

# Parte 1.2: Regressão Linear Múltipla (Estimação e Inferência)

Econometria I - IBMEC

Marcus L. Nascimento

16 de setembro de 2025

1. Regressão Linear Múltipla

2. Estimação

3. Inferência

## Regressão Linear Múltipla

- Anteriormente, estudamos a relação entre uma **variável dependente** e uma **variável independente** através de um modelo de **regressão linear simples**.
- Em casos onde há **duas ou mais** variáveis independentes, estabelecemos uma relação com uma variável dependente através de um modelo de **regressão linear múltipla**.
- O modelo de regressão linear múltipla é descrito da seguinte forma:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon,$$

onde:

- $\beta_0$ : coeficiente da regressão que representa o intercepto;
- $\beta_j$ : coeficiente da regressão associado com a variável independente  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ;
- $\varepsilon$ : erro aleatório.

# Introdução

- De forma análoga ao caso da regressão linear simples, assume-se que  $E[\varepsilon|x_1, x_2, \dots, x_p] = 0$ .
  - Variáveis independentes devem ser não correlacionadas com os fatores no termo de erro;
  - Forma funcional entre variável dependente e variáveis independentes corretamente especificada.
- Dada uma amostra de tamanho  $n$ ,  $(y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , o modelo de regressão linear múltipla é dado por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ou

$$E[y_i|x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}] = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}.$$

# Estimação

- No caso do modelo de **regressão linear simples**, vimos que os estimadores de **Mínimos Quadrados Ordinários** de  $\beta_0$  e  $\beta_1$  eram encontrados através da minimização da função a seguir:

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

- No caso do modelo de **regressão linear múltipla**, os estimadores de **Mínimos Quadrados Ordinários** de  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  podem ser encontrados de forma análoga, ou seja, através da minimização da soma dos erros quadráticos:

$$S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \dots - \beta_p x_{ip})^2.$$

# Estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários

O mínimo de  $S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$  é obtido através do cálculo de sua derivada com respeito a  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ , igualando o resultado a zero.

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_0} &= 0; \\ \frac{\partial S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_1} &= 0; \\ \frac{\partial S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_2} &= 0; \\ &\vdots \\ \frac{\partial S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_p} &= 0.\end{aligned}$$



# Estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários

O problema anterior de minimização recai na solução de um sistema de  $p + 1$  equações lineares em  $p + 1$  quantidades desconhecidas  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_0} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}) = 0; \\ \frac{\partial S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_1} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}) x_{i1} = 0; \\ \frac{\partial S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_2} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}) x_{i2} = 0; \\ &\vdots \\ \frac{\partial S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)}{\partial \beta_p} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}) x_{ip} = 0.\end{aligned}$$

# Interpretação

Seja  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_p x_p$  a **modelo de regressão estimado**, temos:

- $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ :  $\hat{y} = \hat{\beta}_0$ .  
 $\hat{\beta}_0$  é o valor médio estimado para a variável resposta, condicionado a  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$  e pode ser interpretável ou não.
- $x_1 \rightarrow x_1 + 1$ :  $\Delta \hat{y} = [\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(x_1 + 1) + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_p x_p] - [\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_p x_p] = \hat{\beta}_1$ .  
 $\hat{\beta}_1$  representa o quanto varia a média de  $y$  para um aumento de uma unidade da variável  $x_1$  quando mantidas as demais variáveis constantes.
- $x_j \rightarrow x_j + 1$ :  $\Delta \hat{y} = [\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_j(x_j + 1) + \dots + \hat{\beta}_p x_p] - [\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_j x_j + \dots + \hat{\beta}_p x_p] = \hat{\beta}_j$ .  
 $\hat{\beta}_j$  representa o quanto varia a média de  $y$  para um aumento de uma unidade da variável  $x_j$  quando mantidas as demais variáveis constantes.

