SÉRIES TEMPORAIS E ECONOMETRIA - LISTA 3

27 de novembro de 2025

EMAp - FGV

Questão 1. Considere um sistema bivariado estrutural (SVAR) descrito pelas equações abaixo, onde w_{1t} e w_{2t} são erros não correlacionados (ortogonais):

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}y_{1t-1} + w_{1t} \\ y_{2t} &= \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{22}y_{2t-1} + w_{2t} \end{aligned}$$

a) Escreva este sistema na notação matricial $Uy_t = Q_1 y_{t-1} + \tilde{w}_t$, identificando claramente as matrizes U e Q_1.
b) Demonstre como obter a **Forma Reduzida** deste VAR ($y_t = A_1 y_{t-1} + u_t$) a partir da forma estrutural. Qual é a relação algébrica entre os resíduos da forma reduzida (u_t) e os choques estruturais (w_t)?
c) Explique por que, sem restrições adicionais (como $\beta_{12} = 0$), não é possível recuperar os parâmetros estruturais apenas estimando a forma reduzida (o problema de identificação).

Solução.

a) Passando os termos em t para o lado esquerdo:

$$\begin{aligned} y_{1t} - \beta_{12}y_{2t} &= \gamma_{11}y_{1t-1} + w_{1t} \\ -\beta_{21}y_{1t} + y_{2t} &= \gamma_{22}y_{2t-1} + w_{2t} \end{aligned}$$

Em notação matricial $Uy_t = Q_1 y_{t-1} + \tilde{w}_t$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{U} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix}}_{Q_1} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}}_{\tilde{w}_t}$$

b) Para obter a forma reduzida, pré-multiplicamos toda a equação por U^{-1} (assumindo que U é inversível):

$$y_t = \underbrace{U^{-1}Q_1}_{A_1} y_{t-1} + \underbrace{U^{-1}\tilde{w}_t}_{u_t}$$

A relação algébrica entre os resíduos reduzidos e estruturais é dada por $u_t = U^{-1}\tilde{w}_t$, ou equivalentemente $Uu_t = \tilde{w}_t$. Expandindo $u_t = U^{-1}\tilde{w}_t$:

$$\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \beta_{12}\beta_{21}} \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

c) O problema de identificação ocorre porque a estimação do VAR reduzido nos fornece apenas a matriz de covariância dos resíduos reduzidos, Σ_u. Sabemos que $\Sigma_u = \mathbb{E}[u_t u_t'] = U^{-1}\Sigma_w (U^{-1})'$.

Como Σ_w é diagonal (choques estruturais ortogonais), temos 2 variâncias estruturais ($\sigma^2_{w1}, \sigma^2_{w2}$) e 2 parâmetros contemporâneos (β_{12}, β_{21}) para estimar, totalizando 4 incógnitas.

Porém, a matriz Σ_u (simétrica) possui apenas 3 elementos únicos ($\sigma^2_{u1}, \sigma^2_{u2}, \mathrm{Cov}(u_1, u_2)$). Temos 3 equações para 4 incógnitas, tornando o sistema impossível de resolver unicamente sem impor restrições (como a Decomposição de Cholesky, que impõe $\beta_{12} = 0$ ou $\beta_{21} = 0$).

Questão 2. Seja um modelo VAR(1) bivariado $y_t = A_1 y_{t-1} + w_t$, com a matriz de coeficientes dada por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Verifique se este processo é estacionário.

Solução. Para que um processo VAR(1) seja estacionário, os autovalores da matriz A_1 devem ter módulo estritamente menor que 1. Resolvemos a equação característica $\det(A_1 - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 0{,}5 - \lambda & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(0{,}5 - \lambda)^2 - (0{,}1)(0{,}4) = 0$$

$$(0{,}5 - \lambda)^2 = 0{,}04$$

Tirando a raiz quadrada de ambos os lados:

$$0{,}5 - \lambda = \pm 0{,}2$$

As raízes são:

$$\lambda_1 = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$$

Como $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, o processo é **estacionário**.

