Limites - Parte 2

Neste texto, estudaremos a definição formal de limites, que busca dar maior precisão à noção intuitiva que foi desenvolvida na semana anterior. Depois, estudaremos outro importatíssimo conceito, o infinito. Por fim, estudaremos uma forma de determinar alguns limites através da comparação da função com outras funções cujo limite conhecemos.

1 Definição Formal

Atenção! Esta seção trará uma maior formalização do conceito de limite, e você deve ler com o objetivo de consolidar este conceito. Porém, não deve se preocupar em, necessariamente, saber reproduzir as ideias ou conseguir saber tratar, sozinho, os exemplos apresentados.

Antes de prosseguir, sugerimos que você assista ao vídeo **Uma definição clássica de limite**, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=RLqWKMujPTs.

Até o momento, estudamos limites de uma forma intuitiva. A ideia fundamental é que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se for possível verificar que o valor de $f(x)$ fica muito "próximo" do número real L quando x se "aproxima" de a. Infelizmente, o significado de "estar próximo" pode variar muito; quando $x \to 1$, $3x$ está próximo de 3, mas também está próximo de $2,99$, de $3,01$, e queremos um conceito de limite que torne o valor 3 (nesse caso) único. Queremos que 3 seja *o limite* e não *um limite*.

Imagine que alguém quer percorrer uma distância fixa, a partir de um ponto, marcado como 0, usando a seguinte regra: cada passo deve ter exatamente metade da distância que falta. Não é difícil perceber que essa pessoa nunca atingirá o destino, mas chegará muito perto. Quão perto? Tanto quanto deseje, *desde que disponha de tempo "suficiente"* para caminhar. Se pensarmos que a posição dessa pessoa no caminho é uma função que depende do tempo, $P(t)$, vemos que a imagem dessa função se aproxima *tanto quanto se queira* de um valor determinado (nesse caso, o ponto de chegada), se o domínio - os valores possíveis de t - for escolhido de forma conveniente. Reside aqui a essência da concepção de limite: a imagem da função precisa se aproximar do limte, *tanto quanto se queira*, ainda que para isso seja preciso restringir o domínio.

É crucial termos uma definição precisa do que vem a ser *tão perto quanto se queira*. A noção de perto $\times$ longe, depende de uma medida de distância. Em $\mathbb{R}$, medimos a distância entre dois pontos, p_1 e p_2, como $|p_1 - p_2|$. Em "matematiquês", quando se quer dizer que alguma coisa pode se tornar *tão pequena quanto se queira*, é comum estabelecer que ela pode ser feita menor do que qualquer valor positivo. Assim, quando se quer garantir que alguma grandeza pode ficar arbitrariamente pequena, dizemos que esta grandeza pode se tornar - sob determinadas condições - menor do que ϵ (lê-se epsilon), para qualquer ϵ maior do que 0.[1] Aqui, queremos que a distância entre uma função e seu limite se torne tão pequena quanto se queira, então, vamos dizer que o limite será l se $|f(x) - l| < \epsilon$, para todo

[1] A letra ϵ está sendo usada aqui por uma questão de tradição mas, evidentemente, serviria qualquer símbolo

$\epsilon > 0$, desde que sejam escolhidos valores *convenientes* de x.

Vamos olhar para o exemplo inicial, $f(x) = 3x$. O meu candidato a limite quando x tende a 1 é 3. Preciso garantir que $|3x - 3|$ seja menor que qualquer ϵ positivo, desde que eu possa escolher quão perto x está de 1. Começo tentando $\epsilon = 1/2$. Escrevo um "rascunho":

Será que $|3x-3| < 1/2$, se x estiver bem perto de 1? Posso escrever $|3x-3|$ como $3|x-1|$ e analiso: $|3x-3| = 3|x-1| < 1/2$? Bem, se $|x-1| < 1/6$ vai dar certo. Vou fingir que não fiz rascunho nenhum e volto ao texto.

Se $\epsilon = 1/2$, escolho $|x - 1| < 1/6$.

$$|x-1| < 1/6 \Leftrightarrow 3|x-1| < 3/6 \Leftrightarrow |3x-3| < 1/2$$

e mostro que a distância entre $f(x)$ e o limite pode ser menor que $\epsilon = 1/2$ desde que eu escolha x no intervalo $(1 - 1/6, 1 + 1/6)$. Ou seja, a distância entre x e 1 não pode ser maior que $1/6$.

Mas o resultado tem que valer para ϵ tão pequeno quanto se queira. Vou tentar com $\epsilon = 1/10$. Mais um rascunho:

Será que $|3x-3| < 1/10$, se x estiver bem perto de 1? Posso escrever $|3x-3|$ como $3|x-1|$ e analiso: $|3x-3| = 3|x-1| < 1/10$? Bem, se $|x-1| < 1/30$ vai dar certo. Vou fingir que não fiz rascunho nenhum e volto ao texto.

Se $\epsilon = 1/10$, escolho $|x - 1| < 1/30$.

$$|x-1| < 1/30 \Leftrightarrow 3|x-1| < 3/30 \Leftrightarrow |3x-3| < 1/10$$

e mostro que a distância entre $f(x)$ e o limite pode ser menor que $\epsilon = 1/10$ desde que eu escolha x no intervalo $(1 - 1/30, 1 + 1/30)$ Ou seja, a distância entre x e 1 não pode ser maior que $1/30$.

Bem, vamos tentar com um ϵ qualquer. Novo rascunho:

Será que $|3x-3| < \epsilon$, se x estiver bem perto de 1? Posso escrever $|3x-3|$ como $3|x-1|$ e analiso: $|3x-3| = 3|x-1| < \epsilon$? Bem, se $|x-1| < \epsilon/3$ vai dar certo. Vou fingir que não fiz rascunho nenhum e volto ao texto.

Seja ϵ maior que 0 dado. Escolha x tal que $|x - 1| < \epsilon/3$. Então:

$$|x-1| < \frac{\epsilon}{3} \Leftrightarrow 3|x-1| < \frac{3\epsilon}{3} \Leftrightarrow |3x-3| < \epsilon$$

Esse procedimento sugere que podemos dizer que o $\lim_{x\to a} f(x) = l$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ é possível determinar um intervalo em torno de a, tal que se x está nesse intervalo, $|f(x) - l| < \epsilon$.

É comum substituir a expressão "é possível determinar um intervalo em torno de a" por um modo mais conciso de afirmar a mesma coisa: diz-se que *existe um $\delta > 0$ (delta) tal que* $|x-a| < \delta$. (Note que $|x-a| < \delta$ é equivalente a $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Então dizemos que o $\lim_{x\to a} f(x) = l$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ é possível determinar um $\delta > 0$, tal que se $|x - a| < \delta$, $|f(x) - l| < \epsilon$. Nesse ponto, incorporamos mais um detalhe: para efeito do cálculo do limite quando x tende a a, o que acontece exatamente no ponto a não é relevante; a pode nem estar no domínio da função. Para incorporar esse fato, vamos nos restringir ao conjunto $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ ou, equivalentemente, vamos escrever que $0 < |x-a| < \delta$.

Temos agora os pré–requisitos para apresentar a famosíssima definição formal de limite por *epsilons* e *deltas*.

Definição 1.1 *Dizemos que limite quando x tende a a de uma função $f(x)$ é igual ao número real L se e somente se: para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Em "matematiquês" puro e castiço, fica:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \text{tal que, se }\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$

A segunda parte da Definição 1.1 exemplifica bem as maravilhas e os horrores do matematiquês. Quem tem prática, consegue escrever de forma simples, curta e clara o que quer dizer. Quem não pratica, quando vai ler um texto técnico, encontra um monte de "símbolos sem nexo". É sempre bom praticar. Ajuda a escrever, a ler, a pensar e a entender. Podemos olhar a interpretação gráfica da Definição 1.1 na Figura 1:

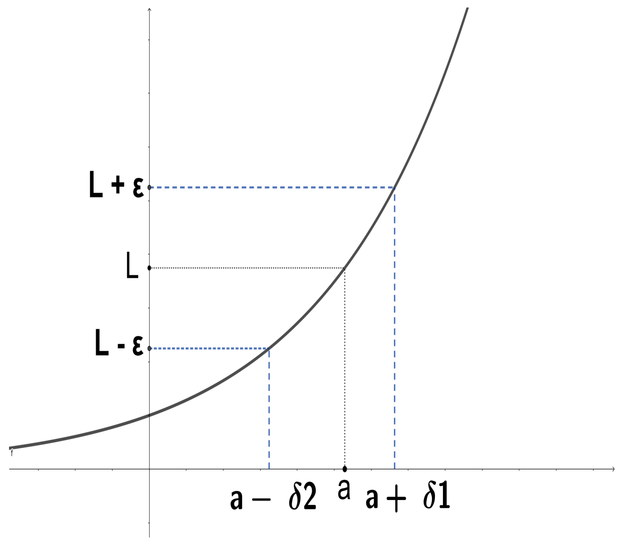


Figura 1: A imagem de f em pontos próximos de a está em um intervalo de raio ϵ em torno de L.

Definido um valor de ϵ, verificamos que a imagem de f, em algum conjunto $(a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_1)$ em torno de a, está contida em uma faixa de raio ϵ em torno de L. Para efeito da definição, podemos escolher δ como o mínimo entre os dois, ou seja, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

A definição formal de limite é bastante útil para fazer várias demonstrações; infelizmente, seu uso nem sempre é muito fácil porque "descobrir o δ e mostrar que funciona" pode dar muito trabalho. Nesse texto, vamos fazer alguns exemplos do seu uso.

