U}}, II_{\mathbf{U}}, III_{\mathbf{U}}) \quad (64)$$

$$w_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = w_{\mathbf{Ciso}}(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) \quad (65)$$

$$w_{\mathbf{V}}(\mathbf{V}) = w_{\mathbf{Viso}}(I_{\mathbf{V}}, II_{\mathbf{V}}, III_{\mathbf{V}}) \quad (66)$$

$$w_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = w_{\mathbf{Biso}}(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}}) \quad (67)$$

$\rightarrow w_{\mathbf{Uiso}} = w_{\mathbf{Viso}}$ und $w_{\mathbf{Ciso}} = w_{\mathbf{Biso}} =: w_{\mathbf{iso}}$

- Ein isotroper elastischer Festkörper mit der Darstellung $\mathbf{T} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{B} + \beta_2 \mathbf{B}^2$ ist hyperelastisch, wenn folgende Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \beta_0(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}}) &= 2\rho III_{\mathbf{B}} \frac{\partial w_{\mathbf{iso}}}{\partial III_{\mathbf{B}}} \\ \beta_0(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}}) &= 2\rho \left(\frac{\partial w_{\mathbf{iso}}}{\partial I_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}} \frac{\partial w_{\mathbf{iso}}}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) \\ \beta_0(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, III_{\mathbf{B}}) &= -2\rho \frac{\partial w_{\mathbf{iso}}}{\partial II_{\mathbf{B}}} \end{aligned}$$

■ GOLDENBLAT-Theorem

Ein isotroper elastischer Festkörper mit der Darstellung:

$$\mathbf{T} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{B} + \beta_2 \mathbf{B}^2$$

ist hyperelastisch, wenn folgende Bedingungen der »integrability« erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_0}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}}} + \mathbb{I}_{\mathbf{B}} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}}} + \frac{\beta_2}{2} &= 0 \\ \mathbb{I}_{\mathbf{B}} \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}}} + \frac{\beta_1}{2} - I_{\mathbf{B}} \frac{\partial \beta_0}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}}} - \frac{\partial \beta_0}{\partial I_{\mathbf{B}}} &= 0 \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}} \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}}} + \frac{\partial \beta_2}{\partial I_{\mathbf{B}}} &= 0 \end{aligned}$$

■ Theorem 7.12

Ein inkompressibler isotroper hyperelastischer Festkörper hat die Darstellung:

$$\mathbf{T} = -p_1 \mathbf{I} + 2\rho \left(\frac{\partial w_{iso}(I_{\mathbf{B}}, \mathbb{I}_{\mathbf{B}}, 1)}{\partial I_{\mathbf{B}}} + I_{\mathbf{B}} \frac{\partial w_{iso}(I_{\mathbf{B}}, \mathbb{I}_{\mathbf{B}}, 1)}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}}} \right) \mathbf{B} - 2\rho \frac{\partial w_{iso}(I_{\mathbf{B}}, \mathbb{I}_{\mathbf{B}}, 1)}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^2$$

■ Theorem 7.13

Ein hyperelastischer Festkörper ist isotrope, wenn die Dehnungsenergie als symmetrische Funktion w_{λ} mit den drei Eigenwerte des Arguments dargestellt werden kann: $w_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = w_{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = w_{\lambda}(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1) = w_{\lambda}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$

Damit können die CAUCHY-Spannungen wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{T} = 2\rho \frac{dw_{\mathbf{B}}}{d\mathbf{B}} \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial w_{\lambda}}{\partial \lambda_i} \lambda_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i$$

■ Theorem 7.14

Ein isotroper elastischer Festkörper mit folgender Darstellung:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \underline{\sigma}(\lambda_i, \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}, |\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}|) \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

mit der skalaren Funktion $\underline{\sigma}$ der drei EW λ_i von \mathbf{C} ist hyperelastisch, wenn die folgenden Bedingungen gelten mit allen EW positiv und $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$:

$$\underline{\sigma}_{,2}(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, |\lambda_2 - \lambda_3|) + \text{sgn}(\lambda_2 - \lambda_3) \underline{\sigma}_{,3}(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, |\lambda_2 - \lambda_3|) \quad (68)$$

$$= \underline{\sigma}_{,2}(\lambda_2, \lambda_3 + \lambda_1, |\lambda_3 - \lambda_1|) + \text{sgn}(\lambda_1 - \lambda_3) \underline{\sigma}_{,3}(\lambda_2, \lambda_3 + \lambda_1, |\lambda_3 - \lambda_1|) \quad (69)$$

$$\underline{\sigma}_{,2}(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, |\lambda_2 - \lambda_3|) + \text{sgn}(\lambda_3 - \lambda_2) \underline{\sigma}_{,3}(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3, |\lambda_2 - \lambda_3|) \quad (70)$$

$$= \underline{\sigma}_{,2}(\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, |\lambda_1 - \lambda_2|) + \text{sgn}(\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\sigma}_{,3}(\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, |\lambda_1 - \lambda_2|) \quad (71)$$

$$\underline{\sigma}_{,2}(\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, |\lambda_1 - \lambda_2|) + \text{sgn}(\lambda_2 - \lambda_1) \underline{\sigma}_{,3}(\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, |\lambda_1 - \lambda_2|) \quad (72)$$

$$= \underline{\sigma}_{,2}(\lambda_2, \lambda_3 + \lambda_1, |\lambda_3 - \lambda_1|) + \text{sgn}(\lambda_3 - \lambda_1) \underline{\sigma}_{,3}(\lambda_2, \lambda_3 + \lambda_1, |\lambda_3 - \lambda_1|) \quad (73)$$

