# Matemática Discreta
# Lista 10

1. Expandir as somas.

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} 2i$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} x^i$

   (c) $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} 5$

   (d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j(j-1)(j-2)}{6}$

   (e) $\displaystyle\sum_{i=5}^{n} (3i+2)$

   (f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3i^2}{i+1}$

2. Escreva as expressões abaixo usando a notação somatório:

   (a) $1+3+5+7+9+11$

   (b) $-1+4-9+16-25+36-49+64-81$

   (c) $7+14+21+28+35+42$

   (d) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}$

3. Use o princípio da indução matemática para provar as identidades:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   (b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (c) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(d) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = \dfrac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$

(e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(f) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$

4. Use o princípio da indução matemática para provar as desigualdades:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

   (b) $n^2 < n!$ para todo $n \geq 4$.

   (c) $n! > 3^n$ para todo $n \geq 7$.

   (d) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

   (e) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = \dfrac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$

5. Sejam $a$ e $b$ números reais distintos. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade:

$$b^n + ab^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \ldots + a^{n-1} b + a^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}.$$

6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que para todo $n \geq 1$,

   (a) 9 divide $4^n + 6n - 1$.

   (b) 8 divide $3^{2n} + 7$.

7. Resolva as relações de recorrência:

   (a) $a_n = 2a_{n-1} + 2$ e $a_0 = 1$.

   (b) $a_n = a_{n-1} + 3$ e $a_0 = 5$.

   (c) $a_n = -a_{n-1}$ e $a_0 = 4$.

   (d) $a_n = \frac{2}{3} a_{n-1}$ e $a_0 = -1$.

   (e) $a_n = -2a_{n-1} - 3$ e $a_0 = 3$.

   (f) $a_n = a_{n-1} + 7$ e $a_0 = 6$.

   (g) $a_n = 3a_{n-1} - 2$ e $a_0 = 0$.

   (h) $a_n = 5a_{n-1} + 1$ e $a_0 = 3$.

   (i) $a_n = -7a_{n-1} + 2$ e $a_0 = 1$.