SÉRIES TEMPORAIS E ECONOMETRIA - LISTA 1

29 de outubro de 2025

EMAp - FGV

Questão 1. (6.1) Suponha que $\{W_t\}_t$ seja um ruído branco com variância igual a 1, e considere a série temporal $\{X_t\}_t$ definida por:

$$X_t = W_t + (-1)^{t-1} W_{t-1}.$$

a) Calcule a média e a função de autocovariância da série temporal $\{X_t\}_t$.

b) A série temporal é estacionária? Justifique.

Solução. a) Note que, como $\mathbb{E}[W_t] = 0$ para todo t,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}[W_t + (-1)^{t-1} W_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}[W_t] + (-1)^{t-1}\mathbb{E}[W_{t-1}] \\
&= 0 + (-1)^{t-1} \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Note ainda que, como $1 = V(W_t) = \mathbb{E}[W_t^2] + \mathbb{E}[W_t]^2 = \mathbb{E}[W_t^2]$ para todo t, e $(W_t)_t$ são i.i.d., então

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t,t) &= \mathbb{E}[X_t^2] \\
&= \mathbb{E}[W_t^2] + 2(-1)^{t-1}\mathbb{E}[W_t W_{t-1}] + \mathbb{E}[W_{t-1}^2] \\
&= 1 + 2(-1)^{t-1}\cancelto{0}{\mathbb{E}[W_t]}\cancelto{0}{\mathbb{E}[W_{t-1}]} + 1 \\
&= 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t,t-1) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}[W_t W_{t-1} + (-1)^{t-1} W_{t-1} W_{t-1} + (-1)^{t-2} W_t W_{t-2} + (-1)^{t-1+t-2} W_{t-1} W_{t-2}] \\
&= \cancelto{0}{\mathbb{E}[W_t]}\cancelto{0}{\mathbb{E}[W_{t-1}]} + (-1)^{t-1}\cancelto{1}{\mathbb{E}[W_{t-1}^2]} + (-1)^{t-2}\cancelto{0}{\mathbb{E}[W_t]}\cancelto{0}{\mathbb{E}[W_{t-2}]} - \cancelto{0}{\mathbb{E}[W_{t-1}]}\cancelto{0}{\mathbb{E}[W_{t-2}]} \\
&= (-1)^{t-1}.
\end{aligned}$$

E $\gamma_X(t, t-k) = 0$ para $k \geqslant 2$, já que a partir daí teremos apenas produtos dos valores esperados de um tempo apenas da série, que já vimos que é nulo.

b) Não. Podemos perceber isso ao notar que $\gamma_X(t, t-1) = (-1)^{t-1}$ depende do tempo t, e portanto não é invariante.

Questão 2. (6.3) Suponha que $\theta \in (-1, +1)$ seja conhecido, que $\{W_t\}$ seja um ruído branco Gaussiano com variância 1, e que $\{W'_t\}$ seja um ruído branco Gaussiano com variância θ^2.

Mostre que a série MA(1) $\{X_t\}$ definida por

$$X_t = W_t + \theta W_{t-1}$$

e a série $\{Y_t\}$ definida por

$$Y_t = W'_t + \frac{1}{\theta} W'_{t-1}$$

têm as mesmas funções de autocovariância.

Elas têm as mesmas funções de autocorrelação?

Solução. Note que $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[W_t] + \theta \cdot \mathbb{E}[W_{t-1}] = 0$, logo $\gamma_X(r, s) = \mathbb{E}[X_r X_s]$. Logo, como $\mathbb{E}[W_t^2] = V(W_t) = 1$,

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t, t) &= \mathbb{E}[X_t^2] \\
&= \mathbb{E}[W_t^2 + 2\theta W_t W_{t-1} + \theta^2 W_{t-1}^2] \\
&= 1 + 2 \cdot \theta \cdot 0 \cdot 0 + \theta^2 \cdot 1 \\
&= 1 + \theta^2 \\
\gamma_X(t, t-1) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}[W_t W_{t-1} + \theta W_t W_{t-2} + \theta W_{t-1}^2 + \theta^2 W_{t-1} W_{t-2}] \\
&= 0 + \theta \cdot 0 \cdot 0 + \theta \cdot 1 + \theta^2 \cdot 0 \cdot 0 \\
&= \theta
\end{aligned}$$

E $\gamma_X(t, t-k) = 0$ para $k \geqslant 2$, já que a partir daí teremos apenas produtos dos valores esperados de um tempo apenas da série, que já vimos que é nulo.

