Parte 0.1: Revisão de Inferência Estatística

Econometria I - IBMEC

Marcus L. Nascimento

5 de agosto de 2025

1. População x Amostra

2. Estimação

3. Testes de Hipóteses

População x Amostra

Definição

- **Inferência Estatística**: Conjunto de técnicas que objetiva estudar uma população através de informações fornecidas por uma amostra.

- **População** é um conjunto completo de elementos que compartilham uma ou mais características em comum.

    - Em pesquisas, corresponde ao grupo total de indivíduos, objetos ou eventos que atendem aos critérios do estudo.

- **Amostra** é um subconjunto da população que contém os elementos que podem ser observados.

    - A partir da amostra, quantidades de interesse podem ser medidas.

Exemplo

- Como exemplo, podemos considerar a análise da proporção de alunos de economia do IBMEC que desejam atuar no mercado financeiro.
    - População: alunos de economia do IBMEC;
    - Amostra: alunos da unidade Barra da Tijuca, alunos de Econometria I, alunos do 4º período.
- Supondo uma amostra com os alunos de Econometria I, que cuidados precisamos ter na escolha e na interpretação dos resultados?

Exemplo

- Como exemplo, podemos considerar a análise da proporção de alunos de economia do IBMEC que desejam atuar no mercado financeiro.
  - População: alunos de economia do IBMEC;
  - Amostra: alunos da unidade Barra da Tijuca, alunos de Econometria I, alunos do 4º período.
- Supondo uma amostra com os alunos de Econometria I, que cuidados precisamos ter na escolha e na interpretação dos resultados?
  - A amostra precisa ser "representativa" dos alunos de economia do IBMEC.

Aleatoriedade

- Uma forma simples de selecionar uma amostra seria selecionar aleatoriamente n alunos.

Aleatoriedade

- Uma forma simples de selecionar uma amostra seria selecionar aleatoriamente n alunos.
  - Se dois analistas seguirem tal procedimento, as amostras sorteadas serão iguais?

Aleatoriedade

- Uma forma simples de selecionar uma amostra seria selecionar aleatoriamente n alunos.
  - Se dois analistas seguirem tal procedimento, as amostras sorteadas serão iguais?
  - E se vários analistas realizarem o procedimento?

Aleatoriedade

- Uma forma simples de selecionar uma amostra seria selecionar aleatoriamente n alunos.
    - Se dois analistas seguirem tal procedimento, as amostras sorteadas serão iguais?
    - E se vários analistas realizarem o procedimento?
    - Apesar de diferentes, podemos ter respostas próximas ou iguais nas diversas amostras?

Aleatoriedade

- Uma forma simples de selecionar uma amostra seria selecionar aleatoriamente n alunos.
  - Se dois analistas seguirem tal procedimento, as amostras sorteadas serão iguais?
  - E se vários analistas realizarem o procedimento?
  - Apesar de diferentes, podemos ter respostas próximas ou iguais nas diversas amostras?
- Devido à natureza aleatória geralmente envolvida no processo amostral, não podemos garantir que repetições de amostras sempre produzam resultados idênticos.
- As quantidades associadas à amostra terão caráter aleatório e, portanto, devem receber tratamento probabilístico.

Estimação

Parâmetro, estimador e estimativa

- Denotaremos uma amostra de tamanho n, a ser retirada da população, por $X_1, \ldots, X_n$.
- **Parâmetro**: Quantidade da população, em geral desconhecida, sobre as quais temos interesse.
  - Usualmente, representado por letras gregas tais como θ, β, μ e σ;
  - μ e σ são utilizados como notação para média e desvio padrão populacional.
- **Estimador**: Combinação de elementos da amostra construída com o intuito de estimar um parâmetro de interesse na população.
  - Geralmente, representado por letras gregas com acento circunflexo: $\hat{\theta}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$.
- **Estimativa**: Valores numéricos assumidos pelos estimadores.

