Parte 1.3: Testes de Hipóteses Assintóticos

Econometria I - IBMEC

Marcus L. Nascimento

3 de outubro de 2025

1. Consistência e Eficiência

2. Testes de Hipótese Assintóticos

Consistência e Eficiência

Introdução

- Anteriormente, estudamos as propriedades dos estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários em um contexto de **amostras finitas**, por exemplo:
  - Sob as suposições A1-A5, os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários são não viesados para qualquer tamanho de amostra n;
  - Sob as suposições A1-A5, o estimador MQO é o melhor estimador linear não viesado.
- A partir da adição da suposição de que o termo de erro (ε) possui distribuição normal e é independente das variáveis independentes, verificamos que
  - Os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários possuem distribuição amostral normal;
  - As estatísticas t e F possuem distribuição t de Student e F, respectivamente.

Introdução

- Em adição às propriedades sob amostras finitas, é importante estudar as propriedades assintóticas dos estimadores e estatísticas de testes.
    - Ao nos referirmos às propriedades assintóticas, definimos um contexto no qual o tamanho da amostra cresce ilimitadamente ($n \to \infty$);
    - Sob as hipóteses vistas anteriormente, os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários possuem boas propriedades assintóticas;
    - Na construção de testes de hipóteses, **relaxaremos** a hipótese na qual o erro segue uma distribuição normal.

Consistência

Sob as suposições A1-A4, os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários $\hat{\beta}_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, são consistentes:

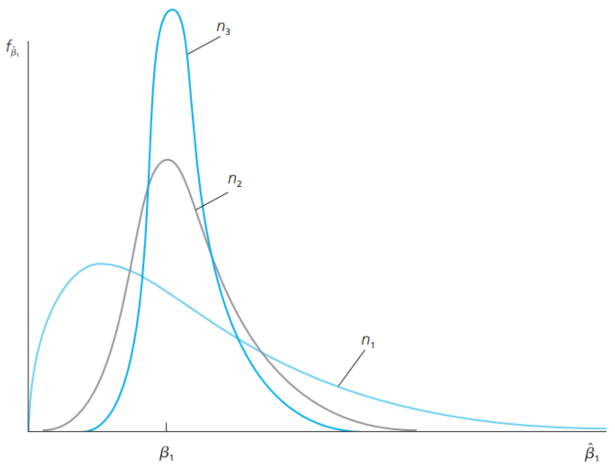
$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}_j) = \beta_j,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_j) = 0.$$

Podemos compreender intuitivamente a consistência dos estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários a partir das seguintes considerações:

- Para cada n, $\hat{\beta}_j$, possui uma distribuição de probabilidade;
- Como $\hat{\beta}_j$ é não viesado, sob as suposições A1-A4, a média da distribuição é β_j;
- A variância convergir para 0 indica que a distribuição de $\hat{\beta}_j$ se torna cada vez mais justa em torno de β_j à medida que a amostra cresce.

Consistência

FIGURE 5.1 Sampling distributions of $\hat{\beta}_1$ for sample sizes $n_1 < n_2 < n_3$.



Eficiência

- Em um contexto de amostras finitas, vimos que, sob as suposições A1-A5, o estimador MQO é o melhor estimador linear não viesado.
- Ao estudarmos propriedades assintóticas, a tradução de tal resultado se dá através do conceito de **eficiência**.
    - Menor variância assintótica.
- A classe de estimadores consistentes é obtida através da generalização das condições de primeira ordem de MQO:

$$\sum_{i=1}^{n} g_j(\mathbf{x}_i)(y_i - \beta_0 - \tilde{\beta}_1 x_{i1} - \ldots - \tilde{\beta}_p x_{ip}), \ j = 0, 1, 2, \ldots, p, \tag{1}$$

onde $g_j(\mathbf{x}_i)$ denota qualquer função das variáveis independentes para a observação i.

Eficiência

- é possível observar que os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários são obtidos quando $g_0(\mathbf{x}_i) = 0$ e $g_j(\mathbf{x}_i) = x_{ij}$, $j = 1, \ldots, p$.

- Como podemos utilizar qualquer função de $\mathbf{x}_{ij}$ que desejarmos, a classe de estimadores definida anteriormente é infinita.

- Denotando os estimadores que solucionam a equação em (1) por $\tilde{\beta}_j$ e os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários por $\hat{\beta}_j$. Sob as suposições de Gauss-Markov (A1-A5), para $j = 0, 1, \ldots, p$ os estimadores de MQO possuem menor variância assintótica:

$$\mathrm{Var}(\sqrt{n}(\hat{\beta}_j - \beta_j)) \leq \mathrm{Var}(\sqrt{n}(\tilde{\beta}_j - \beta_j)).$$

Testes de Hipótese Assintóticos

Normalidade Assintótica e Inferência

- Apesar de consistência e eficiência serem propriedades assintóticas importantes dos estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários, não nos permitem realizar inferência estatística.

