

# Enunciados

## Lista 2

Problemas retirados de René Carmona,  
*Statistical Analysis of Financial Data in R*;  
Robert H. Shumway & David S. Stoffer,  
*Time Series Analysis and Its Applications With R Examples*

26 de novembro de 2025

### Problema 8.1

Este problema mostra mais uma vez que uma variável aleatória condicionalmente Gaussiana possui excesso de curtose.

Vamos assumir que  $X$  e  $\sigma^2$  são duas variáveis aleatórias e que  $X|\sigma^2 \sim N(0, \sigma^2)$ , isto é, que condicionado ao valor de  $\sigma^2$ ,  $X$  é uma variável aleatória Gaussiana de média zero com variância  $\sigma^2$ . Prove que:

$$\frac{\mathbb{E}\{X^4\}}{\text{var}\{X\}^2} = 3 \left[ 1 + \frac{\text{var}\{\sigma^2\}}{\mathbb{E}\{\sigma^2\}^2} \right]$$

provando a afirmação de excesso de curtose quando  $\sigma^2$  não é determinístico.

### Problema 8.2

Este problema mostra que séries temporais AR(p) (lineares) podem levar a modelos ARCH (não lineares) quando possuem coeficientes aleatórios.

Seja  $\{\epsilon_t\}_t$  um ruído branco univariado forte com  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ , e seja  $\{\phi_t\}_t$  uma série temporal p-variada independente de  $\{\epsilon_t\}_t$ , e tal que todos os  $\phi_t$  são independentes entre si, e para cada tempo  $t$ , o vetor  $\phi_t = (\phi_{t,1}, \phi_{t,2}, \dots, \phi_{t,p})$  é um vetor de variáveis aleatórias Gaussianas conjuntas com média zero e matriz de variância/covariância  $\Sigma$ . Estudamos a série temporal  $\{Y_t\}_t$  definida por:

$$Y_t = \phi_{t,1}Y_{t-1} + \phi_{t,2}Y_{t-2} + \dots + \phi_{t,p}Y_{t-p} + \epsilon_t.$$

1. Determine a distribuição condicional de  $Y_t$  dado  $Y_{\leq t-1}$  integrando as variáveis aleatórias  $\phi$ .
2. Assuma que os componentes  $\phi_{t,1}, \phi_{t,2}, \dots, \phi_{t,p}$  de  $\phi_t$  são independentes, e mostre que pelo menos neste caso,  $\{Y_t\}_t$  tem uma representação ARCH.

## Problema 5.6

Os preços spot semanais do petróleo bruto em dólares por barril estão em `oil`; veja o Problema 2.10 e o Apêndice R para mais detalhes. Investigue se a taxa de crescimento do preço semanal do petróleo exibe comportamento GARCH. Se sim, ajuste um modelo apropriado para a taxa de crescimento.

## Problema 5.7

O pacote `stats` do R contém os preços de fechamento diários de quatro grandes índices de ações europeus; digite `help(EuStockMarkets)` para detalhes. Ajuste um modelo GARCH aos retornos de uma dessas séries e discuta seus achados. (Nota: O conjunto de dados contém valores reais, e não retornos. Portanto, os dados devem ser transformados antes do ajuste do modelo.)

## Problema 5

Considere um processo ARCH(1) definido por:

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2$$

Onde:

- $\epsilon_t \sim N(0, 1)$  e são i.i.d.
- $\omega > 0$  e  $\alpha \geq 0$

Assumindo que o processo iniciou em um passado infinito, derive a **variância incondicional** de  $y_t$ , denotada por  $\text{var}(y_t)$ , e determine a condição necessária sobre  $\alpha$  para que essa variância seja finita e positiva (covariância-estacionária).

## Problema 6

Considere um modelo GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Suponha que estamos no tempo  $t$  e conhecemos  $\sigma_{t+1}^2$ . Mostre que a previsão de  $k$  passos à frente,  $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2]$ , converge para a variância incondicional à medida que  $k \rightarrow \infty$ , assumindo  $\alpha + \beta < 1$ .