■ Kompressible Modelle:

- ☐ BLATZ-KO
- ☐ CIARLET
- ☐ HILL
- ☐ ATTARD

■ Inkompressible Modelle:

- ☐ VALANIS-LANDEL
- ☐ MOONEY-RIVLIN
- ☐ OGDEN

8 Lösungen

8.1 Randwertprobleme

- Betrachtung in reduzierter Form ohne innere Zwangsbedingungen: $\mathbf{S} = k_X(\mathbf{C})$
- entweder uniformer (elastische Isomorphismus) oder nicht-uniformer (einzelne elastische Gesetze für jeden Punkt) Körper
- **Verfahrensweise ohne innere Zwangsbedingungen**
 1. Referenzplatzierung finden zur Beschreibung der Bewegung $\chi(x_0, t)$
 2. Einführung eines räumlichen und eines materiellen KOOS
 3. Durch Koordinatentransformation Deformationsgradienten bestimmen $\mathbf{F} = \frac{\partial \phi^k}{\partial \Psi^i} \mathbf{r}_{\phi k} \otimes \mathbf{r}_{\Psi}^i$
 4. Bestimmen des CAUCHY-GREEN-Tensors $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$
 5. Bestimmung des materiellen Spannungstensors mit dem elastischen Gesetz für jeden Punkt
 6. Umformen in den CAUCHY-Spannungstensor $\mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$
 7. Kontrolle ob CAUCHYs erste Gleichung gilt: $\text{div} \mathbf{T} + \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$
 \mathbf{b} die Körperkräfte sollten bekannt sein.
 8. Bestimmung des Beschleunigungsfeld mit $\mathbf{a}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t^2}$
 9. Ersetzen der Spannungen durch das elastische Gesetz und einsetzen der Beschleunigung, so dass die Bewegung die einzige Unbekannte ist.
- **Zusätzliche Betrachtung mit inneren Zwangsbedingungen**
 1. Ausgehend von $K \leq 6$ Zwangsbedingungen $\gamma_{\mathbf{C}i}$
 2. Zerlegung von \mathbf{S} in \mathbf{S}_R und \mathbf{S}_E
 3. Bestimmung von $\mathbf{S}_R = \sum_{i=1}^K \alpha \frac{d\gamma_{\mathbf{C}i}}{d\mathbf{C}}$ und $\mathbf{S}_E = k_X(\mathbf{C})$
- Es werden Anfangs- und Randwerte benötigt, z.B.:
 - Verschiebungsrandbedingungen (geometrisch oder DIRICHLET): $\chi(\mathbf{x}_0, t) \forall \mathbf{x}_0 \in \partial \mathcal{B}_g$
 - Spannungsrandbedingungen (dynamisch oder NEUMANN): $\mathbf{t}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_0, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}_0, t) \forall \mathbf{x}_0 \in \partial \mathcal{B}_a$
 - Anfangsplatzierung: $\chi(\mathbf{x}_0, t_a) \forall \mathbf{x}_0 \in \partial \mathcal{B}_0$
 - Anfangsgeschwindigkeit: $\dot{\chi}(\mathbf{x}_0, t_a) \forall \mathbf{x}_0 \in \partial \mathcal{B}_0$
- Wenn das Problem zeitabhängig ist, dann ist es Elastodynamik, ansonsten Elastostatik.
- Nur für klassische lineare Elastizität können für eine breite Klasse Probleme gelöst werden.
- Nutzung von Variationsprinzipien zur Lösung der Differenzialgleichungen (schwache Lösung)
- Beispiel: Homogenisierung über RVE-Technik
 - Interaktion zwischen Mikrostruktur und Makroverhalten \rightarrow Nutzung von Homogenisierungsmethoden
 - Problem: groß genug um Repräsentativ zu sein und klein genug damit die Bestimmung des Randwertproblems möglich ist
 - Felder werden durch entsprechende Durchschnittswerte homogenisiert und als Makrovariablen interpretiert.
 - **homogenisierte Randbedingungen**: Resultierende Deformationen würden Konstant im Raum sein (führen zu systematischen Fehlern)
 - **periodische Randbedingungen**: Randwerte auf gegenüberliegenden Seite gleichgesetzt
 - Homogenisierung:
 1. Homogenisierung der Deformationen $\underline{\mathbf{F}}(t) = \frac{1}{V_0} \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{x} \otimes \mathbf{n}_0 da_0$
 2. Homogenisierung der Spannungen

- Makrokörper wird quasi-statisch deformiert mit $\underline{\mathbf{F}}(t)$
- der Körper überträgt die Hauptspannungen $\underline{\mathbf{T}}(t)$
- **Annahme: Prinzip der Gleichheit der Arbeit**
Die Arbeit von $\underline{\mathbf{T}}^{1PK}(t)$ im homogenen Makrokörper mit beliebiger Deformation $\underline{\mathbf{F}}(t)$ ist gleich zum inhomogenen RVE, wenn

$$\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{T}}^{1PK} \cdot \underline{\mathbf{F}}^\bullet dv_0 dt = \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T}^{1PK} \cdot \mathbf{F}^\bullet dv_0 dt$$
- Betrachtung mit Abwesenheit der Körperkräfte
- man erhält: $\underline{\mathbf{T}}^{1PK} = \frac{1}{V_0} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T}^{1PK} dv_0$

