Disciplina: Física geral e experimental: Mecânica

AULA 2

Movimento em uma dimensão, velocidade e aceleração

Professor: Paulo Sergio Olivio Filho

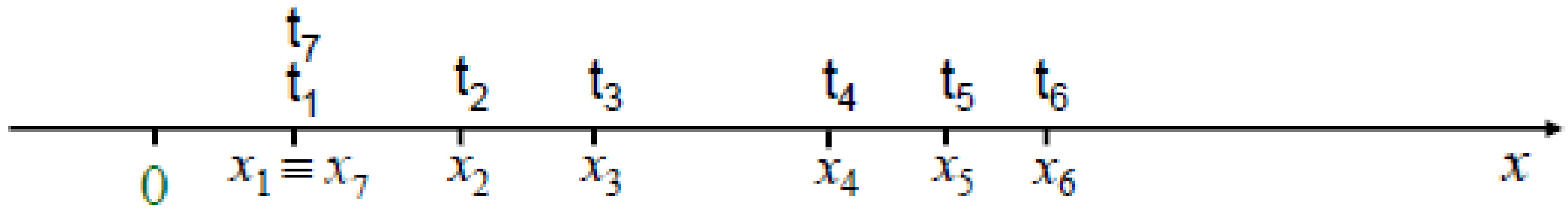
Me Engenharia Mecânica - UFPR

Objetivos

- Conceituar posição; movimento e trajetória
- Saber calcular velocidade média
- Saber calcular velocidade instantânea
- Saber calcular aceleração média
- Saber calcular aceleração instantânea

Posição

Em cinemática, os conceitos de *tempo* e *posição* são primitivos. Um objeto é localizado pela sua posição ao longo de um eixo orientado, relativamente a um ponto de referência, geralmente tomado como a origem ($x = 0$). Exemplo:



Posição

O *movimento* de um objeto consiste na mudança de sua posição com o decorrer do tempo.

Um conceito importante é o da *relatividade* do movimento: sua descrição depende do observador. Já a escolha da origem é arbitrária.

A *trajetória* é o lugar geométrico dos pontos do espaço ocupados pelo objeto que se movimenta.

Deslocamento e Velocidade Média

O *deslocamento* unidimensional de um objeto num intervalo de tempo (t_2-t_1) é a diferença entre a posição final (x_2) no instante t_2 e a posição inicial (x_1) no instante t_1.

A velocidade média é definida como:

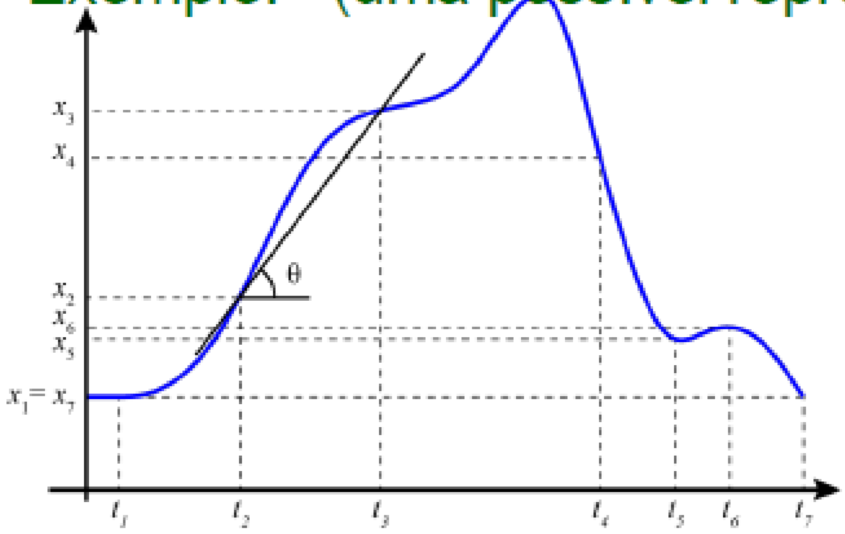
$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(unidade: m/s)}$$

- Se $\Delta x > 0 \Rightarrow v_m > 0$ (movimento para a direita, ou no sentido de x crescente);

- Se $\Delta x < 0 \Rightarrow v_m < 0$ (movimento para a esquerda, ou no ou no sentido de x decrescente).

