GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA 1
Cálculo 1A - 2020.1

Introdução às funções
Funções pares e ímpares
Transformação de gráficos

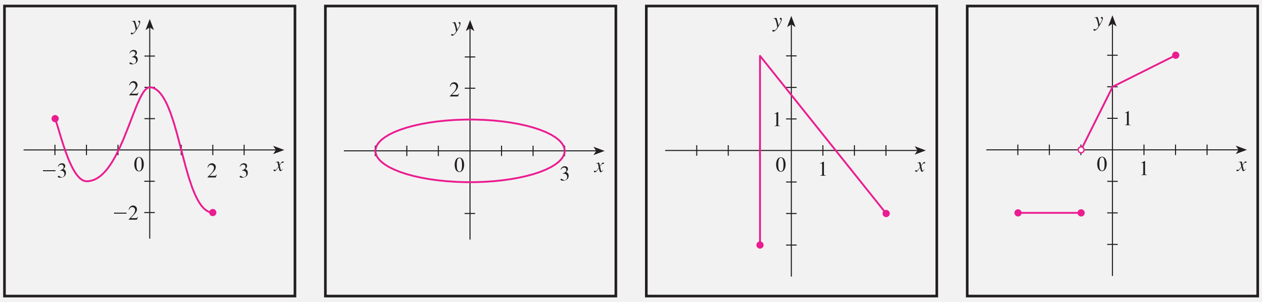
Exercício 1

Determine o domínio das funções abaixo:

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2x^2 + x - 1}{4 - x^2}}$;
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{3x^2 + 4x - 1}}{5 - 2x}$;
3. $f(t) = \dfrac{\frac{1}{t}}{t^3 - 2t^2}$;
4. $g(s) = \dfrac{s}{\sqrt[3]{s - 1}} + \sqrt{16 - s^4}$.

Exercício 2

Para cada uma das figuras abaixo, determine se a curva dada é o gráfico de uma função de x. Se for o caso, obtenha o domínio e a imagem da função.



Exercício 3

A equação $x - y^4 = 0$ define uma curva no plano.

1. Esboce a curva e determine x como função de y;
2. A curva é gráfico de uma função de x?
3. Quais as funções de x que podem ser usadas para descrever toda a curva? Identifique-as na curva.

Exercício 4

Considere uma janela normanda, cujo formato é de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo.

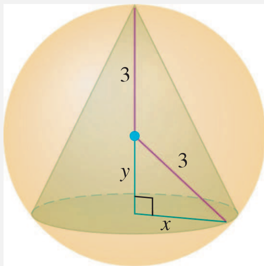
1. Se o perímetro da janela for de 8 m, expresse sua área como função da largura.
2. Determine as dimensões que a janela deve ter para que sua área assuma o maior valor possível.

Exercício 5

Uma caixa com tampa, em formato de paralelepípedo de base quadrada, deve ter volume 1000 cm^3. Determine a área total desta caixa em função da medida ℓ de cada aresta da base.

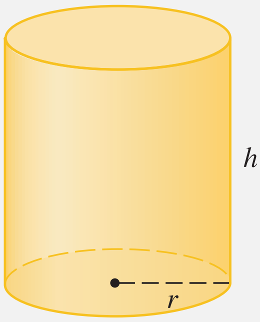
Exercício 6

Determine uma função (sua lei de associação e o seu domínio) que expresse o volume de um cone circular reto que pode ser inscrito em uma esfera de raio 3 m em termos da altura deste cone.



Exercício 7

Um fabricante deseja construir um recipiente, na forma de um cilindro circular reto, que deverá armazenar 1000 cm^3 de óleo (o recipiente possui as tampas circulares). O custo de produção do recipiente é medido pela área total do recipiente. Determine uma função real (sua lei de associação e o seu domínio) que expresse o custo de produção em termos do raio r da base circular do cilindro medida em cm.



Use o GeoGebra para fazer o gráfico da função e, por meio deste gráfico, responda:

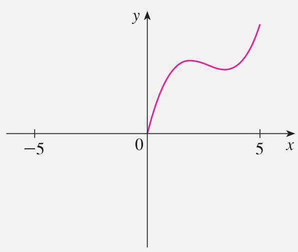
1. É possível gerar um cilindro com custo igual a 500?
2. É possível gerar um cilindro com custo igual a 1000? De quantas maneiras diferentes?