O próximo Teorema responde nossa pergunta inicial. Ele mostra que só pode existir um valor que satisfaz a defininição de limite. Apresentamos a demonstração numerando os passos e justificamos cada etapa logo depois.

Teorema 1 *Unicidade do limite Seja $f(x)$ uma função real e suponha que existe um r tal que o conjunto $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ está contido no domínio de f. Se existe o limite quando x tende a a de $f(x)$, ele é único.*

Demonstração:

[01] Suponha que existem l_1 e l_2 tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_2$.

[02] Basta mostrar que $|l_1 - l_2| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.

[03] Seja $\epsilon > 0$ dado e sejam δ_1 e δ_2 tais que se $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon/2$ e $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon/2$.

[04] Escolha $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

[05] Escolha x tal que $0 < |x - a| < \delta$.

[06] Para um tal x, $|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

$\square$

Justificando cada passo:

[01] Para mostrar que só pode existir um único valor, é comum começar supondo que existem dois, e provar que eles são iguais.

[02] Como l_1 e l_2 são números fixos, se a diferença entre eles for menor que qualquer valor positivo, será zero, o que permite concluir que são iguais.

[03] Os valores de δ_1 e δ_2 devem existir pela definição de limite.

[04] Escolhemos o menor valor dentre os δs para que atenda a definição tanto para l_1 quanto para l_2.

[05] Aqui, fixamos um x no intervalo adequado apenas para utilizar o valor $f(x)$ como auxiliar na estimativa subsequente.

[06] Somamos e subtraimos $f(x)$ como um recurso algébrico sem maior sentido. Apenas para usar a desigualdade $|a + b| \leq |a| + |b|$ como é feito nesse mesmo item. Ao escrever desse modo, a definição de limite permite fazer a estimativa adequada.

O Teorema 2 a seguir, que foi visto no texto anterior, é conhecido como **Teorema do Anulamento**. Ele afirma que, se uma função g limitada é multiplicada por outra função f que tende a zero em um ponto $x = a$, então produto de f por g tende a zero em $x = a$. Usamos esse resultado para estudar $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \text{sen} \dfrac{1}{x}$ e vários outros exemplos.

Teorema 2 *Seja $g(x)$ uma função limitada em algum intervalo em torno de a, exceto, possivelmente, no próprio a, ou seja, $|g(x)| \leq M, \forall x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$,para algum $r > 0$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.*

Demonstração:

[01] Preciso mostrar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x)| < \epsilon$.

[02] Seja $\epsilon > 0$ dado e escolha $\delta_1 > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$

[03] $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < M|f(x)|$, $\forall x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$.

[04] Se $0 < |x - a| < \delta$, $|f(x)| < \epsilon/M$. Portanto, $|f(x)g(x)| < |f(x)||g(x)| < M|f(x)| < M.\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$, $\forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, $\delta = min(\delta_1, r)$.

$\square$

Justificando cada passo:

[01] Decorre diretamente da definição de limite.

[02] Dado $\epsilon > 0$, ϵ/M é um valor positivo e, pela definição de limite, é possível achar $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x)| < \epsilon/M$.

[03] $|f(x).g(x)| = |f(x)||g(x)|$ sempre! E $|f(x)|.|g(x)| < M|f(x)|$, $\forall x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$, pois por hipótese, $|g(x)| < M$, $\forall x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$.

[04] Decorre diretamente dos passos anteriores.

Como último exemplo vamos mostrar uma das propriedades básicas de limite: O limite da soma é a soma dos limites.

Teorema 3 *Sejam f e g duas funções reais definidas em algum intervalo em torno de a, exceto, possivelmente, em a. Suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = lf$ e que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = lg$. Então $\lim\limits_{x\to a}(f + g)(x) = lf + lg$.*

Demonstração:
Quero mostrar que $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (lf + lg)| < \epsilon$. Seja $\epsilon > 0$ dado. Existe $\delta_1 > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - lf| < \epsilon/2$. Existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - lg| < \epsilon/2$. A existência de δ_1 e δ_2 é consequência direta da hipótese de que os limites existem. Escolha $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. $|f(x) + g(x) - lf - lg| = |(f(x) - lf) + (g(x) - lg)| \leq |f(x) - lf| + |g(x) - lg|$. para cada x tal que, $0 < |x - a| < \delta$ temos: $|f(x) + g(x) - lf - lg| = |(f(x) - lf) + (g(x) - lg)| \leq |f(x) - lf| + |g(x) - lg| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

$\square$

2 Limites: Pensando no Infinito

Atenção! Não leia esse tópico antes de ver o vídeo **Olhando o infinito**, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=c9mcxGiIDWY e estudar a Seção 1, sobre a definição formal de limite. Não são assuntos interdependentes, porém essa parte estende e referencia algumas noções, exemplos e conceitos discutidos lá.

Até o momento, estudamos sobre o limite quando x tendia a um valor determinado a. Esse limite, se existisse, seria também um número real bem definido L. Aqui, vamos estender essa ideia, pensando no "infinito".

As Figuras 2 e 12 ilustram exemplos de comportamentos que podemos identificar como alvos desse estudo. No caso da primeira figura, observamos que se x fica muito grande tanto no sentido positivo quanto no negativo, ou seja, muito grande em módulo, a imagem da função se aproxima de uma constante, como indicado pela reta em vermelho. Na segunda figura, se x tende a 3, a imagem da função fica muito grande. Acontece que "muito grande" é uma expressão vaga, que depende de interpretação. Queremos entender melhor isso, explicitando o sentido de alguma grandeza real *tender a infinito ou a menos infinito*.

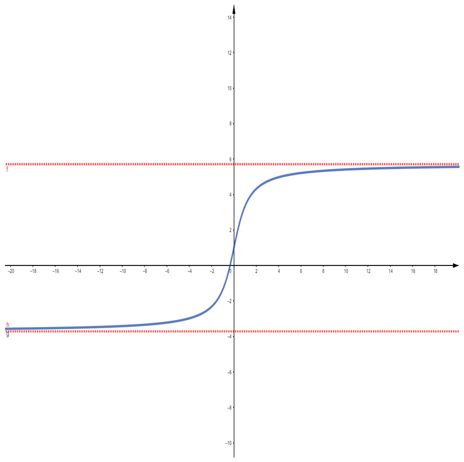


Figura 2: Quando x tende a mais ou menos infinito, $f(x)$ tende a uma constante.

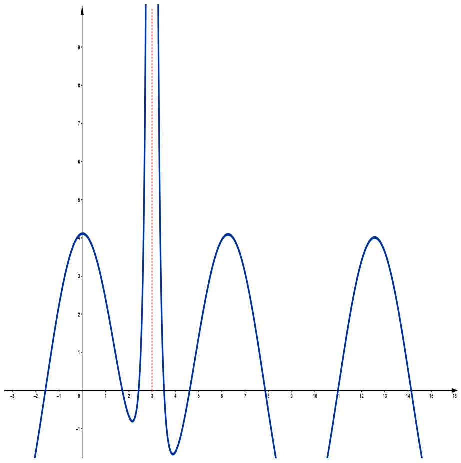


Figura 3: Quando $x \to 3$, $f(x)$ tende a infinito.

- Dizemos que alguma grandeza variável G em $\mathbb{R}$, tende a infinito (∞ ou $+\infty$) quando, para todo número $M > 0$, a partir de algum momento tenhamos $G > M$. Isto é, não importa o quanto o número M escolhido seja grande, a partir de algum instante, a grandeza G se torna maior do que M e assim permanece.

- Dizemos que alguma grandeza G em $\mathbb{R}$, tende a menos infinito ($-\infty$) quando, para todo número $M < 0$, a partir de algum momento, $G < M$. Isto é, não importa o quanto o número M escolhido seja grande no sentido negativo, a partir de algum momento, a grandeza G se torna menor do que M e assim permanece.

Destacamos aqui que "infinito" não é um número muito grande!!! Quando dizemos, por exemplo, que x tende a infinito ou $f(x)$ tende a infinito, não estamos usando o conceito de limite definido anteriormente. Ao contrário, se x tende a infinito, é porque x não está se aproximando de número algum, mas crescendo muito e superando definitvamente qualquer número real M. Portanto, o limite tal como foi definido na semana anterior não existe.

Nesse tópico, vamos subdividir o estudo em duas partes. Na primeira, a variável do domínio tende a ∞ ou $-\infty$ ($x \to \infty$ ou $x \to -\infty$). Na segunda, a imagem da função tende a infinito ($f(x) \to \infty$ ou $-\infty$).

2.1 Limites no infinito ($x \to \pm\infty$)

No tópico anterior, vimos o problema da pessoa que caminha de um ponto a outro. Ela caminha com uma regra determinada: a cada tempo, só pode caminhar metade da distância que falta para o ponto de chegada. O resultado, como discutido, é que ela se aproxima arbitrariamente do ponto de chegada. Mas nunca o atinge, mesmo não parando de caminhar. Lembramos da função $P(t)$, definida ali, e dizemos que o limite quanto t tende a infinito de $P(t)$ é B (ponto de chegada) ($\lim_{t\to\infty} P(t) = B$).

Conceitualmente, esse não é exatamente o mesmo tipo de estudo que discutimos na semana anterior. O fato de t não se aproximar de um valor determinado, mas crescer indefinidamente, faz com que o problema tenha que ser redefinido. A definição antes apresentada se modifica para:

Intuitivamente, diremos que *o limite quando x tende a infinito de uma função $f(x)$ existe e é igual a L*, um número real, se a distância entre $f(x)$ e L se tornar arbitrariamente pequena para x suficientemente grande.