Velocidade Média

Exemplo: (uma possível representação do movimento)

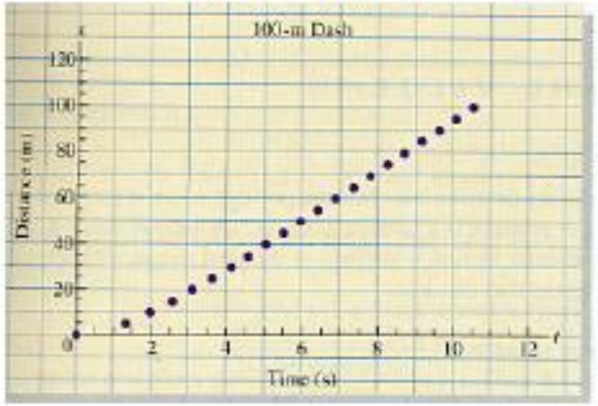


$$v_m = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} > 0 \quad (v_m \text{ entre } t_2 \text{ e } t_3)$$

$$v_m = \frac{x_7 - x_1}{t_7 - t_1} = 0 \quad (v_m \text{ entre } t_1 \text{ e } t_7)$$

$$v_m = \frac{x_6 - x_4}{t_6 - t_4} < 0 \quad (v_m \text{ entre } t_4 \text{ e } t_6)$$

Exemplo numérico: corrida de 100 metros.



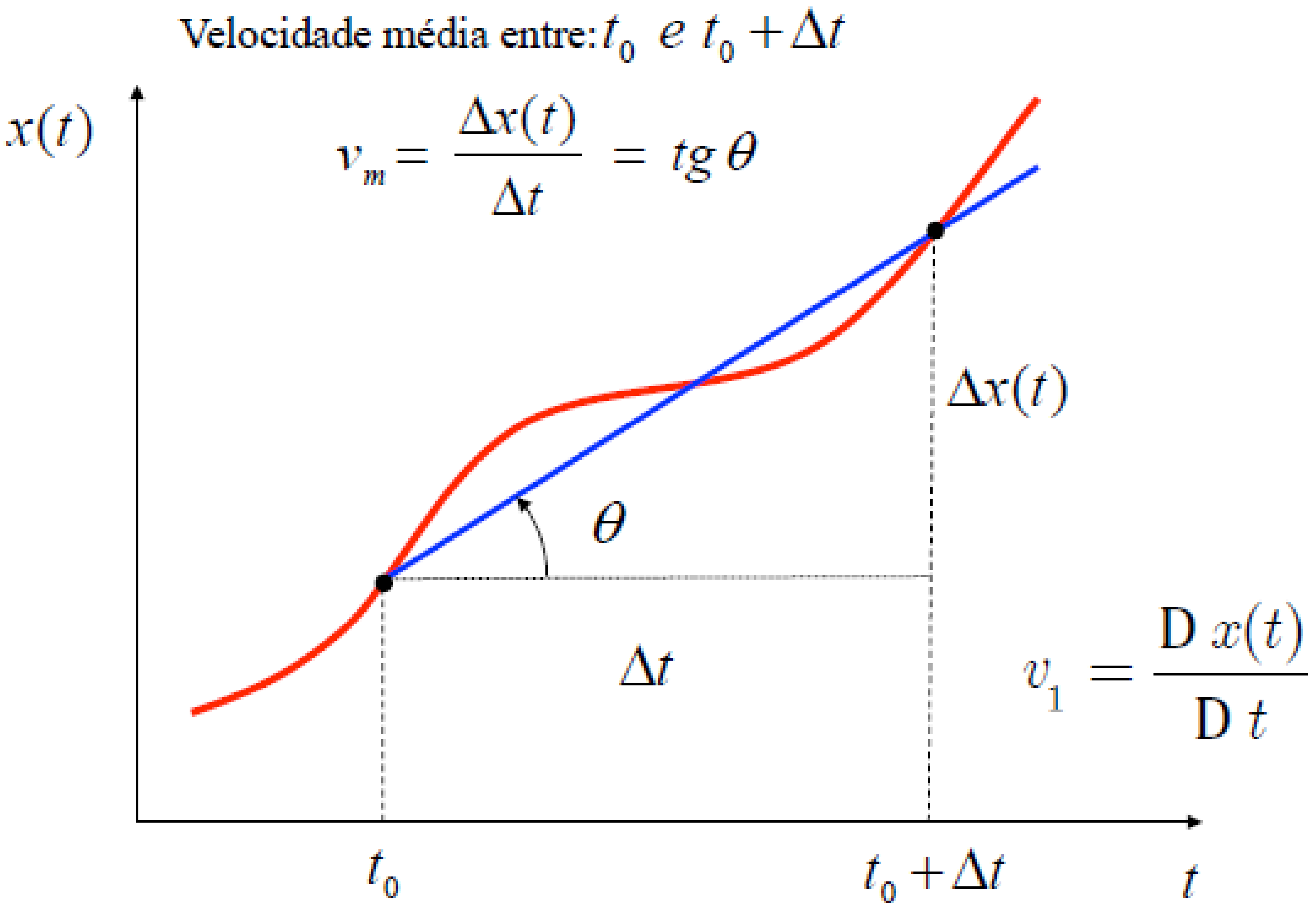
de 0 a 5,0 s : v_m = 40 m/5,0s = 8,0 m/s

