

Enunciados

Lista 2

Problemas retirados de René Carmona,
Statistical Analysis of Financial Data in R;
Robert H. Shumway & David S. Stoffer,
Time Series Analysis and Its Applications With R Examples

26 de novembro de 2025

Problema 8.1

Este problema mostra mais uma vez que uma variável aleatória condicionalmente Gaussiana possui excesso de curtose.

Vamos assumir que X e σ^2 são duas variáveis aleatórias e que $X|\sigma^2 \sim N(0, \sigma^2)$, isto é, que condicionado ao valor de σ^2 , X é uma variável aleatória Gaussiana de média zero com variância σ^2 . Prove que:

$$\frac{\mathbb{E}\{X^4\}}{\text{var}\{X\}^2} = 3 \left[1 + \frac{\text{var}\{\sigma^2\}}{\mathbb{E}\{\sigma^2\}^2} \right]$$

provando a afirmação de excesso de curtose quando σ^2 não é determinístico.

Problema 8.2

Este problema mostra que séries temporais AR(p) (lineares) podem levar a modelos ARCH (não lineares) quando possuem coeficientes aleatórios.

Seja $\{\epsilon_t\}_t$ um ruído branco univariado forte com $\epsilon_t \sim N(0, 1)$, e seja $\{\phi_t\}_t$ uma série temporal p-variada independente de $\{\epsilon_t\}_t$, e tal que todos os ϕ_t são independentes entre si, e para cada tempo t , o vetor $\phi_t = (\phi_{t,1}, \phi_{t,2}, \dots, \phi_{t,p})$ é um vetor de variáveis aleatórias Gaussianas conjuntas com média zero e matriz de variância/covariância Σ . Estudamos a série temporal $\{Y_t\}_t$ definida por:

$$Y_t = \phi_{t,1}Y_{t-1} + \phi_{t,2}Y_{t-2} + \dots + \phi_{t,p}Y_{t-p} + \epsilon_t.$$

1. Determine a distribuição condicional de Y_t dado $Y_{\leq t-1}$ integrando as variáveis aleatórias ϕ .
2. Assuma que os componentes $\phi_{t,1}, \phi_{t,2}, \dots, \phi_{t,p}$ de ϕ_t são independentes, e mostre que pelo menos neste caso, $\{Y_t\}_t$ tem uma representação ARCH.

Problema 5.6

Os preços spot semanais do petróleo bruto em dólares por barril estão em `oil`; veja o Problema 2.10 e o Apêndice R para mais detalhes. Investigue se a taxa de crescimento do preço semanal do petróleo exibe comportamento GARCH. Se sim, ajuste um modelo apropriado para a taxa de crescimento.

Problema 5.7

O pacote `stats` do R contém os preços de fechamento diários de quatro grandes índices de ações europeus; digite `help(EuStockMarkets)` para detalhes. Ajuste um modelo GARCH aos retornos de uma dessas séries e discuta seus achados. (Nota: O conjunto de dados contém valores reais, e não retornos. Portanto, os dados devem ser transformados antes do ajuste do modelo.)

Problema 5

Considere um processo ARCH(1) definido por:

$$y_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2$$

Onde:

- $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ e são i.i.d.
- $\omega > 0$ e $\alpha \geq 0$

Assumindo que o processo iniciou em um passado infinito, derive a **variância incondicional** de y_t , denotada por $\text{var}(y_t)$, e determine a condição necessária sobre α para que essa variância seja finita e positiva (covariância-estacionária).

Problema 6

Considere um modelo GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Suponha que estamos no tempo t e conhecemos σ_{t+1}^2 . Mostre que a previsão de k passos à frente, $\mathbb{E}_t[\sigma_{t+k}^2]$, converge para a variância incondicional à medida que $k \rightarrow \infty$, assumindo $\alpha + \beta < 1$.