## Exercício (Wooldridge, J. M. (2003))

Através de um modelo de regressão linear múltipla deseja-se encontrar a relação entre anos de educação (*educ*), anos de experiência (*exper*), anos na posição atual (*tenure*) e salário (em escala logarítmica). Utilizando dados de 526 trabalhadores, a equação a seguir é estimada:

$$\log(\text{salário}) = 0,284 + 0,092 \text{ educ} + 0,0041 \text{ exper} + 0,022 \text{ tenure}.$$

- (i) Qual interpretação é dada para o coeficiente 0,092?
- (ii) Qual o efeito estimado sobre o salário considerando a permanência na mesma posição por mais um ano?

- A1. (Linearidade) No modelo populacional, a variável resposta  $y$  está relacionada as variáveis independentes  $x_1, \dots, x_p$  e ao erro  $\varepsilon$  da seguinte forma:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + \varepsilon,$$

onde  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  são os parâmetros desconhecidos de interesse.

- A2. (Amostragem aleatória) Pode-se utilizar uma amostra aleatória de tamanho  $n$  do modelo populacional,  $\{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}, y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ .
- A3. (Média Condicional Zero)  $E(\varepsilon | x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$ .

A4. (Ausência de Colinearidade Perfeita) Na amostra (e, portanto, na população) nenhum regressor é constante e não há relação linear **perfeita** entre os regressores.

A5. (Homocedasticidade)  $\text{Var}(\varepsilon|x_1, x_2, \dots, x_p) = \sigma^2$ .

OBSERVAÇÃO:

- $E(\varepsilon|x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$  implica que todos os fatores contidos no erro devem ser não correlacionados com as variáveis explicativas, e deve ter sido usada a forma funcional correta.

POSSÍVEIS CAUSAS PARA VIOLAÇÃO DA SUPOSIÇÃO A3 ( $E(\varepsilon|x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$ ):

- Omissão de variável explicativa importante, correlacionada com  $x_1, x_2, \dots$  ou  $x_p$ ;
- Forma funcional especificada incorretamente;
- Erro de medida em  $x_1, x_2, \dots$  ou  $x_p$ ;
- Simultaneidade entre  $y$  e  $x_1, x_2, \dots$  ou  $x_p$ .

Sob as suposições A1-A4, os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários  $\hat{\beta}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , são não viesados:

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p.$$

COMO A EXCLUSÃO OU INCLUSÃO DE VARIÁVEIS INDEPENDENTES AFETA TAL PROPRIEDADE?

- Inclusão de variável irrelevante: não altera a propriedade de ausência de viés;
- Omissão de variável relevante (caso em que  $p = 2$  e  $p = 1$  é utilizado):

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^2 (x_{i1} - \bar{x}_1)x_{i2}}{\sum_{i=1}^2 (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}$$

	<b><math>\text{Corr}(x_1, x_2) &gt; 0</math></b>	<b><math>\text{Corr}(x_1, x_2) &lt; 0</math></b>
<b><math>\beta_2 &gt; 0</math></b>	positive bias	negative bias
<b><math>\beta_2 &lt; 0</math></b>	negative bias	positive bias



## OBSERVAÇÕES:

- Viés depende tanto dos sinais quanto das magnitudes;
- Em geral, se  $p > 1$ , a omissão de qualquer variável relevante faz com que todos os estimadores de mínimos quadrados sejam viesados;
- A menos que a variável omitida seja irrelevante ou não correlacionada com as demais variáveis explicativas presentes no modelo, os estimadores de mínimos quadrados serão viesados.

- As suposições A1-A5 conjuntamente são conhecidas como **suposições de Gauss-Markov**.
- Sob as suposições de Gauss-Markov, as variâncias dos estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários são descritas da seguinte forma:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{\text{SST}_j(1 - R_j^2)}, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

onde

- $\text{SST}_j = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$  é a variação amostral em  $x_j$ ;
- $R_j^2$  é o coeficiente de determinação calculado a partir da regressão de  $x_j$  nas demais variáveis independentes (incluindo intercepto).

