1 Funções Reais a uma Variável Real

As funções são utilizadas para descrever o mundo real em termos matemáticos, é o que se chama de modelagem matemática para as diversas situações. Podem, por exemplo, descrever o ritmo cardíaco, crescimento populacional, variações de temperatura, movimento de objetos, evolução de uma epidemia, custos e lucros de uma empresa, oscilações do solo num terremoto, entre muitas outras coisas. A noção de função é a principal ferramenta para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, pois constitui o ambiente no qual o Cálculo é desenvolvido.

Dentre as funções mais importantes, destacamos as *polinomiais*, as funções *racionais*, as funções *raízes*, as *trigonométricas*, *exponenciais* e *logarítmicas*. Nessa disciplina, vamos estudar um pouco de cada uma delas.

1.1 O Conceito de Função

As funções surgem quando uma quantidade (*variável dependente*) depende de outra (*variável independente*). Observe os exemplos:

(1) A temperatura T da água numa panela que é colocada para ferver depende do tempo transcorrido t. Assim, nessa situação T é a variável dependente e t a variável independente.

(2) A área A de um círculo depende de seu raio r e essa dependência se expressa através da fórmula bem conhecida $A = \pi r^2$. Neste caso, A é variável dependente e r é a variável independente.

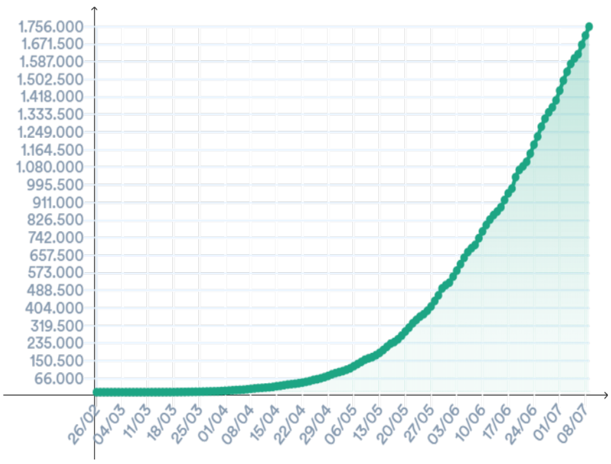
(3) A população humana mundial P depende do tempo em anos t e pode ter uma representação aproximada utilizando uma tabela. Como P varia em função do tempo t, P é a variável dependente e t é a variável independente

Ano	População (bilhões)
1900	1,650
1910	1,750
1920	1,860
1930	2,070
1940	2,300
1950	2,560
1960	3,040
1970	3,710
1980	4,450
1990	5,280
2000	6,080
2010	6,900
2020	7,790

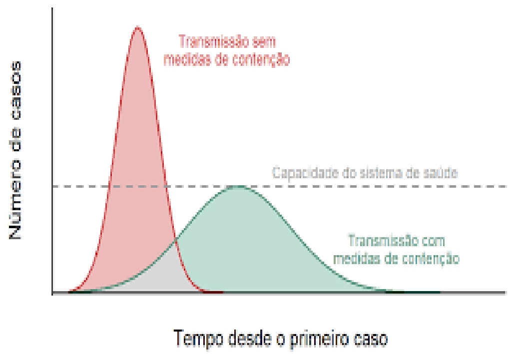
Figura 1: Eletrocardiograma

(4) O cardiologista avalia o ritmo cardíaco de um indivíduo através do eletrocardiograma. Esse gráfico mostra a variação do potencial elétrico (variável dependente) em relação ao tempo decorrido durante o exame (variável independente) e gera uma imagem em ondas, cujo padrão determina a condição cardíaca do paciente.

(5) Um modelo matemático simples para calcular a dinâmica da propagação de uma virose é o da curva exponencial. E como um gráfico de uma epidemia se comporta? No início a evolução é lenta. Uma pessoa saudável, quando entra em contato com uma pessoa doente, torna-se infectada também. O número de pessoas doentes aumenta rapidamente à medida que a virose se espalha. No gráfico, esse fenômeno é a chamada fase de crescimento exponencial, que se caracteriza por um tempo de crescimento acelerado (Figura 2). Mas, o crescimento de uma epidemia não é permanente. Depois, em algum ponto, a curva do gráfico começa a crescer de forma mais lenta, depois que uma população grande já foi infectada e, eventualmente, começa a decrescer. Essa curva toma a forma de um sino (Figura 3) ou um “s”.



(a) Figura 2 - Casos Acumulados de Covid-19 no Brasil em 2020 (fase exponencial). Fonte: https://covid.saude.gov.br



(b) Figura 3 - Projeção da evolução da Covid 19

Em todos os casos acima temos uma associação que a cada valor da variável independente (tempo ou raio), atribui um único valor à variável dependente (Temperatura, Área, População, Potencial Elétrico ou Número de infectados). Essa situação constitui o que chamamos de *função*, cuja definição matemática é a seguinte :

Definição 1.1 *Uma função de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ para outro conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é uma regra (lei) que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $y \in B$.*

Costuma-se denotar uma função por letras como f (ou $g, h, T, u, ...$). E a seguinte notação, devida a Euler é utilíssima $y = f(x)$ (Lê-se “y é igual a f de x”). Outra maneira de denotar uma função é

$f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ ou ainda

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

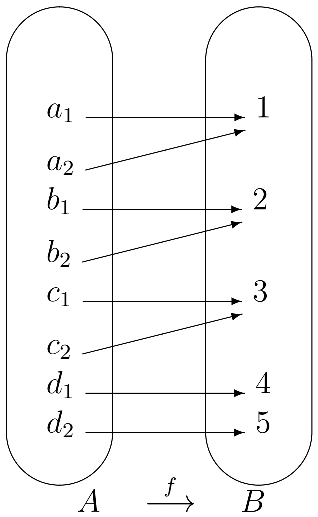
O conjunto A é dito o *domínio* da função f, também denotado por $D(f)$, e B é dito seu *contradomínio*. Assim, uma função é formada por três elementos, a lei de formação, o domínio e o contradomínio.

Observações:

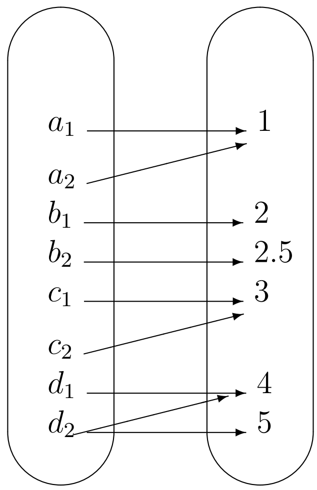
(1) De um modo geral, uma função associa a cada elemento de um conjunto (não necessariamente de números reais), um único elemento de outro conjunto através de uma regra de associação, como as que vimos acima. No curso de Cálculo 1A, nossos conjuntos serão de números reais. Portanto, a definição matemática que demos acima de função, já foi apresentada para o caso específico de *funções reais de variáveis reais.* Neste texto, estamos abusando um pouco da linguagem. Formalmente a definição de função deveria ser uma terna $(A, B, a \mapsto b)$, onde A e B são conjuntos e $a \mapsto b$ uma regra que a cada elemento $a \in A$ associa um único elemento $b \in B$.

***Importante*:** Para ser considerada função, a lei deve ser capaz de associar a cada elemento do domínio **um único** elemento do contradomínio. Se houver ambiguidade na associação, a lei não é considerada uma função. Uma forma clássica de representar essa ideia é através de diagramas de flechas :

Representação de uma *função* usando um diagrama de flechas.



Representação de uma *associação* que ***não*** é função usando um diagrama de flechas.



1.2 Alguns exemplos básicos de funções

Exemplo 1.1 *$f(x) = bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, onde b e c são constantes reais. Ou seja, qualquer expressão do 1º grau pode ser vista como uma função real de variável real. Esse tipo de função é chamada de Função Afim.*

Exemplo 1.2 *$f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Em geral, qualquer expressão do 2º grau, do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c, x \in \mathbb{R}$, onde a, b e c são constantes reais, $a \neq 0$, pode ser vista como uma função real de variável real, dita Função Quadrática*

Exemplo 1.3 *As Funções Polinomiais, em geral, se escrevem como*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ x \in \mathbb{R},$$

onde n é um inteiro não negativo e $a_n, \ldots, a_0$ são constantes reais. Estas são funções definidas em toda a reta real $\mathbb{R}$. Para, $n = 1$ temos uma função afim, $n = 2$ temos uma função quadrática, vistas nos exemplos anteriores e, para $n = 3$, a função é dita uma Função Cúbica.

Exemplo 1.4 *As Funções Racionais são aquelas formadas por um quociente de polinômios, digamos, $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ e, neste caso, o domínio depende das raízes do polinômio do denominador, ou seja, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$. O domínio da f é o conjunto dos reais, exceto as raízes de $q(x)$, que zeram o denominador, gerando uma divisão por 0, que sabemos não estar definida no conjunto dos números reais.*

Casos particulares de funções racionais:

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+5}$, $x \in \mathbb{R}$ *(Note que $2x^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).*

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, *pois o denominador se anula quando $x = 0$ ou $x = 1$.*

Observações:

i) *Lembramos que a raiz quadrada de um número real $\boldsymbol{a > 0}$ é definida como o número real denotado por $\boldsymbol{\sqrt{a}}$, também **positivo**, tal que $\boldsymbol{(\sqrt{a})^2 = a}$ e raiz quadrada de 0 é 0.*

ii) *Lembramos que a raiz cúbica de um número real $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ é definida como o número real denotado por $\boldsymbol{\sqrt[3]{a}}$, tal que $\boldsymbol{(\sqrt[3]{a})^3 = a}$ e raiz cúbica de 0 é 0. No caso de raiz de índice ímpar, a raiz tem o mesmo sinal do radicando $\boldsymbol{a}$*

Exemplo 1.5 *A função Raiz Quadrada $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Para ser uma função real, o maior domínio que podemos ter para a função raiz quadrada é o intervalo $[0, +\infty)$. Além disso, dado $x \geq 0$, está associado a ele um e só um número real positivo ou nulo, a saber $\sqrt{x}$, tal que o produto $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$.*

Exemplo 1.6 *A função Raiz Cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$. Para ser uma função real, o maior domínio que podemos ter para a função Raiz Cúbica é toda a reta $\mathbb{R}$. Além disso, dado $x \in \mathbb{R}$, está associado a ele um e só um número real, a saber $\sqrt[3]{x}$, tal que o produto $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x$.*

1.3 Uma observação importante

Muitas vezes, por simplicidade de linguagem (na verdade, abuso de linguagem!) não especificamos o domínio e o contradomínio de uma função ao apresentá-la, apenas sua expressão. Nestes casos, adotaremos a convenção abaixo.

