

SÉRIES TEMPORAIS E ECONOMETRIA - LISTA 2

25 de novembro de 2025

EMAp - FGV

Questão 1. (8.1) Este problema mostra mais uma vez que uma variável aleatória condicionalmente Gaussiana possui excesso de curtose.

Vamos assumir que X e σ^2 são duas variáveis aleatórias e que $X|\sigma^2 \sim N(0, \sigma^2)$, isto é, que condicionado ao valor de σ^2 , X é uma variável aleatória Gaussiana de média zero com variância σ^2 . Prove que:

$$\frac{\mathbb{E}[X^4]}{\text{var}[X]^2} = 3 \left[1 + \frac{\text{var}\{\sigma^2\}}{\mathbb{E}[\sigma^2]^2} \right]$$

provando a afirmação de excesso de curtose quando σ^2 não é determinístico.

Solução. Note que pela lei de esperança total, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|\sigma^2] = 0$, logo $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2]$.

Podemos agora aplicar a lei da variância total:

$$\text{var}[X] = \mathbb{E}[\text{var}[X|\sigma^2]] + \text{var}[\mathbb{E}[X|\sigma^2]]$$

Porém, como $X|\sigma^2 \sim N(0, \sigma^2)$, $\text{var}[X|\sigma^2] = \sigma^2$ e $\mathbb{E}[X|\sigma^2] = 0$, logo $\text{var}[X] = \mathbb{E}[\sigma^2]$.

Novamente pela lei da esperança total, $\mathbb{E}[X^4] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^4|\sigma^2]]$.

Como $X|\sigma^2$ é Gaussiana de média zero com variância σ^2 , seu quarto momento condicional é dado pela fórmula do quarto momento de uma Normal: $\mathbb{E}[Z^4] = 3(\text{var}[Z])^2$.

Assim:

$$\mathbb{E}[X^4|\sigma^2] = 3 \cdot (\text{var}[X|\sigma^2])^2 = 3(\sigma^2)^2 = 3\sigma^4$$

Substituindo na lei da esperança total:

$$(1) \quad \mathbb{E}[X^4] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^4|\sigma^2]] = \mathbb{E}[3\sigma^4] = 3\mathbb{E}[\sigma^4]$$

Lembramos da definição de variância: $\text{var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$. Fazendo $Y = \sigma^2$, temos:

$$\text{var}[\sigma^2] = \mathbb{E}[(\sigma^2)^2] - (\mathbb{E}[\sigma^2])^2 = \mathbb{E}[\sigma^4] - (\mathbb{E}[\sigma^2])^2$$

Isolando $\mathbb{E}[\sigma^4]$:

$$(2) \quad \mathbb{E}[\sigma^4] = \text{var}[\sigma^2] + (\mathbb{E}[\sigma^2])^2$$

Substituindo (2) em (1):

$$\mathbb{E}[X^4] = 3 [\text{var}[\sigma^2] + (\mathbb{E}[\sigma^2])^2]$$

Agora, substituímos na razão de curtose desejada:

$$\frac{\mathbb{E}[X^4]}{\text{var}[X]^2} = \frac{3 [\text{var}[\sigma^2] + (\mathbb{E}[\sigma^2])^2]}{(\mathbb{E}[\sigma^2])^2} = 3 \left[1 + \frac{\text{var}[\sigma^2]}{\mathbb{E}[\sigma^2]} \right]$$

Como $\text{var}[\sigma^2], \mathbb{E}[\sigma^2] \geq 0$, o termo entre colchetes é maior ou igual a 1. Portanto, a curtose (razão) é maior ou igual a 3, o que prova o excesso de curtose em relação a uma variável Gaussiana (cuja razão seria 3).

Questão 2. (8.2) Este problema mostra que séries temporais AR(p) (lineares) podem levar a modelos ARCH (não lineares) quando possuem coeficientes aleatórios.