Exemplo

- Note que um **estimador** $\hat{\theta}$ é uma função das variáveis aleatórias constituintes da amostra, $\hat{\theta} = f(X_1, \ldots, X_n)$, portanto, também é uma **variável aleatória**.

- Retomando o exemplo no qual desejamos estimar a proporção de alunos de economia do IBMEC (**população**) que desejam atuar no mercado financeiro a partir da turma de Econometria I (**amostra**).
    - X_i, $i = 1, \ldots, n$, é uma variável aleatória que assume o valor 1 caso o aluno deseje atuar no mercado financeiro e 0 caso contrário.
    - Qual função dos valores amostrais (**estimador**) podemos utilizar?

Exemplo

- Note que um **estimador** $\hat{\theta}$ é uma função das variáveis aleatórias constituintes da amostra, $\hat{\theta} = f(X_1, \ldots, X_n)$, portanto, também é uma **variável aleatória**.

- Retomando o exemplo no qual desejamos estimar a proporção de alunos de economia do IBMEC (**população**) que desejam atuar no mercado financeiro a partir da turma de Econometria I (**amostra**).

  - X_i, $i = 1, \ldots, n$, é uma variável aleatória que assume o valor 1 caso o aluno deseje atuar no mercado financeiro e 0 caso contrário.

  - Qual função dos valores amostrais (**estimador**) podemos utilizar?

    1. $\hat{\theta}_1 = f_1(X_1, \ldots, X_n) = 100 \times \frac{(X_1 + X_n)}{2}$;
    2. $\hat{\theta}_2 = f_2(X_1, \ldots, X_n) = 100 \times X_1$;
    3. $\hat{\theta}_3 = f_3(X_1, \ldots, X_n) = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

Propriedades dos estimadores

- Diante de diferentes estimadores para um mesmo parâmetro, como decidir qual deles utilizar?

Propriedades dos estimadores

- Diante de diferentes estimadores para um mesmo parâmetro, como decidir qual deles utilizar?
  - Estudando as propriedades dos estimadores.

Propriedades dos estimadores

- Diante de diferentes estimadores para um mesmo parâmetro, como decidir qual deles utilizar?
    - Estudando as propriedades dos estimadores.
- **Vício**: Um estimador $\hat{\theta}$ é *não viciado* ou *não viesado* para um parâmetro θ se $E(\hat{\theta}) = \theta$.
- **Consistência**: Um estimador $\hat{\theta}$ é consistente se, à medida que o tamanho da amostra aumenta ($n \to \infty$), seu valor esperado converge para o valor de interesse e sua variância converge para 0.

$$\begin{aligned} i)\ \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) &= \theta; \\ ii)\ \lim_{n\to\infty} \text{Var}(\hat{\theta}) &= 0. \end{aligned}$$

Propriedades dos estimadores

- Observações:
  - Na definição de consistência, o estimador necessita ser não viciado apenas para valores grandes de n;
  - Na definição de vício, o resultado deve valer qualquer que seja o n.
- **Eficiência**: Dados dois estimadores não viciados $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ para um parâmetro θ, dizemos que $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente que $\hat{\theta}_2$ se $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$.
- Supondo $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com média μ e variância σ^2, o que pode ser dito sobre os estimadores $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ (média) e $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$ (variância)?

Estimação por intervalos

- Por serem variáveis aleatórias, os **estimadores** possuem distribuição de probabilidade.

- Podemos apresentar uma estimativa mais informativa para o parâmetro que inclua uma medida de imprecisão para a **estimativa pontual**.

- **Intervalo de confiança** incorpora, à estimativa pontual do parâmetro, informações a respeito da variabilidade do estimador.

- Intervalos de confiança são obtidos através da distribuição amostral de seus estimadores.

Estimação por intervalos (Caso Normal)

Suponha que a variável de interesse seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seja uma amostra aleatória cujos elementos são i.i.d com densidade Normal de média μ e variância σ^2.