8.2 Universelle Lösungen

- Untersuchung von Klassen von Materialien (Erfüllung der Feldgleichungen für alle Materialien)
- werden genutzt für Testdeformationen und zur Identifizierung von Materialfunktionen und -konstanten
- **Homogene Deformationen**
 $\mathbf{F}_X = \mathbf{F}_Y$ und $\text{div} \mathbf{T} = \mathbf{o}$ ist überall erfüllt
 Alle homogenen Deformationen sind universelle Lösungen für alle Körper mit homogenen Material (**Family 0**)
 → es gibt keine weiteren universellen Lösungen ohne innere Zwangsbedingungen auch nicht mit weiteren Restriktionen (elastisch, hyperelastisch oder isotrop)
- **Universelle Lösungen für inkompressible elastische Materialien**
 - Zerlegung der CAUCHY-Spannungen \mathbf{T}_R und \mathbf{T}_E
 - Für alle inkompressiblen homogenen Körper sind alle Kreiserhaltungen, homogener Bewegungen, universelle Lösungen. ($\text{rot div} \mathbf{T}_E = \mathbf{o}$)
- **Familien universeller Lösungen**
 - **Family 1:** Biegen, Strecken und Scherung eines rechteckigen Blocks
 - **Family 2:** Begradigen, Strecken, Scheren eines Teiles eines Hohlzylinders
 - **Family 3:** Aufblähung, Biegen (Verlängern), Tordieren und Scheren eines Ringkeils
 - **Family 4:** Aufblähung und/oder Einstülpung eines Teils einer sphärischen Schale
 - **Family 5:** Aufblähung, Biegen (Verlängern) und Scheren eines Ringkeils
- ob es noch weitere universelle Lösungen gibt ist das sogenannte ERICKSEN-Problem
- **Thermisch-elastische universellen Lösungen**
 - thermisch-kinematischer Prozess, welche die Bilanzgleichungen erfüllt ohne die Anwendung von Körperkräften und Wärmequellen für ein Material einer bestimmten Klasse von thermisch-mechanischen Materialien
 - **Theorem 8.4**
Für thermodynamische einfache Materialien ohne innere Zwangsbedingungen gibt es keine universellen Lösungen mit inhomogenen Temperaturfeldern.
→ Einführung von inneren thermisch-mechanischen Zwangsbedingungen um universelle Lösungen zu finden.
 - Ein Beispiel für innere Zwangsbedingungen bei thermisch-mechanischen Materialien, für z.B. Schaumstoff ist:
 1. temperaturabhängige Undehnbarkeit in einer Richtung: $\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \cdot \mathbf{C}^\bullet - f(\theta)' \theta^\bullet = 0$
 2. perfekte Wärmeleitung in die gleiche Richtung: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{g}_0 = 0$
 Reaktionsgrößen von den abhängigen Variablen:

- Reaktionsspannung $\mathbf{S}_R = \alpha_1 2\rho \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$
- Reaktionswärmefluss $\mathbf{q}_R = \alpha_2 \mathbf{F} \mathbf{i}$
- Reaktionsentropie $\eta_R = \alpha_1 f'(\theta)$

mit α_1 und α_2 als Skalarfelder.

□ **Exakte thermisch-elastische Lösung**(BERTRAM/HAUPT 1974)

statische Torsion und radiale Deformation eines kreisförmigen Zylinders folgt aus einer homogenen axialen Dehnung und einem radialen Wärmefluss (für das gegebene Beispiel)

9 Inelastizität

- bisher war die Annahme (elastische Gesetze), dass die Spannung alleinig von der momentanen Deformation im Bezug zur Referenzplatzierung abhängt
- inelastische Materialien haben einen Gedächtnis über den Weg zum aktuellen Zustand
- es reicht also nicht mehr aus spezifische Deformationen zu betrachten (als Punkte im Dehnungsraum)
- es muss nun der gesamte Deformationsprozess betrachtet werden

■ Zustandsraum-Formulierung

- in einigen Fällen ist es möglich den Einfluss des Deformationsprozesses der aktuellen Antwort durch einen begrenzten Satz an Variablen zu beschreiben
- diese Variablen werden mit $\mathbf{Z} \in \underline{Lin}$ ohne weitere Spezifizierung des Raumes bezeichnet, genannt **interne Variablen** oder **Zustandsvariablen**
- können nicht direkt ermittelt werden, nur indirekt durch Vergleich der Spannungsantwort nach verschiedenen Deformationen
- in der Zustandsraum-Formulierung:

$$f : \mathcal{Inv}^+ \times \underline{Lin} \rightarrow \mathcal{Sym} \quad | \quad \{\mathbf{F}, \mathbf{Z}\} \mapsto \mathbf{T}$$
- somit kann das Funktional durch eine Funktion der aktuellen Werte dargestellt werden

$$\mathfrak{F} \left\{ \mathbf{F}(\tau) \Big|_{\tau=0}^t \right\} = f(\mathbf{F}(t), \mathbf{Z}(t))$$
- es wird ein Funktional benötigt um die Werte der Zustandsvariablen aktuell zu halten, genannt **Evolutionsgleichung**:

$$\mathbf{Z}(t) = z \left\{ \mathbf{F}(\tau) \Big|_{\tau=0}^t \right\}$$
- in den meisten Fällen gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit:

$$\dot{\mathbf{Z}} = z(\mathbf{F}, \mathbf{Z}, \dot{\mathbf{F}})$$
- Vorteil dieser Prozedur ist, dass das generelle Materialfunktional bereits eine bestimmte konkrete Form enthält (gilt für eine große Klasse an Materialien)

