Parte 2.1: Variáveis Binárias

Econometria I - IBMEC

Marcus L. Nascimento

20 de outubro de 2025

Introdução

Introdução

- Anteriormente, estudamos modelos de regressão linear (simples e múltipla) nos quais a variável resposta Y era contínua e estava definida no conjunto dos números reais.

- Continuamos interessados em aprender sobre Y a partir de um conjunto de variáveis independentes $X_1, X_2, \ldots, X_p$, porém estudaremos o caso em que a variável dependente é **binária** (1/0, sim/não, sucesso/fracasso, entre outras):

  - Emprego: pessoa empregada ($1 =$ sim, $0 =$ não);

  - Mercado formal: carteira assinada ($1 =$ sim, $0 =$ não);

  - Programa social: pessoa beneficiária ($1 =$ sim, $0 =$ não).

Introdução

- No caso de variáveis binárias, estamos interessados em modelar a probabilidade relacionada à resposta:

$$\mathrm{E}(Y=1|X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_p=x_p)=\mathrm{P}(Y=1|X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_p=x_p).$$

- A relação entre a variável dependente e as variáveis independentes é descrita através da seguinte classe de modelos:

$$\mathrm{P}(Y=1|X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_p=x_p)=g(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_px_p),$$

onde $g(\cdot)$ é uma função que assume valores entre 0 e 1, $0<g(z)<1$ para todo z definido nos reais.

Introdução

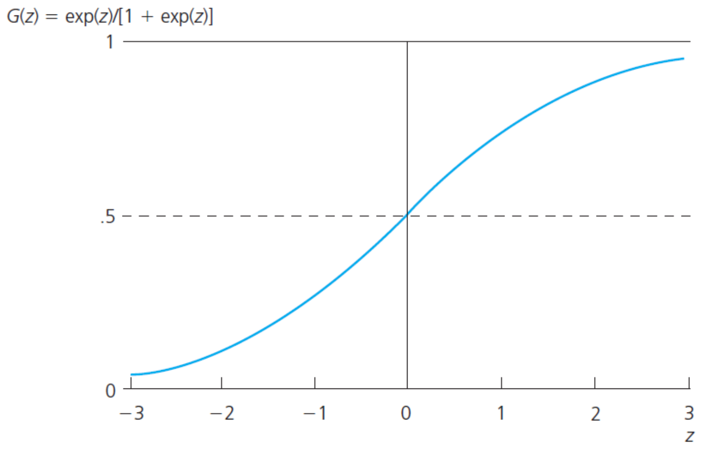
- A função $g(\cdot)$ pode ser especificada de diferentes formas, porém estudaremos duas funções em particular: **modelo logit** e **modelo probit**.
- No modelo logit, $g(\cdot)$ é a função logística: $g(z) = \frac{\exp\{z\}}{1+\exp\{z\}}$.
    - Note que $g(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória logística padrão.
- No modelo probit, $g(\cdot)$ é função de distribuição acumulada da normal padrão:

$$g(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(\nu) d\nu,$$

onde $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\exp\{-z^2/2\}$ é a função densidade de probabilidade da normal padrão.

Introdução

FIGURE 17.1 Graph of the logistic function $G(z) = \exp(z)/[1 + \exp(z)]$.



Introdução

- Devido à natureza não linear de $g(\cdot)$, a magnitude dos coeficientes β_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, não possui uma interpretação direta.

- Se X_j é uma variável contínua, seu efeito parcial em $p(\mathbf{x}) = \mathrm{P}(Y = 1 | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_p = x_p)$ é obtido através da derivada parcial:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x})}{x_j} = g'(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p)\beta_j, \text{ onde } g'(z) = \frac{dg(z)}{dz}.$$

  - Como $g(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada (fda) de uma variável aleatória contínua, $g'(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade (fdp).
  - Nos casos logit e probit, $g(\cdot)$ é uma função estritamente crescente, logo $g'(\cdot) > 0 \Rightarrow$ os efeitos parciais terão o mesmo sinal que β_j.
  - Os efeitos relativos de quaisquer duas variáveis independentes contínuas não dependem de $\mathbf{x}$: a razão dos efeitos parciais de x_{j_1} e x_{j_2} é β_{j_1}/β_{j_2}.

Estimação (Máxima Verossimilhança)

Estimação por Máxima Verossimilhança

- No caso em que a variável resposta é contínua e definida nos reais, aplicamos o método de mínimos quadrados ordinários para estimar os parâmetros do modelo.
    - Nenhuma hipótese sobre a distribuição condicional de y dado $x_1, x_2, \ldots, x_p$ é necessária.
- Devido à natureza não-linear de $\mathrm{E}(y|x_1, x_2, \ldots, x_p)$, aplicar a estimação por máxima verossimilhança torna-se mais usual.
    - Método baseado na distribuição condicional de y dado $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Estimação por Máxima Verossimilhança