Convenção: *Quando uma função for definida através de uma expressão, sem referência ao contradomínio, estaremos supondo que o contradomínio é $\mathbb{R}$. De forma análoga, se apresentarmos a expressão de uma função e perguntarmos sobre seu domínio, estaremos supondo que o domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$, onde a expressão está bem definida (pode ser calculada e nos fornece valores reais para y).*

Exemplo 1.7 *A função* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-2}$ *tem como domínio* $D(f) = [-3, 2) \cup (2, +\infty)$ *e contradomínio* $\mathbb{R}$*. De fato, para estar bem definida no conjunto dos reais, devemos ter,* $x+3 \geq 0$ *e* $x-2 \neq 0$*, portanto* $x \geq -3$ *e* $x \neq 2$*, donde* $D(f) = [-3, 2) \cup (2, +\infty)$*.*

Exemplo 1.8 *A função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1-x}$ *tem como domínio* $D(f) = (0, 1]$ *e contradomínio* $\mathbb{R}$*, pois nesse caso, devemos ter* $x > 0$*, já que há uma raiz quadrada no denominador e* $1 - x \geq 0$*, por conta da segunda raiz. Portanto,* $x > 0$ *e* $x \leq 1$*, significa que* $D(f) = (0, +\infty) \cap (-\infty, 1] = (0, 1]$*.*

Exemplo 1.9 *A função* $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$ *tem como domínio* $D(f) = (-\infty, 1] \cup [6, +\infty)$ *e contradomínio* $\mathbb{R}$*. De fato, nesse caso, devemos ter* $x^2 - 7x + 6 \geq 0$*, já que há uma raiz quadrada. Calculando as raízes da equação* $x^2 - 7x + 6 = 0$*, obtemos* $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 6$*. Estudando o sinal da expressão do 2º grau, cuja parábola associada tem concavidade para cima, segue que* $x^2 - 7x + 6 > 0$*, se e somente se,* $x < 1$ *ou* $x > 6$*. Portanto,* $D(f) = (-\infty, 1] \cup [6, +\infty)$*.*

Exemplo 1.10 *A função* $f(x) = \sqrt{\dfrac{9-x^2}{x+1}}$ *tem como domínio* $D(f) = (-\infty, -3] \cup (-1, 3]$ *e contradomínio* $\mathbb{R}$*. De fato, devemos ter* $x + 1 \neq 0$ *e fazer o produto dos sinais entre* $9 - x^2$ *e* $x + 1$*, conforme a seguinte tabela de sinal:*

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$9 - x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{9-x^2}{x+1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

Assim, teremos que $D(f) = (-\infty, -3] \cup (-1, 3]$*.*

Definição 1.2 *Duas funções* f *e* g *são* iguais*, escrevemos* $f = g$*, se e só se* $D(f) = D(g)$*, possuem o mesmo contradomínio e* $f(x) = g(x)$*,* $\forall x \in D(f)$*.*

Exemplo 1.11 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *e* $g(x) = x + 1$ *são funções diferentes.*
Como $\dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1, \forall x \neq 1$*, em uma primeira abordagem, você pode achar que estas duas funções são iguais, mas, repare que embora tenham a mesma imagem em cada ponto de* $\mathbb{R}\backslash\{1\}$*, as duas têm domínios diferentes! Temos* $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\} \neq \mathbb{R}$ *e* $D(g) = \mathbb{R}$*.*
O que ocorre é o seguinte: as duas funções são diferentes, porém possuem a mesma imagem em cada ponto de $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$*, isto é* $f(x) = g(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$*.*

Exemplo 1.12 $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ *e* $g(x) = x^2 - 1$ *são funções iguais, pois* $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$*, o contradomínio é o mesmo e fatorando o numerador e cancelando, obtemos a igualdade nas imagens, ponto a ponto:* $\dfrac{x^4-1}{x^2+1} = \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2 - 1$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*.*

1.4 Imagem e gráfico

Definição 1.3 *O Conjunto Imagem de uma função f é denotado por $Im(f)$ e é definido como*

$$Im(f) = \{f(x) \in B; x \in D(f)\}.$$

Assim, $Im(f)$ é um subconjunto do contradomínio B, $Im(f) \subset B$. Pode ocorrer de $Im(f) = B$ ou não, nesse caso serão conjuntos distintos, isto é $Im(f) \subsetneq B$.

Exemplo 1.13 $f(x) = x+4$, $x \in \mathbb{R}$, *tem como conjunto imagem todos os reais. De fato, dado qualquer número real y, ele pode ser escrito como imagem do número real $y-4$, ou seja, pela lei de formação da f, a imagem de $y-4$ é dada por $f(y-4) = (y-4)+4 = y$.*

Exemplo 1.14 $f(x) = x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$, *tem como conjunto imagem o intervalo $[1, +\infty)$. De fato, pense na parábola que está associada à expressão da função, qualquer número $y \geq 1$ no eixo y está associado a um valor de x real, tal que $y = x^2+1$.*

Definição 1.4 *O Gráfico de uma f é denotado por $Gr(f)$ e é definido como*

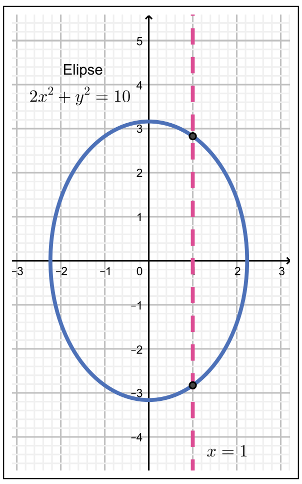
$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in D(f)\}.$$

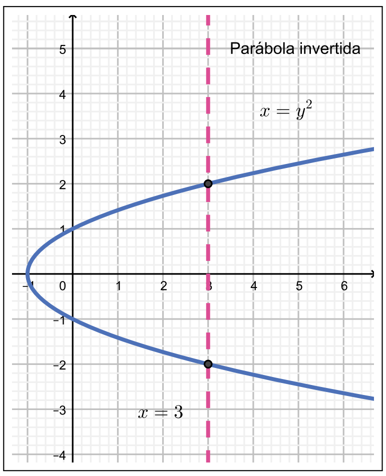
Note que o $Gr(f)$ é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$, formado pelos pares ordenados onde a primeira coordenada é um ponto do domínio e a segunda coordenada é a imagem correspondente.

O comportamento de uma função é claramente visualizado através de seu *gráfico*, que é o conjunto dos pares ordenados $Gr(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in D(f)\}$. O esboço do gráfico no plano cartesiano nos fornece o comportamento da f, seu domínio e sua imagem. De fato, repare que, dado o gráfico da função, como ele só contém pontos da forma $(x, f(x)), x \in D(f)$, podemos descobrir o domínio da função projetando o gráfico sobre o eixo x. Da mesma forma, se projetarmos o gráfico sobre o eixo y, teremos a imagem da função, pois só pontos com ordenada $y = f(x)$ estarão no gráfico.
Quando o $D(f)$ é um intervalo ilimitado, procuramos traçar uma parte do seu gráfico que contenha todas as suas propriedades interessantes, como raízes, pontos de mudança de crescimento, onde ocorrem saltos, entre outros, e tal que se tenha uma ideia do que ocorre no restante do gráfico.

Observação: Uma forma de saber se uma curva no plano xy pode ou não ser o gráfico de uma função de x, é fazendo o *teste da reta vertical*. Se alguma reta vertical intersectar a curva em mais de um ponto, esta curva **não** pode ser o gráfico de uma função de x, pois estaríamos associando a um determinado ponto x do domínio, mais do que apenas um ponto do contradomínio. Por outro lado, se toda reta vertical intersectar a curva em no máximo um ponto, então essa curva é gráfico de uma função de x.

Exemplo 1.15 *As duas curvas a seguir não são gráficos de uma função de x.*

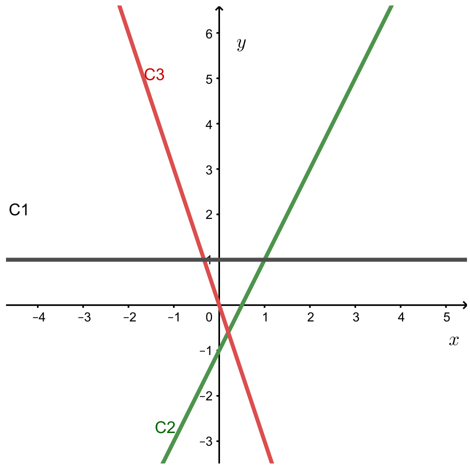




Na próxima seção veremos exemplos de gráficos básicos de funções, com os quais trabalharemos no restante do curso.

1.5 Tipos básicos de gráficos de funções

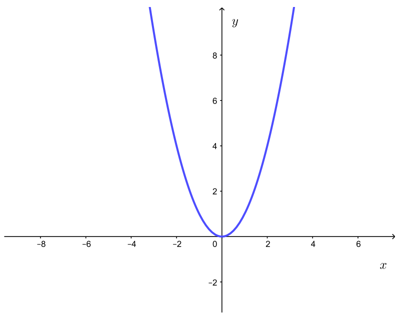
Exemplo 1.16 *Já sabemos que* $f(x) = bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, *onde* b *e* c *são constantes, é dita uma* função afim. *O gráfico é uma reta horizontal, se* $b = 0$, *ou uma reta inclinada , se* $a \neq 0$.



c_1 é a reta $y = 1$, c_2 é $y = 2x - 1$ e c_3 é $y = -3x$.