de 5,0 a 10,5 s: v_m = 60 m/5,5s = 10,9 m/s

Em todo o intervalo (de 0 a 10,5 s) :

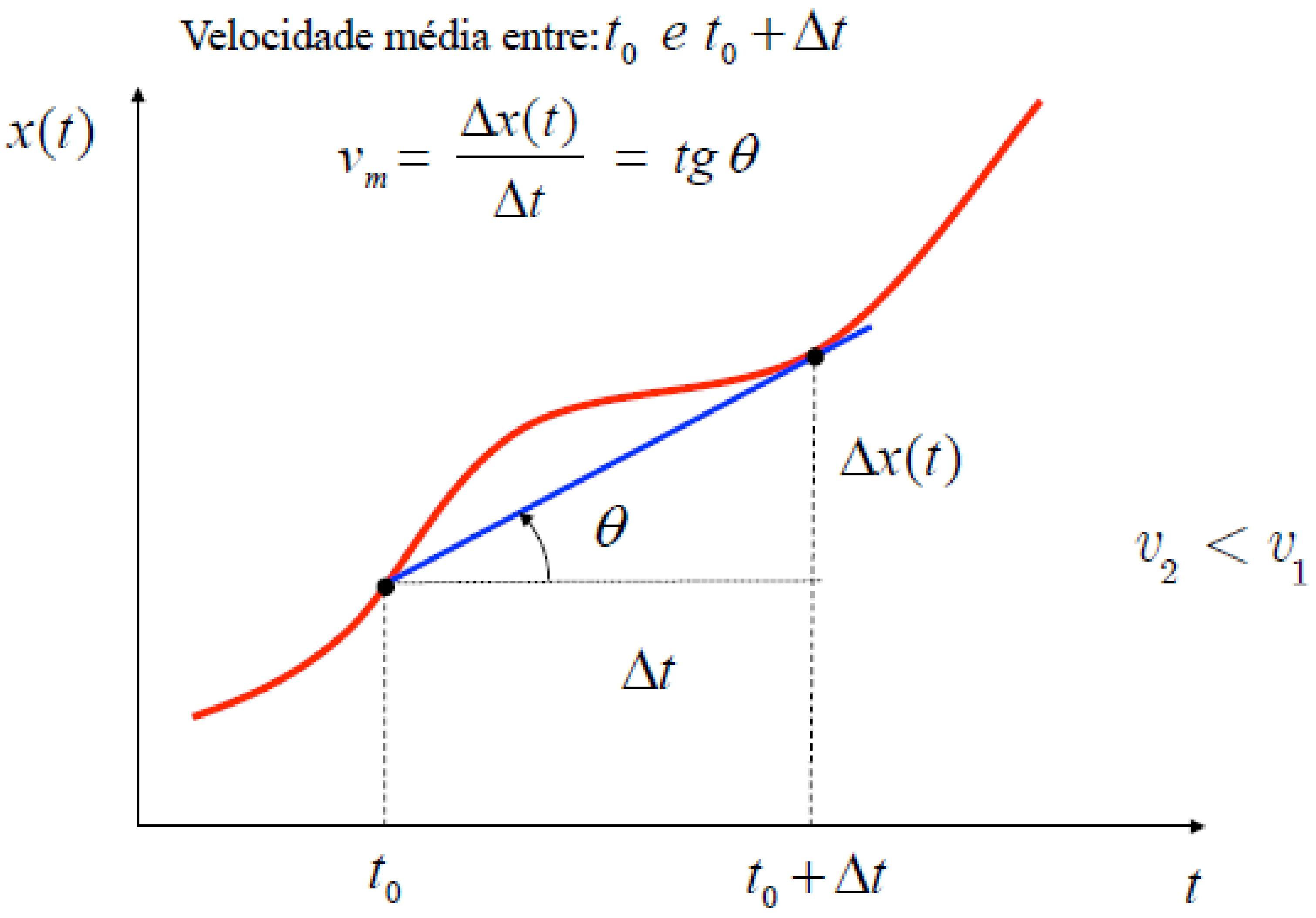
v_m = 100 m/10,5s = 9,5 m/s

Velocidade Média



