Föreläsning 2/10
Stela kroppar rörelse kring en fix axel

Ulf Torkelsson

1 Fysisk pendel

En kropp är upphängd runt en horisontell axel O, som befinner sig på avståndet l från kroppens masscentrum. Kroppen påverkas då av ett vridmoment $-mgl\sin\theta$. Momentlagen ger oss därför $I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$, som vi kan skriva om till

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\sin\theta = 0. \tag{1}$$

För små vinklar kan vi approximera denna med

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0, \tag{2}$$

ekvationen för en harmonisk oscillator. Vi ser då att pendeln svänger med vinkelfrekvensen (ej vinkelhastigheten)

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \tag{3}$$

Här kan det vara praktiskt att införa gyroradien $k^2 = I/m$, som ger oss $\omega = \sqrt{gl/k^2}$. Alltså kan vi skriva pendelns period som

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gl}}. \tag{4}$$

Vi ser att om $k = l$ återfår vi vinkelfrekvensen för en matematisk pendel.

Enligt Steiners sats kan vi skriva kroppens rörelsemängdsmoment som

$$I = I_{\mathrm{cm}} + ml^2, \tag{5}$$

vilket med hjälp av gyroradien kan skrivas som

$$mk^2 = mk_{\mathrm{cm}}^2 + ml^2, \tag{6}$$

där k_{cm} är gyroradien för masscentrum. Om vi har hängt upp kroppen kring en punkt O på avståndet l från masscentrum följer då att svängningsperioden är

$$T_{\mathrm{O}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_{\mathrm{cm}}^2 + l^2}{gl}}. \tag{7}$$

För en annan punkt O' på avståndet l' från masscentrum är svängningsperioden istället

$$T_{\mathrm{O}'} = 2\pi\sqrt{\frac{k_{\mathrm{cm}}^2 + l'^2}{gl'}}. \tag{8}$$

Om dessa svängningsperioder är lika har vi

$$\frac{k_{\mathrm{cm}}^2 + l^2}{l} = \frac{k_{\mathrm{cm}}^2 + l'^2}{l'}, \tag{9}$$

som ger oss ekvationen

$$ll' = k_{\mathrm{cm}}^2. \tag{10}$$

Vi säger att O' är svängningscentrum för O och vice versa.

Låt oss nu titta på hur man kan behandla pendelproblemet analytiskt då pendelns utslag är så stort att approximationen $\sin\theta \approx \theta$ inte håller längre. I detta fallet börjar vi med att skriva ned pendelns totala energi

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgh, \tag{11}$$

som är en bevarad storhet om vi kan försumma friktionen. $h = l(1 - \cos\theta)$ är höjden för pendelns masscentrum över dess bottennivå. Vi kan nu speciellt betrakta pendeln i dess maxutslag, amplitud, θ_0. I denna punkt är $\dot{\theta} = 0$, så vi har

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl\left(1 - \cos\theta\right) = mgl\left(1 - \cos\theta_0\right). \tag{12}$$

Vi kan nu lösa ut $\dot{\theta}$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\left[\frac{2mgl}{I}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Om vi nu väljer den positiva roten, så kan vi uttrycka tiden det tar för pendeln att vrida sig från lodlinjen en vinkel θ som

$$t = \sqrt{\frac{I}{2mgl}}\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)^{1/2}}. \tag{14}$$

Speciellt så tar det en kvarts period T att uppnå vinkeln θ_0, så perioden blir

$$T = 4\sqrt{\frac{I}{2mgl}}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)^{1/2}}. \tag{15}$$

Dessa ekvationer går inte att uttrycka i våra vanliga elementära funktioner. Vi kan dock skriva om integralerna genom att införa en ny integrationsvariabel φ genom

$$\sin\varphi = \frac{\sin\theta/2}{\sin\theta_0/2} = \frac{1}{k}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{16}$$

där

$$k = \sin\frac{\theta_0}{2}. \tag{17}$$

Lägg nu märke till att

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2k^2\sin^2\varphi. \tag{18}$$

På samma sätt har vi att

$$\cos\theta_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta_0}{2} = 1 - 2k^2. \tag{19}$$

Vi har också att

$$\cos\varphi\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2k}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2k}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}, \tag{20}$$

enligt den trigonometriska ettan. Alltså får vi integralen

$$t = \sqrt{\frac{I}{2mgl}}\int_0^\varphi \frac{2k\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2k^2 - 2k^2\sin^2\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{I}{mgl}}\int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = F\left(k, \varphi\right), \tag{21}$$

som kallas för elliptisk integral av den första graden. Speciellt så kommer pendelns period att ges av

$$T = 4\sqrt{Imgl}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \tag{22}$$

som kan slås upp i en lämplig formelsamling.

