Enunciados
Lista 4 – Modelos de Espaço de Estados

Séries Temporais e Econometria

Questão 1

Considere o Modelo de Nível Local (Local Level Model), também conhecido como Random Walk plus Noise, definido pelas equações:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_{t+1} &= \mu_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned}$$

onde erros ϵ_t e η_t são independentes entre si.

a) Identifique a Equação de Observação e a Equação de Estado (ou Transição). Qual é o vetor de estado neste modelo?

b) Explique o comportamento da série y_t nas situações limites onde a razão sinal-ruído $q = \sigma_\eta^2/\sigma_\epsilon^2$ tende a zero ($q \to 0$) e onde tende ao infinito ($q \to \infty$).

c) Mostre que a primeira diferença da série, $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, segue um processo MA(1).

Questão 2

Qualquer processo AR(p) pode ser escrito na forma de espaço de estados. Considere um processo AR(2) estacionário com média zero:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

Defina o vetor de estado como $\alpha_t = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix}$.

Encontre as matrizes do sistema Z, T e R ou H e F tal que o modelo possa ser escrito como:

$$\begin{aligned} y_t &= Z\alpha_t \\ \alpha_{t+1} &= T\alpha_t + R\epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Questão 3

O Filtro de Kalman é um algoritmo recursivo para estimar o vetor de estado α_t. Seja $a_t = \mathbb{E}[\alpha_t \mid Y_{t-1}]$ a predição do estado e $P_t = var(\alpha_t \mid Y_{t-1})$ a matriz de covariância do erro de predição.

As equações de atualização de medição (updating) incorporam a nova observação y_t para gerar $a_{t|t}$ e $P_{t|t}$.

Escreva as equações de Predição (Time Update) que levam de $(a_{t|t}, P_{t|t})$ para (a_{t+1}, P_{t+1}) considerando o sistema geral:

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1} &= T\alpha_t + \eta_t, \quad \mathrm{Var}(\eta_t) = Q \\ y_t &= Z\alpha_t + \epsilon_t \end{aligned}$$

Questão 4

Em modelos de espaço de estados, distinguimos três tipos de inferência sobre o estado α_t dado um conjunto de observações $Y_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$:

a) Predição (Forecasting);

b) Filtragem (Filtering);

c) Suavização (Smoothing).

Defina cada um desses conceitos em termos da esperança condicional $\mathbb{E}[\alpha_t|Y_s]$ (especificando a relação entre t e s). Explique por que a variância do estimador suavizado é sempre menor ou igual à variância do estimador filtrado.

Questão 5

Utilize o dataset `Nile` disponível no R (fluxo anual do rio Nilo).

a) Ajuste um Modelo de Nível Local (Gaussian Random Walk plus Noise) utilizando a função `StructTS` ou o pacote `dlm`.

b) Reporte as variâncias estimadas do nível (σ^2_η) e da observação (σ^2_ϵ).

c) Plote a série original juntamente com o nível filtrado (Kalman Filter) e o nível suavizado (Kalman Smoother). Comente as diferenças visuais, especialmente nos anos próximos a 1898 (onde historicamente houve a construção da primeira barragem de Assuã).