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \ \ i = 1, \ldots, n;$$
$$X_i \text{ é independente de } X_j \text{ para todo } i \neq j.$$

Qual a distribuição amostral de $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$?

Estimação por intervalos (Caso Normal)

A partir da distribuição amostral de $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, temos:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Fixando um valor γ tal que $0 < \gamma < 1$, é possível encontrar um valor $z_{\gamma/2}$ tal que

$$P(|Z| < z_{\gamma/2}) = P(-z_{\gamma/2} < Z < z_{\gamma/2}) = \gamma.$$

O valor de $z_{\gamma/2}$ pode ser obtido através da tabela da Normal Padrão.

Estimação por intervalos (Caso Normal)

O intervalo de confiança para μ com coeficiente de confiança γ é dado por

$$\text{IC}(\mu, \gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Interpretação:

- γ representa a probabilidade do intervalo conter o verdadeiro valor da média populacional μ;
- Supondo várias amostras de mesmo tamanho, ao calcularmos os intervalos de confiança, esperamos que a proporção de intervalos que contenham o valor de μ seja igual a γ.

Estimação por intervalos (Teorema Central do Limite)

Suponha uma amostra aleatória simples de tamanho n retirada de uma população com média μ e variância σ^2. Representando tal amostra por n variáveis aleatórias independentes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e denotando sua média por $\bar{X}$, temos que

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{D} Z.$$

onde $Z \sim N(0, 1)$.

Observações:

- Note que o modelo da variável aleatória não é especificado;
- O Teorema garante que para n grande a distribuição da média amostral, devidamente padronizada, se comporta segundo um modelo Normal com média 0 e variância 1.

Estimação por intervalos (Caso Bernoulli)

Seja Y uma variável aleatória tal que

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se determinada característica é observado;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A proporção amostral pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \hat{Y}.$$

Supondo que $Y_1, Y_2, \ldots . Y_n$ forme um sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli.

- Para um tamanho de amostra grande, qual a distribuição aproximada de $\hat{p}$?
- Construa o intervalo de confiança para p.

Testes de Hipóteses

Conceitos Básicos

- O objetivo de um teste de hipóteses é verificar se há evidência suficiente contra a hipótese nula, ou seja, para rejeitar a hipótese nula.
  - Hipótese nula (H_0): Representa o *status quo*. Esta hipótese é tida como verdadeira a menos que haja evidência suficiente sugerindo o contrário;
  - Hipótese alternativa (H_1): Representa a sentença que o analista deseja concluir.
- Supondo que a área de *marketing* de uma companhia deseje testar a eficácia de uma nova campanha publicitária. Como as hipóteses podem ser definidas:

Conceitos Básicos

- O objetivo de um teste de hipóteses é verificar se há evidência suficiente contra a hipótese nula, ou seja, para rejeitar a hipótese nula.
  - Hipótese nula (H_0): Representa o *status quo*. Esta hipótese é tida como verdadeira a menos que haja evidência suficiente sugerindo o contrário;
  - Hipótese alternativa (H_1): Representa a sentença que o analista deseja concluir.
- Supondo que a área de *marketing* de uma companhia deseje testar a eficácia de uma nova campanha publicitária. Como as hipóteses podem ser definidas:

  H_0: A campanha não é eficaz;

  H_1: A campanha é eficaz.

Conceitos Básicos

- Em um teste de hipóteses, duas decisões são possíveis:

  1. Rejeitar a hipótese nula;

  2. Não rejeitar a hipótese nula.

- Por que não dizemos "aceitar a hipótese nula"?

Conceitos Básicos

- Em um teste de hipóteses, duas decisões são possíveis:

    1. Rejeitar a hipótese nula;

    2. Não rejeitar a hipótese nula.

- Por que não dizemos "aceitar a hipótese nula"?

