SÉRIES TEMPORAIS E ECONOMETRIA - LISTA 2

26 de novembro de 2025

EMAp - FGV

Questão 1. (8.1) Este problema mostra mais uma vez que uma variável aleatória condicionalmente Gaussiana possui excesso de curtose.

Vamos assumir que X e σ^2 são duas variáveis aleatórias e que $X|\sigma^2 \sim N(0, \sigma^2)$, isto é, que condicionado ao valor de σ^2, X é uma variável aleatória Gaussiana de média zero com variância σ^2. Prove que:

$$\frac{\mathbb{E}\{X^4\}}{var\{X\}^2} = 3\left[1 + \frac{var\{\sigma^2\}}{\mathbb{E}\{\sigma^2\}^2}\right]$$

provando a afirmação de excesso de curtose quando σ^2 não é determinístico.

Solução. Note que pela lei de esperança total, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|\sigma^2] = 0$, logo $var\{X\} = \mathbb{E}[X^2]$.

Podemos agora aplicar a lei da variância total:

$$var\{X\} = \mathbb{E}[var\{X \,|\, \sigma^2\}] + var\{\mathbb{E}[X \,|\, \sigma^2]\}$$

Porém, como $X \,|\, \sigma^2 \sim N(0, \sigma^2)$, $var\{X \,|\, \sigma^2\} = \sigma^2$ e $\mathbb{E}[X \,|\, \sigma^2] = 0$, logo $var\{X\} = \mathbb{E}[\sigma^2]$.

Novamente pela lei da esperança total, $\mathbb{E}[X^4] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^4 \,|\, \sigma^2]]$.

Como $X \,|\, \sigma^2$ é Gaussiana de média zero com variância σ^2, seu quarto momento condicional é dado pela fórmula do quarto momento de uma Normal: $\mathbb{E}[Z^4] = 3(var[Z])^2$.

Assim:

$$\mathbb{E}[X^4 \,|\, \sigma^2] = 3 \cdot (\mathrm{var}\{X|\sigma^2\})^2 = 3(\sigma^2)^2 = 3\sigma^4$$

Substituindo na lei da esperança total:

$$\mathbb{E}[X^4] = \mathbb{E}[\mathbb{E}\{X^4|\sigma^2\}] = \mathbb{E}[3\sigma^4] = 3\mathbb{E}[\sigma^4] \tag{1}$$

Lembramos da definição de variância: $var\{Y\} = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2$. Fazendo $Y = \sigma^2$, temos:

$$var\{\sigma^2\} = \mathbb{E}[(\sigma^2)^2] - (\mathbb{E}[\sigma^2])^2 = \mathbb{E}[\sigma^4] - (\mathbb{E}[\sigma^2])^2$$

Isolando $\mathbb{E}[\sigma^4]$:

$$\mathbb{E}[\sigma^4] = var\{\sigma^2\} + (\mathbb{E}[\sigma^2])^2 \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1):

$$\mathbb{E}[X^4] = 3\left[var\{\sigma^2\} + (\mathbb{E}[\sigma^2])^2\right]$$

Agora, substituímos na razão de curtose desejada:

$$\frac{\mathbb{E}[X^4]}{var\{X\}^2} = \frac{3\left[var\{\sigma^2\} + (\mathbb{E}[\sigma^2])^2\right]}{(\mathbb{E}[\sigma^2])^2} = 3\left[1 + \frac{var\{\sigma^2\}}{\mathbb{E}[\sigma^2]}\right]$$

Como $\mathrm{var}\{\sigma^2\}, \mathbb{E}[\sigma^2] \geqslant 0$, o termo entre colchetes é maior ou igual a 1. Portanto, a curtose (razão) é maior ou igual a 3, o que prova o excesso de curtose em relação a uma variável Gaussiana (cuja razão seria 3).

Questão 2. (8.2) Este problema mostra que séries temporais AR(p) (lineares) podem levar a modelos ARCH (não lineares) quando possuem coeficientes aleatórios.