Por outro lado, $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[W'_t] + \frac{1}{\theta}\mathbb{E}[W'_{t-1}] = 0$, logo $\gamma_Y(r, s) = \mathbb{E}[Y_r Y_s]$. Logo, como $\mathbb{E}[{W'_t}^2] = V(W'_t) = \theta^2$,

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(t, t) &= \mathbb{E}[Y_t^2] \\
&= \mathbb{E}[{W'_t}^2 + \frac{2}{\theta} W'_t W'_{t-1} + \frac{1}{\theta^2} {W'_{t-1}}^2] \\
&= \theta^2 + \frac{2}{\theta} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{\theta^2} \cdot \theta^2 \\
&= \theta^2 + 1 \\
\gamma_Y(t, t-1) &= \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}[W'_t W'_{t-1} + \frac{1}{\theta} W'_t W'_{t-2} + \frac{1}{\theta} {W'_{t-1}}^2 + \frac{1}{\theta^2} W'_{t-1} W'_{t-2}] \\
&= 0 + \frac{1}{\theta} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{\theta} \cdot \theta^2 + \frac{1}{\theta^2} \cdot 0 \cdot 0 \\
&= \theta
\end{aligned}$$

E analogamente, $\gamma_Y(t, t-k) = 0$ para $k \geqslant 2$, e portanto (X_t) e (Y_t) têm mesma autocovariância.

Sobre a questão da autocorrelação, note que

$$\rho_X(t,t-k) = \frac{\gamma_X(t,t-k)}{\gamma_X(t,t)^{1/2}\gamma_X(t-k,t-k)^{1/2}} = \frac{\gamma_X(t,t-k)}{1+\theta^2}$$
$$\rho_Y(t,t-k) = \frac{\gamma_Y(t,t-k)}{\gamma_Y(t,t)^{1/2}\gamma_Y(t-k,t-k)^{1/2}} = \frac{\gamma_Y(t,t-k)}{1+\theta^2}$$

e portanto as séries também têm mesma autocorrelação

Questão 3. (6.4)

a) Encontre a representação autorregressiva (AR) da série MA(1):

$$X_t = W_t - 0{,}4W_{t-1},$$

onde $\{W_t\}$ é um ruído branco Gaussiano com variância σ^2.

b) Encontre a representação de média móvel (MA) da série AR(1):

$$X_t - 0{,}2X_{t-1} = W_t,$$

onde, novamente, $\{W_t\}$ é um ruído branco Gaussiano com variância σ^2.

Solução. a) Note que

$$\begin{aligned} X_t &= W_t - 0{,}4W_{t-1} \\ 0{,}4X_{t-1} &= 0{,}4W_{t-1} - 0{,}4^2W_{t-2} \\ 0{,}4^2X_{t-2} &= 0{,}4^2W_{t-2} - 0{,}4^3W_{t-3} \\ &\vdots \\ \implies \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}4^k X_{t-k} &= W_t \\ \implies X_t &= W_t - 0{,}4X_{t-1} - 0{,}4^2X_{t-2} - \dots \end{aligned}$$

que é sua representação AR(∞), já que (X_t) é uma série de média zero.

b) Note que

$$\begin{aligned} X_t - 0{,}2X_{t-1} &= W_t \\ 0{,}2X_{t-1} - 0{,}2^2X_{t-2} &= 0{,}2W_{t-1} \\ 0{,}2^2X_{t-2} - 0{,}2^3X_{t-3} &= 0{,}2^2W_{t-2} \\ &\vdots \\ \implies X_t &= W_t + 0{,}2W_{t-1} + 0{,}2^2W_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

que é sua representação MA(∞), já que novamente (X_t) é uma série de média zero.