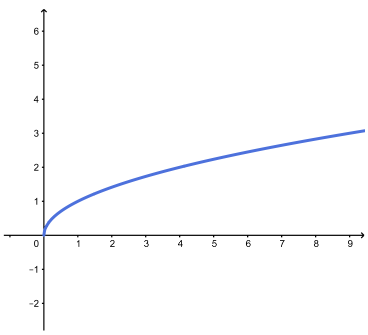
Excetuando as retas horizontais $(b = 0)$, *o conjunto imagem de uma reta é todos os reais* $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.17 $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. *O gráfico é uma parábola, que ao projetar no eixo* y, *permite obter o conjunto imagem* $[0, +\infty)$.



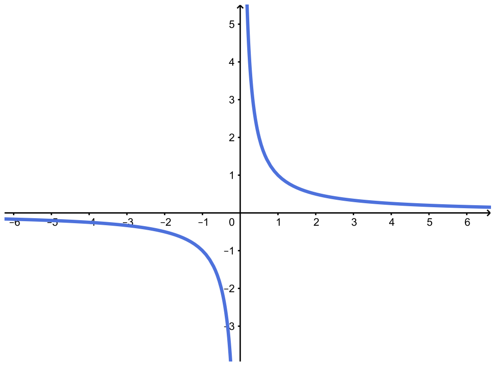
O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

Exemplo 1.18 $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. *Note, pela observação do gráfico abaixo, que projetando o gráfico no eixo* y, *temos* $Im(f) = [0, +\infty)$.



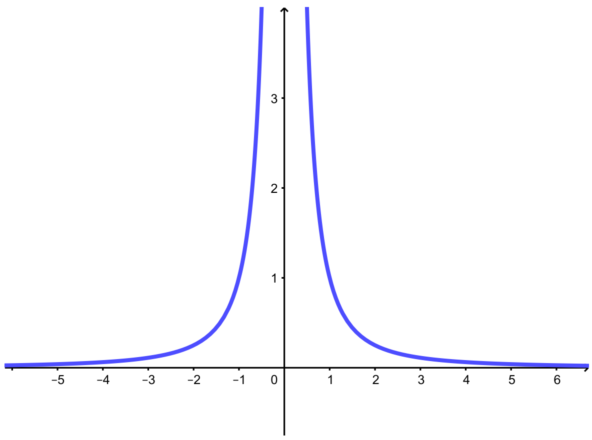
O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

Exemplo 1.19 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. *O gráfico é uma hipérbole. Observe o comportamento do gráfico, para $x > 0$ aumentando, $1/x$ diminui e se aproxima do zero (nunca será igual a zero!). Analogamente, se $x < 0$ diminui, então $1/x$ se aproxima de zero por valores negativos. Por outro lado, se $x > 0$ fica muito pequeno, isto é, próximo de zero, então $1/x$ aumenta de forma ilimitada (dizemos que tende a infinito). Se $x < 0$ se aproxima de zero, então $1/x$ é negativo e se torna ilimitado (dizemos que tende a menos infinito). O gráfico de qualquer potência* ímpar negativa *de x, a saber $y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$, $y = x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}$, $y = x^{-7} = \dfrac{1}{x^7}, \ldots$, tem o mesmo aspecto do gráfico abaixo.*



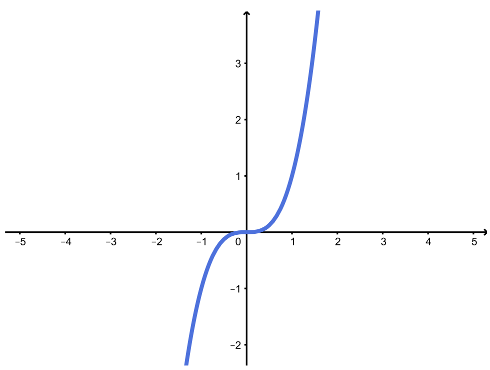
O conjunto imagem é $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Exemplo 1.20 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. *O gráfico de qualquer potência* par negativa *de x, a saber, $y = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$, $y = x^{-6} = \dfrac{1}{x^6}$, $y = x^{-8} = \dfrac{1}{x^8}, \ldots$, tem o mesmo aspecto do gráfico abaixo.*



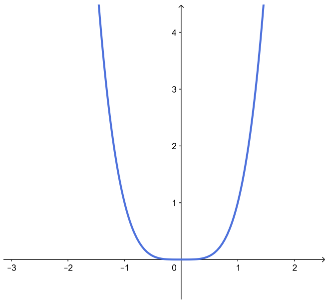
O conjunto imagem é $(0, +\infty)$.

Exemplo 1.21 $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. *O gráfico de qualquer potência inteira $n \geq 3$* ímpar *de x, a saber $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^9$, $\ldots$, tem o mesmo aspecto do gráfico abaixo.*



O conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.22 $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. *O gráfico de qualquer potência $n \geq 2$* par *de x, a saber $y = x^6$, $y = x^8$, $y = x^{10}$,..., tem o mesmo aspecto do gráfico abaixo.*



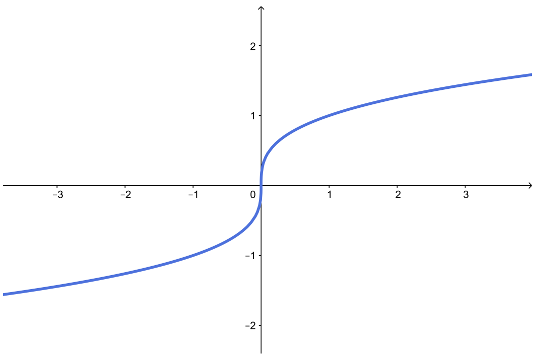
O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

Observação: Vamos relembrar as definições de *raízes de índice ímpar e par.* Dado $n \in \mathbb{N}$

i) *A raiz de índice (ímpar) $2n+1$ de um número real $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ é definida como o número real denotado por $\sqrt[2n+1]{\boldsymbol{a}}$, tal que $(\sqrt[2n+1]{\boldsymbol{a}})^{\mathbf{2n+1}} = \boldsymbol{a}$ e raiz $\mathbf{2n+1}$ de 0 é 0. No caso de raiz de índice ímpar, a raiz tem o mesmo sinal do radicando $\boldsymbol{a}$.*

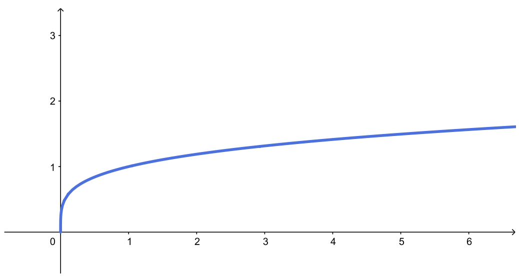
ii) *A raiz de índice (par) $2n$ de um número real $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ é definida como o número real positivo denotado por $\sqrt[2n]{\boldsymbol{a}}$, tal que $(\sqrt[2n]{\boldsymbol{a}})^{\mathbf{2n}} = \boldsymbol{a}$ e raiz $\mathbf{2n}$ de 0 é 0.*

Exemplo 1.23 $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$. *O gráfico de qualquer raiz de índice* ímpar *de x, a saber, $y = \sqrt[5]{x}, y = \sqrt[7]{x}$, ..., tem o mesmo aspecto do gráfico abaixo.*



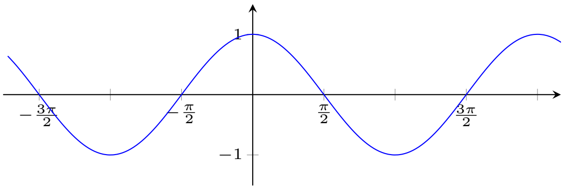
O conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.24 $y = \sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$. *O gráfico de qualquer raiz de índice* par *de x, a saber, $y = \sqrt[6]{x}, y = \sqrt[8]{x}$, ..., tem o mesmo aspecto do gráfico abaixo.*



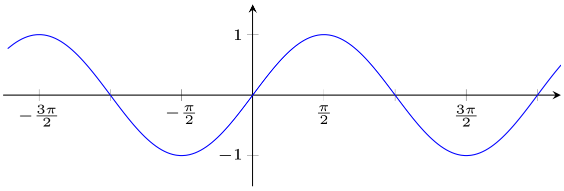
O conjunto imagem é $[0, +\infty)$.

Exemplo 1.25 *O gráfico de $f(x) = \cos x$ com $x \in \mathbb{R}$ oscila entre -1 e 1, conforme representado abaixo:*



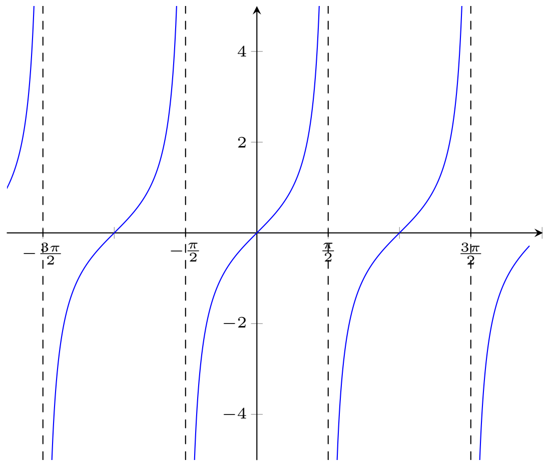
O conjunto imagem é $[-1, 1]$.

Exemplo 1.26 *O gráfico de* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *com* $x \in \mathbb{R}$ *oscila entre* -1 *e* 1*, conforme representado abaixo:*



O conjunto imagem é $[-1, 1]$.

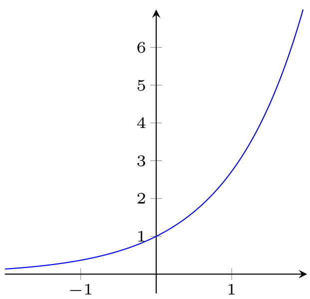
Exemplo 1.27 *O gráfico de* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *com* $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ *é formado por infinitos ramos, sendo considerado o "ramo principal" o que está entre* $-\pi/2$ *e* $\pi/2$*:*



O conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

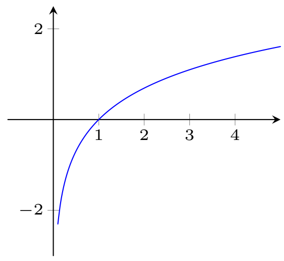
Vamos ver mais adiante no curso que as retas verticais da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *são ditas assíntotas do gráfico da tangente.*

Exemplo 1.28 *O gráfico de* $f(x) = e^x$ *com* $x \in \mathbb{R}$ *é:*



O conjunto imagem é $(0, +\infty)$.