Exercício 8

1. Se o ponto $(5, 3)$ estiver no gráfico de uma função par, que outro ponto também deverá estar no gráfico?
2. Se o ponto $(5, 3)$ estiver no gráfico de uma função ímpar, que outro ponto também deverá estar no gráfico?

Exercício 9

Uma função tem o domínio $[-5, 5]$ e uma parte de seu gráfico é mostrada na figura a seguir.



1. Complete o gráfico de f sabendo que f é uma função par.
2. Complete o gráfico de f sabendo que f é uma função ímpar.

Exercício 10

Para cada item a seguir, determine se f é par, ímpar, nenhum dos dois ou os dois ao mesmo tempo.

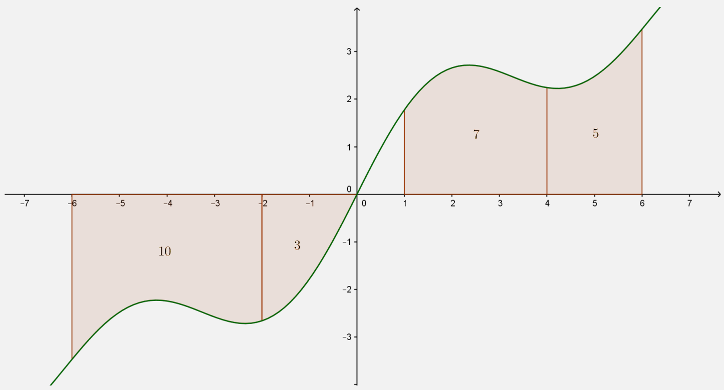
1. $y = f(x) = x^{-2}$, $x \neq 0$.
2. $y = f(x) = x^{-3}$, $x \neq 0$.
3. $y = f(x) = x^4 - 4\,x^2$, $x \in \mathbb{R}$
4. $y = f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.
5. $y = f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
6. $y = f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.
7. $y = f(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
8. $y = f(x) = |x| + x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
9. $y = f(x) = |x| + x$, $x \in \mathbb{R}$.
10. $y = f(x) = x|x| + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 11

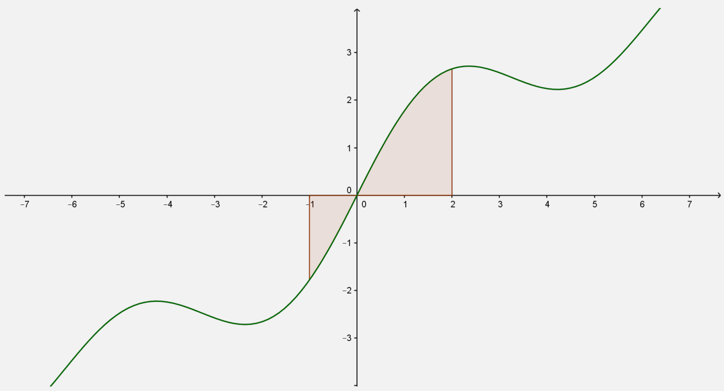
Verdadeiro ou falso? Se f é uma função par, então f *não é* uma função ímpar. Justifique sua resposta!

Exercício 12

No gráfico da função ímpar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representado abaixo, os números representam as áreas destacadas.



Qual é a área representada abaixo?



Exercício 13

Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa.

1. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par, então $f + g$ é par.
2. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f + g$ é par.
3. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f + g$ é ímpar.
4. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f + g$ é par.
5. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f + g$ é ímpar.

Exercício 14

Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa.

1. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par, então $f \cdot g$ é par.
2. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f \cdot g$ é par.
3. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f \cdot g$ é ímpar.
4. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f \cdot g$ é par.
5. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, então $f \cdot g$ é ímpar.

Exercício 15

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer. Defina

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

1. Mostre que $f = g + h$, que g é uma função par e que h é uma função ímpar.
2. Determine as funções g e h para o caso em que f é uma função par.
3. Determine as funções g e h para o caso em que f é uma função ímpar.