■ Raten-Unabhängigkeit

- Annahme verzögerter bzw. beschleunigter Prozesse
 \rightarrow Zeittransformation: $\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \quad | \quad \tau \mapsto \alpha(\tau)$
- Raten-Unabhängigkeit ist eine Materialeigenschaft \rightarrow Antwort auf eine Deformation ist unabhängig von der Prozessgeschwindigkeit
- **Definition 9.1:** Ein Materialfunktional \mathfrak{F} wird raten-unabhängig genannt, wenn

$$\mathfrak{F} \left\{ \mathbf{F}(\tau) \Big|_{\tau=0}^t \right\} = \mathfrak{F} \left\{ \mathbf{F}(\alpha(\tau)) \Big|_{\alpha(0)}^{\alpha(t)} \right\}$$
für alle Zeittransformationen α gilt
- es gibt also keine Spannungsrelaxation o.ä.

10 Plastizität

- Einteilung in **klassische** und **finite** Plastizität
- klassisch: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p$, $\mathbf{T} = \mathbf{C}[\mathbf{E}_e]$ bzw. $\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e$, $\varphi(\mathbf{T}) = 0$
- finit: additive Zerlegung des Verzerrungstensors, multiplikative Zerlegung des Deformationsgradiententensors
- Plastizität wird angenommen als:
 - inelastisch
 - geschwindigkeitsunabhängig
 - im elastischen Bereich \mathcal{E}_p (Vorsicht mit dem Index p)

10.1 Elastische Grenzen

- Plastizität wird charakterisiert durch:
 - elastische Bereiche im Spannungs- und Dehnungsraum welche durch eine Streckgrenze begrenzt sind; innerhalb dieser Bereiche wird das Verhalten als elastisch angenommen
 - plastisches Fließen kann nur an der Streckgrenze auftreten, verursacht eine Änderung des aktuellen elastischen Bereiches
 - eine Änderung der Fließgrenze (nur) beim Fließen, führt zu Ver- oder Entfestigung

- **Elastische Bereiche:** sind ein Paar $\{\mathcal{E}_{\text{el}}, k_p\}$ bestehend aus:

1. eine pfadverbundene Untermannigfaltigkeit mit der Grenze $\mathcal{E}_{\text{el}} \subset \mathcal{P}\text{Sym}$ im Raum des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors
2. ein elastisches Gesetz (als reduzierte Form) $k_p : \mathcal{E}_{\text{el}} \rightarrow \mathcal{P}\text{Sym} \quad | \quad \mathbf{C} \mapsto \mathbf{S}$
 so dass die Spannungen nach beliebigen kontinuierlichen Prozessen $\mathbf{C}(\tau)|_{t_0}^t$ welche vollständig in \mathcal{E}_{el}
 also $\mathbf{C}(\tau) \in \mathcal{E}_{\text{el}}$
 bestimmt sind durch ihre ultimative Konfiguration
 $\mathbf{S}(t) = k_p(\mathbf{C}(t)) \quad \forall \mathbf{C}(t) \in \mathcal{E}_{\text{el}}$

- auf Grundlage der Objektivität, wird empfohlen nur materielle Variablen und invariante Gesetze zu wählen
- strenger gesehen kann auch die Existenz von hyperelastischen Bereichen angenommen werden, dann existiert wieder die elastische Energie $w_p(\mathbf{C})$, spezieller:

$$k_p(\mathbf{C}(t)) = 2\rho \frac{dw_p(\mathbf{C}(t))}{d\mathbf{C}}$$

- **Fließkriterien:**

- Zerlegung von \mathcal{E}_{el} in sein Inneres $\mathcal{E}_{\text{el}}^\circ$ und den Rand $\partial\mathcal{E}_{\text{el}}$
- der Einfachheit halber Einführung reellwertiger Tensorfunktionen:
 $\mathcal{P}\text{Sym} \rightarrow \mathbb{R} \quad | \quad \Phi_p : \mathbf{C} \mapsto \Phi_p(\mathbf{C})$
- der Kern fällt mit der Fließgrenze zusammen ...

- **Annahme 10.2:** Am Ende eines jeden Deformationsprozesses $\mathbf{C}(\tau)|_{t_0}^t$ existiert eine elastischer Bereich $\{\mathcal{E}_{\text{el}}, k_p\}$, so dass

- der Endwert des Prozesses $\mathbf{C}(t)$ in \mathcal{E}_{el} liegt
- für jede Fortsetzung dieser Verformung, die vollständig in \mathcal{E}_{el} bleibt, die Spannungen an seinem Ende durch das elastische Gesetz k_p durch den Endwert dieses Prozesses \mathbf{C} bestimmt
 $\mathbf{S} = k_p(\mathbf{C}) \quad \forall \mathbf{C} \in \mathcal{E}_{\text{el}}$

■ **Annahme 10.3:** Die elastischen Gesetze aller elastischen Bereiche eines elasto-plastischen Materials sind isomorph.