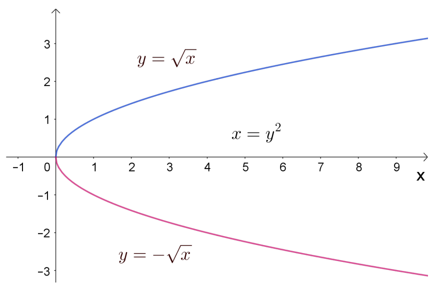
Exemplo 1.29 *O gráfico de* $f(x) = \ln(x)$ *com* $x \in (0, +\infty)$ *é:*



O conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

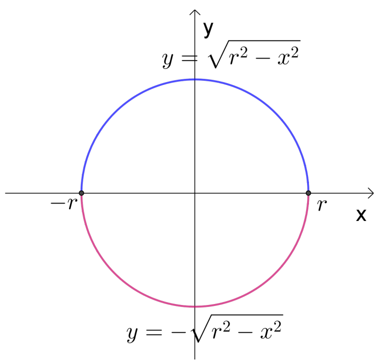
1.6 Curvas definidas por mais de uma função

Exemplo 1.30 *A curva $x - y^2 = 0$ é uma parábola invertida, como mostra o gráfico abaixo. Não é gráfico de uma função de x, mas podemos descrevê-la usando duas funções, $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, que descreve a parte superior (azul) e $y = -\sqrt{x}$, $x \geq 0$, que descreve a parte inferior (magenta).*



A parábola invertida $x - y^2 = 0$.

Exemplo 1.31 *A circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, onde $r > 0$ é o raio, também não é gráfico de uma função de x, mas podemos descrevê-la usando duas funções, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, que descreve a parte superior (azul) e $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, que descreve a parte inferior (magenta).*



Circunferência de raio r: $x^2 + y^2 = r^2$.

Dependendo da situação, também podemos usar a variável y como variável independente. Nesse caso, podemos formular o *Teste da reta horizontal* para verificar se uma curva é gráfico de uma função de y.

Teste da reta horizontal: Uma curva no plano xy é gráfico de uma (única) função de y, se e só se, toda reta horizontal tiver no máximo um ponto de interseção com a curva.

Observe que, no exemplo (1.30) acima, a curva pode ser descrita por uma (única) função de y, a saber $f(y) = y^2$, $y \in \mathbb{R}$. Porém, no exemplo (1.31), tal não acontece.

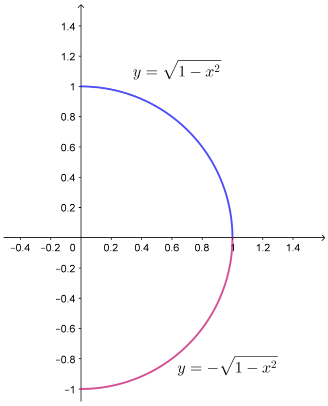
Exemplo 1.32 *Considere a curva $x^2 + y^2 = 1$, para $-1 \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq 1$.*

(a) Como posso descrevê-la usando x como variável?

(b) Como posso descrevê-la usando y como variável?

Solução:

(a) Observe que $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$, para $0 \leq x \leq 1$. Assim, podemos descrever a semicircunferência usando duas funções de x, a saber, $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$ para a parte de cima (azul) e $y = -\sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$ para a parte de baixo (magenta).



Semicrcunferência de raio 1: $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq x \leq 1$..

b) Observe que $x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$, para $-1 \leq y \leq 1$, pois $x \geq 0$. Assim, podemos descrever a semicircunferência usando uma única função de y, a saber, $f(y) = \sqrt{1-y^2}$, $-1 \leq y \leq 1$.

1.7 Funções definidas verbalmente

Algumas funções podem ser apresentadas verbalmente, isto é, usando apenas palavras, sem expressões matemáticas. Nesse caso, devemos encontrar a expressão matemática que define a função descrita verbalmente, esse processo é um exemplo simples do que chamamos de *modelagem matemática*. Para isso, fazemos um esboço do problema, através de desenhos, listagem das variáveis envolvidas e em muitos casos encontramos uma ou mais equações matemáticas que relacionem as variáveis.

Exemplo 1.33 *Um retângulo tem área igual a 25 m^2.*

(a) Expresse seu perímetro como função do comprimento de um de seus lados.

(b) Determine o comprimento dos lados do retângulo, cujo perímetro é igual a 25m.

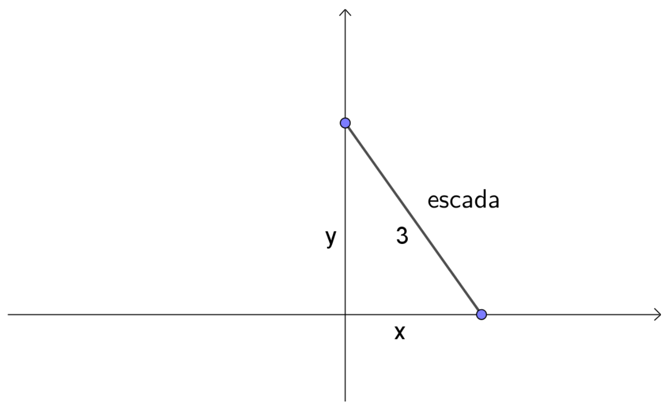
Solução:

(a) Sejam x e y os lados do retângulo, então $x.y = 25 \Rightarrow y = \dfrac{25}{x}$. Logo, seu perímetro é dado por $P = 2x + 2y = 2x + \dfrac{2.25}{x} = 2x + \dfrac{50}{x} = \dfrac{2x^2+50}{x}$, $x > 0$.

(b) $P = \dfrac{2x^2+50}{x} = 25 \Rightarrow 2x^2 + 50 = 25x \Rightarrow 2x^2 - 25x + 50 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 10$ e $x_2 = 2,5$. Assim, um lado mede 10 cm e o outro 2,5 cm.

Exemplo 1.34 *Uma escada com 3m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede, determine a distância da base da escada à parede em função da distância da base da parede ao topo da escada.*

Solução: Sejam x a distância da base da escada à parede e y a distância do topo da escada ao chão, como na figura a seguir:



Usando o Teorema de Pitágoras, temos que $x^2 + y^2 = 9$, portanto a distância x da base da escada à parede em função da distância y da base da parede ao topo da escada é dada por $x = \sqrt{9 - y^2}$, para $0 \leq y \leq 3$.

2 Funções pares e funções ímpares

Observe a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de expressão $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

Vamos avaliar f em alguns valores de x:

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 - 1 = -2, \qquad f(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 - 1 = -2,$$

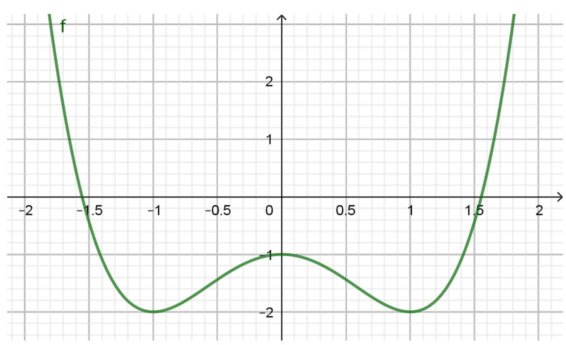
$$f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 - 1 = 5, \qquad f(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 - 1 = 5,$$

$$f(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 - 1 = 62, \qquad f(-3) = (-3)^4 - 2 \cdot (-3)^2 - 1 = 62.$$

Percebemos que a função assume o mesmo valor nos pontos simétricos escolhidos acima, isto é, $f(-1) = f(1)$, $f(2) = f(-2)$, $f(3) = f(-3)$. Indo mais além, podemos ver que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. De fato,

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x).$$

O gráfico desta função é dado por



Repare que o gráfico é **simétrico** em relação ao eixo y, isto é, se (x, y) for um ponto do gráfico $(-x, y)$ também será. E por que será que isto acontece?

Um ponto (x, y) pertence ao gráfico se, e somente se, $y = f(x)$. Como $f(-x) = f(x)$, o ponto $(-x, f(x)) = (-x, y)$ também pertencerá ao gráfico. Assim, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

Outros exemplos de funções em que este fenômeno acontece são a função modular e o cosseno, pois, como já vimos, $\cos(-x) = \cos(x)$ e $|-x| = |x|$.

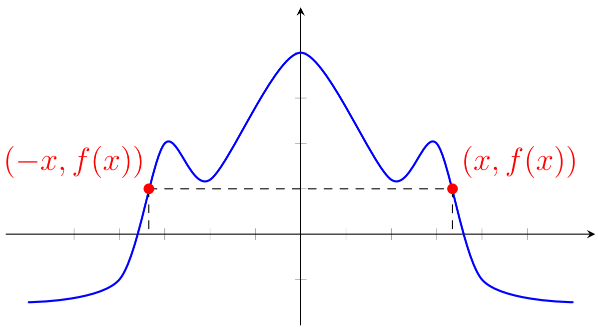
Definição 2.1 *Uma função $f : D \to C$ é **par** se, para todo $x \in D$,*

$$f(-x) = f(x).$$

A definição acima traz uma sutileza. O domínio D da função deverá ser simétrico, isto é, se um número real x pertencer ao domínio, seu simétrico $-x$ também deverá pertencer.

E quando uma função **não é par**? Note que, para ser par, devemos ter $f(-x) = f(x)$ **para todo** x no domínio. Assim, ela **não será par** se existir pelo menos um $x \in D$ para o qual $f(-x) \neq f(x)$.

Um fato importante sobre as funções pares é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y. Como vimos acima, se uma função é par, temos $f(-x) = f(x)$, logo os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, f(x))$ pertencem ao gráfico da função. E estes pontos são simétricos em relação ao eixo y, pois são da forma (x, y) e $(-x, y)$, isto é, mesma coordenada vertical y e coordenadas horizontais x e $-x$ simétricas.