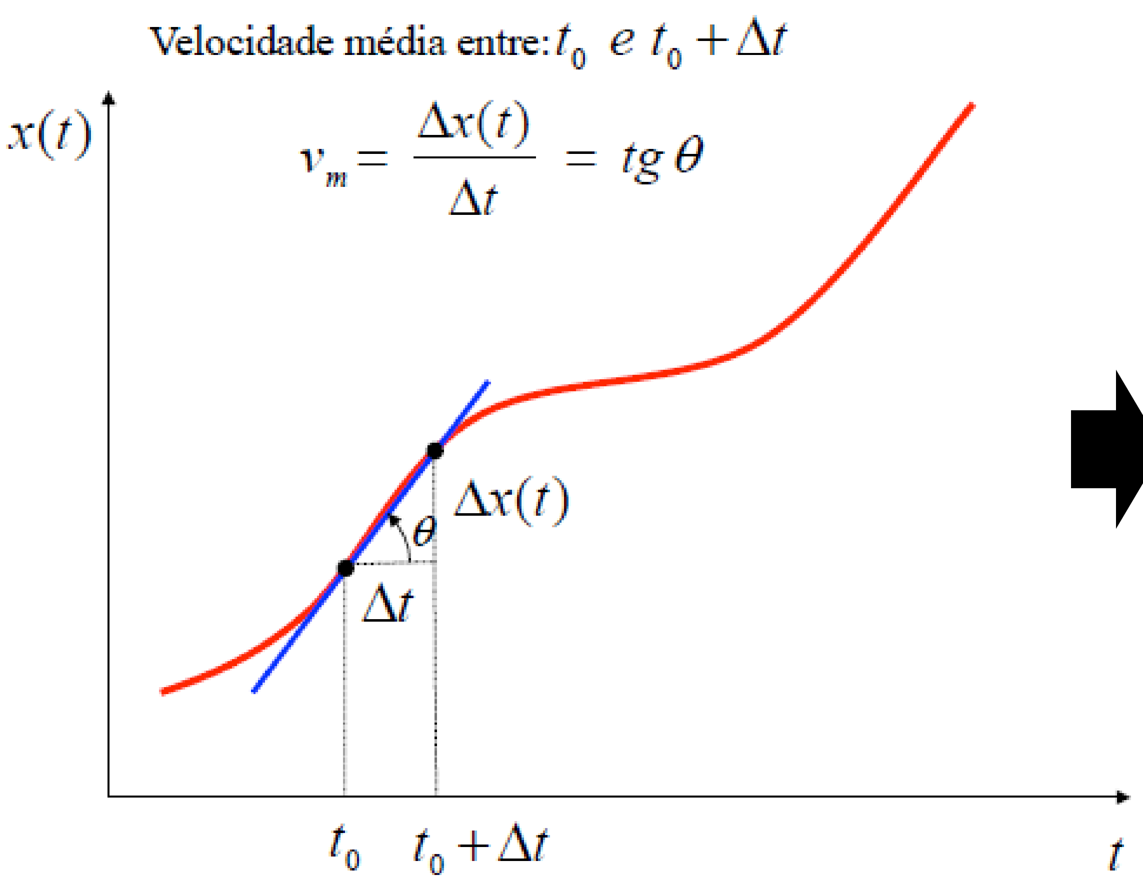
A velocidade média nos dá informações sobre o movimento em um intervalo de tempo. Mas podemos querer saber a velocidade em um dado instante.