2 Exempel på stelkroppsproblem med rotation kring en fix axel

Exempel: Muraren Klas har fallit ner från en byggnadsställning kring en skyskrapa, som skall bli Chalmers nya administrationsbyggnad. Under fallet får han tag i ett rep, som hänger ut från byggnadsställningen. Repet går upp över ett homogent block med radien 20 cm och massan 5 kg, och på den andra sidan av blocket hänger en spann med cement, vilken väger 20 kg. Klas börjar klättra uppför repet med en acceleration på 2 $\mathrm{m\,s^{-2}}$. Beräkna belastningen i repets båda sidor om Klas väger 80 kg. Bestäm också Klas acceleration relativt marken.

Lösning: Antag att vi på Klas sida om blocket har en spänning F_K i repet, och på spannens sida är spänningen F_1. Om Klas har massan M och spannen har massan m, så får Klas rörelseekvationen

$$M_\mathrm{K} a_\mathrm{K} = F_\mathrm{K} - Mg. \tag{23}$$

Rörelseekvationen för spannen är

$$m a_1 = F_1 - mg. \tag{24}$$

Momentekvationen för blocket är

$$I\dot{\omega} = (F_\mathrm{K} - F_1)\, r. \tag{25}$$

I och med att repet inte glider över blocket så har vi tvånget

$$\dot{\omega} r = a_1. \tag{26}$$

Vi kan skriva Klas acceleration som

$$a_\mathrm{K} = a' - a_1, \tag{27}$$

där a' är Klas acceleration relativt repet. Blockets tröghetsmoment är

$$I = \frac{1}{2} m_\mathrm{b} r^2. \tag{28}$$

Vi kan nu skriva Klas rörelseekvation som

$$M\left(a' - a_1\right) = F_\mathrm{K} - Mg, \tag{29}$$

där vi löser ut

$$F_\mathrm{K} = M\left(a' - a_1 + g\right). \tag{30}$$

Spannens rörelseekvation blir

$$m a_1 = F_1 - mg, \tag{31}$$

där vi löser ut

$$F_1 = m\left(a_1 + g\right). \tag{32}$$

Momentlagen ger oss

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{b} r^2 \frac{a_1}{r} = (F_\mathrm{K} - F_1)\, r, \tag{33}$$

som ger oss

$$\frac{1}{2} m_\mathrm{b} a_1 = F_\mathrm{K} - F_1 = M\left(a' - a_1 + g\right) - m\left(a_1 + g\right). \tag{34}$$

Vi kan här lösa ut

$$a_1 = \frac{M\left(a' + g\right) - mg}{\frac{1}{2} m_\mathrm{b} + M + m} = \frac{80\,(2 + 9.8) - 20 \times 9.8}{\frac{1}{2} \times 5 + 80 + 20} = 7.3\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \tag{35}$$

Då är Klas acceleration

$$a_\mathrm{K} = 2 - 7.3 = -5.3\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \tag{36}$$

vilket betyder att han faller med $5.3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ mot marken. Vi har också att belastningarna i repet är

$$F_1 = 20\,(7.3 + 9.8) = 340\,\mathrm{N}, \tag{37}$$

och

$$F_{\mathrm{K}} = 80\,(2 - 7.3 + 9.8) = 1\,500\,\mathrm{N}. \tag{38}$$

Exempel: I en fabrik transporterar man burkar längs ett rullband. Burkarna är cylindrar med diametern 25 cm och höjden 40 cm. På grund av ett programfel accelererar rullbandet så att dess fart kan skrivas som

$$v = v_0 + bt^2,$$

där $v_0 = 1.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ och $b = 0.9\,\mathrm{m\,s^{-3}}$. Hur lång tid tar det innan burkarna faller omkull? Antag att burkarna är homogena.

Lösning: En burk på rullbandet påverkas av en nedåtriktad tyngdkraft $-mg$, en uppåtriktad normalkraft N, och en framåtriktad friktionskraft F. I det system som rör sig tillsammans med rullbandet måste vi dessutom lägga till en fiktivkraft $-m\dot{v}$, där $\dot{v}$ är rullbandets acceleration. Vi ställer upp momentjämvikt kring burkens bakre kant när dess främre kant har lyft sig en infinitesimal sträcka från rullbandet. I detta ögonblick angriper friktionskraften och normalkraften i burkens bakre kant, och ger alltså inte något vridmoment, så momentjämvikt ger oss

$$mgr - m\dot{v}\frac{h}{2} = 0, \tag{39}$$

där vi kan lösa ut

$$\dot{v} = 2g\frac{r}{h}. \tag{40}$$

När $\dot{v}$ överskrider detta värde kommer burken att välta. Vi kan också beräkna $\dot{v}$ ur rullbandets rörelse

$$\dot{v} = 2bt, \tag{41}$$

så vi får ekvationen

$$2g\frac{r}{h} = 2bt, \tag{42}$$

som har lösningen

$$t = \frac{gr}{bh} = \frac{9.8 \times 0.125}{0.9 \times 0.2} = 6.8\,\mathrm{s}. \tag{43}$$