Denotaremos isto escrevendo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Em matematiquês puro, a definição fica:

Definição 2.1 *Limite no Infinito*
Dizemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ *se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* M*, tal que se* $x > M$*,* $|f(x)-l| < \varepsilon$*.*

Tente estabelecer uma relação entre a definição 2.1 e a definição de limite apresentada no último tópico. O que existe de parecido? E de diferente? procure generalizar a definição para o caso em que x tende a menos infinito.

Sob o ponto de vista computacional, em um primeiro momento, a ideia é raciocinar com a intuição, com a ajuda de gráficos e/ou tabelas.

Exemplo 2.1 *Considere* $f(x) = \dfrac{1}{x^r}$*,* $x \neq 0$*. Se* $r \in \mathbb{R}$ *e* $r > 0$ *então:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Note que se $r > 0$ *então, quando* $x \to \infty$*,* x^r *cresce cada vez mais. Temos portanto um número fixo sendo dividido por valores cada vez maiores o que, evidentemente, se aproxima de* 0*. As figuras 4 e 5 ilustram o resultado.*

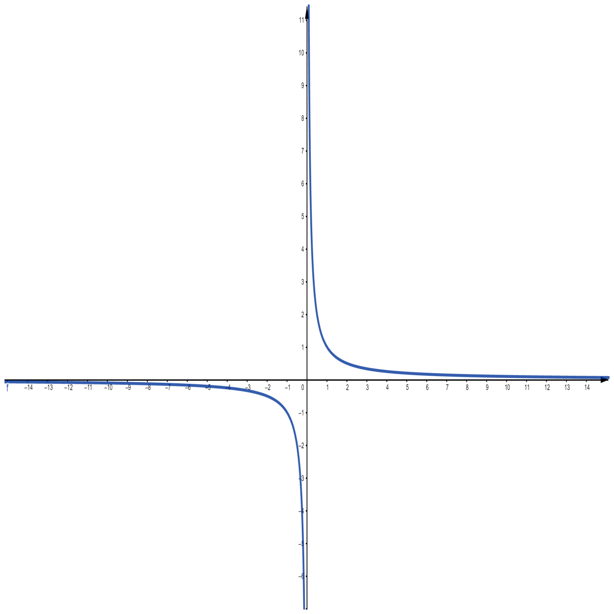


Figura 4: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

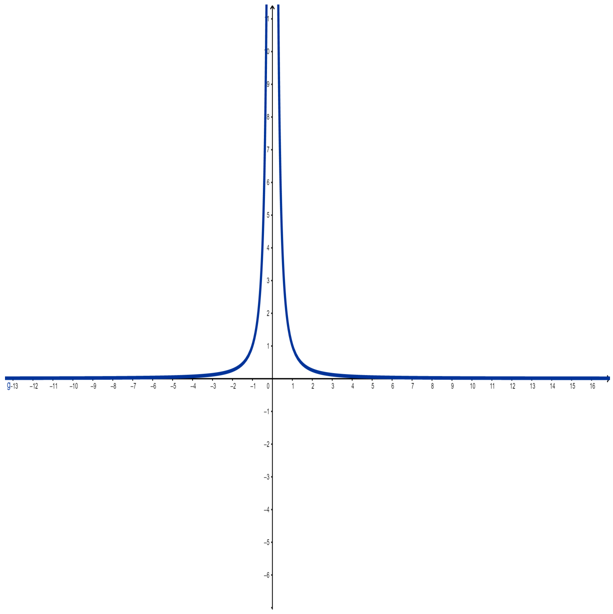


Figura 5: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Vale notar que, se $x \to -\infty$*,* $f(x)$ *também tende a* 0*, se o expoente* r *for tal que* x^r *é definido. Por exemplo, se* $r = 1/2$*, só podemos definir* $1/x^r$ *para valores positivos, de modo que não faria sentido estudar o limite em menos infinito.*

No estudo do limite, quando x tende a infinito, de funções mais simples (como polinômios, exponenciais, funções trigonométricas em geral) a intuição costuma ser suficiente. Todavia, quando lidamos com produtos ou quocientes podem surgir alguns problemas.

Exemplo 2.2 $f(x) = \dfrac{4x^3 + x}{x^3 - 1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. *Nesse caso, temos uma fração em que numerador e denominador crescem muito, quando $x \to \infty$. Uma maneira de analisar é dividir cada termo pelo monômio de maior grau no denominador (no caso x^3).*

$$f(x) = \frac{\dfrac{4x^3}{x^3} + \dfrac{x}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3} - \dfrac{1}{x^3}} \quad \text{se } x \neq 0$$

observe que essa divisão não pode ser feita em $x = 0$, mas isso não importa porque queremos estudar o limite no infinito (bem longe de 0). Como $\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x^3}$ tendem a 0 quando $x \to \infty$, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + x}{x^3 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^3}{x^3} + \dfrac{x}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3} - \dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 + \overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x^2}}}}{1 - \underset{}{\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x^3}}}}} = 4.$$

Esta situação é um exemplo de indeterminação do tipo $[\infty/\infty]$, que será visto com mais detalhes na Seção 2.4. Note que, ao escervermos $[\infty/\infty]$, não estamos dividindo, é apenas uma notação para indicar a indeterminação.

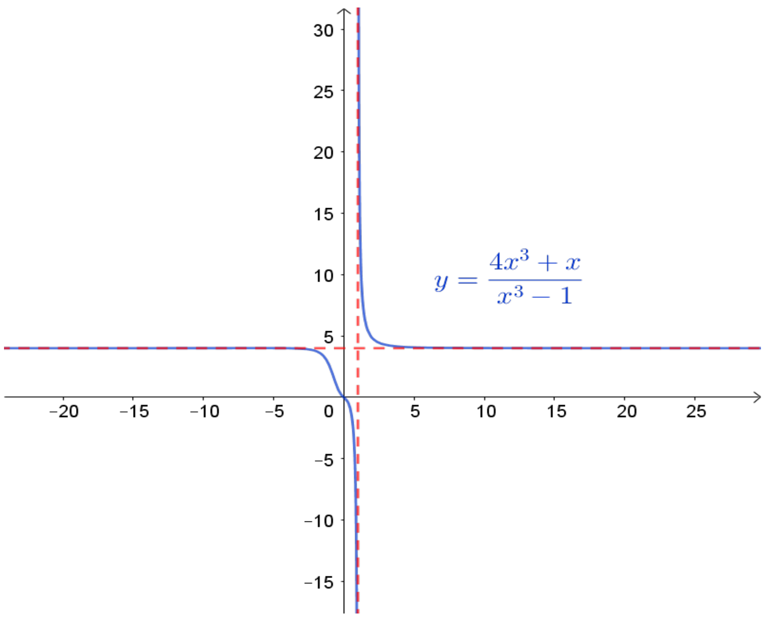


Figura 6: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 + x}{x^3 - 1} = 4$

Exemplo 2.3 *Um segundo exemplo interessante é $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$. Observe que o numerador varia entre -1 e 1. essencialmente, estamos dividindo um valor limitado por alguma coisa que está crescendo indefinidamente. A consequência é que a fração fica cada vez menor, se aproximando de 0, que é o valor do limite.*

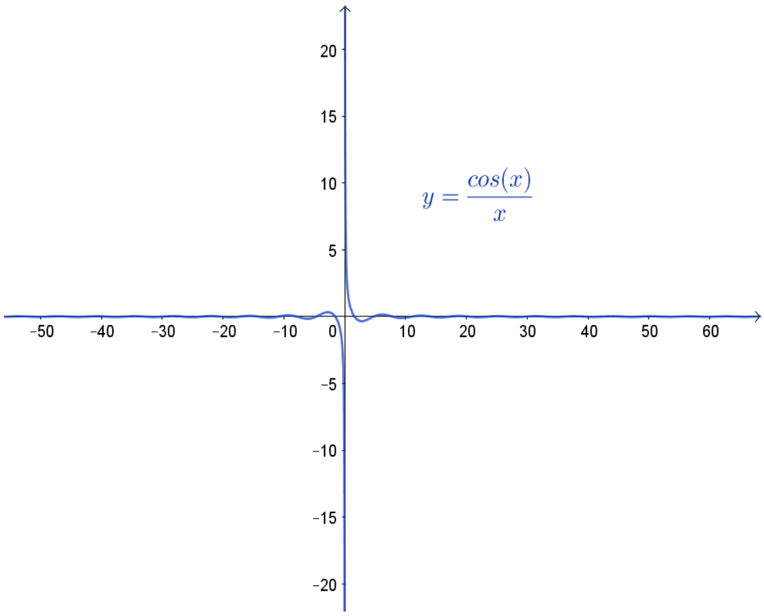


Figura 7: $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$

Este exemplo ilustra como o Teorema do Anulamento, estudado na semana passada, continua valendo quando $x \to \infty$. Neste caso, temos a função limitada $\cos(x)$ sendo multiplicada pela função $1/x$, que tende a 0 quando $x \to \infty$.