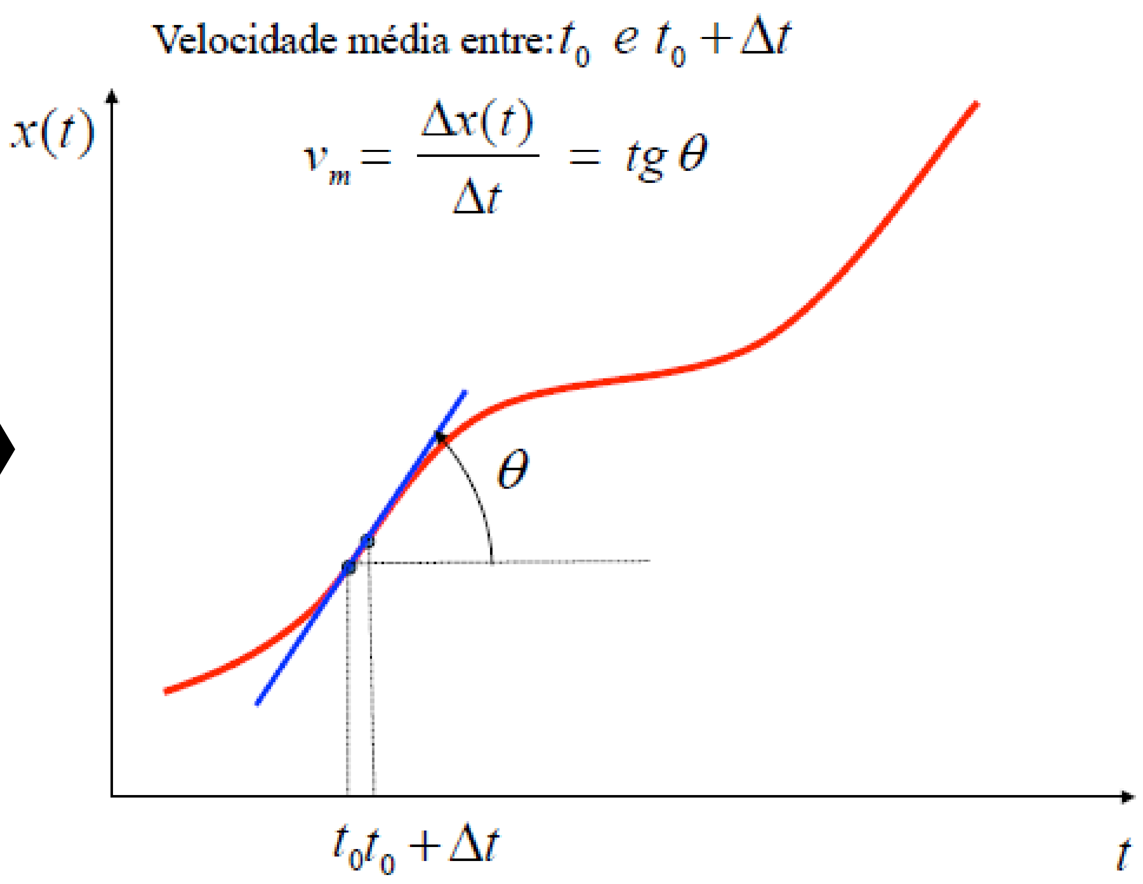
Velocidade Média



A velocidade média nos dá informações sobre o movimento em um intervalo de tempo. Mas podemos querer saber a velocidade em um dado instante.

