



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**PROCESSOS ESTOCÁSTICOS DE
LONGA DEPENDÊNCIA COM
PARÂMETRO FRACIONÁRIO
VARIANDO NO TEMPO**

Dissertação de Mestrado

MARCUS ALEXANDRE NUNES

Porto Alegre, 21 de julho de 2008.

Dissertação submetida por Marcus Alexandre Nunes como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr^a. Sílvia Regina Costa Lopes

Banca Examinadora:

Dr. Aluísio de Souza Pinheiro

Dr. Artur Oscar Lopes

Dr. Cleber Bisognin

Dr. Rafael Rigão Souza

Data da Defesa: 21 de julho de 2007.

*Do or do not.
There is no try.*

Yoda

Agradecimentos

Aos meus pais e irmão, por tudo.

À Silvia Lopes, minha orientadora, pela oportunidade, orientação, apoio e paciência.

Aos demais professores do PPG-MAT.

Aos bolsistas do LCPM, pelo auxílio e amizade.

Aos meus principais amigos: Cássio, Daniel, Gerson, Gian, Giuliano, Juliane e Lucas, pelos agradáveis momentos de diversão.

À Mariane, minha noiva.

Resumo

Neste trabalho analisamos processos de longa dependência com parâmetro fracionário variando no tempo. Estes processos exibem dois comportamentos de longa dependência distintos: até uma certa observação k , o parâmetro de longa dependência do processo tem valor $d^{(1)}$. A partir da observação $k + 1$, este parâmetro assume um valor $d^{(2)}$. Propomos neste trabalho um estimador para localizar o ponto de mudança de regime k . Apresentamos simulações de Monte Carlo para as estimações dos parâmetros k , $d^{(1)}$ e $\delta = d^{(2)} - d^{(1)}$.

Abstract

In this work we analyze long memory processes with fractional parameter varying in time. These processes show two long memory behaviors: until a certain observation k , the fractional parameter of the process has $d^{(1)}$ value. From the observation $k + 1$, this parameter takes the $d^{(2)}$ value. In this work we propose an estimator to locate the regime-change point k . We present Monte Carlo simulations for estimation of the parameters k , $d^{(1)}$ and $\delta = d^{(2)} - d^{(1)}$.

Sumário

1	Introdução	1
2	Noções Preliminares de Processos Estocásticos	3
3	Modelos para Séries Temporais	14
3.1	Processos ARMA(p, q)	15
3.2	Processos ARIMA(p, d, q)	16
3.3	Processos ARFIMA(p, d, q)	17
3.3.1	Processos ARFIMA(p, d, q) Não-Estacionários	21
4	Estimação em Processos ARFIMA	23
4.1	Estimador \hat{d}_{MV}	23
4.2	Estimador \hat{d}_{LW}	26
4.3	Estimador \hat{d}_{GPH}	29
4.4	Estimador \hat{d}_{GPHBa}	31
4.5	Estimador \hat{d}_{KP}	32
4.6	Estimação em Processos ARMA	33
4.7	Dois Exemplos de Análise de Séries Temporais	36
5	Mudança de Regime	47
5.1	Longa Dependência Espúria	48
5.2	Mudança de Regime	55
5.2.1	Mudança na Média	55
5.2.2	Mudança no Parâmetro de Diferenciação Fracionária	70
6	Simulações	72
6.1	Caso Estacionário	74
6.2	Caso Não-Estacionário	104
6.3	Caso Misto	135
6.4	Conclusões Obtidas a Partir das Simulações	166
7	Aplicação	174

8	Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos	182
8.1	Conclusões	182
8.2	Propostas para Futuros Trabalhos	184
	Apêndice A	191
A.1	Caso Estacionário	192
A.2	Caso Não-Estacionário	222
A.3	Caso Misto	253

Capítulo 1

Introdução

Processos estocásticos com característica de longa dependência têm aparecido bastante freqüentemente na literatura de séries temporais. Há quase três décadas, desde os trabalhos de Granger e Joyeux (1980), Hosking (1981) e Hosking (1984), este tipo de processo estocástico tem sido bastante estudado.

Os trabalhos de Hurst (1951) e Mandelbrot e Wallis (1969) foram pioneiros no estudo deste assunto. O primeiro percebeu a característica de longa dependência (ou persistência) nos dados da série de níveis do Rio Nilo, enquanto que os segundos autores definiram o Ruído Gaussiano Fracionário, fundamental no estudo de séries temporais com esta característica.

Durante o desenvolvimento da teoria de processos estocásticos, diversos modelos foram propostos de modo a contemplar processos com características mais sofisticadas. Dentre estas características, podemos citar a sazonalidade e a presença de outliers nos processos. Para uma descrição detalhada dos resultados referentes a processos estocásticos com estas características, veja Bisognin (2007).

Na década de 90, Bai (1994), Kuan e Hsu (1998) e Bai e Perron (1998) estudaram processos estocásticos que apresentam mudanças na média durante sua evolução. Bai (1994) apresenta resultados referentes a processos estocásticos que possuem apenas uma mudança na média. Neste trabalho, é apresentado um estimador que detecta o ponto de mudança de regime em um processo estocástico. Kuan e Hsu (1998) estendem os resultados obtidos por Bai (1994) para o estimador do ponto de mudança de regime propondo um estimador diferente para localizar o ponto de mudança na média em processos ARFIMA(0, d , 0). Ao permitir que hajam várias mudanças na média de um processo estocástico, Bai e Perron (1998) estendem os resultados obtidos por Bai (1994) ao propor um estimador para estes múltiplos pontos.

Diversos outros trabalhos tratam do problema de séries temporais que apresentam alguma mudança em seu mecanismo gerador. Dentre estes trabalhos podemos citar Cobb (1978), Ray e Tsay (2002), Dufrenot *et. al.* (2003) e Bai e Perron (2003) como os mais importantes.

Uma evolução natural para o problema em detectar a mudança na média

em processos ARFIMA, como apresentado em Kuan e Hsu (1998), é detectar uma mudança no parâmetro de diferenciação fracionária. Este é o problema que tratamos neste trabalho. Um dos primeiros artigos a tratar deste assunto, analisando novamente a série do Rio Nilo, foi Beran e Terrin (1996). Um novo modelo para a série temporal do Rio Nilo é identificado neste estudo, em oposição àquele proposto em Beran (1994).

Em nosso trabalho, propomos identificar o ponto de mudança de regime no parâmetro d através de um estimador baseado na soma dos quadrados dos resíduos. Esta idéia surgiu, basicamente, através do estudo dos artigos de Bai (1994), Kuan e Hsu (1998) e Dufrenot *et. al.* (2003). Nossa proposta é identificar os pontos de mudança de regime do parâmetro d em um processo estocástico ARFIMA(p, d, q), para assim obtermos melhores estimativas para os parâmetros que compõem tal processo.

Estudamos o comportamento do estimador proposto nesta dissertação através de simulações. A metodologia utilizada consiste em simular diversas amostras do processo estocástico com mudança de regime definida, fazendo variações nos diversos parâmetros que compõem o processo. Para avaliar o estimador nos diversos casos nos quais a mudança de regime se apresenta, fazemos variações no tamanho amostral, no ponto de mudança de regime e nos parâmetros de longa dependência das séries temporais simuladas.

O trabalho é organizado como segue. No Capítulo 2, introduzimos os conceitos básicos para nosso estudo. Definimos os processos ARMA(p, q), ARIMA(p, d, q) e ARFIMA(p, d, q) durante o Capítulo 3. Os diversos estimadores utilizados neste trabalho, tanto para o parâmetro d , quanto para os coeficientes dos polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$, estão descritos no Capítulo 4. No Capítulo 5 apresentamos diversos modelos de processos estocásticos que exibem mudanças de regime. A análise dos resultados das simulações realizadas está no Capítulo 6. No Capítulo 7 analisamos uma série temporal real sob a ótica de um modelo com mudança de regime. O Capítulo 8 conclui o trabalho e apresenta propostas para futuras pesquisas.

Capítulo 2

Noções Preliminares de Processos Estocásticos

Neste capítulo apresentamos algumas definições básicas necessárias para um estudo formal das séries temporais. Uma *série temporal* é um conjunto de observações ordenadas no tempo. Exemplos de séries temporais são o registro das marés no porto de Rio Grande, a temperatura média diária do Rio de Janeiro, o índice da Bolsa de Valores de São Paulo e a precipitação pluviométrica em Porto Alegre.

São vários os motivos que nos levam a analisar uma série temporal. Dentre os vários existentes, podemos destacar os seguintes:

- investigar o mecanismo gerador da série temporal, de modo a descobrir como ela foi gerada;
- fazer previsões dos valores futuros da série temporal, para podermos nos precaver a respeito do comportamento que ela assumirá no futuro;
- descrever o comportamento da série temporal através da análise de seu gráfico para identificar características como tendência, ciclos e variações sazonais;
- através da análise espectral, procurar periodicidades relevantes nos dados.

Não importando qual seja o motivo escolhido para fazermos tal análise, sempre utilizaremos *modelos probabilísticos* ou *modelos estocásticos*. O desafio na análise de séries temporais é encontrar o modelo mais simples que melhor descreva a série temporal analisada.

Ao iniciarmos a análise de uma série temporal, devemos ter uma maneira de lidar com a natureza aleatória do fenômeno a ser modelado. A maneira natural de permitir com que isto aconteça é supor que cada observação da série temporal é uma variável aleatória X_t . Assim, a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$

nada mais é do que a realização (ou parte de uma realização) de um processo estocástico.

A partir de agora introduzimos algumas definições preliminares, necessárias para o estudo que realizamos neste trabalho. Definimos formalmente o que é um processo estocástico. Os conceitos de estacionariedade e função de distribuição n -dimensional e as definições das funções de autocovariância e autocorrelação são de suma importância para encontrarmos modelos para séries temporais.

Iniciamos com a definição de processo estocástico.

Definição 2.1. Seja T um conjunto qualquer. Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, onde Ω é o espaço amostral, \mathcal{A} é a σ -álgebra da classe de eventos aleatórios e $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é a função que associa a probabilidade a um evento qualquer.

Observação 2.1. a) Em geral, consideramos o conjunto T como sendo o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} ou dos reais \mathbb{R} .

b) Neste trabalho, consideramos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Definição 2.2. Um espaço de probabilidade $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é um espaço de Hilbert se satisfizer as seguintes condições:

- a) $\mathbb{E}(X^2) = \int_{\Omega} X(w)^2 \mathbb{P}(dw) < \infty$, para todo $X \in \mathcal{H}$,
- b) a multiplicação por escalar e adição de vetores é a usual,
- c) $\mathbb{E}(\alpha X)^2 = \alpha^2 \mathbb{E}(X^2)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{H}$,
- d) $\mathbb{E}(X + Y)^2 \leq 2\mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(Y^2)$, para todo $X, Y \in \mathcal{H}$.

Definimos o produto interno em \mathcal{H} como sendo

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathcal{H}.$$

Definição 2.3. Seja T um conjunto qualquer. Uma *série temporal* $\{X_t\}_{t=1}^n$ é uma amostra finita de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$.

A seguir, definimos a *função de distribuição n -dimensional* (ou *função de distribuição conjunta*) para um vetor aleatório $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$, onde o símbolo \mathbf{x}' significa o transposto do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.4. Seja $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$ um vetor aleatório (ou variável aleatória n -dimensional), cujas componentes são variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. A *função de distribuição n -dimensional* (ou *função de distribuição conjunta*) do vetor é definida por

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n), \quad (2.1)$$

quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in T$, $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ estará especificado se conhecermos as distribuições finito-dimensionais (2.1) para todo $n \geq 1$.

As *funções de autocovariância* e de *autocorrelação* de um processo estocástico são definidas a seguir. Estas duas funções fornecem o grau de interdependência entre as variáveis aleatórias e são importantes na identificação de um modelo para uma série temporal.

Definição 2.5. Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico tal que $\text{Var}(X_t) < \infty$, para todo $t \in T$. A *função de autocovariância* do processo, denotada por $\gamma_x(\cdot, \cdot)$, é dada por

$$\gamma_x(r, s) \equiv \text{Cov}(X_r, X_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}(X_r))(X_s - \mathbb{E}(X_s))], \quad r, s \in T,$$

onde $\mathbb{E}(X_t) \equiv \mu_t$ é a *esperança matemática* da variável aleatória X_t , para todo $t \in T$.

Definição 2.6. Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico tal que $\text{Var}(X_t) < \infty$, para todo $t \in T$. A *função de autocorrelação* do processo, denotada por $\rho_x(\cdot, \cdot)$, é dada por

$$\rho_x(r, s) = \frac{\gamma_x(r, s)}{\sqrt{\text{Var}(X_r)}\sqrt{\text{Var}(X_s)}}, \quad r, s \in T,$$

onde $\text{Var}(X_t) \equiv \gamma_x(t, t)$, para todo $t \in T$.

Observação 2.2. Neste trabalho, consideramos o conjunto T como sendo o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} .

Ao procurarmos modelos para descrever séries temporais, é necessário utilizar suposições que nos permitam simplificar as séries temporais analisadas. Dentre as suposições que devem ser realizadas, a mais comum diz respeito à estacionariedade do processo.

Intuitivamente, um processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é aquele no qual a origem temporal ($t = 0$) não é importante. Em outras palavras, as características de X_{t+h} são as mesmas de X_t , para todo $t, h \in \mathbb{Z}$.

A literatura nos apresenta dois tipos de estacionariedade: *estacionariedade forte* e *estacionariedade fraca*. As definições destas propriedades são dadas a seguir.

Definição 2.7. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *fortemente estacionário* (ou *estritamente estacionário*) se todas as distribuições n -dimensionais (2.1) permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n),$$

para todo t_1, \dots, t_n, h em \mathbb{Z} .

Definição 2.8. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *fracamente estacionário* (ou somente *estacionário*) se

- a) $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;
- b) $\mathbb{E}(X_t) = \mu_x$, uma constante independente de t ;
- c) $\gamma_x(r, s) = \gamma_x(r + t, s + t)$, para quaisquer $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.9. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *Gaussiano* se, para qualquer conjunto $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, as variáveis aleatórias X_{t_1}, \dots, X_{t_n} têm distribuição normal n -dimensional.

Observação 2.3. a) Um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ fracamente estacionário não necessita, necessariamente, ser fortemente estacionário, mas a recíproca é sempre verdadeira. Como um processo Gaussiano com variância finita é determinado pelas médias e pela matriz de variâncias-covariâncias, se ele for fracamente estacionário, será também fortemente estacionário (veja Brockwell e Davis, 1991).

- b) Se o processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ for estacionário, temos que $\gamma_x(r, s) = \gamma_x(r - s, 0)$, para todo $r, s \in \mathbb{Z}$. Assim, podemos redefinir a função de autocovariância de um processo estocástico estacionário em termos de apenas uma variável:

$$\gamma_x(r, s) = \gamma_x(r - s, s - s) = \gamma_x(r - s, 0) \equiv \gamma_x(h), \quad \text{para todo } r, s, h \in \mathbb{Z}.$$

A função $\gamma_x(h)$ será chamada de *função de autocovariância* de ordem h . De forma análoga, definimos a função de autocorrelação de ordem h como sendo

$$\rho_x(h) \equiv \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z},$$

onde $\gamma_x(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \text{Var}(X_t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

- c) As funções de autocovariância e de autocorrelação de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possuem as seguintes propriedades:

- i) $\gamma_x(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h})$, para todo $t, h \in \mathbb{Z}$;
- ii) $\gamma_x(h) = \gamma_x(-h)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
- iii) $|\gamma_x(h)| \leq \gamma_x(0)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
- iv) $\rho_x(h) = \rho_x(-h)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
- v) $|\rho_x(h)| \leq \rho_x(0) = 1$, para todo $h \in \mathbb{N}$.

Definição 2.10. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário com média zero e com função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ tal que $\gamma_X(h) \rightarrow 0$ quando $|h| \rightarrow \infty$. A *função de autocorrelação parcial*, denotada por $\phi_X(k, j)$, $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, é o coeficiente na equação

$$\mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^k \phi_X(k, j) X_{k+1-j},$$

onde $\mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1})$ é a projeção ortogonal de X_{k+1} no subespaço fechado $\overline{sp}(X_1, \dots, X_k)$ gerado pelas k observações anteriores.

A partir da equação

$$\langle X_{k+1} - \mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1}), X_j \rangle = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, k,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno definido na Observação 2.2, obtemos o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_X(k, 1) \\ \phi_X(k, 2) \\ \vdots \\ \phi_X(k, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \\ \vdots \\ \rho_X(k) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde $\rho_X(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada pela Definição 2.6. Os coeficientes $\phi_X(\cdot, \cdot)$ são unicamente determinados pelo sistema (2.2).

Utilizando a regra de Cramér sucessivamente para $k \in \mathbb{N}$, obtemos a *função de autocorrelação parcial de ordem k* do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada por

$$\phi_X(k, k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(k-2) & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-3) & \rho_X(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \cdots & \rho_X(1) & \rho_X(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \cdots & \rho_X(k-3) & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \cdots & \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}}.$$

Um dos processos estocásticos mais simples é aquele cujas variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídas. Definimos os processos independentes e identicamente distribuídos e ruído branco a seguir.

Definição 2.11. O processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser composto por *variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas* (iid), denotado por $X_t \sim IID(0, \sigma^2)$, se valer para toda X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , a condição

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{t_n}(x_n)$$

e se as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n, \dots possuem a mesma distribuição.

Definição 2.12. O processo estocástico $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *ruído branco* com média zero e variância σ_ε^2 , denotado por $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$, se é iid e se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

A *função densidade espectral* de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, definida a seguir, é um modelo não-paramétrico muito utilizado. Esta função é a transformada de Fourier da função de autocovariância. A vantagem em se descrever uma série temporal desta maneira reside no fato de obtermos uma soma de componentes senoidais não-correlacionados, eliminando assim o problema da correlação serial.

Definição 2.13. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário de valor real com $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(h)| < \infty$. A *função densidade espectral* $f_X(\cdot)$ de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\begin{aligned} f_X(w) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_X(h) e^{-ihw} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_X(h) \cos(hw) \\ &= \frac{1}{2\pi} \gamma_X(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma_X(h) \cos(hw), \quad \forall \omega \in (-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Observação 2.4. A função de autocovariância do processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser obtida a partir da função densidade espectral $f_X(\cdot)$ através da transformada inversa de Fourier, isto é,

$$\gamma_X(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} f_X(w) e^{ihw}, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

De (2.3) e (2.4) concluímos que as funções densidade espectral $f_X(\cdot)$ e de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ são um par de Fourier, ou seja, uma função é unicamente determinada pela outra. Esta propriedade é caracterizada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1 (Herglotz). *Uma função complexa $\gamma_X(\cdot)$ definida nos inteiros é não-negativa definida se, e somente se,*

$$\gamma_X(h) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ihw} dF_X(w), \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

onde $F_X(\cdot)$ é uma função limitada em $(-\pi, \pi]$, contínua à direita, não decrescente e $F_X(-\pi) = 0$.

Demonstração. Ver Brockwell e Davis (1991). □

O próximo teorema apresenta propriedades da função densidade espectral de um processo estocástico estacionário.

Teorema 2.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário tal que $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(h)| < \infty$. A função densidade espectral $f_X(\cdot)$ deste processo, dada pela expressão (2.3), possui as seguintes propriedades:*

- i) $f_X(w)$ é uma função real contínua;
- ii) $f_X(w) = f_X(-w)$, para todo $w \in (-\pi, \pi]$;
- iii) $f_X(w) \geq 0$, para todo $w \in (-\pi, \pi]$;
- iv) $\int_{-\pi}^{\pi} f_X(w) dw < \infty$.

Um estudo completo da função densidade espectral pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991).

Definimos a seguir os estimadores naturais, obtidos pelo método dos momentos, para a esperança matemática e as funções de autocovariância, autocorrelação, autocorrelação parcial e densidade espectral de um processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Para tal, consideramos uma série temporal com n observações X_1, \dots, X_n , obtidas a partir do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Definição 2.14. Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal oriunda do processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A *média amostral*, um estimador para a esperança matemática do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é definida por

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad (2.6)$$

onde $X_j, j \in \{1, \dots, n\}$, são as observações da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$.

Observação 2.5. O estimador \bar{X} é não-viciado ($\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$) e fracamente consistente ($\text{Var}(\bar{X}) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$) para μ .

Definição 2.15. Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal oriunda do processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A *função de autocovariância amostral de ordem h* do processo é definida por

$$\hat{\gamma}_x(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (X_j - \bar{X})(X_{j+h} - \bar{X}), \quad \text{para todo } |h| < n. \quad (2.7)$$

Observação 2.6. Em vez de $n - h$, o divisor n é utilizado em (2.7), pois isto garante que a matriz $\hat{\Gamma}_n := [\hat{\gamma}_x(j - k)]_{j,k=1}^n$ é não-negativa definida (ver Brockwell e Davis, 1991).

Definição 2.16. Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal oriunda do processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A *função de autocorrelação amostral de ordem h* do processo é definida em termos da função de autocovariância amostral como sendo

$$\hat{\rho}_x(h) = \frac{\hat{\gamma}_x(h)}{\hat{\gamma}_x(0)}, \quad \text{para todo } |h| < n.$$

Definição 2.17. Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal oriunda do processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A *função de autocorrelação parcial amostral de ordem h* do processo é obtida ao substituírmos $\rho_x(\cdot)$ por $\hat{\rho}_x(\cdot)$ em (2.2).

Para facilitar a resolução do sistema (2.2) utilizamos um método recursivo, sugerido por Box *et. al.* (1994), dado por

$$\hat{\phi}_x(h+1, h+1) = \frac{\hat{\rho}_x(h+1) - \sum_{j=1}^h \hat{\phi}_x(h, j) \hat{\rho}_x(h+1-j)}{1 - \sum_{j=1}^h \hat{\phi}_x(h, j) \hat{\rho}_x(j)}, \quad (2.8)$$

$$\hat{\phi}_x(h+1, j) = \hat{\phi}_x(h, j) - \hat{\phi}_x(h+1, h+1) \hat{\phi}_x(h, h+1-j), \quad (2.9)$$

para todo $j = 1, \dots, h$ e $h \in \{1, \dots, n-1\}$, onde $\hat{\phi}_x(1, 1) = \hat{\rho}_x(1)$.

Além disso, podemos utilizar o sistema (2.8)-(2.9) para obter o valor teórico da função de autocorrelação parcial $\phi_x(\cdot, \cdot)$ a partir da função de autocorrelação $\rho_x(\cdot)$.

Observamos que, apenas quando o processo é ergódico, é que podemos estimar médias espaciais a partir de uma série temporal. Referimos o leitor à Olbermann (2002) e Lopes (2008) para definições gerais e para a análise da ergodicidade dos processos ARFIMA.

Definição 2.18. Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal oriunda do processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A função periodograma $I(\cdot)$ da série temporal na frequência w_j é dada por

$$I(w_j) \equiv \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-itw_j} \right|^2, \quad (2.10)$$

onde $w_j = 2\pi j/n$, para $j = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x , são as frequências de Fourier.

A função periodograma também está relacionada com a função de autocovariância amostral, como veremos na proposição a seguir.

Proposição 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal oriunda de um processo estocástico estacionário real $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A função periodograma $I(\cdot)$ da série temporal, definida em (2.10), é dada por*

$$I(w_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}_X(h) e^{-ihw_j}, \quad \text{para todo } w_j \in (-\pi, \pi], \quad (2.11)$$

onde $\hat{\gamma}_X(\cdot)$ é a função de autocovariância amostral dada pela expressão (2.7).

Demonstração. De acordo com a Observação 2.2, o espaço \mathcal{H} das variáveis aleatórias quadrado integráveis é um espaço de Hilbert. Assim, a variável aleatória X_t , sendo um elemento deste espaço, pode ser escrita como combinação linear de elementos da base de \mathcal{H} . Em particular, para cada $t \in \{1, \dots, n\}$, X_t pode ser escrita como

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{-\pi < w_j \leq \pi} \alpha_j e^{itw_j}, \quad \text{para todo } t = 1, \dots, n,$$

onde $w_j = 2\pi j/n$ são as frequências de Fourier. Desta forma, por (2.10), supondo que $\mathbb{E}(X_t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} I(w_j) &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n X_t e^{-itw_j} \sum_{s=1}^n X_s e^{isw_j} \\ &= \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n X_t X_s e^{-i(t-s)w_j}. \end{aligned}$$

Fazendo $h = t - s$, obtemos

$$\begin{aligned} I(w_j) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} X_t X_{t-h} \right) e^{-ihw_j} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|h| < n} \hat{\gamma}_X(h) e^{-ihw_j}, \end{aligned}$$

onde $\hat{\gamma}_x(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} X_t X_{t+h} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} X_t X_{t-h}$ é a função de autocovariância amostral dada pela expressão (2.7). \square

A função periodograma $I(\cdot)$, dada pela expressão (2.10), é assintoticamente não-viciada e não-consistente, ou seja, mesmo que o número de observações aumente, a variância de $I(\cdot)$ não decresce (ver Morettin e Toloi, 2004).

A função periodograma torna-se consistente quando utilizamos uma função peso $\lambda(\cdot)$ chamada *janela espectral*. Após este procedimento, obtemos a *função periodograma suavizado*, definida a seguir.

Definição 2.19. Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal oriunda do processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A *função periodograma suavizado* da série temporal, denotada por $f_s(\cdot)$, é definida como

$$f_s(w_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h| \leq \ell} \lambda_\ell(h) \hat{\gamma}(h) e^{-ihw_j}, \quad (2.12)$$

onde ℓ é o *ponto de truncamento* da janela espectral $\lambda_\ell(\cdot)$.

Existem, na literatura matemática, diversas janelas espectrais. Uma lista destas funções pode ser encontrada em Morettin e Toloi (2004). Neste trabalho utilizamos a janela de Bartlett, definida como

$$\lambda_\ell(h) = \begin{cases} 1 - \frac{|h|}{\ell}, & \text{se } |h| \leq \ell; \\ 0, & \text{se } |h| > \ell. \end{cases} \quad (2.13)$$

Apesar de termos afirmado na Observação 2.1 que neste trabalho consideramos o conjunto de índices T dos processos estocásticos estudados como sendo o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} , há um caso especial de estatística, vista na Seção 5.1, no qual devemos considerar $T = \mathbb{R}$. Por isso, definimos a seguir os processos Wiener Padrão e Ponte Browniana Fracionária, cujos conjuntos de índices T pertencem aos reais positivos \mathbb{R}^+ .

Definição 2.20. O processo estocástico $\{W_t^0\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ é um *processo de Wiener Padrão* ou *Movimento Browniano* se as seguintes condições estão satisfeitas:

- a) Cada incremento $W_{t+s}^0 - W_s^0$ tem distribuição normal com média zero e variância $\sigma_w^2 t$, onde σ_w é um parâmetro fixo.
- b) Para todo par de intervalos disjuntos $[t_1, t_2]$ e $[t_3, t_4]$, onde $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, os incrementos $W_{t_4}^0 - W_{t_3}^0$ e $W_{t_2}^0 - W_{t_1}^0$ são variáveis aleatórias independentes com distribuições dadas em (a). Isto vale para quaisquer n intervalos de tempo disjuntos, onde $n \in \mathbb{N}$.
- c) $W_0^0 = 0$ e W_t^0 é contínuo em $t = 0$.

Definição 2.21. O processo estocástico $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ é um *processo Ponte Browniana Fracionária* se

$$W_t^0 = W_t - tW_1,$$

onde $\{W_t^0\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ é dado na Definição 2.20.

Definição 2.22. O processo estocástico $\{B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ é um processo *Movimento Browniano Fracionário* se é um processo Gaussiano, dado pela Definição 2.9, com média igual a zero, incrementos estacionários, variância $\text{Var}(B_H(t)) = t^{2H}$ e função de autocovariância dada por

$$\text{Cov}(B_H(t), B_H(s)) = \mathbb{E}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2} \left\{ t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right\},$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Observação 2.7. O índice H , presente na Definição 2.22, é chamado *coeficiente de Hurst*. Este parâmetro foi sugerido por Hurst (1951) como uma forma de mensurar a longa dependência de um processo estocástico.

Estudos mais completos a respeito destes conceitos básicos podem ser encontrados em Karlin e Taylor (1975), Brockwell e Davis (1991), Billingsley (1995) e Morettin e Toloi (2004).

Capítulo 3

Modelos para Séries Temporais

Determinar o melhor modelo para uma série temporal é a parte mais importante e delicada na sua análise. Existe uma variedade enorme de modelos disponíveis na literatura e escolher o que melhor se adequa aos dados analisados não é uma tarefa das mais simples.

Neste capítulo apresentamos alguns modelos bastante utilizados na modelagem de séries temporais. O modelo $ARMA(p, q)$, utilizado para modelar séries temporais estacionárias, e o modelo $ARIMA(p, d, q)$, utilizado para ajustar séries temporais não-estacionárias, são dois destes modelos, apresentados nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente. A Seção 3.3 trata especificamente dos processos estacionários com a característica de longa dependência. Após um breve histórico, estudamos os modelos $ARFIMA(p, d, q)$, um dos mais utilizados para a modelagem de séries temporais com esta característica. Por fim, os processos $ARFIMA(p, d, q)$ não-estacionários são abordados na Seção 3.3.1.

O procedimento de ajuste de um modelo para uma série temporal segue certas fases bem definidas, não importando qual seja o conjunto de dados a ser analisado:

1. com base na análise das funções de autocovariância, autocorrelação, autocorrelação parcial, periodograma e outros critérios, uma classe de modelos é sugerida para o ajuste da série temporal;
2. a partir das observações, são estimados os parâmetros do modelo sugerido no item anterior;
3. a seguir, há o diagnóstico do modelo ajustado, através da análise de resíduos, para saber se o modelo resultou em um bom ajuste para a série temporal.

Caso o modelo não tenha sido bem ajustado, retornamos ao primeiro passo e tentamos sugerir outro modelo. Em geral, vários modelos são sugeridos e seus resultados são comparados a fim de que possamos optar por aquele que melhor descreva a série temporal.

A fase mais difícil no ajuste de um modelo a um conjunto de dados é justamente a identificação do modelo adequado. É possível que os pesquisadores envolvidos na identificação do modelo para a série temporal diverjam quanto à escolha do melhor modelo para ajustá-la.

Necessitamos, além dos conceitos de ruído branco e variáveis iid, de um operador que é bastante utilizado na análise de séries temporais. Este operador é chamado *operador de retardo* e é definido a seguir.

Definição 3.1. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico. O *operador de retardo* \mathcal{B} de ordem k do processo é dado por

$$\mathcal{B}^k(X_t) = X_{t-k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

A seção a seguir apresenta alguns dos possíveis modelos lineares que podem ser utilizados para descrever um série temporal.

3.1 Processos ARMA(p, q)

Apresentamos os processos *auto-regressivos de médias móveis* ARMA(p, q), introduzidos por Box e Jenkins na década de 1970, definidos em termos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes. Também apresentamos nesta seção algumas propriedades que estes processos possuem, como causalidade e invertibilidade.

Definição 3.2. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B})(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo ruído branco dado pela Definição 2.12, \mathcal{B} é o operador de retardo e $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são polinômios de ordens p e q , respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \phi_3 z^3 - \dots - \phi_p z^p, \\ \theta(z) &= 1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \theta_3 z^3 - \dots - \theta_q z^q, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\phi_j, 1 \leq j \leq p$, e $\theta_l, 1 \leq l \leq q$, são constantes reais. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de média móvel de ordem* (p, q), denotado por ARMA(p, q).

Definição 3.3. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q). Então,

- a) o processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo *causal* se existe uma sequência de constantes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal que

$$\sum_{j \geq 0} |\psi_j| < \infty \quad \text{e} \quad X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z};$$

b) o processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo *invertível* se existe uma seqüência de constantes $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal que

$$\sum_{j \geq 0} |\pi_j| < \infty \quad \text{e} \quad \varepsilon_t = \sum_{j \geq 0} \pi_j X_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Observação 3.1. Se em (3.1) tivermos $p = 0$, então obtemos o *processo auto-regressivo de ordem p*, denotado por $\text{AR}(p)$. Da mesma forma, se $q = 0$, obtemos o processo $\text{MA}(q)$.

A função densidade espectral de um processo $\text{ARMA}(p, q)$ é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo $\text{ARMA}(p, q)$ dado pela expressão (3.1), onde $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ não possuem raízes em comum e $\phi(\cdot)$ não possui raízes no círculo unitário. Então, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por*

$$f_x(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\phi(e^{-iw})|^2}{2\pi |\theta(e^{-iw})|^2}, \quad w \in (-\pi, \pi]. \quad (3.3)$$

Demonstração. Ver Brockwell e Davis (1991). \square

3.2 Processos $\text{ARIMA}(p, d, q)$

Nem sempre a série temporal analisada é estacionária. Os processos *auto-regressivos integrados de médias móveis*, denotados por $\text{ARIMA}(p, d, q)$, formam uma classe de processos na qual é possível encontrar um modelo que se ajuste a este tipo de dados. Iniciamos esta seção definindo esta classe de processos.

Definição 3.4. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico. Dizemos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo *auto-regressivo integrado de média móvel*, denotado por $\text{ARIMA}(p, d, q)$, com média μ , se este processo é dado pela equação

$$\phi(\mathcal{B}) \nabla^d (X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B}) \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios definidos em (3.2), $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo ruído branco, $\nabla^d \equiv (1 - \mathcal{B})^d$, $d \in \mathbb{N}$, e d é chamado de *parâmetro* ou *grau de diferenciação*.

Observação 3.2. a) Se definirmos $U_t = \nabla^d (X_t - \mu)$, então

$$\phi(\mathcal{B}) U_t = \theta(\mathcal{B}) \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

ou seja, $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo $\text{ARMA}(p, q)$.

b) Se $d = 0$ em (3.4), então obtemos o processo $\text{ARMA}(p, q)$. Portanto, a classe dos processos $\text{ARMA}(p, q)$ é um caso particular da classe dos processos $\text{ARIMA}(p, d, q)$.

3.3 Processos ARFIMA(p, d, q)

Os primeiros estudos a respeito de séries temporais com longa dependência remontam ao início da década de 1950, mais especificamente de Hurst (1951). Ao estudar a série temporal do nível do rio Nilo entre os anos 622 e 1284, Hurst percebeu que havia forte dependência entre estas observações, mesmo quando separadas por um grande período de tempo. Esta característica recebeu, na época, o nome de *efeito Hurst*. Posteriormente, Mandelbrot (1965) e Mandelbrot e van Ness (1968) desenvolveram a teoria do *Movimento Browniano Fracionário*. Logo após, Mandelbrot e Wallis (1969) definiram o *Ruído Gaussiano Fracionário*, versão a tempo discreto do Movimento Browniano Fracionário. Tanto o Movimento Browniano Fracionário quanto o Ruído Gaussiano Fracionário apresentam características do efeito Hurst.

Granger e Joyeux (1980), Hosking (1981) e Hosking (1984) definem o modelo *auto-regressivo fracionariamente integrado de média móvel*, denotado por ARFIMA(p, d, q). Neste modelo, a função densidade espectral torna-se ilimitada apenas na origem. Assim como os modelos ARIMA(p, d, q) são extensões naturais dos modelos ARMA(p, q), o modelo ARFIMA(p, d, q) é uma extensão do primeiro. A diferença reside no valor que o grau de diferenciação d assume: nos modelos ARFIMA(p, d, q), este parâmetro pode assumir qualquer valor real.

Ainda na década de 1980, estudos de economistas relatam que há evidências que modelos com longa dependência descrevem dados econômicos e financeiros de maneira satisfatória. Dentre os tipos de dados estudados, taxas de câmbio, de juros e inflação estão entre os mais analisados. Muitas vezes, a longa dependência é encontrada na volatilidade de séries financeiras. Para um estudo a este respeito, veja Lopes (2008) e Prass (2008).

O processo ARMA(p, q) é considerado um processo de *memória curta*, pois sua função de autocorrelação $\rho_x(h)$ decresce rapidamente para zero quando $h \rightarrow \infty$. Na realidade, é possível demonstrar que, para este processo,

$$|\rho_x(h)| \leq Cr^{-h}, \quad h \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

onde $C > 0$ e $0 < r < 1$. A expressão (3.5) garante que a função de autocorrelação decai para zero exponencialmente.

Definição 3.5. No domínio do tempo, um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ de *longa dependência* ou *memória longa* é um processo em que sua função de autocorrelação decresce hiperbolicamente para zero, isto é,

$$\rho_x(h) \sim C_1 h^{-u}, \quad \text{quando } h \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

onde $C_1 > 0$ e $u \in (0, 1)$.

Observação 3.3. Longa dependência também pode ser definida em termos da função de autocorrelação do processo. Se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo es-

toacástico tal que $\sum_{h \geq 0} |\gamma_x(h)| = \infty$, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo com longa dependência.

De forma equivalente, podemos definir longa dependência no domínio da frequência. Assim, um processo estocástico com característica de longa dependência é aquele em que a função densidade espectral é ilimitada na origem, isto é,

$$f_x(w) \sim C_2 |w|^{-b}, \quad \text{quando } w \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

onde $C_2 > 0$ e $b \in (0, 1)$.

Modelar processos com longa dependência é o principal escopo deste trabalho. Para isto, necessitamos estender o operador diferença dado na Definição 3.4.

Definição 3.6. Para todo real $d > -1$, definimos o *operador diferença fracionária* $\nabla^d \equiv (1 - \mathcal{B})^d$ através da expansão binomial

$$\nabla^d \equiv (1 - \mathcal{B})^d = \sum_{k \geq 0} \binom{d}{k} (-\mathcal{B})^k = 1 - d\mathcal{B} - \frac{d(1-d)}{2!} \mathcal{B}^2 + \dots, \quad (3.8)$$

onde

$$\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}$$

na qual $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama definida por

a) $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$

b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$

Com estes conceitos preliminares, definimos o processo ARFIMA(p, d, q).

Definição 3.7. Sejam $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo ruído branco com média zero e variância σ_ε^2 , dado na Definição 2.12 e ∇^d o operador diferença fracionária definido na expressão (3.8). Se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo linear satisfazendo

$$\phi(\mathcal{B})\nabla^d(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.9)$$

onde μ é a média do processo, $d \in (-0,5; 0,5)$, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de ordem p e q dados por (3.2), então é chamado de *processo geral com diferenciação fracionária*, denotado por ARFIMA(p, d, q), onde d é o *grau* ou *parâmetro de diferenciação fracionária*.

Podemos classificar o tipo de dependência nos processos ARFIMA(p, d, q) de acordo com o valor de d . Estes processos exibem longa dependência quando $d \in (0; 0,5)$, curta dependência quando $d = 0$ e dependência intermediária quando $d \in (-0,5; 0)$. Neste trabalho estamos analisando apenas processos com longa dependência.

Observação 3.4. a) Quando os graus dos polinômios em (3.9) são iguais a zero, obtemos o processo ruído branco Gaussiano ou processo ARFIMA(0, d , 0), dado pela expressão

$$(1 - \mathcal{B})^d X_t = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

A função densidade espectral $f_x(\cdot)$ deste processo é dada por

$$f_x(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right)^{-2d}, \quad \text{para todo } w \in (-\pi, \pi]. \quad (3.11)$$

b) Na expressão (3.9), quando $d = 0$ ou $d \in \mathbb{N}$, obtemos os processos ARMA(p, q) e ARIMA(p, d, q), respectivamente.

No teorema a seguir, apresentamos resultados fundamentais referentes aos processos ARFIMA(p, d, q).

Teorema 3.2 (Hosking, 1984). *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q) dado pela expressão (3.9) com $\mu = 0$.*

i) *Quando $d < 0,5$, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário e tem representação média móvel infinita dada por*

$$X_t = \psi(\mathcal{B})\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t-k},$$

onde

$$\psi_k = \frac{d(1+d) \cdots (k-1+d)}{k!} = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\psi_k \simeq \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}$.

ii) *Quando $d > -0,5$, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo inversível e tem representação auto-regressiva infinita dada por*

$$\pi(\mathcal{B})X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t,$$

onde

$$\pi_k = \frac{-d(1-d) \cdots (k-1-d)}{k!} = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}. \quad (3.12)$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\pi_k \simeq \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}$.

Nos itens iii), iv) e v) abaixo, assumimos que $d \in (-0,5; 0,5)$.

iii) A função densidade espectral de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_x(w) = f_v(w) \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{w}{2} \right) \right]^{-2d}, \quad \text{para } 0 < w \leq \pi. \quad (3.13)$$

onde $f_v(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo ARMA(p, q), dada por (3.3), para todo $0 < w \leq \pi$. Quando $w \simeq 0$, $f_x(w) \simeq w^{-2d}$.

iv) A função de autocovariância de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma_x(h) = \frac{(-1)^h \Gamma(-2d+1)}{\Gamma(h-d+1) \Gamma(-h-d+1)}, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z},$$

e a função de autocorrelação é dada por

$$\rho_x(h) = \frac{\Gamma(-d) \Gamma(h+d)}{\Gamma(d) \Gamma(h-d+1)}, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z}.$$

Quando $h \rightarrow \infty$, $\rho_x(h) \simeq \frac{\Gamma(-d+1)}{\Gamma(d)} h^{2d-1}$.

v) A função de autocorrelação parcial de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\phi_x(h, h) = \frac{d}{h-d}, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{N}.$$

Observação 3.5. a) A função de autocorrelação parcial do processo ARFIMA($0, d, 0$) é solução do sistema (2.2).

b) Quando $d > 0$, a função densidade espectral $f_x(\cdot)$ é ilimitada nas frequências próximas de zero e a função de autocorrelação $\rho_x(h)$ possui decaimento hiperbólico quando $h \rightarrow \infty$.

Teorema 3.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q), dado pela expressão (3.9), com $d \in (-0,5; 0,5)$. Suponha que os polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ não possuam raízes em comum e que estas raízes estejam fora do círculo unitário. Então,*

i) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário e inversível, e suas representações auto-regressiva e média móvel de ordem infinita são dadas, respectivamente, por*

$$\sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t \quad e \quad X_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-k},$$

onde π_k e ψ_k são, respectivamente, os coeficientes nas expansões

$$\Psi(\mathcal{B}) = \frac{\theta(\mathcal{B})}{\phi(\mathcal{B})} (1 - \mathcal{B})^{-d} \quad e \quad \Pi(\mathcal{B}) = \frac{\phi(\mathcal{B})}{\theta(\mathcal{B})} (1 - \mathcal{B})^d.$$

ii) dado o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ estacionário e inversível, seja $U_t = (1 - \mathcal{B})^d X_t$. Assim, $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARMA(p, q), isto é, $\phi(\mathcal{B})U_t = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, com função densidade espectral $f_U(\cdot)$ e função de autocovariância $\gamma_U(\cdot)$. Seja $Y_t = \frac{\phi(\mathcal{B})}{\theta(\mathcal{B})} X_t$. Então, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA($0, d, 0$) com função densidade espectral $f_Y(\cdot)$ e função de autocovariância $\gamma_Y(\cdot)$, dadas no Teorema 3.2. Então,

a) A função densidade espectral $f_X(\cdot)$ de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_X(w) = f_U(w)f_Y(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2} \left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right)\right)^{-2d},$$

onde $f_U(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo ARMA(p, q), dada por (3.3) e $f_Y(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo ARFIMA($0, d, 0$), dada por (3.11), para todo $0 < w \leq \pi$.

Quando $w \rightarrow 0$, $\lim w^{2d} f_X(w)$ existe e é finito.

b) Seja $\rho_X(\cdot)$ a função de autocorrelação do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, quando $h \rightarrow \infty$, $\lim h^{1-2d} \rho_X(h)$ existe e é finito.

Estudos mais completos sobre processos ARFIMA(p, d, q) estacionários, incluindo estimadores para os parâmetros do processos, aplicações em séries temporais reais e distribuições limite, podem ser encontrados em Hosking (1981), Brockwell e Davis (1991), Beran (1994), Doukhan *et. al.* (2003), Morettin e Toloi (2004), Lopes e Nunes (2006) e Palma (2007).

3.3.1 Processos ARFIMA(p, d, q) Não-Estacionários

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q), onde $d = r + \kappa$, com $-0,5 < \kappa < 0,5$ e $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A partir de (3.9), se $\mu = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d X_t = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t &\Leftrightarrow \phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^r (1 - \mathcal{B})^\kappa X_t = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t \\ &\Leftrightarrow \phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^r Y_t = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARIMA(p, r, q), para todo $t \in \mathbb{Z}$, com $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Portanto, r nada mais é do que o número de vezes que o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ deve ser diferenciado até tornar-se estacionário. Observe que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado por $Y_t = (1 - \mathcal{B})^\kappa X_t$, é um processo ARFIMA($0, \kappa, 0$) cujo processo de inovação é o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ARIMA(p, r, q).

Isto indica que, após aplicarmos o filtro $(1 - \mathcal{B})^\kappa$ ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, obtemos um processo ARIMA(p, r, q), com ordem de diferenciação $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entretanto, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser escrito em sua representação auto-regressiva infinita como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.15)$$

conforme o item (ii) do Teorema 3.2. Os coeficientes π_k são obtidos a partir da equação (3.12).

Note que, por ser não-estacionário, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ não possui função densidade espectral. No entanto, segundo Hurvich e Ray (1995), Velasco (1999) e Lopes *et. al.* (2004), a função $f_x(\cdot)$, dada pela expressão (3.11), possui as mesmas características de uma função densidade espectral.

Seja $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(0, d , 0), onde $d \in (-0,5; 0,5)$. Abadir *et. al.* (2007) estendem a função densidade espectral para processos ARFIMA(0, d , 0) não-estacionários, denotando-a por

$$f_x(w) = |1 - e^{iw}|^{-2d_0} f_v(w), \quad \text{para todo } w \in (-\pi, \pi],$$

onde $f_v(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $d_0 > -\frac{3}{2}$.

Quando $d \in (0,5; 1,0)$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é não-estacionário, mas possui reversão à média. Isto influencia de maneira positiva os resultados da estimação do parâmetro de longa dependência d quando utilizamos os estimadores descritos para o caso estacionário (ver Capítulo 4). Quando $d > 1,0$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é não-estacionário e não possui a propriedade de reversão à média. A falta desta característica influencia negativamente a estimativa do parâmetro de diferenciação através dos estimadores descritos para a região estacionária.

Estudos mais detalhados sobre os processos ARFIMA(p, d, q) não estacionários podem ser encontrados em Hurvich e Ray (1995), Velasco (1999), Olbermann (2002), Lopes *et. al.* (2004) e Olbermann *et. al.* (2006).

Capítulo 4

Estimação em Processos ARFIMA

Nesta seção estudamos alguns métodos de estimação dos parâmetros dos processos ARFIMA(p, d, q). Estes estimadores estão divididos em três classes principais: paramétrica, semi-paramétrica e não-paramétrica. Neste trabalho, analisamos estimadores das classes paramétrica e semi-paramétrica.

A seguir, listamos os métodos de estimação do parâmetro d nas classes paramétrica e semi-paramétrica presentes neste trabalho.

1. Método do estimador de máxima verossimilhança, proposto por Beran (1994);
2. Método do estimador de máxima verossimilhança local de Whittle, proposto por Robinson (1995a);
3. Método de regressão utilizando a função periodograma, proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), e sua versão suavizada utilizando a janela de Bartlett;
4. Método de regressão proposto por Kim e Phillips (2006).

Observação 4.1. Em Hurst (1951), o parâmetro de longa dependência é denotado por H . Sabemos que H e d correspondem-se através da expressão $H = d + \frac{1}{2}$. Devido a esta conotação histórica, alguns dos métodos que apresentamos a seguir estão estimando H e não d , conforme definimos na Seção 3.3. No entanto, nas simulações do Capítulo 6, estamos considerando sempre as estimativas do parâmetro d e não do parâmetro H .

4.1 Estimador \hat{d}_{MV}

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico ARFIMA(p, d, q), com $d \in (-0,5; 0,5)$, dado pela Definição 3.6. Diversos autores propõem estimadores para os parâmetros deste processo utilizando a função de máxima verossimilhança. Por

exemplo, Fox e Taqu (1986) propõem o método da máxima verossimilhança com a aproximação sugerida por Whittle (1951). O estimador proposto por estes autores é consistente e possui distribuição normal assintótica, desde que certas condições estejam satisfeitas e que as seqüências apresentem forte dependência. Sowell (1992), por outro lado, apresenta resultados para o estimador de máxima verossimilhança exata, sem utilizar a aproximação sugerida em Fox e Taqu (1986).

Estes dois métodos apresentam o inconveniente de estimarem o valor de d apenas no intervalo de estacionariedade $(-0,5; 0,5)$. Para contornar este problema, Beran (1995) propôs um estimador que é capaz de estimar o valor do parâmetro de diferenciação fracionária para todo $d > -0,5$. Ou seja, basta que o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seja invertível. Assim, qualquer $d > -0,5$ pode ser estimado por uma função de máxima verossimilhança aproximada baseada nos resíduos $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$ do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Nesta seção denotamos por $\boldsymbol{\xi} = (\sigma_\varepsilon^2, d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)' = (\sigma_\varepsilon^2, \boldsymbol{\eta})'$ o vetor desconhecido contendo todos os parâmetros do processo, onde $\boldsymbol{\eta}$ é um vetor de $p + q + 1$ parâmetros. Seja $d = r + \kappa$, onde $-0,5 < \kappa < 0,5$ e $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de acordo com que estudamos na Seção 3.3.1.

Dadas as observações X_1, \dots, X_n de uma série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$, obtida a partir do processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, as inovações $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$ podem ser estimadas a partir dos resíduos

$$\hat{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{k=1}^n \pi_k(\boldsymbol{\eta}) X_{t-k}, \quad \text{para } t = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

onde $\pi_k(\boldsymbol{\eta})$ é dado pela equação (3.12), com \hat{d} no lugar de d .

Definimos os resíduos padronizados por $r_t(\boldsymbol{\xi}) \equiv \hat{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\eta}) / \sqrt{\sigma_\varepsilon^2}$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Assim, o processo estocástico das inovações é dado por

$$\varepsilon_t(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(\boldsymbol{\eta}) X_{t-k}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

e o processo das inovações padronizadas é dado por $\nu_t(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_t(\boldsymbol{\eta}) / \sqrt{\sigma_\varepsilon^2}$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Supondo que as raízes dos polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ do processo ARMA(p, q), dados pela expressão (3.2), estão fora do círculo unitário, é possível mostrar que os coeficientes $\pi_k(\boldsymbol{\eta})$ são continuamente diferenciáveis, com respeito a $\boldsymbol{\eta}$, para toda a região $d \in (-0,5; \infty)$. Assim, podemos definir as derivadas parciais

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\varepsilon}}_t(\boldsymbol{\eta}) &= \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1} \hat{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\eta}), \dots, \frac{\partial}{\partial \eta_{p+q+1}} \hat{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\eta}) \right)', \\ \dot{r}_t(\boldsymbol{\xi}) &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} r_t(\boldsymbol{\xi}), \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_{p+q+2}} r_t(\boldsymbol{\xi}) \right)', \end{aligned}$$

$$\dot{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\eta}) = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1} \varepsilon_t(\boldsymbol{\eta}), \dots, \frac{\partial}{\partial \eta_{p+q+1}} \varepsilon_t(\boldsymbol{\eta}) \right)',$$

e

$$\dot{\nu}_t(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \nu_t(\boldsymbol{\xi}), \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_{p+q+2}} \nu_t(\boldsymbol{\xi}) \right)',$$

A representação (3.15) sugere que podemos estimar $\boldsymbol{\xi}$ minimizando a soma dos resíduos quadráticos

$$S(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{t=2}^n [\hat{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\eta})]^2 \quad (4.2)$$

com respeito a $\boldsymbol{\eta}$ e definir

$$\hat{\xi}_1 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-1} S(\hat{\boldsymbol{\eta}}), \quad (4.3)$$

onde $\hat{\varepsilon}_t(\boldsymbol{\eta})$ é definido por (4.1) e $S(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ é o resultado da minimização da expressão (4.2) com respeito a $\boldsymbol{\eta}$. Obtemos a estimação de $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ ao resolvermos o sistema de $p+q+2$ equações não-lineares

$$\sum_{t=2}^n \{r_t(\boldsymbol{\xi}) \dot{r}_t(\boldsymbol{\xi}) - c(\boldsymbol{\xi})\} = 0, \quad (4.4)$$

onde $c(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}[\nu_t(\boldsymbol{\xi}) \dot{\nu}_t(\boldsymbol{\xi})] = (c_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, c_n(\boldsymbol{\xi}))'$. Note que

$$\begin{aligned} c_1(\boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{(2\xi_1)} \mathbb{E}[\nu_t(\boldsymbol{\xi})]^2 \\ &= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\varepsilon_t(\boldsymbol{\eta})}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2}} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2(\sigma_\varepsilon^2)^2} \mathbb{E} [\varepsilon_t^2(\boldsymbol{\eta})] \\ &= -\frac{1}{2(\sigma_\varepsilon^2)^2} \sigma_\varepsilon^2 \\ &= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \end{aligned}$$

e $c_j(\boldsymbol{\xi}) = 0$, para $j > 1$. Defina $\boldsymbol{\xi}^* = (\sigma_\varepsilon^2, \boldsymbol{\eta}^*)' = (\sigma_\varepsilon^2, \kappa, \eta_2, \dots, \eta_{p+q+1})'$. Isto significa que $\xi_2 = d = r + \kappa$ é substituído por $\xi_2^* = \kappa$. Temos então o teorema a seguir.

Teorema 4.1. *Seja $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ solução do sistema (4.4). Então, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$i) \quad \hat{\boldsymbol{\xi}} \xrightarrow{q.c.} \boldsymbol{\xi};$$

ii) $\sqrt{n}(\hat{\xi} - \xi)$ converge, em distribuição, para um vetor aleatório de distribuição normal com média 0 e matriz de variâncias-covariâncias dada por

$$V = 2D^{-1} \quad (4.5)$$

onde $D = (D_{jk})_{j,k=1}^n$, com

$$D_{jk} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\ln f_X(w)) \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\ln f_X(w)) dw \right] \Big|_{\xi=\xi^*}. \quad (4.6)$$

Demonstração. Ver Beran (1995).

4.2 Estimador \hat{d}_{LW}

Nesta seção, definimos o estimador local de Whittle, denotado por \hat{d}_{LW} . Ao contrário dos outros estimadores que se baseiam na função de máxima verossimilhança aproximada sugerida por Whittle (1951), que são paramétricos, o estimador local de Whittle, proposto por Robinson (1995a), é semi-paramétrico. Este estimador especifica a forma paramétrica da função densidade espectral apenas quando a frequência w está próxima da origem, ou seja,

$$f_X(w) \sim C(H)w^{1-2H}, \quad \text{quando } w \rightarrow 0^+, \quad (4.7)$$

onde $C(H) > 0$ e $H \in (0,1)$ é o parâmetro de Hurst.

Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal advinda de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. O estimador local de Whittle é baseado na função periodograma. Seu cálculo envolve a introdução de um parâmetro adicional $m \in \mathbb{N}$, tal que $m < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $\frac{1}{m} + \frac{m}{n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Como o estimador não é dado em uma forma fechada, é conveniente denotar os valores reais dos parâmetros por $C_0(H_0)$ e H_0 e os valores admissíveis por $C(H)$ e H .

Considere a função objetiva

$$Q_{C(H),H}(w_j) \equiv \frac{1}{g(n)} \sum_{j=1}^{g(n)} \left(\ln(C(H)w_j^{1-2H}) + \frac{w_j^{1-2H}}{C(H)} I(w_j) \right), \quad (4.8)$$

onde $w_j = 2\pi j/n$ é a j -ésima frequência de Fourier, para todo $j = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Definimos o intervalo fechado de possíveis estimativas admissíveis de H_0 como sendo $[\Delta_1, \Delta_2]$, onde Δ_1 e Δ_2 são números tais que $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < 1$. É fácil ver que podemos escolher Δ_1 e Δ_2 tão próximos de 0 e 1, respectivamente, quanto se queira. Mas note que se tivermos alguma informação sobre H_0 *a priori*, podemos utilizá-la para restringir este intervalo. Claramente, a estimativa

$$(\hat{C}(H), \hat{H}) = \arg \min_{\substack{0 < C < \infty \\ H \in (\Delta_1, \Delta_2)}} Q_{C(H),H}(w_j)$$

existe. Podemos escrever

$$\hat{H} = \arg \min_{H \in (\Delta_1, \Delta_2)} R(H), \quad (4.9)$$

onde

$$R(H) = \ln(\hat{C}(H)) - (2H - 1) \frac{1}{g(n)} \sum_{j=1}^{g(n)} \ln(w_j) \quad (4.10)$$

e

$$\hat{C}(H) = \frac{1}{g(n)} \sum_{j=1}^{g(n)} w_j^{2H-1} I(w_j). \quad (4.11)$$

Nas expressões (4.10) e (4.11) acima, tomamos $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Para que o estimador dado pela expressão (4.9) seja não-viciado e consistente, existem quatro hipóteses que devem ser introduzidas.

H1) Quando $w \rightarrow 0^+$,

$$f_X(w) \sim C_0(H_0)w^{1-2H_0},$$

onde $C_0(H_0) > 0$ e $H_0 \in [\Delta_1, \Delta_2]$.

H2) Em uma vizinhança $(0, \delta)$ da origem, $f_X(\cdot)$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dw}(\ln(f_X(w))) = O\left(\frac{1}{w}\right), \quad \text{quando } w \rightarrow 0^+.$$

H3) Temos

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_k \varepsilon_{t-j}, \quad \text{com } \sum_{j=0}^{\infty} \pi_k^2 < \infty, \quad (4.12)$$

onde

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = 1, \quad \text{q.c.,} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

$\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon_s; s \leq t)$ é a σ -álgebra dos eventos gerados por ε_s , $s \leq t$, e existe uma variável aleatória ε tal que $\mathbb{E}(\varepsilon)^2 < \infty$ e para todo $\delta > 0$ e algum $K > 0$, $\mathbb{P}(|\varepsilon_t| > \delta) \leq K\mathbb{P}(|\varepsilon| > \delta)$.

H4) Quando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{m} + \frac{m}{n} \rightarrow 0.$$

Observação 4.2. A hipótese H1 é apenas o modelo dado por (4.7), onde $H_0 \in [\Delta_1, \Delta_2]$, enquanto H2 é uma condição de regularidade análoga àquela imposta por Fox e Taqqu (1986). A hipótese H3 exige que as inovações representadas em (4.12) sejam uma diferença de martingales quadrado-integráveis

que não necessitam ser estritamente estacionárias, mas satisfazem uma condição de homogeneidade. A hipótese H4 apenas impõe que m deve tender ao infinito para a consistência do estimador, mas de forma mais lenta do que o tamanho amostral n , pois H1 especifica uma condição sobre $f_x(w)$, quando $w \rightarrow 0^+$.

Se as quatro hipóteses acima são verdadeiras, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico tal que as hipóteses H1-H4 valem. Então,*

$$\hat{H} \xrightarrow{\mathbb{P}} H, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Ver Robinson (1995a). □

Para que o estimador \hat{d}_{LW} seja assintoticamente normal, as hipóteses H1-H4 anteriores devem ser substituídas por outras, dadas a seguir.

H1') Para algum $\beta \in (0, 2]$,

$$f_x(w) \sim C_0(H_0)w^{1-2H_0}(1 + O(w^\beta)), \quad \text{quando } w \rightarrow 0^+,$$

onde $C_0(H_0) > 0$ e $H_0 \in [\Delta_1, \Delta_2]$.

H2') Em uma vizinhança $(0, \delta)$ da origem, $\alpha(\cdot)$ é uma função diferenciável tal que

$$\frac{d}{dw}(\alpha(w)) = O\left(\frac{|\alpha(w)|}{w}\right), \quad \text{quando } w \rightarrow 0^+,$$

onde $\alpha(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{ikw}$.

H3') Além do que assumimos em H3, supomos que

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^3 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_3 \quad \text{q.c. e} \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_4, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde μ_3 e μ_4 são constantes finitas.

H4') Quando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{m} + \frac{m^{1+2\beta}(\ln(m))^2}{n^{2\beta}} \rightarrow 0,$$

para alguma constante $\beta \in (0, 2]$.

Observação 4.3. A hipótese H2' impõe uma taxa de convergência em (4.7) análoga às condições de suavidade utilizadas na teoria assintótica das estimativas do poder da densidade espectral. H2' implica H2, pois $f_x(w) = \frac{|\alpha(w)|^2}{2\pi}$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário de quarta ordem graças à hipótese H3', e vale para um processo ruído branco $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ com quarto momento finito. A hipótese H4', assim como H4, permite que m cresça tanto quanto se queira, mas sempre permanecendo menor do que o tamanho amostral n .

Caso as hipóteses $H1'$ - $H4'$ estejam satisfeitas, o seguinte teorema vale.

Teorema 4.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico tal que as hipóteses $H1'$ - $H4'$ valem. Então,*

$$m^{\frac{1}{2}}(\hat{H} - H_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{1}{4}\right), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Ver Robinson (1995a). □

Da literatura em séries temporais, sabemos que o parâmetro H , coeficiente de Hurst, estimado por \hat{d}_{LW} , corresponde-se com o parâmetro d de um processo ARFIMA(p, d, q) através da expressão

$$H = d + \frac{1}{2}.$$

4.3 Estimador \hat{d}_{GPH}

O estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), baseado na função periodograma $I(\cdot)$ dada por (2.10), é apresentado nesta seção. O estimador é obtido a partir do método de regressão linear simples.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q), dado pela expressão (3.9). Aplicamos o logaritmo em ambos os lados da função densidade espectral deste processo, dada pela expressão (3.13), e obtemos

$$\begin{aligned} \ln(f_x(w)) &= \ln\left(2 \sin\left(\frac{w}{2}\right)^{-2d}\right) + \ln(f_u(w)) \\ &= \ln(f_u(w)) - d \ln\left(2 \sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se adicionarmos $\ln(f_u(0))$ e $\ln(I(w))$ a ambos os lados da equação (4.13), obtemos

$$\ln(I(w)) = \ln(f_u(0)) - d \ln\left(2 \sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)^2 + \ln\left(\frac{f_u(w)}{f_u(0)}\right) + \ln\left(\frac{I(w)}{f_x(w)}\right). \quad (4.14)$$

Substituindo w pelas frequências de Fourier $w_j = 2\pi j/n$, para $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, na equação (4.14), obtemos

$$\ln(I(w_j)) = \ln(f_u(0)) - d \ln\left(2 \sin\left(\frac{w_j}{2}\right)\right)^2 + \ln\left(\frac{f_u(w_j)}{f_u(0)}\right) + \ln\left(\frac{I(w_j)}{f_x(w_j)}\right). \quad (4.15)$$

Se considerarmos o limite máximo de j igual a $g(n)$, que é escolhido de maneira tal que $g(n)/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e $w_j \leq w_{g(n)}$, onde $w_{g(n)}$

é pequeno, o termo $\ln\left(\frac{f_U(w_j)}{f_U(0)}\right)$ torna-se desprezível se comparado com os outros termos da equação (4.15). Assim, obtemos uma forma aproximada para a equação (4.15), dada por

$$\ln(I(w_j)) \simeq \ln(f_U(0)) - d \ln\left(2 \sin\left(\frac{w_j}{2}\right)\right)^2 + \ln\left(\frac{I(w_j)}{f_X(w_j)}\right). \quad (4.16)$$

Note que (4.16) é uma forma aproximada da equação de regressão linear simples dada por

$$y_j \simeq a + bx_j + \epsilon_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde

$$y_j = \ln(I(w_j)), \quad x_j = \ln\left(2 \sin\left(\frac{w_j}{2}\right)\right)^2, \quad \epsilon_j = \ln\left(\frac{I(w_j)}{f_X(w_j)}\right) + c,$$

$$b = -d, \quad a = \ln(f_U(0)) - c, \quad c = \mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{I(w_j)}{f_X(w_j)}\right)\right).$$

Utilizando o método de mínimos quadrados, encontramos o estimador para o parâmetro d proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), denotado por \hat{d}_{GPH} , e dado por

$$\hat{d}_{GPH} = -\frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}, \quad (4.17)$$

com

$$\mathbb{E}(\hat{d}_{GPH}) \cong d, \quad \text{Var}(\hat{d}_{GPH}) \cong \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}, \quad (4.18)$$

onde $\bar{x} = \frac{1}{g(n)} \sum_{j=1}^{g(n)} x_j$.

O teorema, a seguir, fornece as propriedades do estimador \hat{d}_{GPH} , dado em (4.17), ser assintoticamente não-viciado e de ter distribuição assintótica normal (ver Geweke e Porter-Hudak, 1983).

Teorema 4.4 (Geweke e Porter-Hudak). *Sejam $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo AR-FIMA(p, d, q) dado por (3.9), com $d \in (-0,5; 0)$ e \hat{d}_{GPH} dado pela expressão (4.17). Suponha que $g(n) = n^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ satisfaça $g(n) \rightarrow \infty$ e $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$,*

quando $n \rightarrow \infty$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{d}_{GPH}) = d$. Ainda, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\ln(n)]^2}{n} = 0$, então

$$\frac{\hat{d}_{GPH} - d}{\sqrt{\text{Var}(\hat{d}_{GPH})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

onde $Z \sim N(0, 1)$ e $\text{Var}(\hat{d}_{GPH})$ é dada pela expressão (4.18).

Observação 4.4. Em Robinson (1995b), o resultado do Teorema 4.4 foi estendido para $d \in (-0,5; 0,5)$.

4.4 Estimador \hat{d}_{GPHBa}

Nesta seção apresentamos o estimador \hat{d}_{GPHBa} , que utiliza a janela de Bartlett, dada na expressão (2.13), para suavizar a função periodograma. Para obtermos o estimador \hat{d}_{GPHBa} , substituímos a função periodograma em (4.16) pela função periodograma suavizado $f_s(\cdot)$, dada por (2.12). Assim,

$$\ln(f_s(w_j)) \simeq \ln(f_U(0)) - d \ln \left(2 \sin \left(\frac{w_j}{2} \right) \right)^2 + \ln \left(\frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)} \right). \quad (4.19)$$

Da mesma forma que (4.16), a equação (4.19) é uma forma aproximada da equação de regressão linear simples, ou seja,

$$y_j \simeq a + bx_j + \epsilon_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde

$$y_j = \ln(f_s(w_j)), \quad x_j = \ln \left(2 \sin \left(\frac{w_j}{2} \right) \right)^2, \quad \epsilon_j = \ln \left(\frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)} \right) + c,$$

$$b = -d, \quad a = \ln(f_U(0)) - c \quad \text{e} \quad c = \mathbb{E} \left(\ln \left(\frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)} \right) \right).$$

Portanto, o estimador de \hat{d}_{GPHBa} , através do método de mínimos quadrados ordinários, é dado por

$$\hat{d}_{GPHBa} = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}, \quad (4.20)$$

com

$$\mathbb{E}(\hat{d}_{GPHBa}) \cong d, \quad \text{Var}(\hat{d}_{GPHBa}) \cong 0,53928 \frac{g(n)}{n \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}, \quad (4.21)$$

onde \bar{x} é a média de x_j , para $j = 1, \dots, g(n)$ e $0,53928 \frac{g(n)}{n}$ é a variância assintótica de $\ln \left(\frac{f_s(w_j)}{f_X(w_j)} \right)$.

Teorema 4.5. *Sejam $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q) dado por (3.9), com $d \in (-0,5; 0)$ e \hat{d}_{GPHBa} dado pela expressão (4.20). Suponha que $g(n) = n^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ satisfaça $g(n) \rightarrow \infty$ e $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{d}_{GPHBa}) = d$. Ainda, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\ln(n)]^2}{n} = 0$, então*

$$\frac{\hat{d}_{GPHBa} - d}{\sqrt{\text{Var}(\hat{d}_{GPHBa})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

onde $Z \sim N(0, 1)$ e $\text{Var}(\hat{d}_{GPHBa})$ é dada pela expressão (4.21).

4.5 Estimador \hat{d}_{KP}

Nesta seção descrevemos o estimador proposto por Kim e Phillips (2006). Assim como os estimadores \hat{d}_{GPH} e \hat{d}_{GPHBa} , estudados nas Seções 4.3 e 4.4, respectivamente, o estimador \hat{d}_{KP} utiliza a função periodograma, dada pela expressão (2.10), para estimar o valor do parâmetro d .

Estudos como o de Agiakloglou *et. al.* (1993) sugerem que o estimador \hat{d}_{GPH} é viciado na presença dos polinômios $\phi(\cdot)$ ou $\theta(\cdot)$ de graus 1, dados pela expressão (3.2). Por esta razão, Kim e Phillips (2006) propõem um novo estimador baseado na função periodograma, aplicável em processos ARFIMA(p, d, q) tais que $d \geq 0,5$ e $p, q \in \{0, 1\}$.

O procedimento para a construção do estimador \hat{d}_{KP} é similar ao do estimador \hat{d}_{GPH} . Para isto, escrevemos a expressão

$$\ln(I(w_j)) = c - 2d \ln(|1 - e^{iw_j}|) + b(w_j), \quad (4.22)$$

onde

$$b(w_j) = a(w_j) + \ln \left(\frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right) + O \left(\frac{1}{j^{1-d}} \right),$$

$$a(w_j) = \ln \left(\frac{I(w_j)}{f_U(0)} \right) \quad \text{e} \quad c = \ln(f_U(0)).$$

O estimador \hat{d}_{KP} é obtido ao considerarmos a regressão de $\ln(I(w_j))$ em $\ln(|1 - e^{iw_j}|)$ sobre as frequências de Fourier w_j , para todo $j \in \{1, \dots, g(n)\}$. A regressão é dada por

$$\hat{d}_{KP} = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} x_j \ln(I(w_j))}{2 \sum_{j=1}^{g(n)} x_j^2}, \quad (4.23)$$

onde $x_j = \ln(|1 - e^{iw_j}|) - \overline{\ln(|1 - e^{iw_j}|)}$, com $\overline{\ln(|1 - e^{iw_j}|)} = \frac{1}{g(n)} \sum_{j=1}^{g(n)} \ln(|1 - e^{iw_j}|)$.

Kim e Phillips (2006) também consideram uma versão deste estimador onde nem todas as frequências de Fourier são utilizadas na regressão linear da expressão (4.22). Para este caso, os dados não necessitam ser Gaussianos. Este estimador é dado por

$$\hat{d}_{KP} = -\frac{\sum_{j=l}^{g(n)} x_j \ln(I(w_j))}{2 \sum_{j=l}^{g(n)} x_j^2}, \quad (4.24)$$

onde $j = 1, \dots, l-1$ são retirados da regressão (4.22). Com isto, o seguinte teorema pode ser enunciado:

Teorema 4.6. *Se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q) dado pela expressão (3.9), com $d \geq 0,5$ e \hat{d}_{KP} é o estimador dado pela expressão (4.24), então*

$$\sqrt{g(n)} \frac{\hat{d}_{KP} - d}{\sqrt{\text{Var}(\hat{d}_{KP})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{\pi^2}{24}\right), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

onde $\text{Var}(\hat{d}_{KP})$ é dada por

$$\text{Var}(\hat{d}_{KP}) = \frac{\pi^2}{24g(n)}.$$

Demonstração. Ver Kim e Phillips (2006). □

Novamente, o problema é definir um valor ótimo para $g(n)$. Geweke e Porter-Hudak (1983) sugerem $g(n) = n^\alpha$, onde $\alpha = 0,5$. Kim e Phillips (2006) propõem $g(n) = n^\alpha$, para $\alpha \in (0,7; 0,8)$. Por outro lado, Choi e Zivot (2005) utilizam três valores diferentes de α em seu trabalho: $\alpha \in \{0,7; 0,75; 0,8\}$. Lopes *et. al.* (2004) utilizam $\alpha = 0,5$, o mesmo valor proposto no artigo original de Geweke e Porter-Hudak (1983). Os trabalhos Lopes e Mendes (2006) e Lopes e Nunes (2006) optam por avaliar o desempenho da classe dos estimadores semi-paramétricos através de um grande número de valores de α . Em Lopes e Mendes (2006), os valores de α são tais que $\alpha \in \{0,50; 0,52; 0,54; \dots, 0,84; 0,86\}$, enquanto Lopes e Nunes (2006) se valem de $\alpha \in \{0,50; 0,51; 0,52; \dots, 0,94; 0,95\}$.

Neste trabalho, utilizamos $\alpha \in \{0,5; 0,6; 0,65; 0,7; 0,75; 0,8\}$ para os estimadores \hat{d}_{GPH} , \hat{d}_{GPHBa} e \hat{d}_{KP} .

4.6 Estimação em Processos ARMA

Note que, exceto pelo estimador \hat{d}_{MV} , definido na Seção 4.1, todos os métodos apresentados na Seção 4 estimam apenas o valor do parâmetro d de um processo ARFIMA(p, d, q). Para que tenhamos todos os parâmetros do processo

estimados, necessitamos recorrer a outra técnica de estimação, ainda não descrita. Devido a isto, apresentamos nesta seção como proceder na estimação dos parâmetros dos polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$, definidos na expressão (3.2), dos processos ARMA(p, q).

Seja um processo ARFIMA(p, d, q) dado pela expressão (3.9). Para proceder com a estimação dos parâmetros dos polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$, escolhemos um dos métodos de estimação para o parâmetro d descritos na Seção 4¹. Com o valor estimado de d , sabemos por (3.9) que $X_t = \nabla^{-d}U_t$, onde $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARMA(p, q). Sabemos, por Brockwell e Davis (1991), que se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico que satisfaz

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo ruído branco, então vale a relação

$$J_X(\zeta) = (1 - e^{-i\zeta})J_U(\zeta) + Y_n(\zeta), \quad (4.25)$$

onde $J_X(\cdot)$ e $J_U(\cdot)$ são as transformadas discretas de Fourier de $\{X_t\}_{t=1}^n$ e $\{U_t\}_{t=1}^n$, respectivamente. Ignorando o termo $Y_n(\cdot)$, o qual converge em probabilidade a zero, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos a relação

$$J_U(\zeta) = (1 - e^{-i\zeta})^{-\hat{d}} J_X(\zeta). \quad (4.26)$$

Note que se aplicarmos a transformada inversa de Fourier em ambos os lados de (4.26), obtemos as estimativas do processo $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dadas por

$$\tilde{U}_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_j e^{itw_j} (1 - e^{-iw_j})^{-\hat{d}} J_X(w_j) \quad (4.27)$$

onde o somatório é tomado sobre todas as frequências de Fourier $w_j \in (-\pi, \pi]$.

Desta forma, as estimativas das ordens e dos coeficientes de $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ do processo $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ podem ser obtidas através do método da *máxima verossimilhança*, descrito a seguir.

Seja $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q). Definimos o vetor $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2)'$, onde $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$. Desta forma, o vetor $\boldsymbol{\xi}$ possui $p + q + 1$ parâmetros. Defina o vetor $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})'$.

Para estimar $\boldsymbol{\xi}$, consideramos a função de verossimilhança $\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi}|U_1, \dots, U_n)$ como função de $\boldsymbol{\xi}$. Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de $\boldsymbol{\xi}$ que maximizam $\mathcal{L}(\cdot)$ ou $\ln(\mathcal{L}(\cdot))$.

¹ Apesar de estimar todos os parâmetros do modelo, o estimador \hat{d}_{MV} pode ser utilizado neste caso também, desde que apenas o valor do parâmetro d esteja sendo estimado.

Suponhamos, a partir de agora, que o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco Gaussiano. Desta forma, para todo $t \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Assim, os estimadores de máxima verossimilhança serão aproximadamente estimadores de mínimos quadrados ordinários.

Suponhamos que $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seja um processo ARMA(p, q) causal, definido na Seção 3.1, dado pela expressão

$$U_t = \phi_1 U_{t-1} + \cdots + \phi_p U_{t-p} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (4.28)$$

onde $\theta_0 = 1$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo ruído branco Gaussiano dado pela Definição 2.12. Ao assumirmos a causalidade do processo, garantimos que $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$. Além disso, assumimos que os coeficiente θ_i , para $i = 1, \dots, q$, foram ajustados de maneira a garantir que $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$. Assim, nosso problema é determinar as estimativas de máxima verossimilhança para os vetores de parâmetros $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$, além da variância σ_ε^2 do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Desta forma, a função densidade conjunta do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_\varepsilon(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_\varepsilon)^{-n} \exp \left\{ - \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right\}. \quad (4.29)$$

Para calcularmos U_1, \dots, U_n a partir de (4.28), vamos supor que são dados p valores de U_t e q valores de ε_t , denotados por U_t^* e ε_t^* , respectivamente. A função de verossimilhança $L(\cdot)$ de um processo ARMA(p, q), condicional a esta escolha dos U_t e ε_t , é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\xi} | \mathbf{U}, \mathbf{U}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_\varepsilon)^{-n} \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^n (U_t - \phi_1 U_{t-1} - \cdots \right. \\ &\quad \left. - \phi_p U_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q})^2 \right\}. \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo de $L(\cdot)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\xi} | \mathbf{U}, \mathbf{U}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*) &= \ln(L(\boldsymbol{\xi} | \mathbf{U}, \mathbf{U}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*)) \\ &= -n \ln(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{S(\boldsymbol{\eta} | \mathbf{U}, \mathbf{U}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*)}{2\sigma_\varepsilon^2}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde

$$S(\boldsymbol{\eta} | \mathbf{U}, \mathbf{U}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 (\boldsymbol{\eta} | \mathbf{U}, \mathbf{U}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad (4.31)$$

é chamada *soma de quadrados condicional*. Denotamos por \mathcal{L}^* e S^* , respectivamente, a função de log-verossimilhança e soma de quadrados condicionais

a \mathbf{U} , \mathbf{U}^* e $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. Podemos escrever (4.30) e (4.31) como

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\xi}) = -n \ln(\sigma_{\varepsilon}^2) - \frac{S^*(\boldsymbol{\eta})}{2\sigma_{\varepsilon}^2}, \quad (4.32)$$

$$S^*(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\eta} | \mathbf{U}, \mathbf{U}^*, \boldsymbol{\varepsilon}^*). \quad (4.33)$$

Disto, segue que minimizar $\mathcal{L}^*(\cdot)$ é equivalente a minimizar $S^*(\cdot)$. Os estimadores de máxima verossimilhança serão os estimadores de mínimos quadrados ordinários e a análise de $\mathcal{L}^*(\cdot)$ é equivalente à análise de $S^*(\cdot)$.

4.7 Dois Exemplos de Análise de Séries Temporais

Nos exemplos a seguir apresentamos os resultados da estimação dos parâmetros de duas séries temporais $\{X_t\}_{t=1}^n$ simuladas. No Exemplo 4.1, estimamos o parâmetro de diferenciação fracionária d em uma série temporal advinda de um processo ARFIMA(0, d , 0). No Exemplo 4.2, estimamos os parâmetros de um processo ARFIMA(1, d , 1) de forma direta, utilizando o estimador definido na Seção 4.1, e em duas etapas, como descrito na Seção 4.6.