Observe o gráfico de $1/x$ na Figura 4. Tanto em ∞ quanto em $-\infty$, a função tende a zero. Entretanto há uma diferença na "maneira" com que $1/x$ se aproxima de 0, quando analisamos os casos $-\infty$ e ∞. Em infinito, $f(x)$ se aproxima de 0 só por valores positivos. Nesse caso, é comum escrever: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ e o sinal de $+$ no 0 é colocado justo para indicar que a aproximação só ocorre por valores positivos. Analogamente, se x tende a menos infinito, pode-se escrever $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ indicando que, nesse caso, $f(x)$ se aproxima de 0 por valores negativos. No entanto, o gráfico de $y = \frac{cos(x)}{x}$ tende a zero oscilando entre valores positivos e negativos, por conta da oscilação do cosseno.

Exemplo 2.4 *Considere* $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-5} - x$.
Analisando esse limite, vemos que $\sqrt{x^2-5}$ *e* x *crescem muito quando* x *cresce muito, porém temos uma diferença entre eles e não sabemos o que vai ocorrer. Então, estamos diante de uma nova indeterminação do tipo* $[\infty - \infty]$, *pois não sabemos determinar o limite com a função escrita desta forma (nem mesmo sabemos se existe o limite!). Um recurso possível aqui é multiplicar e dividir a função pelo conjugado* $\sqrt{x^2-5} + x$ *para tentar analisar o que acontece sem a raiz quadrada no numerador. Temos:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-5} - x &= \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-5} - x).\frac{\sqrt{x^2-5}+x}{\sqrt{x^2-5}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5-x^2}{\sqrt{x^2-5}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-5}{\sqrt{x^2-5}+x}
\end{aligned}$$

E temos um número dividido por algo que cresce indefinitamente (observe que $\sqrt{x^2-5}+x$ não é indeterminado, é a soma de duas funções que crescem indefinidamente, possuem o mesmo sinal!). Portanto, o limite vale 0.

Sob o ponto de vista gráfico, conforme discutido no vídeo, os limites no infinito, quando existem, dão origem às retas horizontais chamadas de ***assíntotas horizontais.*** Veremos mais detalhes sobre assíntotas na Seção 2.3.

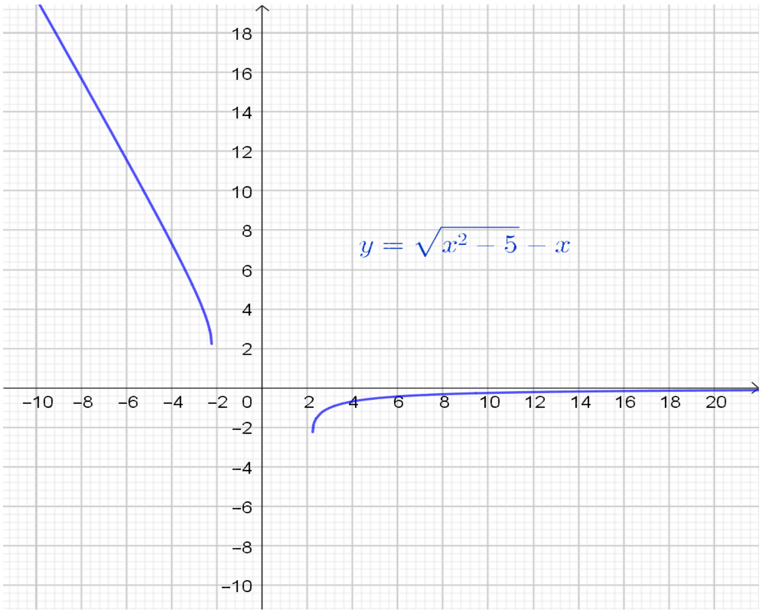


Figura 8: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-5}-x = 0$.

Observação: As *propriedades de operação* com limites de funções (que são números reais!), que vimos quando $x \to a$, continuam valendo para $x \to \pm\infty$. O *Teorema do Anulamento* também vale, com as devidas adaptações no enunciado.

Exemplo 2.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Nesse caso, $1/x$ *tende a zero , quando* $x \to \infty$, *portanto* $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Exemplo 2.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Nesse caso, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ *e* x *tende a* $+\infty$, *isso é outro tipo de indeterminação* $[0\cdot\infty]$*! Ou seja, não sabemos o que acontecerá com esse limite, a menos que façamos algum tipo de manipulação com a função. Assim, vamos trocar a variável, escrevendo* $u = \left(\frac{1}{x}\right)$, *onde* $u \to 0^+$, *pois* $x \to \infty$. *Logo,*

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1 \text{ (Limite trigonométrico Fundamental).}$$

Note que não podemos usar o Teorema do Anulamento, pois $y = x$ *não é limitada para* $x \to \infty$.

2.2 Limites Infinitos $(f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty)$

Uma segunda questão a ser analisada é que em determinadas circunstâncias, a imagem de uma função pode tender a infinito ou a menos infinito. Mais uma vez, o gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$ é uma boa referência. Quando x tende a 0^-, $f(x)$ tende a menos infinito e quando x tende a 0^+, $f(x)$ tende a infinito.

De um modo geral, números ou funções limitadas divididas por "alguma coisa" que tende a zero, tendem a infinito.

A razão pode ser percebida, por exemplo, na tabela em que a é um número real diferente de 0 sendo dividido a por valores cada vez mais próximos de 0.

$x \to 0^-$		$x \to 0^+$	
x	a/x	x	a/x
$-1/2$	$-2a$	$1/2$	$2a$
$-1/4$	$-4a$	$1/4$	$4a$
$-1/10$	$-10a$	$1/10$	$10a$
$-1/500$	$-500a$	$1/500$	$500a$
$-1/10^5$	-10^5a	$1/10^5$	10^5a

Exemplo 2.5 *A Figura 9 exibe o gráfico de $f(x) = \sec(x)$ que tende a ∞ em infinitos valores. Esse comportamento é consequência do fato do cosseno se anular em infinios valores.*

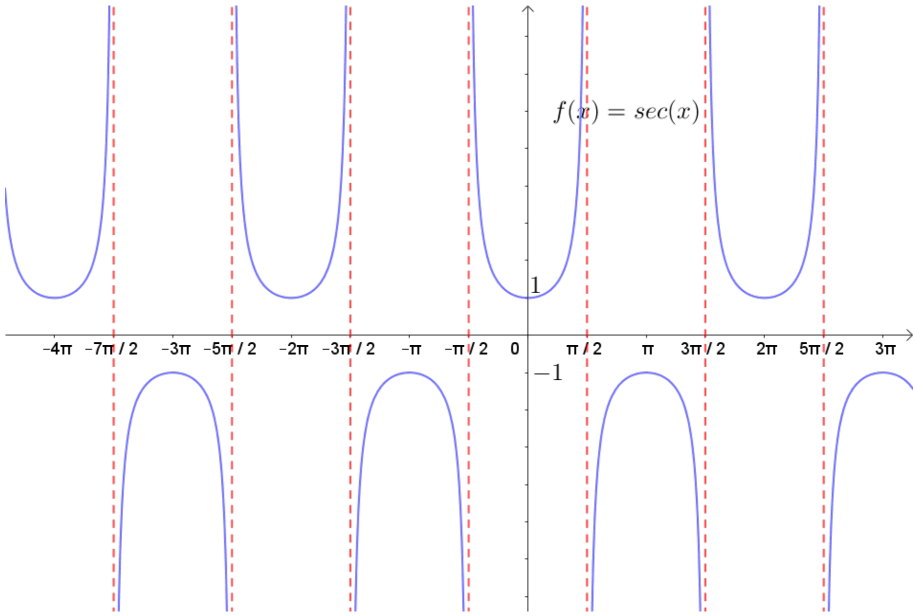


Figura 9: Gráfico de $f(x) = \sec(x)$.

Lembrando que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, sempre que $x \to \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, o valor de $\cos(x)$ tenderá a 0, o que fará com que $\sec(x) \to \infty$ ou $\sec(x) \to -\infty$, dependendo se $\cos(x) \to 0^-$ ou $\cos(x) \to 0^+$.

Quando uma função tende a infinito a medida em que x tende a um número finito a, pela esquerda ou pela direita, a reta $x = a$ é chamada *assíntota vertical*. Veremos mais exemplos na Seção 2.3.

Podemos lidar com operações entre funções com limites infinitos, ou que resultem em limites infinitos, de forma bem intuitiva, desde que tomando os cuidados com as indeterminações que veremos na próxima seção.

Denotaremos por $\pm\infty$ algo que possa ser lido tanto com $+\infty$ quanto com $-\infty$, ou que possa assumir apenas um dos casos, dependendo de uma análise mais cuidadosa de sinais.

Podemos então enunciar as seguintes propriedades:

Propriedades 2.1

i. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ *(o sinal do quociente depende dos sinais de* f *e* g *perto de* a*)*

ii. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ *(o sinal do quociente depende dos sinais de* f *e* g *perto de* a*)*

iii. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, *então* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *(pode ser* 0^- *ou* 0^+*, dependendo dos sinais de* f *e* g *perto de* a*)*

iv. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, *então* $\lim_{x\to a} -f(x) = -\infty$

v. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = L \neq 0$, *então* $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty$ *(o sinal do produto depende dos sinais de* f *e* g*)*

vi. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, *então* $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty$ *(Depende dos sinais de* f *e* g*)*

vii. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = L$, *então* $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \pm\infty$ *(o mesmo sinal de* f*)*

viii. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, *então* $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$

ix. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, *então* $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty$

x. *Se* f *é limitada e* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, *então* $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \pm\infty$.

Estes resultados continuam válidos quando trocamos $x \to a$ *por* $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to \infty$ *ou* $x \to -\infty$.