Exercício 16

Sabemos a imagem de alguns pontos das funções f e g conforme a tabela abaixo:

x	-2	-1	1	2	3	5
$f(x)$	2	1	0	2	-1	-1
$g(x)$	2	5	3	-2	0	1

Calcule, se possível, $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(3)$, $(g \circ f)(5)$, $(f \circ f)(-2)$, $(g \circ g)(5)$.

Exercício 17

Sejam $f(x) = 5x - 2$ e $g(x) = x^2 + f(x)$. Calcule $(f \circ g)(2)$.

Exercício 18

Para cada um dos itens abaixo calcule $(f \circ g)(x)$ e o $D(f \circ g)$.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ e $g(x) = x + 1$;
2. $f(x) = \sqrt{x - 2}$ e $g(x) = x^2 - 2$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{x + 5}$ e $g(x) = x^3 - 5$;

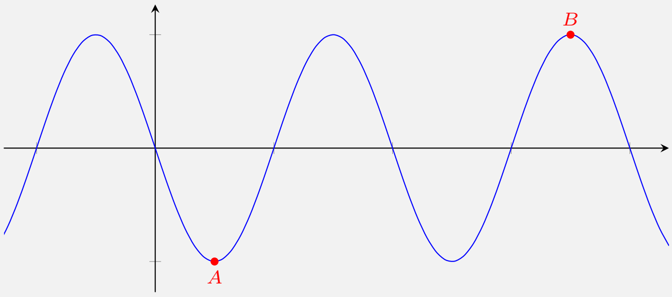
Exercício 19

Considere uma função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 5$ se, e somente se, $x > 3$.

1. Determine o domínio da função definida por $g(x) = f(x^2 - 1)$.
2. Determine o domínio da função definida por $h(x) = \sqrt{5 - g(x)}$.

Exercício 20

Na figura abaixo está representado o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3\,\mathrm{sen}(2x)$. Quais são as coordenadas dos pontos A e B.

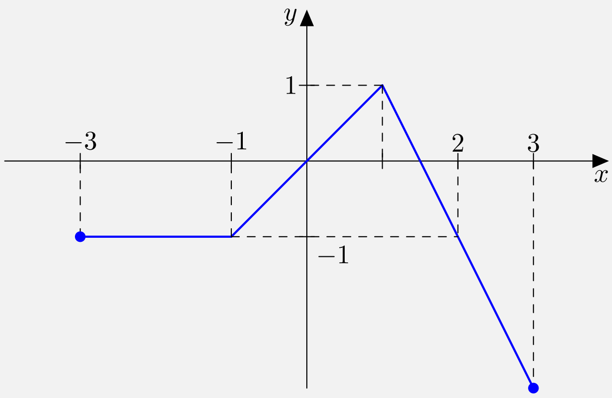


Exercício 21

O ponto $(2, \pi)$ pertence ao gráfico de $y = f(x)$. Indique as coordenadas do ponto correspondente, após fazermos a tranformação $y = |2f(x + 5) - 10|$.

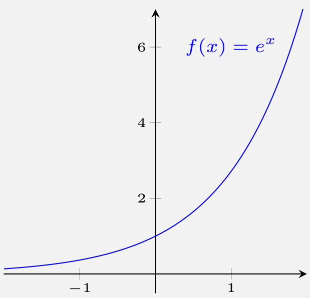
Exercício 22

A figura abaixo representa o gráfico da função g. Faça um esboço do gráfico da função $y = g(2x)$.



Exercício 23

Faça um esboço dos gráficos das funções abaixo, a partir dos gráfico da função $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.



1. $g(x) = -1 + 2e^x$
2. $h(x) = 1 - e^{|x|}$

Exercício 24

Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Se deslocarmos o gráfico de f três unidades para a esquerda, uma unidade para cima e refletirmos em relação ao eixo y, obtemos o gráfico da função g. Qual a expressão de g?