Seja $\{\epsilon_t\}_t$ um ruído branco univariado forte com $\epsilon_t \sim N(0, 1)$, e seja $\{\phi_t\}_t$ uma série temporal p-variada independente de $\{\epsilon_t\}_t$, e tal que todos os ϕ_t são independentes entre si, e para cada tempo t, o vetor $\phi_t = (\phi_{t,1}, \phi_{t,2}, \ldots, \phi_{t,p})$ é um vetor de variáveis aleatórias

Gaussianas conjuntas com média zero e matriz de variância/covariância Σ. Estudamos a série temporal $\{Y_t\}_t$ definida por:

$$Y_t = \phi_{t,1}Y_{t-1} + \phi_{t,2}Y_{t-2} + \cdots + \phi_{t,p}Y_{t-p} + \epsilon_t.$$

a) Determine a distribuição condicional de Y_t dado $Y_{\leqslant t-1}$ integrando as variáveis aleatórias ϕ.
b) Assuma que os componentes $\phi_{t,1}, \phi_{t,2}, \ldots, \phi_{t,p}$ de ϕ_t são independentes, e mostre que pelo menos neste caso, $\{Y_t\}_t$ tem uma representação ARCH.

Solução.

a) Primeiro, encontramos a distribuição condicional de Y_t dado $\mathcal{F}_{t-1}$ e o vetor de coeficientes ϕ_t. Seja $\mathbf{Y}_{t-1} = (Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-p})^T$ o vetor das observações passadas.

$$Y_t = \phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1} + \epsilon_t$$

Condicionando em $\mathcal{F}_{t-1}$ e ϕ_t:

$$Y_t|\mathcal{F}_{t-1}, \phi_t \sim N(\phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1}, 1)$$

Agora, queremos determinar a distribuição de Y_t apenas condicionado em $\mathcal{F}_{t-1}$ ($\mathbf{Y}_{t-1}$), integrando o vetor ϕ_t.

Definimos a parte autorregressiva como $Z_t = \phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1}$. Condicionado em $\mathcal{F}_{t-1}$, Z_t é uma variável aleatória Gaussiana (uma combinação linear de variáveis Gaussianas), pois ϕ_t é Gaussiano e $\mathbf{Y}_{t-1}$ é fixo.

Média de $Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}$:

$$\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}] = (\mathbb{E}[\phi_t^T])\mathbf{Y}_{t-1} = 0^T \mathbf{Y}_{t-1} = 0$$

Variância de $Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}$:

$$var\{Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\} = var\{\phi_t^T \mathbf{Y}_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\} = \mathbf{Y}_{t-1}^T \mathrm{Cov}[\phi_t] \mathbf{Y}_{t-1} = \mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1}$$

Assim, $Z_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1})$.

Lembramos que $Y_t = Z_t + \epsilon_t$. Como $\epsilon_t \sim N(0,1)$ é independente de ϕ_t e $\mathcal{F}_{t-1}$, a distribuição condicional de Y_t é a soma de duas variáveis Gaussianas independentes:

$$Y_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N\left(0,\ 1 + \mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1}\right)$$

b) Do item (a), temos a média condicional e a variância condicional:

$$\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$$

$$\sigma_t^2 = var\{Y_t|\mathcal{F}_{t-1}\} = 1 + \mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1}$$

Agora, assumimos que os componentes $\phi_{t,1}, \ldots, \phi_{t,p}$ são independentes. Se são independentes e Gaussianos, e têm média zero, a matriz de covariância Σ deve ser diagonal, ou seja, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_p^2)$, onde $\sigma_i^2 = var\{\phi_{t,i}\}$.

Neste caso, o termo de variância $\mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1}$ se torna:

$$\mathbf{Y}_{t-1}^T \Sigma \mathbf{Y}_{t-1} = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2 Y_{t-i}^2$$

Substituindo na variância condicional:

$$\sigma_t^2 = 1 + \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2 Y_{t-i}^2$$

Essa forma é idêntica à definição de um modelo ARCH(p) com um termo de intercepto.

Isso mostra que, pelo menos no caso de coeficientes $\phi_{t,i}$ Gaussianos, de média zero e independentes, a série $\{Y_t\}_t$ tem uma representação ARCH(p), demonstrando como um processo AR(p) com coeficientes aleatórios leva a um modelo de volatilidade condicional.