Exemplo 2.3 $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x}{|1 - x^3|}$.
Quando $x \to 1$, *temos* $e^x \to e$, $|1 - x^3| \to 0^+$ *(note que há um módulo). Assim,* $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x}{|1 - x^3|} = +\infty$.

Exemplo 2.4 $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
Podemos ver que o numerador tende a 1 *e o denominador a* 0*. Assim, teremos limite* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *e precisamos avaliar com cuidado os sinais. Com* x *próximo de 1, o numerador* x *será positivo. O denominador* $x^2 - 1$ *é uma expressão quadrática de raízes* -1 *e* 1*, portanto é negativa quando* $x \to 1^-$ *e positiva quando* $x \to 1^+$*. Assim,*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Exemplo 2.5 $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) \cdot \cos(x)$. *Quando* $x \to 0^+$, *temos* $\ln(x) \to -\infty$ *e* $\cos(x) \to 1$*. assim,* $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) \cdot \cos(x) = -\infty$.

2.3 Assíntotas

Já foi mencionado que, quando uma função tende a infinito quando x tende a um número finito a, pela esquerda ou pela direita, a reta $x = a$ é chamada *assíntota vertical*.

Isto signifca que o valor da função "explodirá" quando x se aproximar de a, como nos exemplos abaixo:

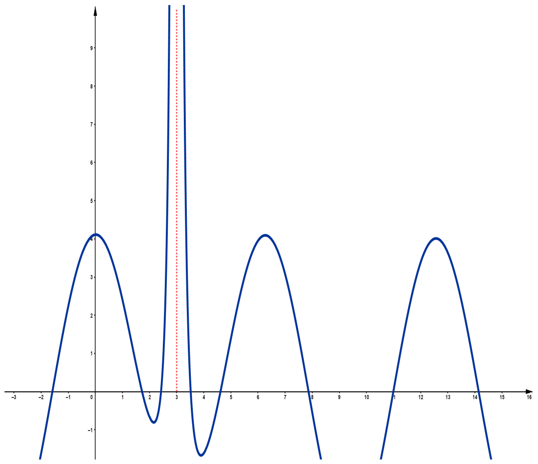


Figura 10: Quando $x \to 3$, $f(x)$ tende a ∞ ; $x = 3$ é assíntota vertical.

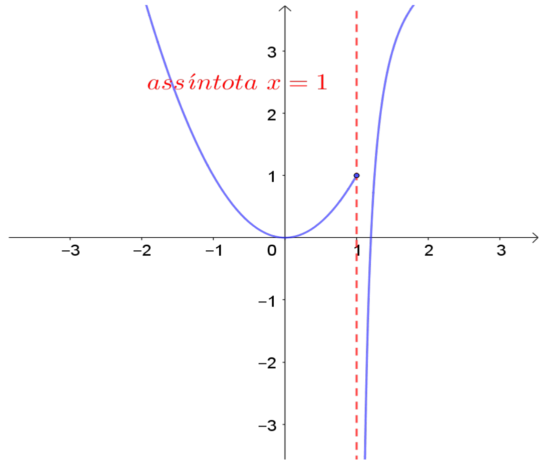


Figura 11: Quando $x \to 1^+$, $f(x)$ tende a $-\infty$; $x = 1$ é assíntota vertical.

De maneira mais precisa, definimos:

Definição 1 ***(Assíntotas verticais)*** *A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f se pelo menos um dos limites abaixo vale:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

É claro que, se $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, duas das condições acima (à esquerda e à direita) serão satisfeitas, logo teremos assíntota $x = a$.

Exemplo 2.6 $f(x) = 1/(x^2 - 3x + 2)$, $x \neq 1, 2$.

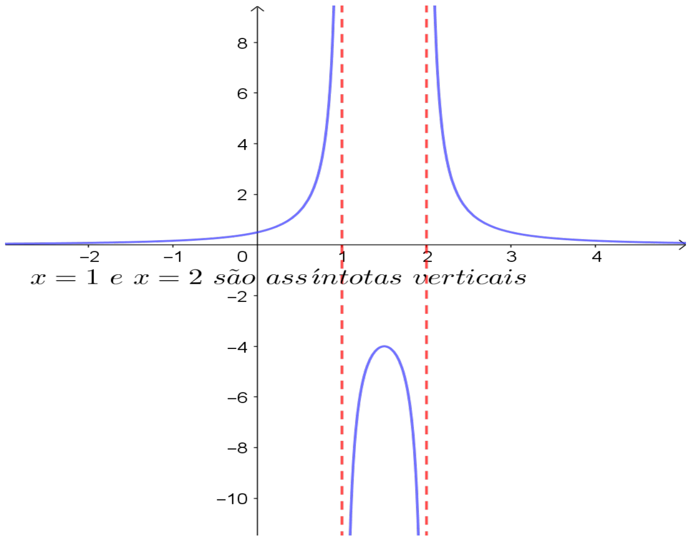


Figura 12: Quando $x \to 3$, $f(x)$ tende a ∞ ;
$x = 3$ é assíntota vertical.

Se a reta $x = a$ é uma assíntota da função f, não necessariamente o ponto a estará fora do domínio da função f.Veja, por exemplo, o gráfico da figura 2.6, onde $x = 1$ é assíntota vertical e $1 \in D(f)$.

Definição 2 ***(Assíntotas horizontais)*** *A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.*

No Exemplo 2.6, vemos que o gráfico possui uma assíntota horizontal, que é a reta $y = 0$. Em geral, um gráfico de uma função pode ter no máximo duas assíntotas horizontais distintas, uma para $+\infty$ e outra para $-\infty$. Porém, pode ter uma infinidade de assíntotas verticais, como acontece com os gráficos da tangente, secante, cotangente e cossecante.

Exemplo 2.7 *Determine as assíntotas do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ e encontre seu domínio. Observe que $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Vamos ver se existe alguma assíntota horizontal :*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1 \text{ e de forma análoga, } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Assim, há uma única assíntota horizontal, que é a reta $y = 1$.
Os únicos valores de x onde há a possibilidade de encontrarmos assíntotas verticais são $x = 1$ e $x = -1$, que são pontos fora do domínio, mas onde podemos calcular limite da f, pois podemos nos aproximar deles "sem sair do domínio" da f. Esses valores são candidatos a assíntotas verticais, mas devemos checar!

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty, \text{ logo } x = -1 \text{ será uma assíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \text{ logo } x = 1 \text{ também será uma assíntota vertical.}$$

Você poderá fazer os outros limites laterais, mas esses dois bastam para afirmarmos que $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais.

Vale a pena pensar qual seria a interpretação da presença de uma assíntota em algum gráfico de uma função que representasse algum problema. Isso vai depender do problema (discutimos alguns casos no video). Se a função descreve velocidade do vento, uma assíntota vertical pode significar perigo. Se descreve o comportamento da ação que você comprou na bolsa de valores, uma assíntota vertical pode significar que você vai ficar rico. Uma assíntota horizontal, em um gráfico que descreve temperatura no tempo, por exemplo, indica que houve uma estabilização.

2.4 Comentários sobre indeterminações

Nas Propriedades 2.1, vimos algumas regras de operação com limites infinitos. Nestas regras, era bastante intuitivo entender (e acreditar) o que se passava; de alguma forma, os infinitos envolvidos estavam "em uma mesma direção", como por exemplo a soma de dois limites $+\infty$ ou de dois limites $-\infty$, ou o produto de dois limites infinitos.

Um problema frequente aparece quando analisamos expressões que envolvem quocientes onde numerador e denominador tendem a ∞ ou a 0 (que é a mesma coisa, basta trocar f por $1/f$. Coisas como exponenciais sobre polinômios, ou mesmo quociente de polinômios onde o denominador se anula, exigem cuidado. Também teremos problema ao analisarmos uma expressão que tende a 0 multiplicando outra que tende a ∞, ou diferença entre expressões que tendem, ambas, a um ∞ com mesmo sinal.

Estas situações não possuem uma regra geral como as que vimos, e devem ser analisadas caso a caso. São as chamadas *indeterminações*.

Indeterminação $[\infty/\infty]$**:**

Suponha que $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to +\infty$, não podemos afirmar nada sobre $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Veja alguns exemplos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

Em todos os casos, numerador e denominador tendem a $+\infty$.

O Exemplo 2.2 lida com esta indeterminação. Os Exemplos 2.8, 2.9 e 2.10, abaixo, ampliam a discussão do Exemplo 2.2.

Indeterminação $[\infty - \infty]$**:**

Suponha que $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to +\infty$, não podemos afirmar nada sobre $(f(x) - g(x))$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - x\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(1 - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2\right) = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}} - 1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}((x+1)-x)=\lim_{x\to\infty}1=1$$

Em todos os casos, as duas parcelas da subtração tendem a $+\infty$.

O Exemplo 2.4 lida com esta indeterminação.

Indeterminação $[0\cdot\infty]$**:**

Suponha que $f(x)\to 0$ e $g(x)\to+\infty$, não podemos afirmar nada sobre $(f(x)\cdot g(x))$. Veja alguns exemplos:

$$\lim_{x\to 0^+}x^2\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot x=\lim_{x\to\infty}1=1$$

O Exemplo 2.2 lida com esta indeterminação.