Questão 3. Dado um processo VAR estacionário, ele pode ser invertido para uma representação de Média Móvel Vetorial (VMA) infinita:

$$y_t = \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l w_{t-l}$$

a) Como os coeficientes das matrizes Ψ_l são interpretados no contexto da Análise de Impulso-Resposta?
b) Se os erros da forma reduzida forem contemporaneamente correlacionados, por que a interpretação de um choque em w_{it} mantendo os outros constantes ("ceteris paribus") é problemática?

Solução.

a) O elemento (i, j) da matriz Ψ_l, denotado por $\psi_{ij,l}$, representa a resposta da variável y_i no tempo $t + l$ a um choque unitário na variável j (ou erro w_j) ocorrido no tempo t, mantendo-se todas as outras variáveis constantes. Matematicamente: $\frac{\partial y_{i,t+l}}{\partial w_{j,t}} = \psi_{ij,l}$.
b) Se os erros da forma reduzida u_t são correlacionados (a matriz de covariância Σ_u não é diagonal), um choque em uma variável raramente ocorre isoladamente. Ao simularmos um choque em u_{1t} mantendo u_{2t} fixo, ignoramos a correlação histórica entre eles. Isso torna a análise de impulso-resposta padrão enganosa, pois o cenário "ceteris paribus" é estatisticamente implausível. É necessário ortogonalizar os erros (ex: Cholesky) para interpretar choques estruturais independentes.

Questão 4. O Teorema da Representação de Granger permite reescrever um VAR(p) como um Modelo de Correção de Erros Vetorial (VECM):

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} A_i^* \Delta y_{t-i} + w_t$$

Explique o significado econômico e estatístico das seguintes situações relativas ao posto (*rank*) da matriz Π:

a) $\mathrm{rank}(\Pi) = 0$.
b) $\mathrm{rank}(\Pi) = k$ (onde k é o número de variáveis do sistema).
c) $0 < \mathrm{rank}(\Pi) = r < k$. Neste caso, como interpretamos a decomposição $\Pi = \alpha\beta'$ (ou $\gamma\tilde{\kappa}'$)?

Solução.

a) Se $\mathrm{rank}(\Pi) = 0$, então Π é uma matriz nula. Isso implica que não há relação de longo prazo entre as variáveis (não há cointegração). O modelo VECM se reduz a um VAR em primeiras diferenças (Δy_t).
b) Se $\mathrm{rank}(\Pi) = k$ (posto completo), a matriz é inversível. Isso implica que o próprio vetor de níveis y_{t-1} deve ser estacionário (I(0)) para equilibrar a equação (pois Δy_t e w_t são estacionários). Se as variáveis forem I(1), isso seria uma contradição, indicando má especificação (deveríamos usar VAR em níveis).
c) Se $0 < \mathrm{rank}(\Pi) = r < k$, existem r relações de cointegração lineares estacionárias. Decompomos $\Pi = \alpha\beta'$, onde:
   - β é a matriz $(k \times r)$ contendo os vetores de cointegração (as relações de equilíbrio de longo prazo).
   - α é a matriz $(k \times r)$ contendo os coeficientes de ajuste, que medem a velocidade com que as variáveis endógenas reagem aos desvios do equilíbrio ($\beta' y_{t-1}$) para retornar à tendência.

Questão 5. Considere o seguinte modelo VAR(1) estimado para duas variáveis, Inflação (y_1) e Taxa de Juros (y_2):

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}0 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

Baseando-se nos coeficientes da matriz, determine se:

a) A Taxa de Juros Granger-causa a Inflação? Justifique.
b) A Inflação Granger-causa a Taxa de Juros? Justifique.