Solução do Exercício 1

1. Devemos ter $\dfrac{-2x^2+x-1}{4-x^2} \geq 0$, portanto vamos fazer o produto dos sinais entre o numerador e o denominador:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$-2x^2+x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\dfrac{-2x^2+x-1}{4-x^2}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

Logo, $D(f) = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

2. Devemos ter $5-2x \neq 0$, ou seja $x \neq 5/2$ e além disso, $3x^2+4x-1 \geq 0$, pois a raiz é par. Observando que as raízes de $3x^2+4x-1=0$ são

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$$

e que a parábola associada a $y = 3x^2+4x-1$ possui concavidade voltada para cima, temos que

$$3x^2+4x-1 \geq 0 \iff x \leq \frac{-2-\sqrt{7}}{3} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{-2+\sqrt{7}}{3}.$$

Assim,

$$D(f) = \left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, 5/2\right) \cup (5/2,+\infty).$$

3. Devemos ter $t \neq 0$ e $t^3-2t^2 \neq 0$. Mas, $t^3-2t^2 = t^2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0$ ou $t-2=0 \Leftrightarrow t=0$ ou $t=2$. Portanto, $t \neq 0$ e $t \neq 2$. Assim, $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0,2\}$.

4. A raiz do denominador é ímpar, portanto está bem definida para qualquer número real. Mas, como está no denominador, não pode se anular, logo $s-1 \neq 0$, ou seja $s \neq 1$. A segunda raiz é par, logo devemos ter $16-s^4 \geq 0$. Vamos fatorar essa última expressão e estudar seu sinal: $16-s^4 = (4-s^2)(4+s^2)$, onde $(4+s^2) > 0, \forall s \in \mathbb{R}$, logo o sinal depende do sinal de $4-s^2$. Como $4-s^2 \geq 0 \Leftrightarrow s \in [-2,2]$, segue que $16-s^4 \geq 0 \Leftrightarrow s \in [-2,2]$. Consequentemente, $D(f) = [-2,1) \cup (1,2]$.

Solução do Exercício 2

Fig 1 (da esquerda para a direita): Sim, a curva é gráfico de uma função que depende de x. O domínio da função é o conjunto $[-3,2\ ]$ e sua imagem é o conjunto $[-2,2]$.

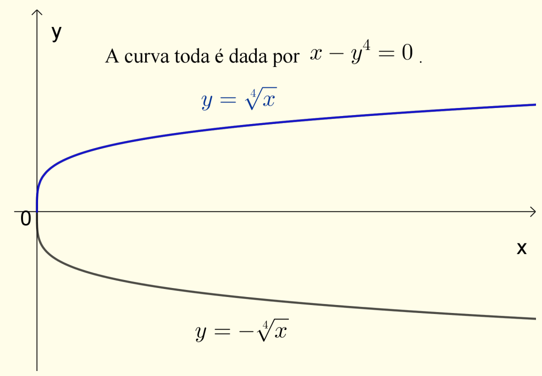
Fig 2: Não, a curva não é gráfico de uma função que depende de x, pois a reta vertical $x=0$ intersecta a curva em dois pontos. Na verdade, qualquer reta vertical $x=k$, onde $-3<k<3$ também intersecta a curva em dois pontos.

Fig 3 : Não, a curva não é gráfico de uma função que depende de x, pois a reta $x=-1$ intersecta a curva em mais de um ponto (na verdade, em infinitos pontos).

Fig 4: Sim, a curva é gráfico de uma função que depende de x. O domínio da função é o conjunto $[-3,2\ ]$ e sua imagem é o conjunto $\{-2\} \cup (0,3]$.

Solução do Exercício 3

1. Da equação, temos $x = y^4$ e o esboço da curva está abaixo no item (c), a curva é formada pelos dois arcos em preto e azul.
2. Não, temos que os valores possíveis para y são $y = \sqrt[4]{x}$ ou $y = -\sqrt[4]{x}$, ou seja, a cada valor de $x \geq 0$, há dois valores de y associados.
3. A parte superior da curva (veja a figura) pode ser descrita como o gráfico da função $y = \sqrt[4]{x}$, para $x \geq 0$ (cor azul). A parte inferior, $y = -\sqrt[4]{x}$, para $x \geq 0$ (cor preta). Essas duas funções descrevem toda a curva.