Indeterminação $[0/0]$**:**

Este tipo de indeterminação foi muito visto na semana anterior, no caso em que $x\to a$. Se $f(x)\to 0$ e $g(x)\to 0$, nada pode ser dito sobre o limite do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$. Exemplos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to 0}2=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\text{ , que não existe}$$

Note que $[\infty/\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$ e $[0/0]$ não denotam divisão, subtração ou produto, são apenas formas de representarmos o comportamento ou tendência das funções envolvidas. Estas funções não são **iguais** a 0 ou ∞, elas apenas tendem a 0 ou a ∞.

Nas Propriedades 2.1, vimos que **não são indeterminações**: $[L/0]$, $[\infty/0]$, $[0/\infty]$, $[L/\infty]$, $[\infty\cdot\infty]$, $[\infty+\infty]$, $[-\infty-\infty]$, $[L+\infty]$ e $[L-\infty]$, onde $L\in\mathbb{R}$ é o limite de uma função.

Exemplo 2.8 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0}$ *(razão entre polinômios de mesmo grau, com* $x\to+\infty$

Vamos proceder como no Exemplo 2.2 e dividir numerador e denominador por x^n*:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{a_nx^n}{x^n}+\frac{a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}+...+\frac{a_1x}{x^n}+\frac{a_0}{x^n}}{\frac{b_nx^n}{x^n}+\frac{b_{n-1}x^{n-1}}{x^n}+...+\frac{b_1x}{x^n}+\frac{b_0}{x^n}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n + \cancelto{0}{\frac{a_{n-1}}{x}} + ... + \cancelto{0}{\frac{a_1}{x^{n-1}}} + \cancelto{0}{\frac{a_0}{x^n}}}{b_n + \cancelto{0}{\frac{b_{n-1}}{x}} + ... + \cancelto{0}{\frac{b_1}{x^{n-1}}} + \cancelto{0}{\frac{b_0}{x^n}}} = \frac{a_n}{b_n}.$$

O resultado se mantém para $x \to -\infty$.

Exemplo 2.9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0}$, *$m > n$ (razão entre polinômios com maior grau no numerador, com $x \to +\infty$*

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m \left(\frac{a_m x^m}{x^m} + \frac{a_{m-1}x^{m-1}}{x^m} + ... + \frac{a_1 x}{x^m} + \frac{a_0}{x^m}\right)}{x^n \left(\frac{b_n x^n}{x^n} + \frac{b_{n-1}x^{n-1}}{x^n} + ... + \frac{b_1 x}{x^n} + \frac{b_0}{x^n}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{m-n}\left(a_m + \cancelto{0}{\frac{a_{m-1}}{x}} + ... + \cancelto{0}{\frac{a_1}{x^{m-1}}} + \cancelto{0}{\frac{a_0}{x^m}}\right)}{b_n + \cancelto{0}{\frac{b_{n-1}}{x}} + ... + \cancelto{0}{\frac{b_1}{x^{n-1}}} + \cancelto{0}{\frac{b_0}{x^n}}}.$$

Este limite pode ser $+\infty$ ou $-\infty$, dependendo do sinal de $\frac{a_m}{b_n}$. Para $x \to -\infty$, precisaremos também levar em conta se o expoente $m - n$ deste último limite é par (caso no qual $x^{m-n} \to +\infty$) ou ímpar (caso no qual $x^{m-n} \to -\infty$).

Exemplo 2.10 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0}$, *$m < n$ (razão entre polinômios com maior grau no denominador, com $x \to +\infty$*

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m \left(\frac{a_m x^m}{x^m} + \frac{a_{m-1}x^{m-1}}{x^m} + ... + \frac{a_1 x}{x^m} + \frac{a_0}{x^m}\right)}{x^n \left(\frac{b_n x^n}{x^n} + \frac{b_{n-1}x^{n-1}}{x^n} + ... + \frac{b_1 x}{x^n} + \frac{b_0}{x^n}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m + \cancelto{0}{\frac{a_{m-1}}{x}} + ... + \cancelto{0}{\frac{a_1}{x^{m-1}}} + \cancelto{0}{\frac{a_0}{x^m}}}{x^{n-m}\left(b_n + \cancelto{0}{\frac{b_{n-1}}{x}} + ... + \cancelto{0}{\frac{b_1}{x^{n-1}}} + \cancelto{0}{\frac{b_0}{x^n}}\right)} = 0.$$

Não existe receita nem algoritmo para lidar com indeterminações. Teremos sempre que fazer alguma manipulação algébrica (colocando potências da variável em evidências, cancelando termos que se anulem, etc.) e tentar transformar a indeterminação em algum caso em que possamos aplicar as Propriedades 2.1 ou algum outro resultado, como Teoremas do Anulamento, Confronto, ou o Limite Trigonométrico Fundamental, por exemplo.

Os exemplos vistos mostram alguns algebrismos que podem ser úteis. Ao longo do texto, apresentamos também alguns recursos de cálculo que devem se somar a outros com a prática. Gráficos também podem ajudar bastante.

Existe ainda uma ferramenta que ajuda muito, conhecida como Regra de L'Hospital ou Teorema de L'Hospital, que será estudada mais tarde, mas não é uma solução mágica. O que é preciso é um tanto de prática. Veremos também que há outras indeterminações, como $[0^0]$, $[\infty^0]$ e $[1^\infty]$.

3 Teorema do Confronto

Nesta seção, iremos rever o que foi apresentado no vídeo **Teorema do Confronto**, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=zsuIQ3jhakU. O principal resultado que estudarems nos fornece um meio de determinar o limite de uma função "espremida" entre outras duas, que possuem limites iguais.

Exemplo 3.1 *Calcular o limite* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) + x^3(1+\cos(10x))}{x}$, *caso exista.*

Solução: Observe que, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen}(x) + x^3(1+\cos(10x))}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + \frac{x^3(1+\cos(10x))}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + x^2(1+\cos(10x))$$

Assim, fazendo

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + x^3(1+\cos(10x))}{x},$$

para todo $x \neq 0$, teremos

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + x^2(1+\cos(10x)).$$

Observe que a função cos é limitada, assumindo valores no intervalo $[-1, 1]$. Assim, $-1 \leqslant \cos(10x) \leqslant 1$, temos $0 \leqslant 1 + \cos(10x) \leqslant 2$, e, portanto

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 2x^2.$$

Definindo, para todo $x \neq 0$,

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x},$$

$$h(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 2x^2,$$

teremos, para $x \neq 0$,

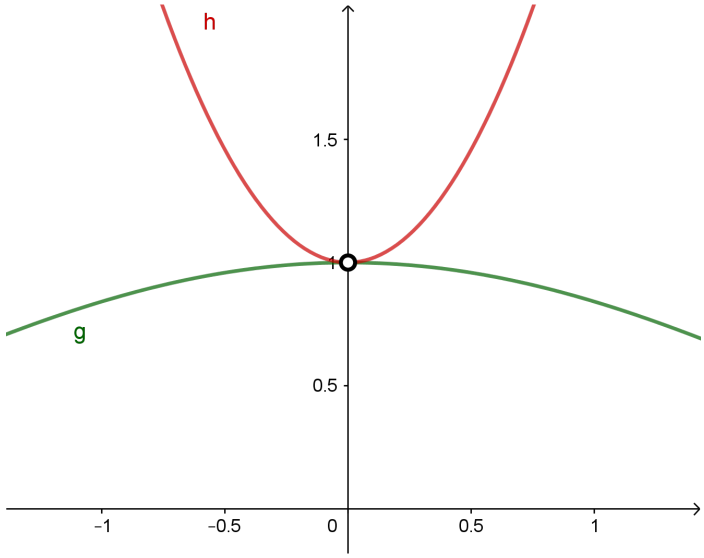
$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x).$$

Vamos agora calcular, caso existam, os limites de g e h com x tendendo a 0. Temos

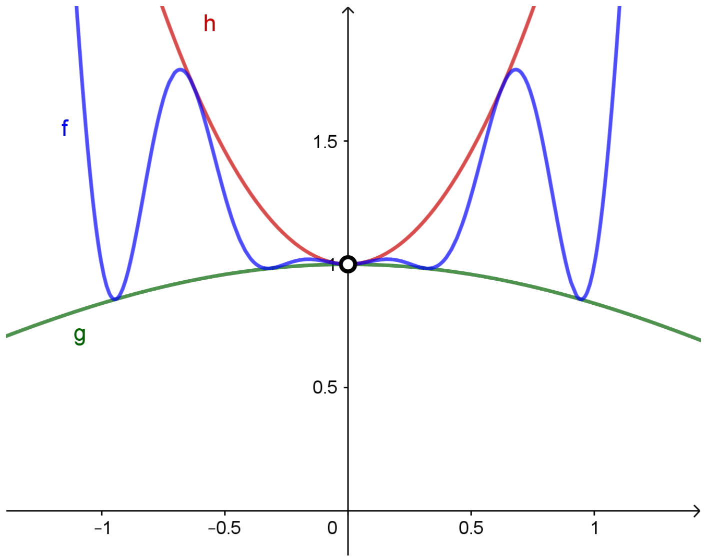
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 2x^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + \lim_{x\to 0} 2x^2 = 1 + 0 = 1.$$

Assim, g e h têm o mesmo limite 1 quando x tende a 0.



Mas lembre-se de que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ para todo $x \neq 0$. Assim, a função f terá seu gráfico compreendido entre os gráficos de g e h, como mostrado abaixo.