Suponha uma amostra aleatória de tamanho n. Para obtermos o estimador de máxima verossimilhança, é necessária a densidade y_i dado $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$:

$$\begin{aligned} f(y_i|x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}) &= [g(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip})]^{y_i} \\ &\times [1 - g(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip})]^{(1-y_i)}, \; y_i \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

A função **log-verossimilhança** para observação i é uma função dos parâmetros e dos dados (y_i, x_i) é obtida ao tomarmos o logaritmo da equação anterior:

$$\begin{aligned} \ell_i(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p) &= y_i \log [g(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip})] \\ &+ (1 - y_i) [1 - g(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip})] \end{aligned}$$

Estimação por Máxima Verossimilhança

A log-verossimilhança para uma amostra de tamanho n é, portanto, a soma em todas observações:

$$\begin{aligned}
\ell(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p) &= \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i \log\left[g(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip})\right] \\
&+ \sum_{i=1}^{n} (1 - y_i)\left[1 - g(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip})\right]
\end{aligned}$$

O estimador de máxima verossimilhança de β_j, $j = 0, 1, \ldots, p$, denotado por $\hat{\beta}_j$ é obtido através da maximização da log-verossimilhança.

Estimação por Máxima Verossimilhança

Observações:

- Devido à natureza não-linear do problema de maximização, não é possível obter fórmulas fechadas para os estimadores nos casos logit e probit.
    - Métodos numéricos são aplicados para encontrar as soluções do problema.
- Também, devido à natureza não linear do problema de maximização, a teoria estatística dos modelos logit e probit é mais difícil do que no método de mínimos quadrados ordinários.
- Sob condições bastante gerais, o estimador de máxima verossimilhança é
    - Consistente;
    - Assintoticamente normal;
    - Assintoticamente eficiente.
- A partir dos resultados de normalidade assintótica, é possível testar a hipótese $\mathrm{H}_0 : \beta_j = 0$ de maneira usual utilizando uma estatística t $\hat{\beta}_j/\mathrm{se}(\hat{\beta}_j)$.

Estimação por Máxima Verossimilhança

- Através de $\hat{\beta}_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, podemos estimar os efeitos de x_j em $p(\mathbf{x}) = \mathrm{P}(Y = 1|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_p = x_p)$. Se x_j é uma variável contínua, temos:

$$\Delta \hat{p}(\mathbf{x}) \approx [g'(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_p x_p)\hat{\beta}_j]\Delta x_j$$

  para "pequenas" variações em x_j.

- Para $\Delta x_j = 1$, temos que a variação na probabilidade de sucesso estimada é $g'(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_p x_p)\hat{\beta}_j$.

- Sumarizar os efeitos parciais, no entanto, pode ser complicado considerando que $g'(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_p x_p)\hat{\beta}_j$ depende de todas variáveis independentes.

Estimação por Máxima Verossimilhança

- Um alternativa para se obter as magnitudes dos efeitos parciais de forma resumida se dá ao considerarmos uma especificação única para $g'(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_p x_p)\hat{\beta}_j$ e multiplicá-la por cada β_j.

- Neste caso, a maneira mais comum é substituir cada variável independente por sua média amostral:

$$g'(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 + \ldots + \hat{\beta}_p \bar{x}_p)\hat{\beta}_j. \tag{1}$$

  - Ao multiplicarmos (1) por β_j, obtemos o efeito parcial de x_j na pessoa "média" da amostra;
  - Efeito parcial na média (PEA).

Estimação por Máxima Verossimilhança

- Há dois problemas potenciais em utilizar PEAs para resumir os efeitos parciais de variáveis independente:
  - Nos casos em que a variável independente é discreta, a média não representa ninguém na amostra (ou na população);
  - Nos casos em que uma transformação não-linear é realizada em uma variável contínua, não é claro se aplicamos a média na função não-linear ou a função não-linear na média.
    - Por exemplo, $\overline{\log(\text{vendas})}$ ou $\log(\overline{\text{vendas}})$.
- Alternativamente, podemos calcular o efeito parcial médio (APE):

$$\left[n^{-1}\sum_{i=1}^{n} g'(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_p x_{ip})\right]\beta_j.$$

Teste de Razão de Verossimilhança

Teste de Razão de Verossimilhança

- Nos casos em que estimar os modelos probit e logit com e sem restrição, o **teste de razão de verossimilhança** pode ser aplicado para testar hipóteses acerca de um grupo de variáveis:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \beta_{p-q+1} = \beta_{p-q+2} = \ldots = \beta_p = 0 \\
H_1 &: H_0 \text{ não é verdadeira,}
\end{aligned}
$$

  onde $q < p$ é o tamanho do grupo a ser testado.

- Como o estimador de máxima verossimilhança maximiza a função log-verossimilhança, o teste se baseia no fato de que retirar variáveis geralmente diminui (ou pelo menos mantém) o valor da log-verossimilhança.
  - A questão é se a diminuição na log-verossimilhança é grande o suficiente para concluir se os grupo de variáveis é relevante.