Solução do Exercício 4

1. Sejam x a largura da janela e y a altura da parte retangular (veja figura abaixo), então o raio r do semicírculo é igual a $r = x/2$ e portanto o perímetro da janela será a soma $x+2y$ acrescida do comprimento da metade da circunferência de raio $x/2$, ou seja,

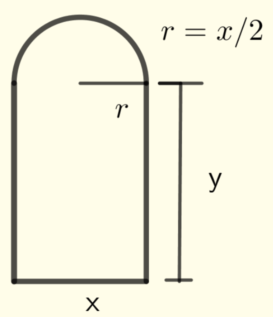
$$2P = x + 2y + \pi r = x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = \frac{(2+\pi)x}{2} + 2y.$$

Mas, o perímetro é igual a 8 m, logo temos

$$8 = \frac{(2+\pi)x}{2} + 2y \quad \Longrightarrow \quad y = 4 - \frac{(2+\pi)x}{4},$$

que é a a expressão de y em função da largura $x > 0$. Agora, vamos expressar a área A da janela em função de x. Sabemos que $A = xy + \dfrac{\pi r^2}{2}$, logo substituindo r e y em fução de x, teremos

$$A = 4x - \frac{(2+\pi)x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} \quad \Longrightarrow \quad A(x) = -x^2\left(\frac{4+\pi}{8}\right) + 4x, \quad x > 0.$$



2. Note que $A(x)$, obtida no item (a) é uma função quadrática com coeficiente do termo quadrático negativo e, portanto, a concavidade é voltada para baixo. Sendo assim, o vértice

$$x_v = -\frac{4}{-\frac{4+\pi}{4}} = \frac{16}{4+\pi} > 0$$

é um ponto onde a área assume seu valor máximo. Logo, a largura da janela de área máxima é igual a $\dfrac{16}{4+\pi}$ e a altura da parte retangular será igual a

$$y = 4 - \frac{(2+\pi)}{4}\frac{16}{(4+\pi)} = 4 - \frac{8+4\pi}{(4+\pi)} = \frac{16+4\pi-(8+4\pi)}{4+\pi} = \frac{8}{4+\pi}.$$

A altura total da janela será igual a $y + x/2 = \dfrac{8}{4+\pi} + \dfrac{16}{2(4+\pi)} = \dfrac{16}{4+\pi}$.

Solução do Exercício 5

Seja h a altura da caixa, então seu volume é igual a $h\ell^2$, mas é dado que o volume é igual a 1000, portanto $1000 = h\ell^2 \Rightarrow h = \dfrac{1000}{\ell^2}$. Logo, a área total da caixa em função de ℓ é dada por $A = 2\ell^2 + 4\ell h = 2\ell^2 + 4\ell\dfrac{1000}{\ell^2} \Rightarrow$ $A(\ell) = 2\ell^2 + \dfrac{4000}{\ell}$, para $\ell > 0$.

Solução do Exercício 6

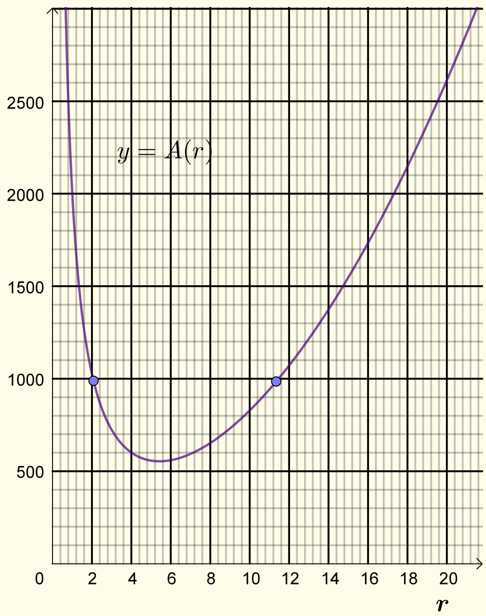
Observando a figura do enunciado, temos que a altura do cone é dada por $h = y + 3$ $(0 < y < 3)$ e o volume do cone é igual a $V = \dfrac{\pi x^2 h}{3}$. Queremos escrever x em função de h para podermos expressar V em função somente de h. Por Pitágoras, temos $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + (h-3)^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 - (h-3)^2 = 9 - (h^2 - 6h + 9) = -h^2 + 6h$. Logo, temos $V(h) = \dfrac{\pi(-h^2 + 6h)h}{3} \quad \Rightarrow V(h) = \dfrac{\pi h^2}{3}(6 - h), 0 < h < 6$.