Questão 4. (6.8) Suponha que a série temporal $\{X_t\}_t$ seja definida por:

$$X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = W_t - 0{,}3W_{t-1} - 0{,}5W_{t-2},$$

onde $\{W_t\}$ é um ruído branco $N(0,\sigma^2)$.

a) Reescreva o modelo usando o operador de defasagem B.

b) A série temporal é estacionária? Justifique.

c) A segunda diferença $D_t = (1-B)^2X_t$ é estacionária? Justifique.

d) Calcule a função de autocovariância da segunda diferença D_t.

Solução. a)

$$(1 - 2B + B^2)X_t = (1 - 0{,}3B - 0{,}5B^2)W_t$$

b) Note que

$$\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$$

onde $\phi(x) = 1 - 2x + x^2$ e $\theta(x) = 1 - 0{,}3x - 0{,}5x^2$. Como o polinômio da parte autorregressiva tem raiz 1, temos então que a série não é estacionária.

c) Temos que $D_t = \theta(B)W_t$, com o mesmo $\theta(x)$ do item anterior. Como trata-se de uma série de médias móveis, a série é estacionária (já que pode ser interpretada como uma série ARMA de polinômio autorregressivo constante).

d) Note que

$$\begin{aligned}
\gamma_D(t,t) &= \mathbb{E}[W_t^2 + 0{,}3^2 W_{t-1}^2 + 0{,}5^2 W_{t-2}^2 \\
&\quad - 0{,}6 W_t W_{t-1} - W_t W_{t-2} + 0{,}3 W_{t-1} W_{t-2}] \\
&= \sigma^2 + 0{,}3^2\sigma^2 + 0{,}5^2\sigma^2 - 0{,}6 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0 \cdot 0 \\
&= 1{,}34\ \sigma^2 \\
\gamma_D(t,t-1) &= \mathbb{E}[W_t W_{t-1} - 0{,}3 W_{t-1}^2 - 0{,}5 W_{t-2} W_{t-1} \\
&\quad - 0{,}3 W_t W_{t-2} + 0{,}3^2 W_{t-1} W_{t-2} + 0{,}5 \cdot 0{,}3 W_{t-2}^2 \\
&\quad - 0{,}5 W_t W_{t-3} + 0{,}3 \cdot 0{,}5 W_{t-1} W_{t-3} + 0{,}5^2 W_{t-2} W_{t-3}] \\
&= 0 \cdot 0 - 0{,}3\sigma^2 - 0{,}5 \cdot 0 \cdot 0 \\
&\quad - 0{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 0{,}3^2 \cdot 0 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}3\sigma^2 \\
&\quad - 0{,}5 \cdot 0 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0 \cdot 0 + 0{,}5^2 \cdot 0 \cdot 0 \\
&= -0{,}15\sigma^2 \\
\gamma_D(t,t-2) &= \mathbb{E}[W_t W_{t-2} - 0{,}3 W_{t-1} W_{t-2} - 0{,}5 W_{t-2}^2 \\
&\quad - 0{,}3 W_t W_{t-3} + 0{,}3^2 W_{t-1} W_{t-3} + 0{,}5 \cdot 0{,}3 W_{t-2} W_{t-3} \\
&\quad - 0{,}5 W_t W_{t-4} + 0{,}3 \cdot 0{,}5 W_{t-1} W_{t-4} + 0{,}5^2 W_{t-2} W_{t-4}] \\
&= 0 \cdot 0 - 0{,}3 \cdot 0 \cdot 0 - 0{,}5\sigma^2 \\
&\quad - 0{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 0{,}3^2 \cdot 0 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0 \cdot 0 \\
&\quad - 0{,}5 \cdot 0 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0 \cdot 0 + 0{,}5^2 \cdot 0 \cdot 0 \\
&= -0{,}5\sigma^2
\end{aligned}$$

E $\gamma_D(t, t-k) = 0$ para $k \geqslant 3$.