■ **Theorem 10.4:** Wenn k_0 das elastische Gesetz für ein elasto-plastisches Material, dann gibt es für jeden elastischen Bereich $\{E_{lp}, k_p\}$ ein $P \in Unim^+$, so dass

$$S = k_p(C) = P k_0(P^T C P) P^T \quad \forall C \in E_{lp}$$

■ **Theorem 10.5:** Wenn $\{E_{l0}, k_0\}$ und $\{E_{lp}, k_p\}$ zwei elastische Bereiche eines elasto-plastischen Materials sind gilt

1. Wenn P eine plastische Transformation von E_{l0} zu E_{lp} und G_0 die Symmetrie Gruppe von k_0 , dann ist $G_p := P G_0 P^{-1}$ eine Symmetriegruppe von k_p
2. Wenn P eine plastische Transformation E_{l0} zu E_{lp} , so ist auch $A_p P A_0$ für alle $A_0 \in G_0$ und alle $A_p \in G_p$
3. Wenn P und \underline{P} plastische Transformation von E_{l0} zu E_{lp} , dann $P \underline{P}^{-1} \in G_p$ und $P^{-1} \underline{P} \in G_0$

■ **Fließ- und Verfestigungsregeln**

■ **Kinematische Verfestigung**

■ **Isotrope Verfestigung**

■ **Kinematische Verfestigung**

■ **Konsistenzbedingungen:** KUHN-TUCKER-Bedingung

■ **Symmetrie in der Plastizität**

10.2 Thermoplastizität

■ **Theorem 10.6:** Thermo-elastische Bereiche ist ein Fünffaches $\{ \mathcal{E}l_{ep}, S_p, q_p, \Psi_p, \eta_p \}$ bestehend aus

1. pfadgebundene Untermannigfaltigkeit mit der Grenze $\mathcal{E}l_{ep} \subset \mathcal{P}_{sym} \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}$
2. ein Satz von thermo-elastischen Gesetzen (als reduzierte Formen)

$$S_p : \mathcal{E}l_{ep} \rightarrow \mathcal{S}ym \mid \{ \mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0 \} \mapsto \mathbf{S}$$

$$q_p : \mathcal{E}l_{ep} \rightarrow \mathcal{V} \mid \{ \mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0 \} \mapsto \mathbf{q}_0$$

$$\Psi_p : \mathcal{E}l_{ep} \rightarrow \mathcal{R} \mid \{ \mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0 \} \mapsto \Psi$$

$$\eta_p : \mathcal{E}l_{ep} \rightarrow \mathcal{R} \mid \{ \mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0 \} \mapsto \eta$$

dass für alle thermo-kinematische Prozesse zeigt $\{ \mathbf{C}(\tau), \theta(\tau), \mathbf{g}_0(\tau) |_{t_A}^t \}$ welche vollständig in $\mathcal{E}l_{ep}$, dem kaloro-dynamischen Zustand $\{ \mathbf{S}(t), \mathbf{q}_0(t), \Psi(t), \eta(t) \}$ als

$$\mathbf{S}(t) = S_p(\mathbf{C}(t), \theta(t), \mathbf{g}_0(t))$$

$$\mathbf{q}_0(t) = q_p(\mathbf{C}(t), \theta(t), \mathbf{g}_0(t))$$

$$\Psi(t) = \Psi_p(\mathbf{C}(t), \theta(t), \mathbf{g}_0(t))$$

$$\eta(t) = \eta_p(\mathbf{C}(t), \theta(t), \mathbf{g}_0(t))$$

What a sentence! \hookrightarrow

■ **Theorem 10.7:** CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung ist für beliebige thermo-kinematische Prozesse erfüllt, wenn und nur wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. die freie Energie ist ein Potential der Spannungen und der Entropie (für den elastischen Referenzbereich)

$$S_0 = 2\rho \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{C}} \text{ und } \eta_0 = - \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta}$$

2. die freie Energie ist unabhängig vom Temperaturgradienten

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{g}_0} = 0$$

3. die Wärmeleitungsungleichung

$$\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{g}_0 \leq 0$$

4. die Rest-Ungleichung

$$\rho^{-1} \mathbf{S}^p \cdot \dot{\mathbf{P}} - \left(\frac{\partial \Psi_c}{\partial \mathbf{P}} - \theta \frac{\partial \eta_c}{\partial \mathbf{P}} \right) \cdot \dot{\mathbf{P}} - \left(\frac{\partial \Psi_c}{\partial \mathbf{Z}} - \theta \frac{\partial \eta_c}{\partial \mathbf{Z}} \right) \cdot \dot{\mathbf{Z}} \geq 0$$

10.3 Viskoplastizität

- Ratenunabhängigkeit ist für die meisten Materialien nur eine grobe Beschreibung der Realität
- wenn man genauer hinschaut, stellt man fest, dass fast alle Materialien kriechen oder relaxieren
- es gibt mehrere Möglichkeiten diese Raten-Abhängigkeit zu beschreiben, im folgenden werden zwei - ohne ins Detail zu gehen - vorgestellt