Exemplo 4.1. Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma amostra de tamanho $n = 1000$ de um processo ARFIMA(0, d , 0) simulado, com $d = 0,4$. A Figura 4.1 apresenta o gráfico desta série temporal.

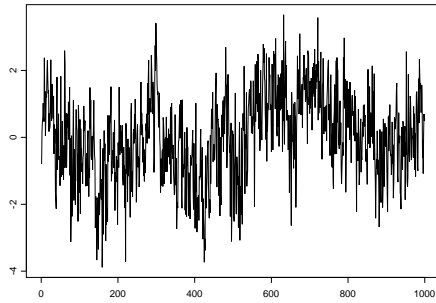


Figura 4.1: Série Temporal $\{X_t\}_{t=1}^{1000}$ do Exemplo 4.1.

Para estimar o parâmetro deste processo estocástico, utilizamos os métodos de estimação descritos na Seção 4.

Note que a função periodograma destes dados, apresentada na Figura 4.2(a), exibe um pico na frequência 0. De acordo com a Seção 3.3, este é um

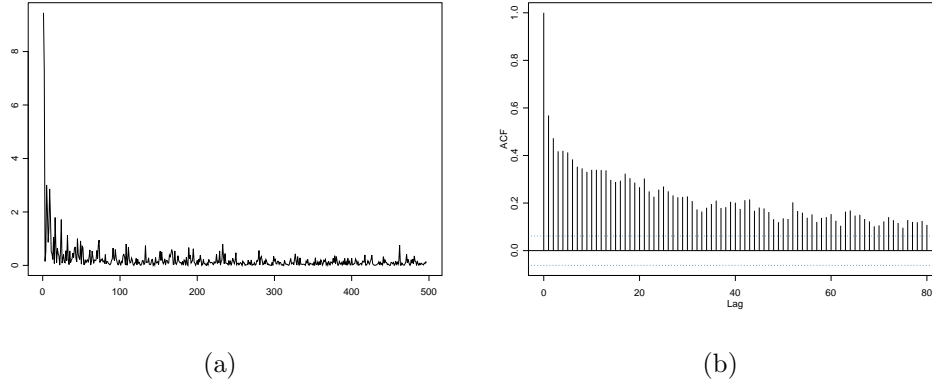


Figura 4.2: (a) Função Periodograma; (b) Função de Autocorrelação Amostral da Série Temporal do Exemplo 4.1.

Tabela 4.1: Resultados da Estimação do Parâmetro de Diferenciação Fracionária d Baseados na Série Temporal do Exemplo 4.1.

Método de Estimação	Estimador
\hat{d}_{MV}	0,4092
\hat{d}_{LW}	0,3766
\hat{d}_{GPH}	0,4176
\hat{d}_{GPHBa}	0,6699
\hat{d}_{KP}	0,4490

indício da existência de longa dependência nos dados. Além disso, a função de autocorrelação amostral, apresentada na Figura 4.2(b), dá sinais de um decaimento lento, outra característica de persistência nos dados. Assim, podemos supor que um modelo adequado para ajustar estes dados é o processo $ARFIMA(p, d, q)$.

Na Tabela 4.1 apresentamos os resultados da estimação do parâmetro de diferenciação fracionária da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{1000}$. Para obter os resultados da estimação exibidos nesta tabela, utilizamos $\alpha = 0,8$, onde $g(n) = n^\alpha = 1000^{0,8} = 251$. Observe que o estimador \hat{d}_{GPHBa} superestima em muito (mais do que \hat{d}_{GPH}) o verdadeiro valor do parâmetro d . Os melhores estimadores para este parâmetro, neste exemplo, parecem ser \hat{d}_{MV} e \hat{d}_{GPH} , nesta ordem.

A análise dos dados é finalizada por uma análise de resíduos através dos gráficos nas Figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6. Observe, na Figura 4.3, os QQ-Plots dos resíduos das séries ajustadas. Note que todos os pontos aproximam-se de uma reta, indicando que os resíduos têm distribuição normal.

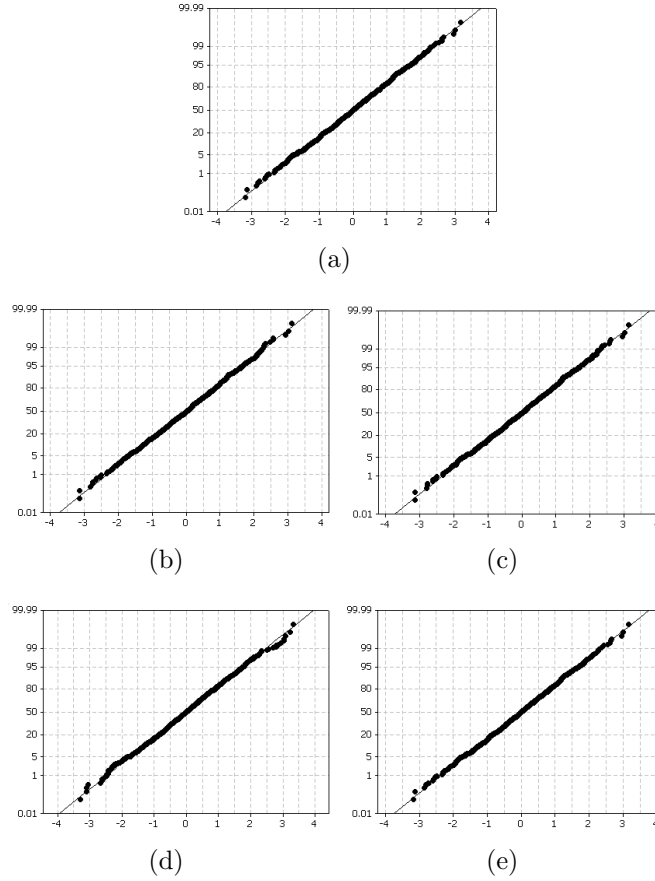


Figura 4.3: QQ-Plot dos Resíduos do Modelo Ajustado para o Exemplo 4.1 de acordo com o Método de Estimação: (a) \hat{d}_{MV} ; (b) \hat{d}_{LW} ; (c) \hat{d}_{GPH} ; (d) \hat{d}_{GPHBa} ; (e) \hat{d}_{KP} .

Da mesma maneira, os histogramas dos resíduos, apresentados na Figura 4.4, devido à sua forma, sugerem a normalidade destes resíduos.

Na Figura 4.5 apresentamos os gráficos das funções de autocorrelação amostral para a série temporal analisada de acordo com os diversos métodos de estimação utilizados. Note que alguns estimadores falharam em encontrar um modelo adequado para a série, pois os resíduos da mesma exibem correlação em ordens diferentes de 0.

Por fim, na Figura 4.6, podemos observar os gráficos das funções de autocorrelação parcial da série temporal analisada. Note que, assim como no caso da função de autocorrelação amostral, os métodos de estimação não foram capazes de encontrar um modelo que se adequasse aos dados simulados.

Exemplo 4.2. Seja $\{X_t\}_{t=1}^{1000}$ uma amostra de tamanho $n = 1000$ de um processo ARFIMA(1, d , 1) simulado, com $\phi_1 = 0,8$, $\theta_1 = 0,3$ e $d = 0,4$. A Figura 4.7 apresenta o gráfico desta série temporal.

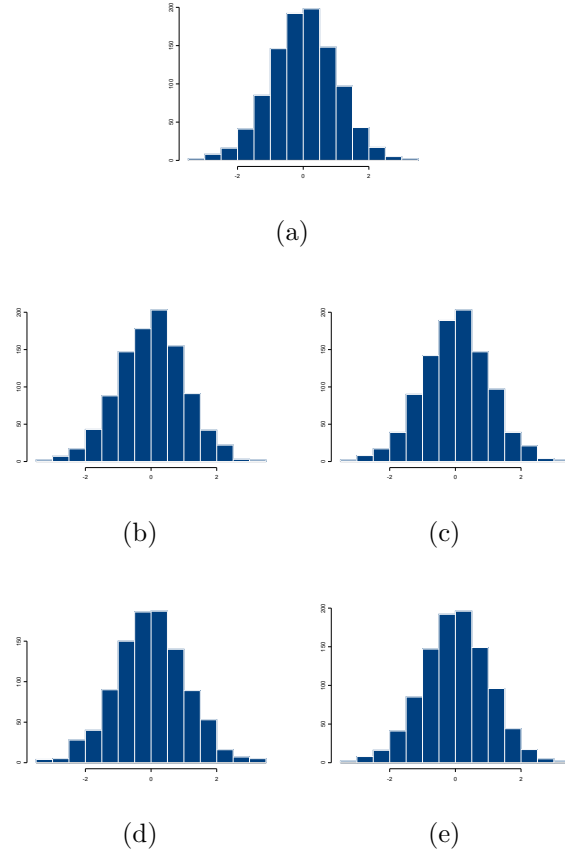


Figura 4.4: Histograma dos Resíduos do Modelo Ajustado para o Exemplo 4.1 de Acordo com o Método de Estimação: (a) \hat{d}_{MV} ; (b) \hat{d}_{LW} ; (c) \hat{d}_{GPH} ; (d) \hat{d}_{GPHBa} ; (e) \hat{d}_{KP} .

Para estimar os parâmetros desta série temporal, utilizamos os métodos de estimação descritos no Capítulo 4. Primeiramente, utilizamos o método de máxima verossimilhança, descrito na Seção 4.1, que estima todos os parâmetros do modelo ARFIMA(1, d , 1). Em uma segunda etapa, estimamos os valores de \hat{d} segundo os métodos descritos nas Seções 4.2-4.5. Como estes métodos estimam apenas o parâmetro d do modelo ARFIMA(0, d , 0), precisamos utilizar o método descrito na Seção 4.6 para obtermos a estimação dos parâmetros dos polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$.

Note que a função periodograma destes dados, apresentada na Figura 4.8(a), exibe um pico na frequência 0. De acordo com a Seção 3.3, este é um indício da existência de longa dependência nos dados. Por outro lado, a função de autocorrelação amostral, apresentada na Figura 4.8(b), dá sinais de decaimento lento, outra característica de persistência nos dados. Assim, podemos supor que um modelo adequado para ajustar estes dados é o processo

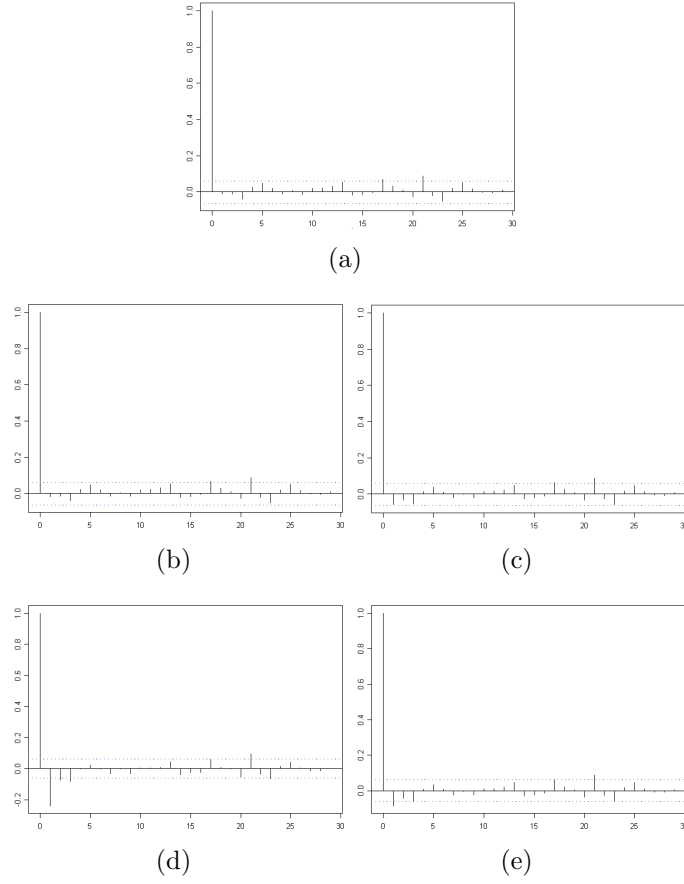


Figura 4.5: Função de Autocorrelação Amostral dos Resíduos do Modelo Ajustado para o Exemplo 4.1 de Acordo com o Método de Estimação: (a) \hat{d}_{MV} ; (b) \hat{d}_{LW} ; (c) \hat{d}_{GPH} ; (d) \hat{d}_{GPHBa} ; (e) \hat{d}_{KP} .

ARFIMA(p, d, q).

O primeiro estimador que utilizamos para ajustar um ARFIMA(p, d, q) à série temporal é o estimador de máxima verossimilhança, descrito na Seção 4.1. Com este método, somos capazes de estimar todos os parâmetros do modelo ARFIMA($1, d, 1$) em apenas um passo. Os resultados obtidos com estes estimadores são apresentados na Tabela 4.2. Observamos aqui as excelentes estimativas para os três parâmetros.

Note que os valores estimados para os parâmetros do processo ARFIMA($1, d, 1$) ficaram bastante próximos dos seus valores nominais. Assim, o modelo ajustado para a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{1000}$, através do estimador de máxima verossimilhança apresentado na Seção 4.1, é dado por

$$(1 - 0,7587\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^{0,3993}(X_t + 2,3541) = (1 - 0,2492\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, 1000,$$

onde $\bar{X} = 2,3541$ é a média da série temporal. Na Figura 4.9 apresentamos a análise de resíduos do modelo ajustado.

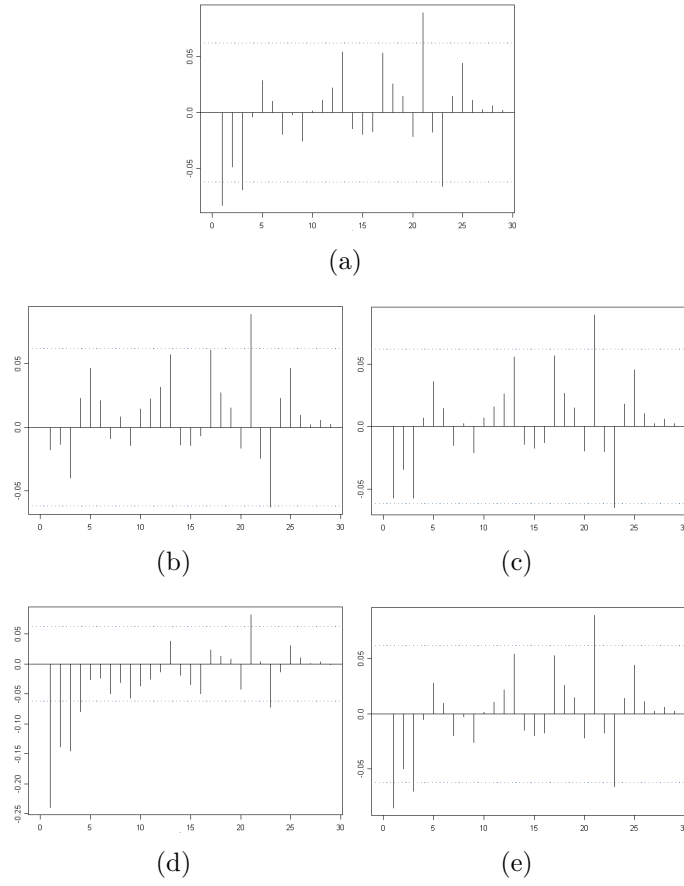


Figura 4.6: Função de Autocorrelação Parcial Amostral dos Resíduos do Modelo Ajustado para o Exemplo 4.1 de Acordo com o Método de Estimação: (a) \hat{d}_{MV} ; (b) \hat{d}_{LW} ; (c) \hat{d}_{GPH} ; (d) \hat{d}_{GPHBa} ; (e) \hat{d}_{KP} .

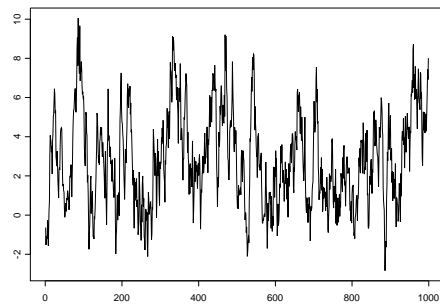


Figura 4.7: Série Temporal $\{X_t\}_{t=1}^{1000}$ do Exemplo 4.2.

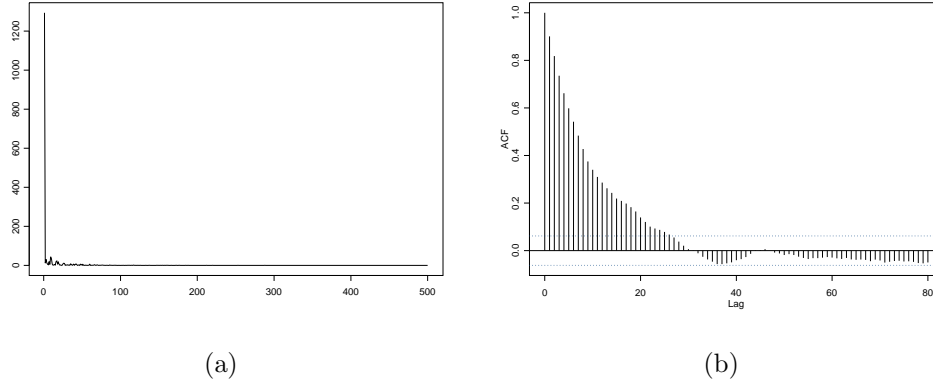


Figura 4.8: (a) Função Periodograma; (b) Função de Autocorrelação Amostral da Série Temporal do Exemplo 4.2.

Tabela 4.2: Resultados da Estimação dos Parâmetros Baseados na Série Temporal do Exemplo 4.2, Através do Método de Estimação da Seção 4.1.

Estimador	$\hat{\phi}$	\hat{d}_{MV}	$\hat{\theta}$
Valor	0,7587	0,3993	0,2492

O QQ-Plot dos resíduos da série ajustada, apresentado na Figura 4.9(a), aproxima-se de uma reta, indicando que os resíduos têm distribuição normal. Da mesma maneira, o histograma destes resíduos, apresentado na Figura 4.9(b), devido à sua forma, sugerem a normalidade destes resíduos.

Na Figura 4.9(c) apresentamos o gráfico da função de autocorrelação amostral para a série temporal analisada. Note que todos os valores da função estão dentro do intervalo de confiança, ou seja, os resíduos do modelo ajustado não exibem correlação em ordens diferentes de 0.

Por fim, na Figura 4.9(d), podemos observar o gráfico da função de autocorrelação parcial da série temporal analisada. Note que, assim como no caso da função de autocorrelação amostral, o método de estimação utilizado foi capaz de encontrar um modelo que se adequasse aos dados simulados.

Agora vamos considerar a segunda análise. Para obter os resultados da estimação exibidos na Tabela 4.3, utilizamos $\alpha = 0,7$, onde $g(n) = n^\alpha = 1000^{0,7} = 125$.

A presença dos polinômios auto-regressivo e de média móvel influenciou os estimadores do parâmetro d , fazendo com que as estimativas caíam na região de não-estacionariedade. Para que possamos prosseguir com a estimação dos parâmetros dos polinômios $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$, é necessário diferenciar a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ por \hat{d} , de acordo com o método descrito na Seção 4.6.

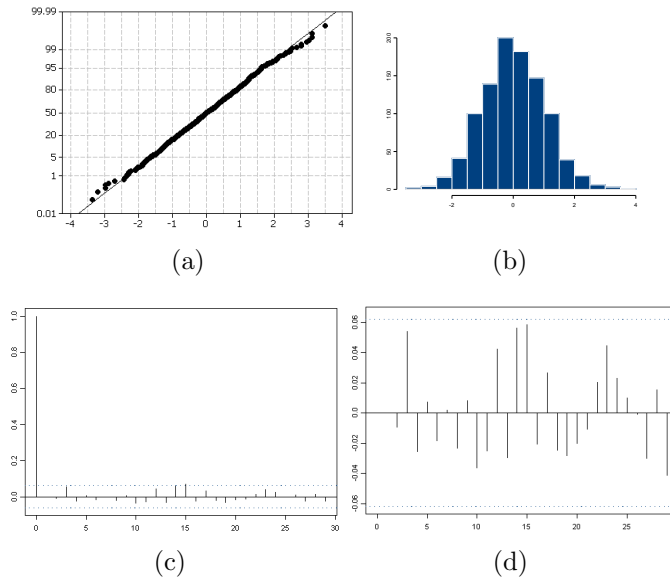


Figura 4.9: Análise dos Resíduos do Ajuste da Série Temporal do Exemplo 4.2: (a) QQ-Plot; (b) Histograma; (c) Função de Autocorrelação Amostral; (d) Função de Autocorrelação Parcial Amostral.

Tabela 4.3: Resultados da Estimação do Parâmetro de Diferenciação Fracionária d Baseados na Série Temporal do Exemplo 4.2.

Método de Estimação	Estimador
\hat{d}_{LW}	1,2680
\hat{d}_{GPH}	0,6495
\hat{d}_{GPHBa}	0,5685
\hat{d}_{KP}	0,5952

Tabela 4.4: Resultados da Estimação dos Parâmetros do Processo ARMA(1,1) do Exemplo 4.2.

Método de Estimação	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
\hat{d}_{LW}	0,7110	0,9973
\hat{d}_{GPH}	0,5946	0,3517
\hat{d}_{GPHBa}	0,6532	0,3335
\hat{d}_{KP}	0,6345	0,3403

A Tabela 4.4 apresenta os resultados da estimação dos coeficientes ϕ_1 e θ_1 destes polinômios. Através da Tabela 4.3 observamos que, neste exemplo, todos os estimadores superestimam o verdadeiro valor do parâmetro d , sendo \hat{d}_{LW} o pior entre eles. Novamente, através da Tabela 4.4, observamos que os estimadores do parâmetro ϕ_1 foram subestimados, enquanto que os do parâmetro θ_1 foram superestimados. Este resultados são decorrência das péssimas estimativas do parâmetro d , apresentadas na Tabela 4.3.

O ajuste desta série temporal é finalizado por uma análise dos resíduos dos modelos ajustados. Para isto, utilizamos os gráficos apresentados nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13. Observe, na Figura 4.10, os QQ-Plots dos resíduos das séries ajustadas. Note que todos os pontos aproximam-se de uma reta, indicando que os resíduos têm distribuição normal.

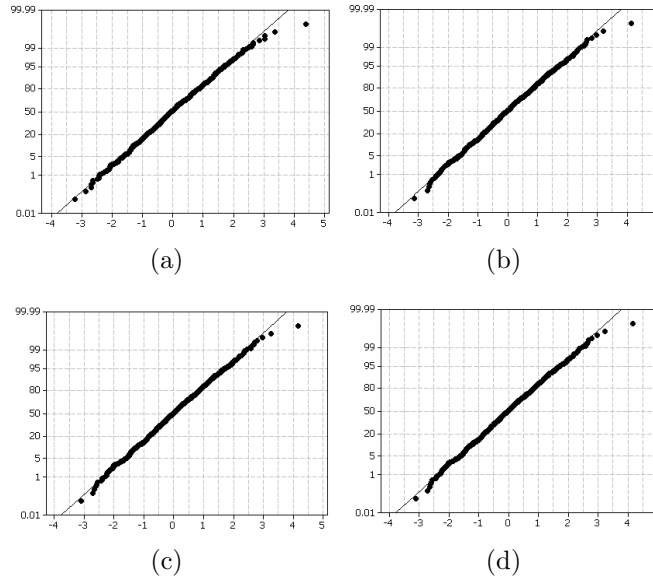


Figura 4.10: QQ-Plot dos Resíduos do Modelo ARMA(1,1) Ajustado para o Exemplo 4.2, Após a Diferenciação Fracionária, de Acordo com o Método de Estimação: (a) \hat{d}_{LW} ; (b) \hat{d}_{GPH} ; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) \hat{d}_{KP} .

Da mesma maneira, os histogramas dos resíduos, apresentados na Figura 4.4, devido à sua forma, sugerem a normalidade destes resíduos.

Na Figura 4.12 apresentamos os gráficos das funções de autocorrelação amostral para a série temporal analisada de acordo com os diversos métodos de estimação utilizados. Note que alguns estimadores falharam em encontrar um modelo adequado para a série, pois os resíduos da mesma exibem correlação em ordens diferentes de 0.

Por fim, na Figura 4.13, podemos observar os gráficos das funções de autocorrelação parcial da série temporal analisada. Note que, assim como no caso da função de autocorrelação amostral, os métodos de estimação não

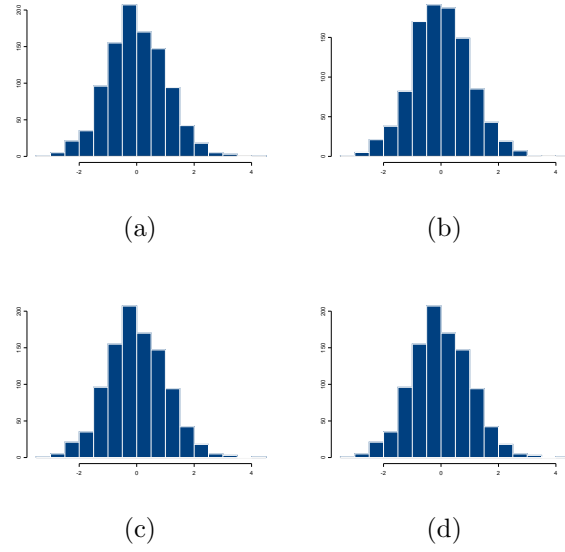


Figura 4.11: Histograma dos Resíduos do Modelo ARMA(1,1) Ajustado para o Exemplo 4.2, Após a Diferenciação Fracionária, de Acordo com o Método de Estimação: (a) \hat{d}_{LW} ; (b) \hat{d}_{GPH} ; (c) $\hat{d}_{GPB\alpha}$; (d) \hat{d}_{KP} .

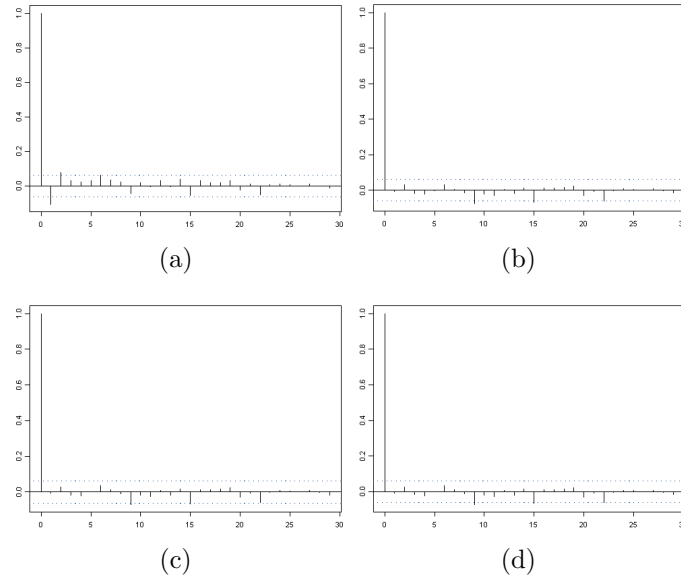


Figura 4.12: Função de Autocorrelação Amostral dos Resíduos do Modelo ARMA(1,1) Ajustado para o Exemplo 4.2, Após a Diferenciação Fracionária, de Acordo com o Método de Estimação: (a) \hat{d}_{LW} ; (b) \hat{d}_{GPH} ; (c) $\hat{d}_{GPB\alpha}$; (d) \hat{d}_{KP} .

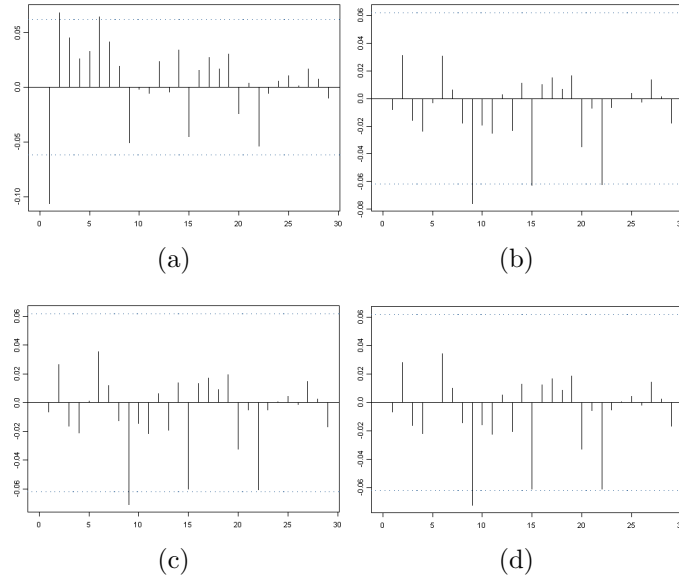


Figura 4.13: Função de Autocorrelação Parcial Amostral dos Resíduos do Modelo ARMA(1,1) Ajustado para o Exemplo 4.2, Após a Diferenciação Fracionária, de Acordo com o Método de Estimação: (a) \hat{d}_{LW} ; (b) \hat{d}_{GPH} ; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) \hat{d}_{KP} .

foram capazes de encontrar um modelo que se adequasse aos dados simulados.

Para este exemplo, o melhor modelo ajustado foi aquele obtido pelo método da máxima verossimilhança, dado na Seção 4.1. Claramente, a análise feita na segunda etapa, utilizando os estimadores das Seções 4.2-4.5 juntamente com o da Seção 4.6, ficou muito inferior à primeira.

Capítulo 5

Mudança de Regime

Muitas séries temporais podem não ser bem ajustadas pelos modelos lineares descritos no Capítulo 3. Quando isto ocorre, podemos supor que os dados seguem um modelo não-linear ou que há uma mudança de regime. Neste trabalho estudamos modelos onde existe mudança de regime.

Os ciclos econômicos das décadas de 1960 e 1970 eram considerados resultados de tendências seculares. Nesta época, as séries temporais macroeconômicas eram, geralmente, separadas em componentes de tendência e de ciclo. A tendência era considerada linear e os ciclos estacionários.

A preocupação com séries temporais que apresentam mudanças de regime surgiu com Nelson e Plosser (1982). Estes autores examinam diversas séries temporais referentes à economia norte-americana e rejeitam a hipótese da tendência ser determinística. Segundo seus estudos, a natureza estocástica da tendência de uma série temporal deve ser considerada na sua análise.

A partir deste trabalho seminal seguiram-se diversos outros. Bai (1994) e Kuan e Hsu (1998) analisam séries temporais que apresentam mudança de regime na média. Beran e Terrin (1996) e Beran e Terrin (1999) analisam a mudança de regime no parâmetro de diferenciação fracionária d na série temporal do nível do Rio Nilo entre os anos 622 e 1284. Cobb (1978) discute se ocorre mudança na função de distribuição da vazão do Rio Nilo em Aswan entre os anos 1871 e 1970. Em Bai e Perron (1998) e Bai e Perron (2003) encontramos estimadores para séries temporais que possuem diversas mudanças de regime na média. Dufrenot *et. al.* (2003) apresentam estimadores para o ponto de mudança de regime baseados em estimativas da função densidade espectral dos processos e através de grades de procura, como no Capítulo 5.2.2. Há ainda o estudo conduzido por Ray e Tsay (2002), que se vale de métodos bayesianos para detectar mudanças na média e no parâmetro de diferenciação fracionária d de uma série temporal.

Os ciclos econômicos das economias capitalistas, que alternam períodos de expansão e recessão, são difíceis de serem modelados, devido a este comportamento. Uma alternativa para analisar estes tipos de dados são os modelos *Markov-switching*, que utilizam cadeias de Markov para estimar se há

mudanças através de probabilidades associadas aos diferentes regimes presentes nas séries temporais. Hamilton e Raj (2002) apresentam uma série de trabalhos que introduzem o assunto e mostram diversas aplicações de *Markov-switching* a dados econômicos, como o a variação do preço do barril de petróleo e o mercado de trabalho no Reino Unido.

A literatura disponível para o estudo de séries temporais que apresentam mudança de regime é bastante vasta. Embora o maior interesse dos pesquisadores atualmente esteja em séries temporais que apresentam mudanças na média, consideramos que progressos na análise de séries temporais podem ser realizados se analisarmos processos estocásticos que apresentem outro tipo de comportamento. Nos preocupamos, neste trabalho, em analisar séries temporais que apresentam mudanças no parâmetro de diferenciação fracionária.

Estudos a respeito de séries temporais que apresentam mudanças em seu parâmetro de diferenciação fracionária não são facilmente encontrados, quase inexistentes. Neste trabalho propomos um estimador que localiza o ponto de mudança de regime em séries temporais com esta característica. Até onde sabemos, a literatura atual em séries temporais não contempla um estimador capaz de localizar tal ponto. Devido a isto, a importância do trabalho desenvolvido na Seção 5.2.2 é latente. Os resultados que obtivemos através de simulações de Monte Carlo, cujos resultados estão expostos no Capítulo 6 e no Apêndice A, são bastante animadores.

Este capítulo é organizado como segue. Na Seção 5.1 comentamos brevemente sobre processos estocásticos que apresentam longa dependência espúria, uma característica que algumas séries temporais apresentam e que pode ser confundida com a característica de longa dependência. Na Seção 5.2, estudamos os estimadores para o ponto de mudança de regime na média e no parâmetro de diferenciação fracionária em séries temporais.

5.1 Longa Dependência Espúria

Uma assunto de grande interesse atualmente, principalmente em artigos de econometria, são séries temporais que possuem mudança de regime. Há consenso entre diversos autores que séries temporais que possuem mudança de regime na média podem exibir características de longa dependência.

O fenômeno que certas séries temporais com diversas mudanças de regime na média exibem e que induz o pesquisador a supor que a longa dependência está presente nos dados analisados se chama *longa dependência espúria*. Séries temporais que possuem a característica de longa dependência espúria podem nos levar a erros na identificação do modelo correto para elas.

O estudo apresentado por Granger e Hyung (1999) conclui que séries temporais que apresentam diversas mudanças de regime mimetizam de maneira muito eficaz o fenômeno de longa dependência. Para afirmar isto, Granger e Hyung (1999) analisam séries temporais simuladas e o valor absoluto dos

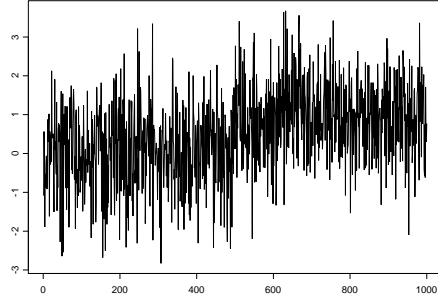


Figura 5.1: Processo Ruído Branco Simulado com Mudança na Média.

retornos do índice S&P500 através do algoritmo proposto por Bai e Perron (1998). Com esta análise, os autores descobrem que a volatilidade da série temporal estudada apresenta comportamento muito bem descrito por um modelo com diversas mudanças de regime na média, sugerindo assim que o efeito de longa dependência detectado possa ser espúrio.

A longa dependência espúria aparece principalmente em séries temporais que apresentam mudanças de regime na média. Para ilustrar este fenômeno, considere o Exemplo 5.1.

Exemplo 5.1. Seja $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{1000}$ uma amostra simulada de tamanho $n = 1000$ (ver Figura 5.1). Esta série temporal foi gerada através da união de duas amostras de tamanho $n = 500$ de dois processos ruído branco $\{\varepsilon_{1t}\}_{t=1}^{500}$ e $\{\varepsilon_{2t}\}_{t=1}^{500}$, onde $\mu_1 = 0$ e $\mu_2 = 1$ são, respectivamente, as médias dos processos $\{\varepsilon_{1t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_{2t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\text{Var}(\sigma_{\varepsilon_1}^2) = 1 = \text{Var}(\sigma_{\varepsilon_2}^2)$ são as variâncias destes processos.

Note que, claramente, há uma mudança na média da série temporal. Esta mudança é facilmente detectada por inspeção visual, mas os métodos estudados na Seção 3.3 não são capazes de detectá-la.

A Figura 5.2 apresenta os gráficos das funções periodograma e de autocorrelação amostral desta série temporal. Note que o comportamento da função periodograma é similar ao comportamento daquela de um processo ARFIMA(p, d, q), apesar da série temporal $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{1000}$ não possuir longa dependência. Note que esta função apresenta um pico na origem, levando-nos a supor que a função densidade espectral é ilimitada na frequência zero. O mesmo sucede com a função de autocorrelação amostral desta série temporal. Note o decaimento lento que a Figura 5.2(b) exhibe, pois mesmo em ordens altas, a função de autocorrelação amostral é diferente de zero. Conforme vimos na Seção 3.3, este comportamento é típico de séries temporais que possuem característica de longa dependência.

Na verdade, este exemplo não é obtido a partir de um processo estocástico

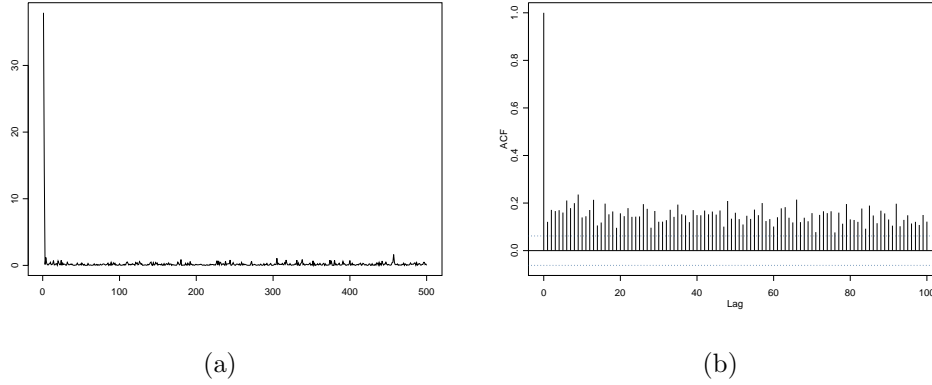


Figura 5.2: (a) Função Periodograma; (b) Função de Autocorrelação Amos-tral da Série Temporal do Exemplo 5.1.

Tabela 5.1: Resultados da Estimação do Parâmetro de Diferenciação Fra-cionária d Baseados na Série Temporal do Exemplo 5.1.

Estimador	Valor Estimado
\hat{d}_{MV}	0,1487
\hat{d}_{LW}	0,1332
\hat{d}_{GPH}	0,1739
\hat{d}_{GPHBa}	0,3262
\hat{d}_{KP}	0,2055

(visto que não é definido para todo $t \in \mathbb{Z}$). Assim, não faz sentido falar em decaimento hiperbólico da função de autocorreção, nem mesmo em função densidade espectral. Acima estamos tomando uma série temporal a partir de um processo finito (não existe metade do tempo infinito). É preciso tomar cuidado na comparação dos resultados destes dois tipos de processos, que possuem natureza distinta.

Utilizamos os métodos de estimação apresentados na Seção 4 para encontrar o valor de \hat{d} para a série temporal da Figura 5.1. A Tabela 5.1 apresenta os resultados desta estimação.

Para obter os resultados da estimação exibidos na Tabela 5.1, utilizamos $\alpha = 0,7$, onde $g(n) = n^\alpha = 1000^{0,7} = 125$, para todos os estimadores da classe semi-paramétrica. Note que os valores de \hat{d} , segundo os métodos empregados, indicam a presença de longa dependência e estacionariedade na série. Estes resultados são ruins, pois sabemos, pela maneira como construímos esta série temporal, que ela não possui longa dependência. Uma análise similar a esta

pode ser encontrada em Marques (2008).

Atualmente, existem controvérsias no mundo acadêmico a respeito da existência de longa dependência ou não. Exemplos de trabalhos que discutem a existência de longa dependência espúria são Granger (1999) e Granger e Hyung (1999). Berkes *et. al.* (2006) propõem um teste para discriminar longa dependência de longa dependência espúria em um processo estocástico. Mandelbrot e Wallis (1969) associam a série temporal dos níveis anuais do Rio Nilo, uma das séries temporais com longa dependência mais estudadas até hoje¹, com uma passagem bíblica. Encontramos em Gênesis 41, 29-30: “E eis que vêm sete anos, e haverá grande fartura em toda a terra do Egito. E depois deles levantar-se-ão sete anos de fome, e toda aquela fartura será esquecida na terra do Egito, e a fome consumirá a terra”. Estes períodos de sete anos de fartura e fome podem estar associados a períodos de cheia e seca do Rio Nilo. Segundo Beran (1994), é possível que este tipo de padrão venha se repetindo através dos anos e que isto tenha gerado o comportamento de longa dependência que conhecemos atualmente.

Até alguns anos atrás, determinar se um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência ou mudanças de nível era um problema em aberto. Berkes *et. al.* (2006) propõem um teste capaz de determinar se uma série temporal possui longa dependência ou longa dependência espúria.

O modelo assumido em Berkes *et. al.* (2006) é dado por

$$X_t = \begin{cases} Y_t + \mu, & \text{se } 1 \leq t \leq k, \\ Y_t + \mu + \Lambda, & \text{se } k + 1 \leq t \leq n, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde k é o ponto onde ocorre a mudança na média e μ e $\mu + \Lambda$ são as médias das séries temporais, também desconhecidas. Para avaliar se $\{X_t\}_{t=1}^n$ possui longa dependência ou longa dependência espúria, necessitamos assumir, em primeiro lugar, algumas hipóteses a respeito da série temporal. Iniciamos com a definição de cumulante de quarta ordem.

Definição 5.1. Seja $\{Y_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal estacionária de quarta ordem com média zero e função de autocovariância $\gamma_Y(\cdot)$ dada pela Definição 2.5. O *cumulante de quarta ordem* de $\{Y_t\}_{t=1}^n$ é dado por

$$\begin{aligned} K(h, j, k) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t+h} Y_{t+j} Y_{t+k}] &- (\gamma_Y(h) \gamma_Y(j - k) \\ &+ \gamma_Y(j) \gamma_Y(h - k) + \gamma_Y(k) \gamma_Y(h - j)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

As duas hipóteses apresentadas a seguir explicitam a diferença entre o que consideramos longa dependência espúria e longa dependência.

¹É esta a série temporal que Hurst (1951) analisa e, a partir dela, introduz o conceito do efeito de Hurst. Posteriormente, este estudo inicial evoluiu para a teoria dos processos estocásticos com característica de longa dependência que conhecemos atualmente.

H1) A série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$ é estacionária de quarta ordem com média zero e função de autocovariância $\gamma_Y(\cdot)$. Além disso, vale a condição

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Y_t \xrightarrow{\mathcal{D}} \sigma W_t^0, \quad \text{em } D[0, 1], \quad (5.3)$$

onde $\sigma > 0$ e $\{W_t^0\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ é o Movimento Browniano Padrão dado pela Definição 2.20. Além disso, supomos que

$$\sum_{h \geq 0} |\gamma_Y(h)| < \infty, \quad (5.4)$$

e

$$\sup_h \sum_{j,k} |K(h, j, k)| < \infty. \quad (5.5)$$

Observação 5.1. Pela representação de Skorokhod-Wichura-Dudley (ver Shorack e Wellner, 1986), a condição (5.3) é equivalente à seguinte condição: Existe sequência de processos de Wiener $\{W_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $t \in [0, 1]$, tais que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{nt} Y_j - \sigma W_n(t) \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \quad (5.6)$$

H2) A série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ é estacionária de quarta ordem com $\mu_X = \mathbb{E}(X_t)$ e função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$. Além disso, valem as condições

$$\frac{1}{n^H} \sum_{t=1}^n (X_t - \mu_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} C(H) B_H(t), \quad \text{em } D[0, 1], \quad (5.7)$$

onde $C(H) > 0$ e $\{B_H(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ é o Movimento Browniano Fracionário dado pela Definição 2.22, com $\frac{1}{2} < H < 1$. Além disso, supomos que

$$\gamma_X(h) \sim C_0 h^{2H-2}, \quad (5.8)$$

para algum $C_0 > 0$ e os cumulantes, dados por (5.2), satisfazem

$$\sup_h \sum_{j,k=-n}^n |K(h, j, k)| = O(n^{2H-1}). \quad (5.9)$$

O teste realizado consiste em comparar as seguinte hipóteses:

H_0 : As observações $\{X_t\}_{t=1}^n$ seguem o modelo dado em (5.1) com $\{Y_t\}_{t=1}^n$, satisfazendo a hipótese H1.

e

H_1 : As observações $\{X_t\}_{t=1}^n$ possuem longa dependência, satisfazendo a hipótese H2.

A estatística do teste é definida a partir do estimador do ponto de mudança de regime dado por

$$\hat{k} = \min \left\{ k : \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{1 \leq t \leq j} X_t - \frac{j}{n} \sum_{1 \leq t \leq n} X_t \right| = \left| \sum_{1 \leq t \leq k} X_t - \frac{k}{n} \sum_{1 \leq t \leq n} X_t \right| \right\}. \quad (5.10)$$

Em seguida, definimos a estatística

$$T_{n,1} = \frac{1}{s_{n,1}} \frac{1}{\sqrt{\hat{k}}} \max_{1 \leq k \leq \hat{k}} \left| \sum_{t=1}^k X_t - \frac{k}{\hat{k}} \sum_{t=1}^n X_t \right|, \quad (5.11)$$

baseada nas observações $X_1, \dots, X_{\hat{k}}$ e

$$T_{n,2} = \frac{1}{s_{n,2}} \frac{1}{\sqrt{n - \hat{k}}} \max_{\hat{k}+1 \leq k \leq n} \left| \sum_{t=\hat{k}+1}^k X_t - \frac{k - \hat{k}}{n - \hat{k}} \sum_{t=\hat{k}+1}^n X_t \right|, \quad (5.12)$$

baseada nas observações $X_{\hat{k}+1}, \dots, X_n$. Em (5.11) e (5.12), $s_{n,1}$ e $s_{n,2}$ são iguais ao estimador de Bartlett calculado, respectivamente, nas observações $X_1, \dots, X_{\hat{k}}$ e $X_{\hat{k}+1}, \dots, X_n$. Especificamente, definindo

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k X_t, \quad \bar{X}_k^* = \frac{1}{n - k} \sum_{t=k+1}^n X_t,$$

e sendo $\lambda_\ell(\cdot)$ a janela de Bartlett dada pela Definição 2.13, temos que

$$s_{n,1}^2 = \frac{1}{\hat{k}} \sum_{t=1}^{\hat{k}} (X_t - \bar{X}_{\hat{k}})^2 + 2 \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_\ell(j) \frac{1}{\hat{k}} \sum_{t=1}^{\hat{k}-j} (X_t - \bar{X}_{\hat{k}})(X_{t+j} - \bar{X}_{\hat{k}}),$$

$$s_{n,2}^2 = \frac{1}{n - \hat{k}} \sum_{t=\hat{k}+1}^n (X_t - \bar{X}_{\hat{k}}^*)^2 + 2 \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_\ell(j) \frac{1}{n - \hat{k}} \sum_{t=\hat{k}+1}^{n-j} (X_t - \bar{X}_{\hat{k}}^*)(X_{t+j} - \bar{X}_{\hat{k}}^*).$$

A estatística do teste é definida por

$$M_n = \max\{T_{n,1}; T_{n,2}\}. \quad (5.13)$$

Para deduzir a distribuição assintótica da estatística M_n sob H_0 é necessário assumir hipóteses adicionais sobre o modelo (5.1). O ponto de mudança de regime k^* e a magnitude Λ da diferença entre as médias dependem do tamanho amostral n :

$$k^* = \lfloor n\tau \rfloor, \quad \text{para algum } \tau \in (0, 1), \quad (5.14)$$

$$n\Lambda^2 \rightarrow \infty, \quad (5.15)$$

$$\Lambda^2 |\hat{k} - k^*| = O_{\mathbb{P}}(1). \quad (5.16)$$

Sabemos que a condição (5.16) vale se as observações são não-correlacionadas. Esta condição foi estendida pela Proposição 3 de Bai (1994) para processos de média móvel. A condição também vale se o processo dado pela expressão (5.1) é estritamente estacionário, satisfaz a condição (5.6), $\Lambda \rightarrow 0$ e vale a condição (5.15) (ver o Teorema 4.1.4 em Csörgö e Horváth, 1997). Além disso, devemos impor a condição

$$\ell(n)\Lambda^2 = O(1) \quad (5.17)$$

para a função $\ell(\cdot)$. Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *Suponha que H_0 e (5.14)-(5.17) valem. Suponha que $\ell(n)$ é não-decrescente e satisfaz*

$$\sup_{k \geq 0} \frac{\ell(2^{k+1})}{2^k} < \infty, \quad (5.18)$$

$$\ell(n) \rightarrow \infty \quad e \quad \ell(n)(\ln(n))^4 = O(n).$$

Então

$$(T_{n,1}, T_{n,2})' \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t^{(1)}|, \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t^{(2)}| \right)',$$

onde $W_t^{(1)}$ e $W_t^{(2)}$ são Pontes Brownianas independentes, dadas pela Definição 2.21.

Demonstração. Ver Berkes *et. al.* (2006). □

Corolário 5.1. *Sob as hipóteses do Teorema 5.1, temos que*

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \max \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t^{(1)}|; \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t^{(2)}| \right\}.$$

Demonstração. Ver Berkes *et. al.* (2006). □

Para descrever o comportamento assintótico do vetor $(T_{n,1}, T_{n,2})'$ se $\{X_t\}_{t=1}^n$ possui longa dependência, definimos

$$\varphi = \inf \left\{ t \geq 0 : |W_t| = \sup_{0 \leq s \leq 1} |W_s| \right\}. \quad (5.19)$$

Teorema 5.2. *Suponha que H_1 vale. Suponha que $\ell(n)$ é não-decrescente, satisfaz (5.18) e*

$$\ell(n) \rightarrow \infty \quad e \quad \ell(n) = O(n \ln(n))^{-\frac{7}{4(1-H)}}.$$

Então a sequência de vetores aleatórios

$$\left(\left(\frac{\ell(\hat{k})}{n} \right)^{H-\frac{1}{2}} T_{n,1}, \left(\frac{\ell(n-\hat{k})}{n} \right)^{H-\frac{1}{2}} T_{n,2} \right)'$$

converge em distribuição para o vetor aleatório

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \sup_{0 \leq t \leq \varphi} |F_1(t, \varphi)|, \frac{1}{\sqrt{1-\varphi}} \sup_{\varphi < t \leq 1} |F_2(t, \varphi)| \right)', \quad (5.20)$$

onde φ é dado pela expressão (5.19) e $F_1(t, \varphi)$ e $F_2(t, \varphi)$ são os funcionais dados por $F_1(t, \varphi) = B_H(t) - \frac{t}{\varphi} B_H(\varphi)$ e $F_2(t, \varphi) = B_H(t) - B_H(\varphi) - \frac{t-\varphi}{1-\varphi} (B_H(1) - B_H(\varphi))$, respectivamente.

Demonstração. Ver Berkes *et. al.* (2006). □

5.2 Mudança de Regime

Recentemente a pesquisa em séries temporais tem apresentado diversos novos resultados na estimação daquelas com mudança de regime. Em geral, o que se procura com estes estudos é estimar a localização do ponto onde ocorre tal mudança. Antes disso, formalizamos este conceito através da definição a seguir.

Definição 5.2. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico. Dizemos que a observação X_k deste processo é um ponto de *mudança de regime* se, a partir desta observação, o processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ apresenta um regime diferente daquele presente até a k -ésima observação.

Conforme vimos no início deste capítulo, a mudança de regime em um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ocorrer de diversas formas. Neste trabalho consideramos apenas dois casos. O primeiro caso é a mudança de regime na média de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Descrevemos dois estimadores para este caso na Seção 5.2.1. O segundo é a mudança de regime ocasionada pela alteração no parâmetro de diferenciação fracionária do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Na Seção 5.2.2 propomos um estimador que localiza o ponto onde esta característica ocorre.

5.2.1 Mudança na Média

Diversos artigos tratam do problema de localização do ponto de mudança de regime na média em um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Bai (1994), Kuan e Hsu (1998), Bai e Perron (1998) e Bai e Perron (2003) são artigos que tratam deste problema. Enquanto os dois primeiros artigos tratam de processos

estocásticos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ nos quais apenas uma mudança de regime está presente, os dois últimos propõem estimadores que localizam pontos de mudança de regime em séries temporais que apresentam esta característica mais de uma vez. Nesta seção descrevemos como Bai (1994) utiliza um estimador baseado no método de mínimos quadrados para localizar o ponto de mudança de média desconhecido em uma série temporal. A seguir, vemos como Kuan e Hsu (1998) estendem o método proposto por Bai (1994) para processos ARFIMA(0, d , 0), com $d \in (-0,5; 0,5)$.

Em Bai (1994), encontramos um estimador para o ponto desconhecido de mudança de regime definido a partir do método de mínimos quadrados. O autor considera o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado por

$$Y_t = \mu(t) + X_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (5.21)$$

onde $\mu(t)$ é uma função determinística no tempo e $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico dado por

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} = a(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (5.22)$$

onde $a(\mathcal{B}) = \sum_{j \geq 0} a_j \mathcal{B}^j$, $a(1) = \sum_{j \geq 0} a_j \neq 0$, \mathcal{B} é o operador de defasagem dado pela Definição 3.1 e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco dado pela Definição 2.12.

Neste trabalho consideramos o caso onde $\mu(t)$ assume apenas dois valores: o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem média μ_1 antes da observação X_{k_0} e tem média μ_2 após a observação X_{k_0} . Isto é,

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1, & \text{se } t \leq k_0, \\ \mu_2, & \text{se } t > k_0, \end{cases}$$

onde μ_1 , μ_2 e k_0 são desconhecidos e k_0 é o ponto de mudança de regime.

O problema proposto é estimar os parâmetros μ_1 , μ_2 e k_0 , dadas as observações $\{Y_t\}_{t=1}^n$ de uma série temporal advinda do processo definido em (5.21). É assumido que $k_0 = \lfloor kn \rfloor$, onde $k \in (0;1)$.

Para resolver este problema são assumidas duas hipóteses a respeito do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$:

H1) $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco com variância $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$;

H2) $\sum_{j=0}^{\infty} j|a_j| < \infty$.

Observação 5.2. A hipótese H2) é satisfeita pelos processos ARMA(p, q), dados na Definição 3.2.

O estimador de mínimos quadrados \hat{k} para o ponto de mudança de regime k_0 é dado por

$$\hat{k} = \arg \min_k \left[\min_{\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{t=1}^k (Y_t - \mu_1)^2 + \sum_{t=k+1}^n (Y_t - \mu_2)^2 \right\} \right]. \quad (5.23)$$

O ponto de mudança de regime é estimado minimizando a soma dos quadrados dos resíduos sobre todas as possíveis divisões feitas na amostra. Denotamos a média das primeiras k observações por \bar{Y}_k e das últimas $n - k$ observações por \bar{Y}_k^* . Se o ponto de mudança de regime é k , então \bar{Y}_k e \bar{Y}_k^* são os estimadores de mínimos quadrados usuais de μ_1 e μ_2 , respectivamente. A soma dos quadrados dos resíduos correspondente a cada uma destas partes é dada por

$$S_k^2 = \sum_{t=1}^k (Y_t - \bar{Y}_k)^2 + \sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y}_k^*)^2,$$

onde

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k Y_t \quad \text{e} \quad \bar{Y}_k^* = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n Y_t. \quad (5.24)$$

Desta forma, a expressão (5.23) pode ser reescrita como $\hat{k} = \arg \min_k (S_k^2)$ e os estimadores de mínimos quadrados para μ_1 e μ_2 são $\hat{\mu}_1 = \bar{Y}_{\hat{k}}$ e $\hat{\mu}_2 = \bar{Y}_{\hat{k}}^*$, respectivamente. Seja $\bar{Y} = \bar{Y}_n$ a média de toda a série temporal. Assim, para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2 = S_k^2 + nV_k^2, \quad (5.25)$$

onde

$$V_k = \left(\frac{k(n-k)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k). \quad (5.26)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
S_k^2 + nV_k^2 &= \sum_{t=1}^k (Y_t - \bar{Y}_k)^2 + \sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y}_k^*)^2 + n \left(\frac{k(n-k)}{n^2} \right) (\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k)^2 \\
&= \sum_{t=1}^k Y_t^2 - 2 \sum_{t=1}^k Y_t \bar{Y}_k + \sum_{t=1}^k \bar{Y}_k^2 + \sum_{t=k+1}^n Y_t^2 - 2 \sum_{t=k+1}^n Y_t \bar{Y}_k^* \\
&\quad + \sum_{t=k+1}^n \bar{Y}_k^{*2} + n \left(\frac{k(n-k)}{n^2} \right) (\bar{Y}_k^{*2} - 2\bar{Y}_k^* \bar{Y}_k + \bar{Y}_k^2) \\
&= \sum_{t=1}^k Y_t^2 - 2k\bar{Y}_k \bar{Y}_k + k\bar{Y}_k^2 \\
&\quad + \sum_{t=k+1}^n Y_t^2 - 2(n-k)\bar{Y}_k^* \bar{Y}_k + (n-k)\bar{Y}_k^{*2} \\
&\quad + \frac{k(n-k)}{n} \bar{Y}_k^{*2} - \frac{2k(n-k)}{n} \bar{Y}_k^* \bar{Y}_k + \frac{k(n-k)}{n} \bar{Y}_k^2 \\
&= \sum_{t=1}^n Y_t^2 - k\bar{Y}_k^2 - (n-k)\bar{Y}_k^{*2} \\
&\quad + \frac{k(n-k)}{n} \bar{Y}_k^{*2} - \frac{2k(n-k)}{n} \bar{Y}_k^* \bar{Y}_k + \frac{k(n-k)}{n} \bar{Y}_k^2 \\
&= \sum_{t=1}^n Y_t^2 + \left(\frac{k(n-k)}{n} - k \right) \bar{Y}_k^2 + \left(\frac{k(n-k)}{n} - n + k \right) \bar{Y}_k^{*2} \\
&\quad - \frac{2k(n-k)}{n} \bar{Y}_k^* \bar{Y}_k \\
&= \sum_{t=1}^n Y_t^2 - \frac{k^2}{n} \bar{Y}_k^2 - \frac{(n-k)^2}{n} \bar{Y}_k^{*2} - \frac{2k(n-k)}{n} \bar{Y}_k^* \bar{Y}_k \\
&= \sum_{t=1}^n Y_t^2 - \frac{1}{n} \left[k^2 \bar{Y}_k^2 + (n-k)^2 \bar{Y}_k^{*2} + 2k(n-k) \bar{Y}_k^* \bar{Y}_k \right]. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Como

$$\bar{Y} = \frac{k}{n} \bar{Y}_k + \frac{n-k}{n} \bar{Y}_k^*$$

então,

$$\bar{Y}^2 = \frac{k^2}{n^2} \bar{Y}_k^2 + \frac{2k(n-k)}{n^2} \bar{Y}_k^* \bar{Y}_k + \frac{(n-k)^2}{n^2} \bar{Y}_k^{*2}. \quad (5.28)$$

Logo, por (5.27) e (5.28),

$$\begin{aligned} S_k^2 + nV_k^2 &= \sum_{t=1}^n Y_t^2 - \frac{1}{n}(n^2 \bar{Y}^2) \\ &= \sum_{t=1}^n Y_t^2 - n\bar{Y}^2 \\ &= \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2. \end{aligned}$$

Portanto, vale a expressão (5.25). Disto segue que

$$\hat{k} = \arg \min_k (S_k^2) = \arg \max_k (V_k^2) = \arg \max_k (|V_k|).$$

Definimos $\hat{\tau} = \hat{k}/n$. As propriedades do estimador $\hat{\tau}$ são obtidas estudando-se o comportamento da estatística V_k e do funcional $\arg \max$.

O estimador do processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, pelo método dos mínimos quadrados, é dado por

$$\hat{X}_t = Y_t - \hat{\mu}_1 - (\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1)I_A(t), \quad \text{para todo } t = 1, \dots, n,$$

onde $I_A(\cdot)$ é a função indicadora do conjunto $A = \{t \in \{1, \dots, n\}; t > \hat{k}\}$. Podemos chamar $\{\hat{X}_t\}_{t=1}^n$ de resíduos generalizados na presença de um estimador de ponto de mudança na média. Se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARMA(p, q), então podemos utilizar $\{\hat{X}_t\}_{t=1}^n$ para estimar os graus e os parâmetros do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Resultados de simulações de Monte Carlo apresentados por Bai (1994) mostram que as estimações dos parâmetros deste processo baseadas em $\{\hat{X}_t\}_{t=1}^n$ trazem resultados excelentes. Do ponto de vista computacional, este processo de estimação em dois passos é muito mais simples do que um procedimento baseado apenas na função de máxima verossimilhança.

Para que possamos demonstrar as propriedades do estimador dado pela expressão (5.23), necessitamos de um resultado preliminar.

Seja $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ uma seqüência de diferenças de martingale tal que $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$, para todo $t \in \mathbb{N}$, e $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência decrescente de constantes. Assim, vale a seguinte proposição:

Proposição 5.1. *Sob as hipóteses H1 e H2, vale*

$$\mathbb{P} \left(\max_{j \leq k \leq l} C_k \left| \sum_{t=1}^k \varepsilon_t \right| > \alpha \right) \leq C_0 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\alpha^2} \left(jC_j^2 + \sum_{t=j+1}^l C_t^2 \right). \quad (5.29)$$

Demonstração. Ver Bai (1994). □

Observação 5.3. A demonstração da Proposição 5.1, em Bai (1994), mostra que

$$\sup_{1 \leq k \leq n} (k)^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{t=1}^k Y_t \right| = O_{\mathbb{P}}(\sqrt{\ln(n)}). \quad (5.30)$$

A expressão (5.30) será utilizada na prova do Teorema 5.3 abaixo, que mostra que o estimador $\hat{\tau}$ é consistente e não-viciado.

Lema 5.1. *Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo estocástico dado pela expressão (5.21). Então,*

$$\mathbb{E}(\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) = (\mu_2 - \mu_1) \left(\frac{n - k_0}{n - k} \right), \quad \text{sempre que } k \leq k_0,$$

e

$$\mathbb{E}(\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) = (\mu_2 - \mu_1) \left(\frac{k_0}{k} \right), \quad \text{sempre que } k > k_0,$$

onde \bar{Y}_k^* e \bar{Y}_k são dados na expressão (5.24).

Demonstração. Suponhamos $k \leq k_0$. Observe que $\mathbb{E}(\bar{Y}_{k_0}^*) = \mu_2$ e $\mathbb{E}(\bar{Y}_{k_0}) = \mu_1$ e ainda que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{t=k+1}^{k_0} Y_t \right) = (k_0 - k) \mu_1, \quad (5.31)$$

pois

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1, & \text{se } t \leq k_0, \\ \mu_2, & \text{se } t > k_0. \end{cases}$$

Observe ainda que

$$\mathbb{E}(\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{n - k} \sum_{t=k+1}^n Y_t - \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k Y_t \right), \quad (5.32)$$

onde

$$\sum_{t=1}^k Y_t = \sum_{t=1}^{k_0} Y_t - \sum_{t=k+1}^{k_0} Y_t$$

e

$$\sum_{t=k+1}^k Y_t = \sum_{t=k+1}^{k_0} Y_t + \sum_{t=k_0+1}^n Y_t.$$

Assim, a expressão (5.32) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{n - k} \sum_{t=k+1}^{k_0} Y_t + \frac{1}{n - k} \sum_{t=k_0+1}^n Y_t - \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k_0} Y_t + \frac{1}{k} \sum_{t=k+1}^{k_0} Y_t \right) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n - k} + \frac{1}{k} \right) \sum_{t=k+1}^{k_0} Y_t + \frac{n - k_0}{n - k} \bar{Y}_{k_0}^* - \frac{k_0}{k} \bar{Y}_{k_0} \right]. \end{aligned}$$

Então, por (5.31), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) &= \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) \mathbb{E} \left(\sum_{t=k+1}^{k_0} Y_t \right) + \frac{n-k_0}{n-k} \mathbb{E}(\bar{Y}_{k_0}^*) - \frac{k_0}{k} \mathbb{E}(\bar{Y}_{k_0}) \\
&= \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) (k_0 - k) \mu_1 + \left(\frac{n-k_0}{n-k} \right) \mu_2 - \frac{k_0}{k} \mu_1 \\
&= \left[\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) (k_0 - k) - \frac{k_0}{k} \right] \mu_1 + \left(\frac{n-k_0}{n-k} \right) \mu_2 \\
&= \frac{1 - \frac{k_0}{n}}{1 - \frac{k}{n}} \Lambda,
\end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) (k_0 - k) - \frac{k_0}{k} &= \frac{k_0 - k}{n-k} - 1 \\
&= \frac{k_0 - k - (n-k)}{n-k} \\
&= -\frac{n-k_0}{n-k}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos provar que $\mathbb{E}(\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) = \frac{k_0}{k} \Lambda$, sempre que $k > k_0$. Observe que

$$\sum_{t=k+1}^n Y_t = \sum_{t=k_0+1}^n Y_t - \sum_{t=k_0+1}^k Y_t$$

e

$$\sum_{t=1}^k Y_t = \sum_{t=1}^{k_0} Y_t + \sum_{t=k_0+1}^k Y_t.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n Y_t - \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k Y_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-k} \sum_{t=k_0+1}^n Y_t - \frac{1}{n-k} \sum_{t=k_0+1}^k Y_t \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k_0} Y_t - \frac{1}{k} \sum_{t=k_0+1}^k Y_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{n-k_0}{n-k} \bar{Y}_{k_0}^* - \frac{1}{n-k} \sum_{t=k_0+1}^k Y_t - \frac{k_0}{k} \bar{Y}_{k_0} - \frac{1}{k} \sum_{t=k_0+1}^k Y_t\right) \\
&= \frac{n-k_0}{n-k} \mathbb{E}(\bar{Y}_{k_0}^*) - \left(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{k}\right) \mathbb{E}\left(\sum_{t=k_0+1}^k Y_t\right) \\
&\quad - \frac{k_0}{k} \mathbb{E}(\bar{Y}_{k_0}).
\end{aligned}$$

Novamente, pela expressão (5.31),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) &= \left(\frac{n-k_0}{n-k}\right) \mu_2 - \left(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{k}\right) (k-k_0) \mu_2 - \frac{k_0}{k} \mu_1 \\
&= \left(\frac{n-k_0}{n-k} - \frac{k-k_0}{n-k} - \frac{k-k_0}{k}\right) \mu_2 - \frac{k_0}{k} \mu_1 \\
&= \left(\frac{k(n-k_0) - k(k-k_0) - (n-k)(k-k_0)}{k(n-k)}\right) \mu_2 - \frac{k_0}{k} \mu_1 \\
&= \left(\frac{nk_0 - kk_0}{k(n-k)}\right) \mu_2 - \frac{k_0}{k} \mu_1 \\
&= \frac{(n-k)k_0}{k(n-k)} \mu_2 - \frac{k_0}{k} \mu_1 \\
&= \frac{k_0}{k} (\mu_2 - \mu_1) \\
&= \frac{\frac{k_0}{k}}{\frac{n}{k}} \Lambda
\end{aligned}$$

Portanto, o lema está provado. \square

Teorema 5.3. *Sob as hipóteses H1 e H2, o estimador $\hat{\tau}$ satisfaz*

$$|\hat{\tau} - \tau| = (n^{-1/2} \Lambda^{-1}) O_{\mathbb{P}}\{\sqrt{\ln(n)}\}, \quad (5.33)$$

onde $\Lambda = \mu_2 - \mu_1$.

Demonstração. A prova da consistência do estimador é quase padrão. Devemos provar que a função objetiva $|V_k|$, definida pela expressão (5.26), para $k = 1, \dots, n-1$, converge uniformemente em probabilidade a uma função não-estocástica e que esta função não-estocástica possui um único máximo global. Uma pequena variação na abordagem padrão da prova da consistência de estimadores utiliza o fato que a função objetiva é uniformemente próxima à sua função da média, e esta função da média possui um único máximo. Mostramos a seguir que é possível simplificar este problema ao trabalharmos diretamente com V_k , sem o seu valor absoluto. Depois, provamos que o valor esperado de V_k possui um único máximo em k_0 e que $V_k - \mathbb{E}(V_k)$ é uniformemente pequeno para k quando n for grande. Note que

$$\begin{aligned} |V_k| - |V_{k_0}| &= |V_k - \mathbb{E}(V_k) + \mathbb{E}(V_k)| - |V_{k_0} - \mathbb{E}(V_{k_0}) + \mathbb{E}(V_{k_0})| \\ &\leq |V_k - \mathbb{E}(V_k)| + |V_{k_0} - \mathbb{E}(V_{k_0})| + |\mathbb{E}(V_k)| - |\mathbb{E}(V_{k_0})| \\ &\leq 2 \left(\sup_k |V_k - \mathbb{E}(V_k)| \right) + |\mathbb{E}(V_k)| - |\mathbb{E}(V_{k_0})|. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Por simplicidade, assumimos $n\tau$ inteiro e igual a k_0 . Escrevemos $D = \frac{k}{n}$ e $\tau = \frac{k_0}{n}$. A seguir, provamos que $|\mathbb{E}(V_k)|$ atinge seu máximo em $k = k_0$, mostrando que

$$|\mathbb{E}(V_{k_0})| - |\mathbb{E}(V_k)| \geq C(\tau) |\Lambda(D - \tau)|, \quad (5.35)$$

para algum $C(\tau) > 0$. Devido à simetria do problema, só é necessário considerar o caso $k \leq k_0$. Assumindo, sem perda de generalidade, que $\Lambda > 0^1$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_k) &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{k(n-k)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) \right] \\ &= \left(\frac{k(n-k)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} (\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k). \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.1 temos que, para $k \leq k_0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_k) &= \left(\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{2}} (\mu_2 - \mu_1) \left(\frac{1 - \frac{k_0}{n}}{1 - \frac{k}{n}} \right) \\ &= \frac{1 - \tau}{1 - D} (D(1 - D))^{\frac{1}{2}} \Lambda > 0. \end{aligned}$$

Em particular, $\mathbb{E}(V_{k_0}) = (\tau(1 - \tau))^{\frac{1}{2}} \Lambda$. Daí segue que

$$|\mathbb{E}(V_{k_0})| - |\mathbb{E}(V_k)| = (\tau(1 - \tau))^{\frac{1}{2}} \Lambda - \frac{1 - \tau}{1 - D} (D(1 - D))^{\frac{1}{2}} \Lambda$$

¹Caso contrário, consideramos o processo $\{-Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned}
&= \left((\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} - \frac{1-\tau}{1-D} (D(1-D))^{\frac{1}{2}} \right) \Lambda \\
&= \left(\frac{(1-D)(\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}} - (1-\tau)(D(1-D))^{\frac{1}{2}}}{1-D} \right) \Lambda \\
&= \left(\frac{(1-D)(\tau(1-\tau))^{\frac{1}{2}}}{1-D} - \frac{(1-\tau)(D(1-D))^{\frac{1}{2}}}{1-D} \right) \Lambda \\
&= \left(\frac{(1-D)(\tau(1-\tau))^{-\frac{1}{2}}}{1-D} - \frac{(D(1-D))^{\frac{1}{2}}}{1-D} \right) (1-\tau) \Lambda \\
&= \left(\left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{D}{1-D} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (1-\tau) \Lambda. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo (5.36) por $(\frac{\tau}{1-\tau})^{\frac{1}{2}} + (\frac{D}{1-D})^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(V_{k_0})| - |\mathbb{E}(V_k)| &= (1-\tau) \Lambda \left(\left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{D}{1-D} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \times \frac{\left(\left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{D}{1-D} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\left(\left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{D}{1-D} \right)^{\frac{1}{2}} \right)} \\
&= (1-\tau) \Lambda \frac{\left(\frac{\tau}{1-\tau} - \frac{D}{1-D} \right)}{\left(\left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{D}{1-D} \right)^{\frac{1}{2}} \right)} \\
&= (1-\tau) \Lambda \frac{\left(\frac{\tau-D}{(1-\tau)(1-D)} \right)}{\left(\frac{(1-D)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}} + (1-\tau)^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau)^{\frac{1}{2}} (1-D)^{\frac{1}{2}}} \right)} \\
&= \Lambda \left(\frac{\tau-D}{1-D} \right) \left(\left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{D}{1-D} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}. \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Como $D = \frac{k}{n} \geq 0$ e $k \leq n$, temos que $\frac{k}{n} \leq 1$ e, portanto, $1 - \frac{k}{n} \geq 0$. Assim, $\frac{D}{1-D} \geq 0$ e $(\frac{D}{1-D})^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Além disso, $0 \leq 1-D = 1 - \frac{k}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} < 2$. Logo, $\frac{1}{1-D} \geq \frac{1}{2}$. Desta forma, por (5.37), $\tau \geq D$ e a função $z(x) = \frac{x}{1-x}$ ser monótona crescente, temos que

$$|\mathbb{E}(V_{k_0})| - |\mathbb{E}(V_k)| \geq \frac{1}{2} \Lambda (\tau - D) \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.38}$$

já que $\frac{1}{2} \Lambda \left(\frac{\tau-D}{1-D} \right) \left(\left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{D}{1-D} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \geq \frac{1}{2} \Lambda \left(\frac{\tau-D}{1-D} \right) \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Isto prova (5.35) para $C(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}}$. Substituindo D por $\hat{\tau} = \frac{\hat{k}}{n}$ e utilizando as expressões (5.34), (5.35) e $|V_{k_0}| - |V_{\hat{k}}| \geq 0$, obtemos que

$$|\hat{\tau} - \tau| \leq 2C(\tau)^{-1} \Lambda^{-1} \sup_k |V_k - \mathbb{E}(V_k)|.$$

De (5.26),

$$\begin{aligned} V_k - \mathbb{E}(V_k) &= \left(\frac{k(n-k)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{Y}_k^* - \bar{Y}_k) - \frac{1-\tau}{1-D} (D(1-D))^{\frac{1}{2}} \Lambda \\ &= \left(\frac{k(n-k)}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n Y_t - \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k Y_t \right) \\ &\quad - \frac{1-\tau}{1-D} (D(1-D))^{\frac{1}{2}} \Lambda \\ &= (n)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (n-k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=k+1}^n Y_t \\ &\quad - (n)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^k Y_t. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |V_k - \mathbb{E}(V_k)| &= \left| (n)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (n-k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=k+1}^n Y_t \right. \\ &\quad \left. - (n)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^k Y_t \right| \\ &\leq \left| (n)^{-\frac{1}{2}} (n-k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=k+1}^n Y_t - (n)^{-\frac{1}{2}} (k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^k Y_t \right| \quad (5.39) \\ &\leq (n)^{-\frac{1}{2}} \left| (n-k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=k+1}^n Y_t \right| + (n)^{-\frac{1}{2}} \left| (k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^k Y_t \right| \\ &= (n)^{-\frac{1}{2}} \left((n-k)^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{t=k+1}^n Y_t \right| + (k)^{-\frac{1}{2}} \left| \sum_{t=1}^k Y_t \right| \right). \quad (5.40) \end{aligned}$$

Observe que a desigualdade (5.39) vale, pois $\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ são ambos menores do que 1. Segue de (5.30) que o lado direito de (5.40) é $(n)^{-\frac{1}{2}} O_{\mathbb{P}}(\sqrt{\ln(n)})$, uniformemente em k , conforme queríamos provar. \square

Note que Λ no lado direito da igualdade (5.33) indica que a taxa de convergência depende da magnitude da mudança de regime. Pelo Teorema 5.3, temos que $n^{\delta}(\hat{\tau} - \tau) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, para qualquer $\delta < \frac{1}{2}$.

O teorema a seguir mostra como a taxa de convergência na expressão (5.33) pode ser melhorada.

Teorema 5.4. *Sob as hipóteses H1 e H2, o estimador $\hat{\tau}$ satisfaz*

$$\hat{\tau} - \tau = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n\Lambda^2}\right). \quad (5.41)$$

Demonstração. Ver Bai (1994). □

Após a publicação do estimador proposto por Bai (1994), Kuan e Hsu (1998) estendem a idéia deste estimador para processos ARFIMA(0, d , 0), com $d \in (-0,5; 0,5)$. Neste artigo, a localização do ponto de mudança de regime é feita, novamente, através de um processo estocástico com duas médias distintas.

Kuan e Hsu (1998) utilizam um modelo para o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ semelhante àquele proposto em Bai (1994). Este processo é dado por

$$Y_t = \begin{cases} (1 - \mathcal{B})^d X_t, & \text{se } t \leq \lfloor n\tau \rfloor k, \\ (1 - \mathcal{B})^d X_t, & \text{se } t > \lfloor n\tau \rfloor k, \end{cases} \quad (5.42)$$

onde $\tau \in (0, 1)$. A diferença entre (5.21) e (5.42) está na suposição de que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(0, d , 0) estacionário e invertível. De fato, Kuan e Hsu (1998) assumem a seguinte hipótese em relação ao processo:

H) $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico fracionalmente integrado, com $d \in (-0,5; 0,5)$, tal que para $S_n(\tau) = \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} X_t$, para todo $\tau \in (0, 1)$,

$$n^{-(\frac{1}{2}+d)} S_n \Rightarrow \kappa B_d(t), \quad (5.43)$$

onde \Rightarrow denota convergência fraca, κ é uma constante e $B_d(t)$ é o Movimento Browniano Fracionário, dado pela Definição 2.22, com $H = \frac{1}{2} + d$.

O estimador proposto em Kuan e Hsu (1998) é similar ao proposto por Bai (1994). Tratando cada $\lfloor n\tau \rfloor = 1, \dots, n$ como um possível ponto de mudança de regime, os estimadores de mínimos quadrados de μ_1 e μ_2 são dados, respectivamente, por

$$\hat{\mu}_1(\lfloor n\tau \rfloor) = \frac{1}{\lfloor n\tau \rfloor} \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} Y_t \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_2(\lfloor n\tau \rfloor) = \frac{1}{n - \lfloor n\tau \rfloor} \sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n Y_t$$

e a soma dos quadrados dos resíduos é dada por

$$\text{SQR}(\lfloor n\tau \rfloor) = \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} (Y_t - \hat{\mu}_1(\lfloor n\tau \rfloor))^2 + \sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n (Y_t - \hat{\mu}_2(\lfloor n\tau \rfloor))^2.$$

Assim, o estimador de mínimos quadrados de τ_0 é dado por

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]} \text{SQR}(\lfloor n\tau \rfloor), \quad (5.44)$$

onde $\underline{\tau} < \bar{\tau}$ são duas constantes conhecidas entre 0 e 1. Note que podemos restringir o conjunto onde o ponto de mudança de regime será estimado fazendo ajustes nos valores de $\underline{\tau}$ e $\bar{\tau}$. Na prática, o estimador de mínimos quadrados para $k_0 = \lfloor n\tau \rfloor$ é dado por

$$\hat{k} = \arg \min_{1 \leq k \leq n} \text{SQR}(k). \quad (5.45)$$

Como $k_0/n \rightarrow \tau_0$, quando $n \rightarrow \infty$, $\hat{\tau}$ pode ser calculado como \hat{k}/n . No teorema a seguir mostramos que $\hat{\tau}$ é um estimador não-viciado para τ .