Solução do Exercício 7

A área total do recipiente é dada por $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ e precisamos escrever h em função de r para que A seja função somente do raio r. Pelo dado do problema, $V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$ e portanto, temos que

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0.$$

Gráfico com o GeoGebra:



1. Observe que o custo é medido pela área (quanto vai gastar de material) . Traçando o gráfico de $A(r)$ no plano ry e a reta $y = 500$, observamos que não existe interseção entre os dois, o que significa que 500 não pertence à imagem de A, para $r > 0$, ou seja, $A(r)$ é diferente de 500 para todo $r > 0$. Assim, *não* é possível gerar um cilindro com custo igual a 500.

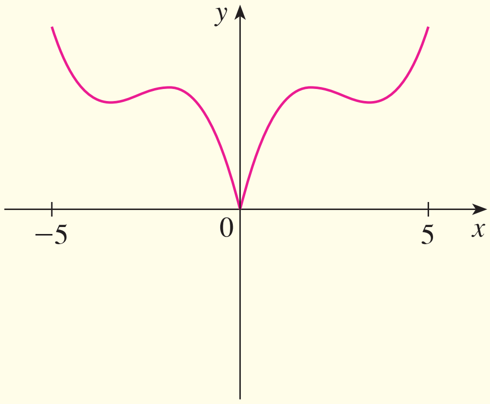
2. Traçando o gráfico de $A(r)$ no plano ry e a reta $y = 1000$, observamos que existem 2 interseções entre os dois gráficos, o que significa que há 2 valores do raio que estão associados ao custo de 1000 ($r_1 \approx 2, r_2 \approx 11$). Portanto, há duas maneiras diferentes de construir um recipiente cilíndrico com o custo de 1000.

Solução do Exercício 8

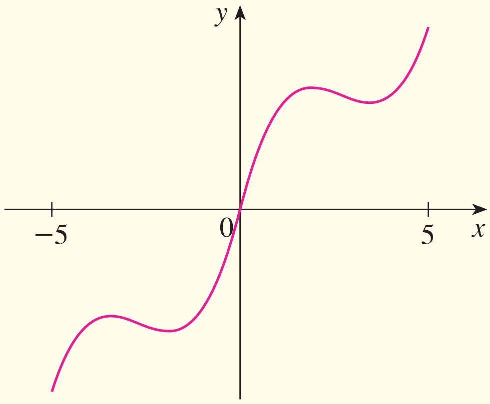
1. $(-5, 3)$
2. $(-5, -3)$.

Solução do Exercício 9

1. Sabendo que f é uma função par, seu gráfico será simétrico em relação ao eixo y. Portanto, o gráfico da f fica assim:



2. Sabendo que f é uma função ímpar,seu gráfico será simétrico em relação à origem. Portanto, o gráfico da f fica assim:



Solução do Exercício 10

1. f é par, pois $f(-x) = (-x)^{-2} = x^{-2} = f(x)$, $\forall x \neq 0$.
2. f é ímpar, pois $f(-x) = (-x)^{-3} = -x^{-3} = -f(x)$, $\forall x \neq 0$.
3. f é par, pois $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. f é ímpar, pois $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 - (-x) = -(x^3 - x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
5. f é par e ímpar, pois $f(-x) = 0 = f(x)$ e $f(-x) = 0 = -0 = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
6. f é par, pois $f(-x) = 1 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
7. f não é par e nem ímpar. De fato, para $x = -1$, temos $f(-1) = 3(-1)^3 + 2(-1)^2 + 1 = -3 + 2 + 1 = 0$, porém $f(1) = 6$. Assim, $f(-1) \neq f(1) = 6$ e $f(-1) \neq -f(1) = -6$.
8. f é par, pois $f(-x) = |-x| + (-x)^2 + 1 = |x| + x^2 + 1 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
9. f não é par e nem ímpar. De fato, para $x = -1$, temos $f(-1) = |-1| + (-1) = 1 - 1 = 0$, porém $f(1) = 2$. Assim, $f(-1) \neq f(1) = 2$ e $f(-1) \neq -f(1) = -2$.
10. f é ímpar, pois $f(-x) = (-x)|-x| + (-x)^3 = -x|x| - x^3 = -(x|x| + x^3) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução do Exercício 11