Questão 3. (5.6) Os preços spot semanais do petróleo bruto em dólares por barril estão em `oil`; veja o Problema 2.10 e o Apêndice R para mais detalhes. Investigue se a taxa de crescimento do preço semanal do petróleo exibe comportamento GARCH. Se sim, ajuste um modelo apropriado para a taxa de crescimento.

Solução. Seja P_t o preço spot do petróleo no tempo t. A taxa de crescimento (retorno logarítmico) é $R_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$. Para verificar a presença de efeitos ARCH, ajustamos um modelo ARMA para a média (se necessário) e analisamos os resíduos quadrados desse modelo usando a Função de Autocorrelação (ACF) e o teste de Ljung-Box para os resíduos quadrados.

```r
library(astsa)
data(oil) # Carregar a série 'oil'

# 1. Calcular os retornos
returns <- diff(log(oil))

# 2. Ajustar um modelo ARMA para a média
fit_arma <- arima(returns, order = c(0, 0, 0)) # Assumindo ruído branco
residuos_quadrados <- residuals(fit_arma)^2

# 3. Teste para Efeitos ARCH: Teste de Ljung-Box nos resíduos quadrados
Box.test(residuos_quadrados, lag = 10, type = "Ljung-Box")
```

O teste revela baixo p-valor, indicando presença de heterocedasticidade condicional (efeitos ARCH/GARCH).

Assim, ajustamos um modelo GARCH(1,1):

```r
library(astsa)
# Usando garch() do pacote tseries, que assume média zero (ARMA(0,0))
fit_garch <- garch(returns, order = c(1, 1))
summary(fit_garch)
```

Com resultado

```
Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 1.222e-04   5.909e-05    2.068 0.038667 *
a1 6.713e-02   1.913e-02    3.509 0.000449 ***
b1 8.721e-01   4.278e-02   20.384  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Podemos notar que:

- Efeitos GARCH: O comportamento GARCH é confirmado com $\hat{\alpha}_1 > 0$, $\hat{\beta}_1 > 0$ e ambos estatisticamente significativos (p-valor baixo).
- Persistência da Volatilidade: A persistência da volatilidade é medida pela soma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$. Como essa soma está próxima de 1, isso indica que os choques de volatilidade demoram muito para se dissipar.
- Estacionaridade: A série de variâncias é fracamente estacionária já que $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 < 1$.

Questão 4. (5.7) O pacote `stats` do R contém os preços de fechamento diários de quatro grandes índices de ações europeus; digite `help(EuStockMarkets)` para detalhes. Ajuste um modelo GARCH aos retornos de uma dessas séries e discuta seus achados. (Nota: O conjunto de dados contém valores reais, e não retornos. Portanto, os dados devem ser transformados antes do ajuste do modelo.)

Solução. Escolhemos o índice DAX (Alemanha) do conjunto de dados 'EuStockMarkets' como exemplo.

Para começar, precisamos transformá-los em retornos logarítmicos para garantir que a série seja fracamente estacionária.

```
# Carregar o conjunto de dados
data("EuStockMarkets")

# Escolher o índice DAX e calcular os retornos logarítmicos
dax_prices <- EuStockMarkets[, "DAX"]
dax_returns <- diff(log(dax_prices))
```

Assim como na Questão 1, ajustamos um modelo para a média (neste caso ARMA(0,0)) e testamos os resíduos quadrados.

```
# Teste de Ljung-Box nos resíduos quadrados para verificar heterocedasticidade
fit_arma <- arima(dax_returns, order = c(0, 0, 0))
residuos_quadrados <- residuals(fit_arma)^2
Box.test(residuos_quadrados, lag = 10, type = "Ljung-Box")
```

O baixo p-valor nos indica efeitos ARCH/GARCH. Por fim, ajustamos o modelo GARCH(1,1), geralmente suficiente para modelar a maioria das séries financeiras.