Teorema 5.5. *Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico dado por (5.42). Suponha que a hipótese H vale. Se $\tau_0 \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \subset [0, 1]$, então $\hat{\tau} \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau_0$, quando $n \rightarrow \infty$, onde $\hat{\tau}$ é dado por (5.44).*

Demonstração. Seja $k = \lfloor n\tau \rfloor$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} \Lambda I_{A_1}(t) &\rightarrow \Lambda \int_0^{\tau} I_{A_2}(s) ds \\ &= \begin{cases} 0, & \tau \leq \tau_0, \\ \Lambda(\tau - \tau_0), & \tau > \tau_0, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $\Lambda = \mu_2 - \mu_1$, $A_1 = \{t \in \mathbb{Z} : t > \lfloor n\tau_0 \rfloor\}$ e $A_2 = \{\tau \in [0, 1] : \tau > \tau_0\}$. Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n \Lambda I_{A_1}(t) &\rightarrow \Lambda \int_{\tau}^1 I_{A_2}(s) ds \\ &= \begin{cases} \Lambda(1 - \tau_0), & \tau \leq \tau_0, \\ \Lambda(1 - \tau), & \tau > \tau_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por (5.43), $n^{-(\frac{1}{2}+d)} S_n \Rightarrow \kappa B_d(t)$. Assim, $\sum_{t=1}^n X_t = O_{\mathbb{P}}(n^{(\frac{1}{2}+d)})$. Logo,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (5.46)$$

Defina

$$X_t^* = X_t + \Lambda I_{A_1}(t),$$

onde $A_1 = \{t \in \mathbb{Z}; t > \lfloor n\tau_0 \rfloor\}$ e

$$\text{SQR}(\lfloor n\tau \rfloor) = \sum_{t=1}^n (X_t^*)^2 - J_n(\lfloor n\tau \rfloor),$$

onde

$$J_n(\lfloor n\tau \rfloor) = \frac{1}{\lfloor n\tau \rfloor} \left(\sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} X_t^* \right)^2 + \frac{1}{n - \lfloor n\tau \rfloor} \left(\sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n X_t^* \right)^2.$$

Observe que, a partir de (5.46), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} J_n(\lfloor n\tau \rfloor) &= \frac{n}{\lfloor n\tau \rfloor} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} (X_t + \Lambda I_{A_1}(t)) \right)^2 \\ &\quad + \frac{n}{n - \lfloor n\tau \rfloor} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n (X_t + \Lambda I_{A_1}(t)) \right)^2 \\ &= \frac{n}{\lfloor n\tau \rfloor} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} \Lambda I_{A_1}(t) \right)^2 \\ &\quad + \frac{n}{n - \lfloor n\tau \rfloor} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n \Lambda I_{A_1}(t) \right)^2 \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} \frac{(1 - \tau_0)^2}{1 - \tau} \Lambda^2, & \text{se } \tau \leq \tau_0, \\ \left(1 - 2\tau_0 + \frac{\tau_0^2}{\tau} \right) \Lambda^2, & \text{se } \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (5.48)$$

A igualdade (5.47) vale, pois se $\tau \leq \tau_0$, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{n}{\lfloor n\tau \rfloor} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} \Lambda I_{A_1}(t) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{n - \lfloor n\tau \rfloor} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n \Lambda I_{A_1}(t) \right)^2 = 0 + \frac{1}{1 - \tau} (1 - \tau_0)^2 \Lambda^2 \\ &= \frac{(1 - \tau_0)^2}{1 - \tau} \Lambda^2 \end{aligned}$$

e se $\tau > \tau_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{\lfloor n\tau \rfloor} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} \Lambda I_{A_1}(t) \right)^2 \\
& + \frac{n}{n - \lfloor n\tau \rfloor} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=\lfloor n\tau \rfloor+1}^n \Lambda I_{A_1}(t) \right)^2 = \frac{\Lambda^2(\tau - \tau_0)^2}{\tau} + \frac{\Lambda^2(1 - \tau)^2}{1 - \tau} \\
& = \left(\frac{(\tau - \tau_0)^2(1 - \tau) + \tau(1 - \tau)^2}{\tau(1 - \tau)} \right) \Lambda^2 \\
& = \left(\frac{(\tau - \tau_0)^2 + \tau(1 - \tau)}{\tau} \right) \Lambda^2 \\
& = \left(\frac{\tau^2 - 2\tau\tau_0 + \tau_0^2 + \tau - \tau^2}{\tau} \right) \Lambda^2 \\
& = \left(1 - 2\tau_0 + \frac{\tau_0^2}{\tau} \right) \Lambda^2.
\end{aligned}$$

Assim, o limite em (5.47) atinge o valor máximo global $(1 - \tau_0)\Lambda^2$ quando $\tau = \tau_0$. \square

No teorema a seguir, apresentamos a taxa de convergência do estimador \hat{k} . Note que a diferença entre os valores μ_1 e μ_2 influi diretamente nesta taxa.

Teorema 5.6. *Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico dado por (5.42). Suponha que a hipótese H vale. Se $\tau_0 \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \subset [0, 1]$, então*

$$|\hat{\tau} - \tau_0| = O_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-d} \Lambda^2} \right).$$

onde $\hat{\tau}$ é dado por (5.44) e $\Lambda = \mu_2 - \mu_1$.

Demonstração. Ver Kuan e Hsu (1998). \square

O teorema a seguir garante que, em séries temporais sem mudança de regime na média, o estimador $\hat{\tau}$ não estima mudanças de regime espúrias.

Teorema 5.7. *Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico dado por (5.42). Suponha que a hipótese H vale e que $\mu_1 = \mu_2$. Se $\underline{\tau} = 0$ e $\bar{\tau} = 1$, então, para $-0,5 < d \leq 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\hat{\tau} \in [\epsilon, 1 - \epsilon]) = 0,$$

para todo $\epsilon > 0$.

Demonstração. Ver Kuan e Hsu (1998). \square

5.2.2 Mudança no Parâmetro de Diferenciação Fracionária

Nesta seção propomos um método para estimar o ponto de mudança de regime em um modelo dado por

$$Y_t = \begin{cases} \frac{\theta(\mathcal{B})}{\phi(\mathcal{B})}(1 - \mathcal{B})^{-d^{(1)}} \varepsilon_{1t}, & \text{se } 1 \leq t \leq \lfloor kn \rfloor; \\ (1 - \mathcal{B})^{-d^{(2)}} \varepsilon_{2t}, & \text{se } \lfloor kn \rfloor + 1 \leq t \leq n; \end{cases} \quad (5.49)$$

onde $d^{(1)}, d^{(2)} \in (0,1)$ e $k \in (0,1)$ é o ponto onde ocorre a mudança de regime. Para determinar este ponto, utilizamos o estimador proposto na expressão (5.50). Note que tanto antes como depois da mudança de regime, o modelo (5.49) apresenta comportamento de longa dependência. Assim, para que possamos estimar os parâmetros $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$, necessitamos dos estimadores propostos no Capítulo 4, nas Seções 4.1-4.5.

O estimador para o ponto de mudança de regime proposto neste trabalho é dado por

$$\hat{k} = \arg \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{t=1}^j \hat{\varepsilon}_{1t}^2 + \sum_{t=j+1}^n \hat{\varepsilon}_{2t}^2 \right\}, \quad (5.50)$$

onde $\{\hat{\varepsilon}_{1t}\}_{t=1}^k$ e $\{\hat{\varepsilon}_{2t}\}_{t=k+1}^n$ são os resíduos dos modelos ajustados, respectivamente, pelas séries temporais $\{X_{1t}\}_{t=1}^k$ e $\{X_{2t}\}_{t=k+1}^n$.

Assim como o estimador proposto na Seção 5.2.1, o ponto de mudança de regime estimado por (5.50) minimiza a soma dos quadrados dos resíduos em todas as partições possíveis da série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$ dada por (5.49). O algoritmo que estima \hat{k} é dado pelos seguintes passos:

1. Seja k um candidato a ponto de mudança de regime. Particionamos a série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. A partir disto obtemos duas novas séries temporais $\{Y_{1t}\}_{t=1}^k$ e $\{Y_{2t}\}_{t=k+1}^n$.
2. Estimamos $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{d}^{(2)}$ para $\{Y_{1t}\}_{t=1}^k$ e $\{Y_{2t}\}_{t=k+1}^n$, respectivamente, através do método da máxima verossimilhança, descrito na Seção 4.1. Com os valores $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{d}^{(2)}$, obtemos $\{\hat{\varepsilon}_{1t}\}_{t=1}^k$ e $\{\hat{\varepsilon}_{2t}\}_{t=k+1}^n$ ao diferenciar $\{Y_{1t}\}_{t=1}^k$ e $\{Y_{2t}\}_{t=k+1}^n$ por $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{d}^{(2)}$, respectivamente, utilizando o filtro fracionário descrito na Seção 4.6. Definimos $\text{SQR}(1)$ como sendo

$$\text{SQR}(1) = \{\hat{\varepsilon}_{1t}^2\}_{t=1}^k + \{\hat{\varepsilon}_{2t}^2\}_{t=k+1}^n.$$

3. Repetimos os passos 1 e 2 para obter os valores de $\text{SQR}(j)$ para $j = 2, \dots, n$.
4. O estimador \hat{k} será dado pelo valor mínimo atingido por $\text{SQR}(\cdot)$, ou seja,

$$\hat{k} = \arg \min_{1 \leq j \leq n} \text{SQR}(j). \quad (5.51)$$

Para proceder com a estimação dos parâmetros de diferenciação fracionária $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ para uma série temporal, ajustada pelo modelo (5.49), utilizamos o seguinte artifício. Supondo que k é conhecido e que $d^{(1)} < d^{(2)} = d^{(1)} + \delta$, temos

$$\begin{aligned} (1 - \mathcal{B})^{d^{(2)}} Y_{2t} &= \varepsilon_{2t} \\ \Leftrightarrow (1 - \mathcal{B})^{d^{(1)} + \delta} Y_{2t} &= \varepsilon_{2t} \\ \Leftrightarrow (1 - \mathcal{B})^{d^{(1)}} (1 - \mathcal{B})^{\delta} Y_{2t} &= \varepsilon_{2t} \\ \Leftrightarrow (1 - \mathcal{B})^{\delta} Y_{2t} &= (1 - \mathcal{B})^{-d^{(1)}} \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

para $t \in \{k+1, \dots, n\}$. Assim, a série temporal $\{Y_{2t}\}_{t=k+1}^n$ torna-se um ARFIMA(0, δ , 0) com processo de inovação dado por

$$\begin{aligned} X_{2t} &= (1 - \mathcal{B})^{-d^{(1)}} \varepsilon_{2t} \\ \Leftrightarrow (1 - \mathcal{B})^{d^{(1)}} X_{2t} &= \varepsilon_{2t}. \end{aligned}$$

Ou seja, o processo $\{Y_{2t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ARFIMA(0, δ , 0), cujo processo de inovação $\{X_{2t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(0, $d^{(1)}$, 0) que, por sua vez, tem como processo de inovação um ruído branco Gaussiano. Propriedades de processos estocásticos que apresentam erros não-independentes podem ser encontradas em trabalhos como Sena Jr. *et. al.* (2006).

Nas simulações de Monte Carlo, apresentadas no Capítulo 6, a partir do valor obtido para \hat{k} , estimamos os valores de $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$. Em primeiro lugar, estimamos $\hat{d}^{(1)}$ para a série temporal $\{Y_{1t}\}_{t=1}^{\hat{k}}$. Em seguida, com o valor de $\hat{d}^{(1)}$, diferenciamos a série temporal $\{Y_{2t}\}_{t=\hat{k}+1}^n$, de acordo com o método descrito na Seção 4.6. Ainda, com a série diferenciada, estimamos o valor de $\hat{\delta}$.

Assim, com os valores de \hat{k} , $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{d}^{(2)} = \hat{d}^{(1)} + \hat{\delta}_1$, temos todos os estimadores necessários para a completa determinação do modelo que melhor ajusta a série temporal.

Capítulo 6

Simulações

Neste capítulo apresentamos o método utilizado para realizar as simulações para a estimação do parâmetro k em séries temporais dadas pelo modelo (5.49), para diversos valores de k , n , $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$. Além disso, apresentamos resultados apenas para o caso ARFIMA(0, d , 0).

Para realizar as simulações utilizamos o programa **S-PLUS**, juntamente com o módulo **FinMetrics**. Alguns dos estimadores utilizados neste trabalho não estão disponíveis na distribuição original do **S-PLUS**, cabendo a nós implementarmos sua versão computacional. Dentre os estimadores implementados especialmente para este trabalho estão \hat{d}_{GPHBa} e \hat{d}_{KP} , descritos nas Seções 4.4 e 4.5, respectivamente.

Após definirmos o tamanho amostral n e o ponto de mudança de regime k da série temporal a ser simulada, simulamos as amostras do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado na expressão (5.49), utilizando o método descrito por Hosking (1984). Os processos ruídos brancos $\{\varepsilon_{1t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_{2t}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são processos Gaussianos (conforme Definição 2.9), com média zero e variância 1. Desta forma, temos $\{Y_{1t}\}_{t=1}^k$, uma amostra de tamanho k de um processo ARFIMA($p, d^{(1)}, q$), e $\{Y_{2t}\}_{t=k+1}^n$, uma amostra de tamanho $n - k$ de um processo ARFIMA(0, $d^{(2)}, 0$). Fazendo $\{Y_{1t}\}_{t=1}^k \cup \{Y_{2t}\}_{t=k+1}^n$, obtemos uma série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$ do tipo dado pela expressão (5.49).

Nas simulações utilizamos três tamanhos amostrais diferentes, isto é, $n \in \{300, 500, 1000\}$. Para o ponto de mudança de regime k , optamos por estudar o comportamento da estimação deste parâmetro quando ele ocorre em três locais diferentes da série temporal: $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{2}$ e $\frac{3n}{4}$. Desta forma, se $n = 300$, os valores assumidos para k são 75, 150 e 225. Analogamente, se $n = 500$ ou $n = 1000$, os valores assumidos para k são 125, 250 e 375 e 250, 500 e 750.

Para cada uma das combinações de tamanho amostral n e ponto de mudança de regime k relacionadas acima, temos uma combinação de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$. Para contemplar um grande número de casos, utilizamos três tipos de combinações dos valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$. Temos uma combinação onde $d^{(1)} = 0,3$ e $d^{(2)} = 0,1$, ou seja, pertencem à região estacionária do processo ARFIMA(p, d, q). Também analisamos o caso em que ambos os valores de $d^{(1)}$ e

$d^{(2)}$ estão na região não-estacionária ARFIMA(p, d, q). Neste caso, $d^{(1)} = 0,8$ e $d^{(2)} = 0,6$. Por fim, simulamos e analisamos o caso em que um dos valores do parâmetro de diferenciação fracionária está na região estacionária e o outro está na região não estacionária. Para estas simulações, definimos $d^{(1)} = 0,8$ e $d^{(2)} = 0,3$.

Para avaliar se a ordem em que foram definidos os parâmetros de diferenciação influi na estimação do ponto de mudança de regime, trocamos os valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ entre si. Assim, onde antes tínhamos $d^{(1)} = 0,1$ e $d^{(2)} = 0,3$, agora temos $d^{(1)} = 0,3$ e $d^{(2)} = 0,1$. Este procedimento é realizado para todas as combinações de parâmetros de diferenciação fracionária descritas no parágrafo anterior.

Com isto definido, geramos a amostra do processo estocástico que será utilizada na simulação. Após a geração desta amostra procuramos, através do algoritmo descrito na Seção 5.2.2, o ponto de mudança de regime da série temporal gerada.

Ao todo, realizamos 1000 replicações para cada um dos casos descritos. Em seguida, calculamos a média de \hat{k} , valor que é utilizado para estimar o ponto de mudança de regime. Tendo esta estimativa, o passo seguinte é estimar os parâmetros $d^{(1)}$ e δ , onde $\delta = d^{(2)} - d^{(1)}$, segundo os métodos de estimação estudados no Capítulo 4.

Para avaliar o desempenho do estimador proposto neste trabalho, consideramos três medidas. A primeira delas é a média aritmética, dada por

$$\bar{\hat{k}} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \hat{k}_t,$$

onde cada \hat{k}_t equivale a uma das 1000 estimativas realizadas para \hat{k} . No restante deste trabalho, esta medida será denotada por média ou $\bar{\hat{k}}$. O vício do estimador é dado por

$$\text{vício} = \bar{\hat{k}} - k.$$

Também utilizamos o *erro quadrático médio* dos estimadores como terceira medida. É definido como

$$\text{eqm} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} (\hat{k}_t - k)^2.$$

A avaliação dos desempenhos dos estimadores do parâmetro de diferenciação fracionária d é feita através das mesmas ferramentas utilizadas para a avaliação do desempenho do estimador \hat{k} .

No decorrer deste capítulo apresentamos os resultados encontrados a partir das simulações realizadas. Na Seção 6.1, reportamos os resultados obtidos para um caso das simulações quando os valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ encontram-se na região de estacionariedade dos processos ARFIMA($0, d, 0$). Na Seção 6.2,

apresentamos resultados para um caso das simulações quando os valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ estão ambos localizados na região de não-estacionariedade. Na Seção 6.3, exibimos os resultados das simulações de um caso misto, ou seja, $d^{(1)}$ está na região de não-estacionariedade, enquanto $d^{(2)}$ está na região de estacionariedade. Em todos estes casos, $d^{(1)} > d^{(2)}$.

Para verificar se a ordem dos parâmetros de diferenciação fracionária influi na estimação do ponto de mudança de regime, realizamos as simulações descritas no parágrafo anterior utilizando os mesmos parâmetros, mas invertendo a ordem de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$. Ou seja, consideramos os mesmos casos apresentados nas Seções 6.1, 6.2 e 6.3, mas $d^{(1)} < d^{(2)}$. Os resultados destas simulações são apresentadas no Apêndice A, Seções A.1, A.2 e A.3, respectivamente.

6.1 Caso Estacionário

Nesta seção exibimos os resultados das simulações realizadas quando os dois valores dos parâmetros de longa dependência $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ do modelo (5.49) estão na região de estacionariedade. Neste exemplo em particular, $d^{(1)} = 0,3$ e $d^{(2)} = 0,1$, ou seja, $\delta = -0,2$. Os resultados onde $d^{(1)} = 0,1$ e $d^{(2)} = 0,3$ são apresentados na Seção A.1 do Apêndice A.

Conforme descrito no início deste capítulo, em primeiro lugar geramos as amostras que serão analisadas para cada caso considerado. Como são três tamanhos amostrais, cada um com três pontos de mudança de regime, temos no total 9 conjuntos de dados diferentes, cada um com 1000 séries temporais simuladas.

A Tabela 6.1 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 300$ e $k \in \{75, 150, 225\}$.

Tabela 6.1: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$ e $n = 300$.

k	média	vício	eqm
75	119,447	44,447	8107,967
150	150,511	0,511	4648,681
225	173,294	-51,706	9613,554

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.1, são bons quando $k = 150$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 75$ ou $k = 225$, o comportamento do estimador não repete o desempenho do caso $k = 150$. Quando $k = 75$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 225$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.2-6.7, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 300$ e $k = 75$

Tabela 6.2: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2051	-0,0949	0,0162
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1254	0,0746	0,0172
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2152	-0,0848	0,0136
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1003	0,0997	0,0184

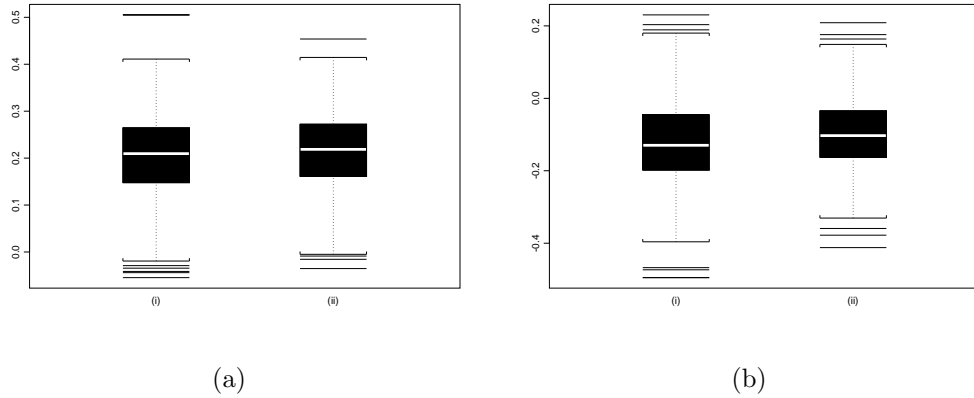
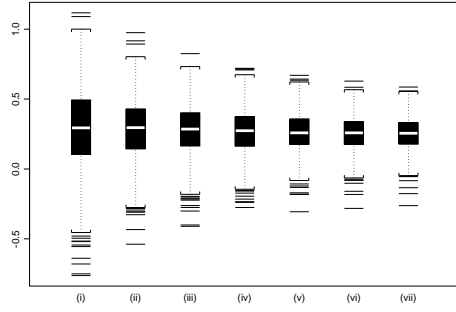


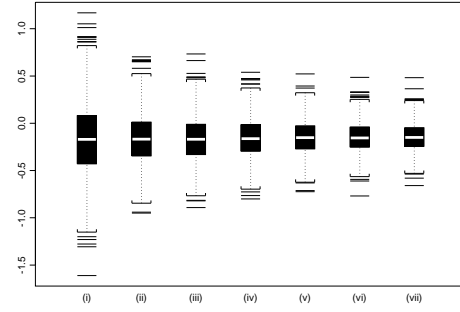
Figura 6.1: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Tabela 6.3: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

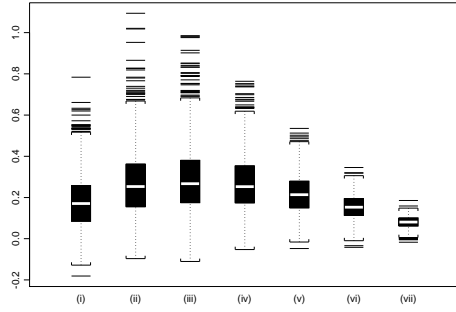
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2930	-0,0070	0,0876	-0,1667	0,0333	0,1456
0,60	0,2818	-0,0182	0,0441	-0,1631	0,0369	0,0747
0,65	0,2759	-0,0241	0,0329	-0,1619	0,0381	0,0565
0,70	0,2654	-0,0346	0,0257	-0,1555	0,0445	0,0441
0,75	0,2597	-0,0403	0,0204	-0,1520	0,0480	0,0335
0,80	0,2565	-0,0435	0,0171	-0,1480	0,0520	0,0289
0,85	0,2545	-0,0455	0,0150	-0,1484	0,0516	0,0240
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1770	-0,1230	0,0334	-0,0540	0,1460	0,0301
0,60	0,2698	-0,0302	0,0300	-0,1201	0,0799	0,0201
0,65	0,2880	-0,0120	0,0282	-0,1420	0,0580	0,0177
0,70	0,2691	-0,0309	0,0199	-0,1363	0,0637	0,0168
0,75	0,2176	-0,0824	0,0159	-0,0962	0,0637	0,0191
0,80	0,1523	-0,1477	0,0254	-0,0386	0,1614	0,0302
0,85	0,0799	-0,2201	0,0492	0,0071	0,2071	0,0441
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,2970	-0,0030	0,0823	-0,1660	0,0340	0,1380
0,60	0,2828	-0,0172	0,0407	-0,1621	0,0379	0,0676
0,65	0,2754	-0,0246	0,0315	-0,1601	0,0399	0,0527
0,70	0,2652	-0,0348	0,0251	-0,1529	0,0471	0,0412
0,75	0,2588	-0,0412	0,0198	-0,1476	0,0524	0,0325
0,80	0,2557	-0,0443	0,0164	-0,1451	0,0549	0,0271
0,85	0,2531	-0,0469	0,0142	-0,1454	0,0546	0,0224



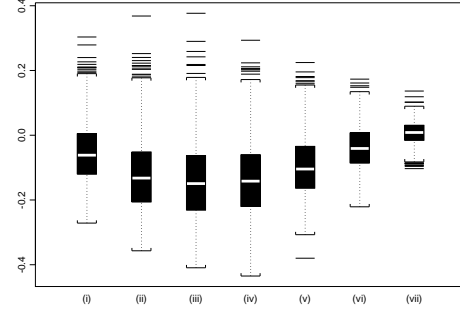
(a)



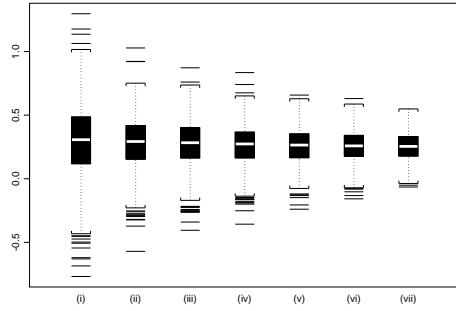
(b)



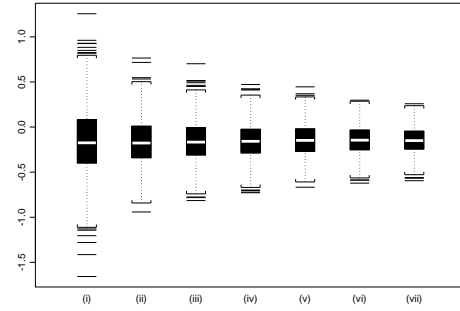
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.2: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Caso $n = 300$ e $k = 150$

Tabela 6.4: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2657	-0,0343	0,0061
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1987	0,0013	0,0104
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2657	-0,0343	0,0056
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1513	0,0487	0,0101

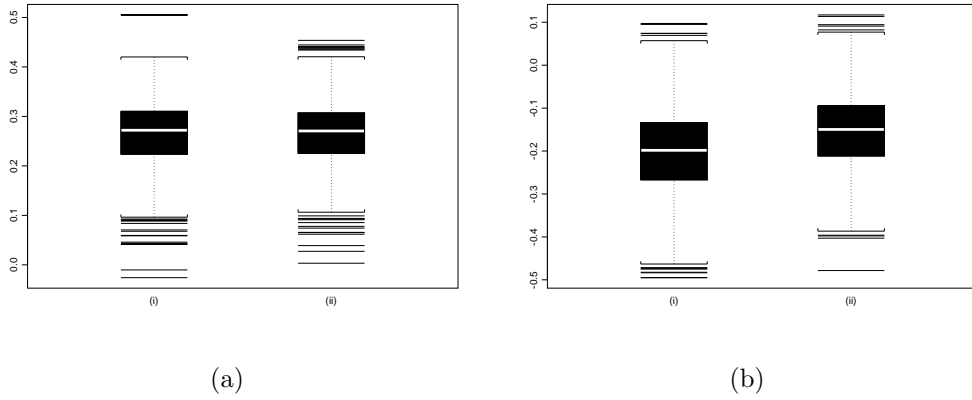
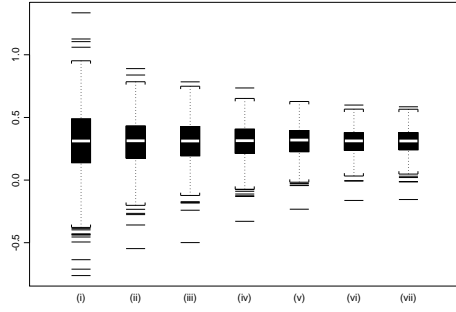


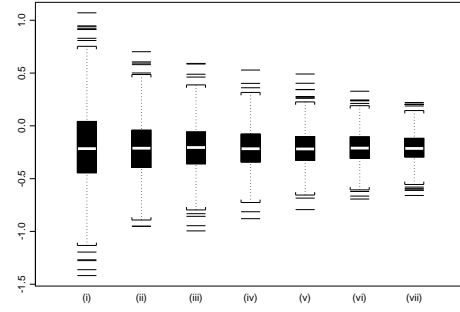
Figura 6.3: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Tabela 6.5: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

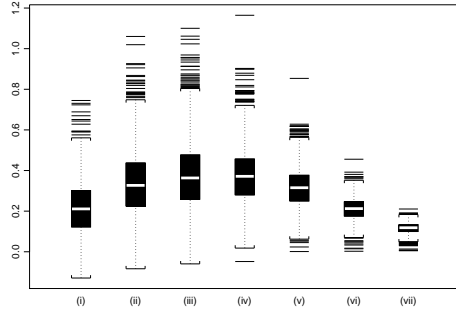
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3025	0,0025	0,0705	-0,1995	0,0005	0,1384
0,60	0,3053	0,0053	0,0364	-0,2119	-0,0119	0,0685
0,65	0,3060	0,0060	0,0273	-0,2094	-0,0094	0,0527
0,70	0,3077	0,0077	0,0197	-0,2110	-0,0110	0,0372
0,75	0,3098	0,0098	0,0153	-0,2128	-0,0128	0,0292
0,80	0,3066	0,0066	0,0109	-0,2076	-0,0076	0,0223
0,85	0,3076	0,0076	0,0098	-0,2068	-0,0068	0,0188
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2190	-0,0810	0,0246	-0,0833	0,1167	0,0229
0,60	0,3409	0,0409	0,0297	-0,1706	0,0294	0,0118
0,65	0,3828	0,0828	0,0376	-0,2039	-0,0039	0,0106
0,70	0,3810	0,0810	0,0295	-0,2112	-0,0112	0,0095
0,75	0,3173	0,0173	0,0113	-0,1659	-0,0112	0,0081
0,80	0,2110	-0,0890	0,0112	-0,0777	0,1223	0,0188
0,85	0,1160	-0,1840	0,0346	-0,0125	0,1875	0,0364
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3056	0,0056	0,0672	-0,1966	0,0034	0,1355
0,60	0,3050	0,0050	0,0353	-0,2122	-0,0122	0,0698
0,65	0,3078	0,0078	0,0269	-0,2107	-0,0107	0,0543
0,70	0,3088	0,0088	0,0198	-0,2104	-0,0104	0,0369
0,75	0,3097	0,0097	0,0150	-0,2106	-0,0106	0,0275
0,80	0,3074	0,0074	0,0107	-0,2070	-0,0070	0,0207
0,85	0,3080	0,0080	0,0096	-0,2056	-0,0056	0,0180



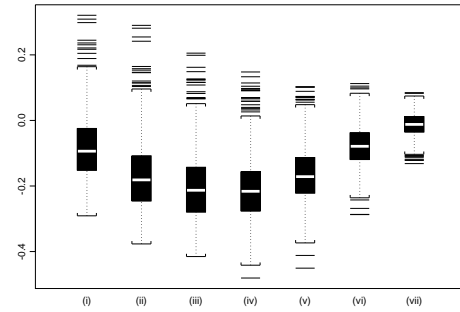
(a)



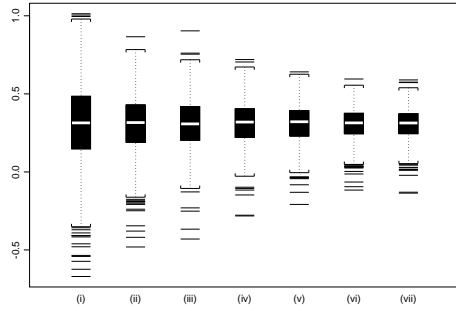
(b)



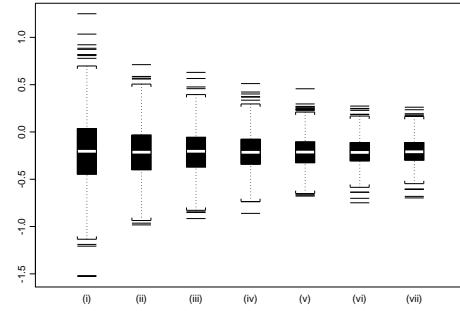
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.4: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Caso $n = 300$ e $k = 225$

Tabela 6.6: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2678	-0,0322	0,0052
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,0949	0,1051	0,0233
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2644	-0,0356	0,0050
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,0545	0,1455	0,0300

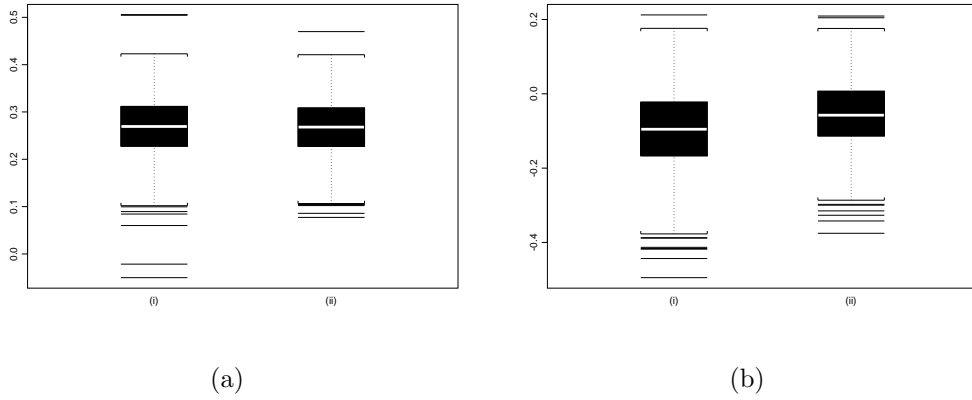
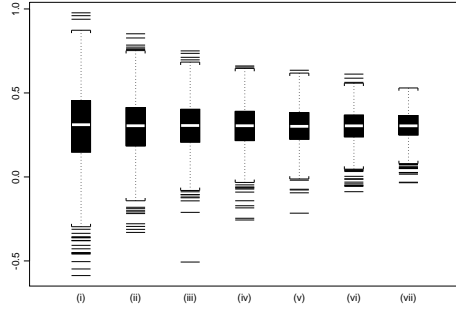


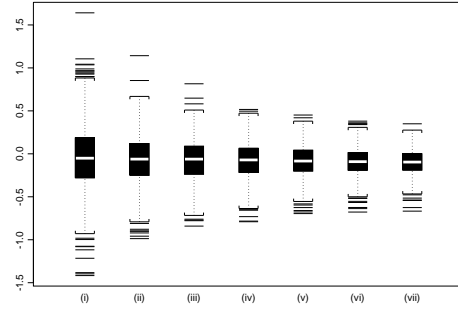
Figura 6.5: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Tabela 6.7: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

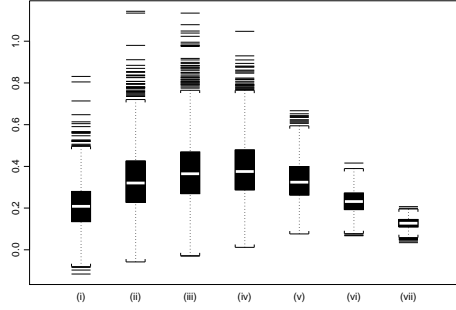
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2983	-0,0017	0,0618	-0,0605	0,1395	0,1668
0,60	0,2985	-0,0015	0,0305	-0,0689	0,1311	0,0957
0,65	0,3022	0,0022	0,0239	-0,0777	0,1223	0,0730
0,70	0,3010	0,0010	0,0181	-0,0836	0,1164	0,0581
0,75	0,2998	-0,0002	0,0134	-0,0868	0,1132	0,0442
0,80	0,3004	0,0004	0,0101	-0,0896	0,1104	0,0377
0,85	0,3020	0,0020	0,0080	-0,0996	0,1004	0,0309
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,2176	-0,0824	0,0243	-0,0056	0,1944	0,0537
0,60	0,3409	0,0409	0,0297	-0,0965	0,1035	0,0285
0,65	0,3886	0,0886	0,0388	-0,1368	0,0632	0,0219
0,70	0,3914	0,0914	0,0313	-0,1456	0,0544	0,0168
0,75	0,3295	0,0295	0,0114	-0,0989	0,1011	0,0192
0,80	0,2290	-0,0710	0,0084	-0,0226	0,1774	0,0359
0,85	0,1249	-0,1751	0,0314	0,0267	0,2267	0,0527
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,2979	-0,0021	0,0589	-0,0382	0,1618	0,1570
0,60	0,2995	-0,0005	0,0293	-0,0577	0,1423	0,0900
0,65	0,3013	0,0013	0,0225	-0,0631	0,1369	0,0720
0,70	0,3028	0,0028	0,0168	-0,0729	0,1271	0,0571
0,75	0,2998	-0,0002	0,0131	-0,0746	0,1254	0,0465
0,80	0,3010	0,0010	0,0099	-0,0796	0,1204	0,0388
0,85	0,3033	0,0033	0,0080	-0,0886	0,1114	0,0322



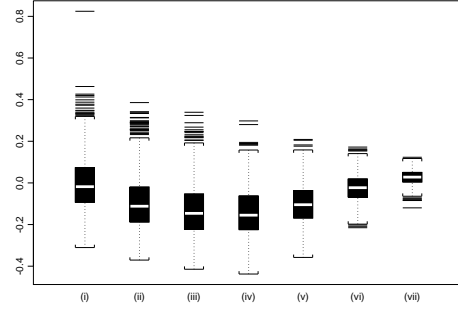
(a)



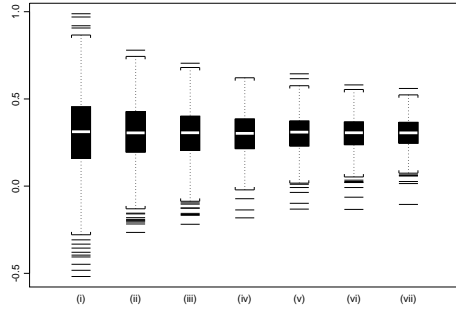
(b)



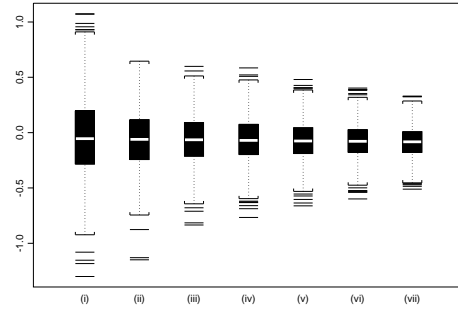
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.6: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 75$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,2970$, com $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de $-0,0030$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,1667$, com $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0333$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{LW}^{(1)}$, com $0,0136$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPH}$, com $0,0150$, onde $\alpha = 0,85$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 150$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3025$, com $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de $0,0025$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,1995$, com $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0005$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{LW}^{(1)}$, com $0,0056$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com $0,0081$, onde $\alpha = 0,75$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 225$, foram $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,2998$ e $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,2998$, com $\alpha = 0,75$, para os dois estimadores. O vício encontrado, para ambos os métodos, foi de $-0,0002$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,1456$, com $\alpha = 0,70$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0544$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{LW}^{(1)}$, com $0,0050$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com $0,0233$.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.2-6.7, veja as Figuras 6.1-6.6, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela 6.8 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 500$ e $k \in \{125, 250, 375\}$.

Tabela 6.8: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$ e $n = 500$.

k	média	vício	eqm
150	175,093	50,093	15729,080
250	255,560	5,560	8359,972
375	312,211	-62,789	18749,340

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.8, são bons quando $k = 250$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Isto também ocorreu quando $n = 300$ e $k = 150$, conforme resultados exibidos na Tabela 6.1. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 125$ ou $k = 375$, o comportamento do estimador não repete o desempenho do caso $k = 250$. Quando $k = 125$, \hat{k} foi superestimado em

relação a seu valor nominal. Quando $k = 375$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.9-6.14, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 500$ e $k = 125$

Tabela 6.9: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2311	-0,0689	0,0091
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1465	0,0535	0,0096
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2282	-0,0718	0,0090
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1164	0,0836	0,0119

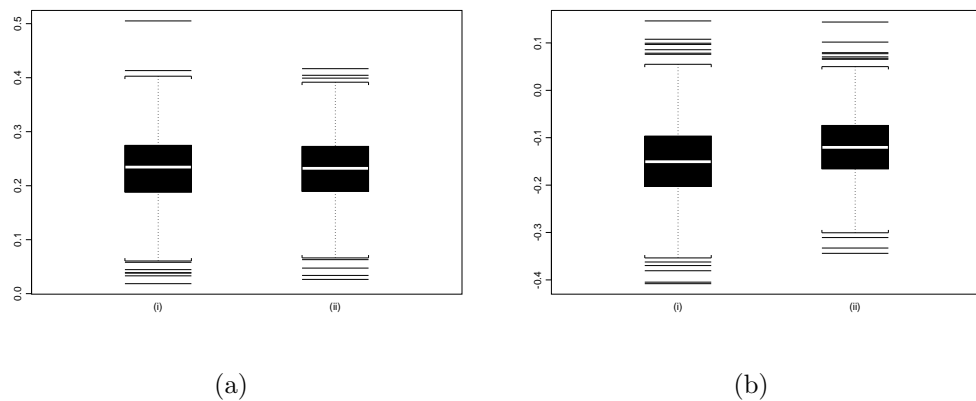
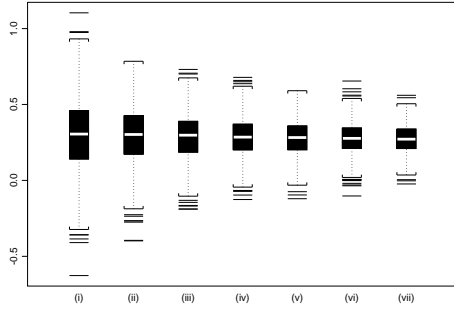


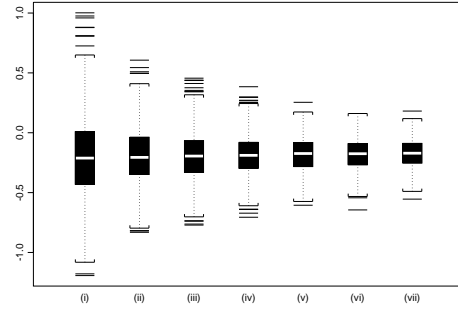
Figura 6.7: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Tabela 6.10: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

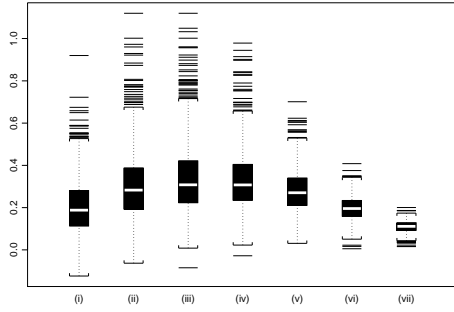
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3010	0,0010	0,0584	-0,1978	0,0022	0,0939
0,60	0,2933	-0,0067	0,0302	-0,1957	0,0043	0,0473
0,65	0,2894	-0,0106	0,0220	-0,1924	0,0076	0,0340
0,70	0,2840	-0,0160	0,0165	-0,1858	0,0142	0,0251
0,75	0,2797	-0,0203	0,0129	-0,1815	0,0185	0,0201
0,80	0,2742	-0,0258	0,0101	-0,1750	0,0250	0,0153
0,85	0,2729	-0,0271	0,0085	-0,1733	0,0267	0,0126
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1951	-0,1049	0,0260	-0,0586	0,1414	0,0260
0,60	0,2928	-0,0072	0,0215	-0,1369	0,0631	0,0130
0,65	0,3284	0,0284	0,0256	-0,1721	0,0279	0,0107
0,70	0,3276	0,0276	0,0204	-0,1869	0,0131	0,0097
0,75	0,2763	-0,0237	0,0103	-0,1553	0,0447	0,0090
0,80	0,1951	-0,1049	0,0144	-0,0824	0,1176	0,0176
0,85	0,1098	-0,1902	0,0370	-0,0094	0,1906	0,0375
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,2962	-0,0038	0,0569	-0,1846	0,0154	0,0859
0,60	0,2900	-0,0100	0,0302	-0,1883	0,0117	0,0465
0,65	0,2846	-0,0154	0,0227	-0,1827	0,0173	0,0338
0,70	0,2793	-0,0207	0,0165	-0,1758	0,0242	0,0249
0,75	0,2742	-0,0258	0,0128	-0,1712	0,0288	0,0195
0,80	0,2693	-0,0307	0,0102	-0,1663	0,0337	0,0154
0,85	0,2670	-0,0330	0,0086	-0,1653	0,0347	0,0124



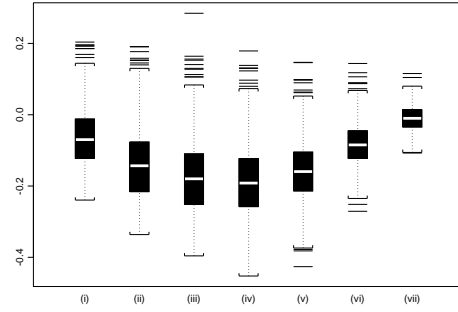
(a)



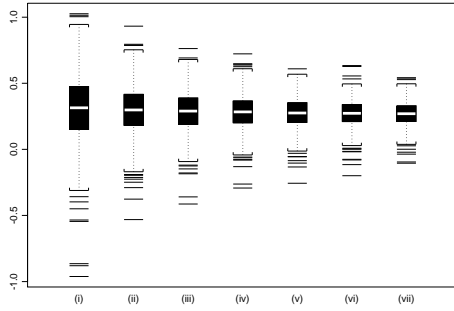
(b)



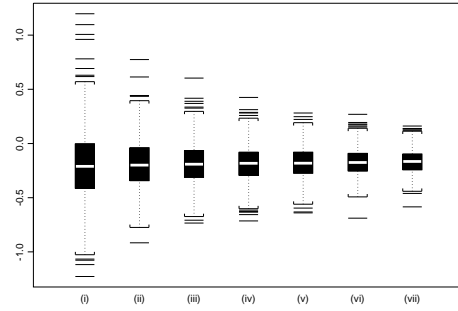
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.8: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Caso $n = 500$ e $k = 250$

Tabela 6.11: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2713	-0,0287	0,0035
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1933	0,0067	0,0065
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2607	-0,0393	0,0040
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1467	0,0533	0,0076

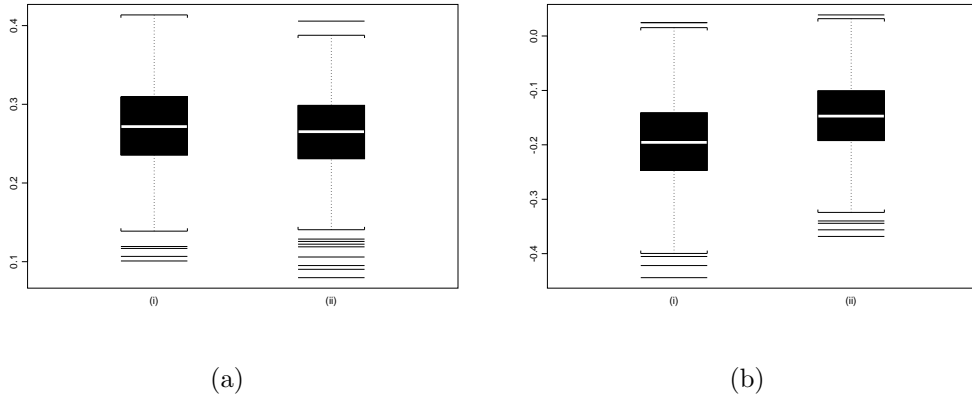
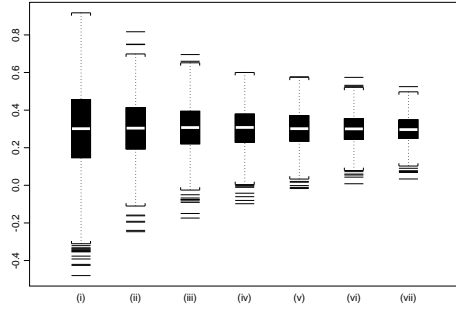


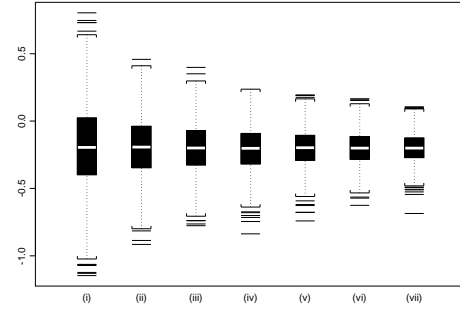
Figura 6.9: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Tabela 6.12: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

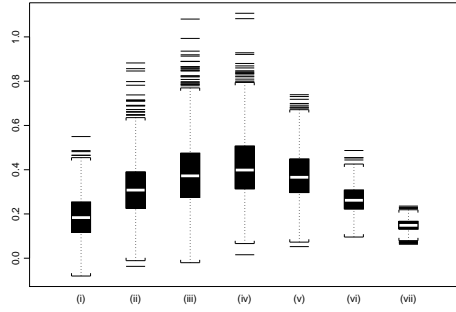
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2924	-0,0076	0,0518	-0,1943	0,0057	0,0993
0,60	0,2981	-0,0019	0,0247	-0,1979	0,0021	0,0480
0,65	0,3029	0,0029	0,0168	-0,2033	-0,0033	0,0341
0,70	0,3005	0,0005	0,0119	-0,2044	-0,0044	0,0260
0,75	0,2995	-0,0005	0,0088	-0,2019	-0,0019	0,0188
0,80	0,2969	-0,0031	0,0067	-0,2003	-0,0003	0,0142
0,85	0,2960	-0,0040	0,0057	-0,1993	0,0007	0,0116
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,1882	-0,1118	0,0222	-0,0607	0,1393	0,0251
0,60	0,3173	0,0173	0,0172	-0,1566	0,0434	0,0091
0,65	0,3831	0,0831	0,0284	-0,2081	-0,0081	0,0079
0,70	0,4110	0,1110	0,0332	-0,2375	-0,0375	0,0093
0,75	0,3689	0,0689	0,0162	-0,2149	-0,0149	0,0064
0,80	0,2646	-0,0354	0,0049	-0,1278	0,0722	0,0088
0,85	0,1489	-0,1511	0,0235	-0,0313	0,1687	0,0298
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2936	-0,0064	0,0494	-0,1860	0,0140	0,0958
0,60	0,2987	-0,0013	0,0222	-0,1936	0,0064	0,0444
0,65	0,3026	0,0026	0,0154	-0,2002	-0,0002	0,0317
0,70	0,3029	0,0029	0,0110	-0,2024	-0,0024	0,0241
0,75	0,3007	0,0007	0,0081	-0,2000	0,0000	0,0172
0,80	0,2982	-0,0018	0,0060	-0,1991	0,0009	0,0131
0,85	0,2970	-0,0030	0,0050	-0,1997	0,0003	0,0106



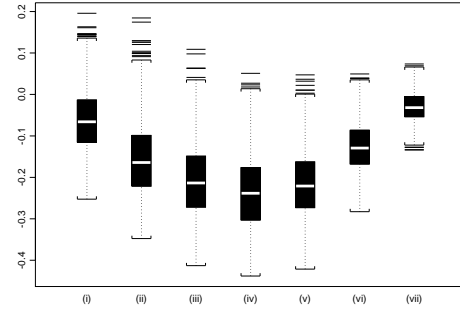
(a)



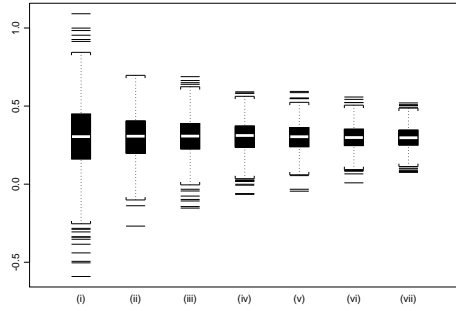
(b)



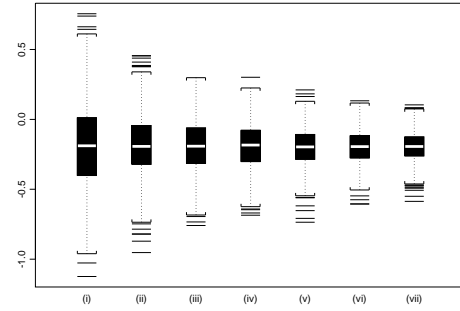
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.10: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Caso $n = 500$ e $k = 375$

Tabela 6.13: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2816	-0,0184	0,0025
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1127	0,0873	0,0150
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2673	-0,0327	0,0029
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,0686	0,1314	0,0226

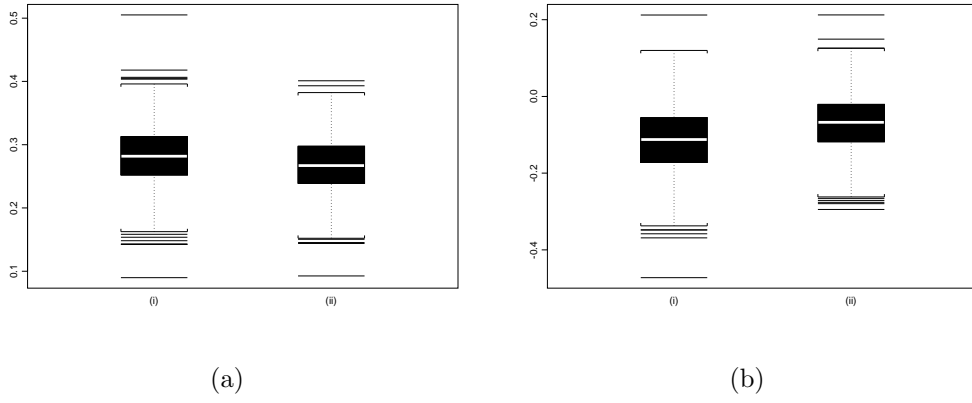
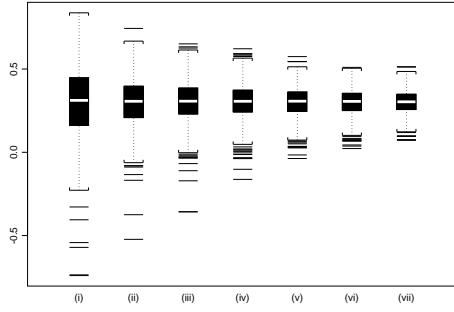


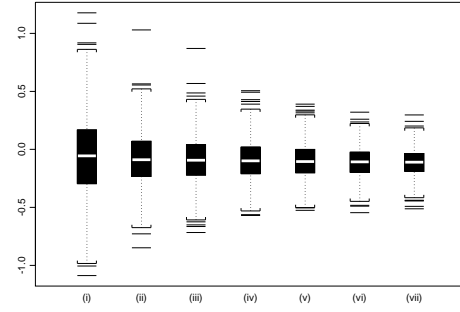
Figura 6.11: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

Tabela 6.14: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

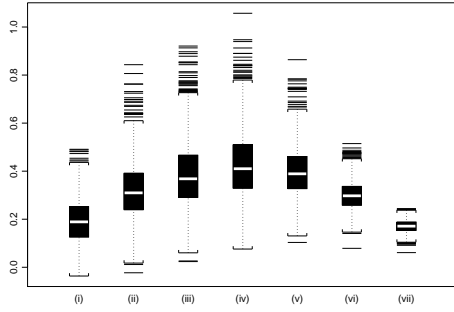
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2964	-0,0036	0,0422	-0,0656	0,1344	0,1300
0,60	0,2992	-0,0008	0,0206	-0,0811	0,1189	0,0686
0,65	0,3024	0,0024	0,0150	-0,0906	0,1094	0,0511
0,70	0,3019	0,0019	0,0110	-0,0970	0,1030	0,0394
0,75	0,3027	0,0027	0,0081	-0,1023	0,0977	0,0312
0,80	0,3022	0,0022	0,0062	-0,1078	0,0922	0,0248
0,85	0,3016	0,0016	0,0048	-0,1125	0,0875	0,0208
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1907	-0,1093	0,0200	0,0038	0,2038	0,0527
0,60	0,3181	0,0181	0,0150	-0,0932	0,1068	0,0239
0,65	0,3876	0,0876	0,0283	-0,1486	0,0514	0,0154
0,70	0,4314	0,1314	0,0384	-0,1874	0,0126	0,0113
0,75	0,4002	0,1002	0,0218	-0,1676	0,0324	0,0086
0,80	0,2991	-0,0009	0,0037	-0,0822	0,1178	0,0178
0,85	0,1710	-0,1290	0,0173	0,0054	0,2054	0,0436
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,2998	-0,0002	0,0397	-0,0500	0,1500	0,1207
0,60	0,3028	0,0028	0,0190	-0,0682	0,1318	0,0672
0,65	0,3052	0,0052	0,0140	-0,0770	0,1230	0,0515
0,70	0,3040	0,0040	0,0098	-0,0842	0,1158	0,0400
0,75	0,3032	0,0032	0,0072	-0,0911	0,1089	0,0318
0,80	0,3033	0,0033	0,0056	-0,0978	0,1022	0,0253
0,85	0,3027	0,0027	0,0043	-0,1032	0,0968	0,0212



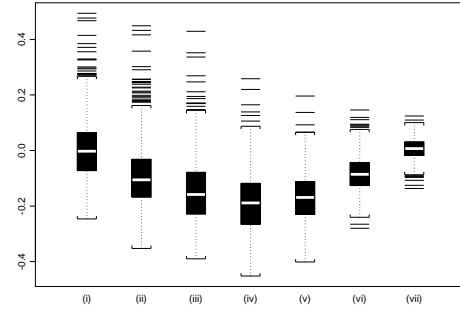
(a)



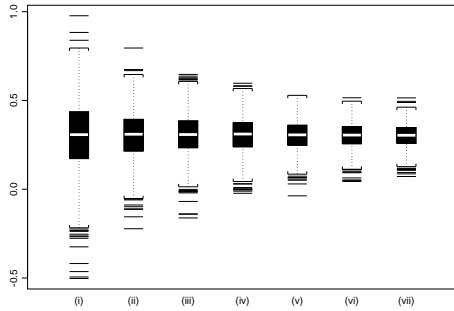
(b)



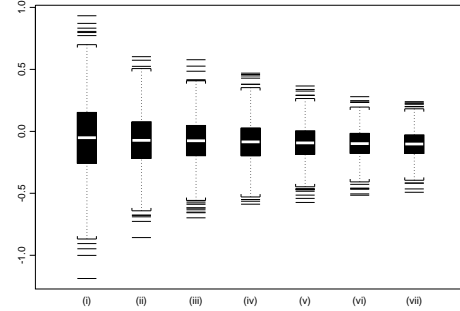
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.12: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 125$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3010$, com $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de 0,0010. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,1978$, com $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0022. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)}$, com 0,0085, onde $\alpha = 0,85$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com 0,0090, onde $\alpha = 0,75$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 250$, foram $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3005$ e $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,2995$, com $\alpha = 0,70$ e $\alpha = 0,75$, respectivamente. Os vícios encontrados foram de 0,0005 para o primeiro caso e $-0,0005$ para o segundo. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,2000$, com $\alpha = 0,75$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0000. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0035. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com 0,0064, onde $\alpha = 0,75$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 375$, foram $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,2998$, com $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de $-0,0002$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPHBa} = -0,1874$, com $\alpha = 0,70$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0126. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0025. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com 0,0086, onde $\alpha = 0,75$.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.9-6.14, veja as Figuras 6.7-6.12, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela 6.15 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 1000$ e $k \in \{250, 500, 750\}$.

Tabela 6.15: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$ e $n = 1000$.

k	média	vício	eqm
250	283,082	33,082	21666,388
500	499,842	-0,158	13640,504
750	691,066	-58,934	34933,504

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.36, são bons quando $k = 500$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Perceba que este comportamento também ocorreu quando $k = \frac{n}{2}$, onde $n = 300$ e $n = 500$, conforme apresentamos nas Tabelas 6.1 e 6.8, respectivamente. Quando simulamos a mudança de

regime em $k = 250$ ou $k = 750$, o comportamento do estimador não repetiu o desempenho do caso $k = 500$. Quando $k = 250$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 750$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.16-6.21, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 1000$ e $k = 250$

Tabela 6.16: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2551	-0,0449	0,0042
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1622	0,0378	0,0045
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2425	-0,0575	0,0052
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1282	0,0718	0,0074

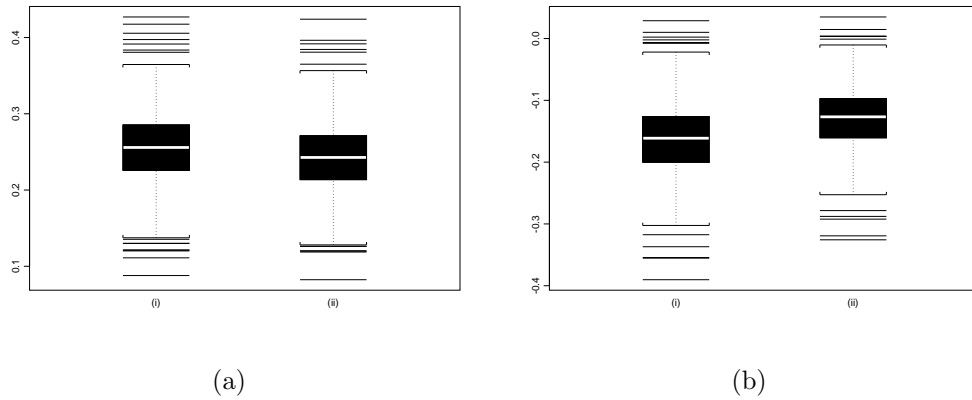
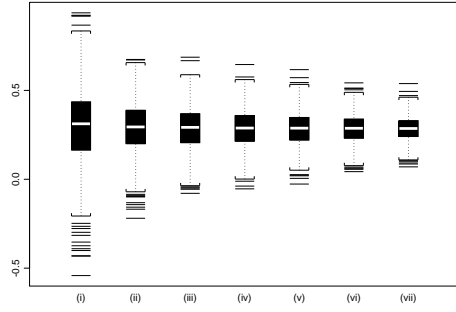


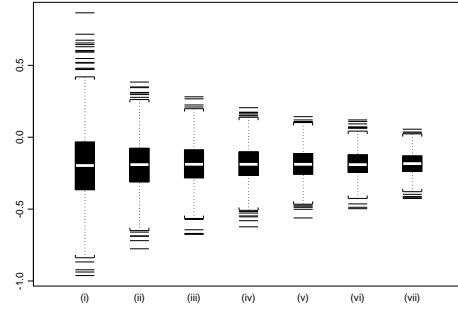
Figura 6.13: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Tabela 6.17: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

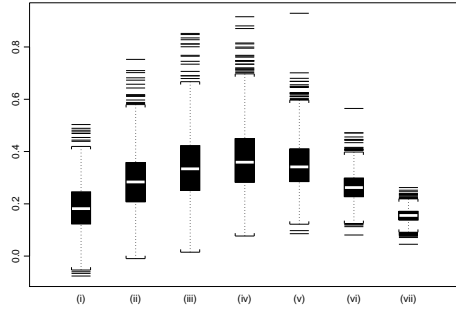
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2956	-0,0044	0,0451	-0,1952	0,0048	0,0677
0,60	0,2907	-0,0093	0,0214	-0,1882	0,0118	0,0324
0,65	0,2863	-0,0137	0,0144	-0,1866	0,0134	0,0206
0,70	0,2851	-0,0149	0,0108	-0,1860	0,0140	0,0150
0,75	0,2850	-0,0150	0,0084	-0,1854	0,0146	0,0117
0,80	0,2842	-0,0158	0,0064	-0,1836	0,0164	0,0087
0,85	0,2832	-0,0168	0,0048	-0,1828	0,0172	0,0064
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,1843	-0,1157	0,0224	-0,0467	0,1533	0,0269
0,60	0,2879	-0,0121	0,0140	-0,1293	0,0707	0,0105
0,65	0,3446	0,0446	0,0185	-0,1845	0,0155	0,0065
0,70	0,3768	0,0768	0,0228	-0,2249	-0,0249	0,0075
0,75	0,3517	0,0517	0,0127	-0,2227	-0,0227	0,0062
0,80	0,2648	-0,0352	0,0046	-0,1520	0,0480	0,0053
0,85	0,1550	-0,1450	0,0218	-0,0437	0,1563	0,0254
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2957	-0,0043	0,0419	-0,1888	0,0112	0,0649
0,60	0,2897	-0,0103	0,0207	-0,1832	0,0168	0,0307
0,65	0,2822	-0,0178	0,0138	-0,1806	0,0194	0,0203
0,70	0,2808	-0,0192	0,0105	-0,1785	0,0215	0,0150
0,75	0,2806	-0,0194	0,0081	-0,1775	0,0225	0,0118
0,80	0,2790	-0,0210	0,0062	-0,1758	0,0242	0,0088
0,85	0,2781	-0,0219	0,0049	-0,1760	0,0240	0,0067



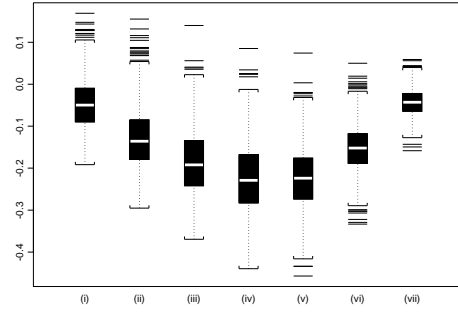
(a)



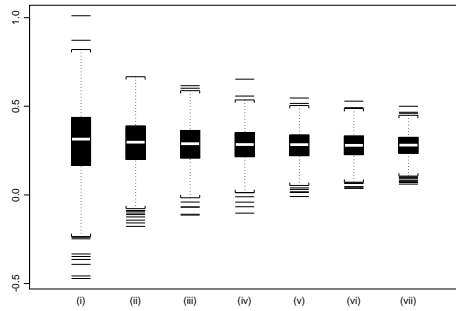
(b)



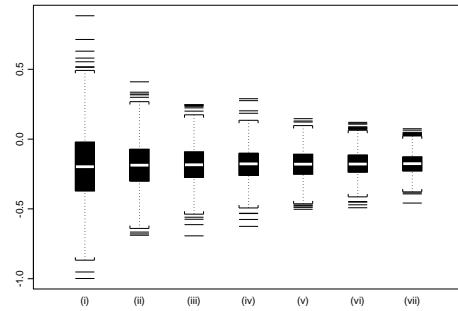
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.14: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Caso $n = 1000$ e $k = 500$

Tabela 6.18: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2881	-0,0119	0,0016
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1990	0,0010	0,0030
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2684	-0,0316	0,0023
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1521	0,0479	0,0045

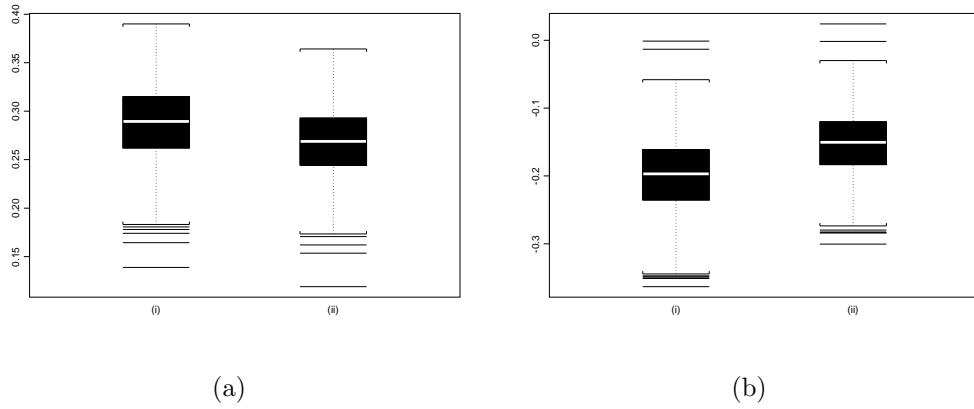
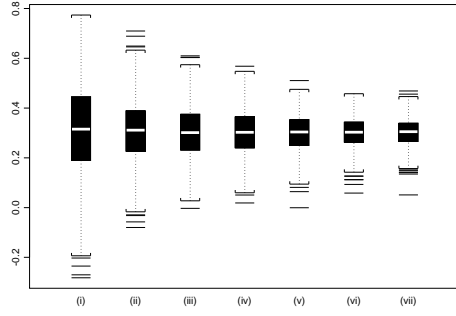


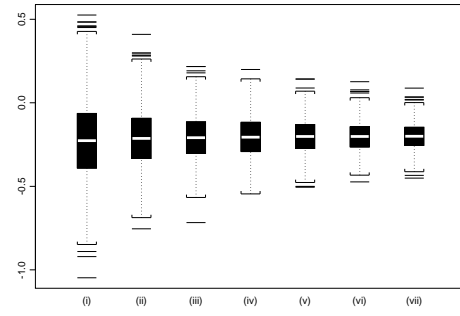
Figura 6.15: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Tabela 6.19: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

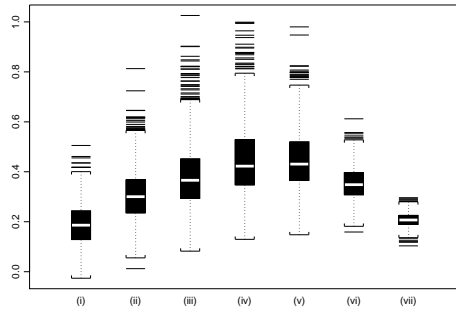
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3096	0,0096	0,0333	-0,2203	-0,0203	0,0585
0,60	0,3062	0,0062	0,0153	-0,2125	-0,0125	0,0301
0,65	0,3019	0,0019	0,0110	-0,2051	-0,0051	0,0207
0,70	0,3023	0,0023	0,0078	-0,2035	-0,0035	0,0152
0,75	0,3016	0,0016	0,0055	-0,2010	-0,0010	0,0104
0,80	0,3029	0,0029	0,0040	-0,2023	-0,0023	0,0079
0,85	0,3021	0,0021	0,0030	-0,2015	-0,0015	0,0062
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,1893	-0,1107	0,0193	-0,0581	0,1419	0,0238
0,60	0,3078	0,0078	0,0116	-0,1481	0,0519	0,0076
0,65	0,3826	0,0826	0,0241	-0,2081	-0,0081	0,0056
0,70	0,4493	0,1493	0,0424	-0,2658	-0,0658	0,0101
0,75	0,4506	0,1506	0,0371	-0,2807	-0,0807	0,0117
0,80	0,3533	0,0533	0,0073	-0,2106	-0,0106	0,0032
0,85	0,2069	-0,0931	0,0094	-0,0762	0,1238	0,0165
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3100	0,0100	0,0311	-0,2169	-0,0169	0,0556
0,60	0,3066	0,0066	0,0141	-0,2112	-0,0112	0,0278
0,65	0,3030	0,0030	0,0102	-0,2057	-0,0057	0,0197
0,70	0,3043	0,0043	0,0069	-0,2063	-0,0063	0,0141
0,75	0,3024	0,0024	0,0049	-0,2032	-0,0032	0,0095
0,80	0,3033	0,0033	0,0036	-0,2024	-0,0024	0,0070
0,85	0,3025	0,0025	0,0028	-0,2021	-0,0021	0,0057



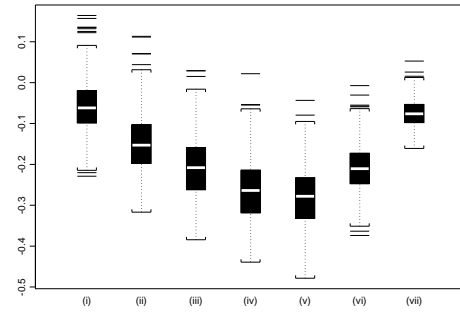
(a)



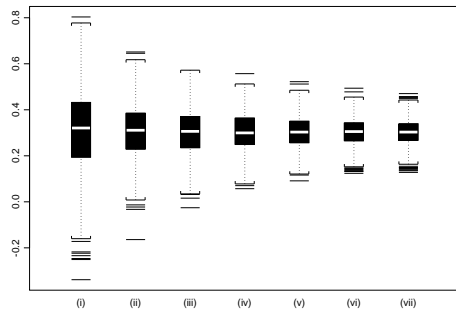
(b)



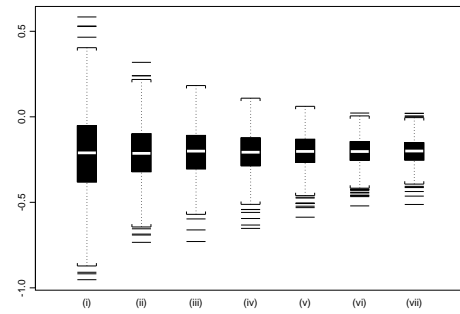
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.16: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Caso $n = 1000$ e $k = 750$

Tabela 6.20: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2902	-0,0098	0,0010
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1481	0,0519	0,0063
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2681	-0,0319	0,0018
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,0992	0,1008	0,0129

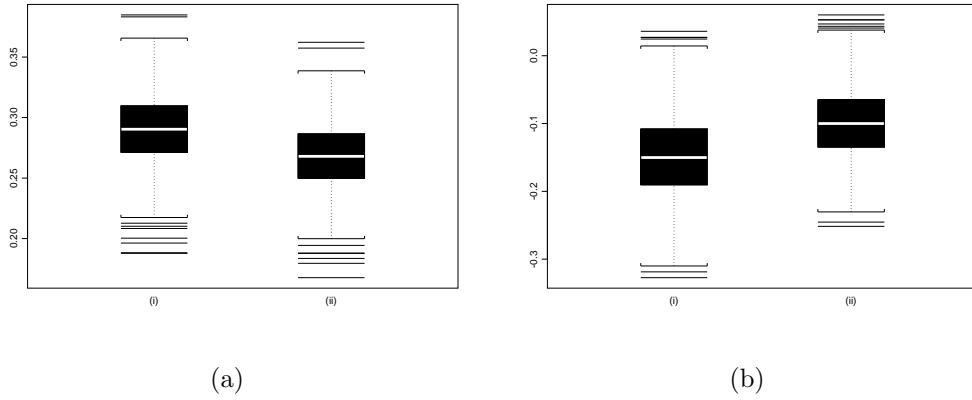
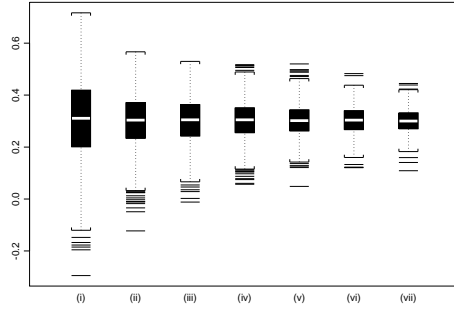


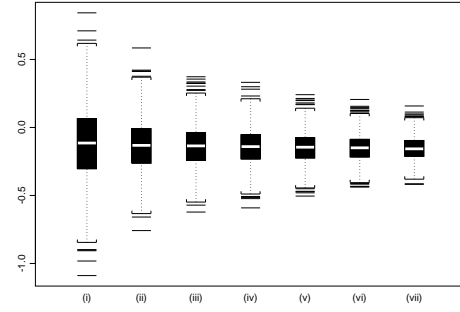
Figura 6.17: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Tabela 6.21: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

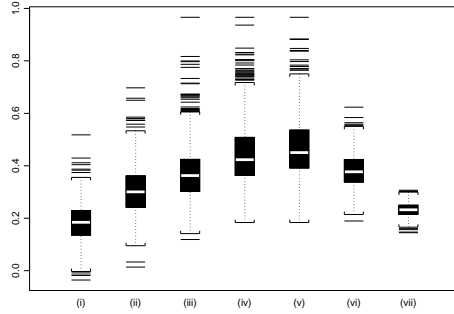
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3028	0,0028	0,0249	-0,1150	0,0850	0,0848
0,60	0,3005	0,0005	0,0108	-0,1327	0,0673	0,0396
0,65	0,3024	0,0024	0,0075	-0,1400	0,0600	0,0286
0,70	0,3026	0,0026	0,0055	-0,1438	0,0562	0,0213
0,75	0,3019	0,0019	0,0040	-0,1467	0,0533	0,0160
0,80	0,3027	0,0027	0,0029	-0,1515	0,0485	0,0118
0,85	0,3009	0,0009	0,0021	-0,1527	0,0473	0,0094
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,1850	-0,1150	0,0183	-0,0109	0,1891	0,0423
0,60	0,3032	0,0032	0,0076	-0,1061	0,0939	0,0157
0,65	0,3719	0,0719	0,0156	-0,1674	0,0326	0,0076
0,70	0,4436	0,1436	0,0344	-0,2267	-0,0267	0,0069
0,75	0,4695	0,1695	0,0406	-0,2494	-0,0494	0,0079
0,80	0,3825	0,0825	0,0107	-0,1782	0,0218	0,0036
0,85	0,2327	-0,0673	0,0052	-0,0490	0,1510	0,0241
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2962	-0,0038	0,0569	-0,1846	0,0154	0,0859
0,60	0,2900	-0,0100	0,0302	-0,1883	0,0117	0,0465
0,65	0,2846	-0,0154	0,0227	-0,1827	0,0173	0,0338
0,70	0,2793	-0,0207	0,0165	-0,1758	0,0242	0,0249
0,75	0,2742	-0,0258	0,0128	-0,1712	0,0288	0,0195
0,80	0,2693	-0,0307	0,0102	-0,1663	0,0337	0,0154
0,85	0,2670	-0,0330	0,0086	-0,1653	0,0347	0,0124



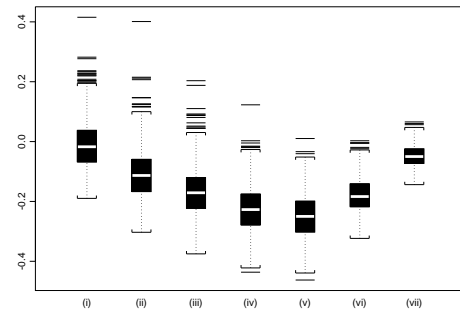
(a)



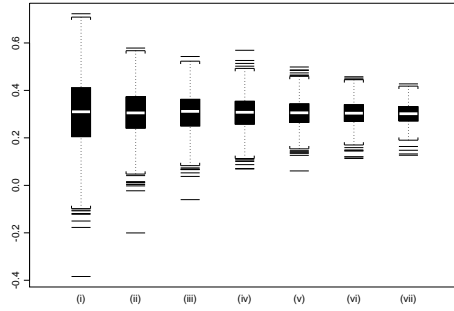
(b)



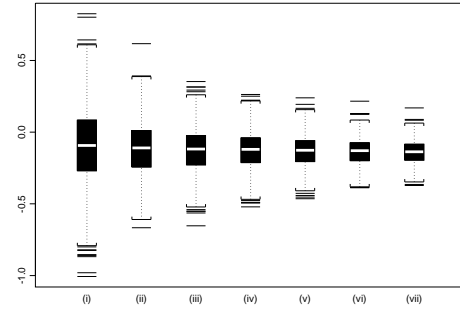
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.18: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,2957$, com $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de $-0,0043$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,1978$, com $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0048$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0042$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com $0,0045$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 500$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3016$, com $\alpha = 0,75$. O vício encontrado foi de $0,0016$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{MV} = -0,1990$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0010$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ e δ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0016$ e $0,0030$, respectivamente.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 750$, foram $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3005$, com $\alpha = 0,60$. O vício encontrado foi de $0,0005$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPHBa} = -0,1782$, com $\alpha = 0,80$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0218$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0010$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com $0,0036$, onde $\alpha = 0,80$.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.16-6.21, veja as Figuras 6.13-6.18, onde apresentamos os box-plots dos estimadores.