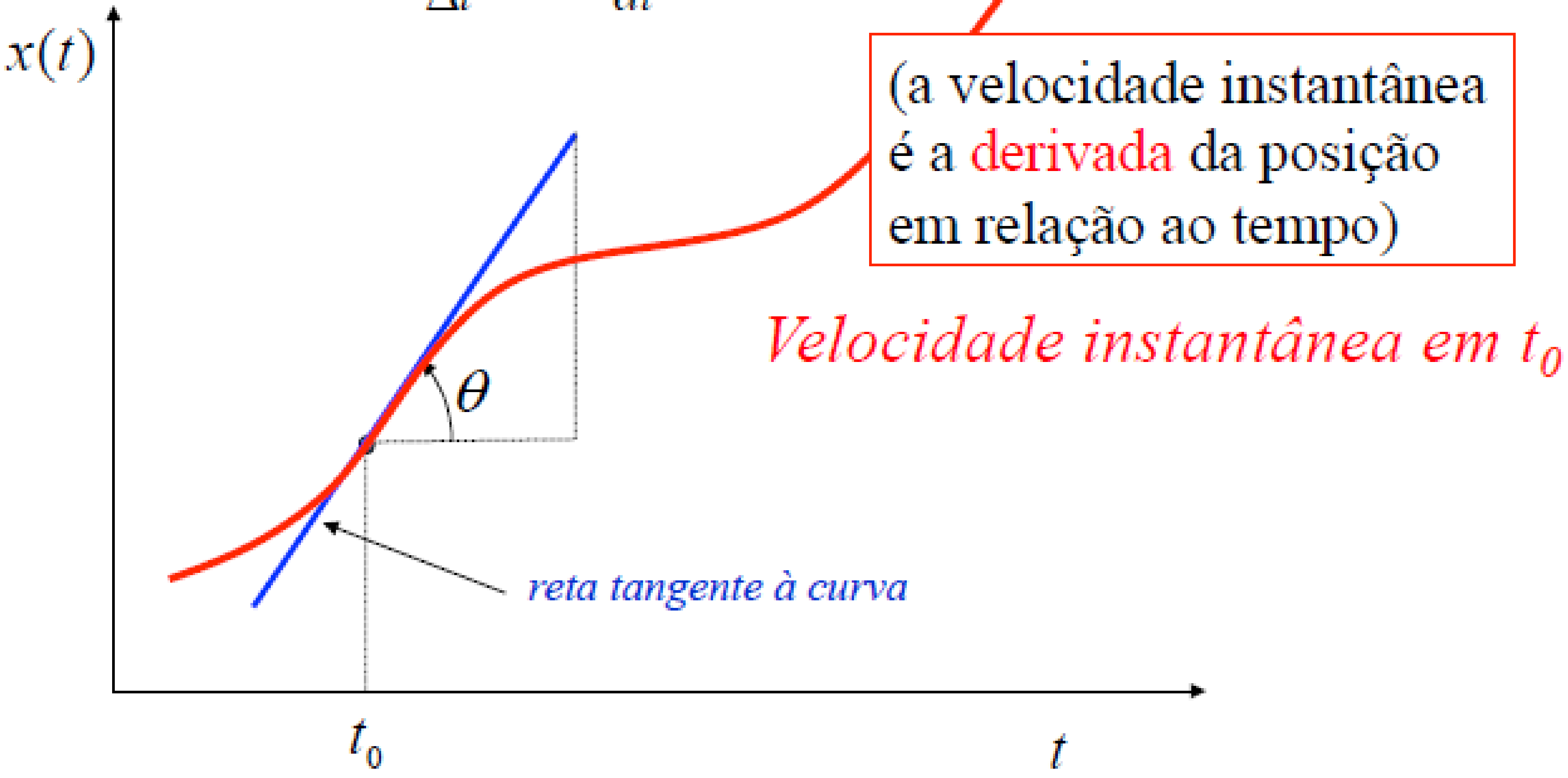
Velocidade Média





Velocidade Instantânea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx(t)}{dt} = tg\theta$$