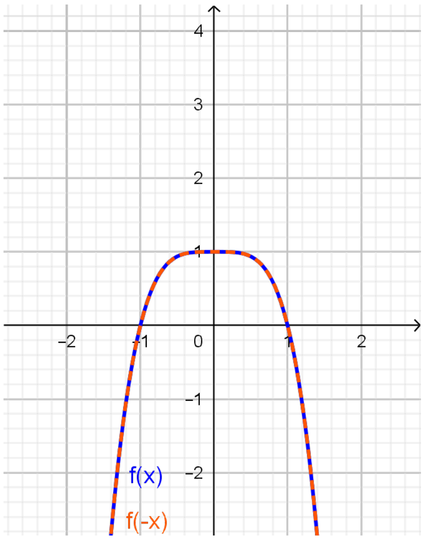
É como se o gráfico fosse "espelhado" em relação ao eixo y. Veremos exemplos abaixo para analisar quais das funções são pares.

Exemplo 2.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^4$

Dado $x \in \mathbb{R}$, como $(-x)^4 = x^4$, temos

$$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = f(x).$$

Assim, f é uma função par.



Repare que o gráfico de f, em azul, é simétrico em relação ao eixo y e coincide com o da função definida por $f(-x)$, tracejado em laranja.

Exemplo 2.2 $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ g(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$

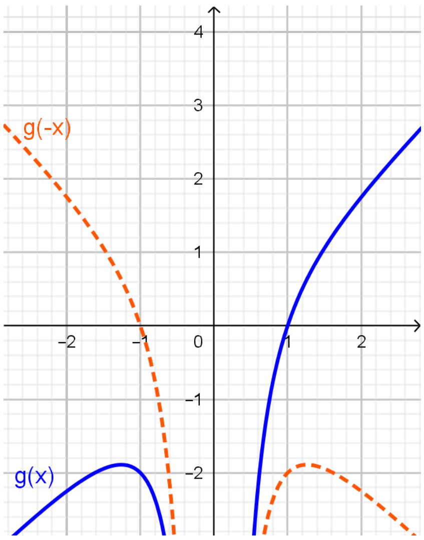
Se tomarmos um $x \in \mathbb{R}^*$, como $(-x)^2 = x^2$, teremos

$$g(-x) = (-x) = \frac{1}{(-x)^2} = -x - \frac{1}{x^2}.$$

Esta expressão não é necessariamente igual a $g(x)$. Escolhendo um valor para x, por exemplo, $x = 1$, teremos

$$g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} = 0 \quad \text{e} \quad g(-1) = -1 - \frac{1}{(-1)^2} = -2,$$

e então $g(-1) \neq g(1)$. Com isso, para pelo menos um número real x, temos $g(x) \neq g(-x)$, logo a função não é par.



Repare que o gráfico de g, em azul, não é simétrico em relação ao eixo y e não coincide com o da função definida por $g(-x)$, tracejado em laranja.

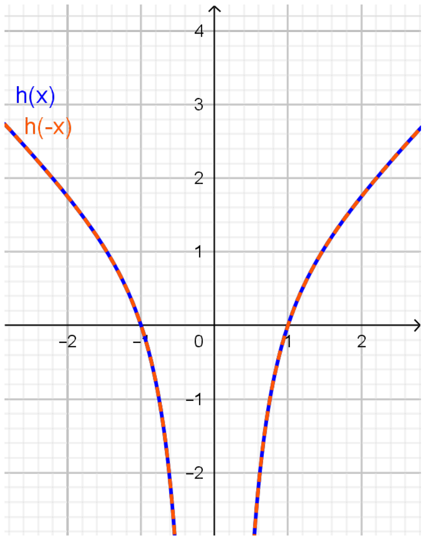
Exemplo 2.3 $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ h(x) = |x| - \dfrac{1}{x^2}$

Se tomarmos um $x \in \mathbb{R}^*$, como $(-x)^2 = x^2$ e $|-x| = |x|$, teremos

$$h(-x) = |-x| = \frac{1}{(-x)^2} = |x| - \frac{1}{x^2} = g(x).$$

Logo, h é uma função par.

Atenção! *Repare que não escrevemos que $|-x| = x$, pois isto pode não ser verdadeiro. Se $x = -1$, por exemplo, $|-x| = |-(-1)| = 1 \neq -1 = x$. Podemos apenas garantir o que escrevemos acima, que $|-x| = |x|$. Em momento algum foi dito que x era positivo e $-x$ negativo.*



Repare que o gráfico de h, em azul, é simétrico em relação ao eixo y e coincide com o da função definida por $h(-x)$, tracejado em laranja.

Exemplo 2.4 $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i(x) = x^3 - x + 1$

Se tomarmos um $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$i(-x) = (-x)^3 - (-x) + 1 = -x^3 + x + 1,$$

que não necessariamente é igual a $i(x) = x^3 - x + 1$. Por exemplo, tomando $x = 1$, temos

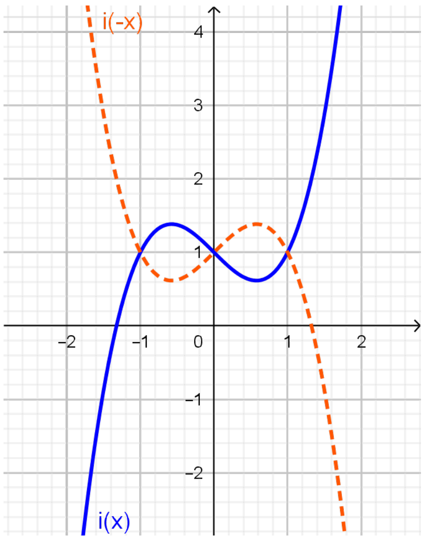
$$i(-1) = (-1)^3 - (-1) + 1 = -1 + 1 + 1 = 1 \quad \text{e} \quad i(1) = 1^3 - 1 + 1 = 1.$$

Eiii! Obtivemos que $i(-1) = i(1)$! Mas o que isso significa?

Nada! Isso não significa que i seja par. Para ser par, $i(-x)$ deve ser igual a $i(x)$ para todo x no domínio, $\mathbb{R}$. O fato de ter acontecido para $x = 1$ é mera coincidência. Vejamos agora para $x = 2$:

$$i(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -8 + 2 + 1 = -5 \quad \text{e} \quad i(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7,$$

ou seja, $i(-2) \neq i(2)$, o que garante que i ***não é uma função par****.*



Repare que o gráfico de i, em azul, não é simétrico em relação ao eixo y e não coincide com o da função definida por $i(-x)$, tracejado em laranja.

Alguns exemplos conhecidos de funções pares:

- Função modular $f(x) = |x|$.
- Função cosseno $f(x) = \cos(x)$, função secante $f(x) = \sec(x)$.
- Funções polinomiais que só tenham expoentes pares e termo independente.

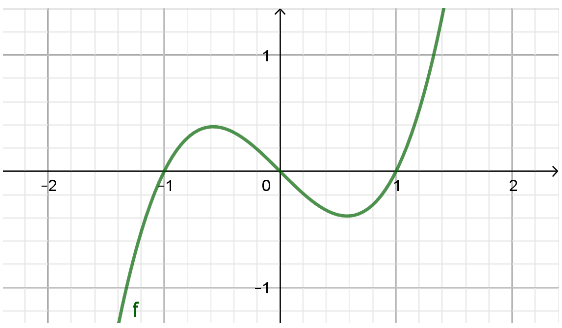
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$. Como $(-x)^3 = -x^3$ para todo número real x, temos,

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Funções como esta serão chamadas de **ímpares**, como veremos mais abaixo.

Observe abaixo o gráfico da função f e note que ele é simétrico em relação à origem, isto é, o ponto (x, y) pertence ao gráfico se, e somente se, o ponto $(-x, -y)$ também pertence.



Se considerarmos um ponto (x, y) do gráfico da função acima, teremos $y = f(x)$. Como $f(-x) = -f(x) = -y$, o ponto $(-x, f(-x)) = (-x, -y)$ pertence ao gráfico.

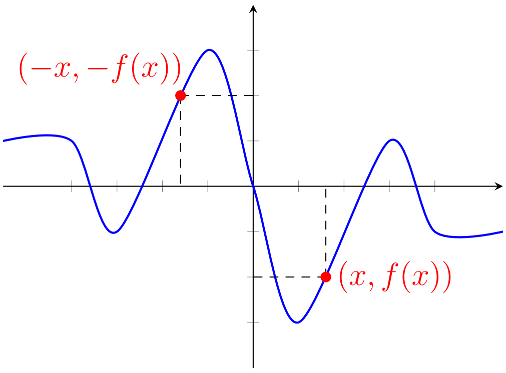
Definição 2.2 *Uma função $f : D \to C$ é **ímpar** se, para todo $x \in D$,*

$$f(-x) = -f(x).$$

Como no caso da função par, esta definição implica que o domínio $D(f)$ da função deverá ser simétrico, isto é, se um número real x pertencer ao domínio, seu simétrico $-x$ também deverá pertencer.

Quando uma função **não é ímpar**? Para ser ímpar, devemos ter $f(-x) = -f(x)$ **para todo** x no domínio. Assim, ela **não será ímpar** se existir pelo menos um $x \in D$ para o qual $f(-x) \neq -f(x)$.

Como vimos no exemplo acima, o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem. Dois pontos são simétricos em relação à origem se forem da forma (x, y) e $(-x, -y)$ e, no caso de uma função ímpar, teremos ambos os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ no gráfico da função.



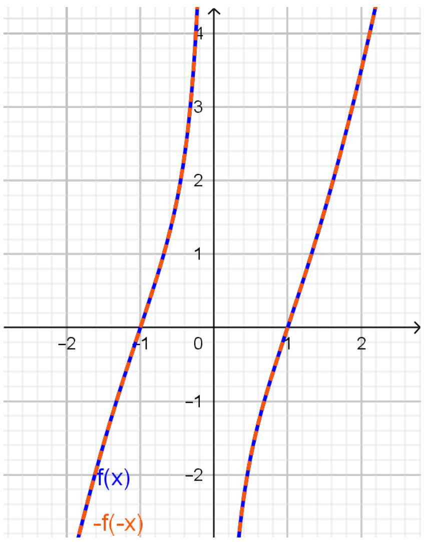
É como se o gráfico não se alterasse caso fosse "rotacionado 180°"em relação à origem. Dito de outra forma: podemos refletir em torno do eixo$y$ e depois em torno do eixo x que fica inalterado. Veremos exemplos logo abaixo.