- Componentes das variâncias dos estimadores:  $\sigma^2$ ,  $SST_j$  e  $R_j^2$ .
- Variância do erro ( $\sigma^2$ ): Quanto maior o  $\sigma^2$ , maior a variância dos estimadores.
  - Mais “Ruído” no modelo de regressão múltipla  $\rightarrow$  Maior dificuldade em estimar os efeitos das variáveis independentes em  $y \rightarrow$  Maior variância dos estimadores.
- Variação amostral total em  $x_j$  ( $SST_j$ ): Quanto maior o  $SST_j$ , menor  $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ .
  - Para estimar  $\beta_j$ , é desejável que haja o máximo de variação amostral possível em  $x_j$  (aumento do tamanho da amostra  $n$ ).

- Relação linear entre as variáveis independentes ( $R_j^2$ ): Quanto maior o  $R_j^2$ , maior a variância dos estimadores.
  - Um  $R_j^2$  próximo a 1 indica que as demais variáveis independentes (parte ou alguma das variáveis independentes) explicam muito da variação de  $x_j$ ;
  - Forte relação linear entre  $x_j$  e as demais variáveis independentes (parte ou alguma das variáveis independentes) pode implicar em um aumento na variância dos estimadores;
  - Dado  $\sigma^2$  e  $SST_j$ , a menor variância para  $\hat{\beta}_j$  é obtida quando  $R_j^2 = 0$ , ou seja, quando não há correlação entre  $x_j$  e as demais variáveis independentes.
- Inclusão de variável irrelevante: Geralmente aumenta as variâncias dos demais estimadores de MQO.

(Teorema de Gauss-Markov) Melhores estimadores lineares não-viesados (BLUE):

- Sob as suposições A1-A5, os estimadores de MQO para os parâmetros  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  são os melhores dentre todos os estimadores da classe dos lineares não-viesados;
- Além de serem não-viesados, apresentam a menor variância dentre os demais estimadores não-viesados.

## Estimador para a variância do erro ( $\sigma^2$ )

Seja  $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}$  o **resíduo** da regressão linear. Para obtermos um estimador não enviesado de  $\sigma^2$ , analisamos a dispersão em torno da reta de regressão estimada:

$$\text{SSR} = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \text{ (Soma de quadrados dos resíduos) .}$$

Sob as suposições A1-A5,  $E(\sum_{i=1}^n e_i^2) = (n - p - 1)\sigma^2$ , logo um estimador não viesado de  $\sigma^2$  é

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n - p - 1} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p - 1}.$$

## Cálculo das variâncias dos estimadores de MQO

Com base em uma amostra, é possível encontrar estimativas para as variâncias de  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p$  substituindo  $\sigma^2$  por  $\hat{\sigma}^2$  (estimador não viesado para  $\sigma^2$ ) na expressão para  $\text{Var}(\hat{\beta}_j)$ :

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_j) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\text{SST}_j(1 - R_j^2)}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

## Exercício (Wooldridge, J. M. (2003))

Utilizando dados de 4.137 estudantes universitários, a seguinte equação foi estimada via Mínimos Quadrados Ordinários:

$$GPA = 1,392 - 0,0135 \text{ hsperc} + 0,00148 \text{ sat},$$

onde *hsperc* é o percentil do aluno no ensino médio, por exemplo, *hsperc* = 5 indica que o aluno terminou o ensino médio entre os 5% melhores classificados, e *sat* é a nota combinada dos exames oral e de matemática.

- (i) Por que faz sentido que o coeficiente de *hsperc* seja negativo?
- (ii) Qual o *GPA* predito quando *hsperc* = 20 e *sat* = 1050?
- (iii) Considere dois estudantes (A e B) que tenham se formado no mesmo percentil no ensino médio, porém o *sat* do estudante A foi 140 pontos maior. Qual a diferença predita para o *GPA* dos dois estudantes?
- (iv) Fixado *hsperc*, calcule a diferença no *sat* que implica uma diferença de 0,50 no *GPA*.