Seja $\{\epsilon_t\}_t$ um ruído branco univariado forte com $\epsilon_t \sim N(0, 1)$, e seja $\{\phi_t\}_t$ uma série temporal p-variada independente de $\{\epsilon_t\}_t$, e tal que todos os ϕ_t são independentes entre si, e para cada tempo t , o vetor $\phi_t = (\phi_{t,1}, \phi_{t,2}, \dots, \phi_{t,p})$ é um vetor de variáveis aleatórias

Gaussianas conjuntas com média zero e matriz de variância/covariância Σ . Estudamos a série temporal $\{Y_t\}_t$ definida por:

$$Y_t = \phi_{t,1} Y_{t-1} + \phi_{t,2} Y_{t-2} + \cdots + \phi_{t,p} Y_{t-p} + \epsilon_t.$$

- a) Determine a distribuição condicional de Y_t dado \mathcal{F}_{t-1} integrando as variáveis aleatórias ϕ .
- b) Assuma que os componentes $\phi_{t,1}, \phi_{t,2}, \dots, \phi_{t,p}$ de ϕ_t são independentes, e mostre que pelo menos neste caso, $\{Y_t\}_t$ tem uma representação ARCH.

Solução.

- a) Primeiro, encontramos a distribuição condicional de Y_t dado \mathcal{F}_{t-1} e o vetor de coeficientes ϕ_t . Seja $\mathbf{Y}_{t-1} = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p})^T$ o vetor das observações passadas.

$$Y_t = \phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1} + \epsilon_t$$

Condicionando em \mathcal{F}_{t-1} e ϕ_t :

$$Y_t | \mathcal{F}_{t-1}, \phi_t \sim N(\phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1}, 1)$$

Agora, queremos determinar a distribuição de Y_t apenas condicionado em \mathcal{F}_{t-1} (\mathbf{Y}_{t-1}), integrando o vetor ϕ_t .

Definimos a parte autorregressiva como $Z_t = \phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1}$. Condicionado em \mathcal{F}_{t-1} , Z_t é uma variável aleatória Gaussiana (uma combinação linear de variáveis Gaussianas), pois ϕ_t é Gaussiano e \mathbf{Y}_{t-1} é fixo.

Média de $Z_t | \mathcal{F}_{t-1}$:

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = (\mathbb{E}[\phi_t^T]) \mathbf{Y}_{t-1} = 0^T \mathbf{Y}_{t-1} = 0$$

Variância de $Z_t | \mathcal{F}_{t-1}$:

$$\text{var}\{Z_t | \mathcal{F}_{t-1}\} = \text{var}\{\phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}\} = \mathbf{Y}_{t-1}^T \text{Cov}[\phi_t] \mathbf{Y}_{t-1} = \mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1}$$

Assim, $Z_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1})$.

Lembramos que $Y_t = Z_t + \epsilon_t$. Como $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ é independente de ϕ_t e \mathcal{F}_{t-1} , a distribuição condicional de Y_t é a soma de duas variáveis Gaussianas independentes:

$$Y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, 1 + \mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1})$$

- b) Do item (a), temos a média condicional e a variância condicional:

$$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$$

$$\sigma_t^2 = \text{var}\{Y_t | \mathcal{F}_{t-1}\} = 1 + \mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1}$$

Agora, assumimos que os componentes $\phi_{t,1}, \dots, \phi_{t,p}$ são independentes. Se são independentes e Gaussianos, e têm média zero, a matriz de covariância Σ deve ser diagonal, ou seja, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2)$, onde $\sigma_i^2 = \text{var}\{\phi_{t,i}\}$.

Neste caso, o termo de variância $\mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1}$ se torna:

$$\mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1} = \sum_{i=1}^p \sigma_i^2 Y_{t-i}^2$$

Substituindo na variância condicional:

$$\sigma_t^2 = 1 + \sum_{i=1}^p \sigma_i^2 Y_{t-i}^2$$

Essa forma é idêntica à definição de um modelo ARCH(p) com um termo de intercepto.

Isso mostra que, pelo menos no caso de coeficientes $\phi_{t,i}$ Gaussianos, de média zero e independentes, a série $\{Y_t\}_t$ tem uma representação ARCH(p), demonstrando como um processo AR(p) com coeficientes aleatórios leva a um modelo de volatilidade condicional.

Questão 3. (5.6) Os preços spot semanais do petróleo bruto em dólares por barril estão em `oil`; veja o Problema 2.10 e o Apêndice R para mais detalhes. Investigue se a taxa de crescimento do preço semanal do petróleo exibe comportamento GARCH. Se sim, ajuste um modelo apropriado para a taxa de crescimento.