Questão 5. (6.14) **Parte 1.** Fixe a semente do gerador aleatório em 14 e gere uma realização de comprimento 1.024 de um ruído branco $\{W_t\}_{t=1,\dots,1024}$ com distribuição $N(0,1)$. Gere também a realização da série temporal AR(3) $\{X_t\}_{t=1,\dots,1024}$ que satisfaz $X_0 = X_{-1} = X_{-2} = 0$ e:

$$(1 - 0{,}07B - 0{,}02B^2 - 0{,}3B^3)X_t = W_t, \quad t = 1, 2, \dots, 1024.$$

Parte 2. Ajuste modelos autorregressivos de ordem até 9 e produza o valor AIC correspondente. Escolha o melhor modelo de acordo com este critério, determine os coeficientes e faça previsões para os próximos 16 valores da série. Produza um gráfico das previsões com intervalo de confiança aproximado de 95%.

Parte 3. Com o mesmo ruído branco (usando a mesma semente), gere uma realização de comprimento 1.000 da série ARMA(3,4) definida por:

$$(1 - 0{,}07B - 0{,}02B^2 - 0{,}3B^3)X_t = (1 - 0{,}4B - 0{,}3B^2 - 0{,}2B^3 - 0{,}05B^4)W_t.$$

Parte 4. Ajuste modelos AR de ordem até 9 aos dados gerados na questão anterior e produza os valores de AIC correspondentes. Qual é o melhor modelo segundo esse critério? Comente. Ajuste tal modelo, e novamente produza previsões para os próximos 16 valores, assim como o gráfico com intervalo de confiança de 95%.

Parte 5. Ignorando o AIC, ajuste um modelo AR(3) e compute os resíduos estimados. Ajuste modelos MA (de ordem até 5) sobre os resíduos e escolha o melhor. Use o modelo ARMA obtido para prever os próximos 16 valores da série original e produza o gráfico das previsões com intervalo de confiança de 95%. Compare os resultados com os obtidos na parte anterior.

Solução. Parte 1. Podemos fazer isso com o seguinte código:

```
set.seed(14)
n1 <- 1024
# (1 - 0.07B - 0.02B^2 - 0.3B^3) X_t = W_t
ar_coefs <- c(0.07, 0.02, 0.3)
W <- rnorm(n1, mean = 0, sd = 1)
x_ar3 <- as.numeric(filter(W, filter = ar_coefs,
                           method = "recursive",
                           init = rep(0, length(ar_coefs))))
```

Parte 2. Podemos criar a tabela de AIC com

```
aic_table_ar <- function(x, p_max = 9) {
res <- data.frame(order = integer(),
                  AIC = numeric(),
                  logLik = numeric(),
                  stringsAsFactors = FALSE)
for (p in 0:p_max) {
    fit <- arima(x, order = c(p, 0, 0))
    res <- rbind(res, data.frame(order = p,
                                 AIC = AIC(fit),
                                 logLik = as.numeric(logLik(fit))))
}

res[order(res$order), ]
}
tab_ar_x <- aic_table_ar(x_ar3, p_max = 9)
```