- Anteriormente para a realização de testes de hipóteses acrescentamos uma suposição acerca da distribuição dos erros às suposições de Gauss-Markov.

  - Erro com distribuição normal com média 0 e variância σ^2;
  - Considerando σ^2 desconhecido, realizamos teste t para coeficientes separadamente;
  - Para um grupo de coeficientes, realizamos um teste F.

Normalidade Assintótica e Inferência

- Vale lembrar que assumir que a distribuição do erro é normal equivale a dizer que a distribuição de y condicional em $x_1, x_2, \ldots, x_p$ é normal.
    - Hipótese forte;
    - Em muitos casos, os dados não terão características de uma distribuição normal.
- É possível fazer inferência estatística e testar hipóteses sem assumir que os erros seguem uma distribuição normal?

Normalidade Assintótica e Inferência

- Vale lembrar que assumir que a distribuição do erro é normal equivale a dizer que a distribuição de y condicional em $x_1, x_2, \ldots, x_p$ é normal.
    - Hipótese forte;
    - Em muitos casos, os dados não terão características de uma distribuição normal.
- É possível fazer inferência estatística e testar hipóteses sem assumir que os erros seguem uma distribuição normal?

    SIM!

Normalidade Assintótica e Inferência

Sob as suposições de Gauss-Markov (A1-A5),

(i) $\sqrt{n}(\hat{\beta}_j - \beta_j) \sim N(0, \sigma^2/a_j^2)$ ($\hat{\beta}_j$ possui distribuição normal assintoticamente), onde

- σ^2/a_j^2 é a **variância assintótica** de $\sqrt{n}(\hat{\beta}_j - \beta_j)$;

- $a_j^2 = \text{plim}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2\right)$, onde $\hat{r}_{ij}$ são os resíduos obtidos a partir da regressão de x_j nas demais variáveis independentes.

(ii) $\hat{\sigma}^2$ é um estimador consistente para $\sigma^2 = \text{Var}(u)$.

(iii) Para cada j,

- $(\hat{\beta}_j - \beta_j)/\text{sd}(\hat{\beta}_j) \sim N(0,1)$ e $(\hat{\beta}_j - \beta_j)/\text{se}(\hat{\beta}_j) \sim N(0,1)$.

OBSERVAÇÕES:

- A partir do resultado anterior, uma possível consequência é que devemos utilizar a normal padrão em amostras grandes independentemente de σ^2 ser conhecido ou não.

- Sob um perspectiva prática, é legítimo escrever

$$(\hat{\beta}_j - \beta_j)/\text{se}(\hat{\beta}_j) \sim t_{n-p-1}$$

  já que a distribuição t de Student se aproxima da distribuição normal padrão para graus de liberdade grandes.

- Os resultados assintóticos para os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários também implicam que a estatística F terá aproximadamente distribuição F para amostras grandes.

Multiplicador de Lagrange

- Assim como a estatística F, a estatística LM possibilitará testar hipóteses acerca de um grupo de variáveis, ou seja,

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_{p-q+1} = \beta_{p-q+2} = \ldots = \beta_p = 0 \\ H_1 &: H_0 \text{ não é verdadeira,} \end{aligned}$$

  onde $q < p$ é o tamanho do grupo a ser testado.

- Assim como para a estatística F para amostras grandes, a forma da estatística F recai sobre as suposições de Gauss-Markov.

- A estatística LM requer a estimação do modelo restrito apenas.

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \ldots + \tilde{\beta}_{p-k} x_{p-k} + \tilde{\varepsilon},$$

  onde "$\sim$" indica que as estimativas se referem ao modelo restrito.

Multiplicador de Lagrange

- A ideia principal do teste advém do fato de que se $x_{p-q+1}, \ldots, x_p$ possuem coeficientes 0, então $\tilde{u}$ deve ser não correlacionado com essas variáveis na amostra (pelo menos aproximadamente).
  - A ideia principal sugere ajustar uma regressão dos resíduos nas variáveis independentes excluídas em H_0;
  - Todas as variáveis independentes devem ser incluídas, pois, em geral, os regressores considerados em H_0 são correlacionados com os regressores considerados no modelo restrito.
  - A regressão ajustada considera

$$\tilde{u} \text{ em } x_1, x_2, \ldots, x_p.$$

Multiplicador de Lagrange

- Como o resultado do ajuste de uma regressão de $\tilde{u}$ em $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pode ser utilizado para testar H_0?
  - Se H_0 for verdade, o R^2 deveria ser "próximo" de zero;
  - Sob a hipótese nula nR^2 possui distribuição assintótica qui-quadrado com q graus de liberdade.

- Em resumo,
  1. Ajuste um regressão de y no conjunto restrito de variáveis independentes e obtenha os resíduos ($\tilde{u}$);
  2. Ajuste uma regressão de $\tilde{u}$ no conjunto de variáveis independentes e obtenha o R^2 (R_u^2);
  3. Calcule $LM = nR_u^2$;
  4. Compare LM no valor crítico, c, apropriado, considerando uma χ^2 com q graus de liberdade.