    - Estamos assumindo que a hipótese nula é verdadeira e desejamos verificar se há evidência contra a mesma. Logo, a conclusão deve fazer referência a rejeitar a hipótese nula.

Conceitos Básicos

- Dois erros podem ser cometidos ao realizarmos um teste de hipóteses:

  1. Erro do Tipo I: Rejeitar a hipótese H_0 quando a mesma é verdadeira;
  2. Erro do Tipo II: Não rejeitar a hipótese H_0 quando a mesma é falsa.

	Situação Real	
Decisão	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão Correta
Não Rejeitar H_0	Decisão Correta	Erro tipo II

Conceitos Básicos

- Como estamos tratando de eventos em que há uma incerteza associada, desconhecemos a “verdade“ acerca da hipótese nula. Em outras palavras, não sabemos se a decisão tomada foi correta ou se cometemos um erro.

- Em situações reais, podemos apenas definir as probabilidades associadas a tais eventos:

$$\alpha = P(\text{erro Tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira});$$

$$\beta = P(\text{erro Tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}).$$

- **Poder** do teste: Probabilidade de H_0 ser rejeitada dado que a mesma é falsa $(1 - \beta)$.

Conceitos Básicos

- O erro mais importante a ser evitado é o erro do Tipo I.

- **Nível de significância** do teste corresponde à probabilidade α de erro do Tipo I.

- Com base no nível de significância α podemos determinar:

  1. **Região de rejeição** ou **Região crítica**: Conjuntos de valores para a estatística de teste que levam à rejeição de H_0;

  2. **Valores críticos**: Valores que separam as regiões de rejeição e de não rejeição.

- A região de rejeição é baseada na hipótese alternativa.

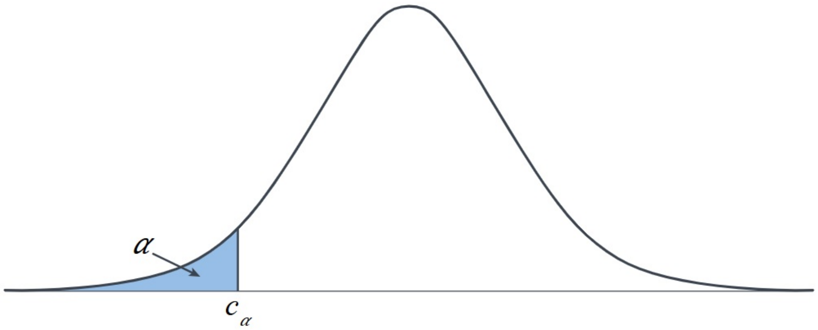
Conceitos Básicos (Teste unilateral a esquerda)

- Hipóteses:

  H_0: $\theta \geq \theta_0$;

  H_0: $\theta < \theta_0$.

- Rejeita H_0 se a estatística de teste é menor que o valor crítico (c_α).



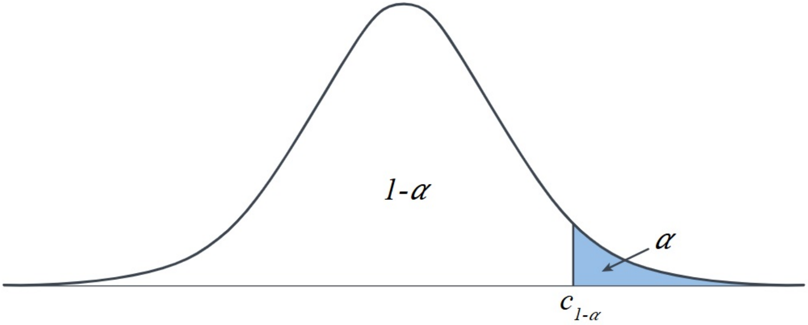
Conceitos Básicos (Teste unilateral a direita)

- Hipóteses:

  H_0: $\theta \leq \theta_0$;

  H_0: $\theta > \theta_0$.