Exemplo 2.5 $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x|x| - \dfrac{1}{x}.$

Dado $x \in R^*$, temos

$$f(-x) = (-x)|-x| - \frac{1}{-x} = -x|x| + \frac{1}{x} = -\left(x|x| - \frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

Assim, f é uma função ímpar.



Repare que o gráfico de f, em azul, é simétrico em relação à origem e coincide com o da função definida por $-f(-x)$, tracejado em laranja.

Exemplo 2.6 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1.$

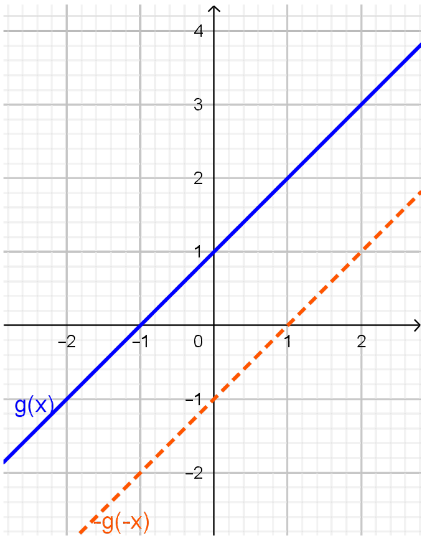
Se tomarmos um $x \in \mathbb{R}$*, teremos*

$$g(-x) = (-x) + 1 = -x + 1.$$

Esta expressão não é necessariamente igual a $g(x)$*. Escolhendo um valor para* x*, por exemplo,* $x = 1$*, teremos*

$$g(1) = 1 + 1 = 2 \quad \text{e} \quad g(-1) = -1 + 1 = 0,$$

e então $g(-1) \neq g(1)$*. Com isso, para pelo menos um número real* x*, temos* $g(x) \neq g(-x)$*, logo a função não é ímpar.*



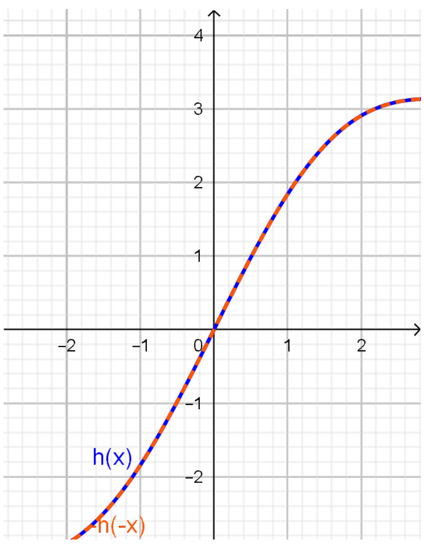
Repare que o gráfico de g*, em azul, não é simétrico em relação à origem e não coincide com o da função definida por* $-g(-x)$*, tracejado em laranja.*

Exemplo 2.7 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x + \operatorname{sen}(x).$

Se tomarmos um $x \in \mathbb{R}$*, como* $\operatorname{sen}(-x) - \operatorname{sen}(x)$*, teremos*

$$h(-x) = (-x) + \operatorname{sen}(-x) = -x - \operatorname{sen}(x) = -(x + \operatorname{sen}(x)) = -h(x).$$

Logo, h *é uma função ímpar.*



Repare que o gráfico de h*, em azul, é simétrico em relação à origem e coincide com o da função definida por* $-h(-x)$*, tracejado em laranja.*

Exemplo 2.8 $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i(x) = x^3 - x^2 + 1.$

Se tomarmos um $x \in \mathbb{R}$, *teremos*

$$i(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 + 1 = -x^3 - x^2 + 1,$$

que não necessariamente é igual a $-i(x) = -(x^3 - x^2 + 1) = -x^3 + x^2 - 1$. *Por exemplo, tomando* $x = 1$, *temos*

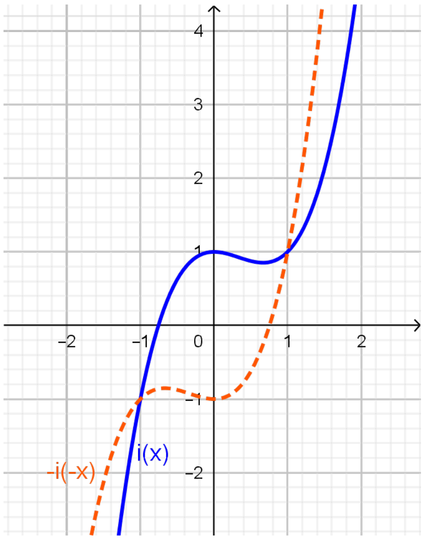
$$i(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -1 - 1 + 1 = -1 \quad \text{e} \quad i(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1.$$

Obtivemos que $i(-1) = -1 = -i(1)$*! E o que isso significa?*

Novamente, nada! Isso não significa que i *seja ímpar. Para ser ímpar,* $i(-x)$ *deve ser igual a* $-i(x)$ *para todo* x *no domínio,* $\mathbb{R}$. *O fato de ter acontecido para* $x = 1$ *é mera coincidência. Vejamos agora para* $x = 2$:

$$i(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 1 = -8 - 4 + 1 = -11 \quad \text{e} \quad i(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5,$$

ou seja, $i(-2) \neq -i(2)$, *o que garante que* i ***não é uma função ímpar****.*



Repare que o gráfico de i, *em azul, não é simétrico em relação à origem e não coincide com o da função definida por* $-i(-x)$, *tracejado em laranja.*

Alguns exemplos conhecidos de funções ímpares:

- Função seno, função tangente, função cotangente, função cossecante.
- Funções polinomiais que só tenham expoentes ímpares e não tenham termo independente.

Observações importantes:

- Se uma função f é ímpar e existe $f(0)$ então, necessariamente, teremos $f(0) = 0$. Note que $0 = -0$, logo $f(0) = f(-0)$; porém, como f é ímpar, $f(-0) = -f(0) = -f(-0)$. Assim, $f(0) = -f(0)$, logo $2f(0) = 0$ e, então $f(0) = 0$.
- Uma função não tem que ser par ou ímpar! Na verdade, a grande maioria das funções não será nem par e nem ímpar. Um exemplo é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$.
- Existe uma função par e ímpar ao mesmo tempo, é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

3 Composição de funções

Nas seções anteriores, foram apresentadas algumas funções elementares e seus gráficos. Agora pretendemos apresentar como podemos obter novas funções mais elaboradas, recorrendo à composição de funções.

Vejamos um exemplo onde temos uma aplicação da composição de funções.

Exemplo 3.1 *Suponha que recebeu um vale de $R\$40$ para gastar numa livraria. A função que descreve o valor a pagar usando o vale é $f(x) = x - 40$. Mas no dia que escolhe ir à livraria, eles estão oferecendo um desconto de 30% em todos os livros de cálculo. A função que descreve o desconto desse dia é $g(x) = x - 0,3x = 0,7x$. A livraria permite deixar o cliente escolher qual a ordem para aplicar o desconto, ou seja você deve escolher entre considerar a função custo $f \circ g$ ou $g \circ f$.*

Note que $(f \circ g)(x) = f(0,7x) = 0,7x - 40$ e $(g \circ f)(x) = g(x - 40) = 0,7(x - 40) = 0,7x - 28$.

Então o comprador deve escolher a opção de custo dada por $f \circ g$

Dadas duas ou mais funções podemos combiná-las usando diversas operações, obtendo novas funções.

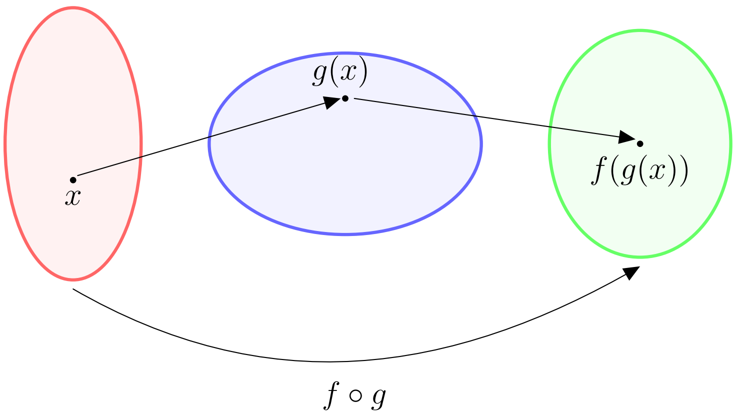
Se considerarmos duas funções f e g podemos por exemplo definir as funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g que correspondem à soma, subtração, produto e quociente de funções, respectivamente. Além destas operações, podemos também usar a composição de funções. A composição de duas funções consiste em aplicar uma das funções e depois aplicar a outra função à imagem obtida após a aplicação da primeira função. Ou seja, dadas duas funções f e g, podemos aplicar g a um certo valor de x (pertencente ao domínio de g e depois aplicar f a $g(x)$, caso $g(x)$ esteja no domínio de f.

Definição 3.1 *Dadas duas funções f e g, a função composta $f \circ g$ é definida por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

sendo o seu domínio o conjunto $D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\}$.

Também podemos denominar $f \circ g$ por composição de f e g. O esquema abaixo ilustra a definição da composição $f \circ g$:



Observação: A operação composição de funções não é comutativa, ou seja, em geral $f \circ g$ é diferente de $g \circ f$. Por exemplo, se para $x \in \mathbb{R}$ considerarmos $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 3$, então $(f \circ g)(x) = f(x + 3) = (x + 3)^2$ e $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 + 3$, ambas com domínio $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.2 *A função $h(x) = \sqrt{1 + x^2}$ é a composição das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1 + x^2$, ou seja, $h = f \circ g$. Observe que a $Im(g) = [1, \infty)$ está contida em $D(f) = [0, +\infty)$, logo $D(f \circ g) = D(g) = \mathbb{R}$.*

Exemplo 3.3 *A função* $h(x) = \dfrac{1}{2+|x|}$ *é a composição das funções* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ *e* $g(x) = 2 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$, *ou seja,* $h = f \circ g$. *Observe que a* $Im(g) = [2, \infty)$ *que está contido* $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, *portanto* $D(f \circ g) = \mathbb{R}$.