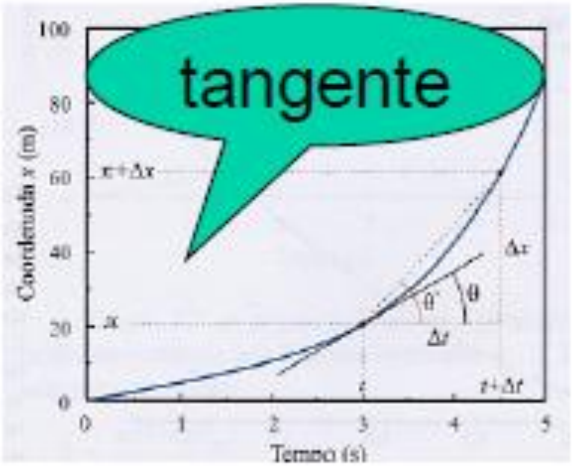


Velocidade Média

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Derivada

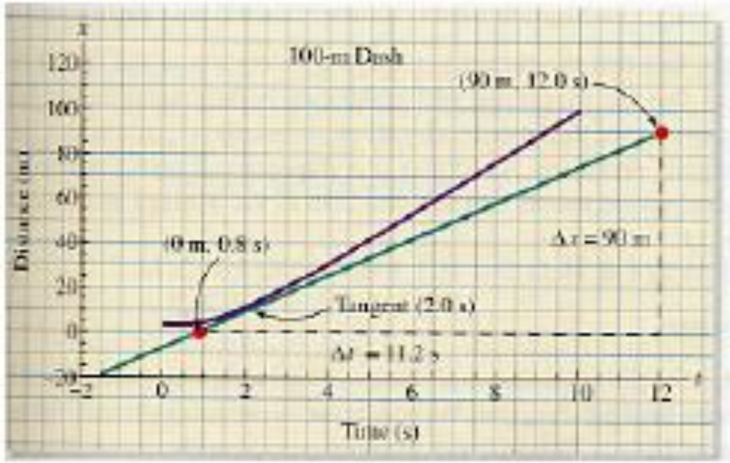
Geometricamente:



Exemplo:

No gráfico abaixo (corrida de 100 m), a velocidade em $t = 2$s é

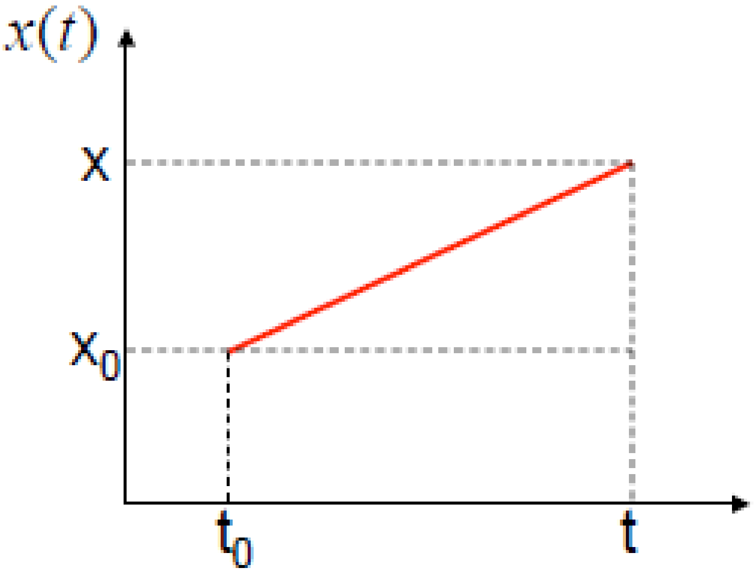
$$v(t{=}2\mathrm{s}) = \frac{90\mathrm{m}}{11{,}2\mathrm{s}} \cong 8{,}0\mathrm{m/s}$$