6.2 Caso Não-Estacionário

Nesta seção exibimos os resultados das simulações realizadas quando os dois valores dos parâmetros de longa dependência $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ do modelo (5.49) estão na região de não-estacionariedade. Neste exemplo em particular, $d^{(1)} = 0,8$ e $d^{(2)} = 0,6$, ou seja, $\delta = -0,2$. Os resultados para $d^{(1)} = 0,6$ e $d^{(2)} = 0,8$ são apresentados na Seção A.2 do Apêndice A.

Conforme descrito no início deste capítulo, em primeiro lugar geramos as amostras que serão analisadas para cada caso considerado. Como são três tamanhos amostrais, cada um com três pontos de mudança de regime, temos no total 9 conjuntos de dados diferentes, cada um com 1000 séries temporais simuladas.

A Tabela 6.22 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 300$ e $k \in \{75, 150, 225\}$, respectivamente.

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.22, são bons quando $k = 150$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 75$ ou $k = 225$, o comportamento do estimador não repete o desempenho do caso $k = 150$. Quando $k = 75$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor

Tabela 6.22: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$ e $n = 300$.

k	média	vício	eqm
75	99,209	24,209	4736,125
150	146,933	-3,067	2449,221
225	203,170	-21,830	3996,104

nominal. Quando $k = 225$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.23-6.28, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 300$ e $k = 75$

Tabela 6.23: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7659	-0,0341	0,0115
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1892	0,0108	0,0145
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7031	-0,0969	0,0174
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,0904	0,1096	0,0212

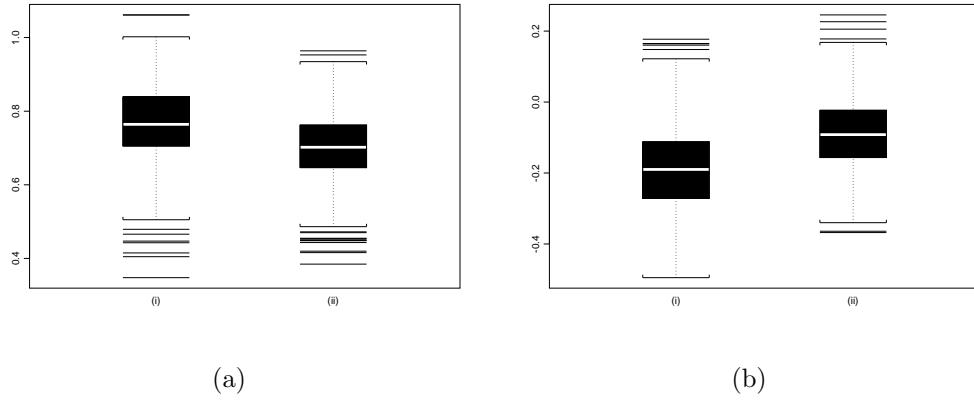
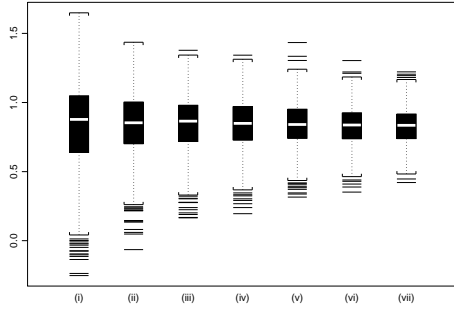


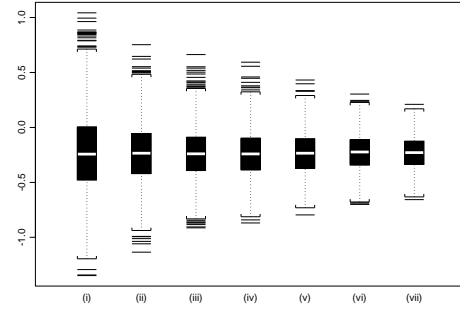
Figura 6.19: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Tabela 6.24: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

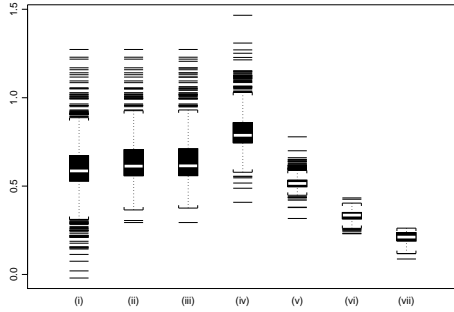
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8396	0,0396	0,0971	-0,2238	-0,0238	0,1467
0,60	0,8426	0,0426	0,0527	-0,2309	-0,0309	0,0779
0,65	0,8440	0,0440	0,0417	-0,2324	-0,0324	0,0606
0,70	0,8433	0,0433	0,0330	-0,2328	-0,0328	0,0485
0,75	0,8383	0,0383	0,0262	-0,2323	-0,0323	0,0379
0,80	0,8305	0,0305	0,0205	-0,2261	-0,0261	0,0296
0,85	0,8302	0,0302	0,0171	-0,2270	-0,0270	0,0241
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6034	-0,1966	0,0634	-0,0038	0,1962	0,0541
0,60	0,6472	-0,1528	0,0404	-0,0362	0,1638	0,0414
0,65	0,6529	-0,1471	0,0400	-0,0398	0,1602	0,0419
0,70	0,8115	0,0115	0,0110	-0,1719	0,0281	0,0076
0,75	0,5182	-0,2818	0,0808	0,0775	0,2775	0,0825
0,80	0,3322	-0,4678	0,2196	0,2190	0,4190	0,1794
0,85	0,2088	-0,5912	0,3505	0,1643	0,3643	0,1336
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8549	0,0549	0,1013	-0,2278	-0,0278	0,1483
0,60	0,8325	0,0325	0,0530	-0,2123	-0,0123	0,0729
0,65	0,8300	0,0300	0,0392	-0,2116	-0,0116	0,0554
0,70	0,8253	0,0253	0,0303	-0,2085	-0,0085	0,0434
0,75	0,8212	0,0212	0,0241	-0,2085	-0,0085	0,0345
0,80	0,8129	0,0129	0,0189	-0,2030	-0,0030	0,0268
0,85	0,8117	0,0117	0,0152	-0,2021	-0,0021	0,0214



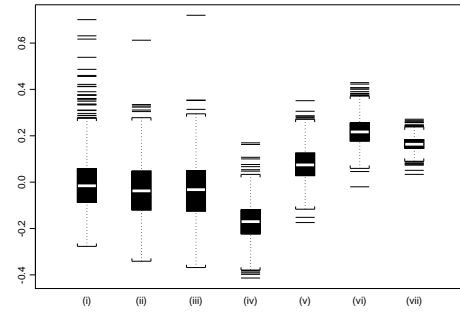
(a)



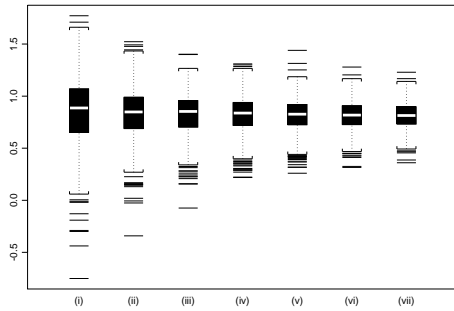
(b)



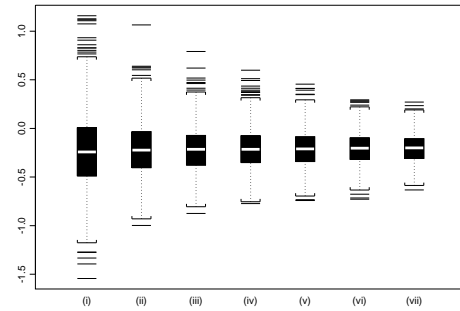
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.20: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Caso $n = 300$ e $k = 150$

Tabela 6.25: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7628	-0,0372	0,0076
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1606	0,0394	0,0121
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7239	-0,0761	0,0109
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,0664	0,1336	0,0259

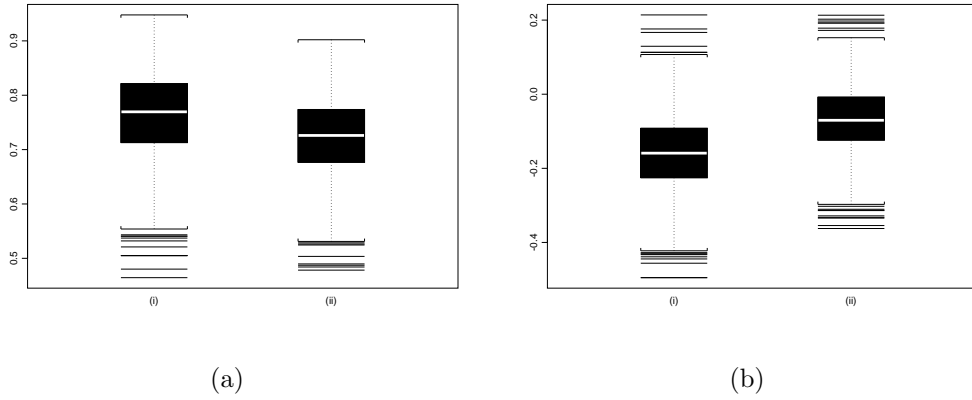
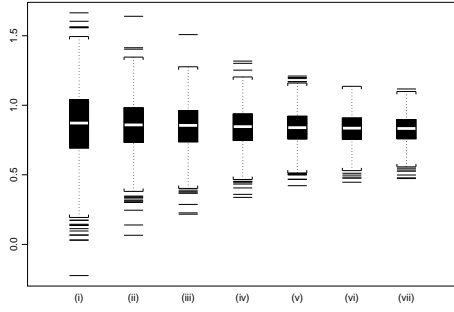


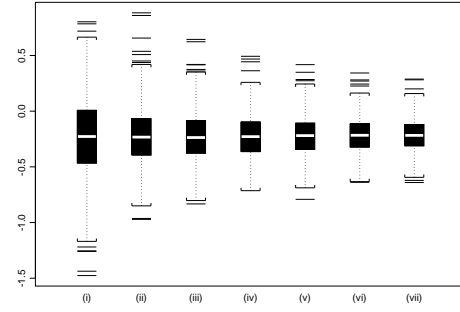
Figura 6.21: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Tabela 6.26: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

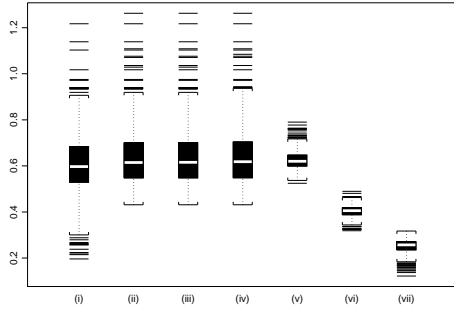
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8560	0,0560	0,0727	-0,2276	-0,0276	0,1311
0,60	0,8523	0,0523	0,0413	-0,2281	-0,0281	0,0686
0,65	0,8470	0,0470	0,0298	-0,2286	-0,0286	0,0490
0,70	0,8423	0,0423	0,0221	-0,2288	-0,0288	0,0362
0,75	0,8367	0,0367	0,0168	-0,2229	-0,0229	0,0300
0,80	0,8321	0,0321	0,0139	-0,2193	-0,0193	0,0240
0,85	0,8284	0,0284	0,0112	-0,2165	-0,0165	0,0193
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6109	-0,1891	0,0506	-0,0663	0,1337	0,0278
0,60	0,6336	-0,1664	0,0407	-0,0610	0,1390	0,0296
0,65	0,6337	-0,1663	0,0407	-0,0202	0,1798	0,0456
0,70	0,6376	-0,1624	0,0402	0,0208	0,2208	0,0690
0,75	0,6256	-0,1744	0,0318	0,0242	0,2242	0,0573
0,80	0,4038	-0,3962	0,1575	0,1725	0,3725	0,1427
0,85	0,2520	-0,5480	0,3011	0,1512	0,3512	0,1241
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8300	0,0300	0,0683	-0,3477	-0,1477	0,1729
0,60	0,8297	0,0297	0,0375	-0,3468	-0,1468	0,1059
0,65	0,8245	0,0245	0,0262	-0,3146	-0,1146	0,0706
0,70	0,8285	0,0285	0,0201	-0,2646	-0,0646	0,0426
0,75	0,8276	0,0276	0,0162	-0,1975	0,0025	0,0290
0,80	0,8261	0,0261	0,0134	-0,1900	0,0100	0,0237
0,85	0,8259	0,0259	0,0112	-0,1894	0,0106	0,0188



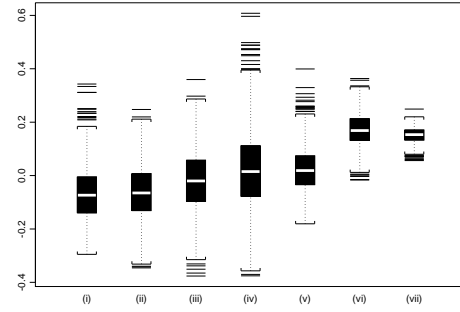
(a)



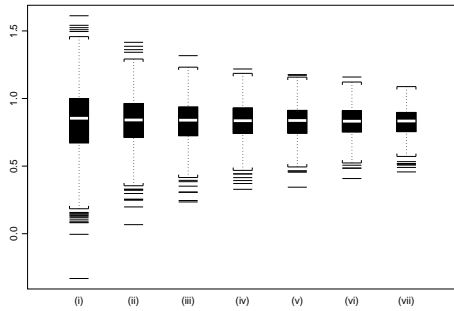
(b)



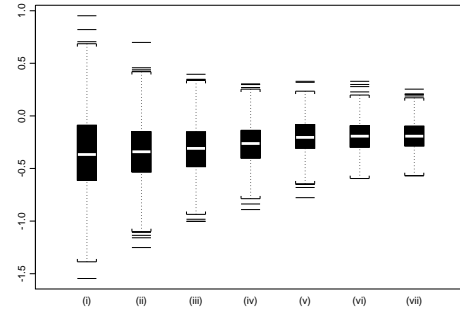
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.22: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Caso $n = 300$ e $k = 225$

Tabela 6.27: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7779	-0,0221	0,0042
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,0600	0,1400	0,0424
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7344	-0,0656	0,0077
$\hat{\delta}_{LW}$	0,0547	0,2547	0,0775

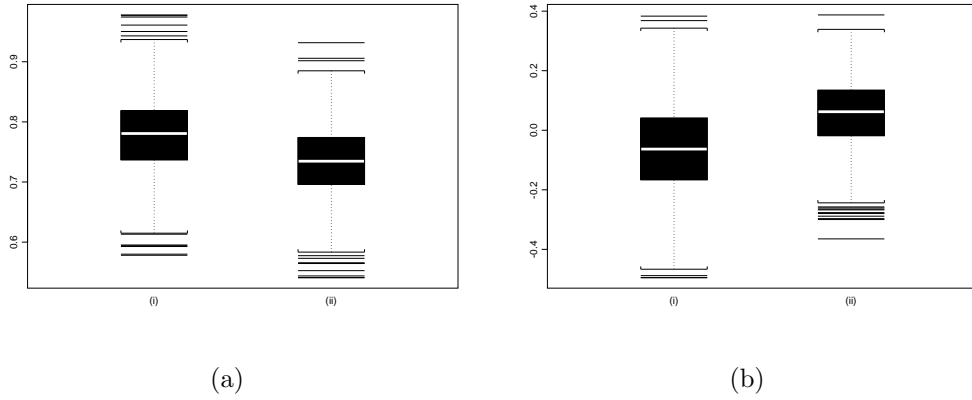
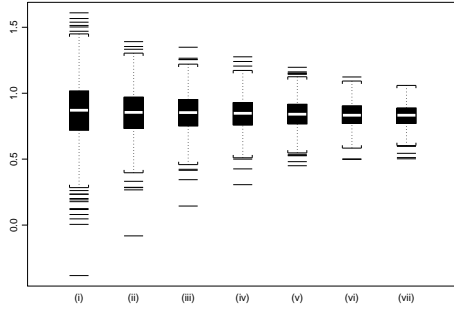


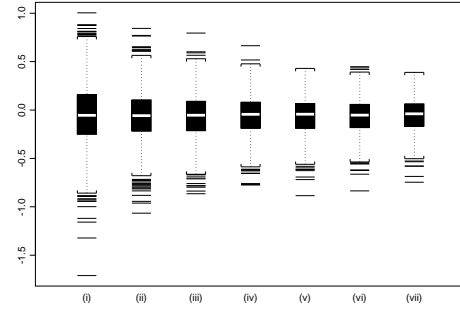
Figura 6.23: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Tabela 6.28: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

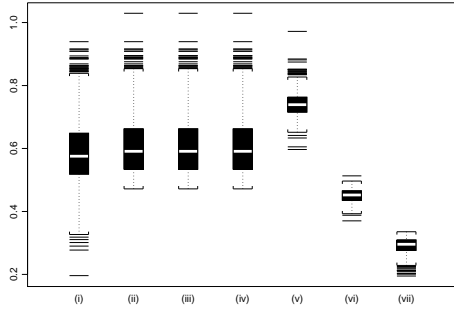
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8646	0,0646	0,0616	-0,0523	0,1477	0,1346
0,60	0,8526	0,0526	0,0336	-0,0616	0,1384	0,0884
0,65	0,8506	0,0506	0,0247	-0,0620	0,1380	0,0734
0,70	0,8439	0,0439	0,0183	-0,0570	0,1430	0,0639
0,75	0,8395	0,0395	0,0140	-0,0622	0,1378	0,0549
0,80	0,8344	0,0344	0,0105	-0,0641	0,1359	0,0496
0,85	0,8300	0,0300	0,0081	-0,0536	0,1464	0,0490
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,5904	-0,2096	0,0544	0,1708	0,3708	0,1673
0,60	0,6089	-0,1911	0,0458	0,2306	0,4306	0,2488
0,65	0,6090	-0,1910	0,0458	0,2344	0,4344	0,2526
0,70	0,6090	-0,1910	0,0458	0,2055	0,4055	0,2095
0,75	0,7414	-0,0586	0,0048	0,0365	0,2365	0,0660
0,80	0,4504	-0,3496	0,1227	0,1867	0,3867	0,1543
0,85	0,2925	-0,5075	0,2582	0,1305	0,3305	0,1111
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,8315	0,0315	0,0462	0,0913	0,2913	0,2252
0,60	0,8332	0,0332	0,0267	0,0266	0,2266	0,1242
0,65	0,8347	0,0347	0,0200	0,0218	0,2218	0,1053
0,70	0,8337	0,0337	0,0152	0,0056	0,2056	0,0871
0,75	0,8364	0,0364	0,0121	-0,0037	0,1963	0,0751
0,80	0,8339	0,0339	0,0099	-0,0147	0,1853	0,0634
0,85	0,8337	0,0337	0,0084	-0,0170	0,1830	0,0589



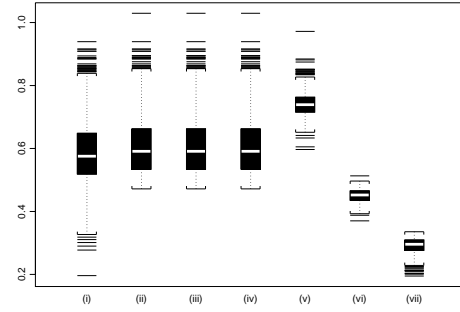
(a)



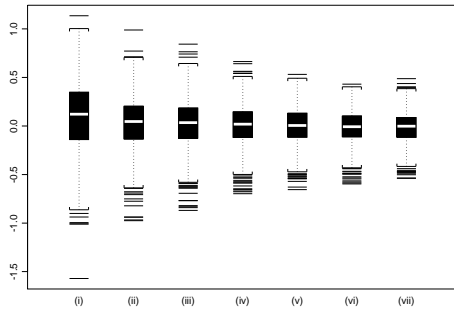
(b)



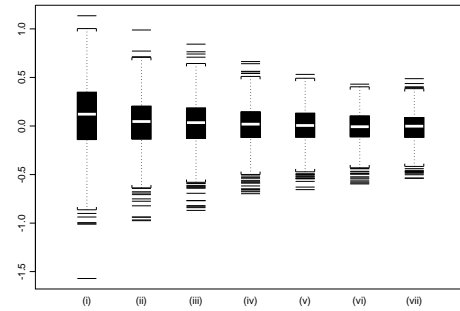
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.24: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 75$, foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)} = 0,8115$, com $\alpha = 0,70$. O vício encontrado foi de 0,0115. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,2021$, com $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0021$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$, com 0,0110, onde $\alpha = 0,70$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{KP}$, com 0,0076, onde $\alpha = 0,70$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 150$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,8245$, com $\alpha = 0,65$. O vício encontrado foi de 0,0245. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,1975$, com $\alpha = 0,75$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0025. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{LW}^{(1)}$, com 0,0109. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com 0,0112, onde $\alpha = 0,85$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 225$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7779$. O vício encontrado foi de $-0,0221$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{MV} = -0,0600$ também foi o de menor vício, com o valor de 0,1400. Além disso, este mesmo estimador apresentou os melhores valores de eqm. Para $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, o valor foi 0,0042. Para $\hat{\delta}_{MV}$, o valor foi 0,0424.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.23-6.28, veja as Figuras 6.39-6.24, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela 6.29 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 500$ e $k \in \{125, 250, 375\}$, respectivamente.

Tabela 6.29: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$ e $n = 500$.

k	média	vício	eqm
125	172,475	47,475	13277,955
250	249,917	-0,083	3845,003
375	338,325	-36,675	9719,119

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.29, são bons quando $k = 250$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Isto também ocorreu quando $n = 300$ e $k = \frac{n}{2}$, conforme resultados exibidos na Tabela 6.22. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 125$ ou $k = 375$, o comportamento do estimador não repete o desempenho do caso $k = 250$. Quando $k = 125$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 375$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.30-6.35, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 500$ e $k = 125$

Tabela 6.30: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7704	-0,0296	0,0078
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1857	0,0143	0,0093
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7062	-0,0938	0,0140
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,0932	0,1068	0,0173

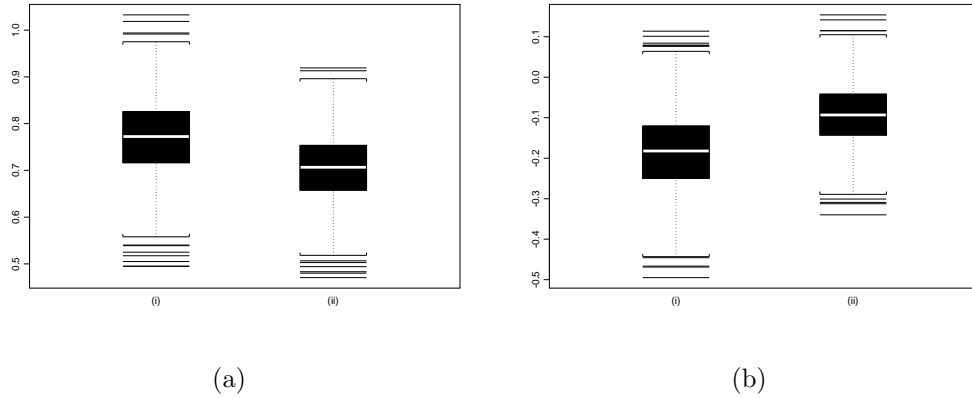
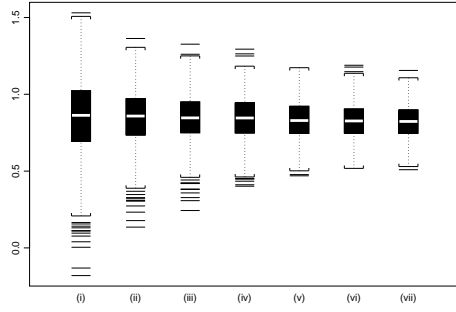


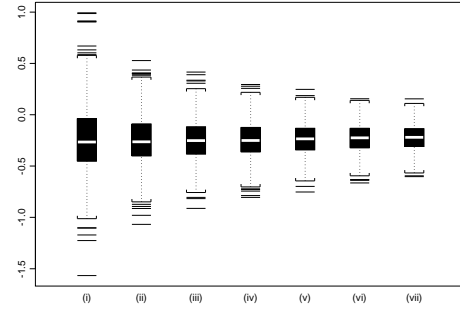
Figura 6.25: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Tabela 6.31: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

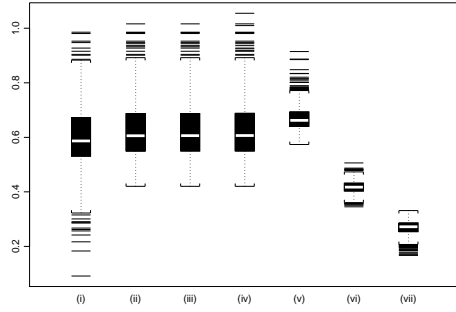
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8463	0,0463	0,0654	-0,2428	-0,0428	0,1019
0,60	0,8460	0,0460	0,0361	-0,2473	-0,0473	0,0568
0,65	0,8431	0,0431	0,0274	-0,2473	-0,0473	0,0415
0,70	0,8419	0,0419	0,0230	-0,2463	-0,0463	0,0337
0,75	0,8312	0,0312	0,0181	-0,2350	-0,0350	0,0257
0,80	0,8259	0,0259	0,0142	-0,2293	-0,0293	0,0204
0,85	0,8215	0,0215	0,0117	-0,2243	-0,0243	0,0162
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6003	-0,1997	0,0519	-0,0037	0,1963	0,0464
0,60	0,6246	-0,1754	0,0408	-0,0211	0,1789	0,0416
0,65	0,6253	-0,1747	0,0406	-0,0220	0,1780	0,0425
0,70	0,6267	-0,1733	0,0406	-0,0225	0,1775	0,0430
0,75	0,6696	-0,1304	0,0188	-0,0683	0,1317	0,0206
0,80	0,4168	-0,3832	0,1474	0,1740	0,3740	0,1428
0,85	0,2681	-0,5319	0,2836	0,1880	0,3880	0,1514
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8429	0,0429	0,0621	-0,2204	-0,0204	0,0959
0,60	0,8315	0,0315	0,0322	-0,2207	-0,0207	0,0510
0,65	0,8257	0,0257	0,0234	-0,2183	-0,0183	0,0350
0,70	0,8219	0,0219	0,0186	-0,2120	-0,0120	0,0281
0,75	0,8158	0,0158	0,0151	-0,2088	-0,0088	0,0213
0,80	0,8106	0,0106	0,0120	-0,2039	-0,0039	0,0166
0,85	0,8049	0,0049	0,0104	-0,1990	0,0010	0,0137



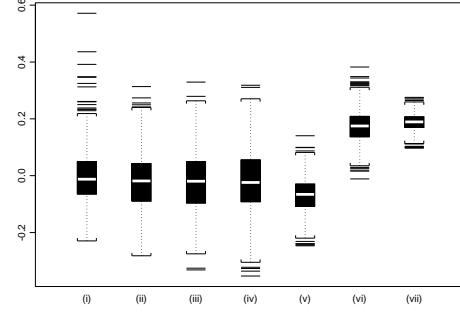
(a)



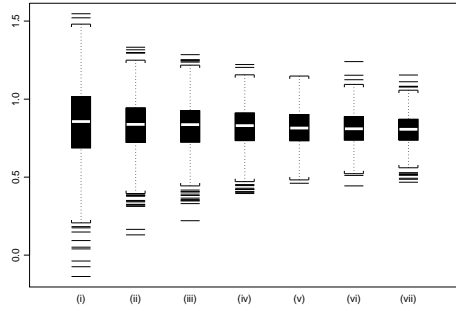
(b)



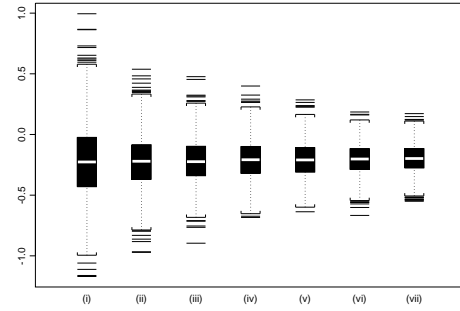
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.26: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Caso $n = 500$ e $k = 250$

Tabela 6.32: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7837	-0,0163	0,0031
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1899	0,0101	0,0066
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7354	-0,0646	0,0071
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1709	0,0291	0,0102

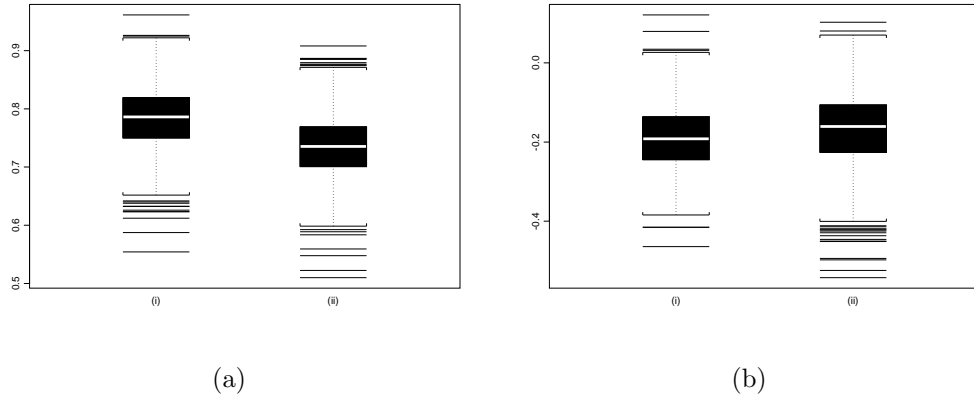
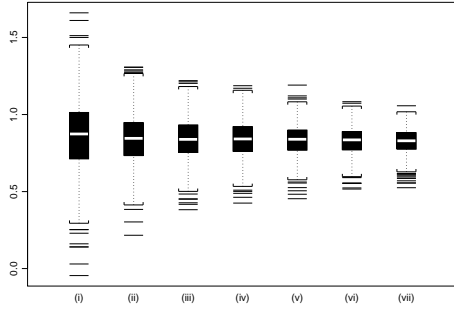


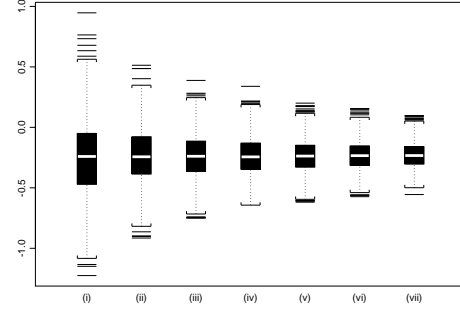
Figura 6.27: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Tabela 6.33: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

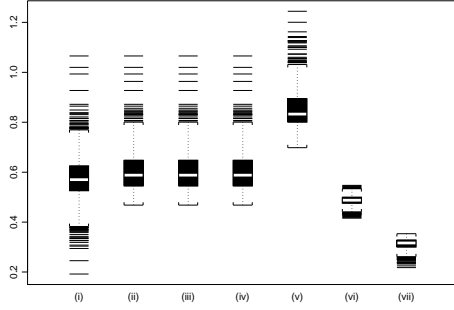
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8641	0,0641	0,0572	-0,2558	-0,0558	0,0968
0,60	0,8434	0,0434	0,0266	-0,2401	-0,0401	0,0491
0,65	0,8404	0,0404	0,0199	-0,2410	-0,0410	0,0371
0,70	0,8390	0,0390	0,0154	-0,2379	-0,0379	0,0273
0,75	0,8338	0,0338	0,0115	-0,2348	-0,0348	0,0208
0,80	0,8304	0,0304	0,0086	-0,2315	-0,0315	0,0158
0,85	0,8270	0,0270	0,0067	-0,2282	-0,0282	0,0124
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5795	-0,2205	0,0570	-0,0135	0,1865	0,0418
0,60	0,6049	-0,1951	0,0449	-0,0398	0,1602	0,0344
0,65	0,6049	-0,1951	0,0449	-0,0461	0,1539	0,0331
0,70	0,6049	-0,1951	0,0449	-0,0518	0,1482	0,0320
0,75	0,8517	0,0517	0,0085	-0,2419	-0,0419	0,0062
0,80	0,4871	-0,3129	0,0983	0,0427	0,2427	0,0641
0,85	0,3124	-0,4876	0,2382	0,1180	0,3180	0,1029
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8387	0,0387	0,0447	-0,2337	-0,0337	0,0876
0,60	0,8317	0,0317	0,0221	-0,2450	-0,0450	0,0475
0,65	0,8346	0,0346	0,0176	-0,2544	-0,0544	0,0392
0,70	0,8362	0,0362	0,0136	-0,2594	-0,0594	0,0300
0,75	0,8364	0,0364	0,0109	-0,2691	-0,0691	0,0267
0,80	0,8341	0,0341	0,0089	-0,2767	-0,0767	0,0257
0,85	0,8327	0,0327	0,0074	-0,2851	-0,0851	0,0258



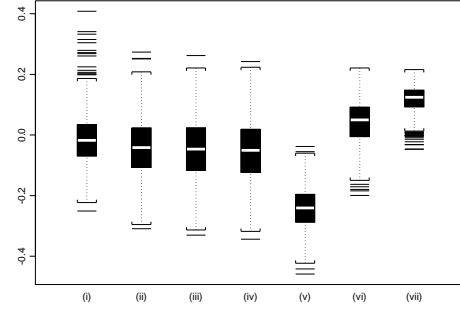
(a)



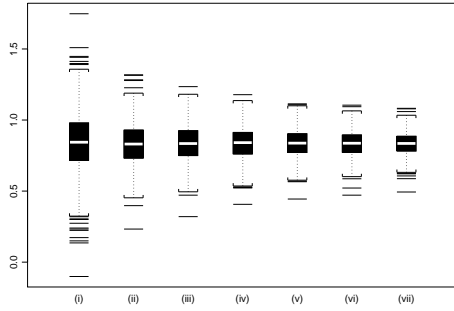
(b)



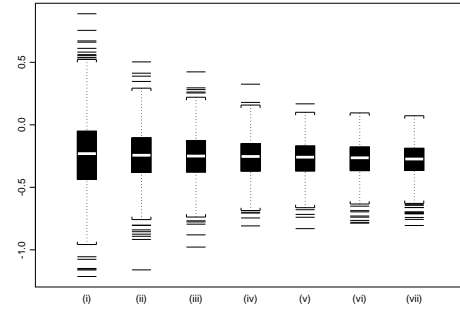
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.28: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Caso $n = 500$ e $k = 375$

Tabela 6.34: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7854	-0,0146	0,0024
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,0598	0,1402	0,0360
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7350	-0,0650	0,0065
$\hat{\delta}_{LW}$	0,0368	0,2368	0,0657

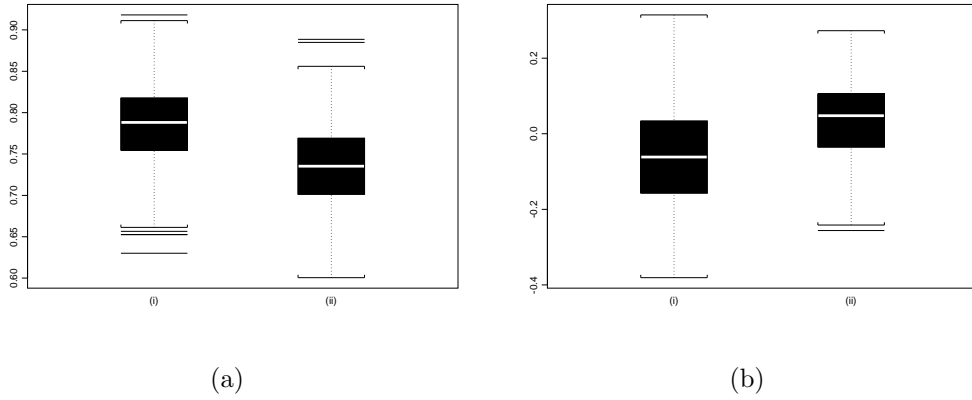
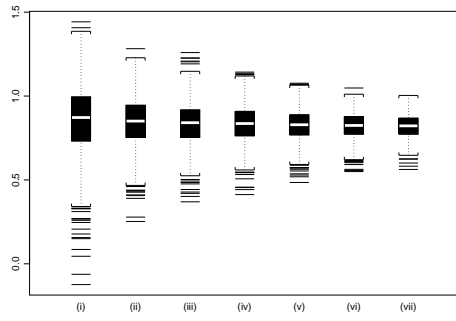


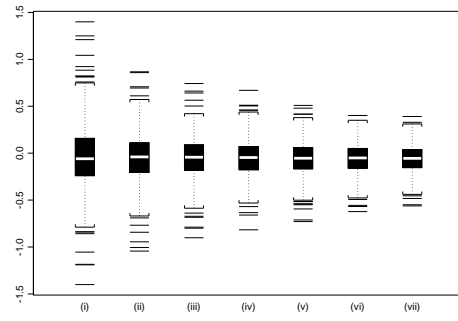
Figura 6.29: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

Tabela 6.35: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

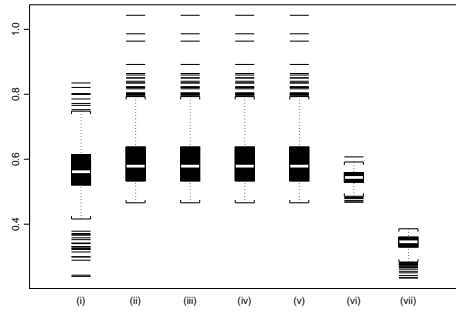
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8595	0,0595	0,0477	-0,0441	0,1559	0,1250
0,60	0,8439	0,0439	0,0241	-0,0504	0,1496	0,0798
0,65	0,8368	0,0368	0,0173	-0,0505	0,1495	0,0652
0,70	0,8323	0,0323	0,0126	-0,0549	0,1451	0,0563
0,75	0,8268	0,0268	0,0092	-0,0580	0,1420	0,0484
0,80	0,8227	0,0227	0,0066	-0,0594	0,1406	0,0435
0,85	0,8187	0,0187	0,0050	-0,0606	0,1394	0,0401
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,5675	-0,2325	0,0596	0,1792	0,3792	0,1672
0,60	0,5925	-0,2075	0,0490	0,2424	0,4424	0,2493
0,65	0,5925	-0,2075	0,0490	0,2601	0,4601	0,2735
0,70	0,5925	-0,2075	0,0490	0,2452	0,4452	0,2517
0,75	0,5925	-0,2075	0,0490	0,1971	0,3971	0,1878
0,80	0,5427	-0,2573	0,0666	0,1702	0,3702	0,1448
0,85	0,3421	-0,4579	0,2102	0,1599	0,3599	0,1319
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,8370	0,0370	0,0401	0,0203	0,2203	0,1520
0,60	0,8335	0,0335	0,0199	0,0094	0,2094	0,1001
0,65	0,8316	0,0316	0,0142	0,0122	0,2122	0,0857
0,70	0,8319	0,0319	0,0108	-0,0046	0,1954	0,0710
0,75	0,8318	0,0318	0,0085	-0,0182	0,1818	0,0572
0,80	0,8321	0,0321	0,0070	-0,0265	0,1735	0,0499
0,85	0,8310	0,0310	0,0058	-0,0309	0,1691	0,0455



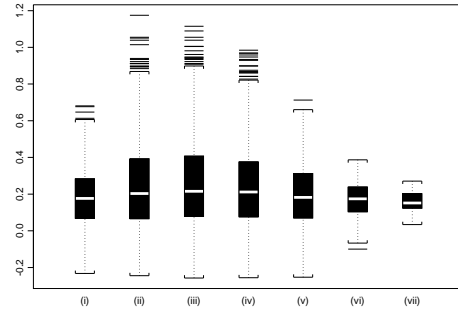
(a)



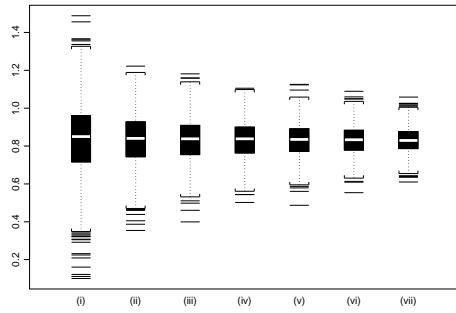
(b)



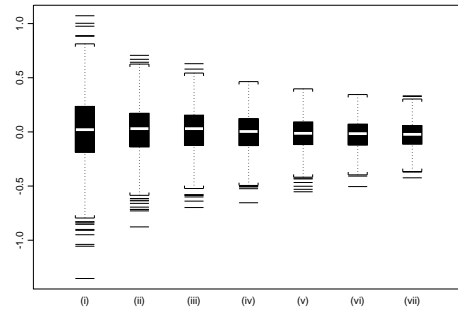
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.30: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 125$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,8049$, com $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0049. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,1990$, com $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0010. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0078. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com 0,0093.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7837$. O vício encontrado foi de $-0,0163$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{MV} = -0,1899$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0101. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0031. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com 0,0066.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 375$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7854$. O vício encontrado foi de $-0,0146$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,0606$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,1394. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0024. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com 0,0360.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.30-6.35, veja as Figuras 6.25-6.30, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela 6.36 exibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 1000$ e $k \in \{250, 500, 750\}$.

Tabela 6.36: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$ e $n = 1000$.

k	média	vício	eqm
250	283,082	33,082	21666,388
500	499,842	-0,158	13640,504
750	691,066	-58,934	34933,504

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.36, são bons quando $k = 500$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Perceba que este comportamento também ocorreu quando $k = \frac{n}{2}$, onde $n = 300$ e $n = 500$, conforme apresentamos nas Tabelas 6.22 e 6.29, respectivamente. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 250$ ou $k = 750$, o comportamento do estimador não repetiu o desempenho do caso $k = 500$. Quando $k = 250$, \hat{k} foi superestimado em

relação a seu valor nominal. Quando $k = 750$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.37-6.42, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 1000$ e $k = 250$

Tabela 6.37: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7976	-0,0024	0,0037
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,2043	-0,0043	0,0046
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7237	-0,0763	0,0088
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1098	0,0902	0,0111

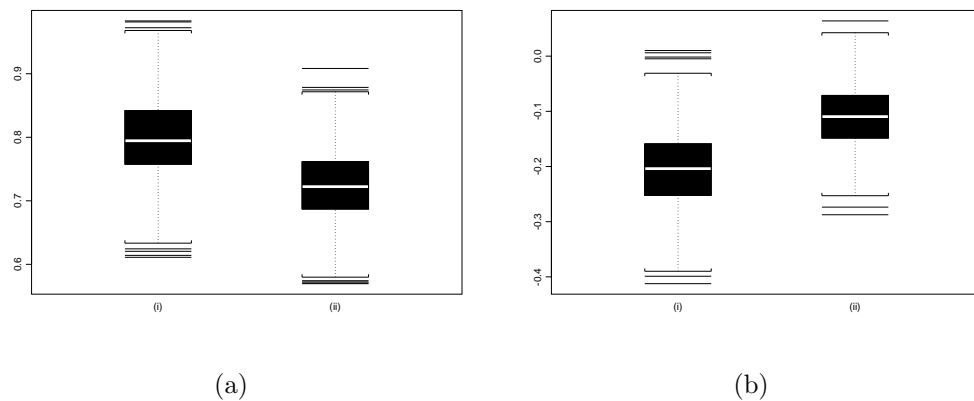
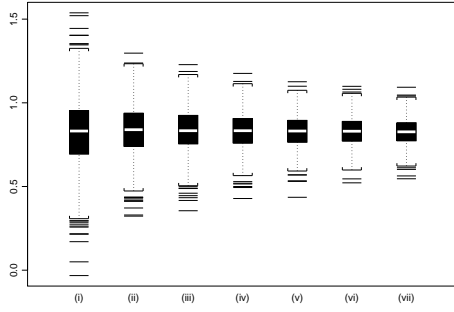


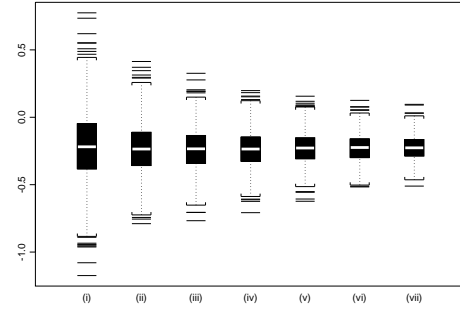
Figura 6.31: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Tabela 6.38: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

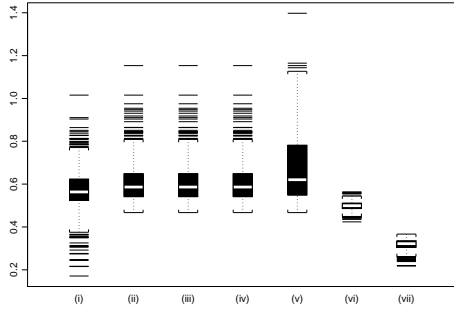
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8204	0,0204	0,0435	-0,2157	-0,0157	0,0695
0,60	0,8340	0,0340	0,0234	-0,2337	-0,0337	0,0339
0,65	0,8364	0,0364	0,0175	-0,2360	-0,0360	0,0249
0,70	0,8321	0,0321	0,0131	-0,2331	-0,0331	0,0185
0,75	0,8301	0,0301	0,0099	-0,2307	-0,0307	0,0140
0,80	0,8295	0,0295	0,0083	-0,2291	-0,0291	0,0114
0,85	0,8275	0,0275	0,0066	-0,2270	-0,0270	0,0087
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5732	-0,2268	0,0596	0,0093	0,2093	0,0486
0,60	0,6054	-0,1946	0,0454	-0,0073	0,1927	0,0440
0,65	0,6054	-0,1946	0,0454	-0,0053	0,1947	0,0461
0,70	0,6054	-0,1946	0,0454	-0,0032	0,1968	0,0477
0,75	0,6672	-0,1328	0,0383	-0,0566	0,1434	0,0388
0,80	0,4981	-0,3019	0,0915	0,1092	0,3092	0,0974
0,85	0,3182	-0,4818	0,2326	0,2237	0,4237	0,1805
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8576	0,0576	0,0441	-0,2388	-0,0388	0,0616
0,60	0,8409	0,0409	0,0236	-0,2339	-0,0339	0,0324
0,65	0,8362	0,0362	0,0172	-0,2320	-0,0320	0,0230
0,70	0,8286	0,0286	0,0127	-0,2253	-0,0253	0,0174
0,75	0,8251	0,0251	0,0095	-0,2217	-0,0217	0,0131
0,80	0,8240	0,0240	0,0077	-0,2198	-0,0198	0,0099
0,85	0,8192	0,0192	0,0061	-0,2151	-0,0151	0,0076



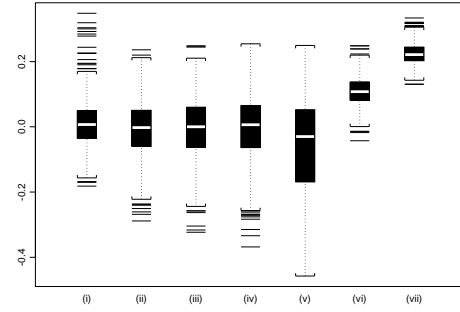
(a)



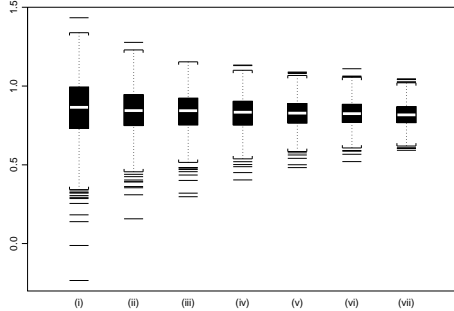
(b)



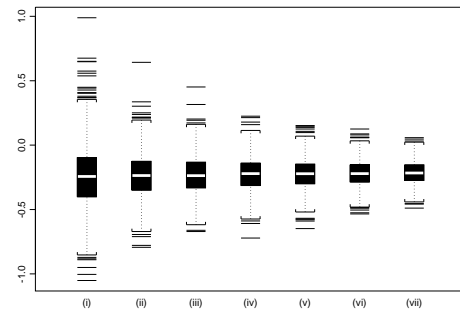
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.32: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Caso $n = 1000$ e $k = 500$

Tabela 6.39: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7902	-0,0098	0,0015
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1883	0,0117	0,0030
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7366	-0,0634	0,0057
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1303	0,0697	0,0074

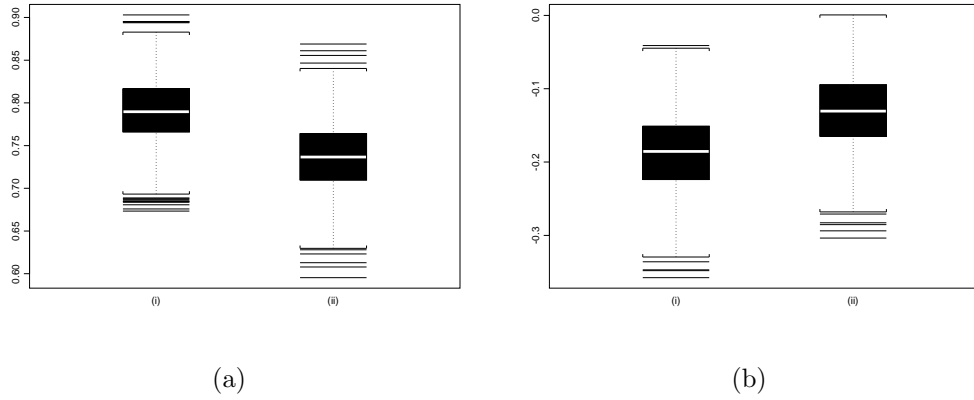
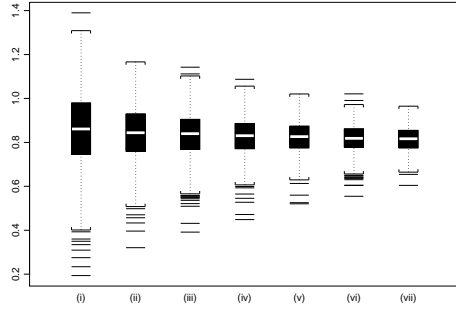


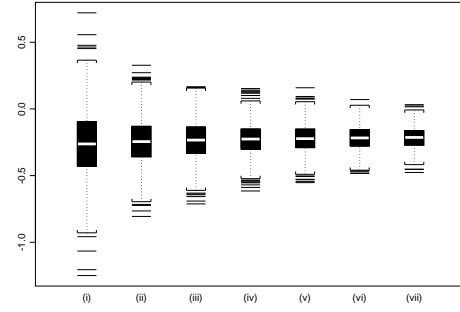
Figura 6.33: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Tabela 6.40: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

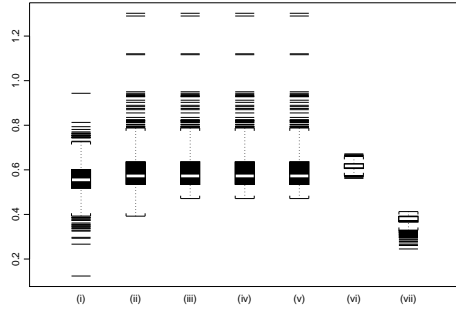
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8567	0,0567	0,0349	-0,2609	-0,0609	0,0659
0,60	0,8408	0,0408	0,0170	-0,2424	-0,0424	0,0317
0,65	0,8337	0,0337	0,0118	-0,2337	-0,0337	0,0216
0,70	0,8278	0,0278	0,0085	-0,2281	-0,0281	0,0151
0,75	0,8235	0,0235	0,0060	-0,2223	-0,0223	0,0111
0,80	0,8180	0,0180	0,0045	-0,2178	-0,0178	0,0083
0,85	0,8154	0,0154	0,0034	-0,2168	-0,0168	0,0064
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5598	-0,2402	0,0634	-0,0064	0,1936	0,0423
0,60	0,5959	-0,2041	0,0504	-0,0341	0,1659	0,0348
0,65	0,5960	-0,2040	0,0503	-0,0384	0,1616	0,0347
0,70	0,5960	-0,2040	0,0503	-0,0402	0,1598	0,0349
0,75	0,5960	-0,2040	0,0503	-0,0335	0,1665	0,0367
0,80	0,6167	-0,1833	0,0339	-0,0345	0,1655	0,0289
0,85	0,3758	-0,4242	0,1805	0,1542	0,3542	0,1263
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8360	0,0360	0,0289	-0,2587	-0,0587	0,0618
0,60	0,8355	0,0355	0,0165	-0,2694	-0,0694	0,0384
0,65	0,8344	0,0344	0,0118	-0,2747	-0,0747	0,0304
0,70	0,8333	0,0333	0,0093	-0,2828	-0,0828	0,0272
0,75	0,8316	0,0316	0,0069	-0,2883	-0,0883	0,0251
0,80	0,8286	0,0286	0,0053	-0,2848	-0,0848	0,0220
0,85	0,8279	0,0279	0,0043	-0,2663	-0,0663	0,0146



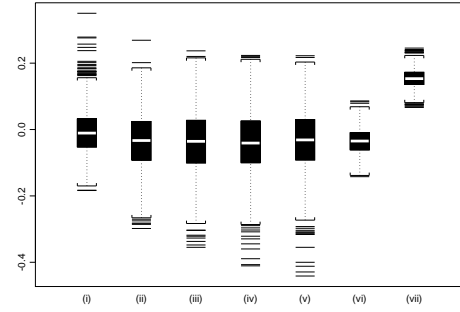
(a)



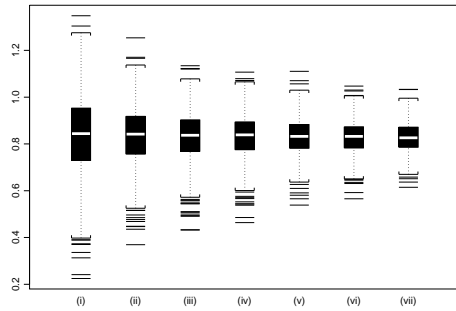
(b)



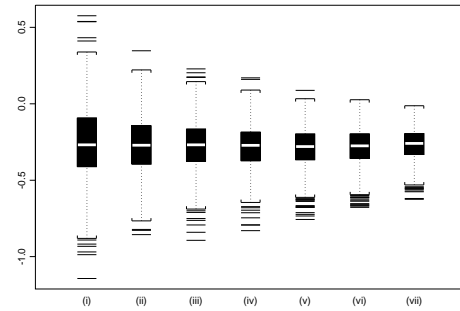
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.34: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Caso $n = 1000$ e $k = 750$

Tabela 6.41: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7930	-0,0070	0,0010
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,0835	0,1165	0,0254
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7369	-0,0631	0,0052
$\hat{\delta}_{LW}$	0,0127	0,2127	0,0529

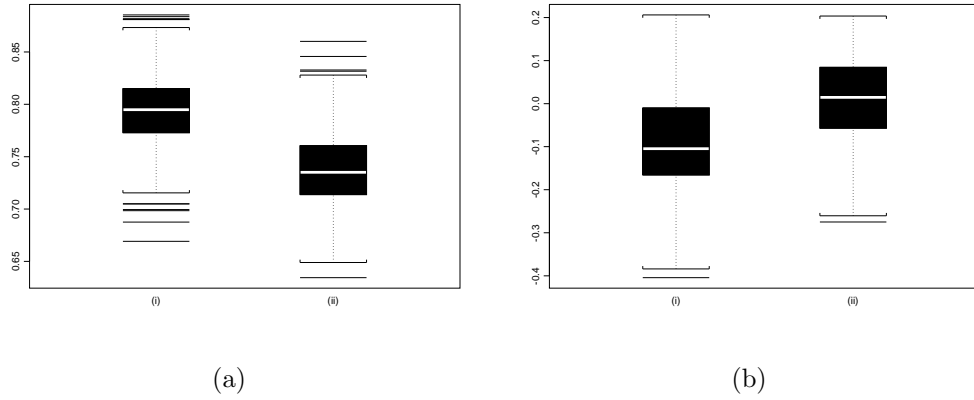
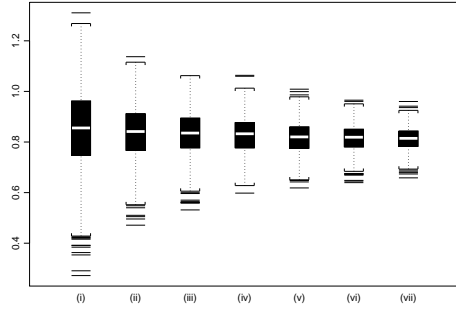


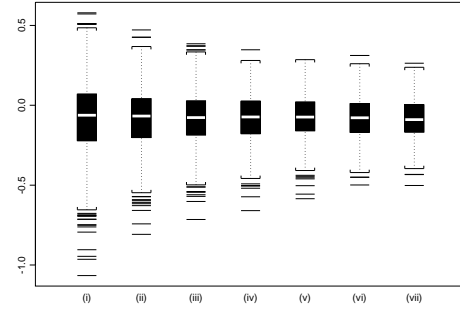
Figura 6.35: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Tabela 6.42: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

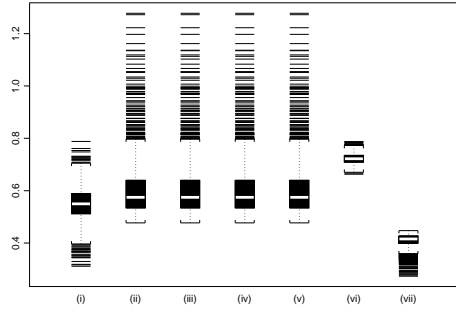
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8522	0,0522	0,0278	-0,0960	0,1040	0,0748
0,60	0,8352	0,0352	0,0123	-0,0807	0,1193	0,0519
0,65	0,8262	0,0262	0,0083	-0,0745	0,1255	0,0457
0,70	0,8220	0,0220	0,0060	-0,0769	0,1231	0,0413
0,75	0,8178	0,0178	0,0043	-0,0783	0,1217	0,0359
0,80	0,8148	0,0148	0,0031	-0,0801	0,1199	0,0326
0,85	0,8109	0,0109	0,0022	-0,0817	0,1183	0,0299
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,5520	-0,2480	0,0657	0,1406	0,3406	0,1307
0,60	0,6099	-0,1901	0,0509	0,1816	0,3816	0,1909
0,65	0,6099	-0,1901	0,0509	0,2158	0,4158	0,2375
0,70	0,6099	-0,1901	0,0509	0,2260	0,4260	0,2536
0,75	0,6099	-0,1901	0,0509	0,1951	0,3951	0,2095
0,80	0,7214	-0,0786	0,0065	0,0264	0,2264	0,0598
0,85	0,4075	-0,3925	0,1549	0,1732	0,3732	0,1412
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,8364	0,0364	0,0248	-0,0128	0,1872	0,1164
0,60	0,8367	0,0367	0,0124	-0,0503	0,1497	0,0601
0,65	0,8337	0,0337	0,0090	-0,0373	0,1627	0,0588
0,70	0,8321	0,0321	0,0067	-0,0497	0,1503	0,0465
0,75	0,8283	0,0283	0,0052	-0,0487	0,1513	0,0431
0,80	0,8275	0,0275	0,0041	-0,0554	0,1446	0,0377
0,85	0,8239	0,0239	0,0033	-0,0589	0,1411	0,0334



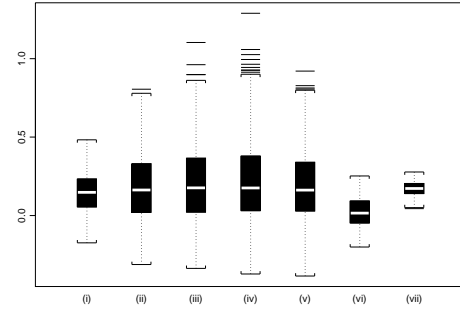
(a)



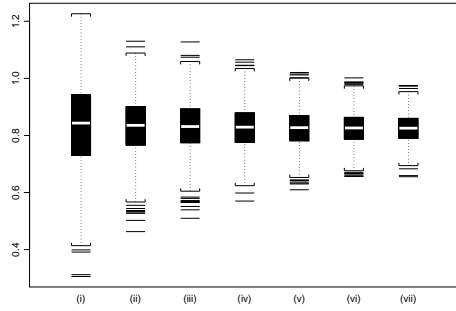
(b)



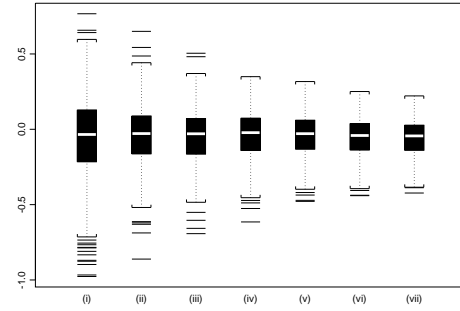
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.36: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7976$. O vício encontrado foi de $-0,0024$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{MV} = -0,2043$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0043$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0037$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com $0,0046$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 500$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7902$. O vício encontrado foi de $-0,0098$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{MV} = -0,1883$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0117$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0037$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com $0,0046$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 750$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7930$. O vício encontrado foi de $-0,0070$. Na estimação de $\delta = -0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,0960$, com $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,1040$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0037$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com $0,0046$.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.37-6.42, veja as Figuras 6.31-6.36, onde apresentamos os box-plots dos estimadores.

6.3 Caso Misto

Nesta seção exibimos os resultados das simulações realizadas quando o valor do parâmetro de longa dependência $d^{(2)}$ do modelo (5.49) está na região de não-estacionariedade e o valor do parâmetro de longa dependência $d^{(1)}$ está na região de estacionariedade. Neste exemplo em particular, $d^{(1)} = 0,8$ e $d^{(2)} = 0,3$, ou seja, $\delta = -0,5$. Os resultados para $d^{(1)} = 0,3$ e $d^{(2)} = 0,8$ podem ser encontrados no Apêndice A.

Conforme descrito no início deste capítulo, em primeiro lugar geramos as amostras que serão analisadas para cada caso considerado. Como são três tamanhos amostrais, cada um com três pontos de mudança de regime, temos no total 9 conjuntos de dados diferentes, cada um com 1000 séries temporais simuladas.

A Tabela 6.43 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 300$ e $k \in \{75, 150, 225\}$.

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.43, são bons quando $k = 150$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Quando simulamos a mudança de regime em

Tabela 6.43: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$ e $n = 300$.

k	média	vício	eqm
75	76,373	1,373	359,401
150	149,248	-0,752	185,524
225	220,679	-4,321	457,503

$k = 75$ ou $k = 225$, o comportamento do estimador não repete o desempenho do caso $k = 150$. Quando $k = 75$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 225$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.46-6.49, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 300$ e $k = 75$

Tabela 6.44: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 75$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7495	-0,0505	0,0184
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,4269	0,0731	0,0139
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7165	-0,0835	0,0174
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,3659	0,1341	0,0285

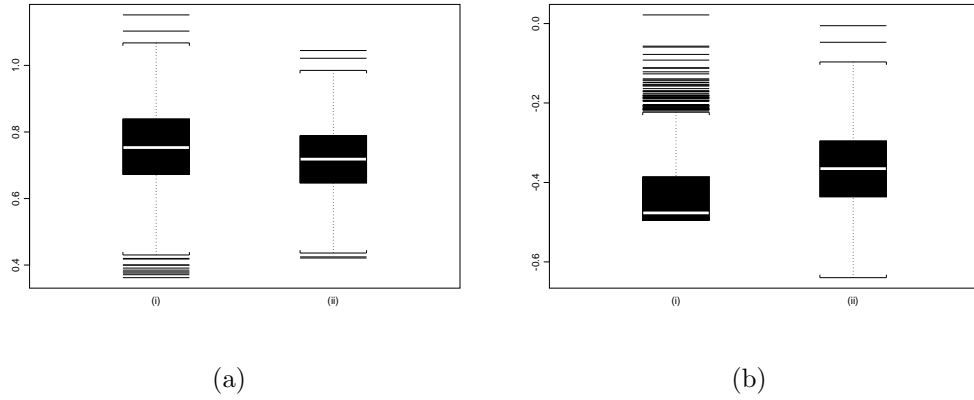
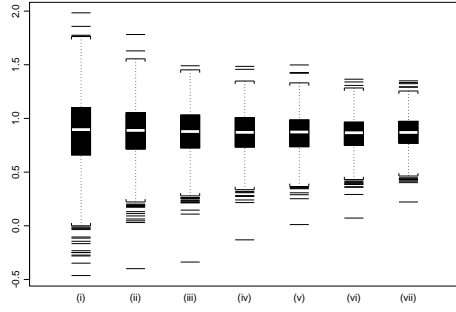


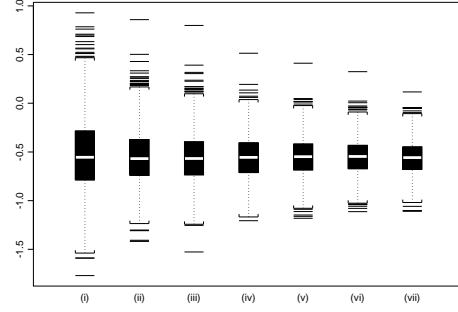
Figura 6.37: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 75$.

Tabela 6.45: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 75$.

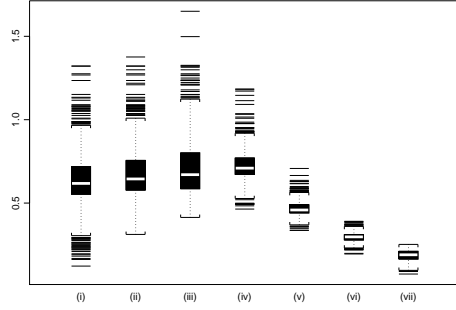
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8672	0,0672	0,1319	-0,5262	-0,0262	0,1567
0,60	0,8730	0,0730	0,0735	-0,5511	-0,0511	0,0892
0,65	0,8702	0,0702	0,0572	-0,5554	-0,0554	0,0719
0,70	0,8643	0,0643	0,0454	-0,5527	-0,0527	0,0553
0,75	0,8608	0,0608	0,0372	-0,5497	-0,0497	0,0442
0,80	0,8577	0,0577	0,0306	-0,5510	-0,0510	0,0360
0,85	0,8688	0,0688	0,0284	-0,5608	-0,0608	0,0317
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6352	-0,1648	0,0528	-0,1496	0,3504	0,1270
0,60	0,6838	-0,1162	0,0343	-0,2335	0,2665	0,0749
0,65	0,7135	-0,0865	0,0356	-0,2688	0,2312	0,0585
0,70	0,7271	-0,0729	0,0127	-0,3021	0,1979	0,0417
0,75	0,4671	-0,3329	0,1124	-0,1452	0,3548	0,1291
0,80	0,2960	-0,5040	0,2547	0,0000	0,5000	0,2528
0,85	0,1850	-0,6150	0,3793	0,0568	0,5568	0,3112
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8309	0,0309	0,1142	-0,4356	0,0644	0,1275
0,60	0,8419	0,0419	0,0555	-0,4886	0,0114	0,0656
0,65	0,8398	0,0398	0,0427	-0,4998	0,0002	0,0520
0,70	0,8348	0,0348	0,0373	-0,5019	-0,0019	0,0427
0,75	0,8328	0,0328	0,0302	-0,5044	-0,0044	0,0339
0,80	0,8311	0,0311	0,0247	-0,5113	-0,0113	0,0276
0,85	0,8313	0,0313	0,0216	-0,5130	-0,0130	0,0236



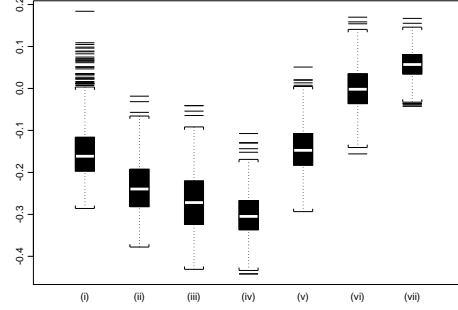
(a)



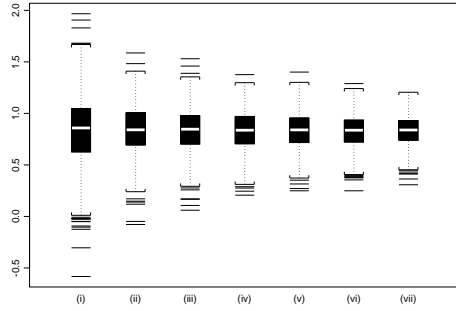
(b)



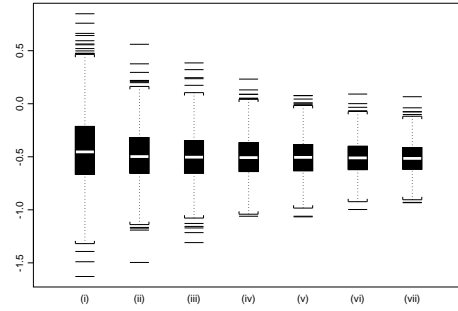
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.38: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 75$.

Caso $n = 300$ e $k = 150$

Tabela 6.46: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 150$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7659	-0,0341	0,0115
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,1892	0,0108	0,0145
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7031	-0,0969	0,0174
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,0904	0,1096	0,0212

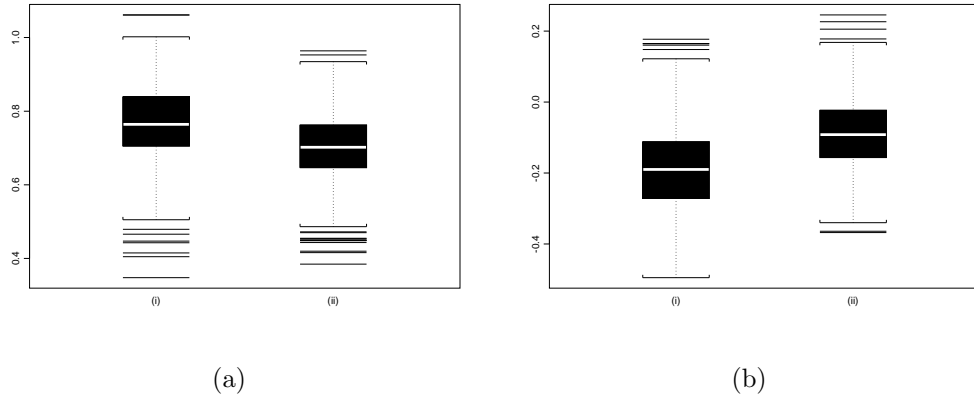
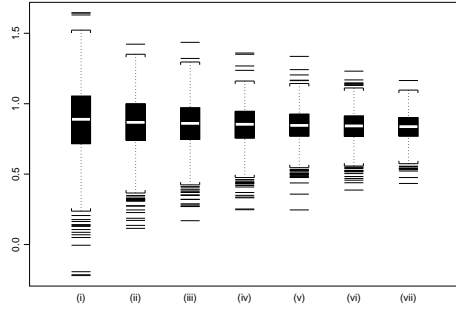


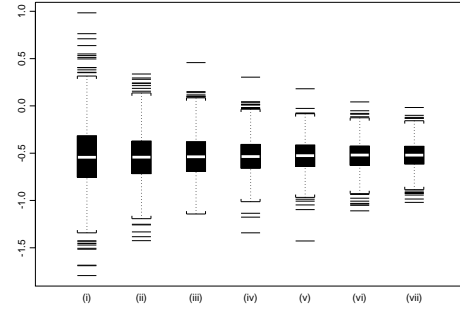
Figura 6.39: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 150$.

Tabela 6.47: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 150$.

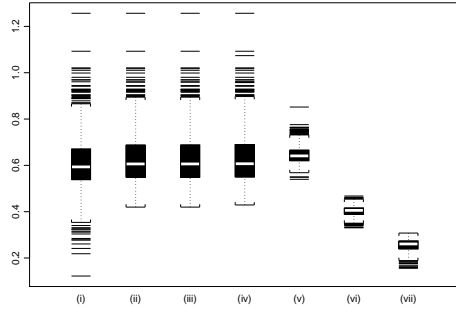
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8396	0,0396	0,0971	-0,2238	-0,0238	0,1467
0,60	0,8426	0,0426	0,0527	-0,2309	-0,0309	0,0779
0,65	0,8440	0,0440	0,0417	-0,2324	-0,0324	0,0606
0,70	0,8433	0,0433	0,0330	-0,2328	-0,0328	0,0485
0,75	0,8383	0,0383	0,0262	-0,2323	-0,0323	0,0379
0,80	0,8305	0,0305	0,0205	-0,2261	-0,0261	0,0296
0,85	0,8302	0,0302	0,0171	-0,2270	-0,0270	0,0241
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6034	-0,1966	0,0634	-0,0038	0,1962	0,0541
0,60	0,6472	-0,1528	0,0404	-0,0362	0,1638	0,0414
0,65	0,6529	-0,1471	0,0400	-0,0398	0,1602	0,0419
0,70	0,8115	0,0115	0,0110	-0,1719	0,0281	0,0076
0,75	0,5182	-0,2818	0,0808	0,0775	0,2775	0,0825
0,80	0,3322	-0,4678	0,2196	0,2190	0,4190	0,1794
0,85	0,2088	-0,5912	0,3505	0,1643	0,3643	0,1336
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8549	0,0549	0,1013	-0,2278	-0,0278	0,1483
0,60	0,8325	0,0325	0,0530	-0,2123	-0,0123	0,0729
0,65	0,8300	0,0300	0,0392	-0,2116	-0,0116	0,0554
0,70	0,8253	0,0253	0,0303	-0,2085	-0,0085	0,0434
0,75	0,8212	0,0212	0,0241	-0,2085	-0,0085	0,0345
0,80	0,8129	0,0129	0,0189	-0,2030	-0,0030	0,0268
0,85	0,8117	0,0117	0,0152	-0,2021	-0,0021	0,0214



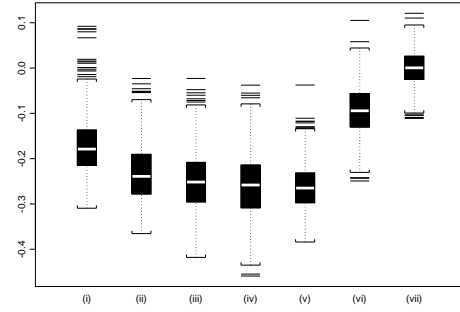
(a)



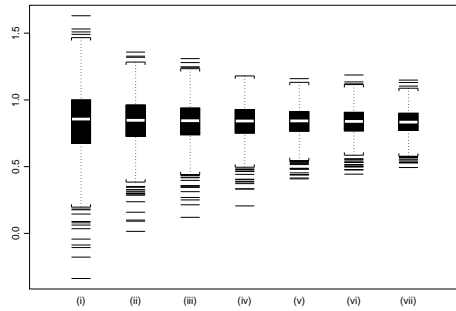
(b)



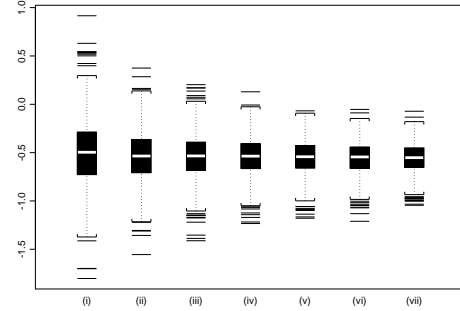
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.40: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 150$.

Caso $n = 300$ e $k = 225$

Tabela 6.48: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 225$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7742	-0,0258	0,0043
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,3089	0,1911	0,0587
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7300	-0,0700	0,0086
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1529	0,3471	0,1493

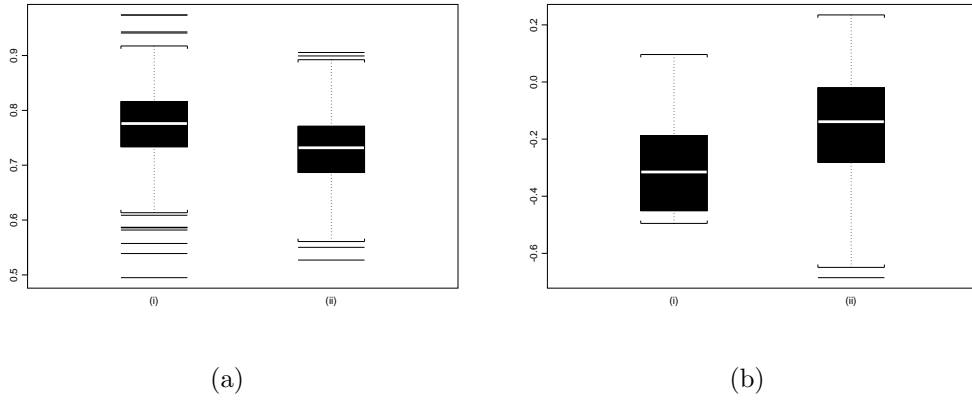
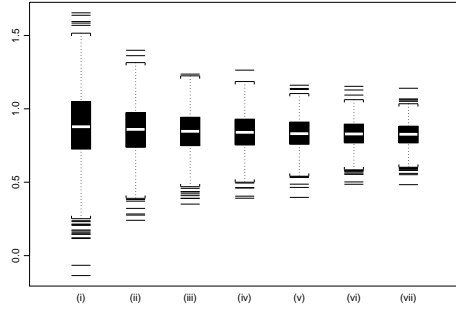


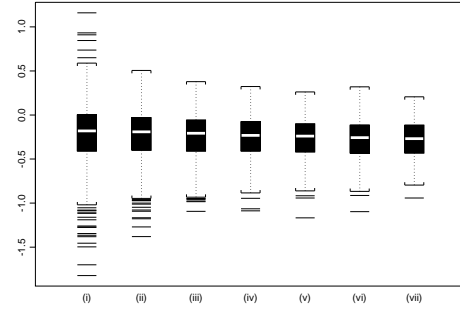
Figura 6.41: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 225$.

Tabela 6.49: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 225$.