Nem sempre é possível escolher duas funções ao acaso e tentar determinar a composição das duas. Para que a função $f \circ g$ esteja bem definida é necessário que a imagem de g esteja contida no domínio de f, ou seja $Im(g) \subset D(f)$.

Exemplo 3.4 *Consideremos as funções* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = -x^4$. *Neste caso,* $f \circ g$ *não está definida em* $\mathbb{R}$ *(que é o domínio de* g*), pois a* $Im(g) = (-\infty, 0]$ *e* $D(f) = [0, +\infty)$ *portanto* $f \circ g$ *estaria definida apenas em* $x = 0$.

Exemplo 3.5 *Consideremos as funções*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & [-4, +\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 - 4 \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rccc} g: & [0, +\infty) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Para determinarmos o domínio de $g \circ f$ *precisamos considerar os valores de* x *tais que* $f(x)$ *pertença ao domínio de* g, *ou seja, serão os valores tais que* $x^2 - 4 \geq 0$, *ou seja,* $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. *Nesse caso a função* $g \circ f$ *está definida por* $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}$.

4 Transformações de gráficos de funções

Dependendo da composição de funções que consideremos, poderemos facilmente identificar o gráfico do resultado da composição das funções observando o gráfico de uma das funções da composição. Nesta seção, considerando uma constante $c > 0$, vamos apresentar como obter, a partir do gráfico da função $y = f(x)$, os gráficos das funções:

- $y = f(x) \pm c$
- $y = f(x \pm c)$
- $y = c \cdot f(x)$
- $y = f(c \cdot x)$
- $y = -f(x)$
- $y = f(-x)$
- $y = |f(x)|$
- $y = f(|x|)$

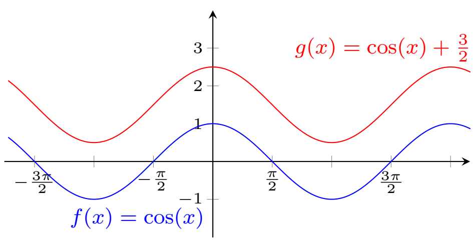
Veremos adiante como obter estas e outras transformações de gráficos de funções.

4.1 Translações

Para obter o gráfico da função

- $y = f(x) + c$, devemos deslocar o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima;
- $y = f(x) - c$, devemos deslocar o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo.

Exemplo 4.1 *Para obter o gráfico da função* $y = \cos(x) + \frac{3}{2}$ *devemos deslocar* $\frac{3}{2}$ *unidades para cima, o gráfico da função* $y = \cos(x)$.



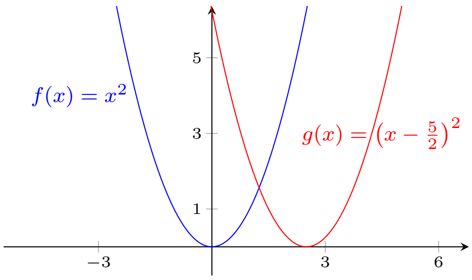
Pode ver uma animação em Geogebra que ilustra esta transformação, no endereço abaixo:

`https://www.geogebra.org/m/skkquxev`

Para obter o gráfico de:

- $y = f(x-c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita;
- $y = f(x+c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda.

Exemplo 4.2 *Para obter o gráfico da função* $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ *devemos deslocar* $\frac{5}{2}$ *unidades para a direita, o gráfico da função* $y = x^2$.



No endereço abaixo poderá ver uma animação com a translação horizontal do gráfico da função $f(x) = x^2$:

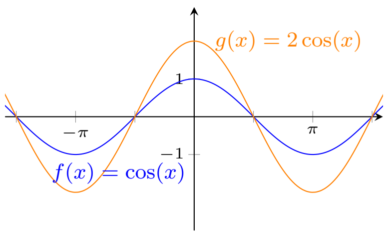
`https://www.geogebra.org/m/bxca6g23`.

4.2 Expansão e Compressão

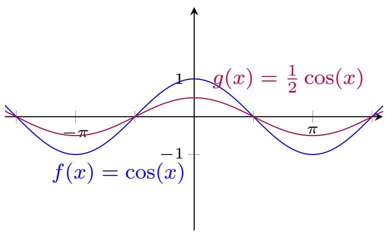
Suponha que $c > 1$. Para obter o gráfico de:

- $y = cf(x)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
- $y = (1/c)f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c

Exemplo 4.3 *Para obter o gráfico da função* $y = 2\cos(x)$ *devemos expandir verticalmente o gráfico da função* $y = \cos(x)$ *pelo fator* 2.



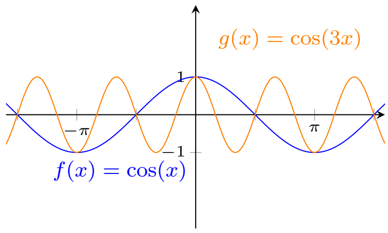
Exemplo 4.4 *Para obter o gráfico da função* $y = \frac{1}{2}\cos(x)$ *devemos comprimir verticalmente o gráfico da função* $y = \cos(x)$ *pelo fator* 2.



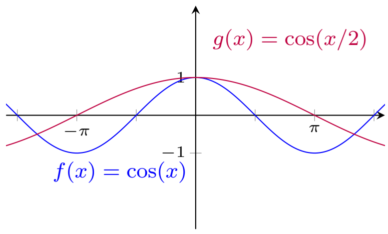
Suponha que $c > 1$. Para obter o gráfico de:

- $y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c;
- $y = f(x/c)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c.

Exemplo 4.5 *Para obter o gráfico da função* $y = \cos(3x)$ *devemos comprimir horizontalmente o gráfico da função* $y = \cos(x)$ *pelo fator* 3.



Exemplo 4.6 *Para obter o gráfico da função* $y = \cos(x/2)$ *devemos expandir horizontalmente o gráfico da função* $y = \cos(x)$ *pelo fator* 2.

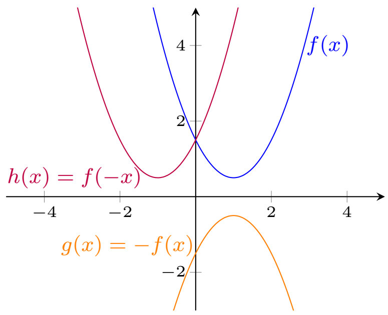


4.3 Reflexão

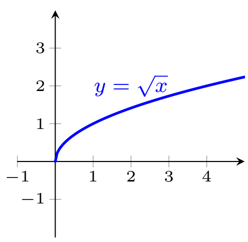
Para obter o gráfico de:

- $y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x.
- $y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y.

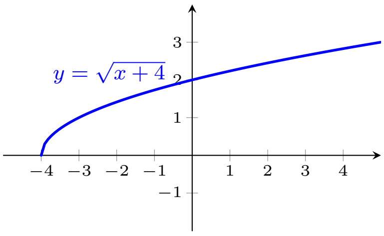
Exemplo 4.7 *Reflexões do gráfico de* $f(x) = 1/2 + (x-1)^2$ *em torno do eixo* x *e do eixo* y.



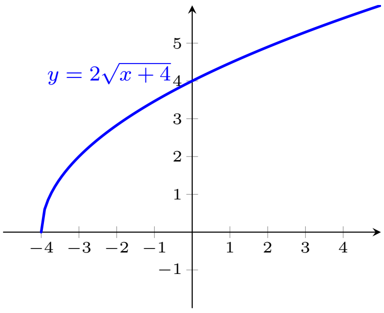
Exemplo 4.8 *Vejamos como podemos obter o gráfico da função* $f(x) = 2\sqrt{x+4} - 1$ *a partir do gráfico de* $y = \sqrt{x}$.



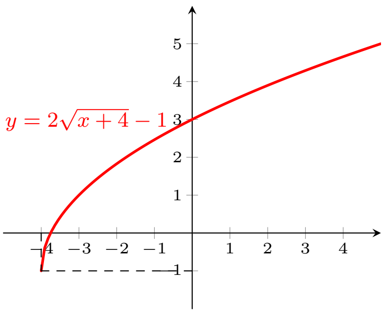
Transladando o gráfico anterior 4 unidades para a esquerda, obtemos o gráfico abaixo da função $y = \sqrt{x+4}$.



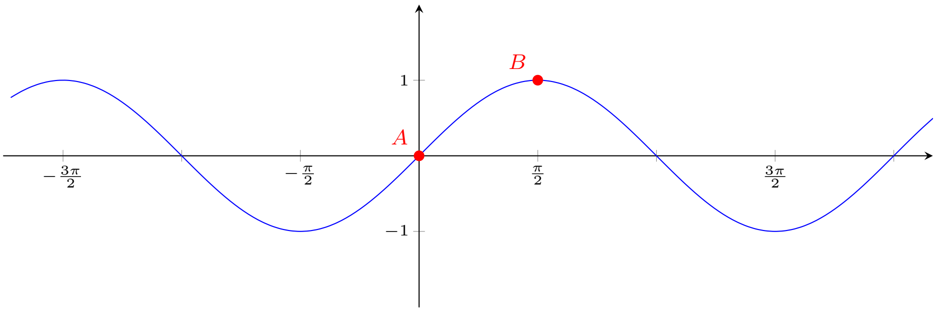
Depois multiplicamos por 2 a expressão da função anterior, fazemos com que o gráfico expanda na direção vertical por um fator 2, conforme a figura abaixo.



E para obter o gráfico da função pedida, basta transladar na vertical o gráfico anterior em uma unidade para baixo.



Exemplo 4.9 *Para obter o gráfico da função* $f(x) = -1/2 - \operatorname{sen}(2(x-1))$, *podemos aplicar transformações ao gráfico de* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.



Os pontos A e B forma marcados no gráfico para irmos acompanhando o movimento deles, à medida que fazemos as transformações do gráfico.

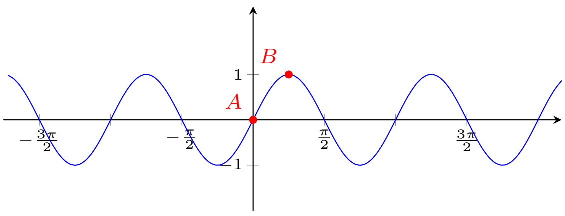


Gráfico da função $y = \text{sen}(2x)$.