Falso! Como contraexemplo, considere a função nula $y = f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que f é par e ímpar ao mesmo tempo. (Veja exercício anterior!)

Solução do Exercício 12

Como a função é ímpar, a área do gráfico entre -6 e 0 será igual à área entre 0 e 6, que é $10+3=13$. Assim, como a área entre 1 e 6 é $5+7=12$, a área entre 0 e 1 será $13-12=1$. Com isso, a área entre -1 e 0 será 1. A área entre 0 e 2 será igual a área entre -2 e 0, que é 3, portanto a área da figura será igual à soma $1+3=4$.

Solução do Exercício 13

1. Verdadeira. De fato, $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois f e g são pares.
2. Falsa. Podemos usar como contraexemplo $f(x) = 2$, $g(x) = x$, a soma $f+g$ não é par. Basta ver que $(f+g)(-2) = 0$ e $(f+g)(2) = 4$.
3. Falsa. O mesmo contraexemplo anterior serve, a soma não é ímpar.
4. Falsa. Podemos usar como contraexemplo a função constante igual a zero $f(x) = 0$ e $g(x) = x$, a soma $(f+g)(x) = x$ não é par.
5. Verdadeira. De fato, $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Solução do Exercício 14

1. Verdadeira. De fato, $(f\cdot g)(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot g(x) = (f\cdot g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois f e g são pares.
2. Falsa. Tome $f(x) = 1$ e $g(x) = x^3$, então o produto $f(x)\cdot g(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, não sendo par.
3. Verdadeira. De fato, $(f\cdot g)(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)\cdot g(x) = -(f\cdot g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois f é par e g é ímpar.
4. Verdadeira. $(f\cdot g)(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = (-f(x))\cdot(-g(x)) = f(x)\cdot g(x) = (f\cdot g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois f e g são ímpares.
5. Falsa. Tome $f(x) = g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, o produto $f(x)g(x) = x^2$ não é ímpar.

Solução do Exercício 15

1. Somando
$$g(x)+h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Note que,
$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Portanto, g é par. Analogamente,
$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
o que mostra que h é ímpar.
2. Quando a f é par, temos que a g será a própria f e h será nula.
3. Quando a f é ímpar, temos que a h será a própria f e g será nula.

Solução do Exercício 16

$(f \circ g)(2) = 2$, não dá para determinar $(f \circ g)(3)$ com as informações dadas, $(g \circ f)(5) = 5$, $(f \circ f)(-2) = 2$, $(g \circ g)(5) = 3$.

Solução do Exercício 17

$f(g(2)) = f(4 + f(2)) = f(4 + 8) = f(12) = 58$

Solução do Exercício 18

(a) $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$, $D(f \circ g) = \mathbb{R}$;

(b) Começamos com o domínio: g está definida para todo x real, mas a $D(f) = [2, +\infty)$, logo devemos determinar os valores de x, tais que $g(x) \in [2, +\infty)$. Devemos resolver a inequação $g(x) \geq 2$ para determinarmos o domínio da composta $f \circ g$. Mas, $x^2 - 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ou $x \geq 2$. Assim, $D(f \circ g) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. De posse do domínio, vamos determinar a expressão da composta: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $\forall x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$;

(c) A função g está definida para todo x real e a f também, pois a raiz tem índice ímpar. Portanto, $D(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x \in D(f \circ g) = \mathbb{R}$.