Solução. Seja P_t o preço spot do petróleo no tempo t . A taxa de crescimento (retorno logarítmico) é $R_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$. Para verificar a presença de efeitos ARCH, ajustamos um modelo ARMA para a média (se necessário) e analisamos os resíduos quadrados desse modelo usando a Função de Autocorrelação (ACF) e o teste de Ljung-Box para os resíduos quadrados.

```
library(astsa)
data(oil) # Carregar a série 'oil'

# 1. Calcular os retornos
returns <- diff(log(oil))

# 2. Ajustar um modelo ARMA para a média
fit_arma <- arima(returns, order = c(0, 0, 0)) # Assumindo ruído branco
residuos_quadrados <- residuals(fit_arma)^2

# 3. Teste para Efeitos ARCH: Teste de Ljung-Box nos resíduos quadrados
Box.test(residuos_quadrados, lag = 10, type = "Ljung-Box")
```

O teste revela baixo p-valor, indicando presença de heterocedasticidade condicional (efeitos ARCH/GARCH).

Assim, ajustamos um modelo GARCH(1,1):

```
library(astsa)
# Usando garch() do pacote tseries, que assume média zero (ARMA(0,0))
fit_garch <- garch(returns, order = c(1, 1))
summary(fit_garch)
```

Com resultado

Coefficient(s):					
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
a0	1.222e-04	5.909e-05	2.068	0.038667 *	
a1	6.713e-02	1.913e-02	3.509	0.000449 ***	
b1	8.721e-01	4.278e-02	20.384	< 2e-16 ***	

				Signif. codes:	0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Podemos notar que:

- Efeitos GARCH: O comportamento GARCH é confirmado com $\hat{\alpha}_1 > 0$, $\hat{\beta}_1 > 0$ e ambos estatisticamente significativos (p-valor baixo).
- Persistência da Volatilidade: A persistência da volatilidade é medida pela soma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$. Como essa soma está próxima de 1, isso indica que os choques de volatilidade demoram muito para se dissipar.
- Estacionariedade: A série de variâncias é fracamente estacionária já que $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 < 1$.

Questão 4. (5.7) O pacote stats do R contém os preços de fechamento diários de quatro grandes índices de ações europeus; digite `help(EuStockMarkets)` para detalhes. Ajuste um modelo GARCH aos retornos de uma dessas séries e discuta seus achados. (Nota: O conjunto de dados contém valores reais, e não retornos. Portanto, os dados devem ser transformados antes do ajuste do modelo.)

Solução. Escolhemos o índice DAX (Alemanha) do conjunto de dados ‘EuStockMarkets’ como exemplo.

Para começar, precisamos transformá-los em retornos logarítmicos para garantir que a série seja fracamente estacionária.

```
# Carregar o conjunto de dados
data("EuStockMarkets")
```

```
# Escolher o índice DAX e calcular os retornos logarítmicos
dax_prices <- EuStockMarkets[, "DAX"]
dax_returns <- diff(log(dax_prices))
```

Assim como na Questão 1, ajustamos um modelo para a média (neste caso ARMA(0,0)) e testamos os resíduos quadrados.

```
# Teste de Ljung-Box nos resíduos quadrados para verificar heterocedasticidade
fit_arima <- arima(dax_returns, order = c(0, 0, 0))
residuos_quadrados <- residuals(fit_arima)^2
Box.test(residuos_quadrados, lag = 10, type = "Ljung-Box")
```

O baixo p-valor nos indica efeitos ARCH/GARCH. Por fim, ajustamos o modelo GARCH(1,1), geralmente suficiente para modelar a maioria das séries financeiras.

```
# Ajustar GARCH(1,1)
garch(dax_returns, order = c(1, 1))
```

Coefficient(s):
a0 a1 b1
4.639e-06 6.833e-02 8.891e-01

Temos coeficientes positivos e significantes como no item anterior, e a dominância de $\hat{\beta}_1$ demonstra que o risco (volatilidade) do mercado de ações é dinâmico, não constante, e que o risco de hoje depende do quanto arriscado foi o dia de ontem.