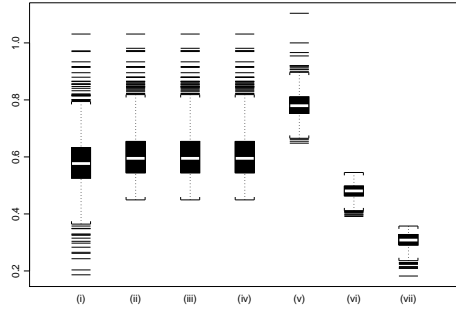
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8779	0,0779	0,0689	-0,2176	0,2824	0,1944
0,60	0,8569	0,0569	0,0337	-0,2326	0,2674	0,1470
0,65	0,8461	0,0461	0,0235	-0,2421	0,2579	0,1304
0,70	0,8392	0,0392	0,0171	-0,2513	0,2487	0,1156
0,75	0,8330	0,0330	0,0129	-0,2611	0,2389	0,1050
0,80	0,8283	0,0283	0,0100	-0,2743	0,2257	0,0958
0,85	0,8233	0,0233	0,0079	-0,2742	0,2258	0,0928
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5826	-0,2174	0,0566	-0,0910	0,4090	0,1736
0,60	0,6098	-0,1902	0,0440	-0,0250	0,4750	0,2532
0,65	0,6098	-0,1902	0,0440	-0,0045	0,4955	0,2818
0,70	0,6098	-0,1902	0,0440	-0,0216	0,4784	0,2569
0,75	0,7824	-0,0176	0,0024	-0,1214	0,3786	0,1561
0,80	0,4784	-0,3216	0,1040	0,0353	0,5353	0,2959
0,85	0,3053	-0,4947	0,2454	0,0650	0,5650	0,3218
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8414	0,0414	0,0546	-0,5953	-0,0953	0,1308
0,60	0,8383	0,0383	0,0277	-0,4132	0,0868	0,0724
0,65	0,8357	0,0357	0,0210	-0,2608	0,2392	0,1336
0,70	0,8334	0,0334	0,0159	-0,2474	0,2526	0,1280
0,75	0,8327	0,0327	0,0125	-0,2752	0,2248	0,0967
0,80	0,8307	0,0307	0,0100	-0,2494	0,2506	0,1105
0,85	0,8290	0,0290	0,0086	-0,2492	0,2508	0,1081



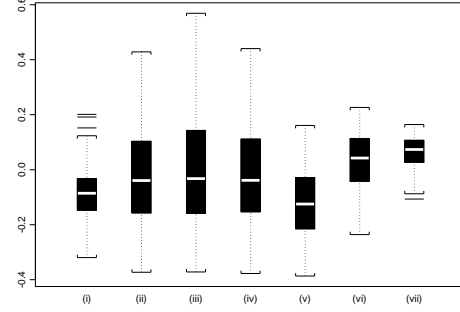
(a)



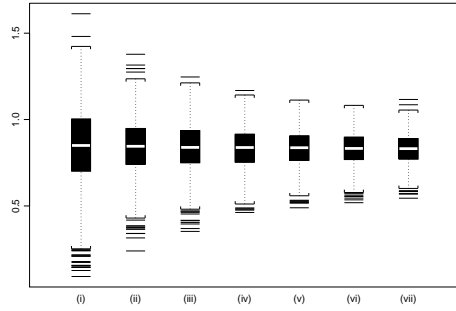
(b)



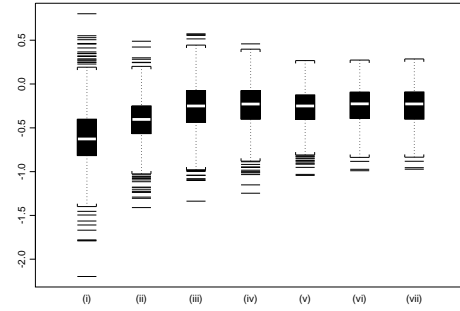
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.42: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 300$ e $k = 225$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 75$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,8311$, com $\alpha = 0,80$. O vício encontrado foi de 0,0311. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,4998$, com $\alpha = 0,65$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0002. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPB\alpha}^{(1)}$, com 0,0089, onde $\alpha = 0,70$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{KP}$, com 0,0236, onde $\alpha = 0,85$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 150$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,8340$, com $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0340. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,5037$, com $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0037$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{KP}^{(1)}$, com 0,0112. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPH}$, com 0,0200, onde $\alpha = 0,85$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 225$, foram $\hat{d}_{GPB\alpha}^{(1)} = 0,7824$, com $\alpha = 0,75$. O vício encontrado, para ambos os métodos, foi de $-0,0176$. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,4132$, com $\alpha = 0,60$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0868. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0043. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{KP}$, com 0,0724, onde $\alpha = 0,60$.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.46-6.49, veja as Figuras 6.37-6.42, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela 6.50 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 500$ e $k \in \{125, 250, 375\}$.

Tabela 6.50: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$ e $n = 500$.

k	média	vício	eqm
125	127,084	2,084	312,236
250	249,763	-0,237	115,121
375	374,344	-0,656	260,458

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.50, são bons quando $k = 250$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Isto também ocorreu quando $n = 300$ e $k = \frac{n}{2}$, conforme resultados exibidos na Tabela 6.43. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 125$ ou $k = 375$, o comportamento do estimador não repete o desempenho do caso $k = 250$. Quando $k = 125$, \hat{k} foi superestimado em

relação a seu valor nominal. Quando $k = 375$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.51-6.56, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 500$ e $k = 125$

Tabela 6.51: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 125$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7842	-0,0158	0,0088
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,4544	0,0456	0,0056
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7200	-0,0800	0,0121
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,3702	0,1298	0,0228

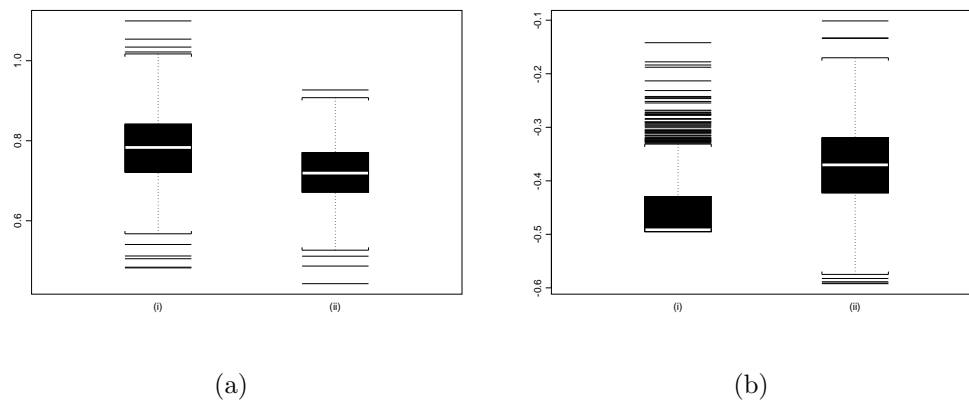
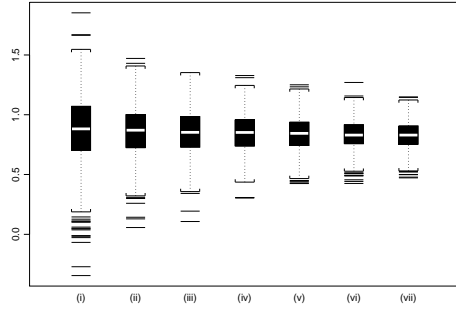


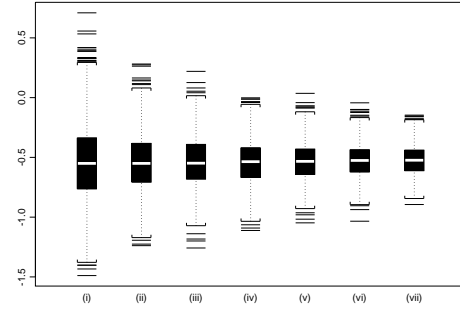
Figura 6.43: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 125$.

Tabela 6.52: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 125$.

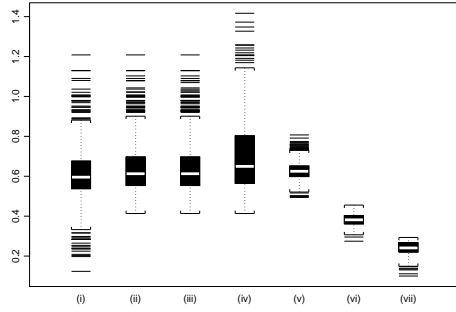
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8723	0,0723	0,0867	-0,5407	-0,0407	0,1097
0,60	0,8606	0,0606	0,0451	-0,5418	-0,0418	0,0597
0,65	0,8530	0,0530	0,0353	-0,5387	-0,0387	0,0452
0,70	0,8467	0,0467	0,0275	-0,5381	-0,0381	0,0342
0,75	0,8394	0,0394	0,0219	-0,5321	-0,0321	0,0269
0,80	0,8335	0,0335	0,0164	-0,5274	-0,0274	0,0196
0,85	0,8287	0,0287	0,0133	-0,5232	-0,0232	0,0159
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6126	-0,1874	0,0508	-0,1358	0,3642	0,1353
0,60	0,6417	-0,1583	0,0389	-0,2098	0,2902	0,0873
0,65	0,6424	-0,1576	0,039	-0,2400	0,2600	0,0714
0,70	0,6966	-0,1034	0,0388	-0,2844	0,2156	0,0526
0,75	0,6287	-0,1713	0,0313	-0,2661	0,2339	0,0562
0,80	0,3816	-0,4184	0,1759	-0,0712	0,4288	0,1857
0,85	0,2394	-0,5606	0,3152	0,0379	0,5379	0,2905
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8329	0,0329	0,0730	-0,4573	0,0427	0,0845
0,60	0,8277	0,0277	0,0379	-0,4846	0,0154	0,0501
0,65	0,8259	0,0259	0,0288	-0,4945	0,0055	0,0380
0,70	0,8261	0,0261	0,0227	-0,5013	-0,0013	0,0287
0,75	0,8239	0,0239	0,0185	-0,5045	-0,0045	0,0229
0,80	0,8253	0,0253	0,0144	-0,5090	-0,0090	0,0171
0,85	0,8239	0,0239	0,0119	-0,5103	-0,0103	0,0141



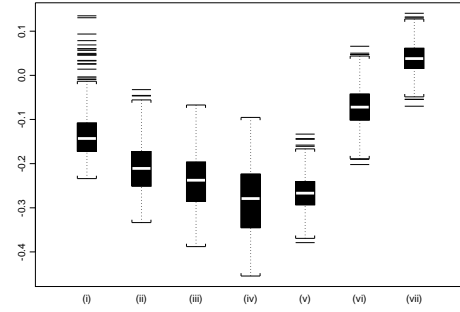
(a)



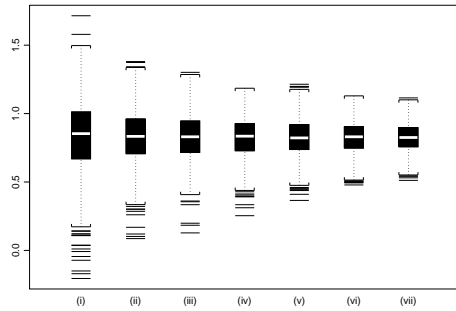
(b)



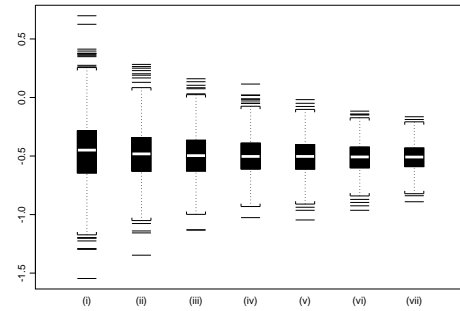
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.44: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 125$.

Caso $n = 500$ e $k = 250$

Tabela 6.53: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7794	-0,0206	0,0034
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,4501	0,0499	0,0057
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7311	-0,0689	0,0075
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,4074	0,0926	0,0148

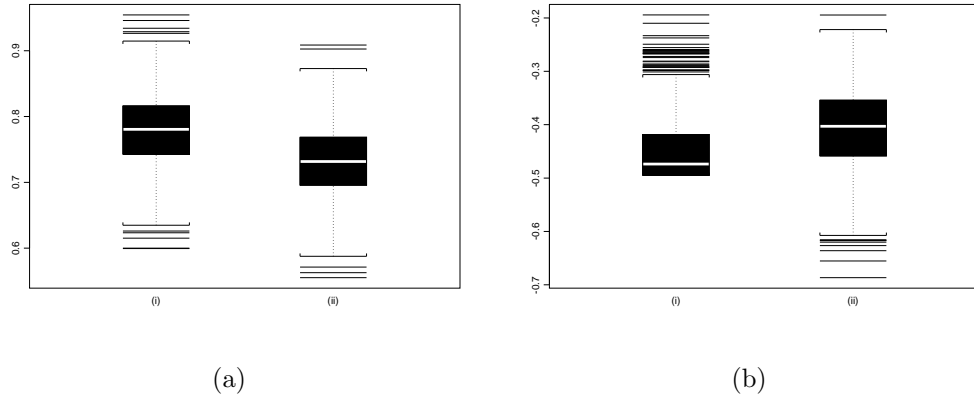
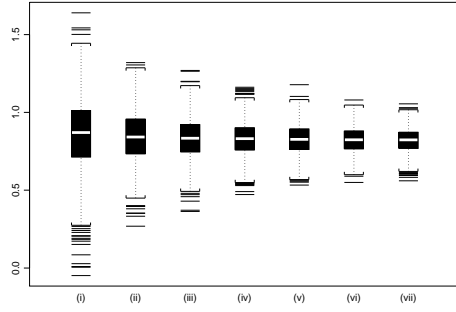


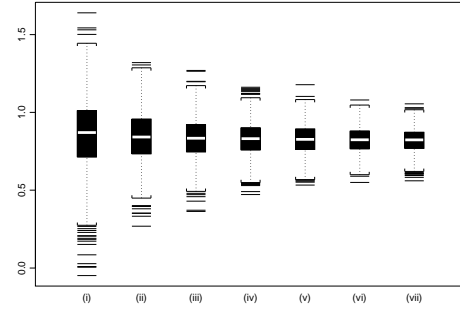
Figura 6.45: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 250$.

Tabela 6.54: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 250$.

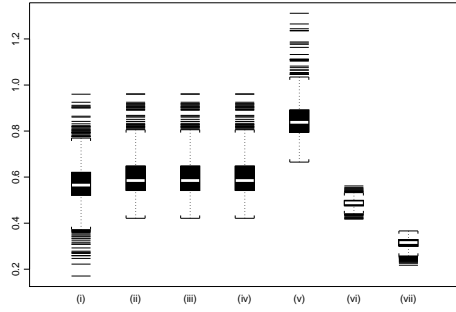
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8548	0,0548	0,0570	-0,5368	-0,0368	0,1018
0,60	0,8415	0,0415	0,0282	-0,5270	-0,0270	0,0481
0,65	0,8338	0,0338	0,0188	-0,5225	-0,0225	0,0332
0,70	0,8298	0,0298	0,0137	-0,5221	-0,0221	0,0246
0,75	0,8257	0,0257	0,0102	-0,5187	-0,0187	0,0187
0,80	0,8207	0,0207	0,0073	-0,5158	-0,0158	0,0137
0,85	0,8198	0,0198	0,0061	-0,5183	-0,0183	0,0110
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5735	-0,2265	0,0603	-0,1410	0,3590	0,1317
0,60	0,6037	-0,1963	0,0462	-0,2151	0,2849	0,0841
0,65	0,6037	-0,1963	0,0462	-0,2406	0,2594	0,0705
0,70	0,6037	-0,1963	0,0462	-0,2555	0,2445	0,0633
0,75	0,8515	0,0515	0,0089	-0,3722	0,1278	0,0178
0,80	0,4871	-0,3129	0,0983	-0,1642	0,3358	0,1149
0,85	0,3121	-0,4879	0,2386	-0,0265	0,4735	0,2256
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8293	0,0293	0,0508	-0,4909	0,0091	0,0845
0,60	0,8271	0,0271	0,0244	-0,5090	-0,0090	0,0433
0,65	0,8274	0,0274	0,0178	-0,5221	-0,0221	0,0341
0,70	0,8277	0,0277	0,0135	-0,5301	-0,0301	0,0267
0,75	0,8254	0,0254	0,0099	-0,5325	-0,0325	0,0209
0,80	0,8256	0,0256	0,0077	-0,5382	-0,0382	0,0176
0,85	0,8252	0,0252	0,0066	-0,5434	-0,0434	0,0154



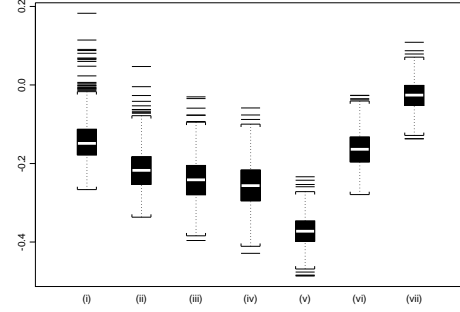
(a)



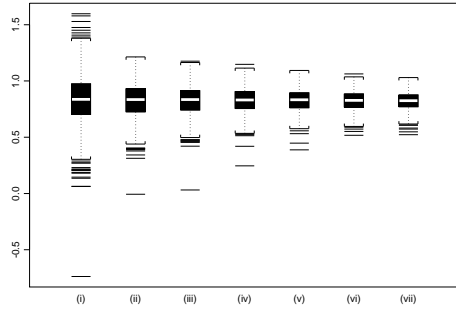
(b)



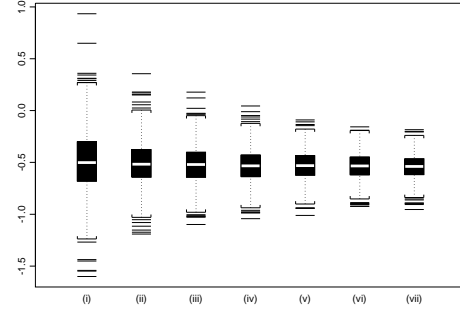
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.46: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 250$.

Caso $n = 500$ e $k = 375$

Tabela 6.55: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 375$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7874	-0,0126	0,0019
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,4290	0,0710	0,0119
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7338	-0,0662	0,0063
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,4299	0,0701	0,0162

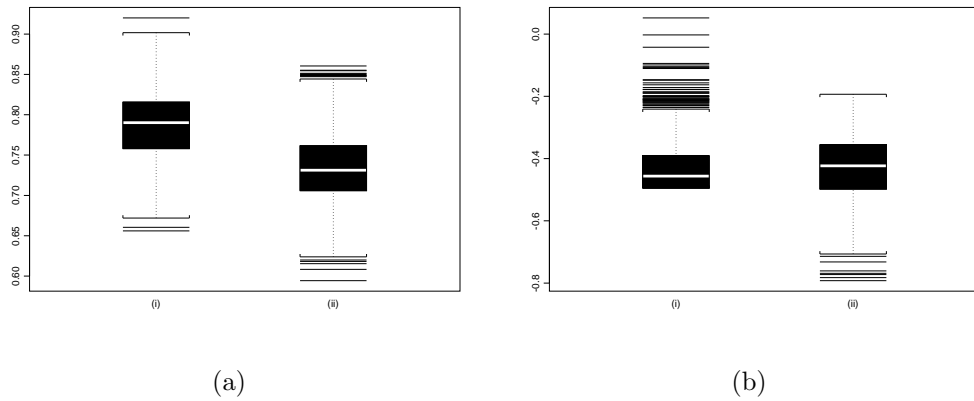
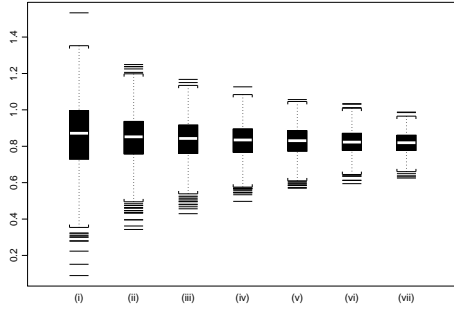


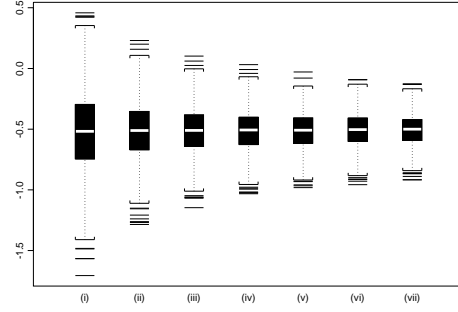
Figura 6.47: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 375$.

Tabela 6.56: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 375$.

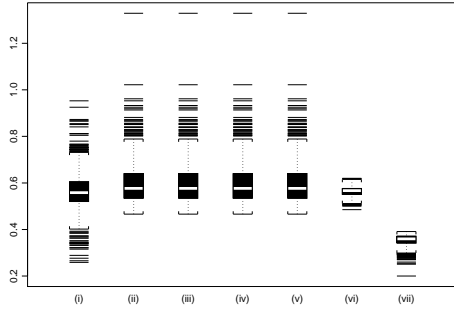
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8602	0,0602	0,0439	-0,5263	-0,0263	0,1111
0,60	0,8430	0,0430	0,0220	-0,5145	-0,0145	0,0560
0,65	0,8356	0,0356	0,0148	-0,5159	-0,0159	0,0391
0,70	0,8285	0,0285	0,0106	-0,5132	-0,0132	0,0295
0,75	0,8262	0,0262	0,0074	-0,5133	-0,0133	0,0240
0,80	0,8221	0,0221	0,0054	-0,5080	-0,0080	0,0198
0,85	0,8180	0,0180	0,0040	-0,5062	-0,0062	0,0156
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5661	-0,2339	0,0613	-0,1734	0,3266	0,1102
0,60	0,5977	-0,2023	0,0485	-0,2324	0,2676	0,0753
0,65	0,5977	-0,2023	0,0485	-0,2472	0,2528	0,0680
0,70	0,5977	-0,2023	0,0485	-0,2511	0,2489	0,0663
0,75	0,5977	-0,2023	0,0485	-0,2374	0,2626	0,0732
0,80	0,5634	-0,2366	0,0564	-0,1822	0,3178	0,1039
0,85	0,3533	-0,4467	0,2001	-0,0457	0,4543	0,2079
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8397	0,0397	0,0352	-0,5249	-0,0249	0,1052
0,60	0,8360	0,0360	0,0188	-0,5483	-0,0483	0,0582
0,65	0,8357	0,0357	0,0140	-0,5544	-0,0544	0,0461
0,70	0,8333	0,0333	0,0104	-0,5595	-0,0595	0,0391
0,75	0,8334	0,0334	0,0082	-0,5701	-0,0701	0,0344
0,80	0,8298	0,0298	0,0062	-0,5723	-0,0723	0,0309
0,85	0,8292	0,0292	0,0052	-0,5765	-0,0765	0,0295



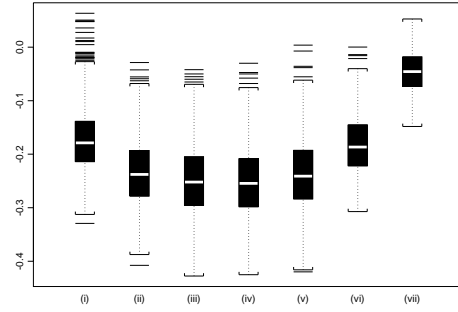
(a)



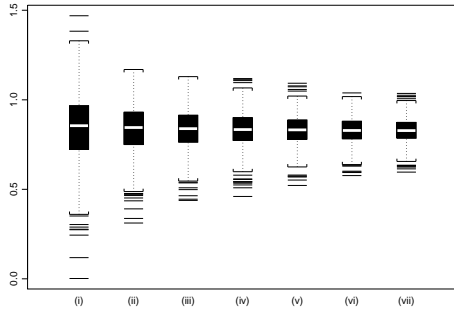
(b)



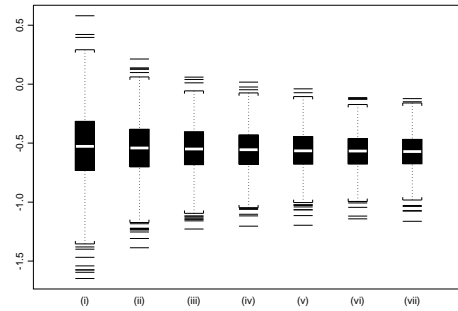
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.48: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 500$ e $k = 375$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 125$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,8239$, com $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0239. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,5013$, com $\alpha = 0,70$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0013$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{KP}^{(1)}$, com 0,0119, onde $\alpha = 0,85$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com 0,0141, onde $\alpha = 0,82$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,8198$, com $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0198. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,5090$, com $\alpha = 0,60$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0090. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0034. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com 0,0057, onde $\alpha = 0,75$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 375$, foram $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,8180$, com $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de $-0,0180$. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,5062$, com $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0062$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0019. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.51-6.56, veja as Figuras 6.43-6.48, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela 6.57 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 1000$ e $k \in \{250, 500, 750\}$.

Tabela 6.57: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$ e $n = 1000$.

k	média	vício	eqm
250	250,314	0,314	169,042
500	499,920	$-0,080$	81,206
750	749,650	$-0,350$	171,302

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela 6.57, são bons quando $k = 500$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Perceba que este comportamento também ocorreu quando $k = \frac{n}{2}$, onde $n = 300$ e $n = 500$, conforme apresentamos nas Tabelas 6.43 e 6.50, respectivamente. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 250$ ou $k = 750$, o comportamento do estimador não repetiu o desempenho do caso $k = 500$. Quando $k = 250$, \hat{k} foi superestimado em

relação a seu valor nominal. Quando $k = 750$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas 6.58-6.63, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 1000$ e $k = 250$

Tabela 6.58: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7833	-0,0167	0,0033
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,4623	0,0377	0,0055
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7348	-0,0652	0,0073
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,3829	0,1171	0,0327

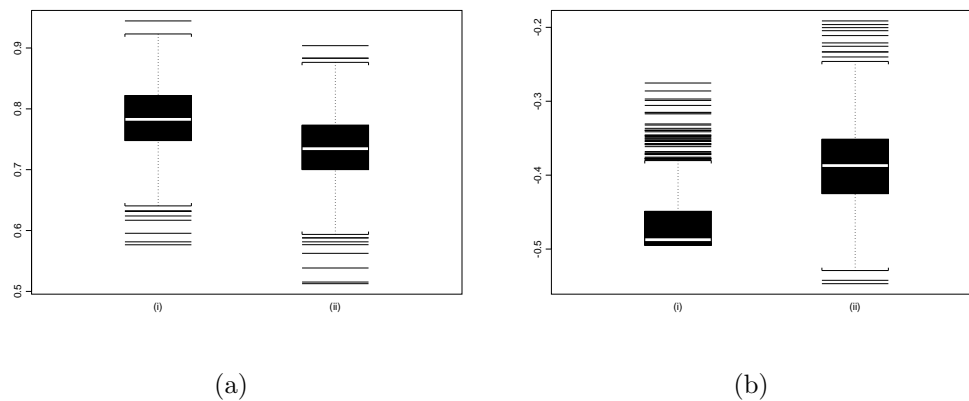
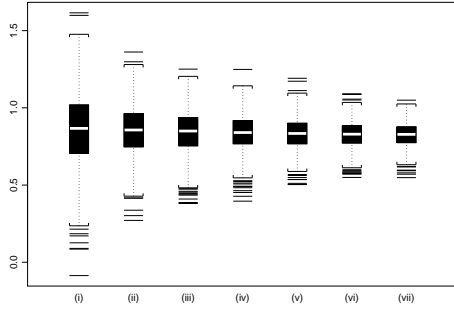


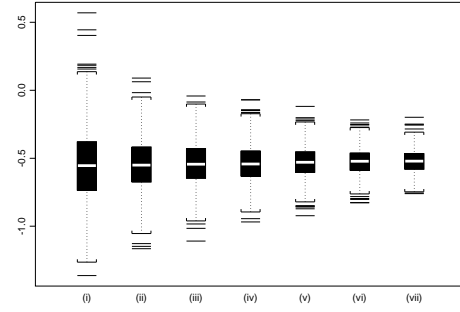
Figura 6.49: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Tabela 6.59: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 250$.

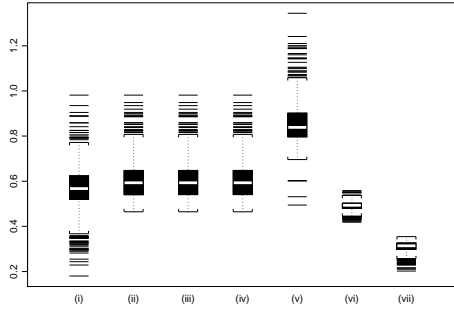
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8617	0,0617	0,0587	-0,5079	-0,0079	0,1948
0,60	0,8509	0,0509	0,0287	-0,5230	-0,0230	0,1078
0,65	0,8414	0,0414	0,0207	-0,5198	-0,0198	0,0836
0,70	0,8382	0,0382	0,0150	-0,5238	-0,0238	0,0624
0,75	0,8311	0,0311	0,0106	-0,5252	-0,0252	0,0494
0,80	0,8270	0,0270	0,0080	-0,5221	-0,0221	0,0411
0,85	0,8251	0,0251	0,0064	-0,5212	-0,0212	0,0380
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5723	-0,2277	0,0607	-0,1831	0,3169	0,1083
0,60	0,6036	-0,1964	0,0454	-0,2088	0,2912	0,0919
0,65	0,6038	-0,1962	0,0453	-0,2033	0,2967	0,0955
0,70	0,6038	-0,1962	0,0453	-0,1819	0,3181	0,1084
0,75	0,8559	0,0559	0,0106	-0,2314	0,2686	0,0767
0,80	0,4912	-0,3088	0,0958	-0,0684	0,4316	0,1885
0,85	0,3100	-0,4900	0,2407	-0,0098	0,4902	0,2416
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8279	0,0279	0,0466	-0,4736	0,0264	0,1905
0,60	0,8314	0,0314	0,0242	-0,4961	0,0039	0,1064
0,65	0,8310	0,0310	0,0179	-0,4916	0,0084	0,0846
0,70	0,8327	0,0327	0,0139	-0,5037	-0,0037	0,0626
0,75	0,8319	0,0319	0,0101	-0,5099	-0,0099	0,0523
0,80	0,8311	0,0311	0,0085	-0,5108	-0,0108	0,0423
0,85	0,8323	0,0323	0,0071	-0,5119	-0,0119	0,0395



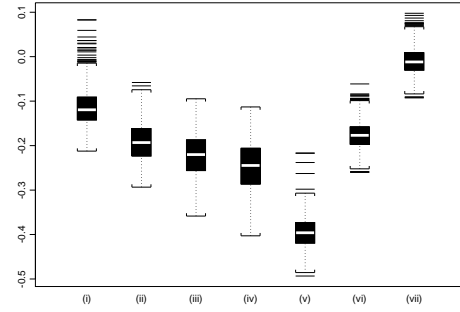
(a)



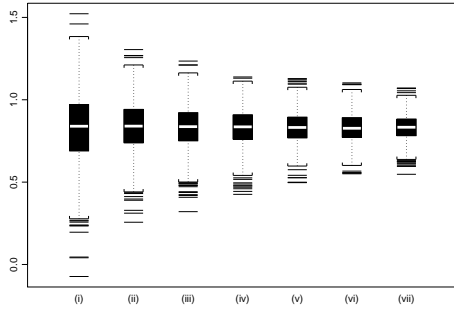
(b)



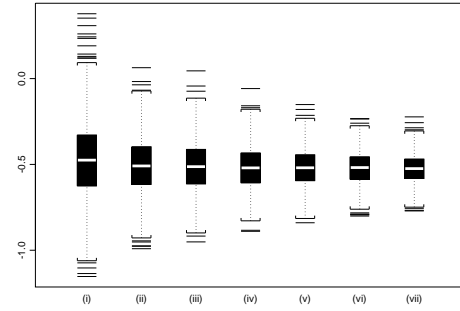
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.50: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Caso $n = 1000$ e $k = 500$

Tabela 6.60: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7936	-0,0064	0,0009
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,4468	0,0532	0,0065
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7367	-0,0633	0,0051
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,4272	0,0728	0,0113

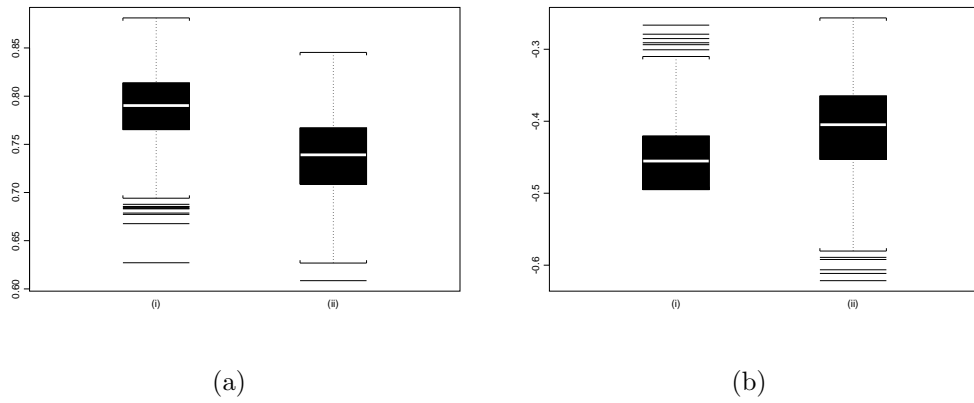
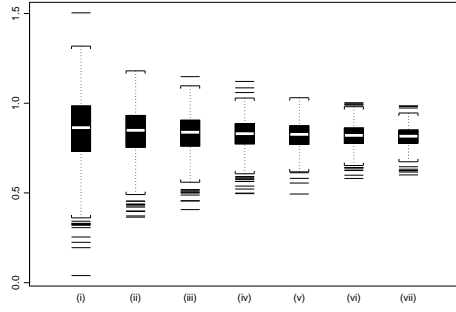


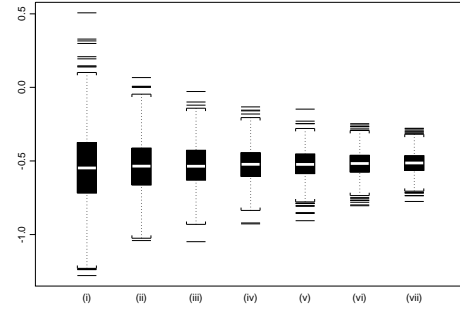
Figura 6.51: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Tabela 6.61: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 500$.

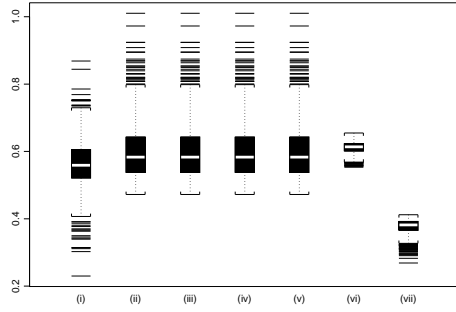
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8559	0,0559	0,0391	-0,5458	-0,0458	0,0703
0,60	0,8429	0,0429	0,0185	-0,5354	-0,0354	0,0312
0,65	0,8338	0,0338	0,0122	-0,5304	-0,0304	0,0212
0,70	0,8280	0,0280	0,0085	-0,5243	-0,0243	0,0148
0,75	0,8235	0,0235	0,0061	-0,5212	-0,0212	0,0108
0,80	0,8182	0,0182	0,0043	-0,5170	-0,0170	0,0078
0,85	0,8144	0,0144	0,0031	-0,5141	-0,0141	0,0059
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5630	-0,2370	0,0613	-0,1256	0,3744	0,1417
0,60	0,5986	-0,2014	0,0474	-0,2024	0,2976	0,0906
0,65	0,5986	-0,2014	0,0474	-0,2327	0,2673	0,0740
0,70	0,5986	-0,2014	0,0474	-0,2571	0,2429	0,0621
0,75	0,5986	-0,2014	0,0474	-0,2685	0,2315	0,0569
0,80	0,6113	-0,1887	0,0359	-0,2684	0,2316	0,0548
0,85	0,3768	-0,4232	0,1796	-0,0735	0,4265	0,1835
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8357	0,0357	0,0312	-0,4918	0,0082	0,0499
0,60	0,8379	0,0379	0,0161	-0,5201	-0,0201	0,0266
0,65	0,8372	0,0372	0,0117	-0,5279	-0,0279	0,0202
0,70	0,8351	0,0351	0,0087	-0,5341	-0,0341	0,0162
0,75	0,8341	0,0341	0,0067	-0,5398	-0,0398	0,0134
0,80	0,8313	0,0313	0,0053	-0,5425	-0,0425	0,0114
0,85	0,8287	0,0287	0,0043	-0,5445	-0,0445	0,0100



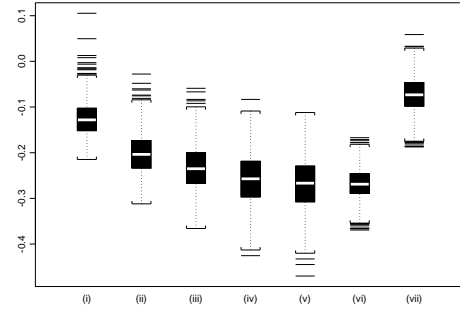
(a)



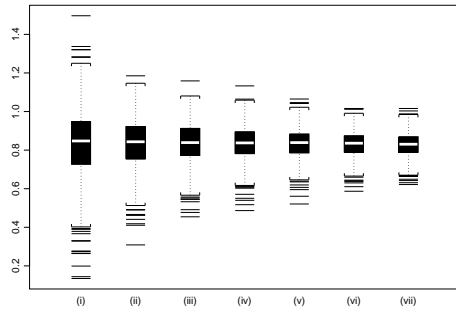
(b)



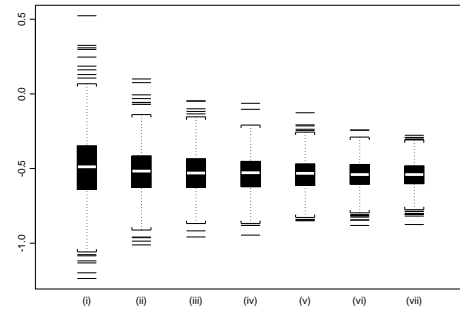
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.52: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Caso $n = 1000$ e $k = 750$

Tabela 6.62: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7936	-0,0064	0,0009
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,4468	0,0532	0,0065
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7367	-0,0633	0,0051
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,4272	0,0728	0,0113

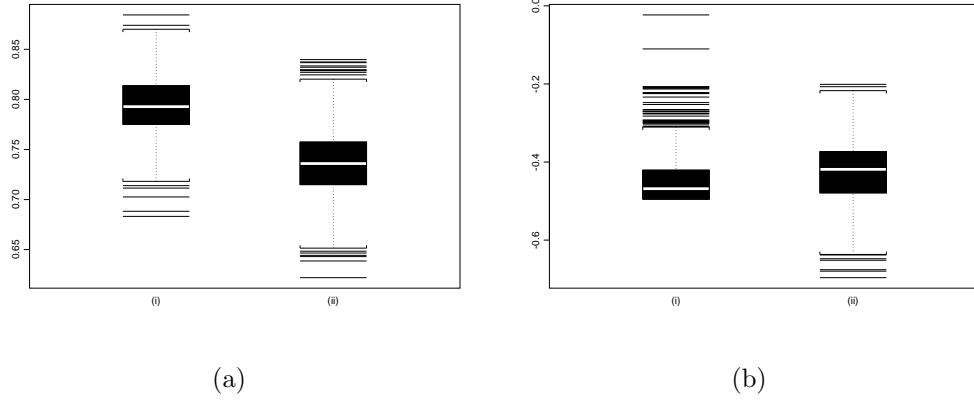
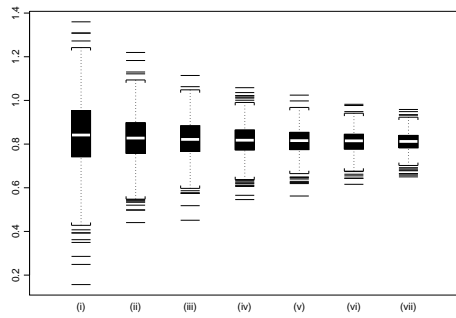


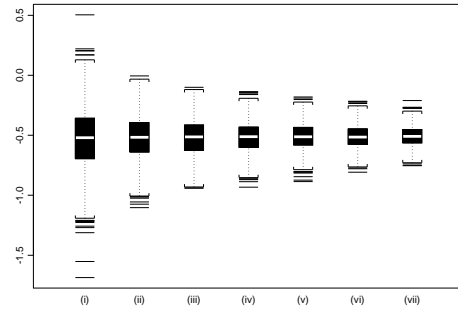
Figura 6.53: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) \hat{d}_{LW} ; (b)-(i) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$, quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Tabela 6.63: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 750$.

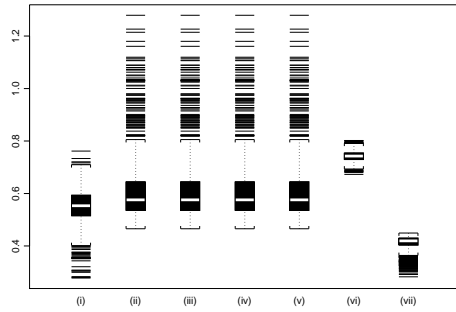
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8419	0,0419	0,0278	-0,5253	-0,0253	0,0724
0,60	0,8271	0,0271	0,0125	-0,5249	-0,0249	0,0336
0,65	0,8233	0,0233	0,0085	-0,5202	-0,0202	0,0238
0,70	0,8176	0,0176	0,0055	-0,5169	-0,0169	0,0173
0,75	0,8140	0,0140	0,0038	-0,5115	-0,0115	0,0125
0,80	0,8117	0,0117	0,0027	-0,5108	-0,0108	0,0093
0,85	0,8106	0,0106	0,0021	-0,5084	-0,0084	0,0073
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5532	-0,2468	0,0652	-0,1419	0,3581	0,1303
0,60	0,6147	-0,1853	0,0507	-0,2229	0,2771	0,0798
0,65	0,6147	-0,1853	0,0507	-0,2505	0,2495	0,0659
0,70	0,6147	-0,1853	0,0507	-0,2670	0,2330	0,0584
0,75	0,6147	-0,1853	0,0507	-0,2693	0,2307	0,0578
0,80	0,7424	-0,0576	0,0037	-0,3119	0,1881	0,0368
0,85	0,4106	-0,3894	0,1525	-0,0873	0,4127	0,1721
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8310	0,0310	0,0236	-0,5108	-0,0108	0,0656
0,60	0,8278	0,0278	0,0118	-0,5323	-0,0323	0,0362
0,65	0,8285	0,0285	0,0090	-0,5424	-0,0424	0,0300
0,70	0,8261	0,0261	0,0062	-0,5496	-0,0496	0,0240
0,75	0,8254	0,0254	0,0048	-0,5542	-0,0542	0,0200
0,80	0,8249	0,0249	0,0039	-0,5609	-0,0609	0,0183
0,85	0,8248	0,0248	0,0032	-0,5658	-0,0658	0,0173



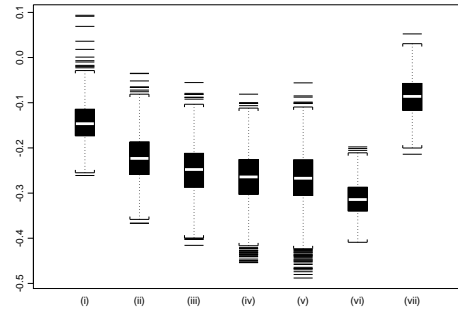
(a)



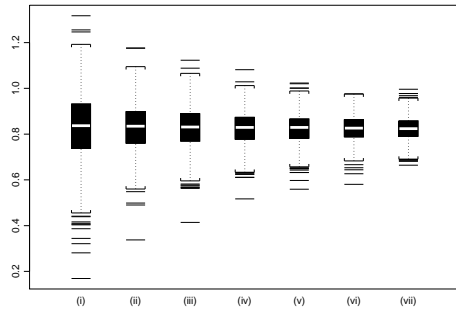
(b)



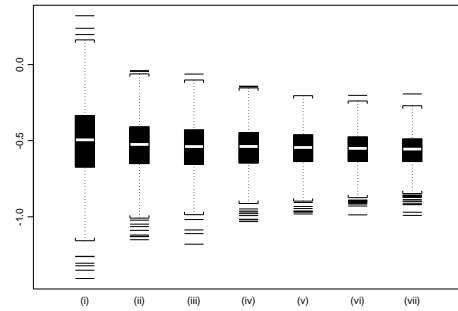
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.54: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$, $n = 1000$ e $k = 750$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7833$. O vício encontrado foi de $-0,0167$. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,5037$, com $\alpha = 0,70$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0037$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0033$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com $0,0055$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 500$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7890$. O vício encontrado foi de $-0,0110$. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,4918$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de $0,0082$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ e δ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0015$ e $0,0046$, respectivamente.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,8$, quando $k = 750$, foi $\hat{d}_{MV}^{(1)} = 0,7936$. O vício encontrado foi de $0,0009$. Na estimação de $\delta = -0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = -0,5084$, com $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0084$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com $0,0009$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com $0,0065$.

Para a melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas 6.58-6.63, veja as Figuras 6.49-6.54, onde apresentamos os box-plots dos estimadores.

6.4 Conclusões Obtidas a Partir das Simulações

De acordo com as simulações apresentadas neste capítulo e no Apêndice A, seguem as conclusões a respeito do comportamento dos estimadores estudados neste trabalho.

Nas Figuras 6.55, 6.56 e 6.57, apresentamos os gráficos que relacionam os vícios do estimador \hat{k} , dado pela expressão (5.50), com as diversas combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ utilizadas neste trabalho. Nestas figuras, utilizamos a seguinte convenção para identificar tais combinações:

- A significa $d^{(1)} = 0,1$ e $d^{(2)} = 0,3$
- B significa $d^{(1)} = 0,3$ e $d^{(2)} = 0,1$
- C significa $d^{(1)} = 0,3$ e $d^{(2)} = 0,8$
- D significa $d^{(1)} = 0,8$ e $d^{(2)} = 0,3$
- E significa $d^{(1)} = 0,6$ e $d^{(2)} = 0,8$

- F significa $d^{(1)} = 0,8$ e $d^{(2)} = 0,6$.

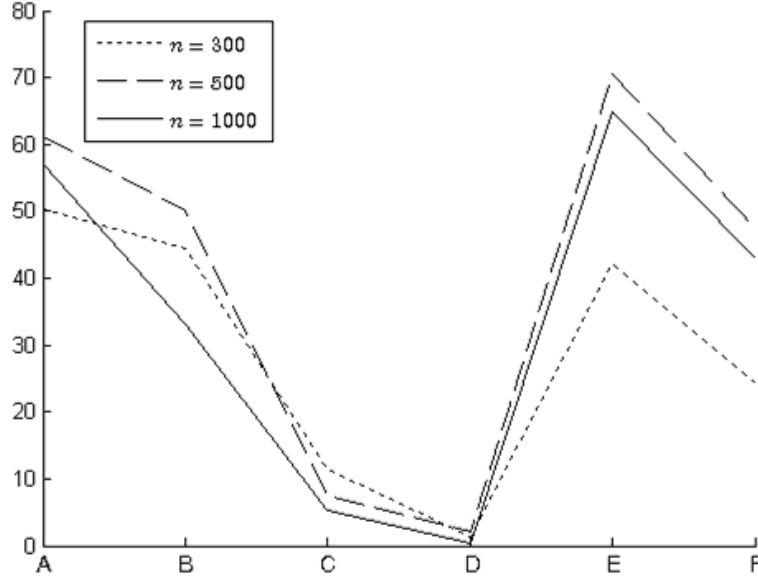


Figura 6.55: Vício do Estimador \hat{k} quando $k = \frac{n}{4}$, Segundo as Diversas Combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ e Diversos Tamanhos Amostrais.

Note que o estimador \hat{k} apresenta vício quando $k \neq \frac{n}{2}$. O estimador \hat{k} tende a superestimar o valor de k quando $k < \frac{n}{2}$, isto é, os vícios são positivos (ver Figura 6.55), e subestimar quando $k > \frac{n}{2}$, isto é, os vícios são negativos (ver Figura 6.57). Além disso, o vício tende a ser menor quanto maior é a diferença entre $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$. Note também que se $d^{(1)} > d^{(2)}$, o vício é menor do que se $d^{(1)} < d^{(2)}$.

Nas Figuras 6.58, 6.59 e 6.60, apresentamos gráficos que relacionam os erros quadráticos médios do estimador \hat{k} , dado pela expressão (5.50), com as diversas combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ utilizadas neste trabalho. Utilizamos a mesma convenção definida anteriormente para estas diversas combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$.

Perceba que o comportamento do estimador em relação ao erro quadrático médio permanece similar àquele apresentado em relação ao vício. Por exemplo, quanto maior a diferença entre os valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$, menor o erro quadrático médio do estimador. Além disso, quando $d^{(1)} > d^{(2)}$, o erro quadrático médio do estimador é menor do que no caso $d^{(1)} < d^{(2)}$.

Este comportamento do estimador também pode ser percebido nos histogramas gerados a partir dos valores estimados para k . Note que nas Figuras 6.61-6.63, é evidente que o vício do estimador diminui à medida que δ aumenta e $d^{(1)}$ é deslocado para a região de não-estacionariedade.

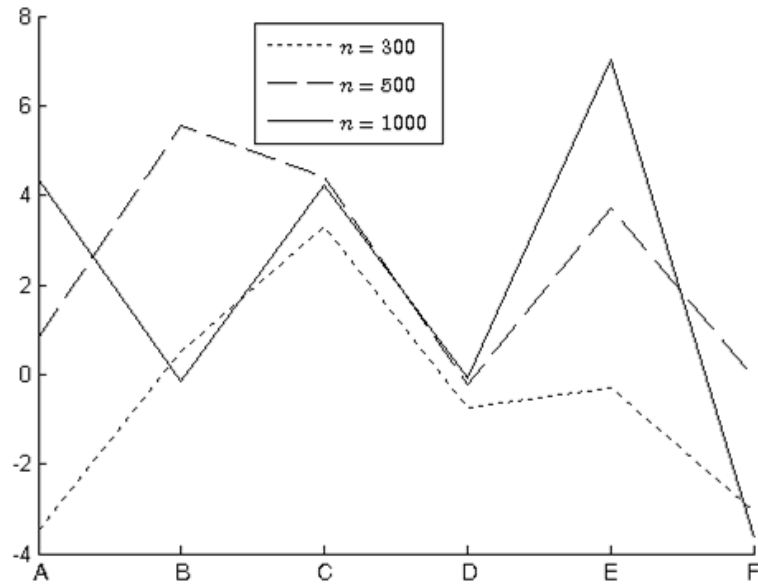


Figura 6.56: Vício do Estimador \hat{k} quando $k = \frac{n}{2}$, Segundo as Diversas Combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ e Diversos Tamanhos Amostrais.

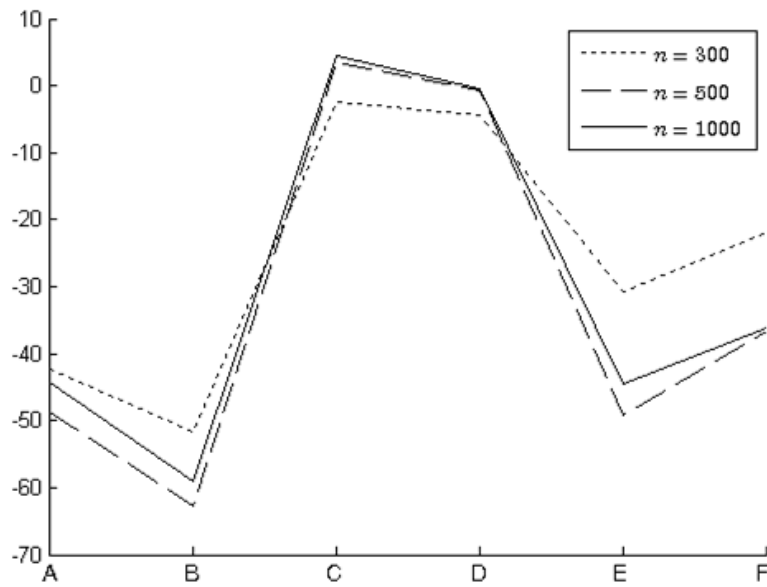


Figura 6.57: Vício do Estimador \hat{k} quando $k = \frac{3n}{4}$, Segundo as Diversas Combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ e Diversos Tamanhos Amostrais.

Além disso, o tamanho amostral n da série temporal analisada influi nos valores do vício e do eqm. Quanto maior o valor de n , melhores são os

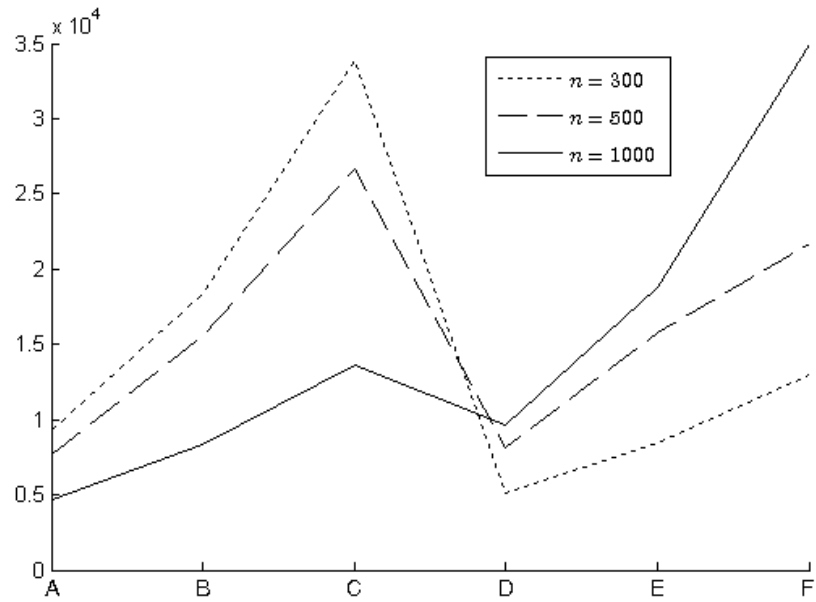


Figura 6.58: Erro Quadrático Médio do Estimador \hat{k} quando $k = \frac{n}{4}$, Segundo as Diversas Combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ e Diversos Tamanhos Amostrais.

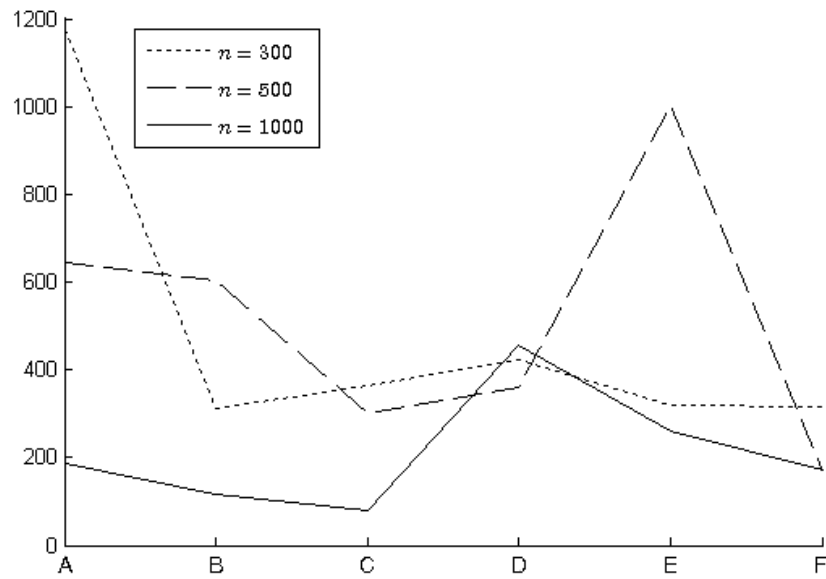


Figura 6.59: Erro Quadrático Médio do Estimador \hat{k} quando $k = \frac{n}{2}$, Segundo as Diversas Combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ e Diversos Tamanhos Amostrais.

resultados obtidos com a estimação de k .

Apesar de, visualmente, os histogramas apresentados nas Figuras 6.61-

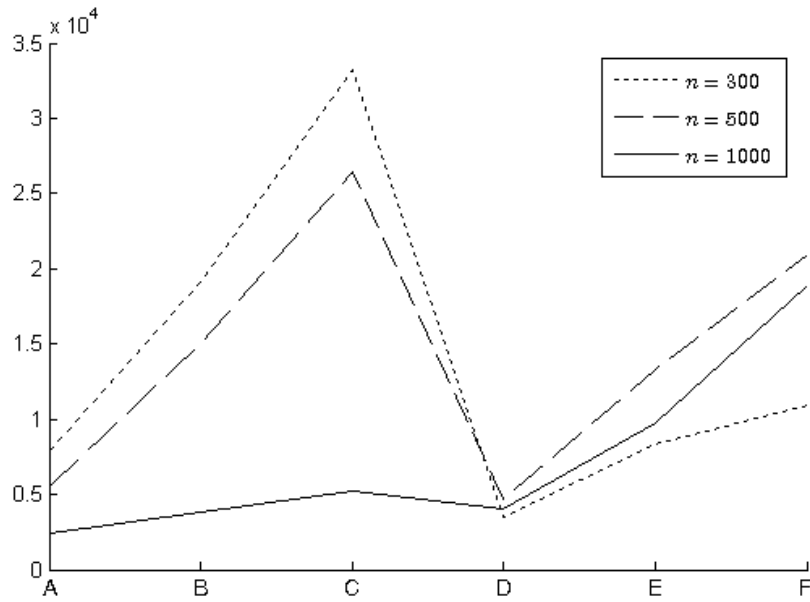


Figura 6.60: Erro Quadrático Médio do Estimador \hat{k} quando $k = \frac{3n}{4}$, Segundo as Diversas Combinações de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ e Diversos Tamanhos Amostrais.

6.63 assemelhem-se ao histograma da distribuição normal, o estimador proposto na Seção 5.2.2 não possui esta característica.

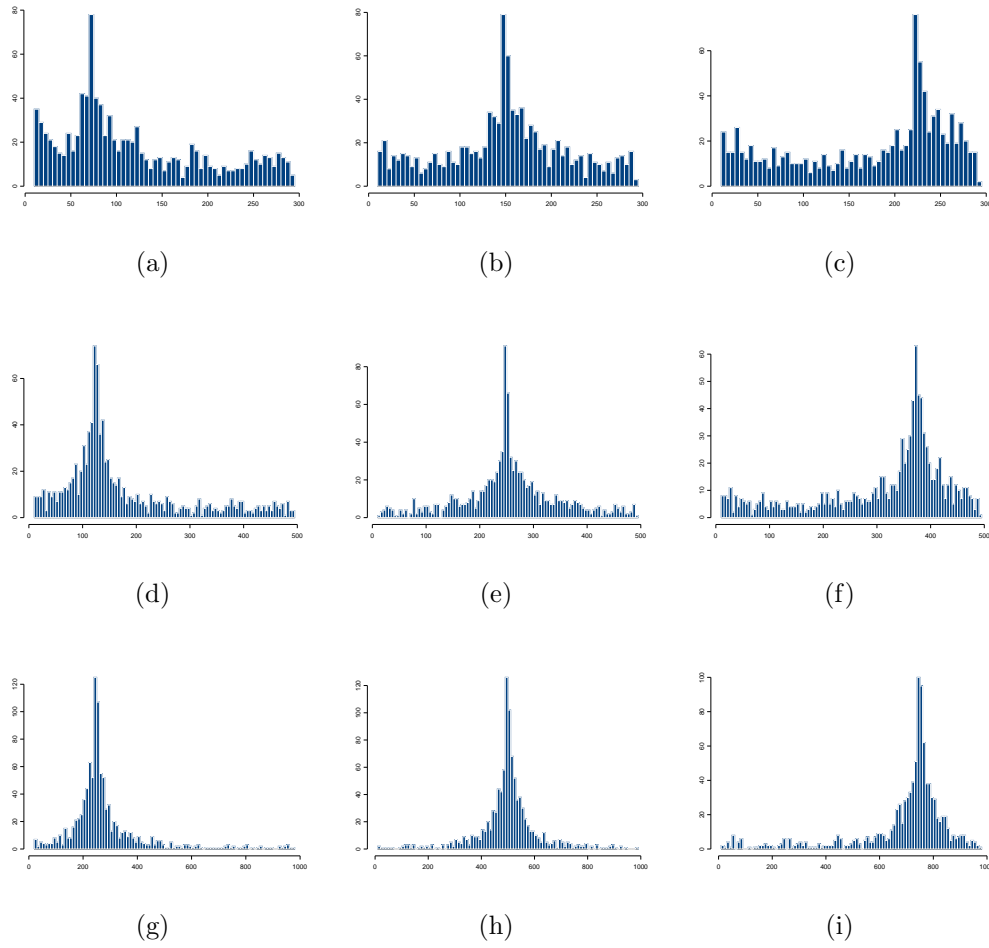


Figura 6.61: Histogramas do Estimador \hat{k} quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = -0,2$: (a) $n = 300$ e $k = 75$; (b) $n = 300$ e $k = 150$; (c) $n = 300$ e $k = 225$; (d) $n = 500$ e $k = 125$; (e) $n = 500$ e $k = 250$; (f) $n = 500$ e $k = 375$; (g) $n = 1000$ e $k = 250$; (h) $n = 1000$ e $k = 500$; (i) $n = 1000$ e $k = 750$.

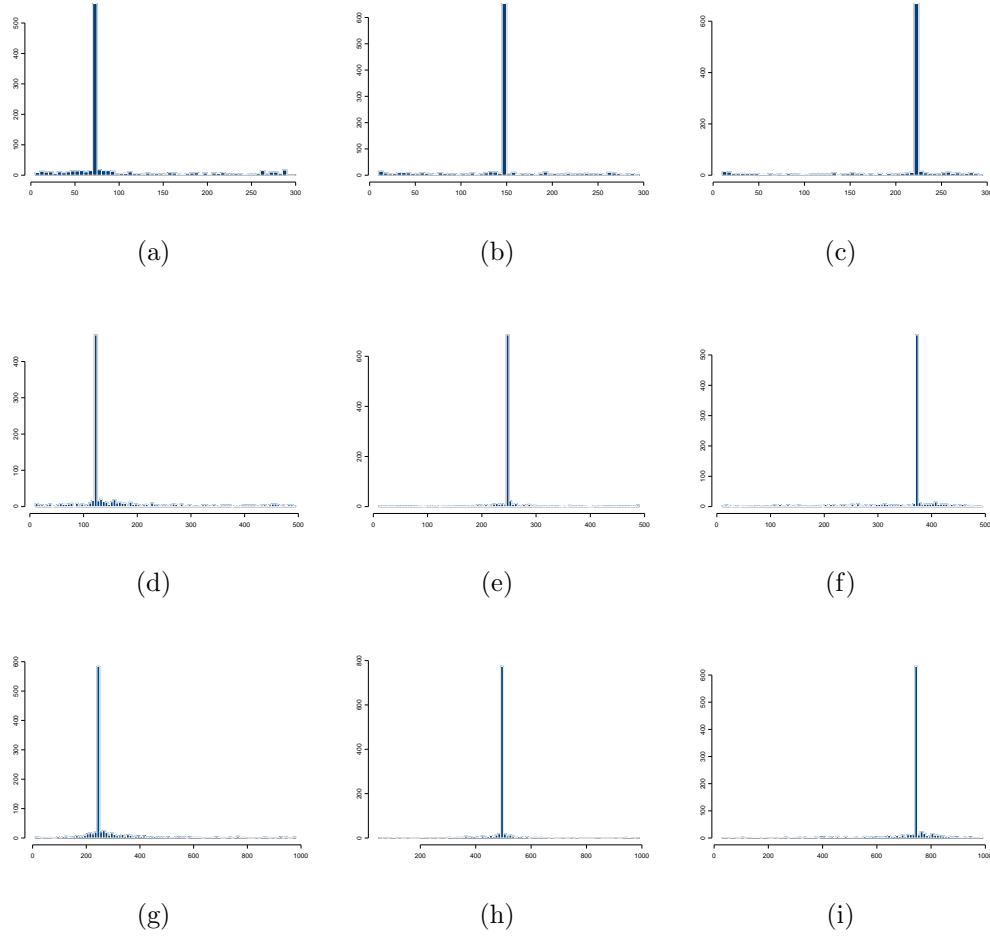


Figura 6.62: Histogramas do Estimador \hat{k} quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$: (a) $n = 300$ e $k = 75$; (b) $n = 300$ e $k = 150$; (c) $n = 300$ e $k = 225$; (d) $n = 500$ e $k = 125$; (e) $n = 500$ e $k = 250$; (f) $n = 500$ e $k = 375$; (g) $n = 1000$ e $k = 250$; (h) $n = 1000$ e $k = 500$; (i) $n = 1000$ e $k = 750$.

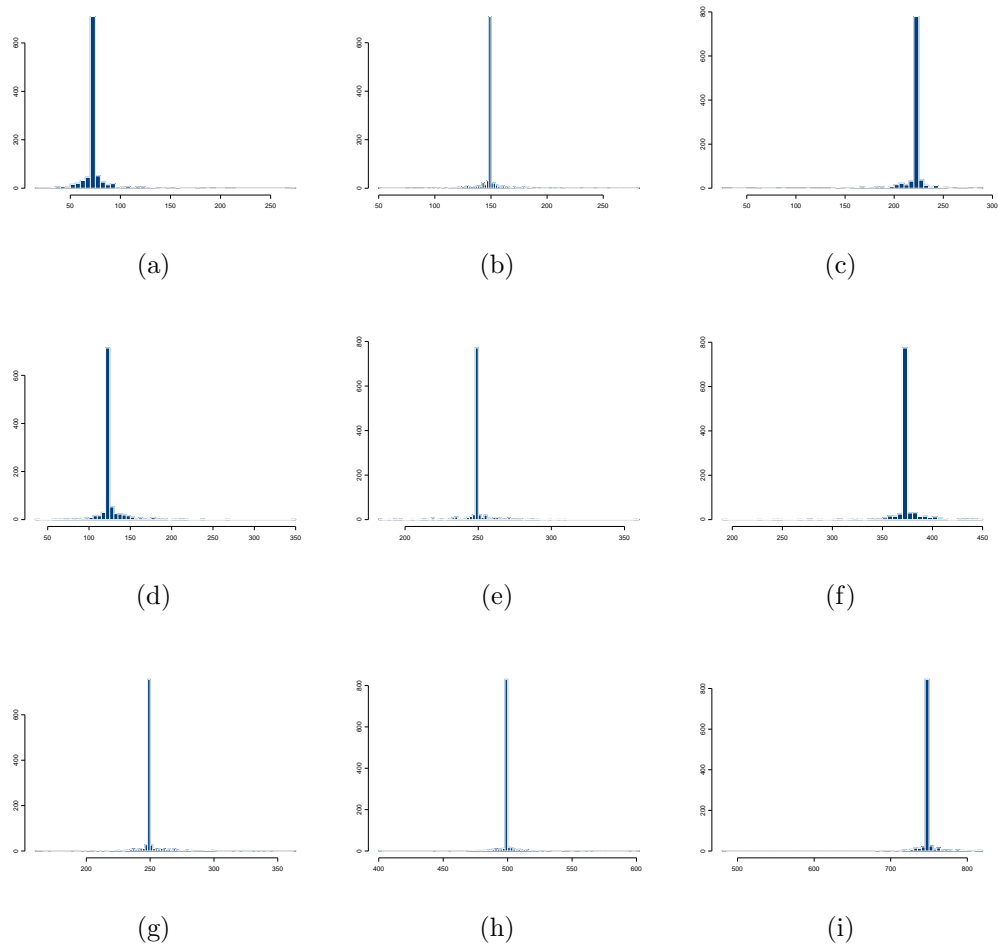


Figura 6.63: Histogramas do Estimador \hat{k} quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,5$: (a) $n = 300$ e $k = 75$; (b) $n = 300$ e $k = 150$; (c) $n = 300$ e $k = 225$; (d) $n = 500$ e $k = 125$; (e) $n = 500$ e $k = 250$; (f) $n = 500$ e $k = 375$; (g) $n = 1000$ e $k = 250$; (h) $n = 1000$ e $k = 500$; (i) $n = 1000$ e $k = 750$.

Capítulo 7

Aplicação

Neste capítulo mostramos uma aplicação do método desenvolvido na Seção 5.2.2 para uma série temporal real. A série temporal escolhida para análise foi a reconstrução da temperatura média para a estação quente (maio, junho, julho e agosto) da Caverna Shihua¹. Esta caverna está situada próxima a Pequim e os dados analisados compreendem o período entre os anos 665 a.C. e 1985 d.C., contendo um total de 2650 observações. Os dados foram obtidos e publicados por Tan *et. al.* (2003). Neste trabalho, Tan *et. al.* (2003) apenas tratam da reconstrução dos dados da temperatura na caverna, sem preocuparem-se em analisar tais dados.

Esta série temporal foi obtida através da medição da espessura das diferentes camadas de certa estalagmite da Caverna Shihua (115°56′L, 39°47′N, 251m acima do nível do mar em sua entrada), a 50km a sudoeste do centro de Pequim. Estudos anteriores, realizados em outras partes do mundo, sugerem que as espessuras das diversas camadas, das quais as estalagmites são feitas, dependem diretamente da quantidade de chuva próxima às cavernas e da temperatura do local. Procedimentos deste tipo são utilizados para fazer estimativas das condições meteorológicas em épocas anteriores aos instrumentos de medição.

A Figura 7.1 exibe o gráfico da série temporal analisada, denotada aqui por $\{Y_t\}_{t=1}^{2650}$. Note que, à primeira vista, não é possível determinar se há algum tipo de mudança de regime na série temporal. Por isso, procedemos da maneira usual para a análise de uma série temporal.

A Figura 7.2 mostra os gráficos das funções periodograma e autocorrelação amostral da série temporal. Note que a função periodograma exibe um pico na origem, enquanto que o gráfico da função de autocorrelação amostral exibe decaimento lento a zero. Estes gráficos, na Figura 7.2, indicam a presença de persistência nos dados. A partir destas constatações, podemos supor que a série temporal possui longa dependência e analisamos o ajuste

¹Estes dados estão disponíveis online e podem ser obtidos através do endereço <ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/paleo/speleothem/china/shihua-tan2003.txt>.

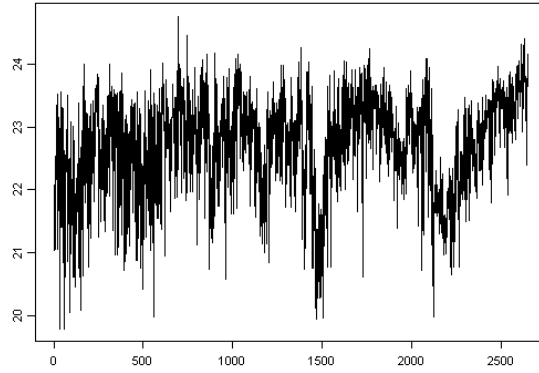


Figura 7.1: Temperatura Média dos Meses de Maio, Junho, Julho e Agosto em Shihua entre os Anos 665 a.C. e 1985 d.C..

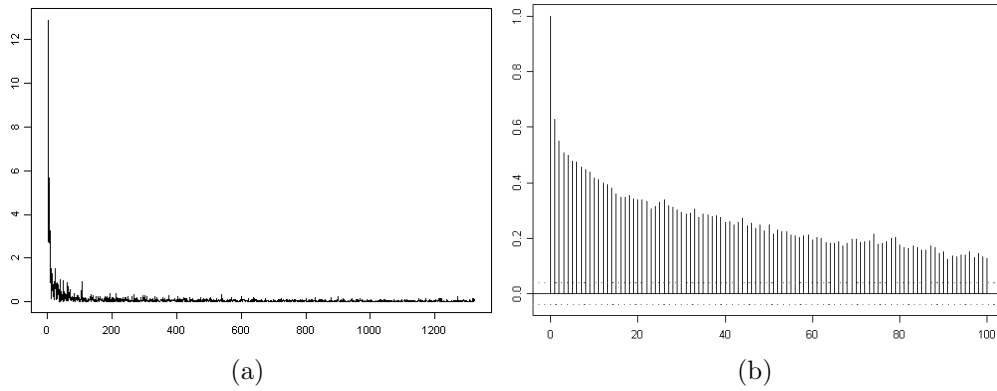


Figura 7.2: (a) Função Periodograma; (b) Função de Autocorrelação Amostrada da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{2650}$.

de um modelo $\text{ARFIMA}(p, d, q)$ aos dados $\{Y_t\}_{t=1}^{2650}$.

De acordo com o estimador \hat{d}_{MV} , visto na Seção 4.1, o modelo que melhor se ajusta a esta série temporal é um $\text{ARFIMA}(0, d, 0)$ com $\hat{d} = 0,3934$. Para avaliar se este modelo é adequado, necessitamos aplicar o filtro $(1 - \mathcal{B})^{0,3934}$ à série temporal e verificar se os resíduos decorrentes da série temporal filtrada possuem comportamento de ruído branco.

Uma parte da análise dos resíduos é feita através de gráficos construídos a partir destes dados. Nesta análise, estamos utilizando quatro gráficos diferentes:

1. QQ-Plot, que indica se um conjunto de variáveis aleatórias possui distribuição normal;
2. Histograma, que também indica se os dados possuem distribuição normal;

3. Função de Autocorrelação Amostral, que permite saber se as variáveis aleatórias estão correlacionadas ou não;
4. Função de Autocorrelação Parcial Amostral, que também permite saber se as variáveis aleatórias estão correlacionadas ou não, além de sugerir os modelos mais prováveis para o conjunto de dados analisado.

Os gráficos obtidos a partir deste primeiro ajuste estão exibidos na Figura 7.3.

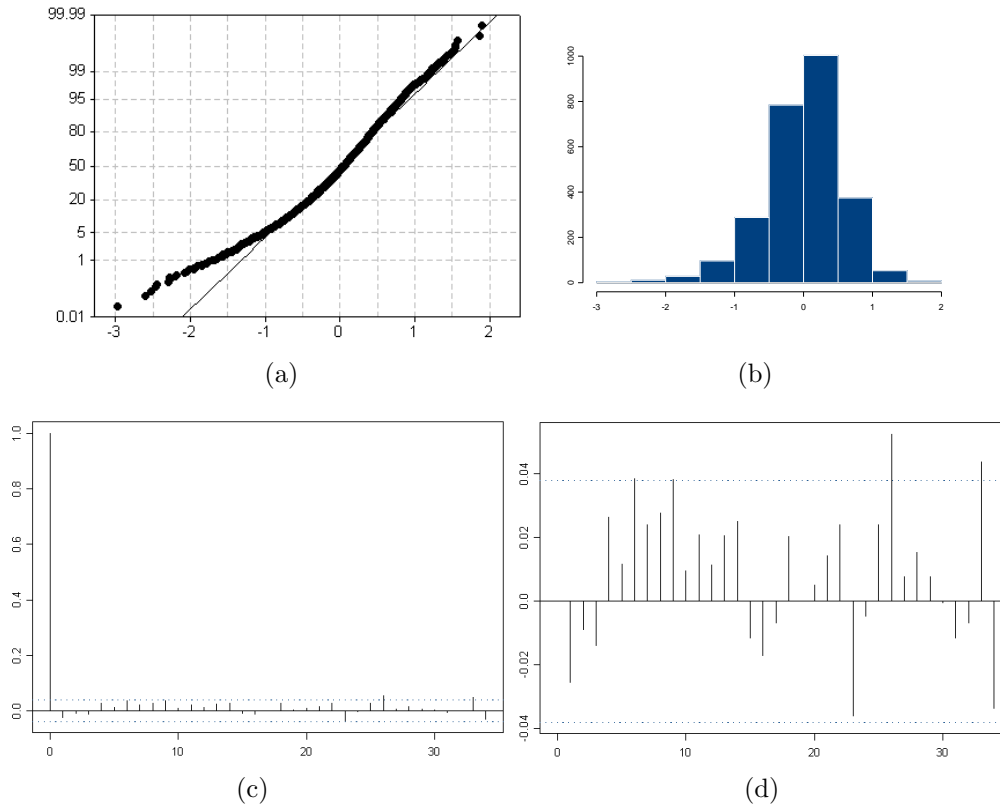


Figura 7.3: (a) QQ-Plot; (b) Histograma; (c) Função de Autocorrelação Amostral; (d) Função de Autocorrelação Parcial Amostral dos Resíduos da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{2650}$ Ajustada.

Note que nenhum dos gráficos exibidos na Figura 7.3 apresenta um resultado satisfatório para os resíduos da série temporal ajustada. O QQ-Plot não apresenta uma linha reta, indicando claramente que os resíduos não são normais. As análises das funções de autocorrelação amostral e autocorrelação amostral parcial indicam que os resíduos não são independentes. Assim, concluímos que a série temporal não foi bem ajustada por um modelo ARFIMA(0, d , 0).

Devido a este fato, aplicamos o método descrito na Seção 5.2.2. Ao procurarmos um primeiro ponto de mudança de regime, encontramos a observação Y_{560} , referente ao ano de 105 a.C., como candidata a ser este ponto. Ao analisarmos preliminarmente o trecho $\{Y_t\}_{t=1}^{560}$, encontramos os seguintes resultados:

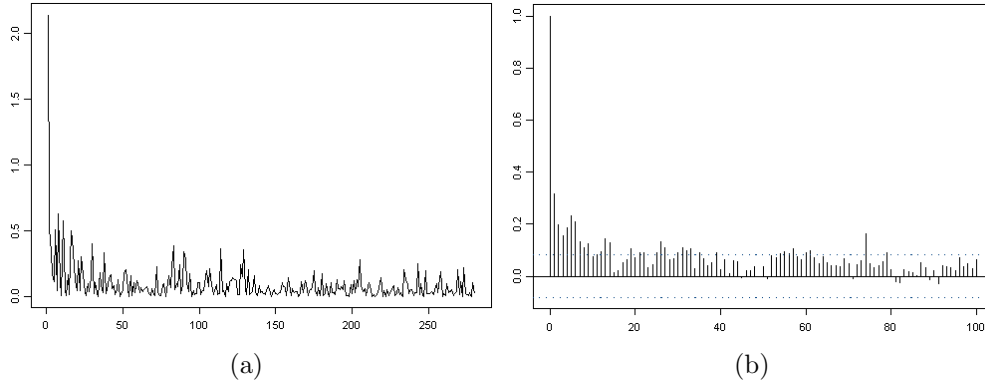


Figura 7.4: (a) Função Periodograma; (b) Função de Autocorrelação Amostral da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{560}$.

Novamente, na Figura 7.4, a função periodograma apresenta um pico na origem, enquanto a função de autocorrelação amostral sugere que os dados apresentam longa dependência. Ao ajustarmos um modelo $\text{ARFIMA}(p, d, q)$ a estes dados, através do estimador de máxima verossimilhança, este nos informa que o modelo que melhor se ajusta aos dados é um $\text{ARFIMA}(0, d, 0)$, com $\hat{d} = 0,2409$. Analisando os gráficos dos resíduos diferenciados de $\{Y_t\}_{t=1}^{560}$ por $(1 - \mathcal{B})^{0,2409}$, obtemos os resultados descritos a seguir.