# Inferência

- Até este momento, obtemos os estimadores de mínimos quadrados ordinários considerando um modelo de regressão linear múltipla e estudamos suas propriedades.
- A seguir, voltaremos nossa atenção para o problema de testes de hipóteses acerca dos parâmetros de um modelo de regressão.
- Para tal, além das suposições de Gauss-Markov (A1-A5), adicionamos a seguinte suposição:  
  
A6. O erro estocástico  $\varepsilon$  é independente das variáveis explicativas e segue distribuição normal com média zero e variância  $\sigma^2$ ,  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ .

## OBSERVAÇÕES:

- Para aplicações com dados do tipo *cross-sectional*, as suposições A1-A6 são conhecidas como suposições do modelo linear clássico (suposições CLM).
- Podemos resumir as suposições CLM na população da seguinte forma:

$$y|x_1, x_2, \dots, x_p \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p, \sigma^2).$$

- Sob as suposições CLM, os estimadores de mínimos quadrados são **estimadores não-viesados de variância mínima**.

## Distribuição amostral de $\hat{\beta}_j$

Sob as suposições CLM (MLR.1 a MLR.6), condicionado nos valores amostrais das variáveis explicativas, temos que

$$\hat{\beta}_j \sim N \left( \beta_j, \frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)} \right).$$

Da expressão anterior, temos que

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{SST_j(1 - R_j^2)}}} \sim N(0, 1).$$

- Na distribuição amostral de  $\hat{\beta}_j$ ,  $\sigma^2$  é um parâmetro desconhecido e, portanto, deverá ser estimado.
- “Substituiremos”  $\sigma^2$  por  $\hat{\sigma}^2$ .
- Dessa forma, precisamos estudar a distribuição de probabilidades da nova variável aleatória resultante, ou seja,

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\text{SST}_j(1-R_j^2)}}}.$$

Sob as suposições CLM (A1-A6),

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}}} \sim t_{n-(p+1)},$$

onde  $p + 1$  é o número de parâmetros desconhecidos no modelo populacional  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p$ .

Com base neste resultado, podemos testar hipóteses envolvendo  $\hat{\beta}_j$ . Em particular, estamos interessados no seguinte teste:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ } (\beta_j < 0 \text{ ou } \beta_j > 0).$$

Neste caso, a estatística de teste é denominada **estatística  $t$**  de  $\hat{\beta}_j$  e é definida por

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}}}.$$

Logo, para um nível de significância  $\alpha$ , rejeitamos  $H_0$  se

- $|t_{\hat{\beta}_j}| > t_{n-p-1;1-\alpha/2}$  (teste bilateral);
- $t_{\hat{\beta}_j} > t_{n-p-1;1-\alpha}$  quando  $H_1 : \beta_j > 0$ ;
- $t_{\hat{\beta}_j} < t_{n-p-1;\alpha}$  quando  $H_1 : \beta_j < 0$ .

## Teste $t$

- Uma forma alternativa de decidirmos se rejeitamos ou não  $H_0$  consiste em encontrar o valor- $p$ .
- Dado o valor observado da estatística  $t$ , o valor- $p$  é o menor nível de significância para o qual a hipótese nula é rejeitada.
- Para um teste onde  $H_0 : \beta_j = 0$ , valor- $p$  é dado por

$$P(|T| > |t|),$$

onde  $T$  denota uma variável aleatória com distribuição  $t$ -Student com  $n - p - 1$  graus de liberdade e  $t$  denota o valor numérico da estatística de teste.

- Valores- $p$  pequenos são evidência contra a hipótese nula; valores- $p$  altos fornecem pouca evidência contra  $H_0$ .