É razoável acreditarmos que

$$\lim_{x\to 0} g(x) \leqslant \lim_{x\to 0} f(x) \leqslant \lim_{x\to 0} h(x),$$

e, como $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 1$, teremos

$$1 \leqslant \lim_{x\to 0} f(x) \leqslant 1,$$

logo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

3.1 Teorema do Confronto

O que nos pareceu intuitivo no exemplo anterior é garantido pelo Teorema que enunciamos abaixo.

Teorema 4 (Teorema do Confronto) *Sejam f, g e h três funções definidas próximas de $a \in \mathbb{R}$, mas que não precisam estar definidas em a, isto é, definidas em $(a-r, a) \cup (a, a+r)$, para algum $r > 0$. Se*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

para todo $x \in (a-r, a) \cup (a, a+r)$, e

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

então

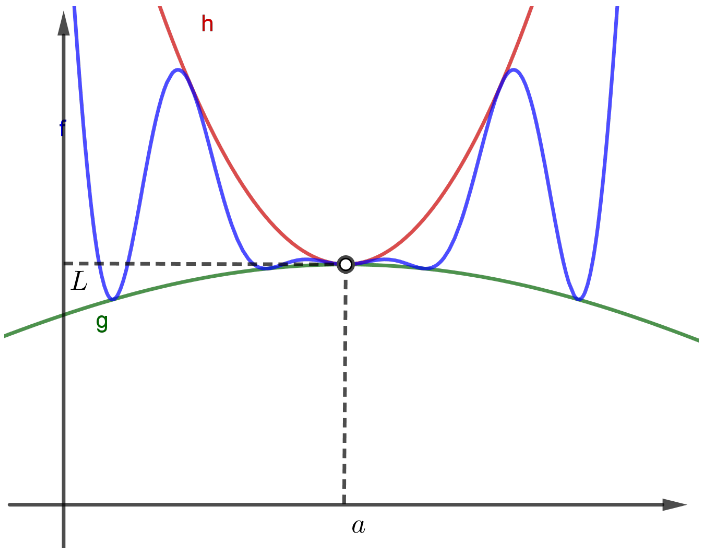
$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Vamos entender o enunciado deste Teorema. Primeiro, temos três funções f, g e h tais que

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

para todo x próximo a $a \in R$, mas não importando o que aconteça para $x = a$. Na verdade, as funções nem precisam estar definidas em $x = a$. Agora, suponha que as funções g e h tenham o mesmo limite L quando x tende a a, isto é,

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

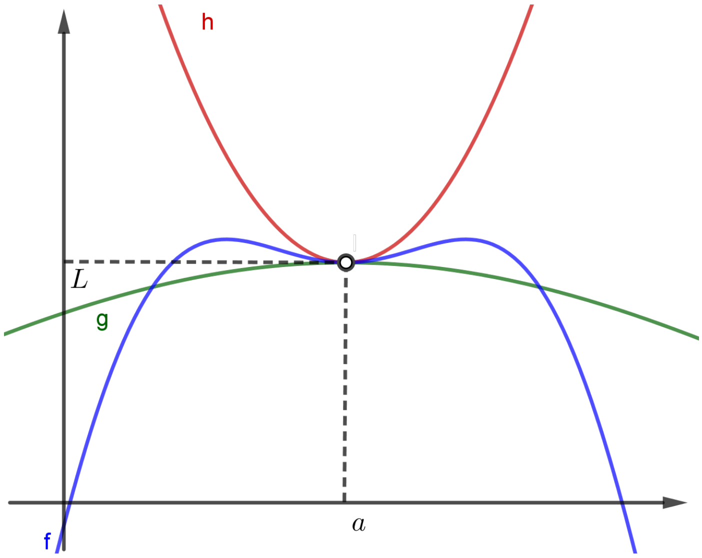


Isto significa que, perto de $x = a$, as funções g e h estão "espremendo" a função f, fazendo com que ela tenha, também, o mesmo limite L em $x = a$, isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

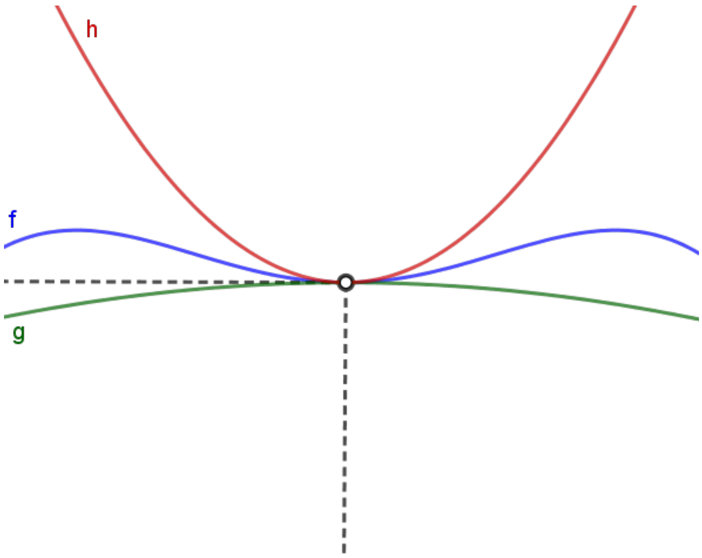
No esboço que acabamos de apresentar, parece que temos $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, para todo $x \neq a$.

Isto não precisa acontecer para podermos chegar à conclusão do Teorema. Veja o esboço abaixo:



Neste esboço, claramente não é verdade que $g(x) < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{a\}$. De fato, se nos afastarmos de $x = a$, podemos ver que o valor de $f(x)$ é menor que $g(x)$.

Porém, lembre-se de que, para limites, o importante é o que acontece perto do ponto onde estamos estudando o limite. Neste caso, se nos restringirmos a valores próximos a $x = a$, como no esboço abaixo, a condição $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ será satisfeita; observe:

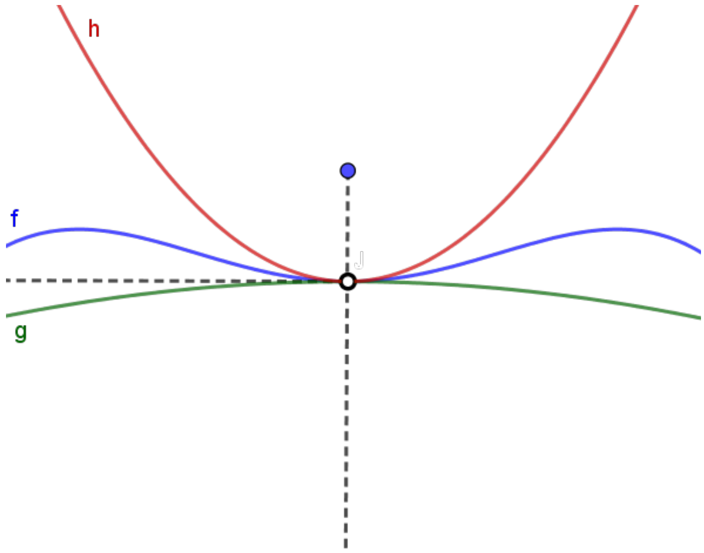


Teremos, de acordo com o Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Há um outro ponto que precisamos destacar. Você deve se lembrar de que, para a existência e para o cálculo do $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, o valor que $f(a)$ é absolutamente irrelevante. Na verdade, este valor sequer precisa estar definido. Isto se aplica também ao Teorema do Confronto. Releia o enunciado e veja que fizemos questão de destacar que as funções precisam estar definidas perto de $x = a$, mas não necessariamente em $x = a$. Além disso, a condição $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ também só foi exigida para todo x perto de a com $x \neq a$. Se esta condição vale ou não vale em a, é absolutamente irrelevante para a conclusão do

Teorema. Observe o esboço abaixo:



Repare que temos todas as condições satisfeitas:

$$\begin{cases} g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), x \text{ próximo de } a, x \neq a \\ \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L \end{cases}$$

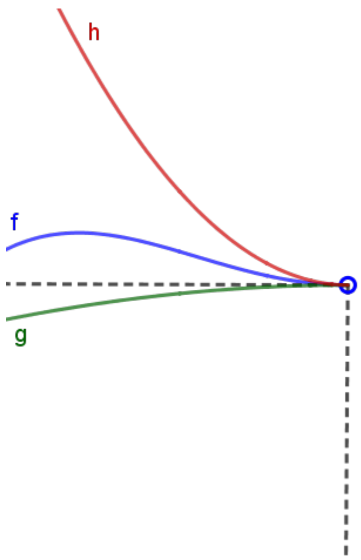
Portanto, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Uma divertida (eu pelo menos acho divertida!) observação sobre o Teorema do Confronto é que ele também é bastante (mesmo!) conhecido como **Teorema do Sanduíche**. Este nome é muito sugestivo do que acontece, uma vez que temos as funções g e h ensanduichando a função f. Observe, porém, que este sanduíche de funções deve ter sido comprimido em $x = a$, a ponto de as fatias g e h encontrarem.