Solução do Exercício 19

1. Como $D(f) = [0, +\infty)$, x deve ser, tal que $x^2 - 1 \geq 0$, portanto devemos ter $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Logo, $D(g) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

2. Devemos ter $x \in D(g)$ e $5 - g(x) \geq 0$. Mas, $5 - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5 - f(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x^2 - 1) \leq 5 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Assim, pelo item anterior, $x \in D(g) \cap [-2, 2] = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

Solução do Exercício 20

Primeira solução: O ponto A está associado à imagem -3 da função e ocorre no menor valor positivo de x, mas $-3\,\mathrm{sen}(2x) = -3$ quando $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Portanto, ocorre quando $k = 0$, assim $A = \left(\frac{\pi}{4}, -3\right)$. O ponto B está associado ao segundo valor positivo de x onde a imagem da função é igual a 3, mas $-3\,\mathrm{sen}(2x) = 3$ quando $2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$. Portanto, ocorre quando $k = 1$, assim $B = \left(\frac{7\pi}{4}, 3\right)$.

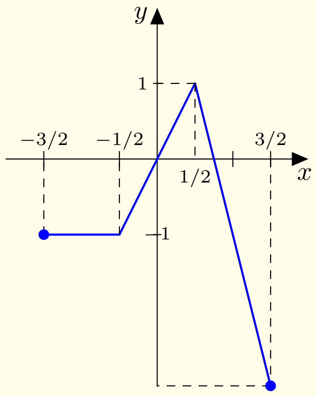
Segunda solução: O ponto A é resultado das transformações do ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$ sobre o gráfico de $y = \mathrm{sen}(x)$. Fazendo uma **compressão horizontal de um fator 2**, temos $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, com **alongamento vertical de um fator 3**, obtemos $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$. Finalmente, **refletindo em torno do eixo x**, chegamos ao ponto $A = \left(\frac{\pi}{4}, -3\right)$.
O ponto B é resultado das transformações do ponto $(\frac{7\pi}{2}, -1)$ sobre o gráfico de $y = sen(x)$. Seguindo as mesmas transformações anteriores, chegamos a $B = \left(\frac{7\pi}{4}, 3\right)$.

Solução do Exercício 21

A partir do gráfico da f foram feitas as seguintes transformações: translação de 5 unidades para a esquerda; alongamento vertical de um fator 2; translação vertical de 10 unidades para baixo ; Modulação(nessa ordem). Assim, aplicando essas transformações ao ponto $(2, \pi)$, obtemos $(-3, \pi) \to (-3, 2\pi) \to (-3, 2\pi - 10) \to (-3, 10 - 2\pi)$, pois $|2\pi - 10| = 10 - 2\pi$. O ponto correspondente é $(-3, 10 - 2\pi)$.

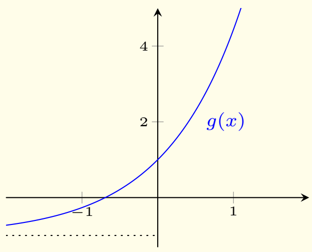
Solução do Exercício 22

O gráfico de $y = g(2x)$ é obtido fazendo no gráfico da g uma compressão horizontal de um fator 2:

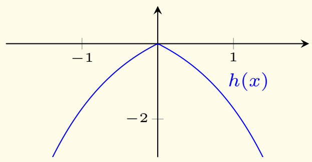


Solução do Exercício 23

1. Fazemos um alongamento vertical de um fator 2 (obtemos $y = 2e^x$), seguido de uma translação vertical de 1 unidade para baixo (obtemos $y = 2e^x - 1$):



2. A exponencial é composta com módulo de x (nesse passo, a parte do gráfico de e^x, para $x \geq 0$ é refletida em torno do eixo y e juntando, obtemos o gráfico de $y = e^{|x|}$), depois refletimos em torno do eixo x (nesse passo temos $y = -e^{|x|}$, finalmente aplicamos uma translação vertical de 1 unidade para cima (obtemos $y = 1 - e^{|x|}$).



Solução do Exercício 24

Seguindo os passos na ordem dada no enunciado, temos $y = f(x+3) = \sqrt{x+3} \to y = \sqrt{x+3} + 1 \to g(x) = 1 + \sqrt{3-x}$. Logo, $g(x) = 1 + \sqrt{3-x}$, $x \leq 3$.