- Uma terceira forma de decidirmos se rejeitamos ou não  $H_0 : \beta_j = 0$  é através do intervalo de confiança.
- Considerando a distribuição da estatística de teste, é possível construir um intervalo de confiança tal que

$$IC(\beta_j; \gamma) = \left( \hat{\beta}_j - t_{n-p-1; \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1 - R_j^2)}}, \hat{\beta}_j + t_{n-p-1; 1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1 - R_j^2)}} \right),$$

onde  $\gamma = 1 - \alpha$  e  $t_{n-p-1; \frac{\alpha}{2}} = t_{n-p-1; 1 - \frac{\alpha}{2}}$ .

- Sob um teste bilateral, rejeitamos  $H_0$  se  $0 \in IC(\beta_j; \gamma)$ .

- Através do Teste  $t$  é possível testar se uma particular variável independente  $x_j$  tem efeito sobre a variável resposta  $y$ .
- Em algumas situações, pode ser de interesse testar se um grupo de variáveis independentes tem efeito sobre a variável resposta, ou seja,

$$H_0 : \beta_{j_1} = \beta_{j_2} = \dots = \beta_{j_q}$$

$$H_1 : H_0 \text{ não é verdadeira,}$$

onde  $q < p$  é o tamanho do grupo a ser testado.

- Para tal, é necessário construir uma estatística de teste e uma possível maneira seria olhar no aumento relativo no SSR entre o modelo irrestrito  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  e o modelo restrito  $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_q})$ .

A estatística  $F$  é definida da seguinte forma:

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSS_{ur}/(n - p - q)},$$

onde

- $SSR_r$  é a soma dos quadrados dos resíduos do modelo restrito;
- $SSR_{ur}$  é a soma dos quadrados dos resíduos do modelo irrestrito.

Sob  $H_0$  e assumindo que as suposições A1-A6 sejam válidas,  $F \sim F_{q, n-p-1}$ . Neste caso, rejeitamos  $H_0$  se  $F > c$ , onde  $c$  é obtido através da distribuição  $F_{q, n-p-1}$ .

## Exercício (Wooldridge, J. M. (2003))

Considere que as taxas de aprovação de empréstimos em uma comunidade sejam determinadas por

$$apprate = \beta_0 + \beta_1 percmin + \beta_2 avginc + \beta_3 avgwlth + \beta_4 vgdebt + \varepsilon,$$

onde *percmin* é a porcentagem de minorias na comunidade, *avginc* é a renda média, *avgwlth* é a riqueza média, e *avgdebt* é alguma medida das obrigações médias de dívida.

- (i) Como enunciar a hipótese nula de que não há diferença nas taxas de aprovação de empréstimos entre bairros devido à composição racial e étnica, uma vez que a renda média, a riqueza média e a dívida média tenham sido controladas?
- (ii) Como enunciar a hipótese alternativa de que há discriminação contra minorias nas taxas de aprovação de empréstimos?

## Exercício (Wooldridge, J. M. (2003))

Considere a relação entre o desempenho individual em um teste padronizado e uma variedade de outras variáveis. Os fatores escolares incluem tamanho médio da turma, despesas por aluno, remuneração média dos professores e total de matrículas da escola. Outras variáveis específicas do aluno são renda familiar, escolaridade da mãe, escolaridade do pai e número de irmãos.

O modelo especificado é dado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \text{score} = & \beta_0 + \beta_1 \text{classsize} + \beta_2 \text{expend} + \beta_3 \text{tchcomp} + \beta_4 \text{enroll} + \beta_5 \text{faminc} \\ & + \beta_6 \text{motheduc} + \beta_7 \text{fatheduc} + \beta_8 \text{siblings} + \varepsilon. \end{aligned}$$

- (i) Enuncie a hipótese nula de que as variáveis específicas do estudante não têm efeito sobre o desempenho em testes padronizados, uma vez que os fatores relacionados à escola tenham sido controlados.
- (ii) Qual o valor de  $p$  e  $q$  neste exemplo?
- (iii) Escreva a versão restrita do modelo.