Questão 5. Considere um processo ARCH(1) definido por:

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2$$

Onde:

- $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ e são i.i.d.
- $\omega > 0$ e $\alpha \geq 0$

Assumindo que o processo iniciou em um passado infinito, derive a **variância incondicional** de y_t , denotada por $\text{var}(y_t)$, e determine a condição necessária sobre α para que essa variância seja finita e positiva (covariância-estacionária).

Solução. Note que a esperança condicional de y_t é zero ($E[y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$), logo a esperança incondicional é $E[y_t] = 0$. Assim, a variância incondicional é dada por $E[y_t^2]$.

Note que

$$E[y_t^2] = E[\sigma_t^2 \epsilon_t^2]$$

4

Como σ_t depende apenas do passado, é independente de ϵ_t . Dado que $\mathbb{E}[\epsilon_t^2] = 1$:

$$\mathbb{E}[y_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] \cdot \mathbb{E}[\epsilon_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]$$

Substituindo a equação da variância do ARCH(1):

$$\mathbb{E}[y_t^2] = \mathbb{E}[\omega + \alpha y_{t-1}^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[y_{t-1}^2]$$

Sob a hipótese de estacionariedade, a variância incondicional é constante no tempo, ou seja, $\mathbb{E}[y_t^2] = \mathbb{E}[y_{t-1}^2] = \sigma^2$. Substituindo:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \omega + \alpha\sigma^2 \\ \sigma^2 - \alpha\sigma^2 &= \omega \\ \sigma^2(1 - \alpha) &= \omega\end{aligned}$$

Isolando σ^2 , obtemos a variância incondicional:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha}$$

Conclusão: Para que a variância seja finita e positiva ($\sigma^2 > 0$), dado que $\omega > 0$, o denominador deve ser positivo. Logo, a condição de estacionariedade é:

$$\alpha < 1$$

Questão 6. Considere um modelo GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Suponha que estamos no tempo t e conhecemos σ_{t+1}^2 . Mostre que a previsão de k passos à frente, $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2]$, converge para a variância incondicional à medida que $k \rightarrow \infty$, assumindo $\alpha + \beta < 1$.

Solução. Derivando a previsão para 2 passos à frente ($t + 2$):

$$\sigma_{t+2}^2 = \omega + \alpha y_{t+1}^2 + \beta \sigma_{t+1}^2$$

Aplicando a esperança condicional em t ($\mathbb{E}_t[\cdot]$):

$$\mathbb{E}_t[\sigma_{t+2}^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}_t[y_{t+1}^2] + \beta \mathbb{E}_t[\sigma_{t+1}^2]$$

Sabemos que $\mathbb{E}_t[y_{t+1}^2] = \sigma_{t+1}^2$ e que σ_{t+1}^2 é conhecido em t . Logo:

$$\mathbb{E}_t[\sigma_{t+2}^2] = \omega + \alpha \sigma_{t+1}^2 + \beta \sigma_{t+1}^2$$

$$\mathbb{E}_t[\sigma_{t+2}^2] = \omega + (\alpha + \beta) \sigma_{t+1}^2$$

A variância incondicional (a longo prazo) do GARCH(1,1) é $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}$. Podemos reescrever o termo constante ω como:

$$\omega = \bar{\sigma}^2(1 - (\alpha + \beta))$$

Substituindo ω na equação de previsão:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t[\sigma_{t+2}^2] &= \bar{\sigma}^2(1 - (\alpha + \beta)) + (\alpha + \beta) \sigma_{t+1}^2 \\ &= \bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^2(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) \sigma_{t+1}^2 \\ &= \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)\end{aligned}$$

Generalizando para k passos à frente por indução:

$$\mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha + \beta)^{k-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$$

Conclusão: Se o processo for estacionário ($\alpha + \beta < 1$), então quando o horizonte de previsão $k \rightarrow \infty$, o termo de persistência $(\alpha + \beta)^{k-1}$ tende a zero. Portanto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2] = \bar{\sigma}^2$$

Isso demonstra a propriedade de **Reversão à Média** da volatilidade.

Fonte: René Carmona, “Statistical Analysis of Financial Data in R”.