3.2 Outras versões do Teorema do Confronto

Considere a situação do esboço abaixo,

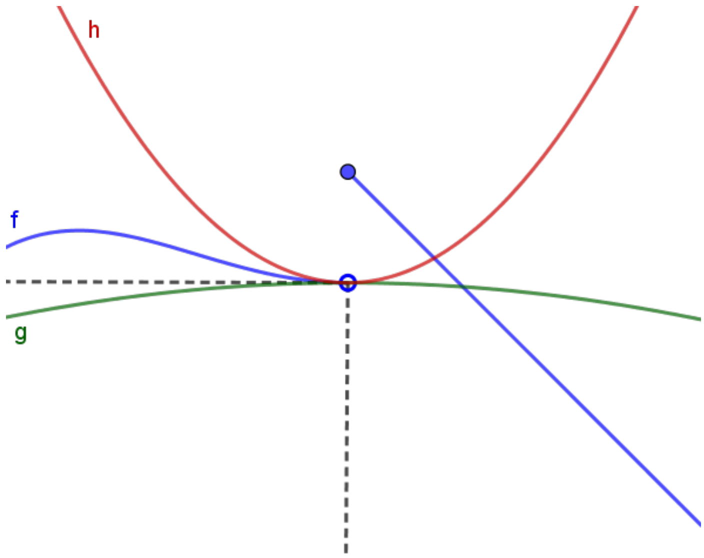


isto é, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, para todo x próximo de a, com $x < a$, e $\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^-} h(x) = L$.

A mesma intuição que nos faz acreditar no Teorema do Confronto que apresentemos anteriormente também nos permite concluir que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Esta seria uma versão "à esquerda" do Teorema do Confronto. Não temos a menor ideia do que acontece à direita de $x = a$. Poderíamos até ter uma situação como abaixo:



Mas, se restringirmos nosso estudo ao que acontece à esquerda de $x = a$, o limite $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ estaria garantido.

Temos então a seguinte versão "lateral" do Teorema:

Teorema 5 (Teorema do Confronto à esquerda) *Sejam f, g e h funções definidas para todo x próximo à esquerda de a, ou seja, para $x \in (a-r, a)$, para algum $r > 0$. Se*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

para todo $x \in (a-r, a)$, e

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^-} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Fizemos questão de repetir, no enunciado do Teorema, que a desigualdade só precisa valer "para todo x próximo a a com $x < a$". Isto porque, mais uma vez, só importa o que acontece perto e à esquerda de $x = a$.

Analogamente, podemos enunciar uma versão "à direita":

Teorema 6 (Teorema do Confronto à direita) *Sejam f, g e h funções definidas para todo x próximo à direita de a, ou seja, para $x \in (a, a+r)$, para algum $r > 0$. Se*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

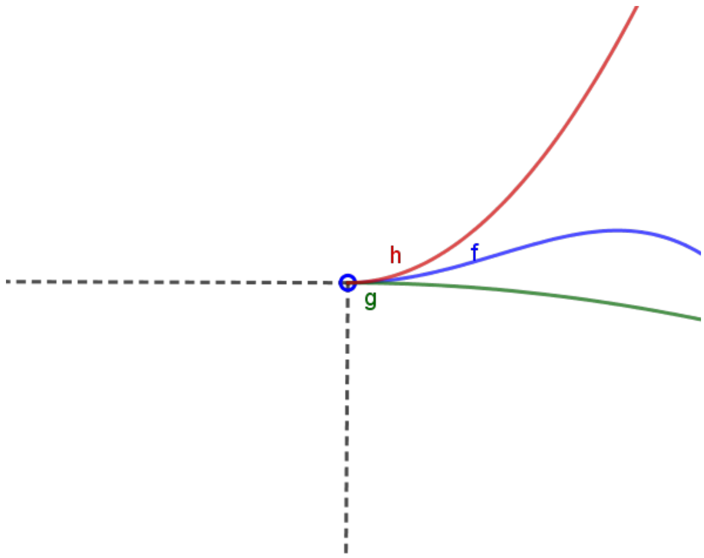
para todo $x \in (a, a+r)$, *e*

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

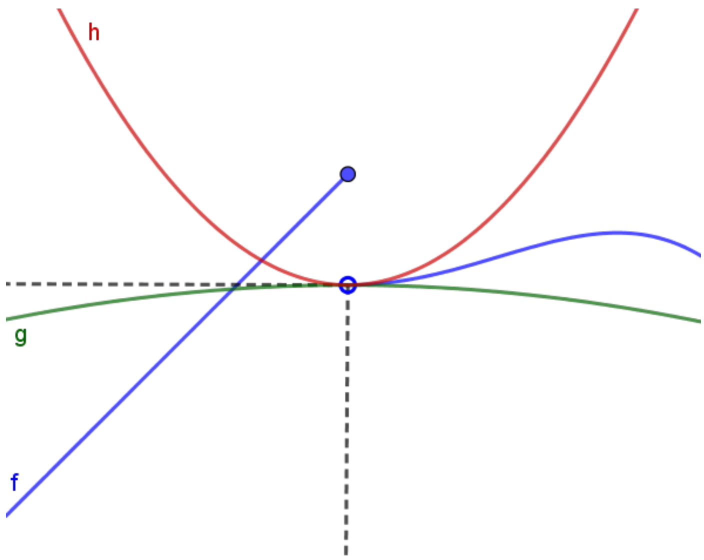
O esboço abaixo ilustra bem o que este Teorema significa:



É fácil acreditarmos que, nas condições do Teorema anterior,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Poderíamos ter algo como a figura abaixo:



Repare que ainda assim, vale que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$. O que acontece à esquerda de $x = a$ não está sendo discutido nesta versão "á direita" do Teorema.

Podemos ainda extrapolar as conclusões do Teorema do Confronto para o caso de limites no infinito. Vejamos um exemplo antes de enunciarmos mais verões do Teorema.

Exemplo 3.2 *Calcular o limite* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 2 + \text{sen}(x)}{3x^3 - 1}$, *caso exista.*

Solução: Inicialmente, veja que temos sempre

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}(x) \leqslant 1,$$

logo

$$2x^3 + 3x^2 - 10x + 1 \leqslant 2x^3 + 3x^2 - 10x + 2 + \operatorname{sen}(x) \leqslant 2x^3 + 3x^2 - 10x + 3.$$

Escolhendo um x suficientemente grande, podemos garantir que $3x^3 - 1 > 0$. Assim, dividindo as desigualdades acima por $3x^3 - 1$, temos

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 1}{3x^3 - 1} \leqslant \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 2 + \operatorname{sen}(x)}{3x^3 - 1} \leqslant \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 3}{3x^3 - 1}.$$

(Precisamos garantir, de alguma forma, que $3x^3 - 1 > 0$ pois, do contrário, ao dividir as desigualdades por $3x^3 - 1 > 0$, o sinal $\leqslant$ poderia se inverter... se lembra?)

Fazendo

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 2 + \operatorname{sen}(x)}{3x^3 - 1},$$
$$g(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 1}{3x^3 - 1},$$
$$h(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 3}{3x^3 - 1},$$

temos então

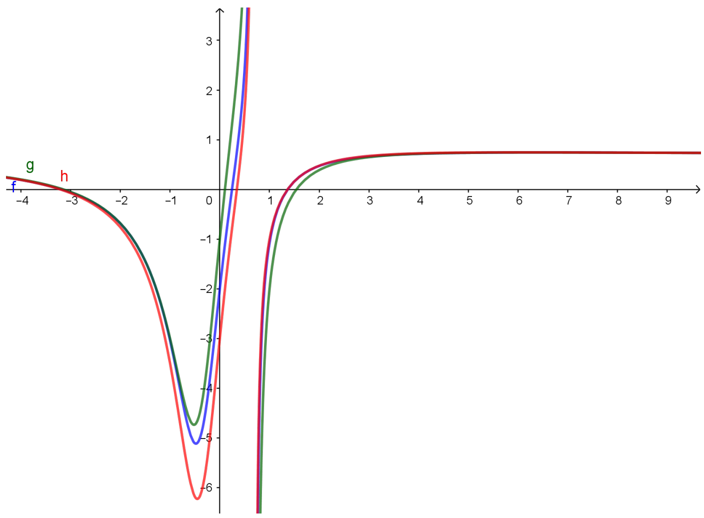
$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

para todo x grande o suficiente. Além disso,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 1}{3x^3 - 1} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 10x + 3}{3x^3 - 1} = \frac{2}{3}.$$

Vamos agora esboçar os gráficos de f, g e h, apenas para tentar ilustrar um pouco a situação. O gráfico de f está em azul, e os gráficos de g e h estão em verde e vermelho, respectivamente.



Observe o que acontece se nos concentramos em x positivo e grande o suficiente (com $3x^3 - 1 > 0$):

Nesta parte observada do esboço, e daqui para $x \to +\infty$, vimos acima que

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \frac{2}{3}.$$

É fácil acreditar que o gráfico de f será "espremido" pelos de g e h, que estão se aproximando da reta $y = \dfrac{2}{3}$ (a assíntota horizontal). Com isso, teremos claramente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{3}.$$

Esta intuição é garantida pelo

Teorema 7 (Teorema do Confronto no infinito positivo) *Sejam f, g e h funções definidas para todo $x > K$, onde K é um número real grande o suficiente. Se*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

para $x > K$, e

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Uma versão equivalente pode ser definida para o caso em que $x \to -\infty$:

Teorema 8 (Teorema do Confronto no infinito negativo) *Sejam f, g e h funções definidas para todo $x < K$, onde K é um número real negativo o suficiente. Se*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

para $x < K$, e

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Exemplo 3.1 *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que, para $x \neq -2$,*

$$-x^2 + x + 2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$

Calcule $\lim_{x \to -2} f(x)$, se existir.

Solução: *Temos*

$$\lim_{x\to -2} -x^2 + x + 2 = -(-2)^2 + (-2) + 2 = -4$$

e

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x-2) = -4.$$

Assim, como $-x^2 + x + 2 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^2-4}{x+2}$*, temos pelo Teorema do Confronto,*

$$\lim_{x\to -2} f(x) = -4.$$