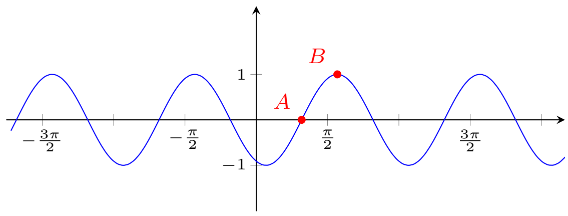


Gráfico da função $y = \text{sen}\,(2(x-1))$.

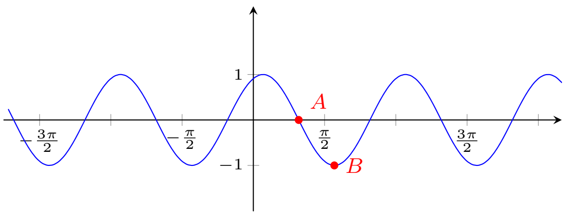


Gráfico da função $y = -\text{sen}\,(2(x-1))$.

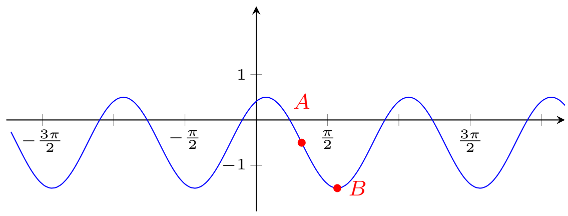


Gráfico da função $y = -\dfrac{1}{2} - \text{sen}\,(2(x-1))$.

4.4 Módulos

Outras transformações de gráficos que também são interessantes, são as que envolvem o valor absoluto.

Se $y = |f(x)|$, então por definição de valor absoluto temos:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad f(x) \geq 0. \\ -f(x), & \text{se} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Assim, vemos que podemos obter o gráfico de $y = |f(x)|$ a partir do gráfico de $y = f(x)$. O gráfico de $y = |f(x)|$ coincide

- com o gráfico de $y = f(x)$ nos pontos (x, y) tais que $y = f(x) \geq 0$;
- com o gráfico de $y = -f(x)$ nos pontos (x, y) tais que $y = f(x) < 0$.

Exemplo 4.10 *Para obter o gráfico de* $g(x) = |1/2 - (x-1)^2|$, *podemos partir do gráfico de* $f(x) = 1/2 - (x-1)^2$ *e usar a descrição acima.*

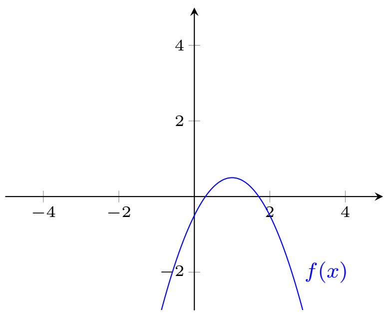


Gráfico de $f(x) = 1/2 - (x-1)^2$.

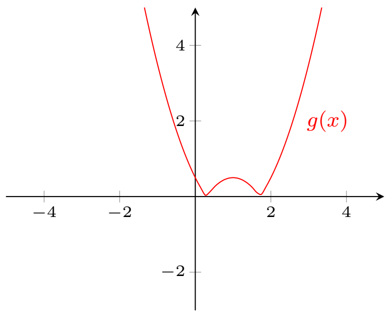


Gráfico de $|f(x)| = |1/2 - (x-1)^2|$

Vejamos agora como obter o gráfico da função $y = f(|x|)$ a partir do gráfico de $y = f(x)$. Por definição de valor absoluto, temos:

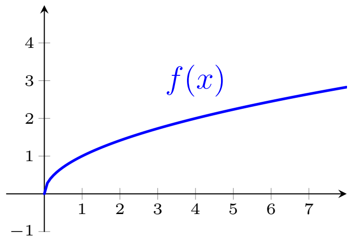
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \geq 0. \\ f(-x), & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Note que o domínio de f, deve conter valores positivos ou 0, isto é $D(f) \cap [0, +\infty) \neq \emptyset$ para que a função $f(|x|)$ esteja definida. Além disso, o domínio de $y = f(|x|)$ será um conjunto simétrico relativamente a $x = 0$, pois será formado por todos os valores reais de x, tais que $|x| \in D(f)$.

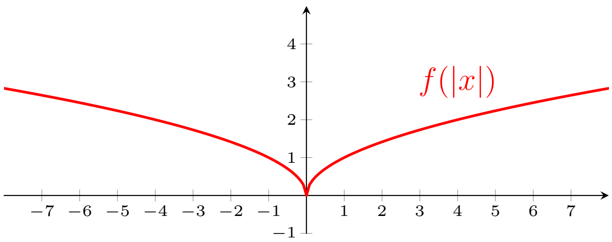
Logo:

- o gráfico de $y = f(|x|)$ nos pontos (x, y) tais que $x \geq 0$, coincide com o gráfico de $y = f(x)$.
- nos pontos (x, y) onde $x < 0$, o gráfico de $y = f(|x|)$ é o simétrico do gráfico de $y = f(x)$ em relação ao eixo y.

Exemplo 4.11 *Consideremos o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, com $x \in [0, +\infty)$*



Para obter o gráfico da função $g(x) = f(|x|)$, devemos "espelhar"o gráfico de f ao longo do eixo y, obtendo então



Note que o domínio da função g é $D(g) = \mathbb{R}$.

Exemplo 4.12 *Para obter o gráfico de $g(x) = -1 + (|x| - 2)^2$, podemos partir do gráfico de $f(x) = -1 + (x - 2)^2$ e usar a descrição acima.*

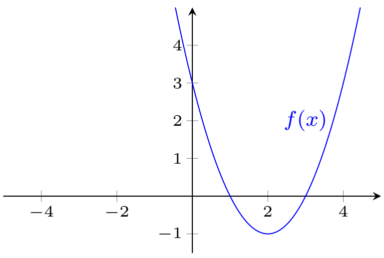


Gráfico de $f(x) = -1 + (x - 2)^2$

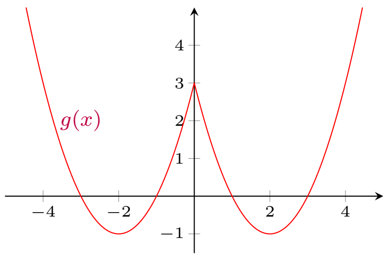
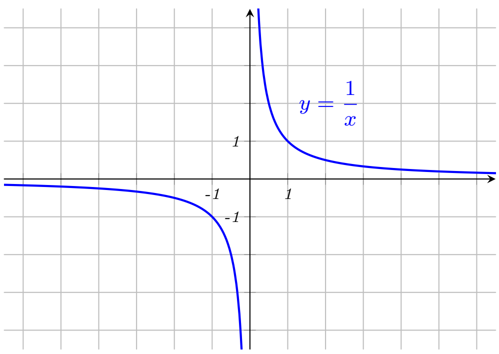


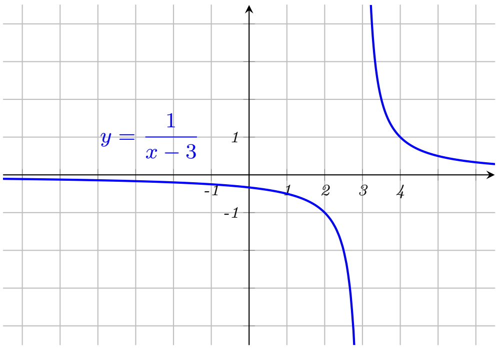
Gráfico de $g(x) = -1 + (|x| - 2)^2$

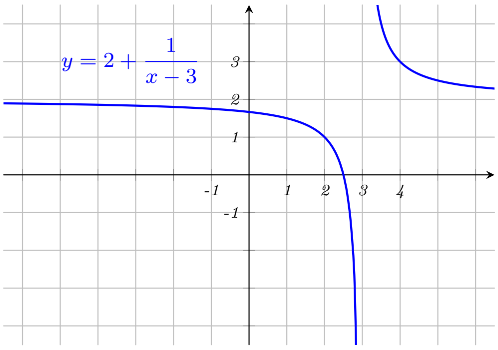
Exemplo 4.13 *Vejamos como obter o gráfico da função $f(x) = 2 + \dfrac{1}{|x| - 3}$.*

Podemos suspeitar que conseguiremos obter esse gráfico, aplicando transformações ao gráfico de $g(x) = \dfrac{1}{x}$.



O primeiro passo é transladar o gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$, 3 unidades para a direita de forma a obter o gráfico abaixo à esquerda e depois transladar este último 2 unidades para cima, obtendo o gráfico abaixo à direita.





Para passarmos do gráfico $y = 2 + \dfrac{1}{x-3}$ para o gráfico de $y = 2 + \dfrac{1}{|x|-3}$, devemos manter a parte do gráfico que corresponde aos pontos (x, y) com $x \geq 0$ e fazer uma reflexão desta parte do gráfico em relação ao eixo y. Obtendo portanto o gráfico abaixo, que corresponde ao nosso objetivo.

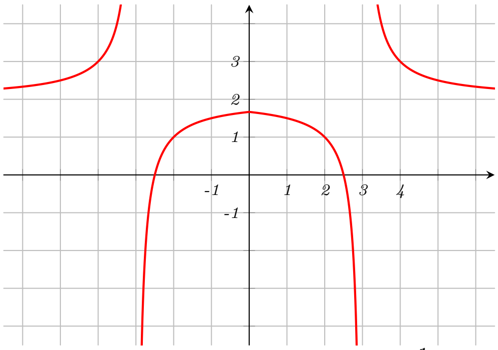


Figura: Gráfico da função $y = 2 + \dfrac{1}{|x|-3}$

Observe que o gráfico da função obtida tem duas assíntotas verticais em $x = -3$ e $x = 3$ e uma assíntota horizontal em $y = 1$.

Poderá utilizar o applet disponível no endereço `https://www.geogebra.org/m/uxu9kncy`, para observar diferentes transformações do gráfico de um polinômio de grau 3.