■ Viskosität auf Grundlage von Überbeanspruchung

- klassische plastische Materialien nehmen die Existenz eines elastischen Bereiches an, Zustände außerhalb der Fließgrenze existieren nicht
- in der Viskoplastizität sind diese Zustände außerhalb der Fließgrenze erlaubt
- Implementierung dieser Effekte durch kleine Modifikationen möglich
- es wird weiter von der Existenz eines elastischen Bereiches ausgegangen (alle Prozesse rein elastisch)
- nur während des Fließens ist es nun möglich, dass der Spannungs- bzw. Dehnungszustand jenseits der Fließgrenze liegt
- das elastische Gesetz k_p muss auch außerhalb der Fließgrenze von $\mathcal{E}_{\text{elap}}$ definiert sein, praktischerweise im gesamten Gebiet \mathcal{P}^{Sym}
- die Isomorphiebedingung (Theorem 10.5) soll immer noch gelten, so dass die Spannungen jederzeit bestimmt werden können, während \mathbf{C} im Inneren von $\mathcal{E}_{\text{elap}}$, auf der Grenze $\partial \mathcal{E}_{\text{elap}}$ oder irgendwo in $\mathcal{P}^{\text{Sym}} \setminus \mathcal{E}_{\text{elap}}$ liegt
- die Fließregel wird nun raten-abhängig durch folgenden Ansatz angenommen:

$$\dot{\mathbf{P}} = p(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}, \dot{\mathbf{C}}) = \nu(\sigma_O) \mathcal{D}[\mathbf{C}(\mathbf{S} - \mathbf{S}_B)]$$
 hierin ist $\nu \mathcal{D}$ die inverse Viskositätstetrade, die \mathbf{S}_B symmetrische Rückspannung und σ_O die Überspannung (sintensität)
 $\sigma_O := \sigma_{\mathbf{C} \mathbf{S}_p}(\mathbf{C}(\mathbf{S}' - \mathbf{S}_B)) - \sigma_Y$
- ein einfacher Ansatz ist das NORTON-Kriechgesetz:

$$\nu(\sigma_O) = \mu \left(\frac{\sigma_O}{\sigma_{O0}} \right)^N$$
 und dem isotropen Tensor $\mathcal{D} = \mathcal{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$
 und den Materialkonstanten σ_{O0} , μ und N

■ Relaxation

- ein anderer Ansatz wird durch eine Erweiterung der Fließ- und Verfestigungsregeln durch raten-abhängige Relaxationsterme erreicht

$$\dot{\mathbf{P}} = \lambda p^\circ(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}, \mathbf{C}^\circ) + r(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{Z})$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \lambda z^\circ(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}, \mathbf{C}^\circ) + s(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \mathbf{Z})$$
 mit zwei Funktionen:
 $r : \mathcal{I}^{++} \times \mathcal{P}^{\text{Sym}} \times \underline{\text{Lin}} \rightarrow \underline{\text{Lin}}$
 $s : \mathcal{I}^{++} \times \mathcal{P}^{\text{Sym}} \times \underline{\text{Lin}} \rightarrow \underline{\text{Lin}}$
- dies trägt zum Fließen und Verfestigen bei, auch wenn die Fließ- und Belastungsbedingung nicht erfüllt sind, auch wenn keine Deformation stattfindet und $\dot{\mathbf{C}} \equiv \mathbf{0}$
- zur thermodynamischen Generalisierung muss die Temperatur in die Liste der Argumente aufgenommen werden:

$$\dot{\mathbf{P}} = \lambda p^\circ(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0, \mathbf{Z}, \mathbf{C}^\circ, \theta^\circ) + r(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \theta, \mathbf{Z})$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \lambda z^\circ(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0, \mathbf{Z}, \mathbf{C}^\circ, \theta^\circ) + s(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \theta, \mathbf{Z})$$
 mit zwei Funktionen:
 $r : \mathcal{I}^{++} \times \mathcal{P}^{\text{Sym}} \times \mathcal{T}^+ \times \underline{\text{Lin}} \rightarrow \underline{\text{Lin}}$
 $s : \mathcal{I}^{++} \times \mathcal{P}^{\text{Sym}} \times \mathcal{T}^+ \times \underline{\text{Lin}} \rightarrow \underline{\text{Lin}}$
- Konsistenzbedingung durch den Ansatz:
 $0 = (\mathbf{P}, \mathbf{C}, \theta, \mathbf{Z})$
 so dass die Lösung für λ auch für die beiden Relaxationsterme erscheint

- immer noch gilt $\lambda = 0$ wenn die Fließ- und Belastungsbedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sind
- ersetzt man die Regeln in die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung, erhalten wir Ungleichheit:

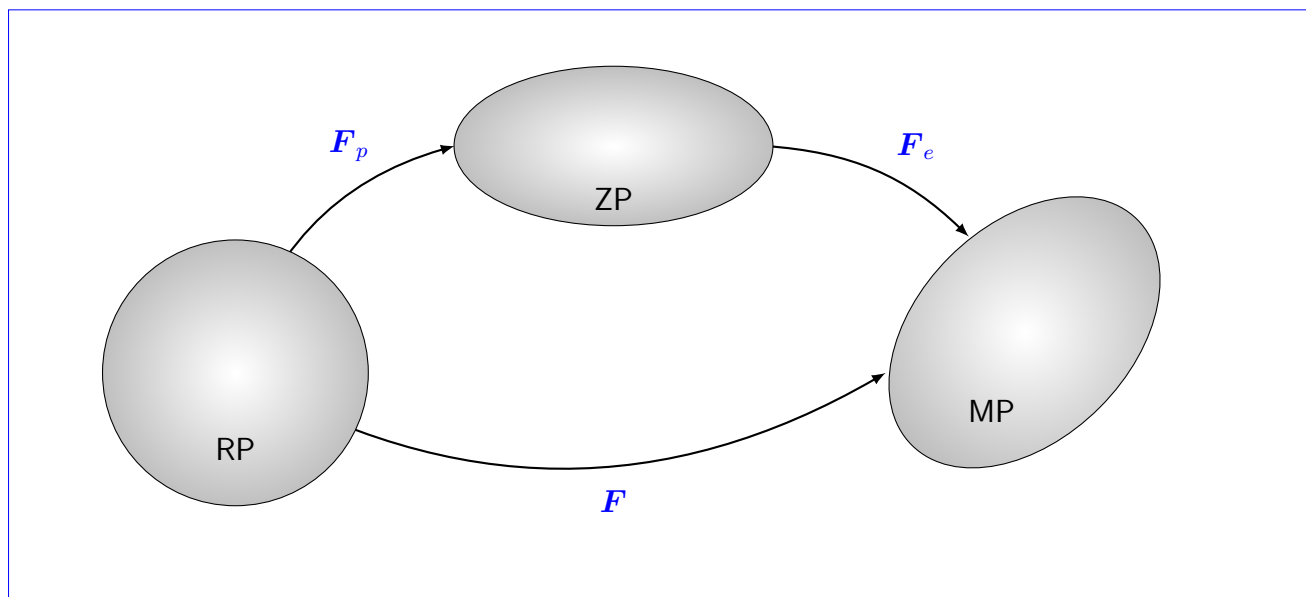
$$0 \geq \left(2\mathbf{C}\mathbf{P} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_c}{\partial \mathbf{P}} - \theta \frac{\partial \eta_c}{\partial \mathbf{P}} \right) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \theta, \mathbf{Z}) + \left(\frac{\partial \Psi_c}{\partial \mathbf{Z}} + \frac{\partial \eta_c}{\partial \mathbf{Z}} \right) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{P}, \mathbf{C}, \theta, \mathbf{Z})$$
- dies folgt offensichtlich für einen thermo-kinematischen Zustand ($\dot{\mathbf{C}} \equiv \mathbf{0}, \dot{\theta} \equiv \mathbf{0}$)

10.4 Plastizitätstheorien mit Zwischenplatzierung

- die meisten Theorien der finiten Plastizität beruhen auf der Vorstellung einer unbelasteten Zwischenplatzierung
- diese ZP soll zu jedem Zeitpunkt von einem lokalen Entlastungsprozess erhalten werden

multiplikative Zerlegung

- Annahme: elastische Entlastung nach Deformation: \mathbf{F}_e^{-1}
- verbleibende spannungsfreie Deformation ist dann: $\mathbf{F}_p := \mathbf{F}_e^{-1} \mathbf{F}(t)$ als lokale (stressfreien) Zwischenplatzierung interpretiert
- multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ in elastischen und plastischen Anteil
- stressfreie Zwischenplatzierung $\mathbf{F}_p := \mathbf{F}_e^{-1} \mathbf{F}(t) \in \text{Unim}^+$
- elastisches Referenzgesetz ist spannungsfrei



- Probleme der multiplikativen Zerlegung:
 - Drehungen von solchen unbelasteten Platzierungen bleiben unbestimmt oder willkürlich, besonders Rotation im anisotropen Fall problematisch
 - entlastete Zwischenplatzierung oft nicht zu erreichen (BAUSCHINGER-Effekt), das schiebt den unbelasteten Zustand aus dem elastischen Bereich (experimentell bestätigt)
 - im Räumlichen gibt es Probleme mit der Objektivität und Symmetrietransformationen
 - Mangel an einem einheitlichen Format, sowohl isotropes und sowie anisotropes Verhalten zu beschreiben
- Nutzung des Isomorphiekonzeptes von fast allen Plastizitätstheorien erfüllt

additive Zerlegung

- additive Zerlegung: primitives Konzept
- Zerlegung des GREENSchen Verzerrungstensors in Bezug auf die Zwischenplatzierung (elastische Bereiche)
- diese können durch die totale Dehnung und die Dehnungen der Zwischenplatzierung in Bezug zur Referenzplatzierung (plastische Dehnungen) dargestellt werden
- Einführung eines plastischen Dehnungstensors $\mathbf{E}_p \in \text{Sym}$
- Resultat: $\mathbf{E}_e := \mathbf{E}^G - \mathbf{E}_p$
- dies führt zur additiven Zerlegung der Dehnungen: $\mathbf{E}^G = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p$
- im Gegensatz zur multiplikativen Zerlegung ist die additive Zerlegung vertauschbar