A Figura 7.5 apresenta o QQ-Plot, histograma, funções de autocorrelação amostral e autocorrelação parcial amostral dos resíduos da série temporal ajustada. Note que os resultados deste ajuste estão satisfatórios, pois o QQ-Plot está bem próximo a uma reta, o histograma aproxima-se daquele de uma variável aleatória normal e os valores das funções de autocorrelação amostral e autocorrelação parcial amostral estão dentro dos intervalos de confiança para todas as ordens. Portanto, este trecho da série temporal está bem ajustado por um $\text{ARFIMA}(0; 0,2409; 0)$.

O trecho da série temporal original compreendido entre as observações Y_{560} e Y_{2650} , correspondentes aos anos 104 a.C. e 1985 d.C. apresenta, conforme a Figura 7.6 nos indica, características de longa dependência. Apesar disso, não conseguimos encontrar um modelo $\text{ARFIMA}(p, d, q)$ que se ajustasse de forma satisfatória a este trecho da série temporal.

Devido a este fato, utilizamos novamente o método proposto na Seção 5.2.2 para verificar a existência ou não de outro candidato a ponto de mudança de regime, mas apenas neste trecho da série temporal. Desta forma,

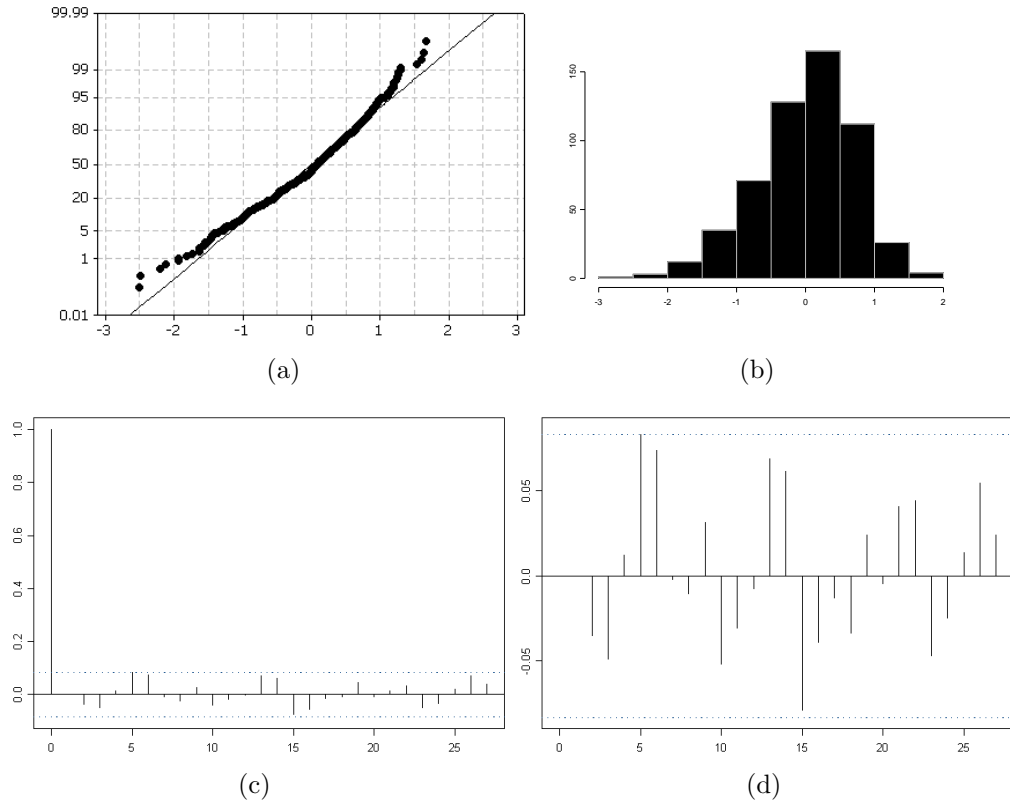


Figura 7.5: (a) Q-Q-Plot; (b) Histograma; (c) Função de Autocorrelação Amostral; (d) Função de Autocorrelação Parcial Amostral dos Resíduos da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{560}$ Ajustada.

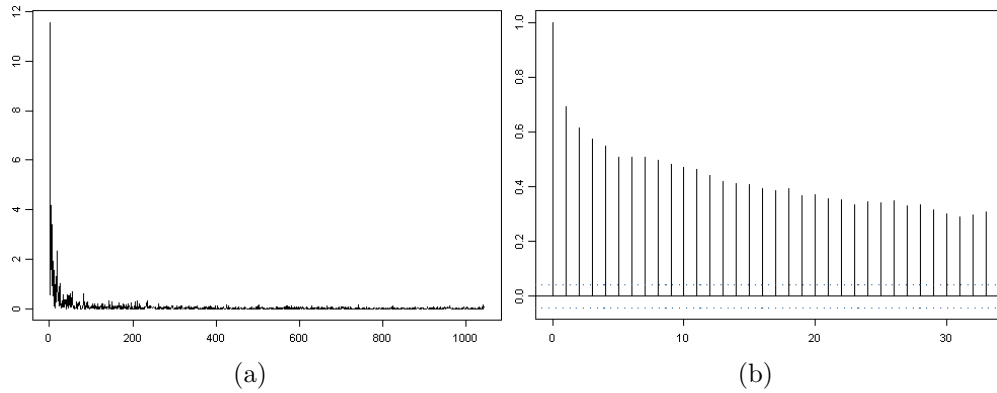


Figura 7.6: (a) Função Periodograma; (b) Função de Autocorrelação Amostral da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=561}^{2650}$.

encontramos a observação Y_{2114} , referente ao ano 1498 d.C., como sendo um possível ponto de mudança de regime. A Figura 7.7 apresenta as funções

periodograma e autocorrelação amostral da série temporal $\{Y_t\}_{t=561}^{2114}$. Observe que, assim como ocorreu com o primeiro trecho da série temporal, este também apresenta características de longa dependência. A função periodograma apresenta um pico na origem e a função de autocorrelação amostral decai lentamente. Devido a estes aspectos, ajustamos um modelo ARFIMA(p, d, q) aos dados. Novamente, o estimador de máxima verossimilhança nos sugere um modelo ARFIMA(0, d , 0). Desta vez, o valor encontrado para o parâmetro de longa dependência é $\hat{d} = 0,4037$. A Figura 7.8 exibe os gráficos utilizados para a determinação da validade do modelo escolhido para esta série temporal, após analisarmos os resíduos obtidos através da aplicação do filtro $(1 - \mathcal{B})^{0,4037}$ aos dados originais.

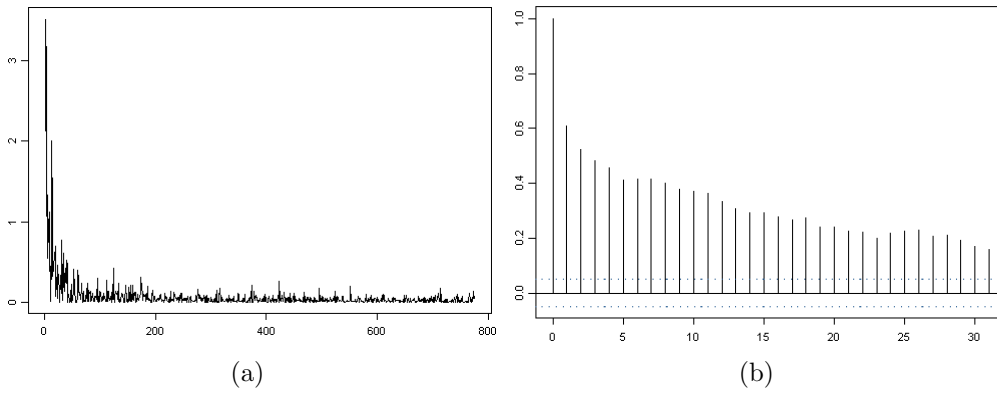


Figura 7.7: (a) Função Periodograma; (b) Função de Autocorrelação Amostrada da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=561}^{2114}$.

Note que tanto o QQ-Plot, que está bem próximo a uma reta, quanto o histograma, que se aproxima daquele de uma variável aleatória normal, sugerindo que o modelo está bem ajustado. Ainda, os valores das funções de autocorrelação amostral e autocorrelação parcial amostral estão dentro dos intervalos de confiança para todas as defasagens. Portanto, o modelo ARFIMA(0, d , 0), com $\hat{d} = 0,4037$, está bem ajustado à série temporal $\{Y_t\}_{t=561}^{2114}$.

Falta ainda o último trecho da série temporal original, dado por $\{Y_t\}_{t=2115}^{2650}$, referente ao período entre os anos 1499 d.C. e 1985 d.C.. Novamente, de acordo com a Figura 7.9, a análise preliminar nos leva a supor que este trecho da série temporal possui longa dependência.

Assim como ocorreu com os dois primeiros trechos da série temporal, este também apresenta a função periodograma com um pico na origem e a função de autocorrelação amostral com decaimento lento. Por isso, ajustamos um modelo ARFIMA(p, d, q) aos dados. O estimador de máxima verossimilhança nos sugere um modelo ARFIMA(0, d , 0), com $\hat{d} = 0,5051$. Analisamos o ajuste através dos resíduos obtidos pela aplicação do filtro $(1 - \mathcal{B})^{0,5051}$ aos dados originais. A Figura 7.10 exibe os gráficos utilizados

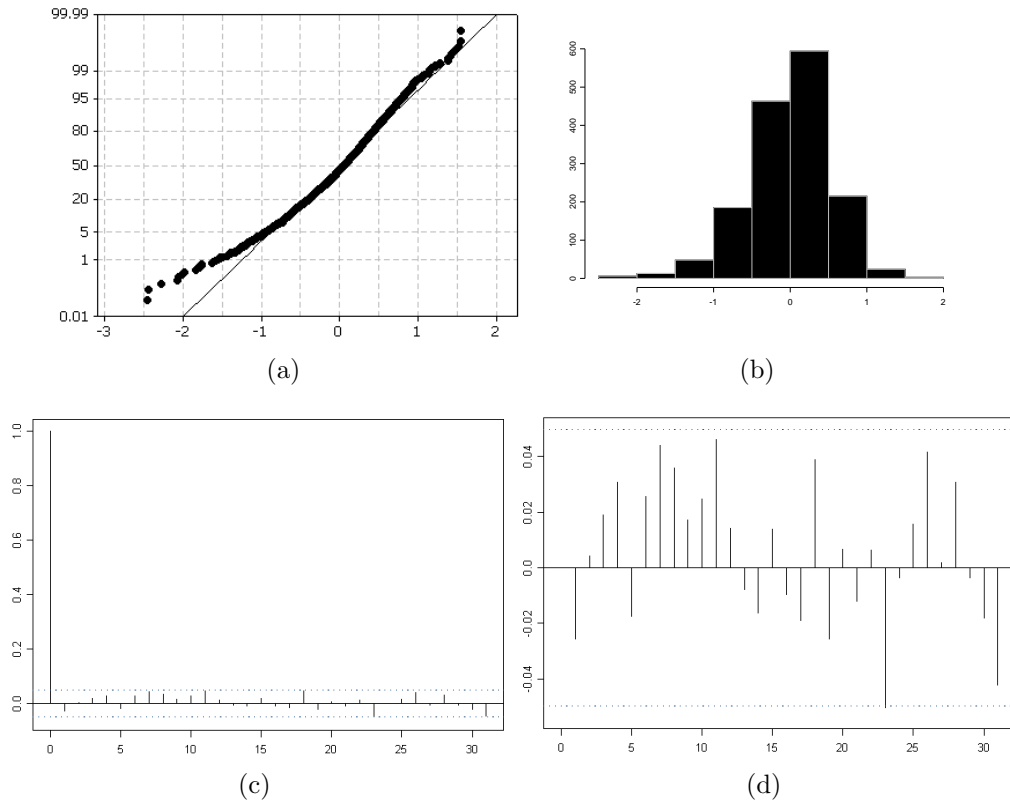


Figura 7.8: (a) QQ-Plot; (b) Histograma; (c) Função de Autocorrelação Amostral; (d) Função de Autocorrelação Parcial Amostral dos Resíduos da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=561}^{2114}$ Ajustada.

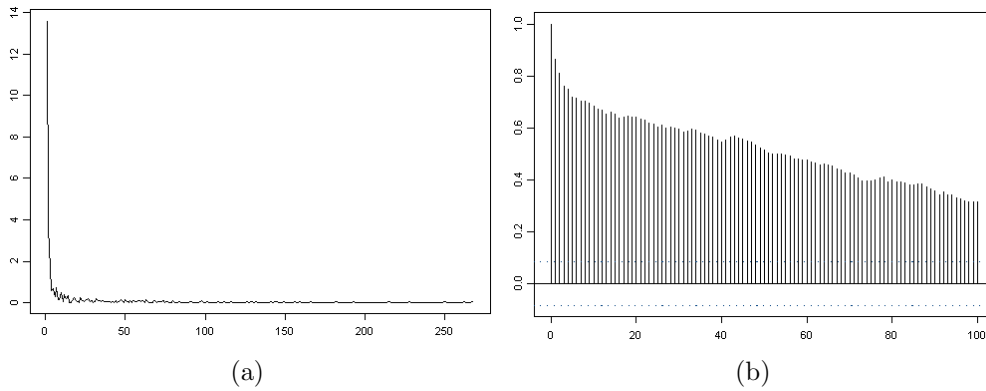


Figura 7.9: (a) Função Periodograma; (b) Função de Autocorrelação Amos-tral da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=2115}^{2650}$.

para a determinação da validade do modelo escolhido para esta série tempo-ral.

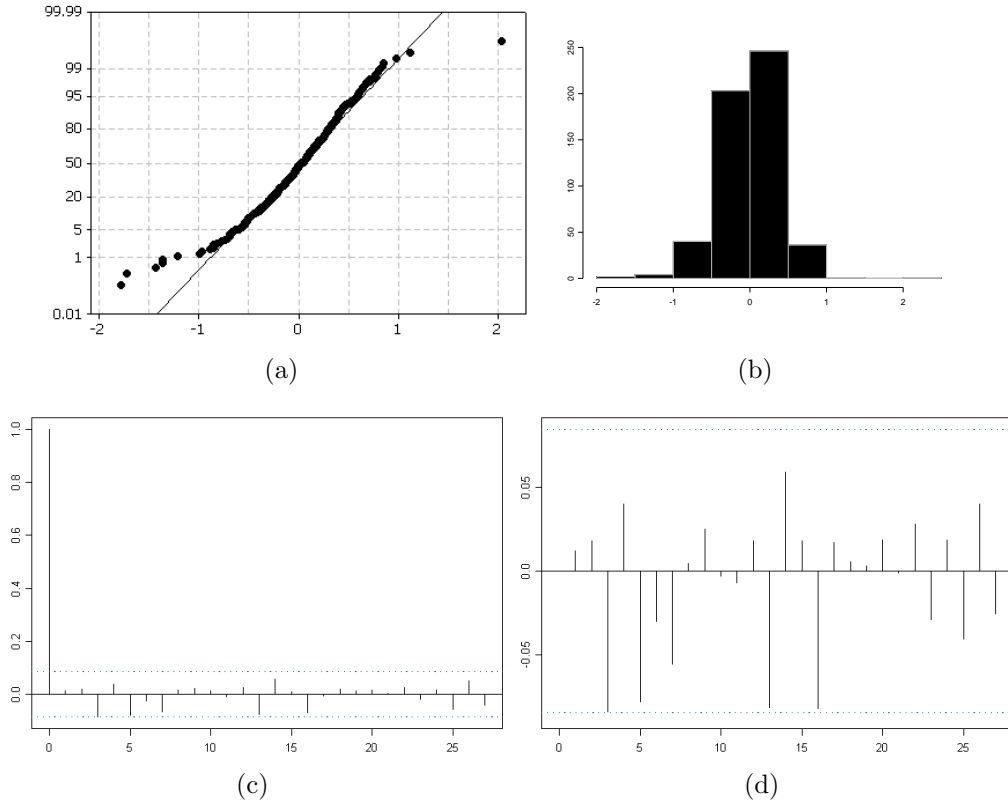


Figura 7.10: (a) QQ-Plot; (b) Histograma; (c) Função de Autocorrelação Amostral; (d) Função de Autocorrelação Parcial Amostral dos Resíduos da Série Temporal $\{Y_t\}_{t=2115}^{2650}$ Ajustada.

Note que tanto o QQ-Plot, que está bem próximo a uma reta, quanto o histograma, que se aproxima daquele de uma variável aleatória normal, sugerindo que o modelo está bem ajustado. Ainda, os valores das funções de autocorrelação amostral e autocorrelação parcial amostral estão dentro dos intervalos de confiança para todas as defasagens. Portanto, o modelo ARFIMA(0, d , 0), com $\hat{d} = 0,5051$, está bem ajustado à série temporal $\{Y_t\}_{t=2115}^{2650}$.

Portanto, o modelo escolhido para a série temporal da reconstrução da temperatura média para a estação quente (maio, junho, julho e agosto) da Caverna Shihua, entre os anos 665 a.C. e 1985 d.C., é dado por

$$Y_t = \begin{cases} (1 - \mathcal{B})^{-0,2409} \varepsilon_{1t}, & \text{se } 1 \leq t \leq 560; \\ (1 - \mathcal{B})^{-0,4037} \varepsilon_{2t}, & \text{se } 561 \leq t \leq 2114; \\ (1 - \mathcal{B})^{-0,5051} \varepsilon_{3t}, & \text{se } 2115 \leq t \leq 2650. \end{cases} \quad (7.1)$$

Capítulo 8

Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos

8.1 Conclusões

Propomos, na Seção 5.2.2 deste trabalho, um estimador para a localização do ponto de mudança de regime em um processo estocástico que possui longa dependência. Através de simulações de Monte Carlo, exibimos o comportamento deste estimador para vários casos diferentes, provenientes das diversas combinações de parâmetros utilizadas.

Analisando os resultados obtidos com as simulações de Monte Carlo apresentadas no Capítulo 6 e no Apêndice A, várias características do estimador proposto podem ser destacadas. As principais são comentadas a seguir.

Os resultados obtidos para \hat{k} , quando $k = \frac{n}{4}$ ou $k = \frac{3n}{4}$, mostraram-se ruins quando $n \in \{300, 500\}$, melhorando um pouco quando $n = 1000$. Em geral, o estimador superestima o valor real de k quando $k = \frac{n}{4}$ e subestima quando $k = \frac{3n}{4}$. No caso em que $k = \frac{n}{2}$, os valores obtidos para \hat{k} foram sempre os melhores. Além disso, tais resultados sempre apresentam baixo vício, não importando o tamanho do valor amostral n utilizado nas simulações.

Outro fator determinante no desempenho do estimador \hat{k} é a diferença δ entre $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$. Quanto maior o valor de δ , menor o vício e o eqm de \hat{k} . Inclusive, o vício e o eqm de \hat{k} tornam-se baixos com este valor de δ , melhorando o desempenho notado quando $|\delta| = 0,2$. Estas observações nos levam a conjecturar que o estimador \hat{k} é não-viciado e consistente. Além disso, o vício e a variância do estimador são inversamente proporcionais a $|\delta|$.

Os resultados da estimação, tanto para o parâmetro k quanto para os parâmetros $d^{(1)}$ e δ , são melhores nos casos em que $d^{(1)} > d^{(2)}$ do que nos casos em que $d^{(1)} < d^{(2)}$. Considerando-se os mesmos valores para n , k , $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$, tanto o vício quanto o eqm de \hat{k} tornam-se menores quando $d^{(1)} > d^{(2)}$.

Além disso, comparando os resultados obtidos quando $|\delta| = 0,2$ e $|\delta| =$

0,5, podemos notar que a estimação de k melhora quando $|\delta| = 0,5$, mesmo que o tamanho amostral seja pequeno. Por exemplo, se $n = 300$, podemos notar que nas Tabelas 6.43 e A.43, quando $\delta = -0,5$ e $\delta = 0,5$, respectivamente, o vício de \hat{k} é nitidamente menor do que nas Tabelas 6.1 e A.1, quando $\delta = -0,2$ e $\delta = 0,2$, respectivamente.

Os histogramas nas Figuras 6.61, 6.62 e 6.63, quando $d^{(1)} > d^{(2)}$, se comparados aos histogramas nas Figuras A.55, A.56 e A.57, quando $d^{(1)} < d^{(2)}$, claramente apresentam maior desvio padrão. Isto nos leva a supor que o estimador \hat{k} possui melhor desempenho quando $d^{(1)} > d^{(2)}$, pois, neste caso, os valores de \hat{k} estão mais concentrados em torno do valor nominal de k do que no caso em que $d^{(1)} < d^{(2)}$. Além disso, é nítido, nos casos em que $|\delta| = 0,5$, que tanto o vício quanto o eqm de \hat{k} são menores do que nos casos em que $|\delta| = 0,2$.

Comparando as Figuras 6.55, 6.56 e 6.57, percebemos que, ao contrário do poderíamos esperar, o vício do estimador \hat{k} não atinge o menor valor quando $n = 1000$. Apesar disso, não podemos considerar que este seja um resultado ruim. Note que, proporcionalmente, o vício de \hat{k} é menor quando $n = 1000$ do que quando $n = 300$.

Tome, por exemplo as Tabelas 6.22 e 6.36, referentes à estimação de \hat{k} quando $d^{(1)} = 0,8$, $\delta = -0,2$ e $n = 300$ e $n = 1000$, respectivamente. Se $k = \frac{n}{4}$, o vício de \hat{k} , quando $n = 300$, é 24,209. Se $n = 1000$, este vício sobe para 33,082. Mas note que, percentualmente, se $n = 300$, o vício encontrado é de 32,28%, enquanto que, se $n = 1000$, este percentual cai para 13,23%. Comportamento semelhante ocorre quando utilizamos outros valores para $d^{(1)}$, δ , k e n .

Além disso, ao compararmos os resultados obtidos com a simulação para o caso estacionário com o caso misto, percebemos a diferença que há nos resultados para o estimador \hat{k} . Tome, por exemplo, as Tabelas 6.1 e 6.43. Em ambos os casos, as séries temporais simuladas possuem tamanho amostral $n = 300$ e ponto de mudança de regime $k \in \{75, 150, 225\}$. A diferença entre as séries temporais reside nos valores de $d^{(1)}$ e δ : na primeira, $d^{(1)} = 0,3$ e $\delta = -0,2$. Na segunda, $d^{(1)} = 0,8$ e $\delta = -0,5$. Como já destacamos acima, o vício de \hat{k} , quando $k = \frac{n}{2}$, é pequeno, mas torna-se grande quando $k \neq \frac{n}{2}$. Mas perceba que os valores de $d^{(1)}$ e δ influem na estimação de k , pois se $k = 75$, o vício no caso estacionário é de 44,447, enquanto no caso misto, este vício cai para apenas 1,373. No caso misto, o estimador continua superestimando o valor de k , mas de maneira muito menos intensa que no caso estacionário. Analogamente, o mesmo tipo de comportamento foi observado quando $k = 225$. Este comentário também vale para o eqm do estimador \hat{k} .

Os resultados da estimação dos parâmetros $d^{(1)}$ e δ , utilizando os estimadores descritos no Capítulo 4, confirmam a teoria. Conforme aumentamos o tamanho amostral das séries temporais analisadas, menor torna-se o eqm,

como era de se esperar.

Os melhores resultados, para o tamanho amostral $n = 300$, foram obtidos com os estimadores \hat{d}_{GPH} e \hat{d}_{KP} . Conforme aumentamos o tamanho amostral, o estimador \hat{d}_{MV} torna-se melhor. Por exemplo, quando $n = 1000$, \hat{d}_{MV} apresenta os menores valores para o vício e eqm, em quase todos os casos analisados.

Este comportamento se repete para o parâmetro δ . Para o tamanho amostral $n = 300$, \hat{d}_{GPH} e \hat{d}_{KP} são os melhores estimadores. Já quando $n = 1000$, \hat{d}_{MV} apresenta os menores valores para o vício e \hat{d}_{LW} para o eqm, em quase todos os casos analisados.

Os resultados obtidos na estimação de $d^{(1)}$ e δ , através dos métodos de estimação \hat{d}_{GPH} , \hat{d}_{KP} , $\hat{\delta}_{GPH}$ e $\hat{\delta}_{KP}$, são tanto melhores quanto maior é o valor de α .

O estimador \hat{d}_{GPHBa} , apesar dos ótimos resultados para os valores do eqm, não se revelou uma boa opção, pois apresentou vício alto em muitas das simulações realizadas.

O estimador mostrou-se eficaz na análise de uma série temporal real, conforme exposto no Capítulo 7. A análise feita na série temporal real, após a estimação dos pontos de mudança de regime, ficou bastante boa, correspondendo às expectativas geradas com base na teoria exposta nos Capítulos 4 e 5.

8.2 Propostas para Futuros Trabalhos

Após a realização deste trabalho, várias questões a respeito do estimador \hat{k} permanecem em aberto. Descrevemos aqui quais são estas questões, além de indicarmos rumos para novas pesquisas neste assunto.

Na literatura, não há resultados teóricos a respeito do estimador \hat{k} , proposto na expressão (5.50) para o modelo (5.49). Uma das propostas para futuros trabalhos é deduzir a distribuição assintótica deste estimador. O indício que temos, a partir dos resultados das simulações, é que o estimador parece não ser assintoticamente normal. As simulações realizadas com 10000 replicações apresentaram resultado semelhante para a distribuição assintótica do estimador. Por outro lado, os resultados das simulações indicam que \hat{k} é não-viciado e consistente.

Após as simulações realizadas no Capítulo 6 deste trabalho, observamos que o estimador \hat{k} , dado pela expressão (5.50), é bastante viciado para os casos em que $k < \frac{n}{2}$ (onde \hat{k} tem vício positivo) e $k > \frac{n}{2}$ (onde \hat{k} tem vício negativo). Desta forma, um futuro trabalho é considerar uma análise mais detalhada deste vício.

Devido a restrições computacionais, tivemos que analisar o comportamento do estimador apenas no caso em que a diferenciação realizada no passo 2 do algoritmo, descrito na Seção 5.2.2, é realizada pelo método da máxima

verossimilhança, descrito na Seção 4.1. Uma proposta para novos trabalhos é verificar o comportamento de \hat{k} quando esta primeira diferenciação do processo é feita com algum dos outros métodos descritos no Capítulo 4.

Também é possível propor modelos mais sofisticados do que aquele dado pela expressão (5.49). Se representarmos o parâmetro de diferenciação fracionária, utilizado no modelo analisado neste trabalho, na forma de uma função, ela seria dada por

$$d(t) = \begin{cases} d^{(1)}, & \text{se } t \leq k, \\ d^{(2)}, & \text{se } t > k. \end{cases}$$

Uma extensão natural do estudo que apresentamos aqui é considerar um processo estocástico no qual a função $d(\cdot)$ seja mais complexa. Por exemplo, considerar $d(t) = a + bt$, para a, b constantes reais mas desconhecidas.

Referências Bibliográficas

- Abadir, K.M., Distado, W. e Giraitis, L. (2007). “Nonstationarity-extended local Whittle estimation”. *Journal of Econometrics*, Vol. **141**(2), pp. 1353–1384.
- Agiakloglou, C., Newbold, P. e Wohar, M. (1993). “Bias in an estimator of the fractional difference parameter”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **14**(3), pp. 235–246.
- Bai, J. (1994). “Least Square Estimation of a Shift in Linear Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15**(5), pp. 453–472.
- Bai, J. e Perron, P. (1998). “Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Breaks”. *Econometrica*, Vol. **66**(1), pp. 47–78.
- Bai, J. e Perron, P. (2003). “Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models”. *Journal of Applied Econometrics*, Vol. **18**(1), pp. 1–22.
- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. New York: Chapman & Hall.
- Beran, J. (1995). “Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models”. *Journal of Royal Statistical Society B*, Vol. **57**(4), pp. 659–672.
- Beran, J. e Terrin, N. (1996). “Testing for a Change of the Long-Memory Parameter”. *Biometrika*, Vol. **83**(3), pp. 627–638.
- Beran, J. e Terrin, N. (1999). “Correction: Testing for a Change of the Long-Memory Parameter”. *Biometrika*, Vol. **86**(1), pp. 233–233.
- Berkes, I., Horváth, L., Kokoszka, P. e Shao, Q.M. (2006). “On discriminating between long-range dependence and changes in mean”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **34**(3), pp. 1140–1165.
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. New York: John Wiley.

- Bisognin, C. (2007). *Estimação e Previsão em Processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_S na Presença de Outliers*. Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- Box, G., Jenkins, G. e Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Choi, K. e Zivot, E. (2005). “Long Memory and Structural Changes in the Forward Discount - An Empirical Investigation”. *Preprint*.
- Cobb, G.W. (1978). “The Problem of the Nile: Conditional Solution to a Change-point Problem”. *Biometrika*, Vol. **65**(2), pp. 243–251.
- Csörgö, M. e Horváth, L. (1997). *Limit Theorems in Change Point Analysis*. New York: John Wiley.
- Doukhan, P., Oppenheim, G. e Taqqu, M. (2003). *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Boston: Birkhäuser.
- Dufrenot, G., Guegan, D. e Peguin-Feissolle, A. (2003). “A SETAR model with long-memory dynamics”. *Preprint*.
- Fox, R. e Taqqu, M.S. (1986). “Large Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series”. *The Annals of Statistics*, Vol. **14**, pp. 517–532.
- Geweke, J. e Porter-Hudak, S. (1983). “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **4**(4), pp. 221–238.
- Granger, C.W. (1999). *Aspects of Research Strategies for Time Series Analysis*. Texto apresentado na Conferência *New Developments in Time Series Economics* em New Haven, Outubro de 1999.
- Granger, C.W. e Hyung, N. (1999). *Occasional Structural Breaks and Long Memory*. Discussion Paper 99-14, University of California, San Diego.
- Granger, C. e Joyeux, R. (1980). “An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **1**(1), pp. 15–29.
- Hamilton, J.D. e Raj, B. (2002). *Advances in Markov-Switching Models*. Heidelberg: Physica-Verlag.

- Hosking, J.R.M. (1981). “Fractional Differencing”. *Biometrika*, Vol. **68**, pp. 165–176.
- Hosking, J.R.M. (1984). “Modelling Persistence in Hidrological Time Series Using Fractional Differencing”. *Water Resources Research*, Vol. **20**(12), pp. 1898–1908.
- Hurst, H.E. (1951). “Long-Term Storage Capacity of Reservoirs”. *Transactions of American Society in Civil Engineers*, Vol. **116**, pp. 165–167.
- Hurvich, C.M. e Ray, B.K. (1995). “Estimation of the memory Parameter for Nonstationary or Noninvertible Fractionally Integrated Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **16**(1), pp. 17–42.
- Karlin, S. e Taylor, H.M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes, Second Edition*. New York: Academic Press.
- Kim, C.S. e Phillips, P.C.B. (2006). “Log periodogram Regression: The Nonstationary Case”. *Preprint*.
- Kuan, C.M. e Hsu, C.C. (1998). “Change-Point Estimation of Fractionally Integrated Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **19**(6), pp. 693–708.
- Lopes, S.R.C. (2008). “Long-Range Dependence in Mean and Volatility: Models, Estimation and Forecasting” In: *In and Out of Equilibrium 2*, V. Sidoravicius and M.E. Vares (Editores). Boston: Birkhäuser.
- Lopes, S.R.C. e Mendes, B.V.M. (2006). “Bandwidth Selection in Classical and Robust Estimation of Long Memory”. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, Vol. **35**(2), pp. 789–802.
- Lopes, S.R.C. e Nunes, M.A. (2006). “Long memory analysis in DNA sequences”. *Physica A - Statistical and Theoretical Physics*, Vol. **361**(2), pp. 569–588.
- Lopes, S.R.C., Olbermann, B.P. e Reisen, V.A. (2004). “A Comparison of Estimation Methods in Non-stationary Arfima Processes”. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. **75**(5), pp. 339–347.
- Mandelbrot, B.B. e Wallis, J.R. (1969). “Computer Experiments With Fractional Gaussian Noises. Part One, Averages and Variances”. *Water Resources Research*, Vol. **5**(1), pp. 228–241.
- Mandelbrot, B.B. (1965). “Une classe de processus stochastiques homothétiques a soi; application a loi climatologique de H. E. Hurst”. *Comptes Rendus Academic Sciences Paris*, Vol. **240**, pp. 3274–3277.

- Mandelbrot, B.B. e van Ness, J.W. (1968). “Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications”. *SIAM Review*, Vol. **10**(4), pp. 422–437.
- Marques, G.O.L.C. (2008). *Estruturas de Memória Longa em Variáveis Econômicas: Da Análise de Integração e Co-Integração Fracionárias à Análise de Ondaletas*. Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Economia da USP, São Paulo.
- Morettin, P.A. e Toloi, C.M.C. (2004). *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Blücher.
- Nelson, C.R. e Plosser, C.I. (1982). “Trends and random walks in macroeconomic time series”. *Journal of Monetary Economics*, Vol. **10**, pp. 139–162.
- Olbermann, B.P. (2002). *Estimação em Classes de Processos Estocásticos com Decaimento Hiperbólico da Função de Autocorrelação*. Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- Olbermann, B.P., Lopes, S.R.C. e Reisen, V.A. (2006). “Invariance of the First Difference in ARFIMA Models”. *Journal of Computational Statistics*, Vol. **21**(3), pp. 445–461.
- Palma, W. (2007). *Long-Memory Time Series - Theory and Methods*. New Jersey: Wiley Interscience.
- Prass, T.S. (2008). *Análise e Estimação de Medidas de Risco em Processos FIEGARCH*. Dissertação de Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- Ray, B.K. e Tsay, R. (2002). “Bayesian Methods for Change-Point Detection in Long-Range Dependent Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **23**(12), pp. 687–705.
- Robinson, P.M. (1995a). “Gaussian semiparametric estimation of long range dependence”. *The Annals of Statistics*, Vol. **23**(5), pp. 1630–1661.
- Robinson, P.M. (1995b). “Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence”. *The Annals of Statistics*, Vol. **23**(3), pp. 335–350.
- Sena Jr., M.R., Reisen, V. e Lopes, S.R.C. (2006). “Correlated Errors in the Parameters Estimation of the ARFIMA Model: A Simulated Study”. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, Vol. **35**(2), pp. 789–802.

- Shorack, G.R. e Wellner, J.A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics*. New York: Wiley.
- Sowell, F. (1992). “Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models”. *Journal of Econometrics*, Vol. **53**(1-3), pp. 165–188.
- Tan, M., Liu, T., Hou, J., Qin, X., Zhang, H. e Li, T. (2003). “2650-Year Beijing Stalagmite Layer Thickness and Temperature Reconstruction”. *Geophysical Research Letters*, Vol. **30**(12), pp. 1617–1620.
- Velasco, C. (1999). “Non-stationary log-periogram regression”. *Journal of Econometrics*, Vol. **91**(2), pp. 325–371.
- Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. New York: Hafner.

Apêndice A

As tabelas e gráficos apresentados a seguir exibem os resultados das estimações dos parâmetros k , $d^{(1)}$ e δ , para os casos complementares àqueles exibidos no Capítulo 6.

Nas simulações utilizamos três tamanhos amostrais diferentes, isto é, $n \in \{300, 500, 1000\}$. Para o ponto de mudança de regime k , optamos por estudar o comportamento da estimação deste parâmetro quando ele ocorre em três locais diferentes da série temporal: $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{2}$ e $\frac{3n}{4}$. Desta forma, se $n = 300$, os valores assumidos para k são 75, 150 e 225. Analogamente, se $n = 500$ ou $n = 1000$, os valores assumidos para k são 125, 250 e 375 e 250, 500 e 750, respectivamente.

Para cada uma das combinações de tamanho amostral n e ponto de mudança de regime k relacionadas acima, temos uma combinação de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$. Para contemplar um grande número de casos, utilizamos três tipos de combinações dos valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$. Temos uma combinação onde $d^{(1)} = 0,1$ e $d^{(2)} = 0,3$, ou seja, pertencem à região estacionária do processo ARFIMA(p, d, q). Também analisamos o caso em que ambos os valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ estão na região não-estacionária ARFIMA(p, d, q). Neste caso, $d^{(1)} = 0,6$ e $d^{(2)} = 0,8$. Por fim, simulamos e analisamos o caso em que um dos valores do parâmetro de diferenciação fracionária está na região estacionária e o outro está na região não estacionária. Para estas simulações, consideramos $d^{(1)} = 0,3$ e $d^{(2)} = 0,8$.

Note que os casos considerados nas simulações exibidas neste capítulo são idênticos àqueles apresentados no Capítulo 6, a menos da ordem de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$.

Ao todo, realizamos 1000 replicações para cada um dos casos descritos. Em seguida, calculamos a média de \hat{k} , valor que é utilizado para estimar o ponto de mudança de regime. Tendo esta estimativa, o passo seguinte é estimar os parâmetros $d^{(1)}$ e δ , onde $\delta = d^{(2)} - d^{(1)}$, segundo os métodos de estimação estudados no Capítulo 4.

No decorrer deste apêndice apresentamos os resultados encontrados a partir das simulações realizadas. Na Seção A.1, reportamos os resultados obtidos para um caso das simulações quando os valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ encontram-se na

região de estacionariedade dos processos ARFIMA(0, d , 0). Na Seção A.2, apresentamos resultados para um caso das simulações quando os valores de $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ estão ambos localizados na região de não-estacionariedade. Na Seção A.3, exibimos os resultados das simulações de um caso misto, ou seja, $d^{(1)}$ está na região de não-estacionariedade, enquanto $d^{(2)}$ está na região de estacionariedade. Em todos estes casos, $d^{(1)} < d^{(2)}$.

A.1 Caso Estacionário

Nesta seção exibimos os resultados das simulações realizadas quando os dois valores dos parâmetros de longa dependência $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ do modelo (5.49) estão na região de estacionariedade. Neste exemplo em particular, $d^{(1)} = 0,1$ e $d^{(2)} = 0,3$, ou seja, $\delta = 0,2$.

Conforme descrito no início deste apêndice, em primeiro lugar geramos as amostras que serão analisadas para cada caso considerado. Como são três tamanhos amostrais, cada um com três pontos de mudança de regime, temos no total 9 conjuntos de dados diferentes, cada um com 1000 séries temporais simuladas.

A Tabela A.1 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 300$ e $k \in \{75, 150, 225\}$.

Tabela A.1: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$ e $n = 300$.

k	média	vício	eqm
75	125,374	50,374	9334,082
150	146,520	-3,480	5095,424
225	182,619	-42,381	7697,547

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.1, são bons quando $k = 150$. Além disso, o eqm para este caso é o menor entre os três apresentados na tabela. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 75$ ou $k = 225$, o comportamento do estimador não repete o desempenho do caso $k = 150$. Quando $k = 75$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 225$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.2-A.7, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 300$ e $k = 75$

Tabela A.2: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,1766	0,0766	0,0126
$\hat{\delta}_{MV}$	0,0978	-0,1022	0,0211
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,1842	0,0842	0,0128
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1012	-0,0988	0,0177

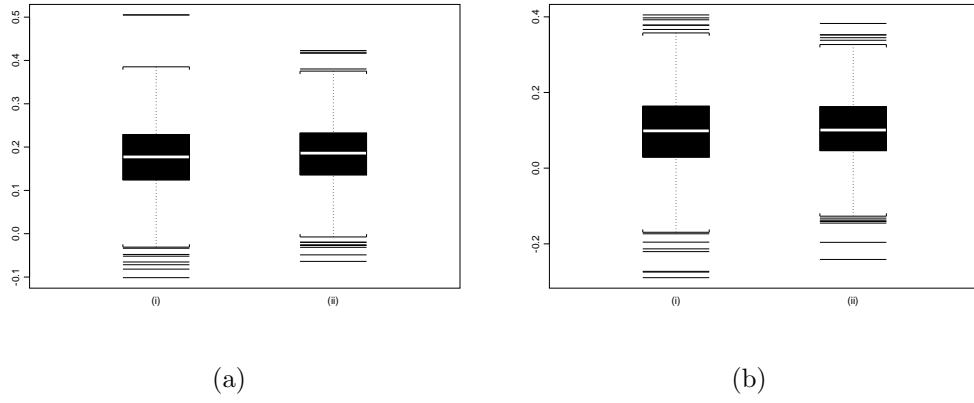
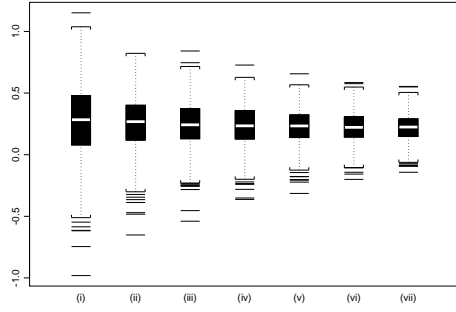


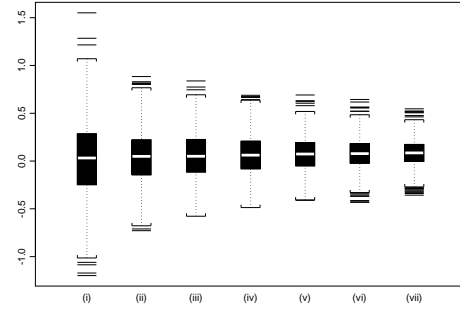
Figura A.1: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Tabela A.3: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

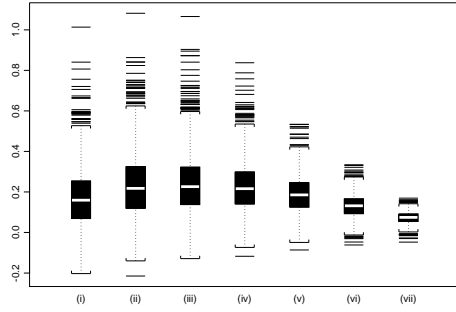
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2781	0,1781	0,1151	0,0258	-0,1742	0,1822
0,60	0,2555	0,1555	0,0680	0,0482	-0,1518	0,0985
0,65	0,2431	0,1431	0,0535	0,0572	-0,1428	0,0794
0,70	0,2352	0,1352	0,0450	0,0646	-0,1354	0,0618
0,75	0,2282	0,1282	0,0360	0,0744	-0,1256	0,0485
0,80	0,2220	0,1220	0,0312	0,0808	-0,1192	0,0401
0,85	0,2180	0,1180	0,0263	0,0849	-0,1151	0,0326
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1757	0,0757	0,0292	0,0797	-0,1203	0,0352
0,60	0,2355	0,1355	0,046	0,0709	-0,1291	0,0521
0,65	0,2464	0,1464	0,0464	0,0665	-0,1335	0,0532
0,70	0,2309	0,1309	0,0339	0,0795	-0,1205	0,0407
0,75	0,1885	0,0885	0,0165	0,1093	-0,1205	0,0227
0,80	0,1312	0,0312	0,0043	0,1219	-0,0781	0,0108
0,85	0,0726	-0,0274	0,0016	0,0968	-0,1032	0,0116
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,2773	0,1773	0,1140	0,0387	-0,1613	0,1671
0,60	0,256	0,156	0,0677	0,0519	-0,1481	0,0941
0,65	0,2449	0,1449	0,0527	0,0570	-0,1430	0,0748
0,70	0,2362	0,1362	0,0431	0,0677	-0,1323	0,0575
0,75	0,2304	0,1304	0,0344	0,0740	-0,1260	0,0458
0,80	0,2231	0,1231	0,0299	0,0806	-0,1194	0,0376
0,85	0,2192	0,1192	0,0255	0,0845	-0,1155	0,0317



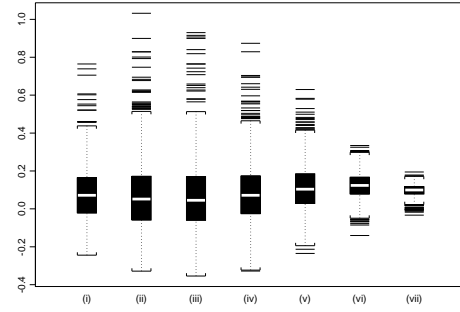
(a)



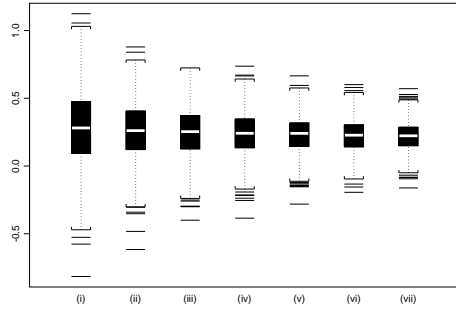
(b)



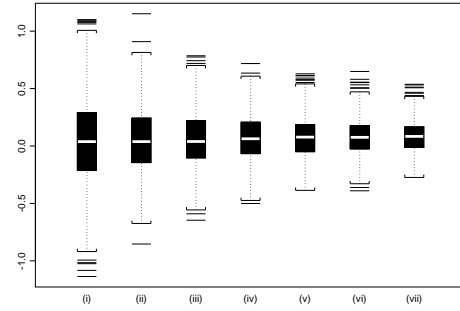
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.2: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Caso $n = 300$ e $k = 150$

Tabela A.4: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,0685	-0,0315	0,0063
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1961	-0,0039	0,0095
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,0849	-0,0151	0,0047
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1849	-0,0151	0,0077

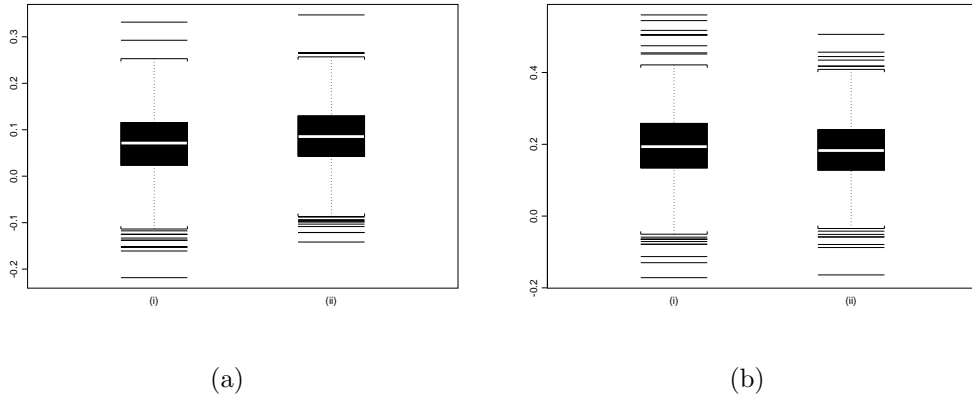
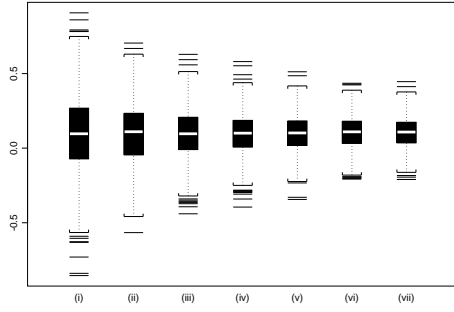


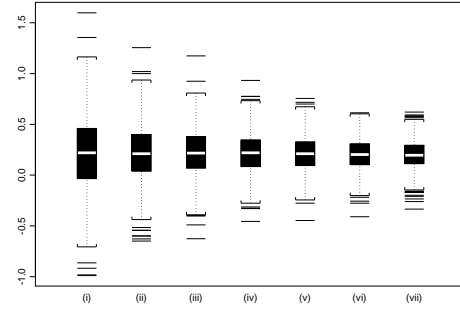
Figura A.3: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Tabela A.5: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

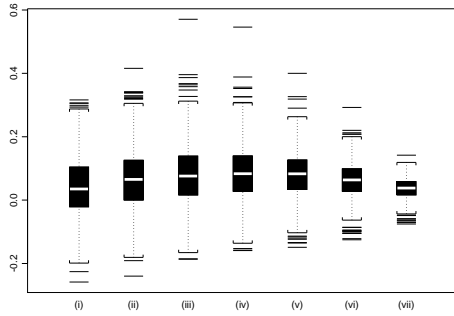
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,0925	-0,0075	0,0645	0,2213	0,0213	0,1312
0,60	0,0997	-0,0003	0,0364	0,2176	0,0176	0,0705
0,65	0,0980	-0,0020	0,0263	0,2197	0,0197	0,0518
0,70	0,0984	-0,0016	0,0200	0,2180	0,0180	0,0379
0,75	0,0998	-0,0002	0,0152	0,2106	0,0106	0,0291
0,80	0,1045	0,0045	0,0124	0,2021	0,0021	0,0235
0,85	0,1043	0,0043	0,0101	0,2014	0,0014	0,0189
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,0408	-0,0592	0,0117	0,1746	-0,0254	0,0203
0,60	0,0678	-0,0322	0,0104	0,2469	0,0469	0,0407
0,65	0,0805	-0,0195	0,0093	0,2576	0,0576	0,0424
0,70	0,0868	-0,0132	0,0078	0,2458	0,0458	0,0332
0,75	0,0820	-0,0180	0,0055	0,2114	0,0458	0,0151
0,80	0,0631	-0,0369	0,0043	0,1658	-0,0342	0,0061
0,85	0,0364	-0,0636	0,0050	0,1038	-0,0962	0,0101
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,0953	-0,0047	0,0619	0,2130	0,0130	0,1214
0,60	0,1013	0,0013	0,0345	0,2123	0,0123	0,0664
0,65	0,1002	0,0002	0,0242	0,2114	0,0114	0,0483
0,70	0,1003	0,0003	0,0183	0,2097	0,0097	0,0373
0,75	0,1006	0,0006	0,0135	0,2063	0,0063	0,0278
0,80	0,1042	0,0042	0,0112	0,1994	-0,0006	0,0218
0,85	0,1047	0,0047	0,0092	0,1969	-0,0031	0,0173



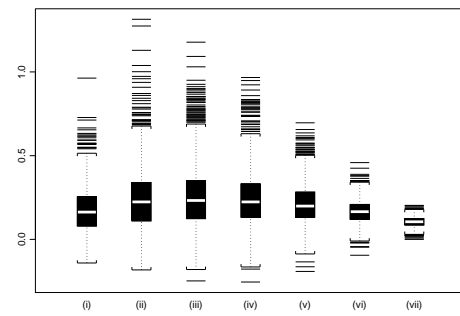
(a)



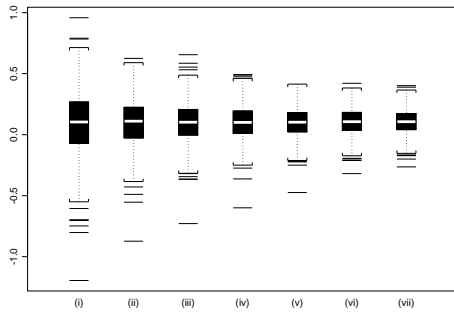
(b)



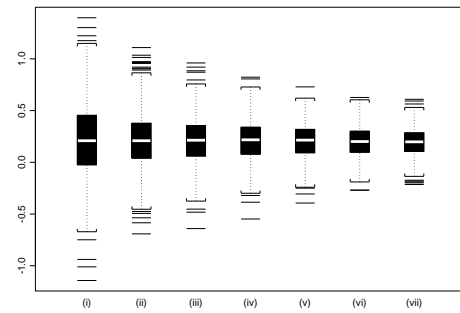
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.4: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Caso $n = 300$ e $k = 225$

Tabela A.6: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,0723	-0,0277	0,0050
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1340	-0,0660	0,0161
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,0835	-0,0165	0,0038
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1371	-0,0629	0,0130

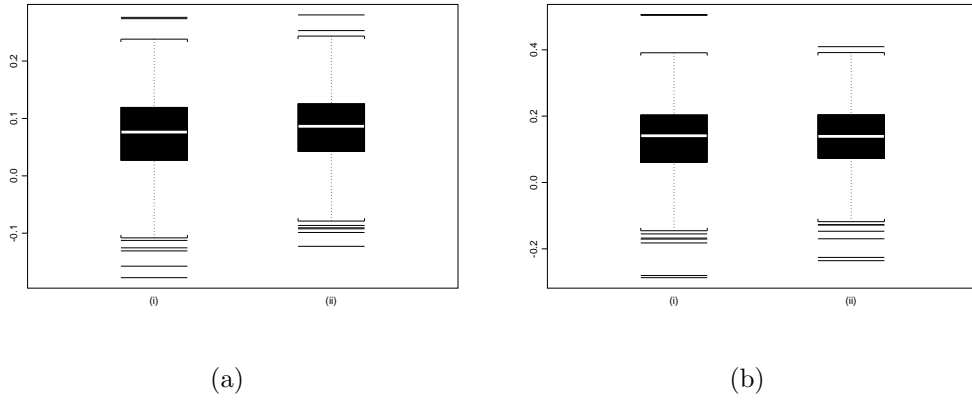
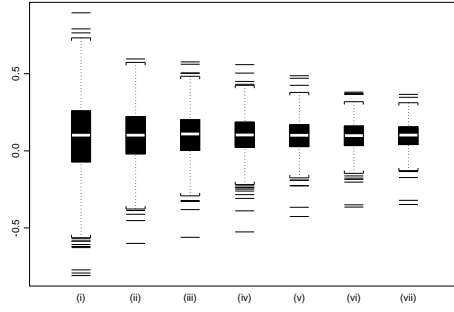


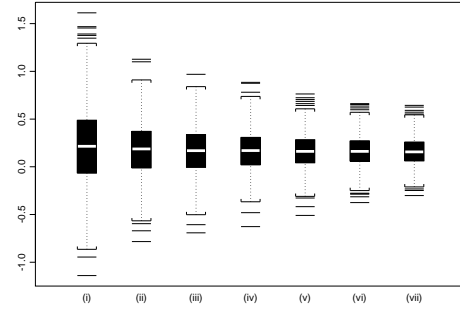
Figura A.5: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Tabela A.7: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

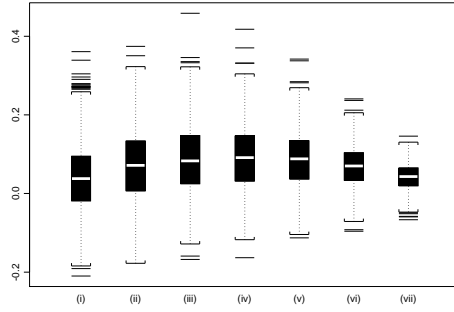
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,0860	-0,0140	0,0632	0,2164	0,0164	0,1655
0,60	0,0968	-0,0032	0,0330	0,1823	-0,0177	0,0793
0,65	0,0994	-0,0006	0,0229	0,1667	-0,0333	0,0578
0,70	0,1000	0,0000	0,0166	0,1663	-0,0337	0,0420
0,75	0,0987	-0,0013	0,0122	0,1619	-0,0381	0,0325
0,80	0,0965	-0,0035	0,0094	0,1605	-0,0395	0,0260
0,85	0,0969	-0,0031	0,0076	0,1556	-0,0444	0,0221
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,0412	-0,0588	0,0111	0,1491	-0,0509	0,0268
0,60	0,0734	-0,0266	0,0092	0,1776	-0,0224	0,0360
0,65	0,0866	-0,0134	0,0081	0,1713	-0,0287	0,0349
0,70	0,0914	-0,0086	0,0066	0,1532	-0,0468	0,0243
0,75	0,0856	-0,0144	0,0049	0,1313	-0,0468	0,0166
0,80	0,0676	-0,0324	0,0036	0,1012	-0,0988	0,0140
0,85	0,0412	-0,0588	0,0044	0,0660	-0,1340	0,0189
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,0919	-0,0081	0,0606	0,2029	0,0029	0,1451
0,60	0,1026	0,0026	0,0308	0,1719	-0,0281	0,0754
0,65	0,1050	0,0050	0,0209	0,1584	-0,0416	0,0536
0,70	0,1027	0,0027	0,0153	0,1610	-0,0390	0,0401
0,75	0,1008	0,0008	0,0113	0,1582	-0,0418	0,0310
0,80	0,0996	-0,0004	0,0088	0,1532	-0,0468	0,0259
0,85	0,0994	-0,0006	0,0073	0,1501	-0,0499	0,0215



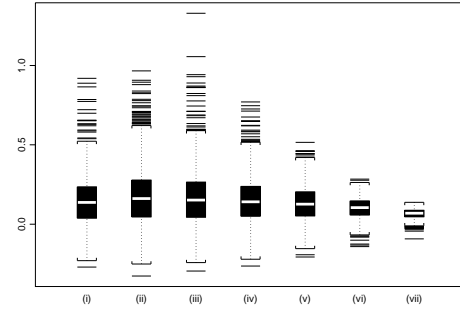
(a)



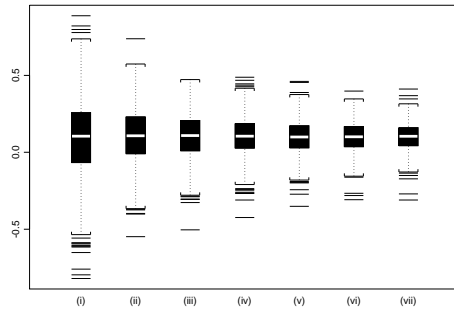
(b)



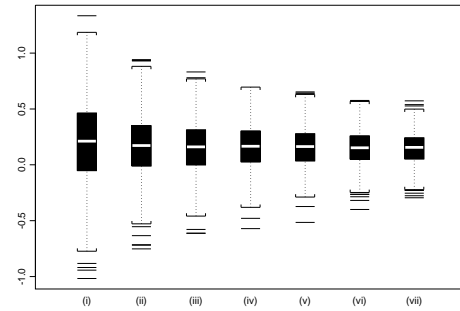
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.6: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 75$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,1000$, onde $\alpha = 0,70$. O vício encontrado foi de zero. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = 0,2029$, onde $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0029. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPB\alpha}^{(1)}$, com 0,0036. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0130.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 150$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,1002$, onde $\alpha = 0,65$. O vício encontrado foi de 0,0002. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = 0,1994$, onde $\alpha = 0,80$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0006$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ e δ foi $\hat{d}_{GPB\alpha}$, com 0,0043 e 0,0061, respectivamente, com $\alpha = 0,75$ para ambos os casos.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 225$, foram $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,1000$, onde $\alpha = 0,70$. O vício encontrado foi de zero. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{MV} = 0,1456$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0029. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPB\alpha}^{(1)}$, com 0,0036. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0038.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.2-A.7, veja as Figuras A.1-A.6, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela A.8 exibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 500$ e $k \in \{125, 250, 375\}$.

Tabela A.8: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$ e $n = 500$.

k	média	vício	eqm
125	186,189	61,189	18348,003
250	250,852	0,852	8447,848
375	326,205	-48,795	15511,905

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.8, são bastante bons. Praticamente não há vício quando $k = 250$, além do eqm para este caso ser o menor entre os três apresentados na tabela. Isto também ocorreu quando $n = 300$ e $k = \frac{n}{2}$, conforme resultados exibidos na Tabela A.8. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 125$ ou $k = 375$, o comportamento do estimador não repetiu o desempenho do caso $k = 250$. Quando

$k = 125$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 375$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.9-A.14, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 500$ e $k = 125$

Tabela A.9: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,1628	0,0628	0,0085
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1237	-0,0763	0,0124
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,1636	0,0636	0,0079
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1216	-0,0784	0,0110

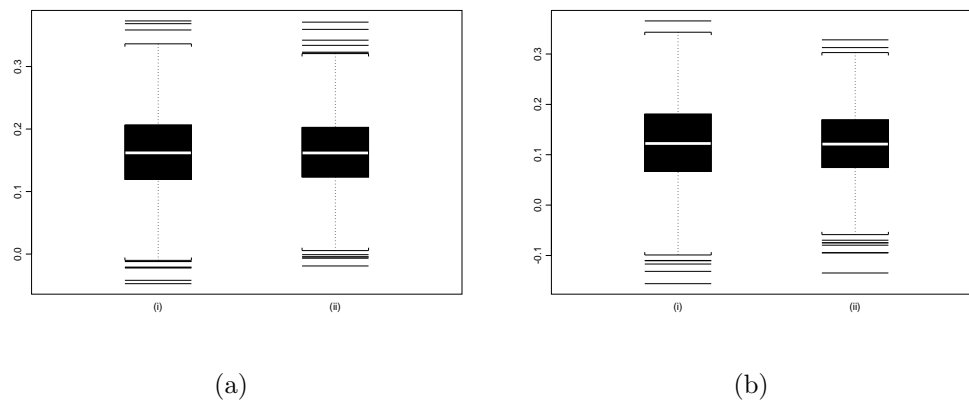
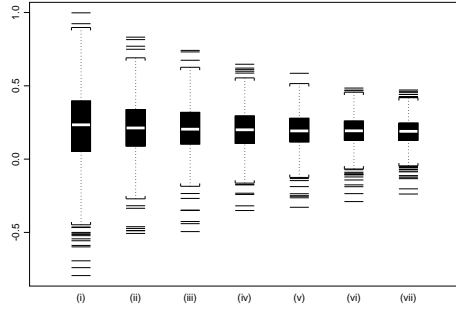


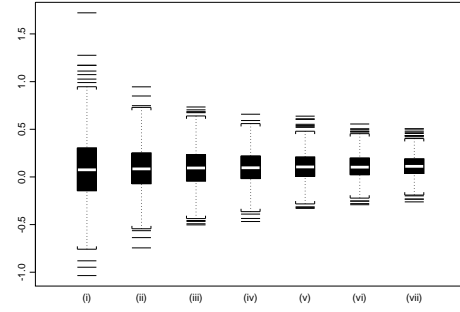
Figura A.7: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Tabela A.10: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

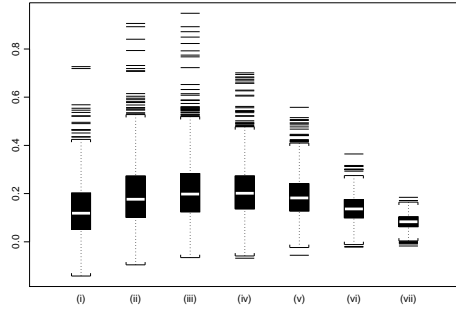
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2202	0,1202	0,0840	0,0856	-0,1144	0,1319
0,60	0,2127	0,1127	0,0503	0,0897	-0,1103	0,0698
0,65	0,2068	0,1068	0,0384	0,0942	-0,1058	0,0527
0,70	0,2010	0,1010	0,0296	0,1002	-0,0998	0,0408
0,75	0,1952	0,0952	0,0240	0,1060	-0,0940	0,0323
0,80	0,1914	0,0914	0,0196	0,1094	-0,0906	0,0260
0,85	0,1870	0,0870	0,0166	0,1135	-0,0865	0,0217
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1348	0,0348	0,0153	0,0987	-0,1013	0,0221
0,60	0,1967	0,0967	0,0286	0,1014	-0,0986	0,0328
0,65	0,2164	0,1164	0,0323	0,0974	-0,1026	0,0370
0,70	0,2139	0,1139	0,0264	0,1056	-0,0944	0,0328
0,75	0,1888	0,0888	0,0158	0,1276	-0,0944	0,0204
0,80	0,1389	0,0389	0,0048	0,1504	-0,0496	0,0082
0,85	0,0827	-0,0173	0,0012	0,1266	-0,0734	0,0064
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,2282	0,1282	0,0834	0,0880	-0,1120	0,1248
0,60	0,2209	0,1209	0,0506	0,0876	-0,1124	0,0678
0,65	0,2132	0,1132	0,0384	0,0924	-0,1076	0,0505
0,70	0,2063	0,1063	0,0300	0,0985	-0,1015	0,0396
0,75	0,2006	0,1006	0,0236	0,1048	-0,0952	0,0304
0,80	0,1960	0,0960	0,0193	0,1099	-0,0901	0,0241
0,85	0,1914	0,0914	0,0163	0,1127	-0,0873	0,0202



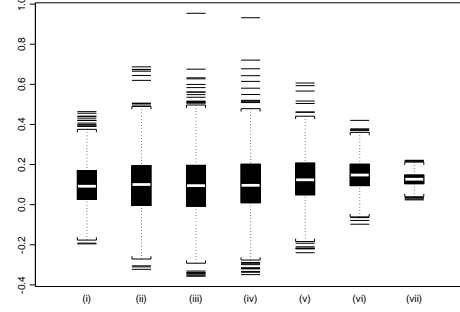
(a)



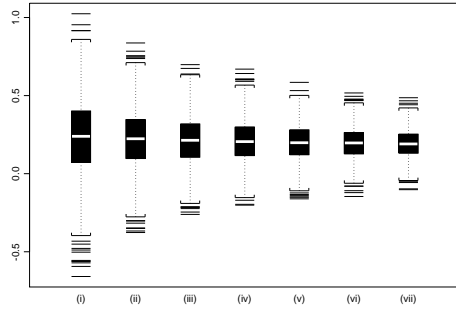
(b)



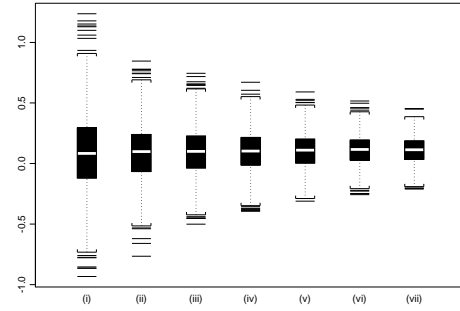
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.8: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Caso $n = 500$ e $k = 250$

Tabela A.11: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,0830	-0,0170	0,0032
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1995	-0,0005	0,0056
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,0874	-0,0126	0,0025
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1897	-0,0103	0,0044

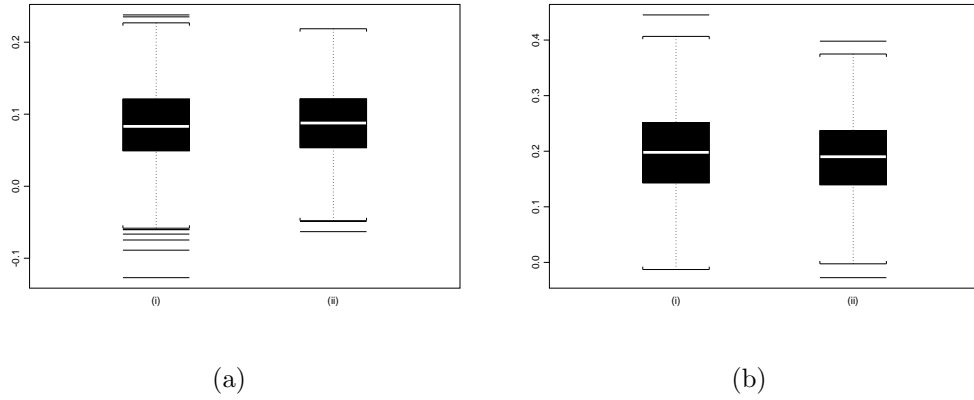
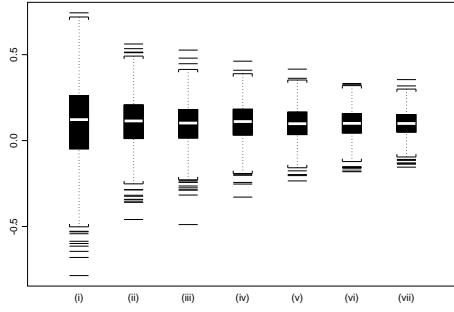


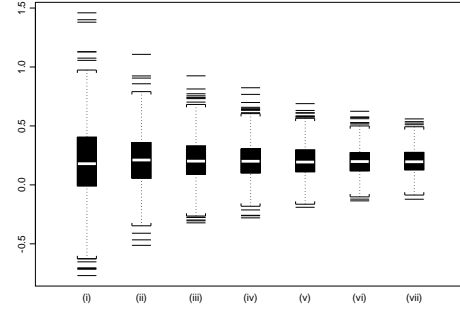
Figura A.9: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Tabela A.12: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

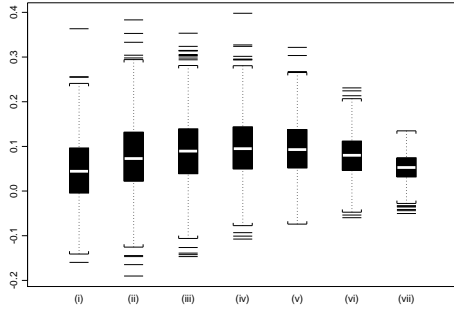
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,1022	0,0022	0,0537	0,1913	-0,0087	0,1038
0,60	0,1091	0,0091	0,0230	0,2070	0,0070	0,0486
0,65	0,0970	-0,0030	0,0161	0,2067	0,0067	0,0338
0,70	0,1056	0,0056	0,0127	0,2043	0,0043	0,0255
0,75	0,0983	-0,0017	0,0093	0,2032	0,0032	0,0192
0,80	0,1001	0,0001	0,0072	0,1989	-0,0011	0,0141
0,85	0,0994	-0,0006	0,0057	0,1997	-0,0003	0,0115
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,0465	-0,0535	0,0082	0,1612	-0,0388	0,0146
0,60	0,0760	-0,0240	0,0070	0,2363	0,0363	0,0292
0,65	0,0888	-0,0112	0,0060	0,2520	0,0520	0,0323
0,70	0,0973	-0,0027	0,0052	0,2539	0,0539	0,0281
0,75	0,0959	-0,0041	0,0040	0,2318	0,0539	0,0147
0,80	0,0801	-0,0199	0,0028	0,1898	-0,0102	0,0050
0,85	0,0526	-0,0474	0,0032	0,1262	-0,0738	0,0064
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,1065	0,0065	0,0519	0,1890	-0,0110	0,0991
0,60	0,0991	-0,0009	0,0234	0,2063	0,0063	0,0458
0,65	0,0981	-0,0019	0,0154	0,2046	0,0046	0,0311
0,70	0,0975	-0,0025	0,0110	0,2058	0,0058	0,0233
0,75	0,0973	-0,0027	0,0081	0,2040	0,0040	0,0174
0,80	0,0994	-0,0006	0,0064	0,2020	0,0020	0,0128
0,85	0,0995	-0,0005	0,0053	0,2024	0,0024	0,0104



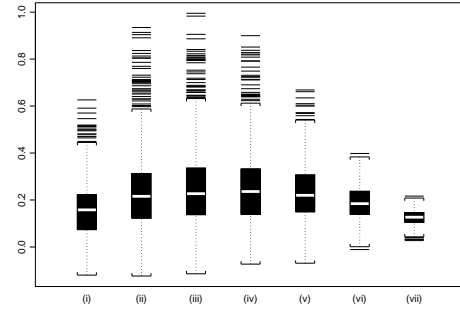
(a)



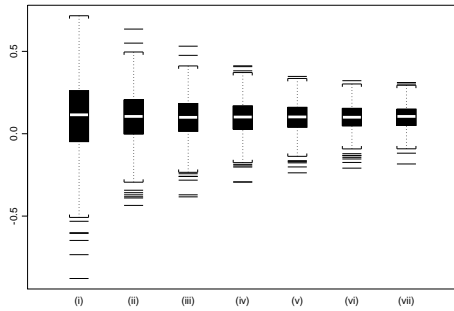
(b)



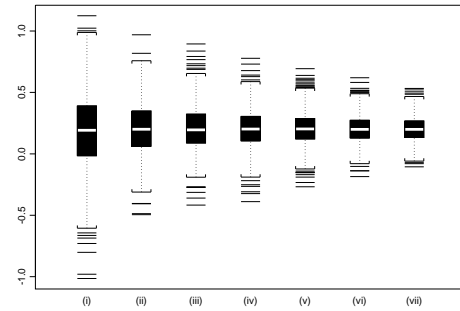
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.10: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Caso $n = 500$ e $k = 375$

Tabela A.13: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,0843	-0,0157	0,0023
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1417	-0,0583	0,0094
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,0864	-0,0136	0,0019
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1423	-0,0577	0,0081

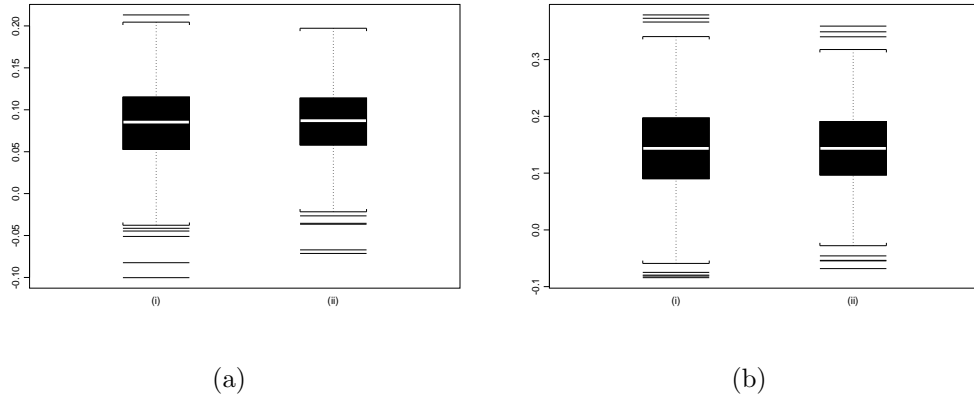
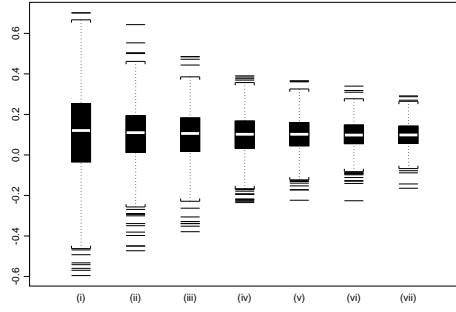


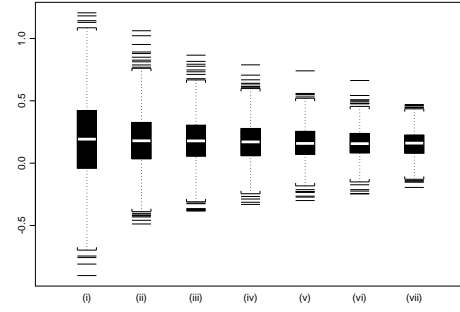
Figura A.11: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

Tabela A.14: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

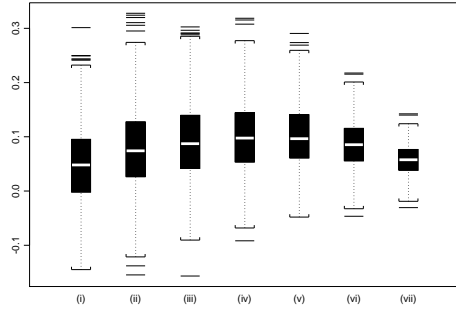
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,1065	0,0065	0,0450	0,1945	-0,0055	0,1164
0,60	0,1015	0,0015	0,0216	0,1846	-0,0154	0,0540
0,65	0,0986	-0,0014	0,0156	0,1783	-0,0217	0,0382
0,70	0,0987	-0,0013	0,0104	0,1734	-0,0266	0,0291
0,75	0,0987	-0,0013	0,0074	0,1637	-0,0363	0,0213
0,80	0,0986	-0,0014	0,0053	0,1599	-0,0401	0,0170
0,85	0,0991	-0,0009	0,0041	0,1562	-0,0438	0,0138
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,0481	-0,0519	0,0078	0,1478	-0,0522	0,0189
0,60	0,0778	-0,0222	0,0065	0,1924	-0,0076	0,0289
0,65	0,0919	-0,0081	0,0052	0,1814	-0,0186	0,0244
0,70	0,1008	0,0008	0,0045	0,1668	-0,0332	0,0200
0,75	0,1011	0,0011	0,0033	0,1527	-0,0332	0,0132
0,80	0,0858	-0,0142	0,0021	0,1209	-0,0791	0,0104
0,85	0,0571	-0,0429	0,0027	0,0877	-0,1123	0,0137
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,1093	0,0093	0,0447	0,1962	-0,0038	0,1017
0,60	0,0968	-0,0032	0,0188	0,1792	-0,0208	0,0493
0,65	0,1004	0,0004	0,0139	0,1755	-0,0245	0,0380
0,70	0,0987	-0,0013	0,0099	0,1679	-0,0321	0,0268
0,75	0,1003	0,0003	0,0070	0,1692	-0,0308	0,0209
0,80	0,1023	0,0023	0,0049	0,1527	-0,0473	0,0166
0,85	0,1007	0,0007	0,0039	0,1620	-0,0380	0,0130



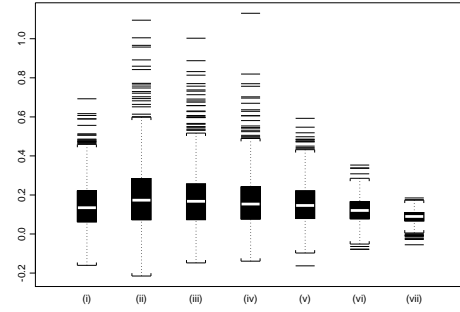
(a)



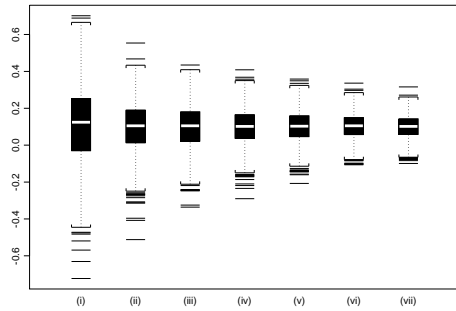
(b)



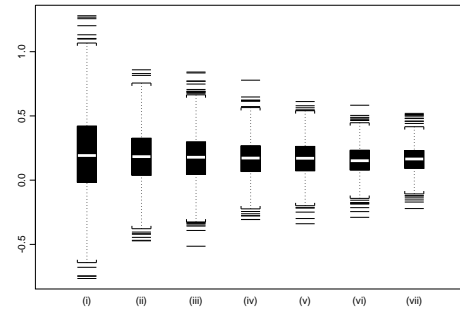
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.12: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 125$, foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)} = 0,1389$, onde $\alpha = 0,80$. O vício encontrado foi de 0,0389. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPHBa} = 0,1504$, onde $\alpha = 0,80$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0496$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$, com 0,0012, onde $\alpha = 0,85$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com 0,0064, onde $\alpha = 0,85$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,1001$, onde $\alpha = 0,80$. O vício encontrado foi de 0,0001. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,1997$, onde $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0003$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ e $\hat{\delta}$ foram $\hat{d}_{LW}^{(1)}$ e $\hat{\delta}_{LW}$, respectivamente. Para o primeiro estimador, o valor do eqm ficou em 0,0025, enquanto para o segundo, este valor foi de 0,0044.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 375$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,1003$, onde $\alpha = 0,75$. O vício encontrado foi de 0,0003. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = 0,1962$, onde $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0038$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ e $\hat{\delta}$ foram $\hat{d}_{LW}^{(1)}$ e $\hat{\delta}_{LW}$, respectivamente. Para o primeiro estimador, o valor do eqm ficou em 0,0019, enquanto para o segundo, este valor foi de 0,0081.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.9-A.14, veja as Figuras A.7-A.12, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela A.15 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 1000$ e $k \in \{250, 500, 750\}$.