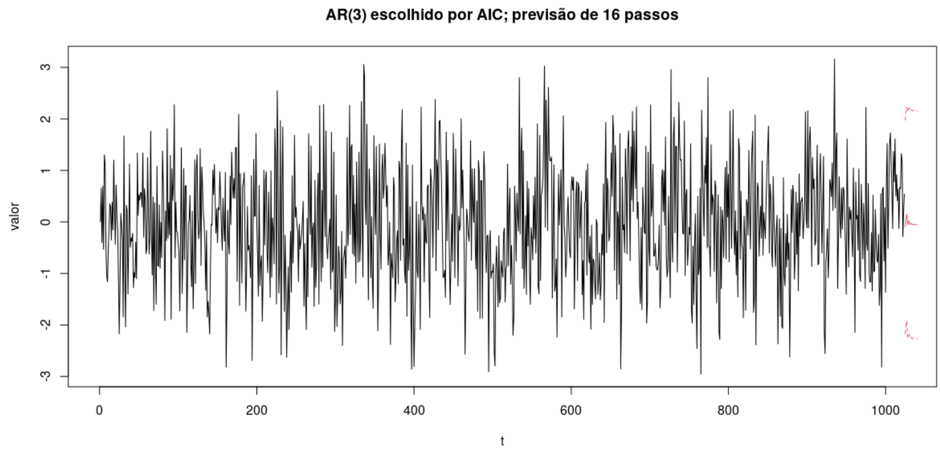
A tabela gerada fica assim:

	order	AIC	logLik
	<int>	<dbl>	<dbl>
1	0	3118.125	-1557.063
2	1	3114.335	-1554.167
3	2	3112.667	-1552.333
4	3	2989.043	-1489.521
5	4	2991.038	-1489.519
6	5	2992.595	-1489.297
7	6	2994.582	-1489.291
8	7	2996.580	-1489.290
9	8	2997.621	-1488.811
10	9	2998.361	-1488.181

E determinar a melhor ordem minimizando AIC, para então ajustar:

```
best_p_x <- tab_ar_x$order[which.min(tab_ar_x$AIC)]
fit_best_ar_x <- arima(x_ar3,
                       order = c(best_p_x, 0, 0))
pred_x <- predict(fit_best_ar_x, n.ahead = 16)
```

E podemos visualizar a previsão:



Parte 3. Vamos criar a nova série usando

```
set.seed(14)
n2 <- 1000
# (1 - 0.4B - 0.3B^2 - 0.2B^3 - 0.05B^4) W_t
ma_coefs <- c(0.4, 0.3, 0.2, 0.05)
W <- rnorm(n2, mean = 0, sd = 1)
Z <- filter(W,
            filter = c(1, -ma_coefs),
            sides = 1,
            method = "convolution")
Z[is.na(Z)] <- 0
X_arma34 <- as.numeric(filter(Z, filter = ar_coefs,
                              method = "recursive",
                              init = rep(0, length(ar_coefs))))
```

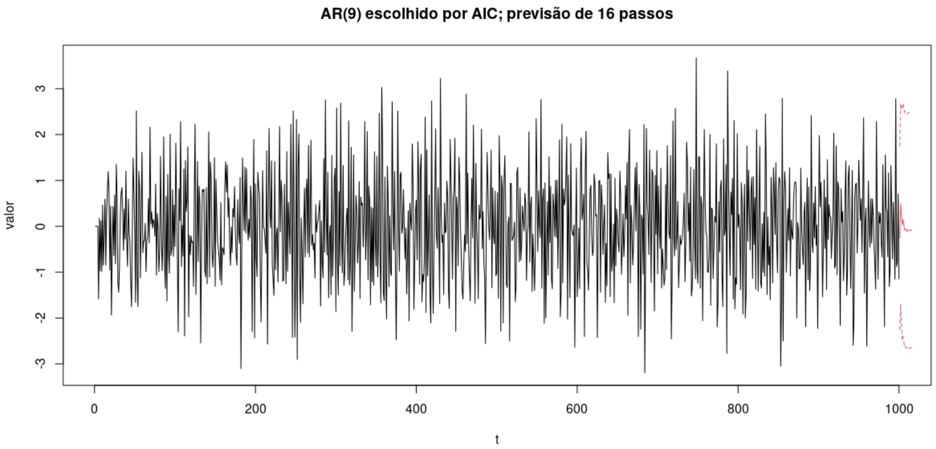
Parte 4. E ajustamos para modelos AR de ordem até 9:

```
tab_ar_y <- aic_table_ar(X_arma34, p_max = 9)
best_p_y <- tab_ar_y$order[which.min(tab_ar_y$AIC)]
fit_best_ar_y <- arima(x_arma34,
                       order = c(best_p_y, 0, 0), method = "ML")
pred_y <- predict(fit_best_ar_y, n.ahead = 16)
```