Solução.

a) **Não.** A causalidade de Granger verifica se defasagens de uma variável ajudam a prever a outra. A equação para a Inflação (y_{1t}) é:

$$y_{1t} = 0{,}8 y_{1t-1} + 0 \cdot y_{2t-1} + w_{1t}$$

Como o coeficiente de y_{2t-1} é zero, o passado da taxa de juros não afeta a inflação. Logo, Juros não Granger-causa Inflação.
b) **Sim.** A equação para a Taxa de Juros (y_{2t}) é:

$$y_{2t} = -0{,}5 y_{1t-1} + 0{,}6 y_{2t-1} + w_{2t}$$

O coeficiente de y_{1t-1} é $-0{,}5$ (diferente de zero). O passado da inflação ajuda a prever a taxa de juros. Logo, Inflação Granger-causa Juros.

Questão 6. Utilize um conjunto de dados macroeconômicos (ex: dados do pacote `vars` no R como o dataset `Canada`, ou séries reais de PIB e Desemprego).

a) **Seleção de Ordem:** Estime modelos VAR com diferentes defasagens (de $p = 1$ até $p = 8$). Utilize os critérios de informação AIC, BIC e HQIC para escolher a ordem ideal p.
b) **Diagnóstico:** Verifique se os resíduos se comportam como um Ruído Branco multivariado.
c) **Causalidade:** Realize o teste de Causalidade de Granger.

Solução.

```r
library(vars)
data("Canada")

# a) Seleção de Ordem (VARselect)
# Testa defasagens de 1 até 8
selection <- VARselect(Canada, lag.max = 8, type = "const")
print(selection$selection)
# AIC indica p=3. Ajustamos o modelo:
var_model <- VAR(Canada, p = 3, type = "const")

# b) Diagnóstico dos Resíduos (Portmanteau Test)
# Teste para autocorrelação serial nos resíduos
serial_test <- serial.test(var_model, lags.pt = 10, type = "PT.asymptotic")
print(serial_test)
# H0: Não há autocorrelação serial.
# Como p-valor > 0.05, não rejeitamos H0 (bom ajuste).

# c) Causalidade de Granger
# Testando se 'e' (emprego) causa as outras variáveis
causality_test <- causality(var_model, cause = "e")
print(causality_test$Granger)
# Indição de não-causalidade
```

Questão 7. Considere duas séries financeiras ou macroeconômicas que possuem tendência estocástica (são I(1)).

a) **Teste de Johansen:** Aplique o procedimento de Johansen para determinar o número de vetores de cointegração (r).
b) **Ajuste do VECM:** Se cointegração for encontrada ($r > 0$), ajuste um modelo VECM.
c) **Interpretação:** Identifique o vetor de cointegração estimado e analise os coeficientes de ajuste.

Solução.

```r
library(urca)
data("Raotbl3") # Dados do Reino Unido
# lc: Log Real Consumption, li: Log Real Income
dados_macro <- Raotbl3[, c("lc", "li")]

# 1. Teste de Johansen (Traço)
# Utilizamos K=2 (defasagens) e ecdet="const" (constante na cointegração)
```

```r
johansen_test <- ca.jo(dados_macro, type = "trace", K = 2, ecdet = "const")
summary(johansen_test)

# Analisamos a estatística de teste vs valores críticos.
# Rejeitar r=0 (não cointegração) e aceitamos r<=1.

# 2. Ajuste do VECM
# Ajustamos o modelo considerando rank r=1
vecm_fit <- cajorls(johansen_test, r = 1)
print(vecm_fit)

# 3. Interpretação
# Vetor Beta (Relação de Longo Prazo)
# Normalizado em lc, esperamos algo como: lc = 1*li + c
beta <- vecm_fit$beta
print(beta)

# Coeficientes Alpha (Ajuste)
# Velocidade com que o consumo e a renda reagem ao desequilíbrio.
alpha <- vecm_fit$rlm$coefficients[1, ]
print(alpha)
```