Tabela A.15: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$ e $n = 1000$.

k	média	vício	eqm
250	306,998	56,998	33862,618
500	504,343	4,343	13000,733
750	705,718	-44,282	26644,494

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.36, são bastante bons. Praticamente não há vício quando $k = 500$, além do eqm para este caso ser o menor entre os três apresentados na tabela. Perceba que este comportamento também ocorreu quando $k = \frac{n}{2}$, onde $n = 300$ e $n = 500$,

conforme apresentamos nas Tabelas A.1 e A.8, respectivamente. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 250$ ou $k = 750$, o comportamento do estimador não repetiu o desempenho do caso $k = 500$. Quando $k = 250$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 750$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.16-A.21, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 1000$ e $k = 250$

Tabela A.16: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,1376	0,0376	0,0046
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1550	-0,0450	0,0062
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,1335	0,0335	0,0037
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1488	-0,0512	0,0055

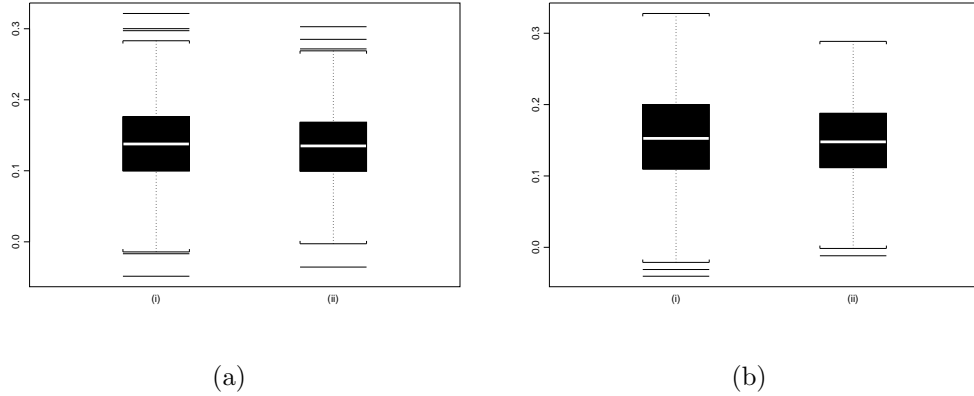
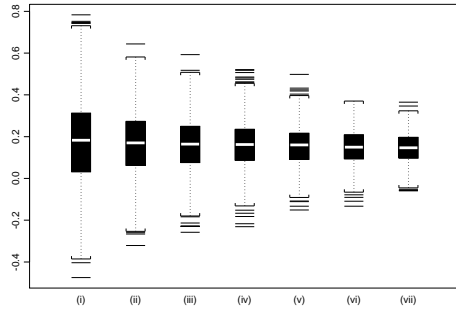


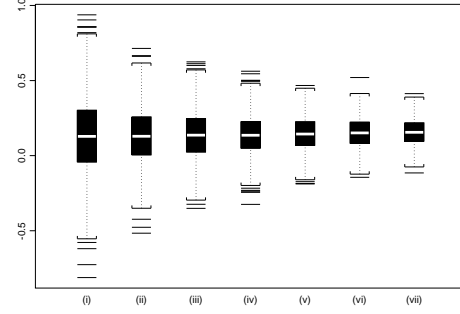
Figura A.13: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Tabela A.17: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

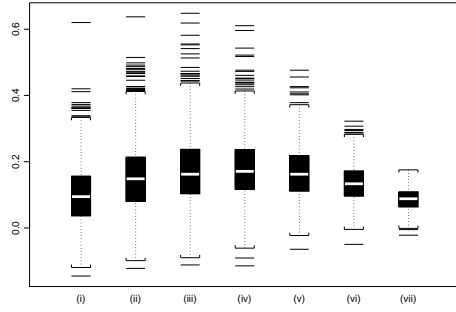
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,1740	0,0740	0,0497	0,1277	-0,0723	0,0767
0,60	0,1691	0,0691	0,0288	0,1308	-0,0692	0,0397
0,65	0,1654	0,0654	0,0221	0,1359	-0,0641	0,0292
0,70	0,1618	0,0618	0,0173	0,1385	-0,0615	0,0226
0,75	0,1564	0,0564	0,0128	0,1458	-0,0542	0,0163
0,80	0,1507	0,0507	0,0098	0,1513	-0,0487	0,0123
0,85	0,1461	0,0461	0,0076	0,1544	-0,0456	0,0096
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1018	0,0018	0,0089	0,1150	-0,0850	0,0150
0,60	0,1547	0,0547	0,0146	0,1333	-0,0667	0,0199
0,65	0,1734	0,0734	0,0168	0,1388	-0,0612	0,0233
0,70	0,1803	0,0803	0,0160	0,1462	-0,0538	0,0234
0,75	0,1684	0,0684	0,0110	0,1664	-0,0538	0,0166
0,80	0,1347	0,0347	0,0043	0,1858	-0,0142	0,0071
0,85	0,0863	-0,0137	0,0013	0,1662	-0,0338	0,0025
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,1928	0,0928	0,0555	0,1081	-0,0919	0,0780
0,60	0,1829	0,0829	0,0303	0,1173	-0,0827	0,0393
0,65	0,1792	0,0792	0,0232	0,1219	-0,0781	0,0291
0,70	0,1745	0,0745	0,0179	0,1263	-0,0737	0,0227
0,75	0,1681	0,0681	0,0137	0,1340	-0,0660	0,0166
0,80	0,1623	0,0623	0,0107	0,1393	-0,0607	0,0129
0,85	0,1571	0,0571	0,0086	0,1433	-0,0567	0,0103



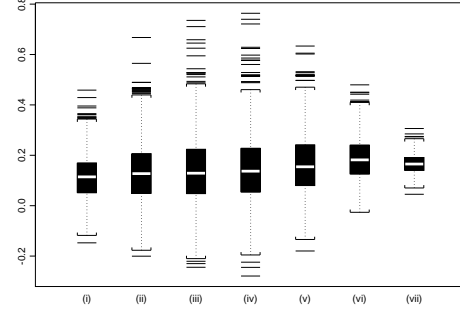
(a)



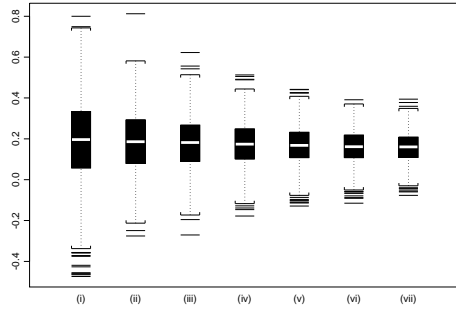
(b)



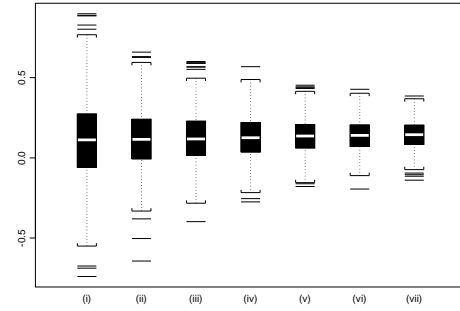
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.14: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Caso $n = 1000$ e $k = 500$

Tabela A.18: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,0928	-0,0072	0,0014
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1977	-0,0023	0,0028
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,0903	-0,0097	0,0012
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1881	-0,0119	0,0022

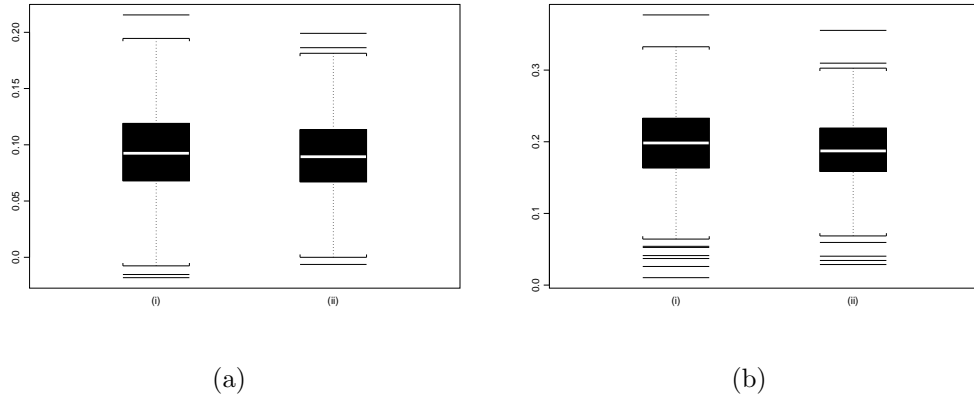
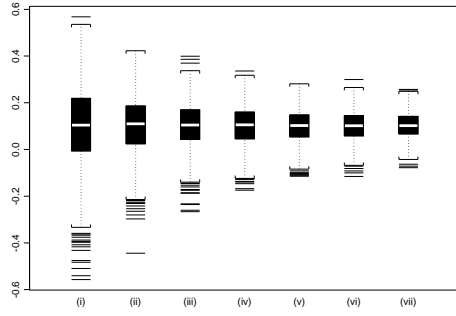


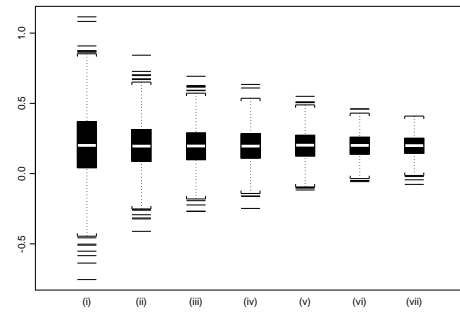
Figura A.15: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Tabela A.19: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

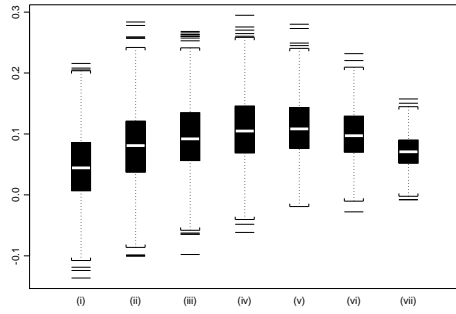
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,0952	-0,0048	0,0309	0,2079	0,0079	0,0614
0,60	0,1017	0,0017	0,0151	0,2006	0,0006	0,0311
0,65	0,1027	0,0027	0,0100	0,1969	-0,0031	0,0202
0,70	0,1026	0,0026	0,0071	0,1953	-0,0047	0,0150
0,75	0,0995	-0,0005	0,0050	0,2000	0,0000	0,0107
0,80	0,1005	0,0005	0,0039	0,1982	-0,0018	0,0078
0,85	0,1022	0,0022	0,0029	0,1978	-0,0022	0,0060
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,0459	-0,0541	0,0064	0,1575	-0,0425	0,0098
0,60	0,0803	-0,0197	0,0043	0,2140	0,0140	0,0140
0,65	0,0952	-0,0048	0,0035	0,2316	0,0316	0,0163
0,70	0,1063	0,0063	0,0031	0,2420	0,0420	0,0167
0,75	0,1101	0,0101	0,0026	0,2405	0,0420	0,0127
0,80	0,0999	-0,0001	0,0017	0,2140	0,0140	0,0053
0,85	0,0703	-0,0297	0,0016	0,1597	-0,0403	0,0027
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,0994	-0,0006	0,0294	0,2051	0,0051	0,0572
0,60	0,1023	0,0023	0,0138	0,1997	-0,0003	0,0276
0,65	0,1028	0,0028	0,0093	0,1992	-0,0008	0,0185
0,70	0,1037	0,0037	0,0064	0,1979	-0,0021	0,0138
0,75	0,1013	0,0013	0,0046	0,2003	0,0003	0,0096
0,80	0,1027	0,0027	0,0036	0,1980	-0,0020	0,0070
0,85	0,1029	0,0029	0,0027	0,1987	-0,0013	0,0055



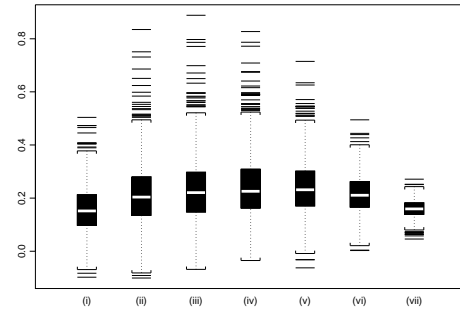
(a)



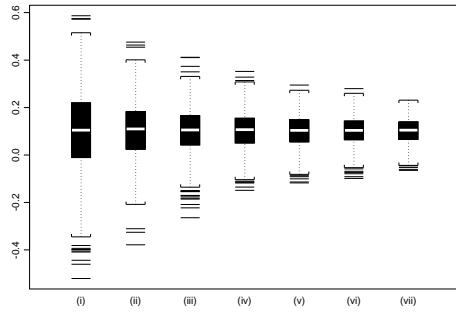
(b)



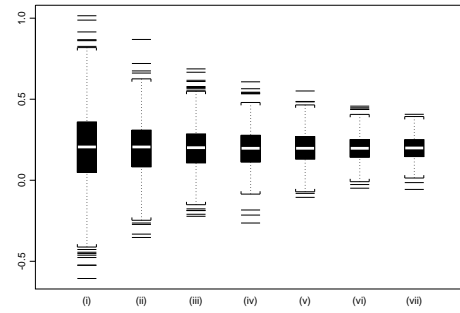
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.16: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Caso $n = 1000$ e $k = 750$

Tabela A.20: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,7976	-0,0024	0,0037
$\hat{\delta}_{MV}$	-0,2043	-0,0043	0,0046
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,7237	-0,0763	0,0088
$\hat{\delta}_{LW}$	-0,1098	0,0902	0,0111

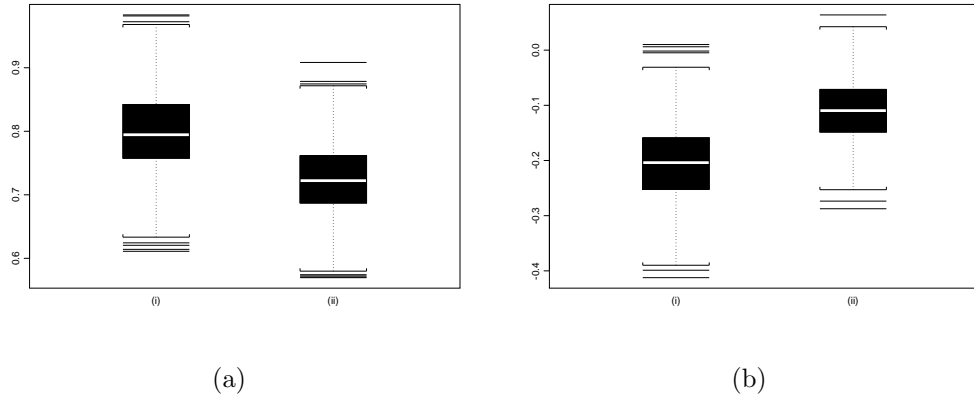
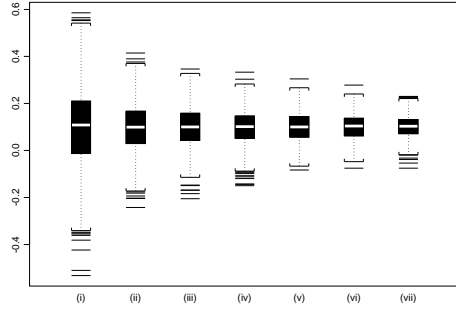


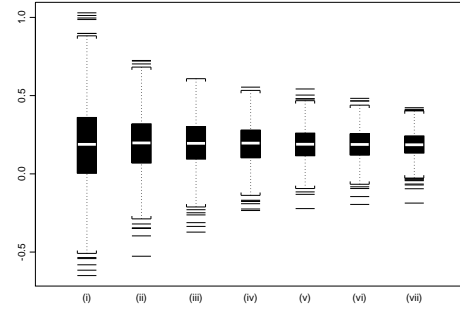
Figura A.17: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Tabela A.21: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

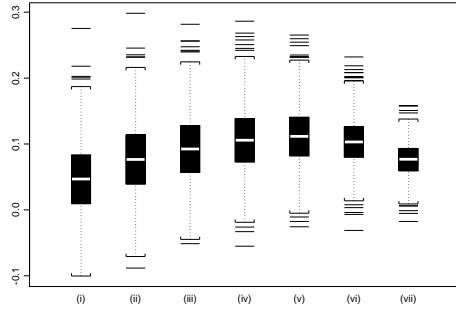
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8204	0,0204	0,0435	-0,2157	-0,0157	0,0695
0,60	0,8340	0,0340	0,0234	-0,2337	-0,0337	0,0339
0,65	0,8364	0,0364	0,0175	-0,2360	-0,0360	0,0249
0,70	0,8321	0,0321	0,0131	-0,2331	-0,0331	0,0185
0,75	0,8301	0,0301	0,0099	-0,2307	-0,0307	0,0140
0,80	0,8295	0,0295	0,0083	-0,2291	-0,0291	0,0114
0,85	0,8275	0,0275	0,0066	-0,2270	-0,0270	0,0087
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5732	-0,2268	0,0596	0,0093	0,2093	0,0486
0,60	0,6054	-0,1946	0,0454	-0,0073	0,1927	0,0440
0,65	0,6054	-0,1946	0,0454	-0,0053	0,1947	0,0461
0,70	0,6054	-0,1946	0,0454	-0,0032	0,1968	0,0477
0,75	0,6672	-0,1328	0,0383	-0,0566	0,1434	0,0388
0,80	0,4981	-0,3019	0,0915	0,1092	0,3092	0,0974
0,85	0,3182	-0,4818	0,2326	0,2237	0,4237	0,1805
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,8576	0,0576	0,0441	-0,2388	-0,0388	0,0616
0,60	0,8409	0,0409	0,0236	-0,2339	-0,0339	0,0324
0,65	0,8362	0,0362	0,0172	-0,2320	-0,0320	0,0230
0,70	0,8286	0,0286	0,0127	-0,2253	-0,0253	0,0174
0,75	0,8251	0,0251	0,0095	-0,2217	-0,0217	0,0131
0,80	0,8240	0,0240	0,0077	-0,2198	-0,0198	0,0099
0,85	0,8192	0,0192	0,0061	-0,2151	-0,0151	0,0076



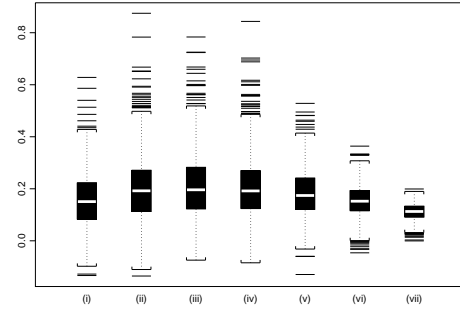
(a)



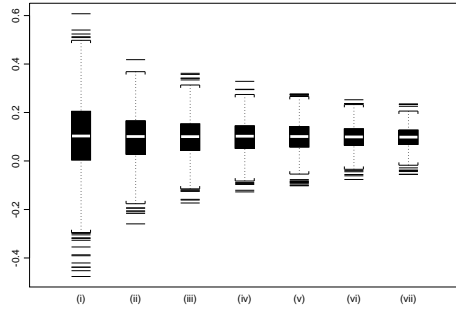
(b)



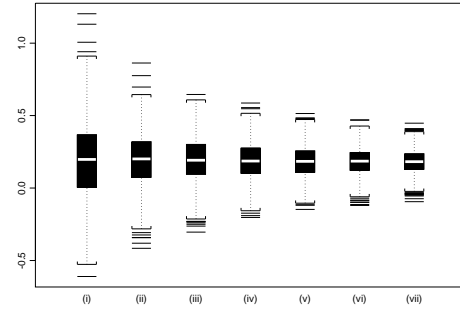
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.18: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)} = 0,1018$, onde $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de 0,0018. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,1858$, onde $\alpha = 0,80$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0142$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$, onde $\alpha = 0,85$ para os dois estimadores, com 0,0013 e 0,0025, respectivamente.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 500$, foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)} = 0,0999$, onde $\alpha = 0,80$. O vício encontrado foi de $-0,0001$. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,2000$, onde $\alpha = 0,75$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de zero. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ e δ foram $\hat{d}_{LW}^{(1)}$ e $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0012 e 0,0022, respectivamente.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,1$, quando $k = 750$, foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)} = 0,1001$, onde $\alpha = 0,65$. O vício encontrado foi de 0,0001. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPHBa} = 0,2004$, onde $\alpha = 0,60$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0004. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ e δ foram $\hat{d}_{LW}^{(1)}$ e $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0009 e 0,0037, respectivamente.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.16-A.21, veja as Figuras A.17-A.18, onde apresentamos os box-plots dos estimadores.

A.2 Caso Não-Estacionário

Nesta seção exibimos os resultados das simulações realizadas quando os dois valores dos parâmetros de longa dependência $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ do modelo (5.49) estão na região de não-estacionariedade. Neste exemplo em particular, $d^{(1)} = 0,6$ e $d^{(2)} = 0,8$, ou seja, $\delta = 0,2$.

Conforme descrito no início deste apêndice, em primeiro lugar geramos as amostras que serão analisadas para cada caso considerado. Como são três tamanhos amostrais, cada um com três pontos de mudança de regime, temos no total 9 conjuntos de dados diferentes, cada um com 1000 séries temporais simuladas.

A Tabela A.22 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 300$ e $k \in \{75, 150, 225\}$, respectivamente.

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.22, são bastante bons. Praticamente não há vício quando $k = 150$, além do eqm para este caso ser o menor entre os três apresentados na tabela. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 75$ ou $k = 225$, o comportamento do estimador não repetiu o desempenho do caso $k = 150$. Quando $k = 75$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 225$, \hat{k} foi

Tabela A.22: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$ e $n = 300$.

k	média	vício	eqm
75	117,244	42,244	7877,776
150	149,699	-0,301	3524,975
225	194,176	-30,824	5538,504

subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.23-A.28, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 300$ e $k = 75$

Tabela A.23: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,6593	0,0593	0,0134
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1218	-0,0782	0,0197
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,6357	0,0357	0,0102
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1543	-0,0457	0,0114

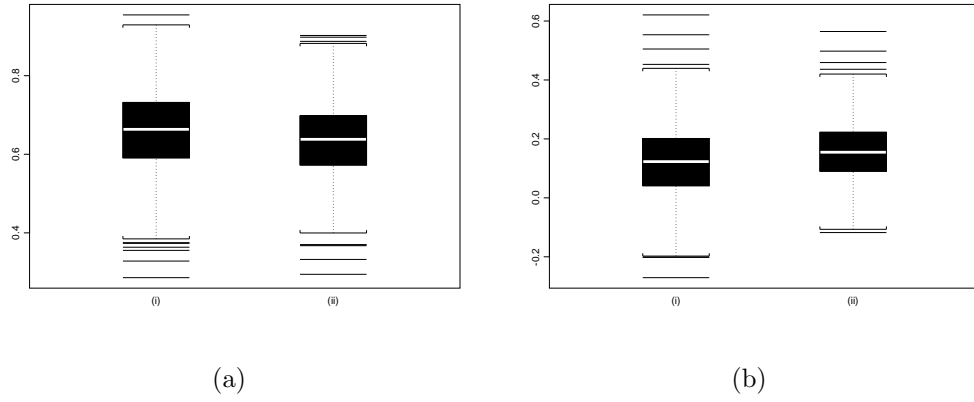
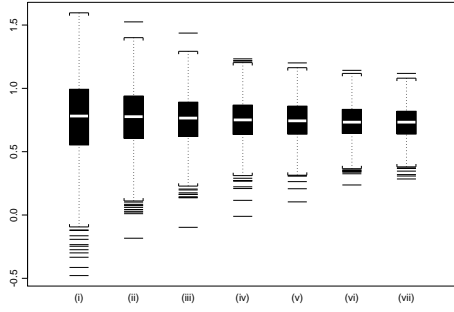


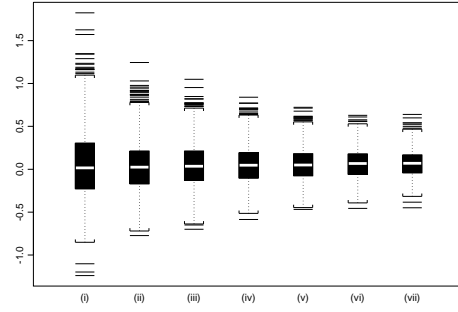
Figura A.19: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Tabela A.24: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

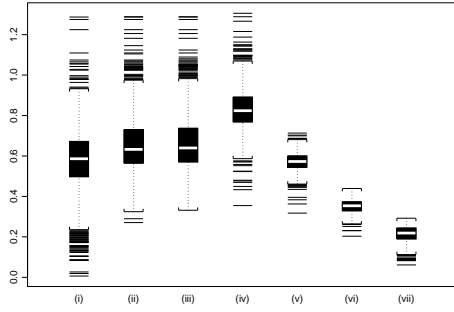
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,7597	0,1597	0,1395	0,0535	-0,1465	0,1907
0,60	0,7659	0,1659	0,0862	0,0373	-0,1627	0,1186
0,65	0,7536	0,1536	0,0665	0,0468	-0,1532	0,0904
0,70	0,7472	0,1472	0,0538	0,0499	-0,1501	0,0730
0,75	0,7424	0,1424	0,0457	0,0579	-0,1421	0,0578
0,80	0,7354	0,1354	0,0390	0,0641	-0,1359	0,0482
0,85	0,7311	0,1311	0,0342	0,0675	-0,1325	0,0423
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5749	-0,0251	0,0292	0,1704	-0,0296	0,0323
0,60	0,6589	0,0589	0,0229	0,1607	-0,0393	0,0384
0,65	0,6671	0,0671	0,0240	0,1754	-0,0246	0,0433
0,70	0,8323	0,2323	0,0652	-0,0172	-0,2172	0,0615
0,75	0,5712	-0,0288	0,0028	0,2553	-0,2172	0,0134
0,80	0,3504	-0,2496	0,0633	0,3509	0,1509	0,0251
0,85	0,2136	-0,3864	0,1508	0,2231	0,0231	0,0020
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,7483	0,1483	0,1222	0,0712	-0,1288	0,1592
0,60	0,7527	0,1527	0,0745	0,0676	-0,1324	0,0958
0,65	0,7467	0,1467	0,0601	0,0744	-0,1256	0,074
0,70	0,7445	0,1445	0,0506	0,0700	-0,1300	0,0604
0,75	0,7414	0,1414	0,0438	0,0757	-0,1243	0,0486
0,80	0,7357	0,1357	0,0383	0,0796	-0,1204	0,0408
0,85	0,7323	0,1323	0,0342	0,0825	-0,1175	0,0354



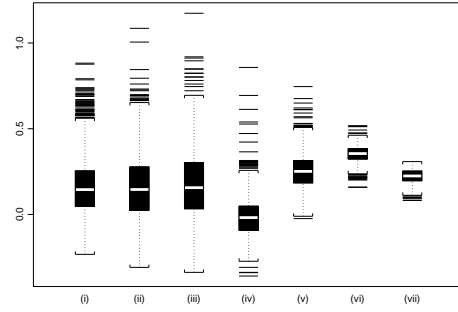
(a)



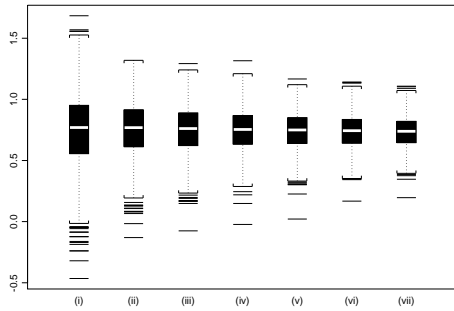
(b)



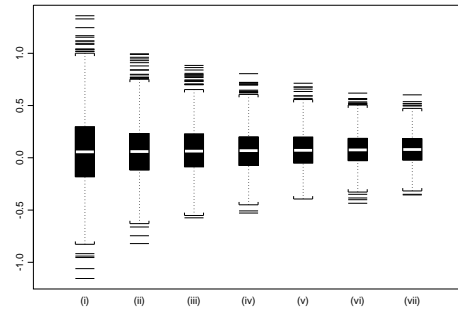
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.20: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 75$.

Caso $n = 300$ e $k = 150$

Tabela A.25: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,5679	-0,0321	0,0063
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1981	-0,0019	0,0095
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,5387	-0,0613	0,0083
$\hat{\delta}_{LW}$	0,2113	0,0113	0,0091

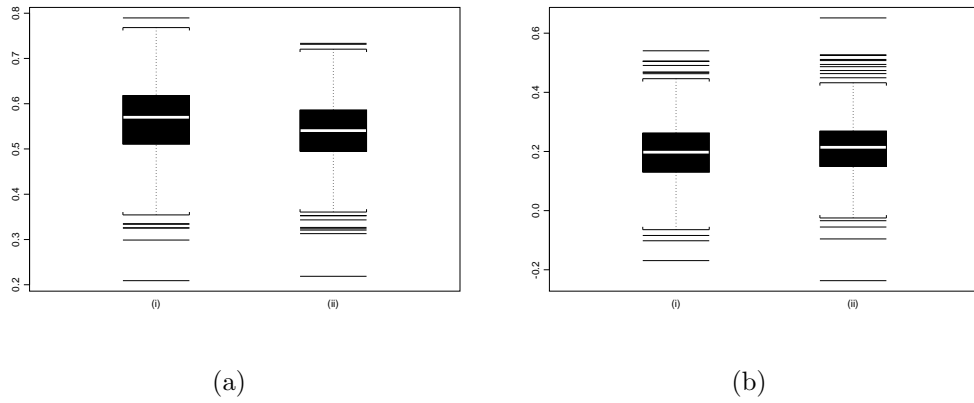
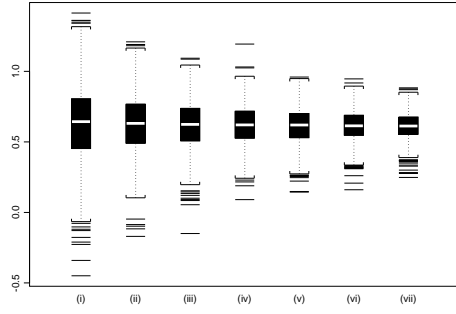


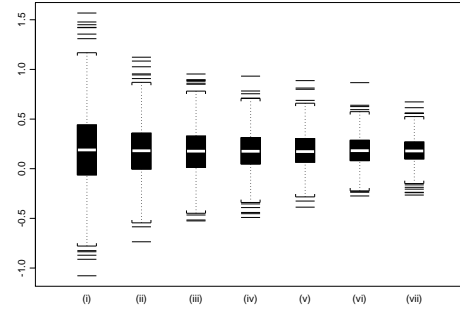
Figura A.21: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Tabela A.26: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

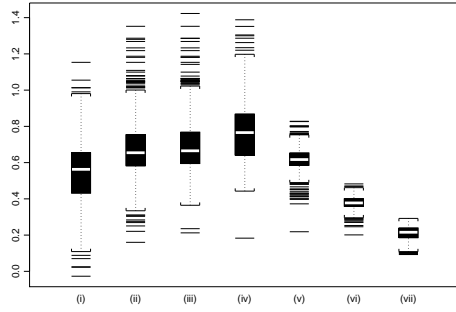
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6271	0,0271	0,0733	0,1871	-0,0129	0,1510
0,60	0,6220	0,0220	0,0401	0,1824	-0,0176	0,0731
0,65	0,6177	0,0177	0,0291	0,1821	-0,0179	0,0547
0,70	0,6181	0,0181	0,0203	0,1805	-0,0195	0,0389
0,75	0,6141	0,0141	0,0162	0,1830	-0,0170	0,0301
0,80	0,6141	0,0141	0,0120	0,1837	-0,0163	0,0227
0,85	0,6127	0,0127	0,0094	0,1851	-0,0149	0,0175
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
0,50	0,5430	-0,0570	0,0324	0,1876	-0,0124	0,0418
0,60	0,6767	0,0767	0,0268	0,1082	-0,0918	0,0407
0,65	0,6920	0,0920	0,0289	0,0994	-0,1006	0,0412
0,70	0,7675	0,1675	0,0539	0,0235	-0,1765	0,0620
0,75	0,6170	0,0170	0,0037	0,1519	-0,1765	0,0147
0,80	0,3778	-0,2222	0,0505	0,2801	0,0801	0,0101
0,85	0,2116	-0,3884	0,1523	0,2033	0,0033	0,0019
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
0,50	0,6307	0,0307	0,0717	0,1789	-0,0211	0,1348
0,60	0,6233	0,0233	0,0399	0,1809	-0,0191	0,0677
0,65	0,6182	0,0182	0,0291	0,1810	-0,0190	0,0500
0,70	0,6150	0,0150	0,0210	0,1787	-0,0213	0,0364
0,75	0,6116	0,0116	0,0165	0,1780	-0,0220	0,0294
0,80	0,6126	0,0126	0,0123	0,1733	-0,0267	0,0238
0,85	0,6126	0,0126	0,0098	0,1694	-0,0306	0,0201



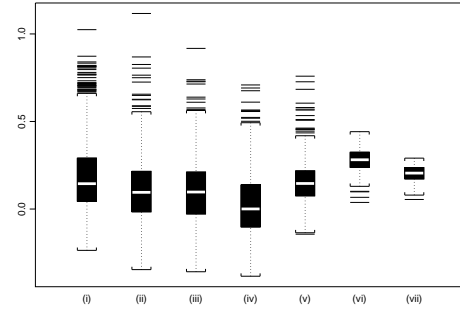
(a)



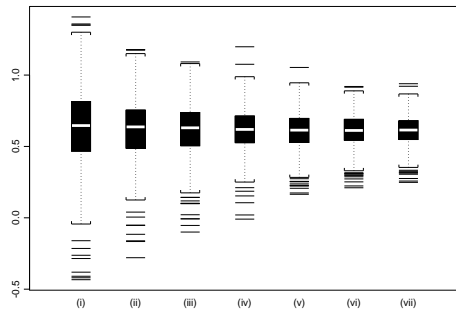
(b)



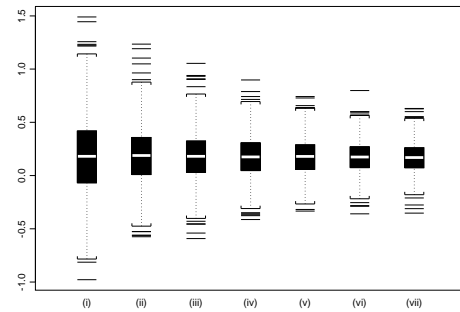
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.22: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Caso $n = 300$ e $k = 225$

Tabela A.27: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,5728	-0,0272	0,0048
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1554	-0,0446	0,0145
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,5394	-0,0606	0,0073
$\hat{\delta}_{LW}$	0,2044	0,0044	0,0094

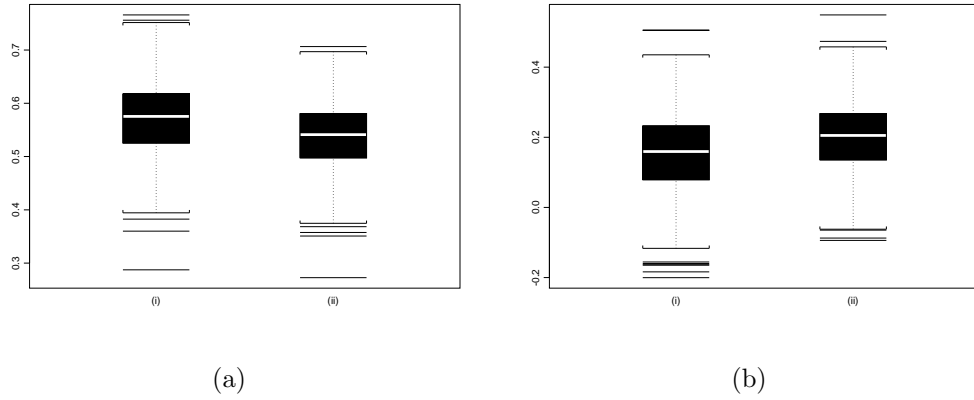
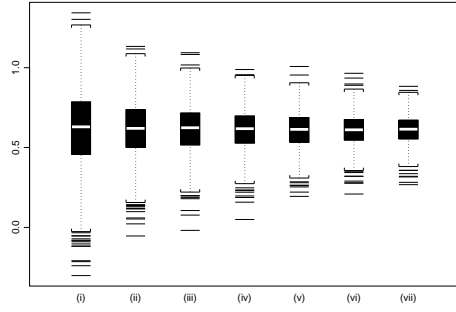


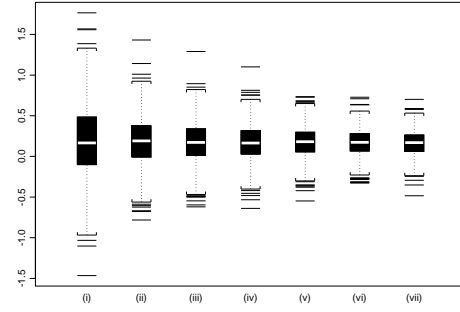
Figura A.23: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

Tabela A.28: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

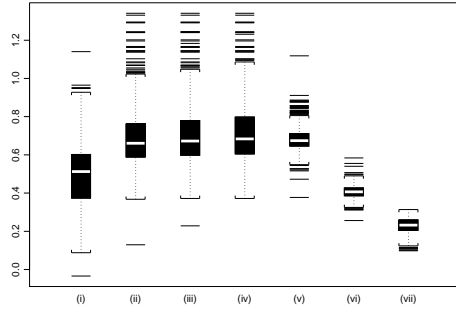
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6183	0,0183	0,0664	0,1883	-0,0117	0,1804
0,60	0,6183	0,0183	0,0324	0,1844	-0,0156	0,0842
0,65	0,6141	0,0141	0,0230	0,1809	-0,0191	0,0605
0,70	0,6114	0,0114	0,0172	0,1741	-0,0259	0,0472
0,75	0,6084	0,0084	0,0125	0,1751	-0,0249	0,0344
0,80	0,6094	0,0094	0,0096	0,1696	-0,0304	0,0279
0,85	0,6112	0,0112	0,0076	0,1639	-0,0361	0,0235
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,4928	-0,1072	0,0370	0,2511	0,0511	0,0551
0,60	0,6893	0,0893	0,0301	0,0893	-0,1107	0,0498
0,65	0,7024	0,1024	0,0326	0,0772	-0,1228	0,0500
0,70	0,7181	0,1181	0,0380	0,0591	-0,1409	0,0518
0,75	0,6805	0,0805	0,0098	0,0669	-0,1409	0,0268
0,80	0,4073	-0,1927	0,0382	0,2116	0,0116	0,0036
0,85	0,2310	-0,3690	0,1377	0,1574	-0,0426	0,0039
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,6224	0,0224	0,0651	0,2118	0,0118	0,1568
0,60	0,6180	0,0180	0,0292	0,1942	-0,0058	0,0748
0,65	0,6163	0,0163	0,0208	0,1890	-0,0110	0,0543
0,70	0,6143	0,0143	0,0160	0,1789	-0,0211	0,0425
0,75	0,6111	0,0111	0,0117	0,1805	-0,0195	0,0321
0,80	0,6110	0,0110	0,0090	0,1760	-0,0240	0,0262
0,85	0,6105	0,0105	0,0072	0,1697	-0,0303	0,0217



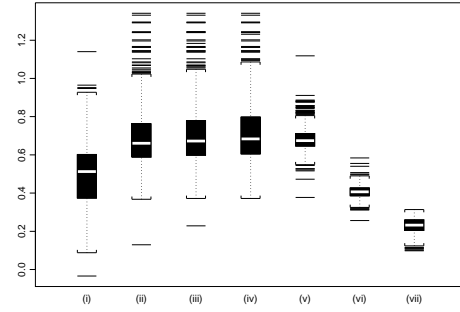
(a)



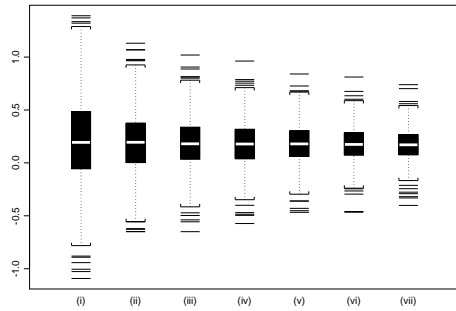
(b)



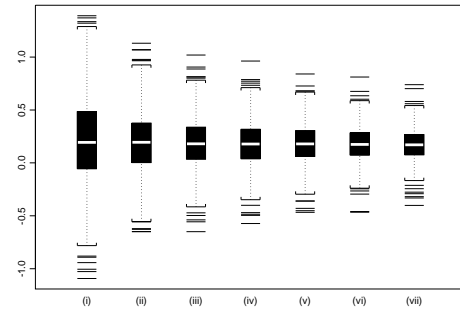
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.24: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 225$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 75$, foi $\hat{d}_{LW}^{(1)} = 0,6357$. O vício encontrado foi de 0,0357. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPB\alpha} = 0,0231$, onde $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0110$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{LW}^{(1)}$, com 0,0102. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPB\alpha}$, com 0,0020, onde $\alpha = 0,85$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 150$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,6116$, onde $\alpha = 0,75$. O vício encontrado foi de 0,0116. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{MV} = 0,1981$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0019$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPB\alpha}^{(1)}$, com 0,0037. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0091.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 225$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,6084$, onde $\alpha = 0,75$. O vício encontrado foi de 0,0084. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = 0,1890$, onde $\alpha = 0,65$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0110$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0048. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPB\alpha}$, com 0,0036, onde $\alpha = 0,80$.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.23-A.28, veja as Figuras A.19-A.24, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela A.29 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 500$ e $k \in \{125, 250, 375\}$, respectivamente.

Tabela A.29: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$ e $n = 500$.

k	média	vício	eqm
125	195,449	70,449	19093,767
250	253,725	3,725	8307,729
375	325,677	-49,323	15069,145

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.29, são bastante bons. Praticamente não há vício quando $k = 250$, além do eqm para este caso ser o menor entre os três apresentados na tabela. Isto também ocorreu quando $n = 300$ e $k = \frac{n}{2}$, conforme resultados exibidos na Tabela A.22. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 125$ ou $k = 375$, o comportamento do estimador não repetiu o desempenho do caso

$k = 250$. Quando $k = 125$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 375$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.31-A.35, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 500$ e $k = 125$

Tabela A.30: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,6740	0,0740	0,0102
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1187	-0,0813	0,0135
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,6435	0,0435	0,0068
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1494	-0,0506	0,0075

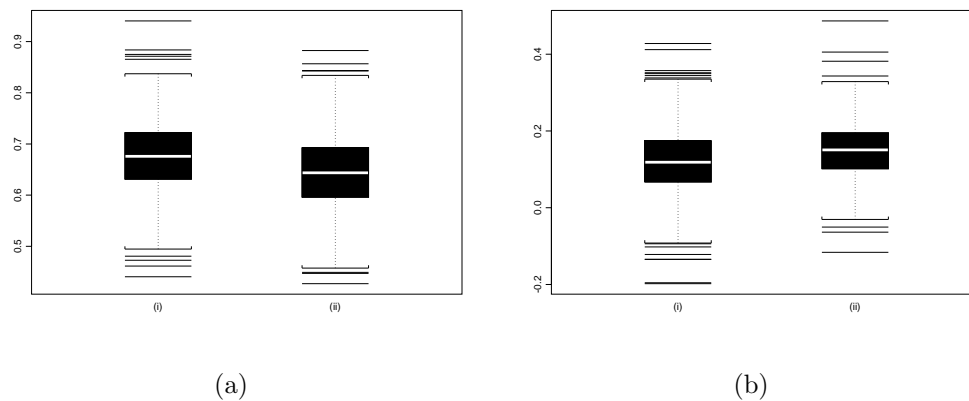
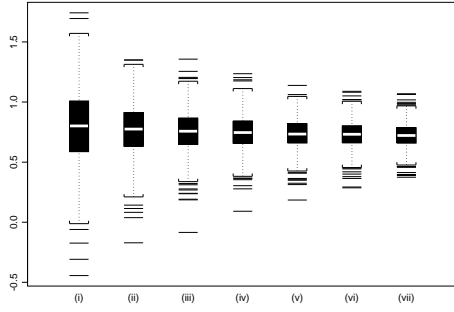


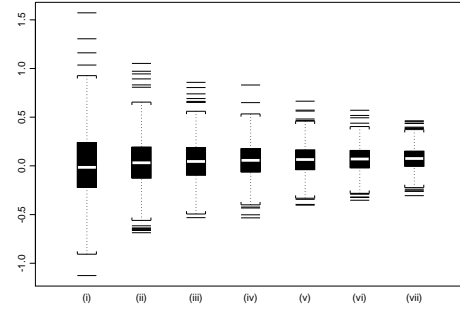
Figura A.25: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Tabela A.31: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

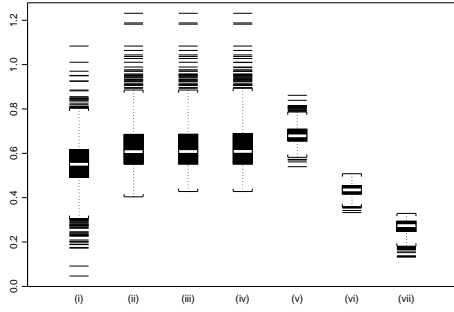
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,7887	0,1887	0,1215	0,0138	-0,1862	0,1618
0,60	0,7668	0,1668	0,0679	0,0338	-0,1662	0,0860
0,65	0,7586	0,1586	0,0540	0,0467	-0,1533	0,0668
0,70	0,7477	0,1477	0,0427	0,0552	-0,1448	0,0519
0,75	0,7374	0,1374	0,0343	0,0649	-0,1351	0,0410
0,80	0,7290	0,1290	0,0284	0,0720	-0,1280	0,0337
0,85	0,7220	0,1220	0,0242	0,0766	-0,1234	0,0289
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5471	-0,0529	0,0191	0,1789	-0,0211	0,0200
0,60	0,6320	0,0320	0,0137	0,1833	-0,0167	0,0258
0,65	0,6332	0,0332	0,0138	0,2205	0,0205	0,0343
0,70	0,6350	0,0350	0,0144	0,2361	0,0361	0,0390
0,75	0,6830	0,0830	0,0085	0,1402	0,0361	0,0096
0,80	0,4345	-0,1655	0,0282	0,3852	0,1852	0,0384
0,85	0,2696	-0,3304	0,1104	0,2529	0,0529	0,0041
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,7646	0,1646	0,0958	0,0542	-0,1458	0,1242
0,60	0,7621	0,1621	0,0607	0,0598	-0,1402	0,0685
0,65	0,7588	0,1588	0,0489	0,0655	-0,1345	0,0522
0,70	0,7539	0,1539	0,0419	0,0675	-0,1325	0,0419
0,75	0,7479	0,1479	0,0360	0,0744	-0,1256	0,0336
0,80	0,7422	0,1422	0,0318	0,0776	-0,1224	0,0294
0,85	0,7365	0,1365	0,0281	0,0796	-0,1204	0,0262



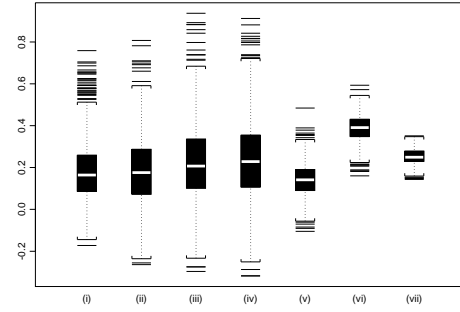
(a)



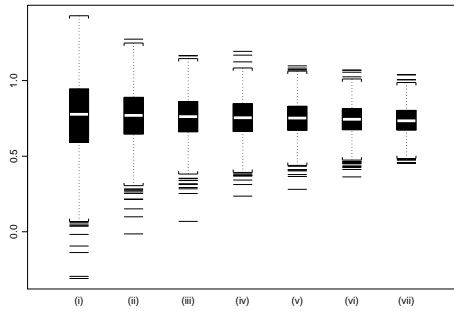
(b)



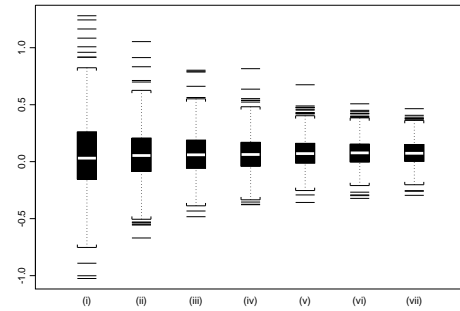
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.26: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 125$.

Caso $n = 500$ e $k = 250$

Tabela A.32: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,5841	-0,0159	0,0037
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1929	-0,0071	0,0065
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,5378	-0,0622	0,0065
$\hat{\delta}_{LW}$	0,2297	0,0297	0,0057

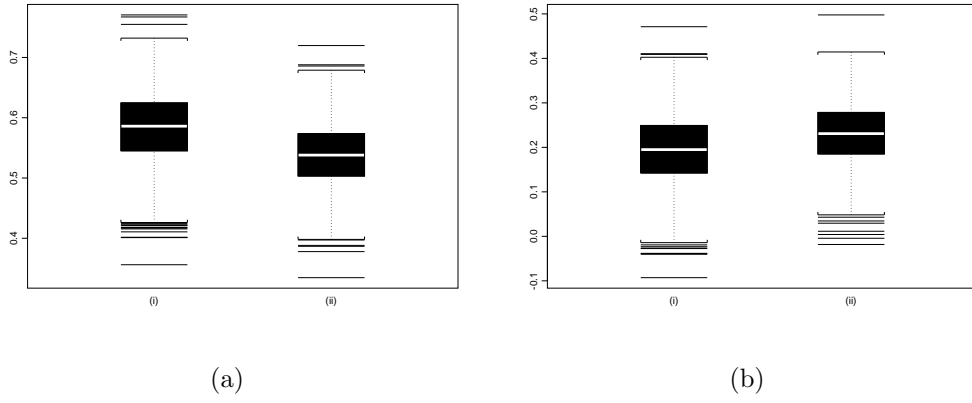
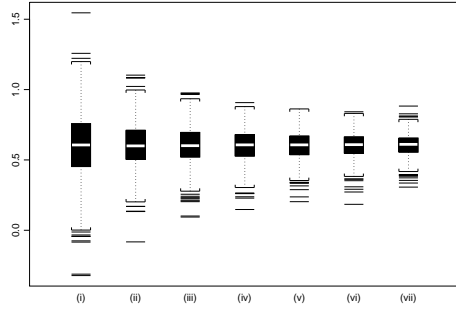


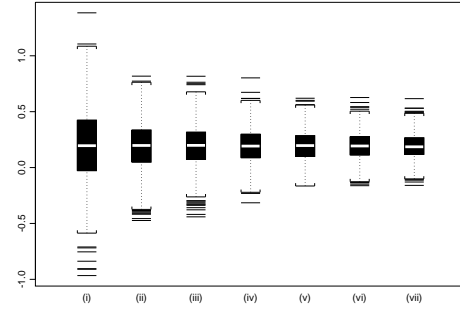
Figura A.27: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Tabela A.33: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

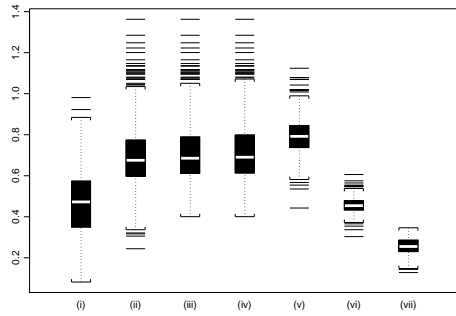
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5991	-0,0009	0,0540	0,1977	-0,0023	0,1100
0,60	0,6031	0,0031	0,0257	0,1939	-0,0061	0,0507
0,65	0,6026	0,0026	0,0168	0,1948	-0,0052	0,0380
0,70	0,6028	0,0028	0,0118	0,1941	-0,0059	0,0256
0,75	0,6019	0,0019	0,0091	0,1954	-0,0046	0,0196
0,80	0,6027	0,0027	0,0073	0,1940	-0,0060	0,0152
0,85	0,6041	0,0041	0,0057	0,1936	-0,0064	0,0119
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,4646	-0,1354	0,0402	0,2411	0,0411	0,0340
0,60	0,6964	0,0964	0,0301	0,1017	-0,0983	0,0382
0,65	0,7101	0,1101	0,0310	0,1001	-0,0999	0,0394
0,70	0,7145	0,1145	0,0324	0,1023	-0,0977	0,0401
0,75	0,7922	0,1922	0,0437	0,0042	-0,0977	0,0481
0,80	0,4556	-0,1444	0,0219	0,3155	0,1155	0,0182
0,85	0,2565	-0,3435	0,1194	0,2392	0,0392	0,0031
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,6028	0,0028	0,0515	0,2034	0,0034	0,0973
0,60	0,5988	-0,0012	0,0248	0,2046	0,0046	0,0482
0,65	0,6011	0,0011	0,0168	0,2010	0,0010	0,0354
0,70	0,6024	0,0024	0,0124	0,2017	0,0017	0,0254
0,75	0,6035	0,0035	0,0091	0,1988	-0,0012	0,0187
0,80	0,6045	0,0045	0,0073	0,1972	-0,0028	0,0144
0,85	0,6072	0,0072	0,0055	0,1943	-0,0057	0,0113



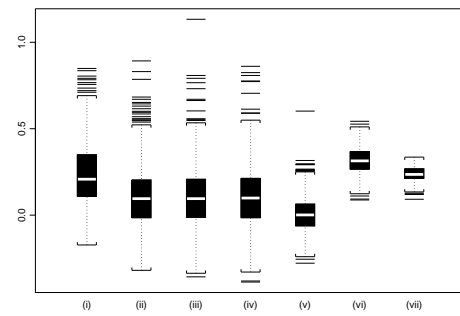
(a)



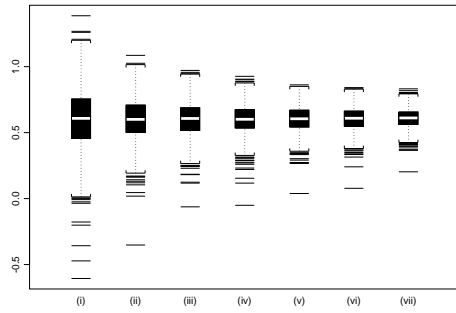
(b)



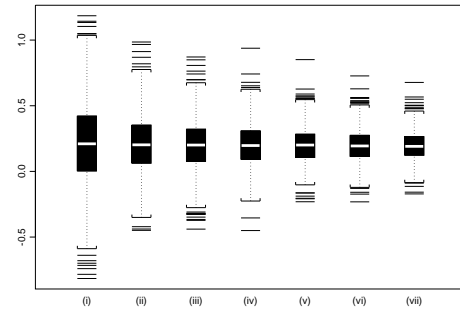
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.28: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Caso $n = 500$ e $k = 375$

Tabela A.34: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,5830	-0,0170	0,0026
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1581	-0,0419	0,0087
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,5427	-0,0573	0,0054
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1992	-0,0008	0,0053

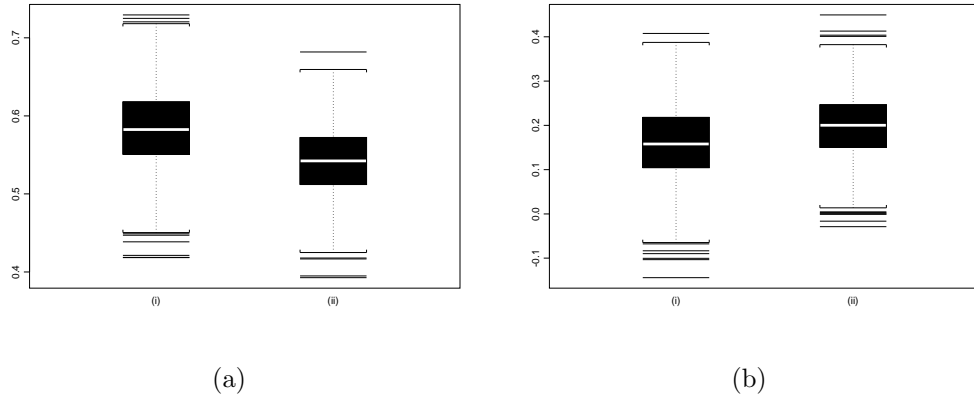
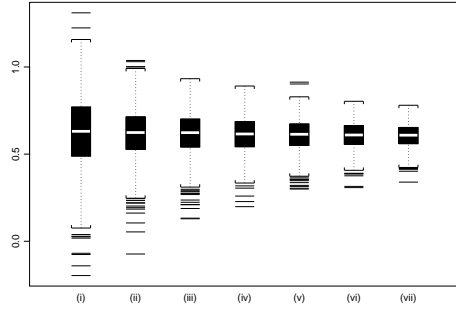


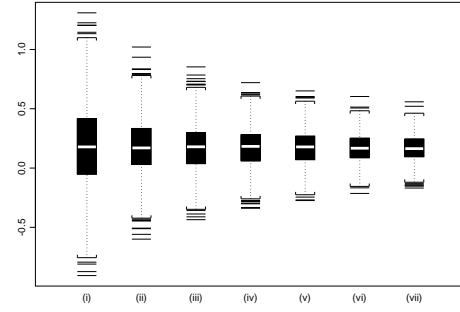
Figura A.29: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

Tabela A.35: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

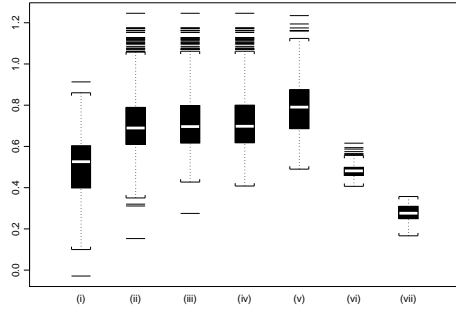
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6215	0,0215	0,0454	0,1868	-0,0132	0,1188
0,60	0,6181	0,0181	0,0218	0,1739	-0,0261	0,0579
0,65	0,6164	0,0164	0,0156	0,1727	-0,0273	0,0411
0,70	0,6101	0,0101	0,0107	0,1757	-0,0243	0,0290
0,75	0,6092	0,0092	0,0082	0,1709	-0,0291	0,0223
0,80	0,6067	0,0067	0,0064	0,1686	-0,0314	0,0163
0,85	0,6047	0,0047	0,0049	0,1665	-0,0335	0,0138
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,5043	-0,0957	0,0281	0,2222	0,0222	0,0385
0,60	0,7111	0,1111	0,0334	0,0658	-0,1342	0,0478
0,65	0,7190	0,1190	0,0338	0,0617	-0,1383	0,0491
0,70	0,7206	0,1206	0,0341	0,0574	-0,1426	0,0481
0,75	0,7824	0,1824	0,0524	-0,0100	-0,1426	0,0644
0,80	0,4799	-0,1201	0,0152	0,2180	0,0180	0,0042
0,85	0,2776	-0,3224	0,1054	0,1910	-0,0090	0,0020
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6199	0,0199	0,0411	0,1930	-0,0070	0,1067
0,60	0,6189	0,0189	0,0204	0,1761	-0,0239	0,0526
0,65	0,6183	0,0183	0,0155	0,1721	-0,0279	0,0384
0,70	0,6133	0,0133	0,0110	0,1735	-0,0265	0,0287
0,75	0,6124	0,0124	0,0082	0,1685	-0,0315	0,0212
0,80	0,6107	0,0107	0,0063	0,1670	-0,0330	0,0156
0,85	0,6091	0,0091	0,0049	0,1637	-0,0363	0,0135



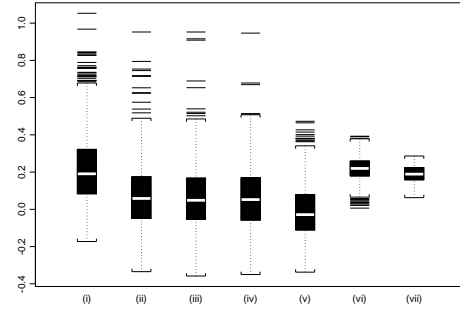
(a)



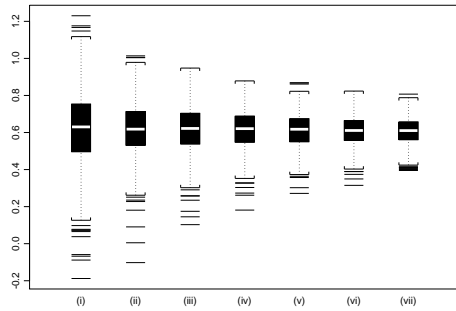
(b)



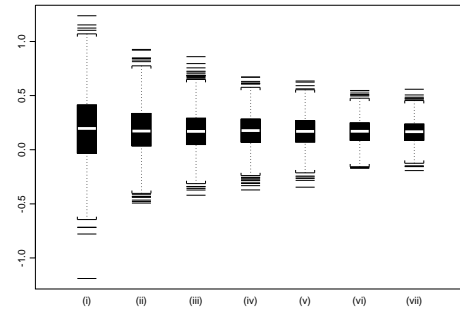
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.30: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 375$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 125$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,8049$, onde $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0049. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,1990$, onde $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0010. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0078. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com 0,0093.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,5991$, onde $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de $-0,0009$. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = -0,1899$, onde $\alpha = 0,65$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0010. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0037. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, onde $\alpha = 0,85$, com o valor de 0,0031.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 375$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,7854$, onde $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0047. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{MV} = 0,1992$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0008$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0026. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, onde $\alpha = 0,85$, com 0,0360.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.31-A.35, veja as Figuras A.25-A.30, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela A.36 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 1000$ e $k \in \{250, 500, 750\}$.

Tabela A.36: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$ e $n = 1000$.

k	média	vício	eqm
250	314,862	64,862	33271,81
500	507,027	7,023	10877,887
750	705,370	-44,630	26463,738

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.36, são bastante bons. Praticamente não há vício quando $k = 500$, além do eqm para este caso ser o menor entre os três apresentados na tabela. Perceba que este comportamento também ocorreu quando $k = \frac{n}{2}$, onde $n = 300$ e $n = 500$, conforme apresentamos nas Tabelas A.22 e A.29, respectivamente. Quando simulamos a mudança de regime em $k = 250$ ou $k = 750$, o comportamento do estimador não repetiu o desempenho do caso $k = 500$. Quando $k = 250$,

\hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 750$, \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.37-A.42, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 1000$ e $k = 250$

Tabela A.37: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,6511	0,0511	0,0057
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1447	-0,0553	0,0070
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,6078	0,0078	0,0033
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1766	-0,0234	0,0036

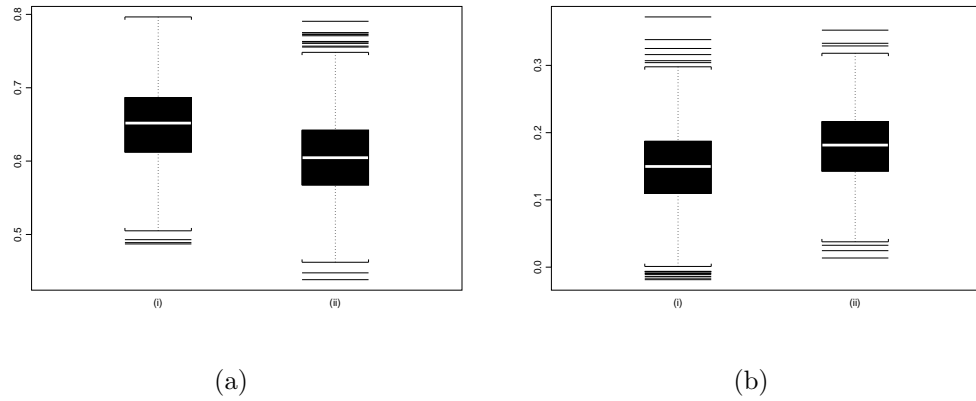
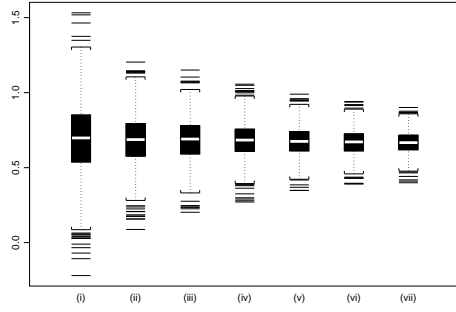


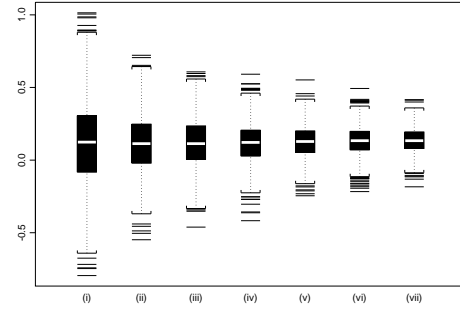
Figura A.31: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Tabela A.38: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

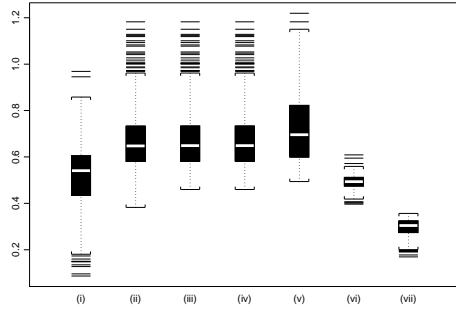
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6873	0,0873	0,0675	0,1243	-0,0757	0,0936
0,60	0,6870	0,0870	0,0355	0,1160	-0,0840	0,0461
0,65	0,6860	0,0860	0,0261	0,1184	-0,0816	0,0332
0,70	0,6819	0,0819	0,0206	0,1208	-0,0792	0,0256
0,75	0,6740	0,0740	0,0152	0,1276	-0,0724	0,0185
0,80	0,6677	0,0677	0,0120	0,1333	-0,0667	0,0146
0,85	0,6658	0,0658	0,0101	0,1351	-0,0649	0,0120
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,5196	-0,0804	0,0235	0,1873	-0,0127	0,0176
0,60	0,6663	0,0663	0,0183	0,1319	-0,0681	0,0219
0,65	0,6683	0,0683	0,0184	0,1565	-0,0435	0,0240
0,70	0,6683	0,0683	0,0184	0,1796	-0,0204	0,0280
0,75	0,7173	0,1173	0,0336	0,1286	-0,0204	0,0428
0,80	0,4928	-0,1072	0,0122	0,4125	0,2125	0,0516
0,85	0,2978	-0,3022	0,0926	0,3137	0,1137	0,0135
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,6956	0,0956	0,0610	0,1205	-0,0795	0,0804
0,60	0,7014	0,1014	0,0368	0,1098	-0,0902	0,0428
0,65	0,7036	0,1036	0,0283	0,1098	-0,0902	0,0307
0,70	0,6999	0,0999	0,0233	0,1126	-0,0874	0,0248
0,75	0,6951	0,0951	0,0191	0,1165	-0,0835	0,0195
0,80	0,6907	0,0907	0,0163	0,1197	-0,0803	0,0161
0,85	0,6893	0,0893	0,0143	0,1191	-0,0809	0,0138



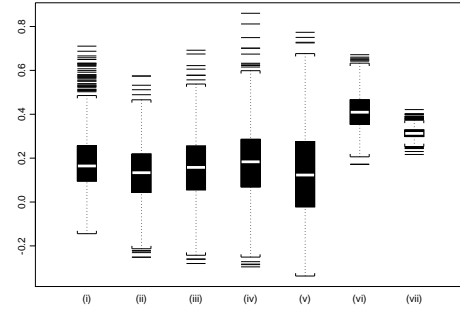
(a)



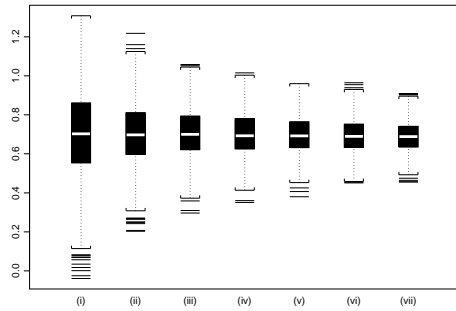
(b)



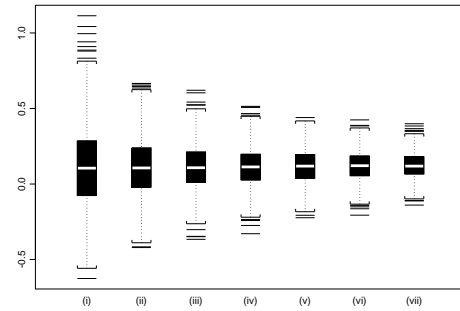
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.32: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Caso $n = 1000$ e $k = 500$

Tabela A.39: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,5872	-0,0128	0,0017
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1950	-0,0050	0,0030
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,5419	-0,0581	0,0047
$\hat{\delta}_{LW}$	0,2236	0,0236	0,0026

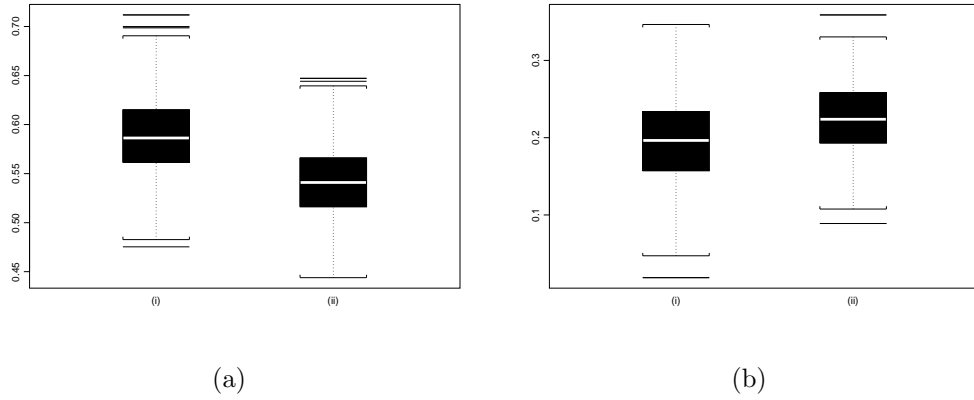
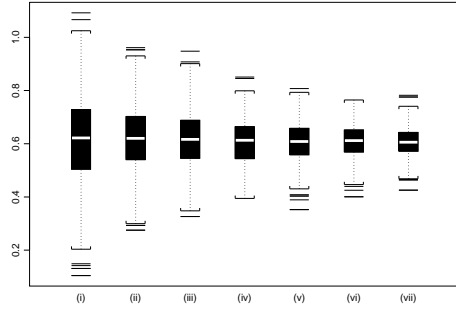


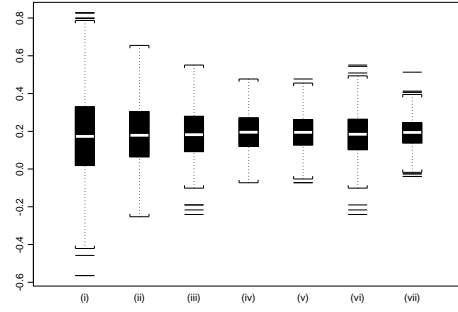
Figura A.33: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 500$.

Tabela A.40: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

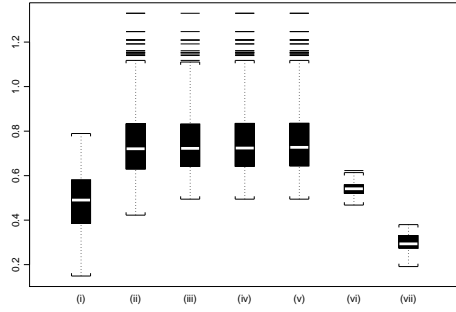
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6152	0,0152	0,0292	0,1830	-0,0170	0,0553
0,60	0,6152	0,0152	0,0157	0,1852	-0,0148	0,0281
0,65	0,6115	0,0115	0,0110	0,1863	-0,0137	0,0188
0,70	0,6082	0,0082	0,0073	0,1926	-0,0074	0,0114
0,75	0,6068	0,0068	0,0053	0,1915	-0,0085	0,0102
0,80	0,6082	0,0082	0,0039	0,1864	-0,0136	0,0150
0,85	0,6061	0,0061	0,0029	0,1925	-0,0075	0,0066
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,4809	-0,1191	0,0306	0,2007	0,0007	0,0104
0,60	0,7480	0,1480	0,0474	0,1613	-0,0387	0,0276
0,65	0,7526	0,1526	0,0460	0,0496	-0,1504	0,0439
0,70	0,7552	0,1552	0,0478	0,0582	-0,1418	0,0498
0,75	0,7574	0,1574	0,0483	0,0558	-0,1418	0,0502
0,80	0,5403	-0,0597	0,0042	0,2879	0,0879	0,0123
0,85	0,2984	-0,3016	0,0923	0,2901	0,0901	0,0090
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,6171	0,0171	0,0301	0,1789	-0,0211	0,0618
0,60	0,6178	0,0178	0,0167	0,1821	-0,0179	0,0295
0,65	0,6145	0,0145	0,0113	0,1857	-0,0143	0,0182
0,70	0,6118	0,0118	0,0074	0,1860	-0,0140	0,0134
0,75	0,6110	0,0110	0,0056	0,1869	-0,0131	0,0101
0,80	0,6091	0,0091	0,0044	0,1873	-0,0127	0,0078
0,85	0,6072	0,0072	0,0031	0,1876	-0,0124	0,0056



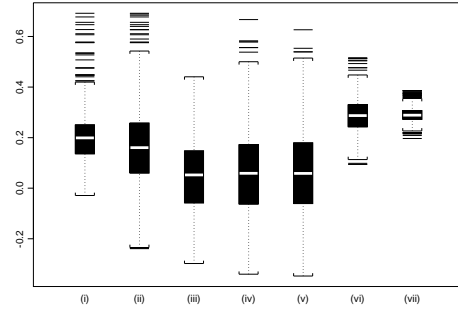
(a)



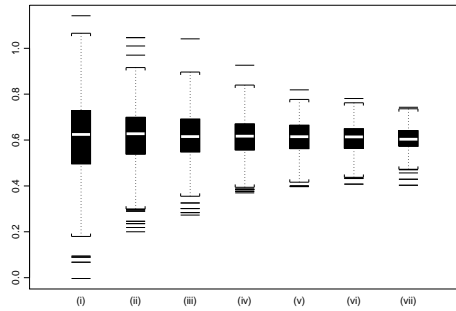
(b)



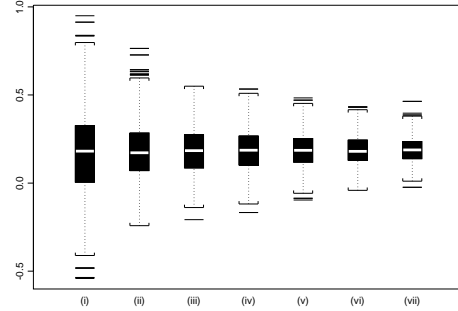
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.34: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Caso $n = 1000$ e $k = 750$

Tabela A.41: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,5928	-0,0072	0,0012
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1765	-0,0235	0,0044
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,5433	-0,0567	0,0041
$\hat{\delta}_{LW}$	0,2160	0,0160	0,0031

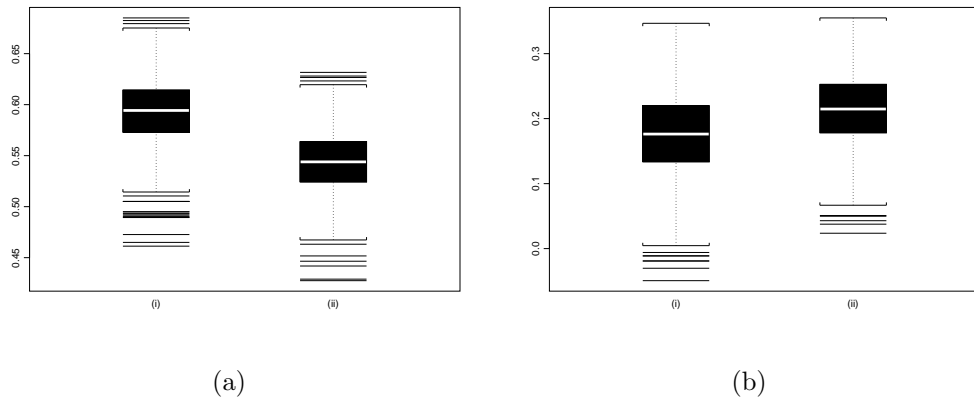
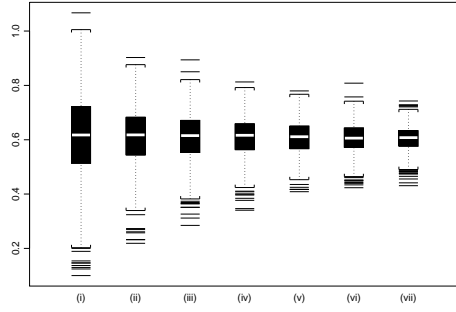


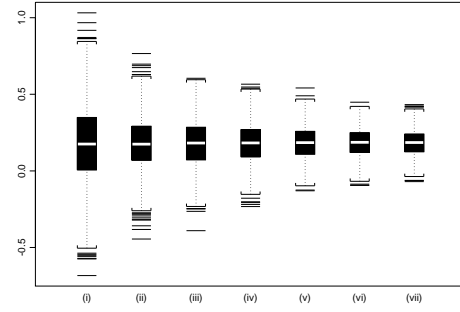
Figura A.35: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(i) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$, quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Tabela A.42: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

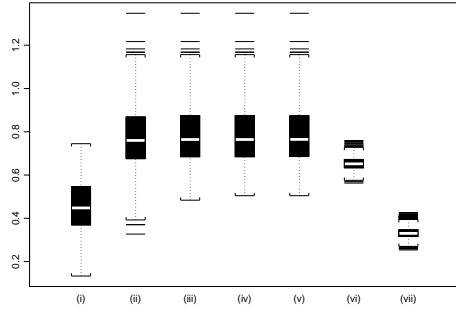
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6174	0,0174	0,0238	0,1716	-0,0284	0,0708
0,60	0,6115	0,0115	0,0109	0,1767	-0,0233	0,0327
0,65	0,6096	0,0096	0,0077	0,1779	-0,0221	0,0245
0,70	0,6095	0,0095	0,0056	0,1790	-0,0210	0,0180
0,75	0,6082	0,0082	0,0038	0,1821	-0,0179	0,0121
0,80	0,6062	0,0062	0,0028	0,1826	-0,0174	0,0090
0,85	0,6054	0,0054	0,0020	0,1830	-0,0170	0,0073
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,4532	-0,1468	0,0350	0,2560	0,0560	0,0282
0,60	0,7761	0,1761	0,0533	0,0194	-0,1806	0,0565
0,65	0,7843	0,1843	0,0539	0,0123	-0,1877	0,0591
0,70	0,7846	0,1846	0,0539	0,0140	-0,1860	0,0600
0,75	0,7848	0,1848	0,0539	0,0110	-0,1860	0,0585
0,80	0,6525	0,0525	0,0036	0,1157	-0,0843	0,0102
0,85	0,3342	-0,2658	0,0716	0,2222	0,0222	0,0015
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,6199	0,0199	0,0233	0,1860	-0,0140	0,0665
0,60	0,6141	0,0141	0,0107	0,1831	-0,0169	0,0317
0,65	0,6125	0,0125	0,0075	0,1841	-0,0159	0,0226
0,70	0,6120	0,0120	0,0056	0,1826	-0,0174	0,0167
0,75	0,6120	0,0120	0,0039	0,1815	-0,0185	0,0116
0,80	0,6089	0,0089	0,0028	0,1813	-0,0187	0,0088
0,85	0,6082	0,0082	0,0020	0,1804	-0,0196	0,0069



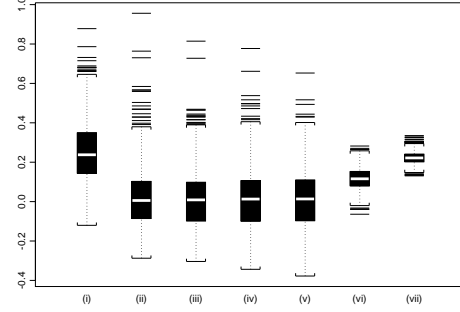
(a)



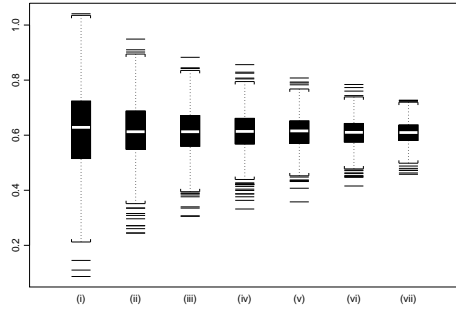
(b)



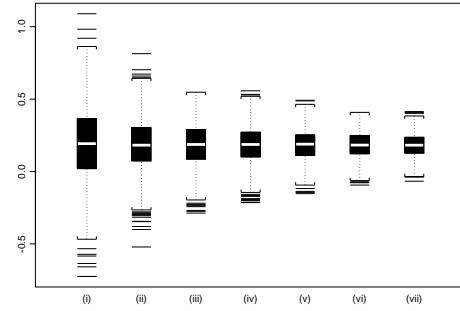
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.36: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 1000$ e $k = 750$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{LW}^{(1)} = 0,6078$. O vício encontrado foi de 0,0078. Na estimação de $\delta = 0,2$, os estimadores $\hat{\delta}_{GPHBa} = 0,1860$, com $\alpha = 0,70$ e $\alpha = 0,75$, foram os que apresentaram menor vício, com o valor de $-0,0204$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0057. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com 0,0033.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 500$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,6061$, com $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0061. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,1926$, com $\alpha = 0,70$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0074$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0017. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0026.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,6$, quando $k = 750$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,6054$, onde $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0054. Na estimação de $\delta = 0,2$, o estimador $\hat{\delta}_{LW} = 0,2160$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0160. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0012. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, onde $\alpha = 0,85$, com 0,0015.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.37-A.42, veja as Figuras A.45-A.36, onde apresentamos os box-plots dos estimadores.