A tabela obtida fica

	order <int>	**AIC** <dbl>	**logLik** <dbl>
1	0	3150.518	-1573.259
2	1	3100.518	-1547.259
3	2	3018.807	-1505.403
4	3	3017.005	-1503.502
5	4	3003.823	-1495.912
6	5	2992.049	-1489.024
7	6	2987.257	-1485.628
8	7	2984.074	-1483.037
9	8	2985.664	-1482.832
10	9	2981.710	-1479.85

E a previsão:



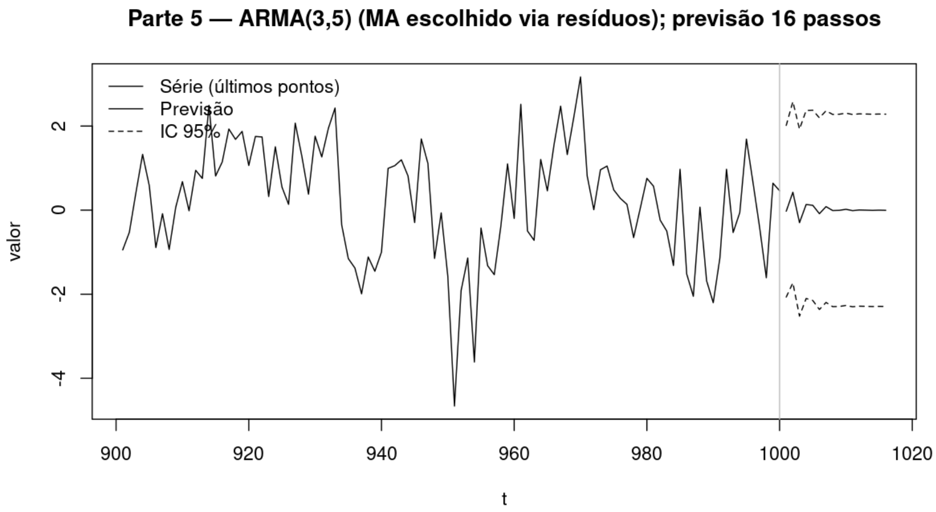
Parte 5. Podemos criar uma nova função de criação de tabela fazendo

```
aic_table_ma <- function(x, q_max = 5) {
  res <- data.frame(order = integer(),
                    AIC = numeric(),
                    logLik = numeric(),
                    stringsAsFactors = FALSE)
  for (q in 0:q_max) {
    fit <- arima(x, order = c(0, 0, q), method = "ML")
    res <- rbind(res, data.frame(order = q,
                                 AIC = AIC(fit),
                                 logLik = as.numeric(logLik(fit))))
  }
  res[order(res$order), ]
}

fit_ar3_y <- arima(X_arma34, order = c(3, 0, 0), method = "ML")
resid_ar3 <- residuals(fit_ar3_y)

tab_ma_res <- aic_table_ma(resid_ar3, q_max = 5)
best_q_res <- tab_ma_res$order[which.min(tab_ma_res$AIC)]
```

A tabela resultado é

	order <int>	**AIC** <dbl>	**logLik** <dbl>
1	0	2986.953	-1491.477
2	1	2985.923	-1489.961
3	2	2984.116	-1488.058
4	3	2957.165	-1473.582
5	4	2946.853	-1467.426
6	5	2934.619	-1460.309

E a previsão:



Note que a nova previsão conseguiu capturar o comportamento geral da série e predizer valores com maior confiança, muito devido aos fatores de médias móveis.

Fonte: René Carmona, "Statistical Analysis of Financial Data in R".