- Rejeita H_0 se a estatística de teste é maior que o valor crítico ($c_{1-\alpha}$).



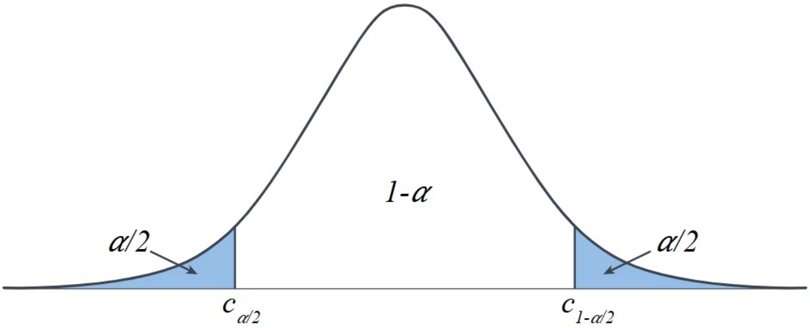
Conceitos Básicos (Teste bilateral)

- Hipóteses:

  H_0: $\theta = \theta_0$;

  H_0: $\theta \neq \theta_0$.

- Rejeita H_0 se a estatística de teste é maior que o valor absoluto do valor crítico ($c_{\alpha/2}$).



Exemplo (Teste bilateral)

Um pesquisador deseja estudar o efeito da ingestão de bebida alcoólica no tempo de reação a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com voluntários que são inoculados com a substância, submetidos a um estímulo elétrico e seus tempos de reação (em segundos) são registrados. Os seguintes valores são obtidos: 9,1; 9,3; 7,2; 7,5; 13,3; 10,9; 7,2; 9,9; 8,0; 8,6.

Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, o modelo Normal com média 8 e sdesvio padrão $\sigma = 2$ segundos. O pesquisador desconfia, no entanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Neste caso, as hipóteses de interesse são:

H_0: os voluntários apresentam tempo de reação padrão;
H_1: os voluntários têm tempo de reação alterado.

a) Descreva as hipóteses em termos estatísticos;

Exemplo (Teste bilateral)

Um pesquisador deseja estudar o efeito da ingestão de bebida alcoólica no tempo de reação a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com voluntários que são inoculados com a substância, submetidos a um estímulo elétrico e seus tempos de reação (em segundos) são registrados. Os seguintes valores são obtidos: 9,1; 9,3; 7,2; 7,5; 13,3; 10,9; 7,2; 9,9; 8,0; 8,6.

Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, o modelo Normal com média 8 e sdesvio padrão $\sigma = 2$ segundos. O pesquisador desconfia, no entanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Neste caso, as hipóteses de interesse são:

H_0: os voluntários apresentam tempo de reação padrão;
H_1: os voluntários têm tempo de reação alterado.

a) Descreva as hipóteses em termos estatísticos;

b) Encontre a região crítica para $\alpha = 0,6$;

Exemplo (Teste bilateral)

Um pesquisador deseja estudar o efeito da ingestão de bebida alcoólica no tempo de reação a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com voluntários que são inoculados com a substância, submetidos a um estímulo elétrico e seus tempos de reação (em segundos) são registrados. Os seguintes valores são obtidos: 9,1; 9,3; 7,2; 7,5; 13,3; 10,9; 7,2; 9,9; 8,0; 8,6.

Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, o modelo Normal com média 8 e sdesvio padrão $\sigma = 2$ segundos. O pesquisador desconfia, no entanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Neste caso, as hipóteses de interesse são:

H_0: os voluntários apresentam tempo de reação padrão;
H_1: os voluntários têm tempo de reação alterado.

a) Descreva as hipóteses em termos estatísticos;

b) Encontre a região crítica para $\alpha = 0,6$;

c) Calcule a probabilidade de erro do Tipo II.