Teste de Razão de Verossimilhança

- A estatística de razão de verossimilhança é dada por:

$$LR = 2[\ell_{ur} - \ell_r]$$

  onde ℓ_{ur} é o valor da log-verossimilhança para o modelo irrestrito e ℓ_r é o valor da log-verossimilhança para o modelo restrito.

  - Função log-verossimilhança é sempre um número negativo;
  - LR é não negativa e usualmente estritamente positiva ($\ell_{ur} > \ell_r$);
  - A multiplicação por 2 é necessária para que LR possua aproximadamente uma distribuição χ^2. Se estamos testando a exclusão de q variáveis, LR terá distribuição χ^2_q.

Capacidade Preditiva e Qualidade do Ajuste

Capacidade Preditiva

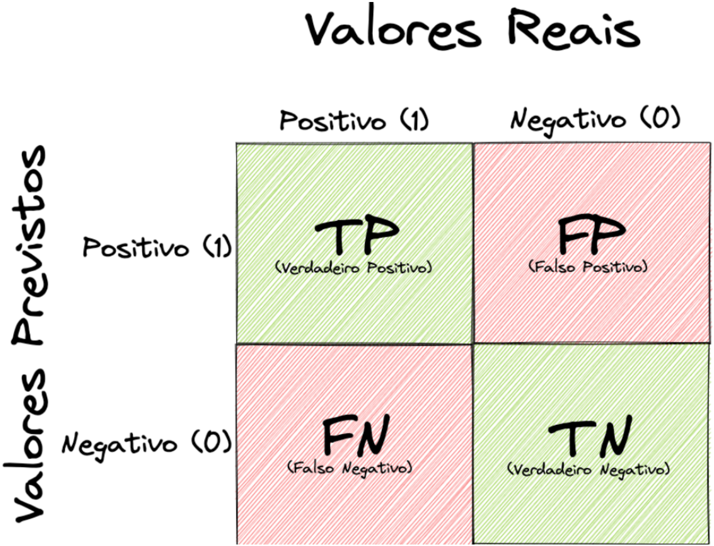
- Diremos que um preditor binário para y_i assume valor 1 se $g(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x}_1 + \hat{\beta}_2\bar{x}_2 + \ldots + \hat{\beta}_p\bar{x}_p)$ é pelo menos $0,5$ e 0 caso contrário:

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} 1, & \text{se } g(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x}_1 + \hat{\beta}_2\bar{x}_2 + \ldots + \hat{\beta}_p\bar{x}_p) \geq 0,5 \\ 0, & \text{se } g(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{x}_1 + \hat{\beta}_2\bar{x}_2 + \ldots + \hat{\beta}_p\bar{x}_p) < 0,5 \end{cases}$$

- Considerando $\{\tilde{y}_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ podemos verificar a capacidade preditiva do modelo entre as observações y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Para cada par $(y_i, \tilde{y}_i)$ há quatro desfechos possíveis.
  - Quando ambos são 0 ou ambos são 1, temos o modelo prevendo corretamente.

Capacidade Preditiva



Capacidade Preditiva

- Taxa (%) de classificações de corretos:
  - Sensibilidade (S): $S = p(\tilde{y} = 1|y = 1) = \frac{VP}{VP+FN}$;
  - Especificidade (E): $E = p(\tilde{y} = 0|y = 0) = \frac{VN}{FP+VN}$.
- Avaliação:
  - $S \geq 80\%$ e $E \geq 80\%$: alta capacidade preditiva;
  - $50\% < S \leq 80\%$ e $50\% < E \leq 80\%$: razoável capacidade preditiva;
  - $S \leq 50\%$ e $E \leq 50\%$: baixa capacidade preditiva.

Capacidade Preditiva

- Taxa (%) de classificações de corretos:
  - Sensibilidade (S): $S = p(\tilde{y} = 1 | y = 1) = \frac{VP}{VP+FN}$;
  - Especificidade (E): $E = p(\tilde{y} = 0 | y = 0) = \frac{VN}{FP+VN}$.
- Avaliação:
  - $S \geq 80\%$ e $E \geq 80\%$: alta capacidade preditiva;
  - $50\% < S \leq 80\%$ e $50\% < E \leq 80\%$: razoável capacidade preditiva;
  - $S \leq 50\%$ e $E \leq 50\%$: baixa capacidade preditiva.

Qualidade do Ajuste (Pseudo-R^2)

- Há diferentes alternativas de Pseudo-R^2 para os casos nos quais a variável dependente é binária. Em particular veremos o Pseudo-R^2 de McFadden:

$$
\begin{aligned}
R^2_{MF} &= 1 - \frac{\ell_{ur}}{\ell_0} \\
&= \frac{\ell_0 - \ell_{ur}}{\ell_0},
\end{aligned}
$$

onde ℓ_{ur} é o valor da log-verossimilhança para o modelo irrestrito e ℓ_0 é o valor da log-verossimilhança para o modelo com o intercepto apenas.

Observações:

- $0 \leq R^2_{MF} < 1$;
- Ganho de informação estimada pelo modelo completo.