```
# Ajustar GARCH(1,1)
garch(dax_returns, order = c(1, 1))
```

```
Coefficient(s):
       a0         a1         b1
4.639e-06  6.833e-02  8.891e-01
```

Temos coeficientes positivos e significantes como no item anterior, e a dominância de $\hat{\beta}_1$ demonstra que o risco (volatilidade) do mercado de ações é dinâmico, não constante, e que o risco de hoje depende do quão arriscado foi o dia de ontem.

Questão 5. Considere um processo ARCH(1) definido por:

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2$$

Onde:

- $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ e são i.i.d.
- $\omega > 0$ e $\alpha \geqslant 0$

Assumindo que o processo iniciou em um passado infinito, derive a **variância incondicional** de y_t, denotada por $var(y_t)$, e determine a condição necessária sobre α para que essa variância seja finita e positiva (covariância-estacionária).

Solução. Note que a esperança condicional de y_t é zero ($E[y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$), logo a esperança incondicional é $\mathbb{E}[y_t] = 0$. Assim, a variância incondicional é dada por $\mathbb{E}[y_t^2]$.

Note que

$$\mathbb{E}[y_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2 \epsilon_t^2]$$

Como σ_t depende apenas do passado, é independente de ϵ_t. Dado que $\mathbb{E}[\epsilon_t^2] = 1$:

$$\mathbb{E}[y_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] \cdot \mathbb{E}[\epsilon_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2]$$

Substituindo a equação da variância do ARCH(1):

$$\mathbb{E}[y_t^2] = \mathbb{E}[\omega + \alpha y_{t-1}^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[y_{t-1}^2]$$

Sob a hipótese de estacionariedade, a variância incondicional é constante no tempo, ou seja, $\mathbb{E}[y_t^2] = \mathbb{E}[y_{t-1}^2] = \sigma^2$. Substituindo:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \omega + \alpha\sigma^2 \\
\sigma^2 - \alpha\sigma^2 &= \omega \\
\sigma^2(1-\alpha) &= \omega
\end{aligned}$$

Isolando σ^2, obtemos a variância incondicional:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha}$$

Conclusão: Para que a variância seja finita e positiva ($\sigma^2 > 0$), dado que $\omega > 0$, o denominador deve ser positivo. Logo, a condição de estacionariedade é:

$$\alpha < 1$$

Questão 6. Considere um modelo GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

Suponha que estamos no tempo t e conhecemos σ_{t+1}^2. Mostre que a previsão de k passos à frente, $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2]$, converge para a variância incondicional à medida que $k \to \infty$, assumindo $\alpha + \beta < 1$.

Solução. Derivando a previsão para 2 passos à frente ($t+2$):

$$\sigma_{t+2}^2 = \omega + \alpha y_{t+1}^2 + \beta\sigma_{t+1}^2$$

Aplicando a esperança condicional em t ($\mathbb{E}_t[\cdot]$):

$$\mathbb{E}_t[\sigma_{t+2}^2] = \omega + \alpha\mathbb{E}_t[y_{t+1}^2] + \beta\mathbb{E}_t[\sigma_{t+1}^2]$$

Sabemos que $\mathbb{E}_t[y_{t+1}^2] = \sigma_{t+1}^2$ e que σ_{t+1}^2 é conhecido em t. Logo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t[\sigma_{t+2}^2] &= \omega + \alpha\sigma_{t+1}^2 + \beta\sigma_{t+1}^2 \\
\mathbb{E}_t[\sigma_{t+2}^2] &= \omega + (\alpha+\beta)\sigma_{t+1}^2
\end{aligned}$$

A variância incondicional (a longo prazo) do GARCH(1,1) é $\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}$. Podemos reescrever o termo constante ω como:

$$\omega = \bar{\sigma}^2(1-(\alpha+\beta))$$

Substituindo ω na equação de previsão:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t[\sigma_{t+2}^2] &= \bar{\sigma}^2(1-(\alpha+\beta)) + (\alpha+\beta)\sigma_{t+1}^2 \\
&= \bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^2(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)\sigma_{t+1}^2 \\
&= \bar{\sigma}^2 + (\alpha+\beta)(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)
\end{aligned}$$

Generalizando para k passos à frente por indução:

$$\mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2] = \bar{\sigma}^2 + (\alpha+\beta)^{k-1}(\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2)$$

Conclusão: Se o processo for estacionário ($\alpha + \beta < 1$), então quando o horizonte de previsão $k \to \infty$, o termo de persistência $(\alpha + \beta)^{k-1}$ tende a zero. Portanto:

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2] = \bar{\sigma}^2$$

Isso demonstra a propriedade de **Reversão à Média** da volatilidade.