A.3 Caso Misto

Nesta seção exibimos os resultados das simulações realizadas quando o valor do parâmetro de longa dependência $d^{(2)}$ do modelo (5.49) está na região de não-estacionariedade e o valor do parâmetro de longa dependência $d^{(1)}$ está na região de estacionariedade. Neste exemplo em particular, $d^{(1)} = 0,3$ e $d^{(2)} = 0,8$, ou seja, $\delta = 0,5$.

Conforme descrito no início deste capítulo, em primeiro lugar geramos as amostras que serão analisadas para cada caso considerado. Como são três tamanhos amostrais, cada um com três pontos de mudança de regime, temos no total 9 conjuntos de dados diferentes, cada um com 1000 séries temporais simuladas.

A Tabela A.43 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 300$ e $k \in \{75, 150, 225\}$.

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.46, são bastante bons. Praticamente não há vício e o eqm é o menor entre os três. Nos casos em que $k = 75$ ou $k = 225$, apresentados nas Tabelas A.45 e A.48,

Tabela A.43: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$ e $n = 300$.

k	média	vício	eqm
75	86,524	11,524	1175,224
150	153,313	3,313	422,113
225	222,681	-2,319	645,675

respectivamente, o comportamento do estimador piorou. No caso $k = 75$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 225$, o resultado foi diferente, pois \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.45-A.49, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 300$ e $k = 75$

Tabela A.44: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 75$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,3680	0,0680	0,0254
$\hat{\delta}_{MV}$	0,4126	-0,0874	0,0311
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,3559	0,0559	0,0168
$\hat{\delta}_{LW}$	0,4013	-0,0987	0,0237

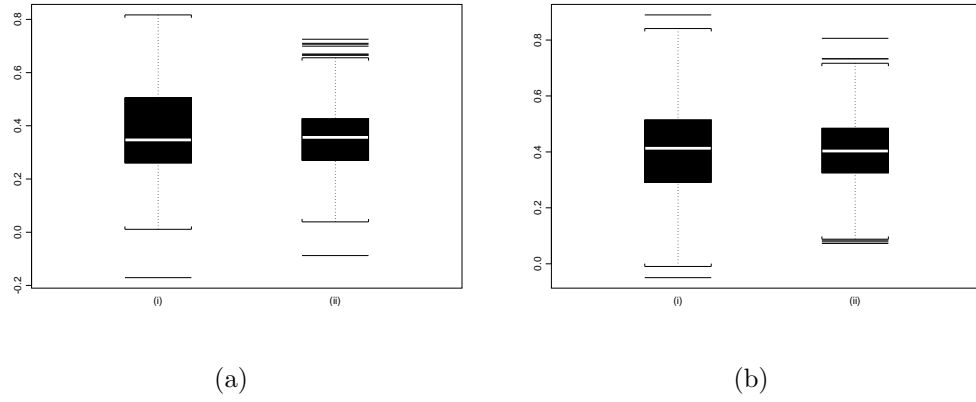
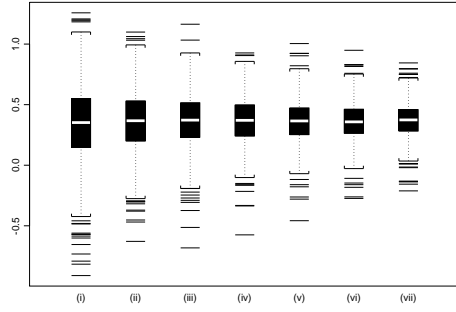


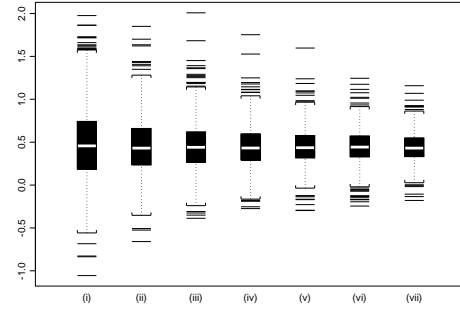
Figura A.37: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) \hat{d}_{MV} ; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) \hat{d}_{LW} ; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 75$.

Tabela A.45: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 75$.

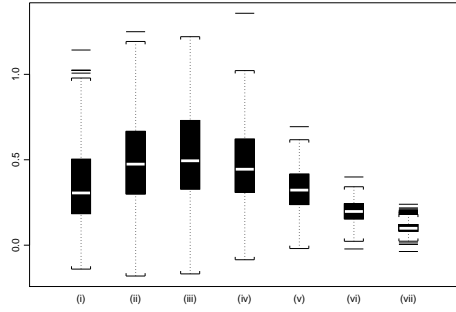
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3402	0,0402	0,0988	0,4757	-0,0243	0,1875
0,60	0,3615	0,0615	0,0642	0,4509	-0,0491	0,1049
0,65	0,3651	0,0651	0,0513	0,4472	-0,0528	0,0813
0,70	0,3630	0,0630	0,0411	0,4498	-0,0502	0,0617
0,75	0,3621	0,0621	0,0333	0,4495	-0,0505	0,0478
0,80	0,3607	0,0607	0,0277	0,4496	-0,0504	0,0387
0,85	0,3701	0,0701	0,0254	0,4387	-0,0613	0,0333
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,3452	0,0452	0,0497	0,3495	-0,1505	0,0714
0,60	0,4963	0,1963	0,1045	0,3546	-0,1454	0,1199
0,65	0,5319	0,2319	0,1205	0,3614	-0,1386	0,136
0,70	0,4642	0,1642	0,0659	0,4683	-0,0317	0,0971
0,75	0,3240	0,0240	0,0128	0,6070	-0,0317	0,0334
0,80	0,1974	-0,1026	0,0141	0,4282	-0,0718	0,0064
0,85	0,1037	-0,1963	0,0397	0,2736	-0,2264	0,0524
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,4026	0,1026	0,1225	0,3966	-0,1034	0,1724
0,60	0,4254	0,1254	0,089	0,3821	-0,1179	0,1140
0,65	0,4337	0,1337	0,0744	0,3775	-0,1225	0,0904
0,70	0,4286	0,1286	0,0618	0,3849	-0,1151	0,0731
0,75	0,4295	0,1295	0,0535	0,3828	-0,1172	0,0621
0,80	0,4249	0,1249	0,0463	0,3869	-0,1131	0,0537
0,85	0,4246	0,1246	0,0424	0,3853	-0,1147	0,0472



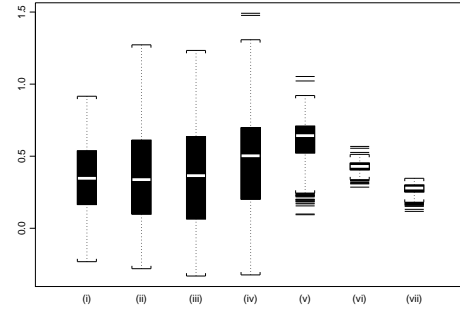
(a)



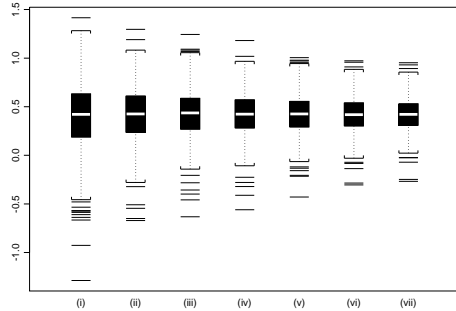
(b)



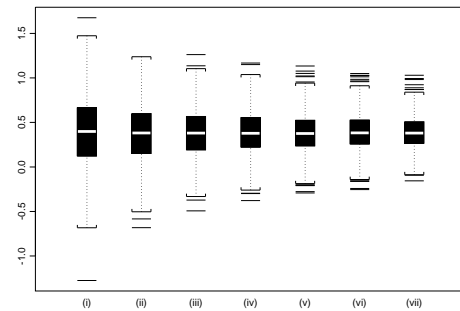
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.38: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 75$.

Caso $n = 300$ e $k = 150$

Tabela A.46: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 150$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2746	-0,0254	0,0057
$\hat{\delta}_{MV}$	0,4885	-0,0115	0,0122
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2699	-0,0301	0,0051
$\hat{\delta}_{LW}$	0,4703	-0,0297	0,0098

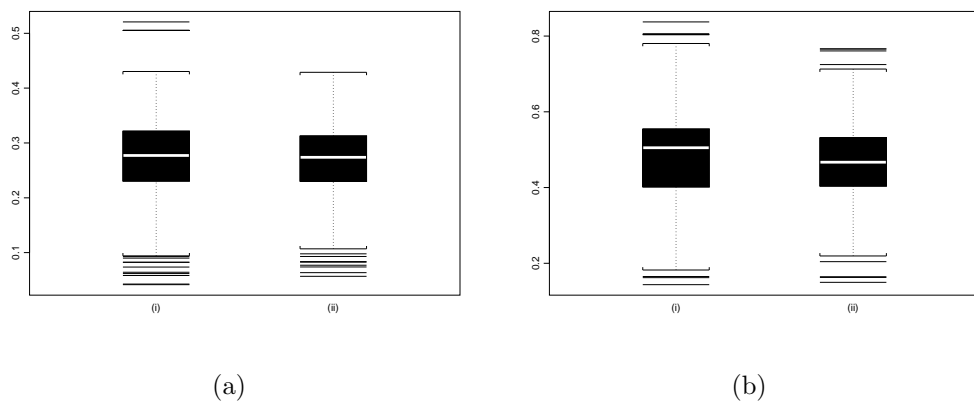
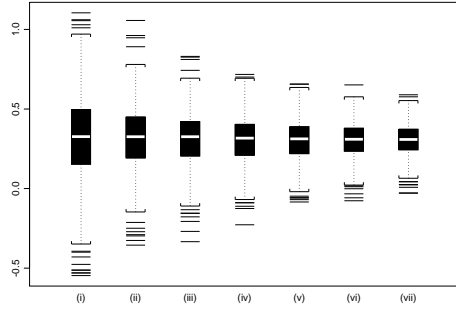


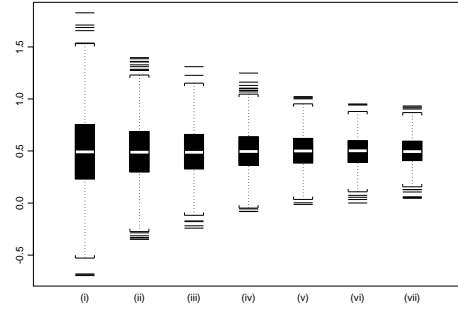
Figura A.39: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 300$ e $k = 150$.

Tabela A.47: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 150$.

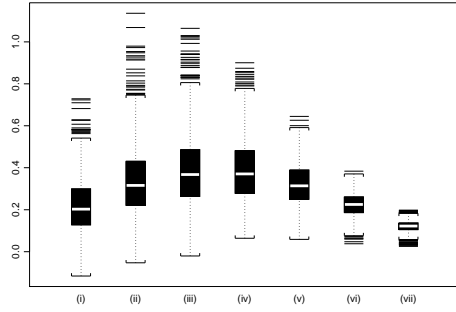
α	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3162	0,0162	0,0713	0,5042	0,0042	0,1522
0,60	0,3164	0,0164	0,0362	0,4937	-0,0063	0,0814
0,65	0,3112	0,0112	0,0275	0,4966	-0,0034	0,0604
0,70	0,3071	0,0071	0,0206	0,4984	-0,0016	0,0439
0,75	0,3034	0,0034	0,0149	0,5020	0,0020	0,0314
0,80	0,3052	0,0052	0,0114	0,4987	-0,0013	0,0236
0,85	0,3045	0,0045	0,0089	0,4994	-0,0006	0,0191
α	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2154	-0,0846	0,0245	0,4994	-0,0006	0,0390
0,60	0,3374	0,0374	0,0301	0,5325	0,0325	0,0675
0,65	0,3890	0,0890	0,0392	0,5306	0,0306	0,0825
0,70	0,3890	0,0890	0,0311	0,5602	0,0602	0,0815
0,75	0,3220	0,0220	0,0109	0,4987	0,0602	0,0164
0,80	0,2234	-0,0766	0,0093	0,3670	-0,1330	0,0195
0,85	0,1200	-0,1800	0,0331	0,2271	-0,2729	0,0757
α	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3170	0,0170	0,0693	0,4870	-0,0130	0,1284
0,60	0,3153	0,0153	0,0336	0,4940	-0,0060	0,0724
0,65	0,3095	0,0095	0,0250	0,4977	-0,0023	0,0525
0,70	0,3077	0,0077	0,0192	0,4953	-0,0047	0,0408
0,75	0,3064	0,0064	0,0138	0,4972	-0,0028	0,03
0,80	0,3093	0,0093	0,0110	0,4948	-0,0052	0,0231
0,85	0,3098	0,0098	0,0087	0,4947	-0,0053	0,0193



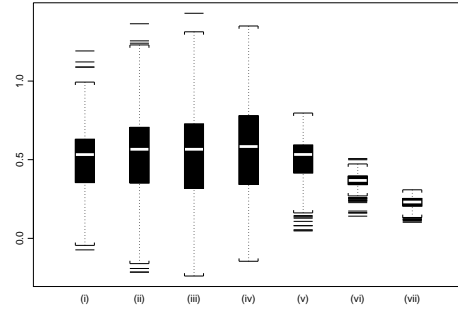
(a)



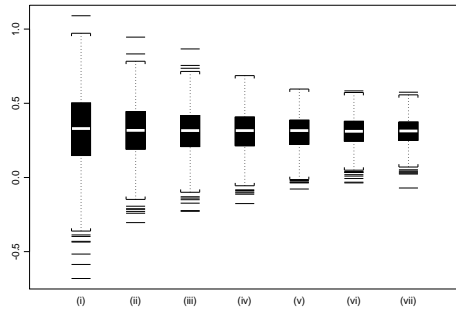
(b)



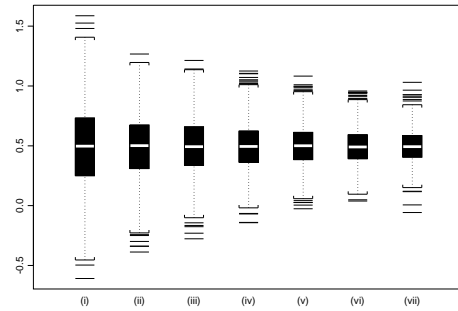
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.40: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 150$.

Caso $n = 300$ e $k = 225$

Tabela A.48: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 225$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2746	-0,0254	0,0038
$\hat{\delta}_{MV}$	0,4496	-0,0504	0,0196
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2652	-0,0348	0,0041
$\hat{\delta}_{LW}$	0,4541	-0,0459	0,0140

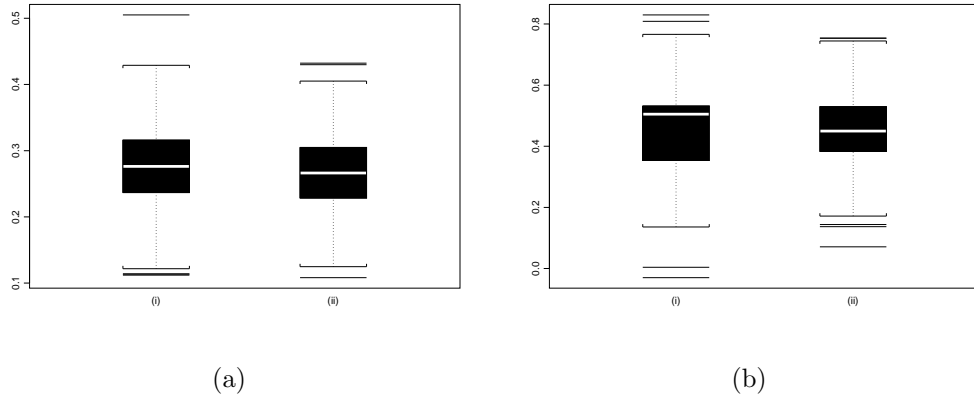
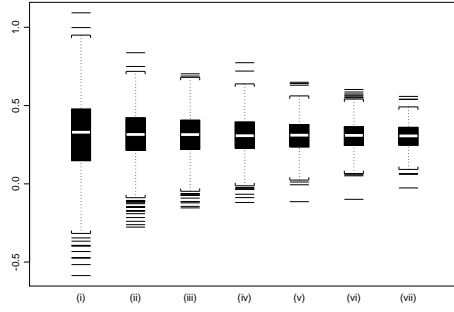


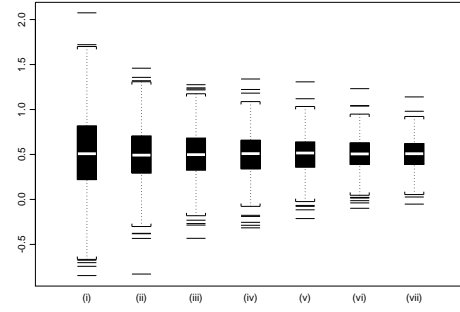
Figura A.41: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 225$.

Tabela A.49: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 225$.

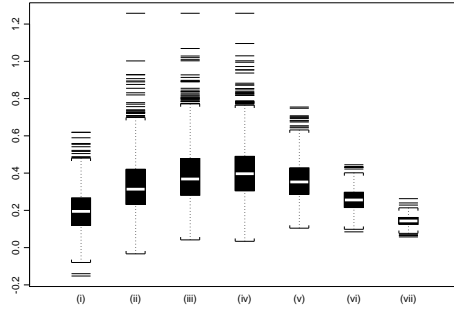
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3060	0,0060	0,0593	0,5160	0,0160	0,1955
0,60	0,3106	0,0106	0,0277	0,5024	0,0024	0,0910
0,65	0,3090	0,0090	0,0201	0,5015	0,0015	0,0673
0,70	0,3069	0,0069	0,0151	0,5020	0,0020	0,0511
0,75	0,3059	0,0059	0,0110	0,5038	0,0038	0,0393
0,80	0,3035	0,0035	0,0084	0,5047	0,0047	0,0320
0,85	0,3022	0,0022	0,0068	0,5048	0,0048	0,0290
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1982	-0,1018	0,0226	0,5109	0,0109	0,0534
0,60	0,3343	0,0343	0,0242	0,5244	0,0244	0,0835
0,65	0,3957	0,0957	0,0362	0,4872	-0,0128	0,1070
0,70	0,4149	0,1149	0,0373	0,3987	-0,1013	0,0712
0,75	0,3624	0,0624	0,0152	0,3280	-0,1013	0,0467
0,80	0,2557	-0,0443	0,0055	0,2317	-0,2683	0,0745
0,85	0,1432	-0,1568	0,0254	0,1645	-0,3355	0,1139
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,3090	0,0090	0,0566	0,5018	0,0018	0,1790
0,60	0,3097	0,0097	0,0254	0,4934	-0,0066	0,0830
0,65	0,3101	0,0101	0,0188	0,4933	-0,0067	0,0619
0,70	0,3075	0,0075	0,0136	0,4947	-0,0053	0,0470
0,75	0,3065	0,0065	0,0102	0,4963	-0,0037	0,0362
0,80	0,3060	0,0060	0,0077	0,4935	-0,0065	0,0289
0,85	0,3048	0,0048	0,0062	0,4898	-0,0102	0,0258



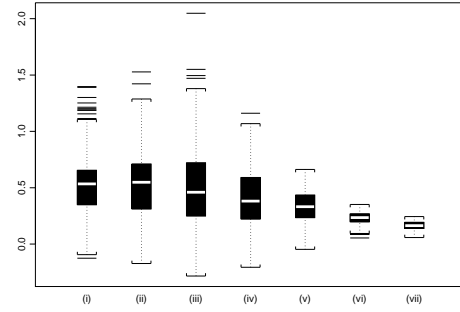
(a)



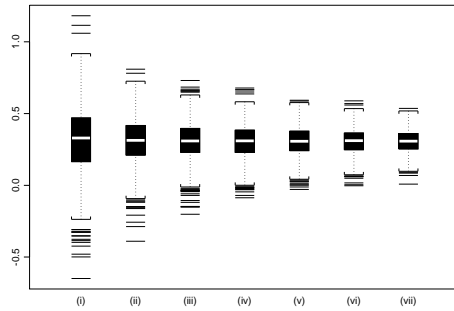
(b)



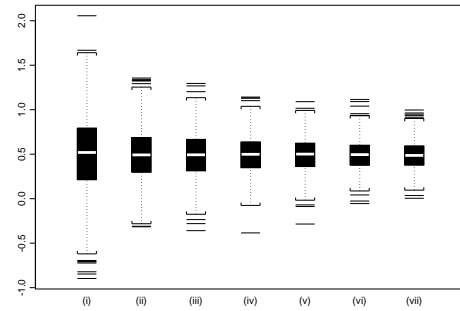
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.42: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 300$ e $k = 225$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 75$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3402$, onde $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de 0,0402. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,4757$, onde $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0243$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$, com 0,0128, onde $\alpha = 0,75$. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{GPHBa}$, com 0,0064, onde $\alpha = 0,80$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 150$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3034$, onde $\alpha = 0,75$. O vício encontrado foi de 0,0034. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,4994$, onde $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0006$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0057. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{MV}$, com 0,0051.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 225$, foram $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3022$, onde $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0022. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,5015$, onde $\alpha = 0,65$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0015. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0038. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0140.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.45-A.49, veja as Figuras A.37-A.42, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela A.50 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 500$ e $k \in \{125, 250, 375\}$.

Tabela A.50: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$ e $n = 500$.

k	média	vício	eqm
125	132,556	7,556	1001,982
250	254,393	4,393	320,517
375	378,589	3,589	604,011

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.50, são bastante bons. Praticamente não há vício e o eqm é o menor entre os três. Isto também ocorreu quando $k = \frac{n}{2}$, onde $n = 300$. Nos casos em que $k = 125$ ou $k = 375$, apresentados nas Tabelas A.51 e A.55, respectivamente, o comportamento do estimador piorou. No caso $k = 125$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 375$, o resultado foi diferente, pois \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.51-A.56, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 500$ e $k = 125$

Tabela A.51: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 125$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,3096	0,0096	0,0106
$\hat{\delta}_{MV}$	0,4748	-0,0252	0,0134
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2958	-0,0042	0,0068
$\hat{\delta}_{LW}$	0,4541	-0,0459	0,0098

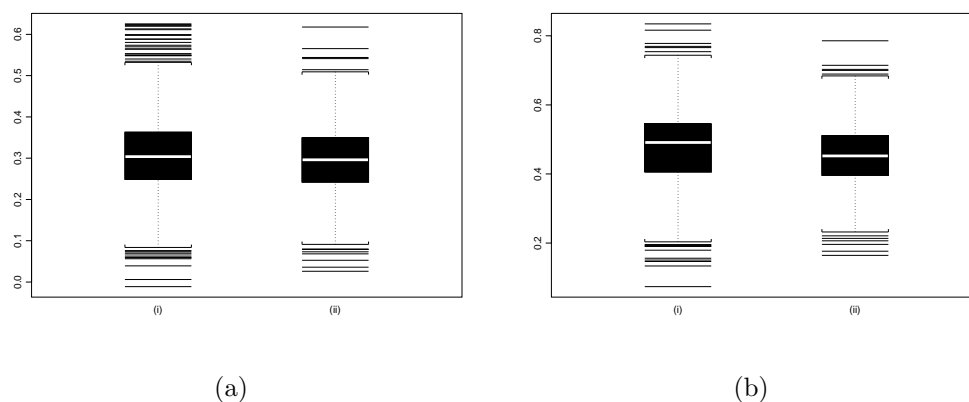
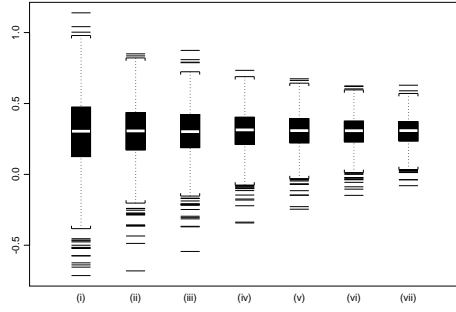


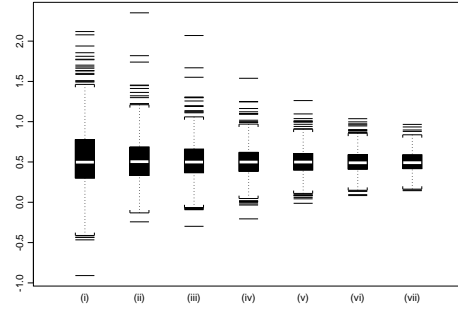
Figura A.43: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 125$.

Tabela A.52: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 125$.

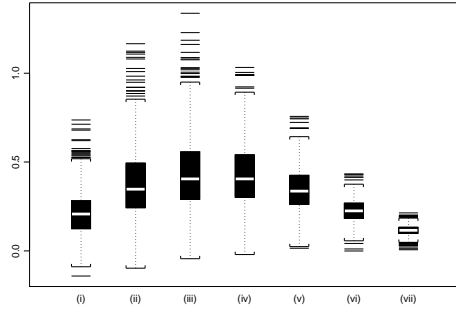
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,2878	-0,0122	0,0775	0,5372	0,0372	0,1513
0,60	0,2959	-0,0041	0,0425	0,5221	0,0221	0,0757
0,65	0,2978	-0,0022	0,0322	0,5127	0,0127	0,0544
0,70	0,3031	0,0031	0,0226	0,5026	0,0026	0,0360
0,75	0,3015	0,0015	0,0172	0,5017	0,0017	0,0264
0,80	0,3001	0,0001	0,0130	0,5020	0,0020	0,0198
0,85	0,3002	0,0002	0,0106	0,5018	0,0018	0,0161
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,2119	-0,0881	0,0234	0,4641	-0,0359	0,0263
0,60	0,3766	0,0766	0,0427	0,5050	0,0050	0,0726
0,65	0,4358	0,1358	0,0603	0,4892	-0,0108	0,0851
0,70	0,4282	0,1282	0,0476	0,5415	0,0415	0,0815
0,75	0,3439	0,0439	0,0158	0,6773	0,0415	0,0704
0,80	0,2246	-0,0754	0,0097	0,5048	0,0048	0,0016
0,85	0,1156	-0,1844	0,0349	0,3235	-0,1765	0,0323
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,2699	-0,0301	0,0751	0,5345	0,0345	0,1111
0,60	0,3073	0,0073	0,0388	0,5081	0,0081	0,0595
0,65	0,3247	0,0247	0,0307	0,4886	-0,0114	0,0447
0,70	0,3358	0,0358	0,0230	0,4738	-0,0262	0,0316
0,75	0,3397	0,0397	0,0193	0,4681	-0,0319	0,0261
0,80	0,3406	0,0406	0,0159	0,4661	-0,0339	0,0215
0,85	0,3409	0,0409	0,0139	0,4651	-0,0349	0,0181



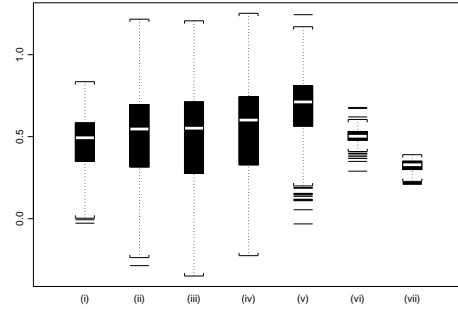
(a)



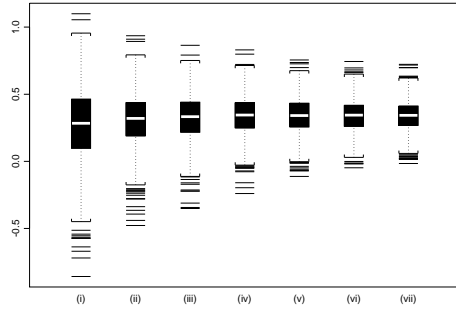
(b)



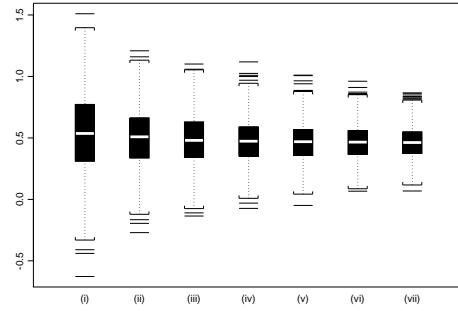
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.44: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 125$.

Caso $n = 500$ e $k = 250$

Tabela A.53: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,6511	0,0511	0,0057
$\hat{\delta}_{MV}$	0,1447	-0,0553	0,0070
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,6078	0,0078	0,0033
$\hat{\delta}_{LW}$	0,1766	-0,0234	0,0036

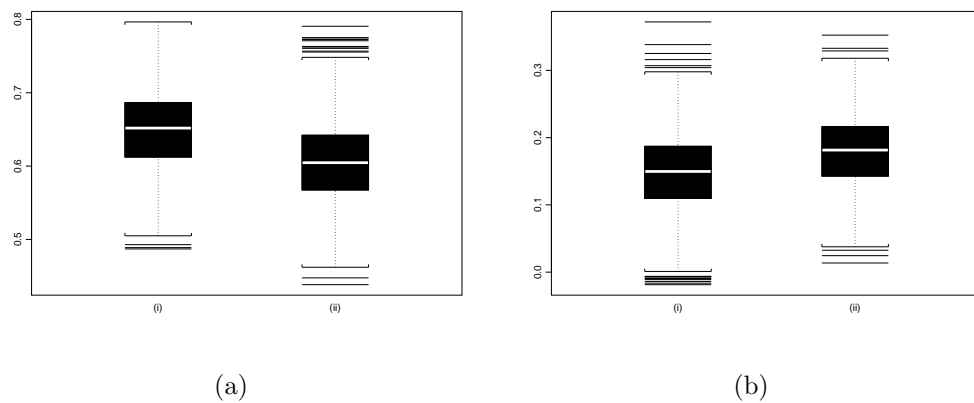
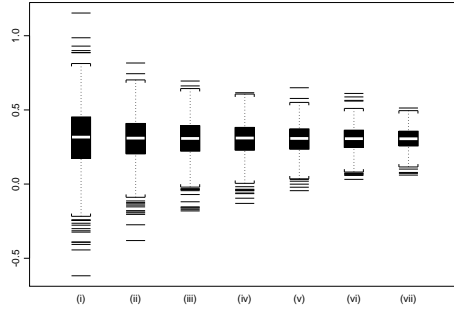


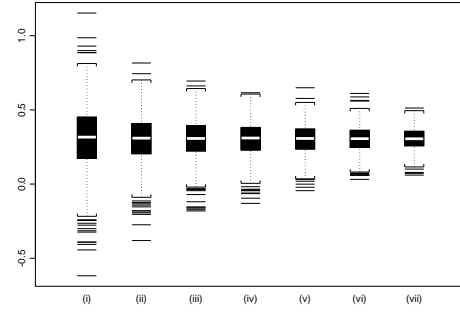
Figura A.45: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$, $n = 500$ e $k = 250$.

Tabela A.54: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 250$.

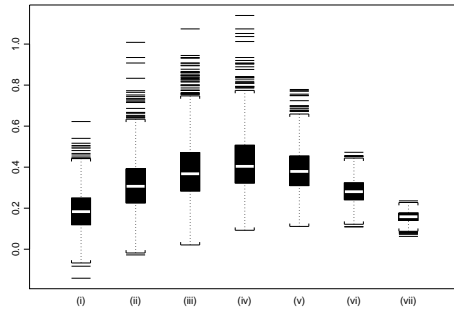
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,7019	0,1019	0,0661	0,0970	-0,1030	0,0938
0,60	0,7020	0,1020	0,0367	0,0972	-0,1028	0,0482
0,65	0,6940	0,0940	0,0277	0,1069	-0,0931	0,0363
0,70	0,6845	0,0845	0,0209	0,1171	-0,0829	0,0261
0,75	0,6797	0,0797	0,0163	0,1217	-0,0783	0,0200
0,80	0,6746	0,0746	0,0131	0,1284	-0,0716	0,0155
0,85	0,6698	0,0698	0,0106	0,1318	-0,0682	0,0125
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,5206	-0,0794	0,0204	0,1802	-0,0198	0,0145
0,60	0,6643	0,0643	0,0198	0,1323	-0,0677	0,0218
0,65	0,6654	0,0654	0,0197	0,1566	-0,0434	0,0244
0,70	0,6657	0,0657	0,0198	0,1809	-0,0191	0,0294
0,75	0,7081	0,1081	0,0320	0,1395	-0,0191	0,0423
0,80	0,4920	-0,1080	0,0124	0,4098	0,2098	0,0502
0,85	0,2980	-0,3020	0,0925	0,3141	0,1141	0,0137
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,7039	0,1039	0,0584	0,1061	-0,0939	0,0779
0,60	0,7107	0,1107	0,0359	0,0980	-0,1020	0,0437
0,65	0,7059	0,1059	0,0287	0,1023	-0,0977	0,0342
0,70	0,6989	0,0989	0,0230	0,1097	-0,0903	0,0252
0,75	0,6961	0,0961	0,0197	0,1124	-0,0876	0,0206
0,80	0,6931	0,0931	0,0167	0,1168	-0,0832	0,0168
0,85	0,6900	0,0900	0,0146	0,1181	-0,0819	0,0144



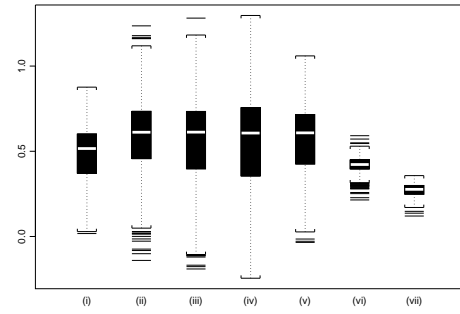
(a)



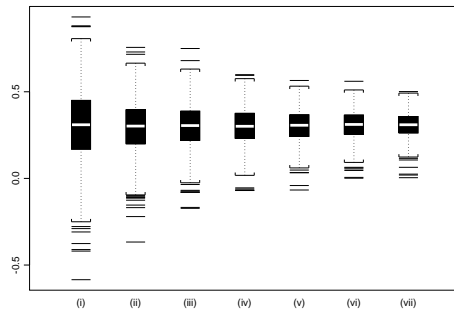
(b)



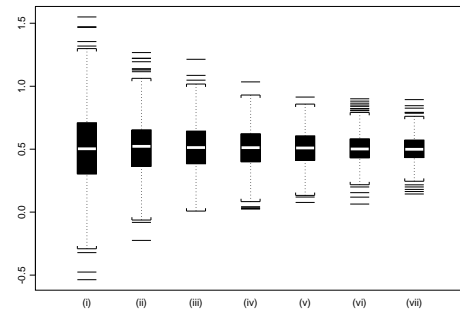
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.46: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 250$.

Caso $n = 500$ e $k = 375$

Tabela A.55: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 375$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2879	-0,0121	0,0018
$\hat{\delta}_{MV}$	0,4760	-0,0240	0,0102
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2699	-0,0301	0,0024
$\hat{\delta}_{LW}$	0,4727	-0,0273	0,0076

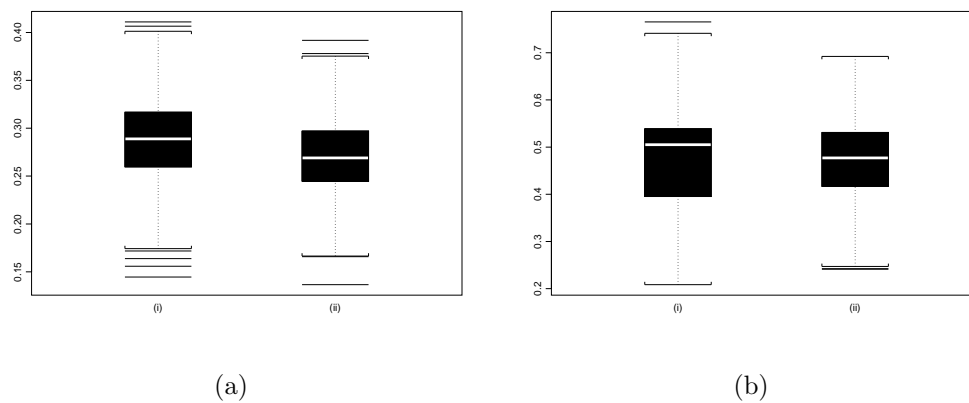
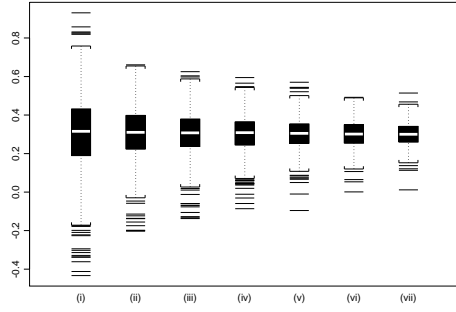


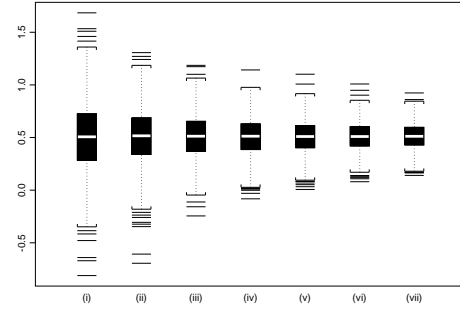
Figura A.47: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 375$.

Tabela A.56: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 375$.

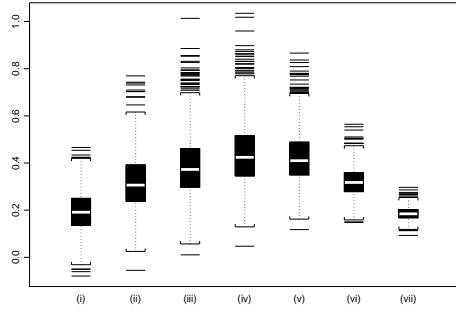
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3056	0,0056	0,0358	0,5056	0,0056	0,1198
0,60	0,3068	0,0068	0,0181	0,5091	0,0091	0,0683
0,65	0,3057	0,0057	0,0127	0,5106	0,0106	0,0451
0,70	0,3031	0,0031	0,0089	0,5094	0,0094	0,0329
0,75	0,3025	0,0025	0,0065	0,5091	0,0091	0,0244
0,80	0,3006	0,0006	0,0047	0,5106	0,0106	0,0189
0,85	0,3006	0,0006	0,0037	0,5101	0,0101	0,0153
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1941	-0,1059	0,0191	0,5433	0,0433	0,0353
0,60	0,3192	0,0192	0,0144	0,5807	0,0807	0,0622
0,65	0,3873	0,0873	0,0255	0,5534	0,0534	0,0774
0,70	0,4403	0,1403	0,0388	0,4762	-0,0238	0,0715
0,75	0,4265	0,1265	0,0283	0,3686	-0,0238	0,0413
0,80	0,3210	0,0210	0,0042	0,2901	-0,2099	0,0472
0,85	0,1853	-0,1147	0,0139	0,1966	-0,3034	0,0937
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,3091	0,0091	0,0354	0,4988	-0,0012	0,1129
0,60	0,3073	0,0073	0,0185	0,5087	0,0087	0,0623
0,65	0,3041	0,0041	0,0127	0,5113	0,0113	0,0427
0,70	0,3024	0,0024	0,0088	0,5110	0,0110	0,0319
0,75	0,3024	0,0024	0,0062	0,5105	0,0105	0,0232
0,80	0,3017	0,0017	0,0045	0,5104	0,0104	0,0185
0,85	0,3021	0,0021	0,0034	0,5097	0,0097	0,0146



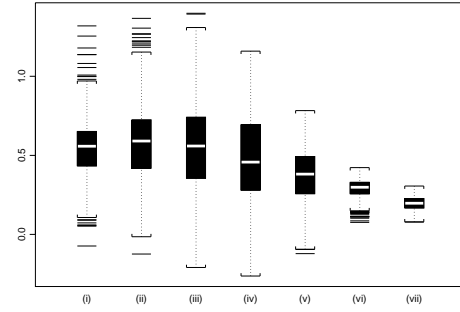
(a)



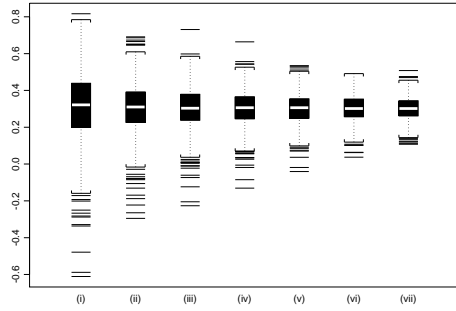
(b)



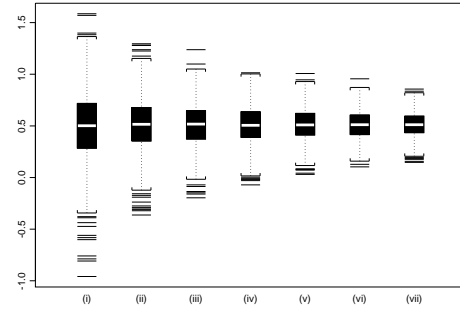
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.48: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 500$ e $k = 375$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 125$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3001$, onde $\alpha = 0,80$. O vício encontrado foi de 0,0001. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,5017$, onde $\alpha = 0,75$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0017. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{LW}^{(1)}$, com 0,0068. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com o valor de 0,0098.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{KP}^{(1)} = 0,3005$, onde $\alpha = 0,70$. O vício encontrado foi de 0,0005. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = 0,5019$, onde $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0019. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0031. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0052.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 375$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3006$, onde $\alpha = 0,80$ e $\alpha = 0,85$. Os vícios encontrados foram de 0,0006. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = 0,4988$, onde $\alpha = 0,50$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0012$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0018. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0076.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.51-A.56, veja as Figuras A.43-A.48, onde apresentamos os box-plots destes estimadores.

A Tabela A.57 exhibe os resultados obtidos para \hat{k} , quando $n = 1000$ e $k \in \{250, 500, 750\}$.

Tabela A.57: Resultados da Estimação do Ponto de Mudança de Regime k , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$ e $n = 1000$.

k	média	vício	eqm
250	255,393	5,393	362,059
500	504,211	4,211	315,721
750	754,562	4,562	300,348

Note que os resultados para o estimador \hat{k} , exibidos na Tabela A.60, são bastante bons. Praticamente não há vício e o eqm é o menor entre os três. Isto também ocorreu quando $k = \frac{n}{2}$, onde $n = 300$ e $n = 500$. Nos casos em que $k = 250$ ou $k = 750$, apresentados nas Tabelas A.58 e A.62, respectivamente, o comportamento do estimador piorou. No caso $k = 250$, \hat{k} foi superestimado em relação a seu valor nominal. Quando $k = 750$, o resultado foi diferente, pois \hat{k} foi subestimado em relação a k .

Nas Tabelas A.58-A.63, exibimos os resultados da estimação para os parâmetros $\hat{d}^{(1)}$ e $\hat{\delta}$, após a localização do ponto de mudança de regime.

Caso $n = 1000$ e $k = 250$

Tabela A.58: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2936	-0,0064	0,0033
$\hat{\delta}_{MV}$	0,4973	-0,0027	0,0042
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2760	-0,0240	0,0031
$\hat{\delta}_{LW}$	0,4744	-0,0256	0,0036

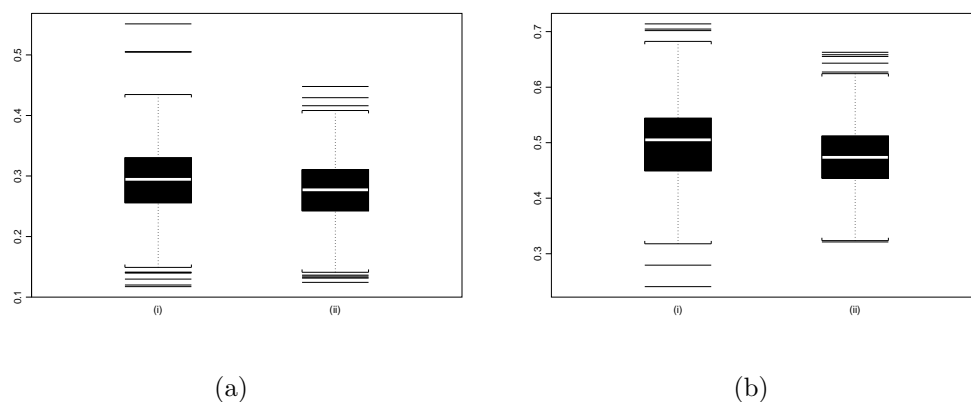
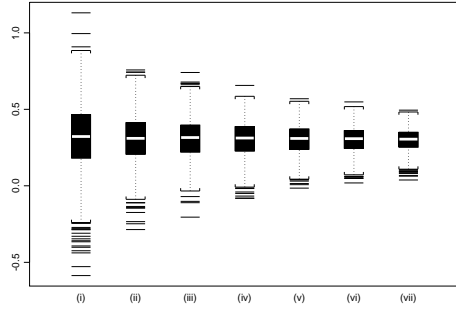


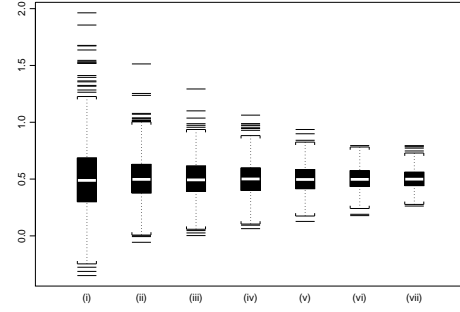
Figura A.49: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Tabela A.59: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 250$.

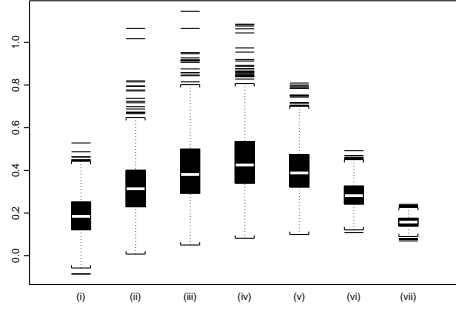
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3130	0,0130	0,0519	0,5072	0,0072	0,0922
0,60	0,3055	0,0055	0,0249	0,5034	0,0034	0,0402
0,65	0,3071	0,0071	0,0180	0,5007	0,0007	0,0282
0,70	0,3043	0,0043	0,0139	0,5022	0,0022	0,0211
0,75	0,3035	0,0035	0,0097	0,5024	0,0024	0,0147
0,80	0,3022	0,0022	0,0072	0,5019	0,0019	0,0105
0,85	0,3007	0,0007	0,0055	0,5029	0,0029	0,0078
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1879	-0,1121	0,0217	0,4583	-0,0417	0,0185
0,60	0,3239	0,0239	0,0192	0,5802	0,0802	0,0616
0,65	0,4059	0,1059	0,0370	0,5426	0,0426	0,0698
0,70	0,4484	0,1484	0,0470	0,5415	0,0415	0,0751
0,75	0,4031	0,1031	0,0241	0,6458	0,0415	0,0677
0,80	0,2850	-0,0150	0,0041	0,6297	0,1297	0,0195
0,85	0,1574	-0,1426	0,0211	0,3551	-0,1449	0,0225
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,3011	0,0011	0,0461	0,5127	0,0127	0,0715
0,60	0,3013	0,0013	0,0229	0,5111	0,0111	0,0373
0,65	0,3077	0,0077	0,0168	0,5027	0,0027	0,0268
0,70	0,3130	0,0130	0,0129	0,4958	-0,0042	0,0197
0,75	0,3162	0,0162	0,0094	0,4919	-0,0081	0,0140
0,80	0,3158	0,0158	0,0074	0,4911	-0,0089	0,0106
0,85	0,3153	0,0153	0,0057	0,4904	-0,0096	0,0079



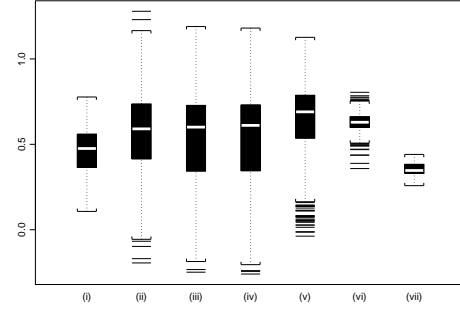
(a)



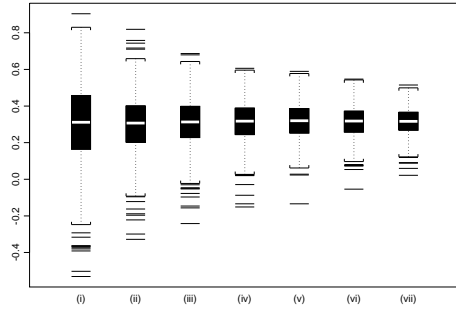
(b)



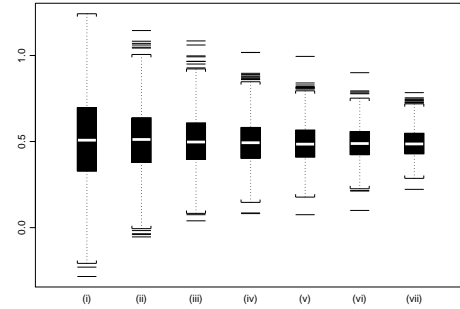
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.50: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 250$.

Caso $n = 1000$ e $k = 500$

Tabela A.60: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2952	-0,0048	0,0015
$\hat{\delta}_{MV}$	0,4920	-0,0080	0,0032
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2726	-0,0274	0,0020
$\hat{\delta}_{LW}$	0,4756	-0,0244	0,0029

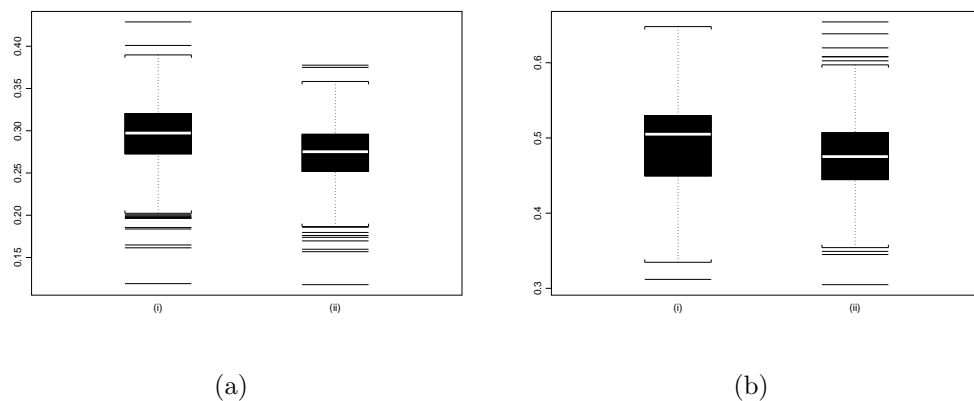
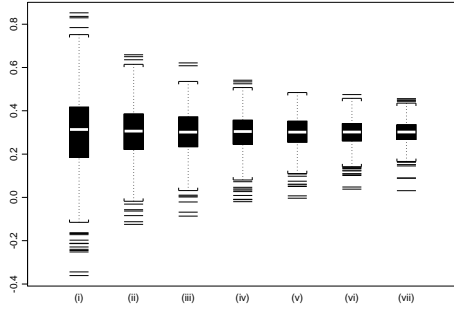


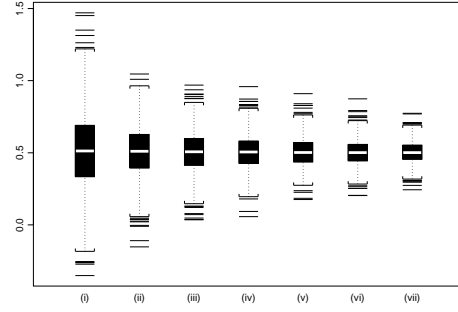
Figura A.51: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Tabela A.61: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 500$.

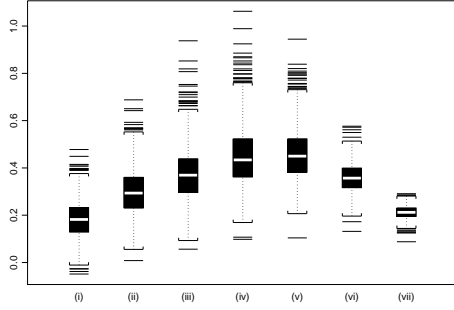
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3000	0,0000	0,0309	0,5169	0,0169	0,0716
0,60	0,3013	0,0013	0,0143	0,5093	0,0093	0,0323
0,65	0,2989	-0,0011	0,0100	0,5080	0,0080	0,0206
0,70	0,2989	-0,0011	0,0071	0,5064	0,0064	0,0139
0,75	0,2987	-0,0013	0,0051	0,5046	0,0046	0,0101
0,80	0,2987	-0,0013	0,0038	0,5038	0,0038	0,0073
0,85	0,2995	-0,0005	0,0029	0,5030	0,0030	0,0055
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1834	-0,1166	0,0199	0,4819	-0,0181	0,0186
0,60	0,2987	-0,0013	0,0091	0,6371	0,1371	0,0610
0,65	0,3746	0,0746	0,0181	0,6045	0,1045	0,0551
0,70	0,4487	0,1487	0,0379	0,5451	0,0451	0,0626
0,75	0,4577	0,1577	0,0370	0,5490	0,0451	0,0602
0,80	0,3584	0,0584	0,0075	0,5084	0,0084	0,0047
0,85	0,2118	-0,0882	0,0086	0,3055	-0,1945	0,0392
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,2981	-0,0019	0,0275	0,5106	0,0106	0,0582
0,60	0,2981	-0,0019	0,0138	0,5117	0,0117	0,0293
0,65	0,2983	-0,0017	0,0094	0,5099	0,0099	0,0190
0,70	0,3008	0,0008	0,0066	0,5074	0,0074	0,0131
0,75	0,3015	0,0015	0,0049	0,5057	0,0057	0,0099
0,80	0,3026	0,0026	0,0036	0,5024	0,0024	0,0074
0,85	0,3043	0,0043	0,0029	0,5009	0,0009	0,0056



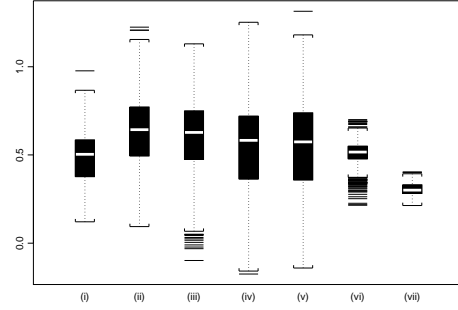
(a)



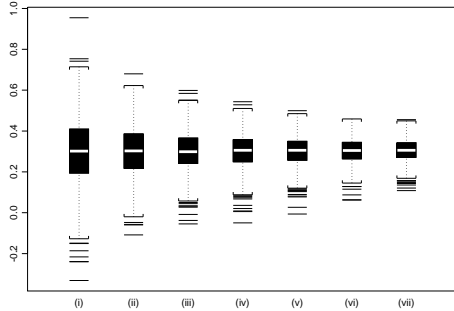
(b)



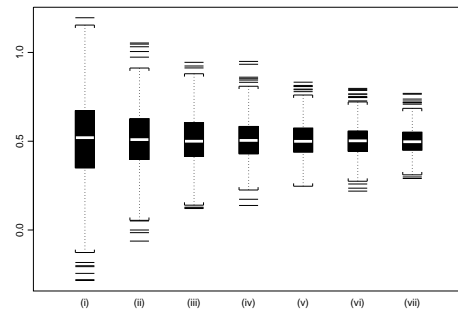
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.52: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 500$.

Caso $n = 1000$ e $k = 750$

Tabela A.62: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Estimador	média	vício	eqm
$\hat{d}_{MV}^{(1)}$	0,2978	-0,0022	0,0009
$\hat{\delta}_{MV}$	0,4783	-0,0217	0,0050
$\hat{d}_{LW}^{(1)}$	0,2734	-0,0266	0,0015
$\hat{\delta}_{LW}$	0,4713	-0,0287	0,0043

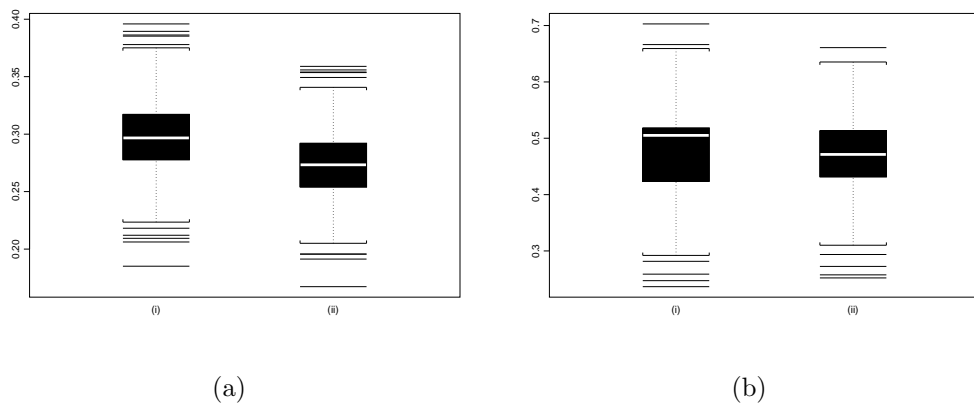
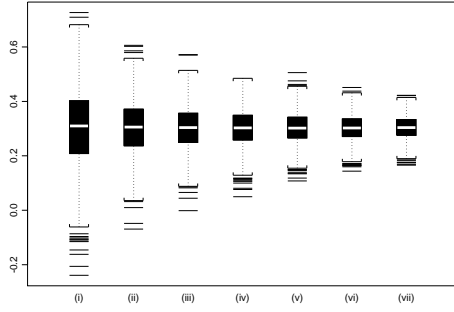


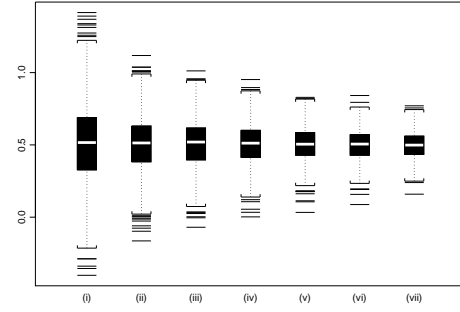
Figura A.53: Box-Plot dos Estimadores (a)-(i) $\hat{d}_{MV}^{(1)}$; (a)-(ii) $\hat{\delta}_{MV}$; (b)-(i) $\hat{d}_{LW}^{(1)}$; (b)-(ii) $\hat{\delta}_{LW}$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 750$.

Tabela A.63: Resultado da Estimação dos Parâmetros $d^{(1)}$ e δ , quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 750$.

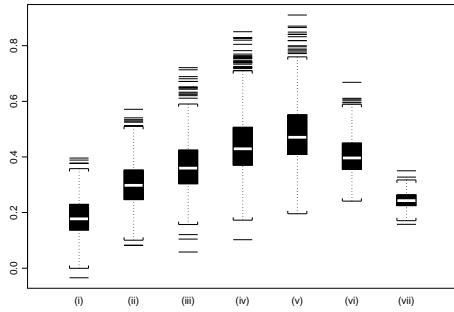
	$\hat{d}_{GPH}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPH}$		
α	média	vício	eqm	média	vício	eqm
0,50	0,3043	0,0043	0,0228	0,5092	0,0092	0,0818
0,60	0,3028	0,0028	0,0107	0,5089	0,0089	0,0384
0,65	0,3025	0,0025	0,0068	0,5076	0,0076	0,0271
0,70	0,3022	0,0022	0,0047	0,5057	0,0057	0,0186
0,75	0,3017	0,0017	0,0033	0,5046	0,0046	0,0143
0,80	0,3030	0,0030	0,0025	0,5010	0,0010	0,0109
0,85	0,3035	0,0035	0,0019	0,4970	-0,0030	0,0083
	$\hat{d}_{GPHBa}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{GPHBa}$		
0,50	0,1820	-0,1180	0,0185	0,4976	-0,0024	0,0220
0,60	0,3003	0,0003	0,0065	0,6369	0,1369	0,0565
0,65	0,3688	0,0688	0,0130	0,6186	0,1186	0,0599
0,70	0,4450	0,1450	0,0327	0,5452	0,0452	0,0685
0,75	0,4873	0,1873	0,0470	0,4125	0,0452	0,0501
0,80	0,4044	0,1044	0,0154	0,3538	-0,1462	0,0275
0,85	0,2452	-0,0548	0,0038	0,2409	-0,2591	0,0687
	$\hat{d}_{KP}^{(1)}$			$\hat{\delta}_{KP}$		
0,50	0,3037	0,0037	0,0222	0,5080	0,0080	0,0787
0,60	0,3034	0,0034	0,0101	0,5081	0,0081	0,0367
0,65	0,3029	0,0029	0,0066	0,5095	0,0095	0,0263
0,70	0,3022	0,0022	0,0043	0,5086	0,0086	0,0178
0,75	0,3037	0,0037	0,0032	0,5060	0,0060	0,0137
0,80	0,3053	0,0053	0,0023	0,5028	0,0028	0,0102
0,85	0,3066	0,0066	0,0017	0,4992	-0,0008	0,0080



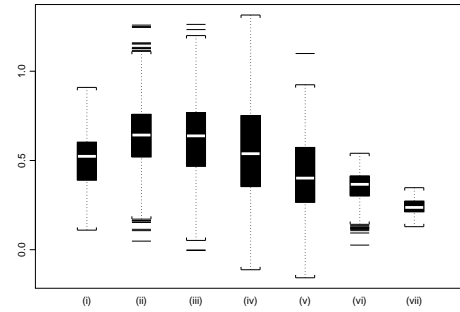
(a)



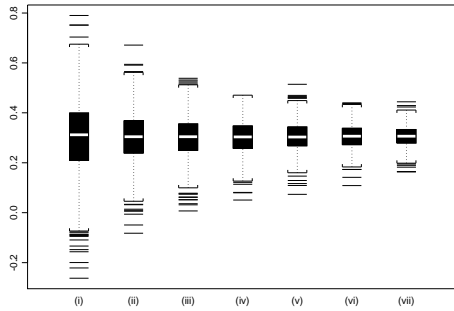
(b)



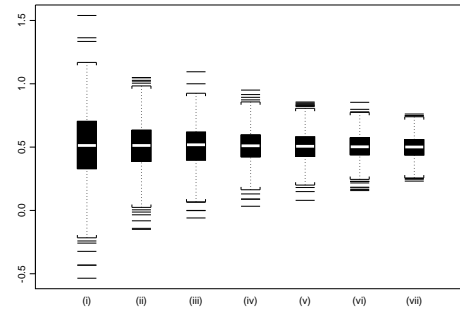
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura A.54: Box-Plot dos Estimadores (a) \hat{d}_{GPH} ; (b) $\hat{\delta}_{GPH}$; (c) \hat{d}_{GPHBa} ; (d) $\hat{\delta}_{GPHBa}$; (e) \hat{d}_{KP} ; (f) $\hat{\delta}_{KP}$; para (i) $\alpha = 0,50$; (ii) $\alpha = 0,60$; (iii) $\alpha = 0,65$; (iv) $\alpha = 0,70$; (v) $\alpha = 0,75$; (vi) $\alpha = 0,80$; (vii) $\alpha = 0,85$; quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$, $n = 1000$ e $k = 750$.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 250$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3007$, onde $\alpha = 0,85$. O vício encontrado foi de 0,0007. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{GPH} = 0,5007$, onde $\alpha = 0,65$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0007. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{LW}^{(1)}$, com 0,0031. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0036.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 500$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3000$, com $\alpha = 0,50$. O vício encontrado foi de zero. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = 0,5009$, com $\alpha = 0,85$, foi o que apresentou menor vício, com o valor de 0,0009. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0015. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0029.

O estimador que apresentou o menor vício na estimação de $d^{(1)} = 0,3$, quando $k = 750$, foi $\hat{d}_{GPH}^{(1)} = 0,3017$, com $\alpha = 0,75$. O vício encontrado foi de 0,0017. Na estimação de $\delta = 0,5$, o estimador $\hat{\delta}_{KP} = 0,4992$, com $\alpha = 0,85$ foi o que apresentou menor vício, com o valor de $-0,0008$. Em relação ao eqm, o estimador que apresentou melhores resultados para a estimação de $d^{(1)}$ foi $\hat{d}_{MV}^{(1)}$, com 0,0009. Na estimação de δ , o estimador com melhor resultado para o eqm foi $\hat{\delta}_{LW}$, com 0,0043.

Para uma melhor compreensão dos resultados exibidos nas Tabelas A.58-A.63, veja as Figuras A.49-A.54, onde apresentamos os box-plots dos estimadores.

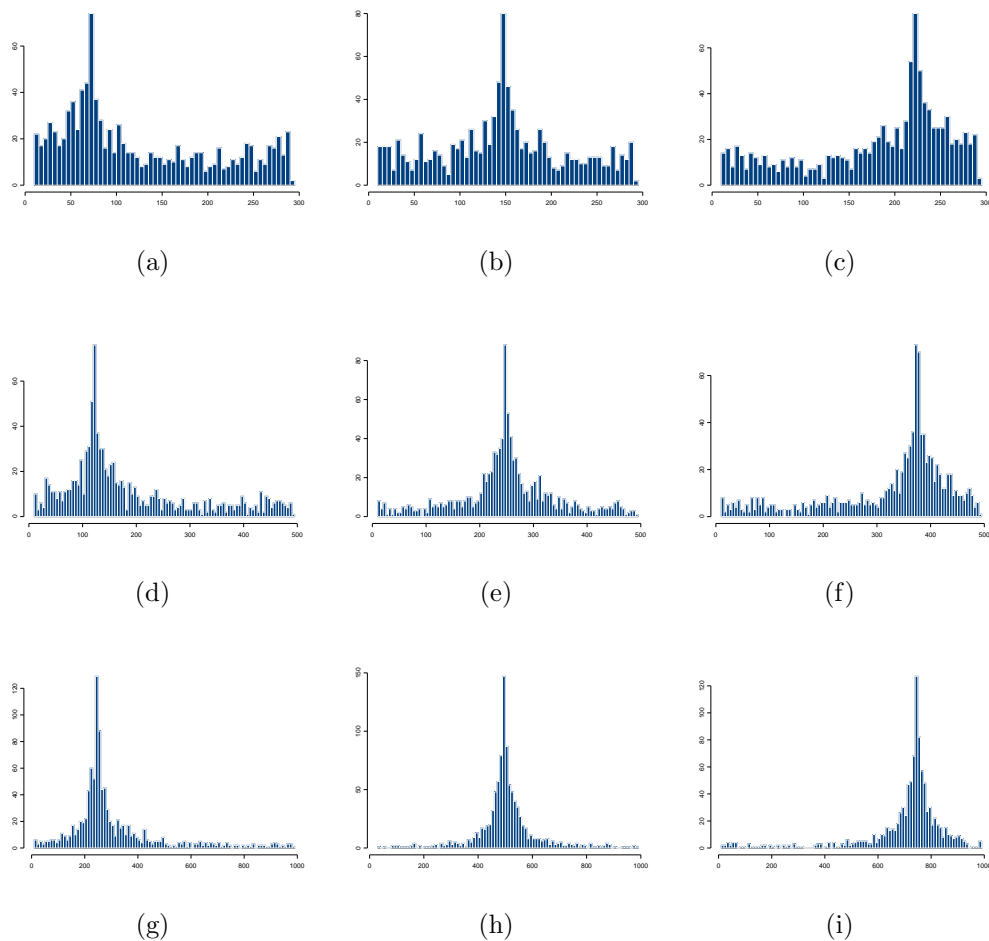


Figura A.55: Histogramas do Estimador \hat{k} quando $d^{(1)} = 0,1$, $\delta = 0,2$: (a) $n = 300$ e $k = 75$; (b) $n = 300$ e $k = 150$; (c) $n = 300$ e $k = 225$; (d) $n = 500$ e $k = 125$; (e) $n = 500$ e $k = 250$; (f) $n = 500$ e $k = 375$; (g) $n = 1000$ e $k = 250$; (h) $n = 1000$ e $k = 500$; (i) $n = 1000$ e $k = 750$.

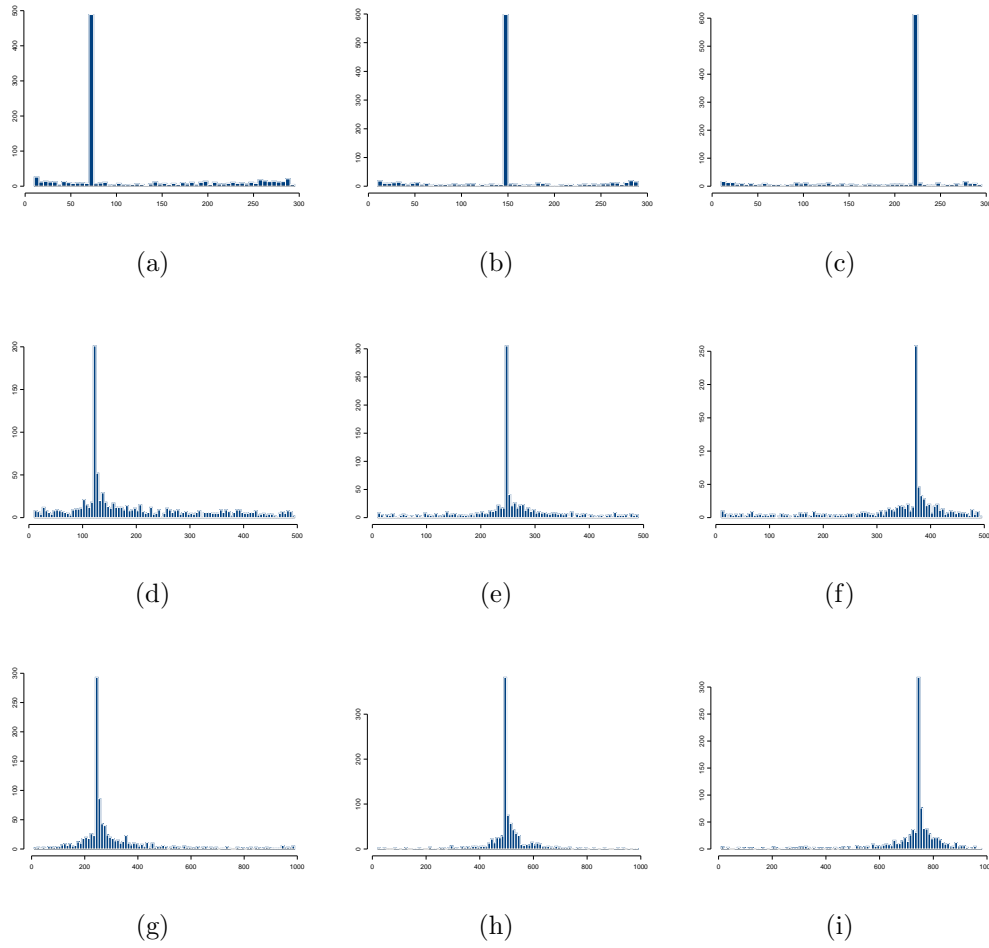


Figura A.56: Histogramas do Estimador \hat{k} quando $d^{(1)} = 0,6$, $\delta = 0,2$: (a) $n = 300$ e $k = 75$; (b) $n = 300$ e $k = 150$; (c) $n = 300$ e $k = 225$; (d) $n = 500$ e $k = 125$; (e) $n = 500$ e $k = 250$; (f) $n = 500$ e $k = 375$; (g) $n = 1000$ e $k = 250$; (h) $n = 1000$ e $k = 500$; (i) $n = 1000$ e $k = 750$.

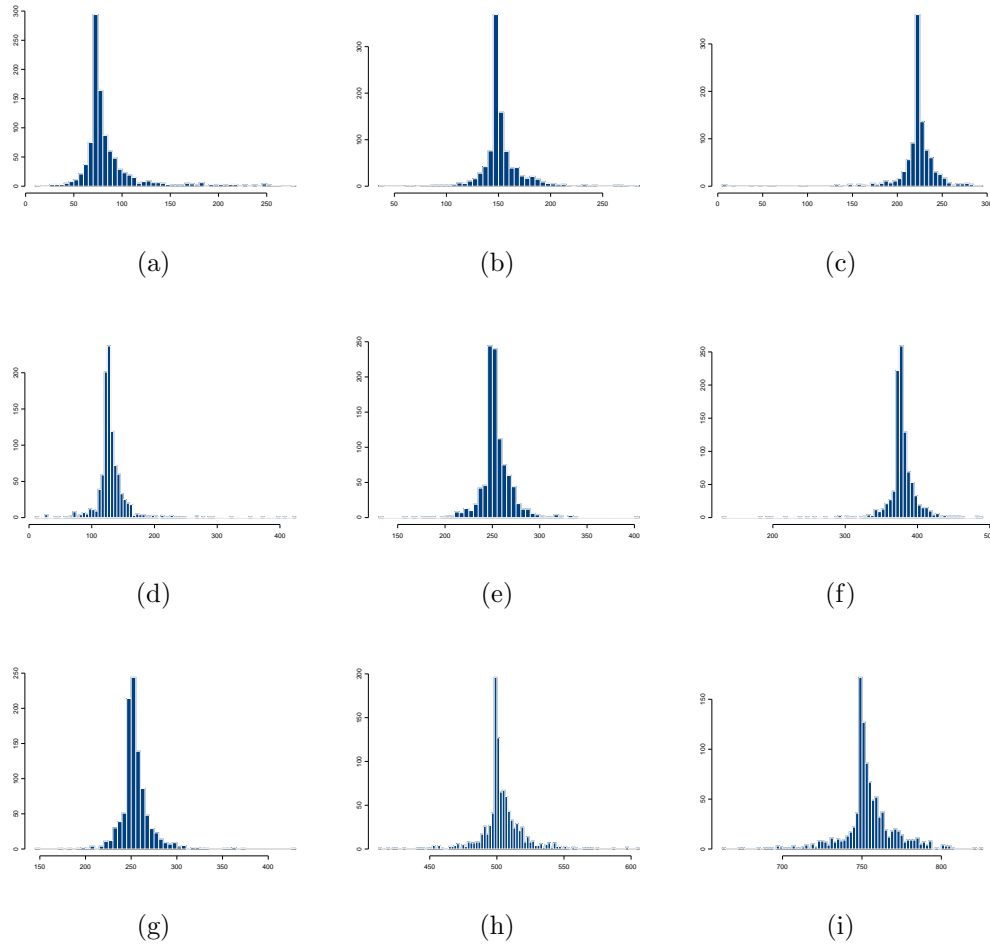


Figura A.57: Histogramas do Estimador \hat{k} quando $d^{(1)} = 0,3$, $\delta = 0,5$: (a) $n = 300$ e $k = 75$; (b) $n = 300$ e $k = 150$; (c) $n = 300$ e $k = 225$; (d) $n = 500$ e $k = 125$; (e) $n = 500$ e $k = 250$; (f) $n = 500$ e $k = 375$; (g) $n = 1000$ e $k = 250$; (h) $n = 1000$ e $k = 500$; (i) $n = 1000$ e $k = 750$.