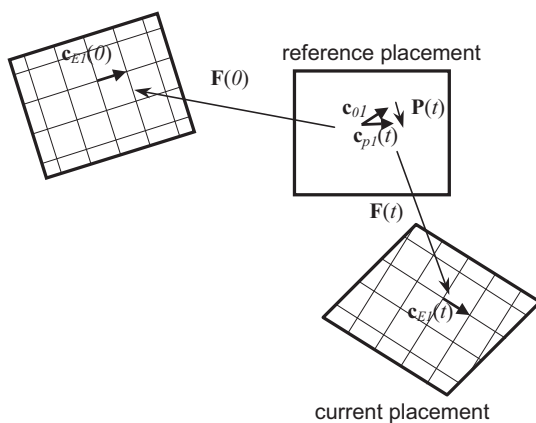
10.5 Kristallplastizität

Gleitebenentheorie - Hypothesen:

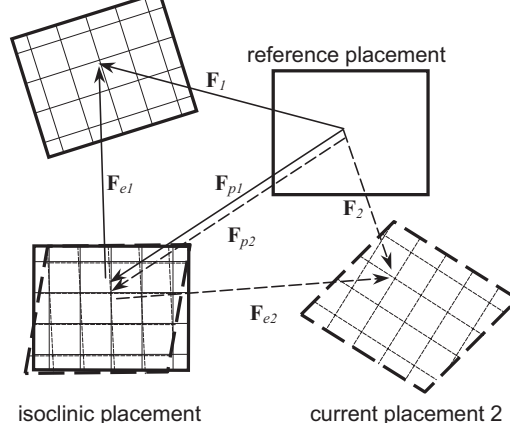
- H1 Der Kristall besteht - trotz der Verwerfungen - aus einem regelmäßigen Kristallgitter das nach wie vor auch unter beliebig große Verformungen existiert.
- H2 Wir haben wieder elastischen Bereiche, in denen die Kräfte alleine auf die Verformungen des Gitters bezogen sind.
- H3 Es gibt kristallographische Gleitsysteme, gebildet durch Gleitfugen und Gleitrichtungen, in denen inelastische Verformungen als einfache Scherung stattfinden.
- H4 Gleitung in einem Gleitsystem kann nur dann aktiviert werden, wenn die Schubspannung in ihm einen kritischen Wert erreicht, die so genannte kritische Schubspannung (SCHMID-Gesetz 1924).
- H5 Die erste kritische Schubspannung kann als Materialkonstante angesehen werden. Sie unterliegt der Verfestigung durch Gleitung im gleichen Gleitsystem (Selbstverfestigung) sowie in der anderen Gleitsystemen ('latent' oder 'cross' Verfestigung) unterzogen.

Gitterbasis

initial placement



current placement 1



Fließgrenze - SCHMID-Gesetz:

$$\phi(\mathbf{S}^P) = \max_{\alpha} \left\{ \left| \tau_S^{\alpha}(\mathbf{S}^P) \right| - \tau_c^{\alpha} \right\}$$

■ Konstitutive Gleichungen des kristallplastischen Modells

- ☐ Elastisches Referenzgesetz
- ☐ Isomorphie Zustand
- ☐ Gleitebenen
- ☐ Schubspannungen im Gleitebenensystem
- ☐ anfängliche kritischen gelösten Schubspannungen
- ☐ Fließregel
- ☐ Beschreibung für die Auswahl der aktiven Gleitsysteme
- ☐ Verfestigungsgesetz

■ Im Gegensatz zur phänomenologischen Beschreibung der Plastizität, ist die Struktur des Materialmodells bei der Kristallplastizität bekannt

■ Kristallplastizität ist von großer Bedeutung hinsichtlich des Verständnisses der Plastizität

10.6 Materialplastizität

- bis jetzt diente das Isomorphiekonzept als Grundlage
- hier: plastische Materialmodelle mit Mikrostruktur, für die diese Grundlage nicht gilt
- Bsp.: verstärkte Materialien, Faser in Matrix
- wenn Fasern richtungsabhängig eingebunden → Anisotropie
- diese 'feste' Anisotropie ist somit Materialeigenschaft (im Gegensatz zu Gittern) → genannt **Materialplastizität**
- Möglichkeit zur Modifikation der Kristallplastizität zur Materialplastizität: 2 verschiedene plastische Transformationen
- in diesem Fall wird die elastische Steifigkeit von der unbelasteten Konfiguration anders entwickelt, die Eigenschaften werden jedoch beibehalten
- Fließkriterium ist dann eine Funktion der plastischen Transformationen und der Verfestigungsvariable
- es werden 2 Fließregeln benötigt (üblicherweise beide ratenunabhängig) mit einem gemeinsamen plastischen Parameter, der durch die Konsistenzbedingung bestimmt ist

Tests!

Theorem 10.1 (Quatsch mit Soße)

Die Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtdrehimpulses des Körpers in Bezug auf einen gewählten Punkt ist gleich dem Gesamtmoment aller von außen auf den Körper wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte bezüglich des gleichen Punktes. $\dot{\phi}(\mathbf{S}^P) = \max_{\alpha} \{ |\tau_S^{\alpha}(\mathbf{S}^P)| - \tau_c^{\alpha} \}$

Definition 10.1 (Titel)

$$\phi(\mathbf{S}^P) = \max_{\alpha} \{ |\tau_S^{\alpha}(\mathbf{S}^P)| - \tau_c^{\alpha} \}$$

Annahme 10.1 (Titel)

$$\phi(\mathbf{S}^P) = \max_{\alpha} \{ |\tau_S^{\alpha}(\mathbf{S}^P)| - \tau_c^{\alpha} \}$$