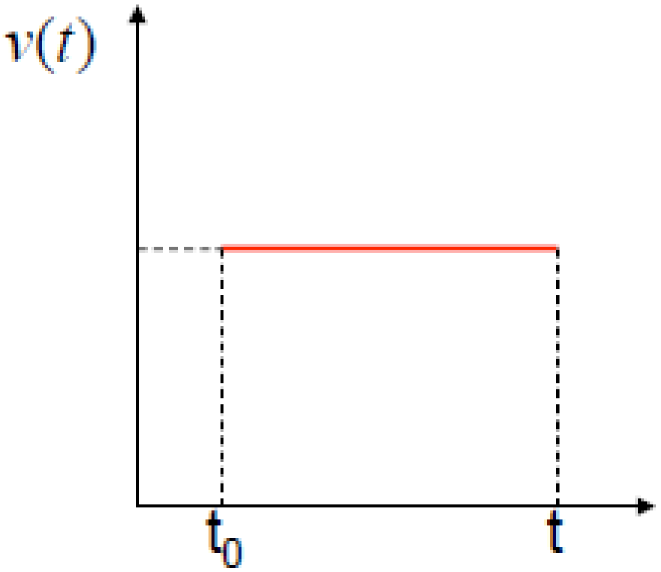


Velocidade Constante

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} \qquad \text{ou:} \qquad x - x_0 = v(t - t_0)$$

Graficamente:

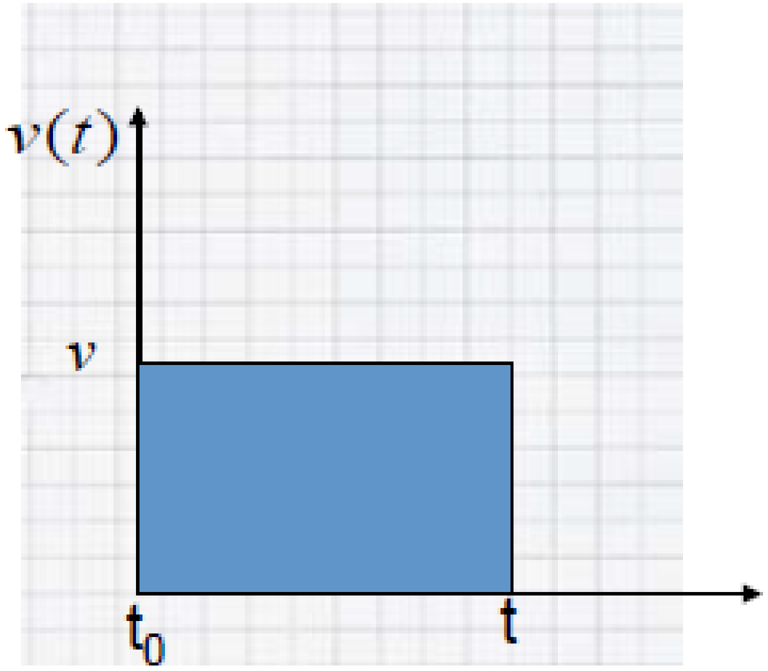




Velocidade Constante

Este é o problema inverso. Considere inicialmente o caso de velocidade constante, isto é:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$



Note que $v(t\text{-}t_0)$ é a área sob a curva da velocidade v = constante em função do tempo.

Este é um resultado geral. Para demonstrá-lo, usaremos que para intervalos de tempo muito curtos podemos escrever:

$$\Delta x = v\,(t)\,\Delta t\,,$$

Velocidade Constante

Dividimos o intervalo (t-t_0) em um número grande N de pequenos intervalos Δt

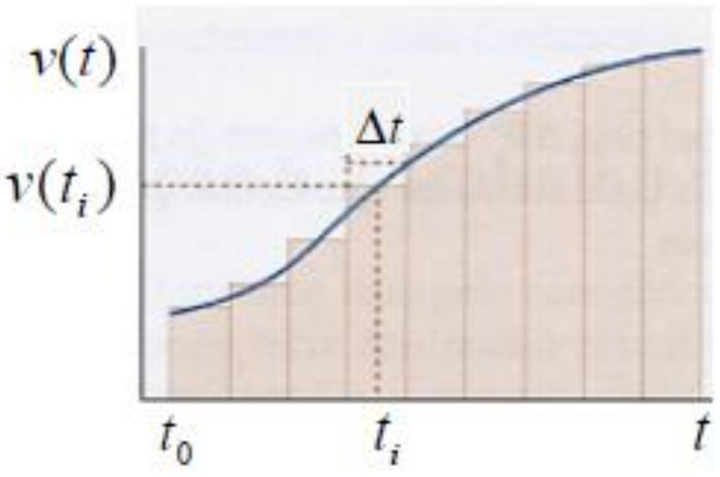
$$\Delta x_i \approx v(t_i)\ \Delta t$$

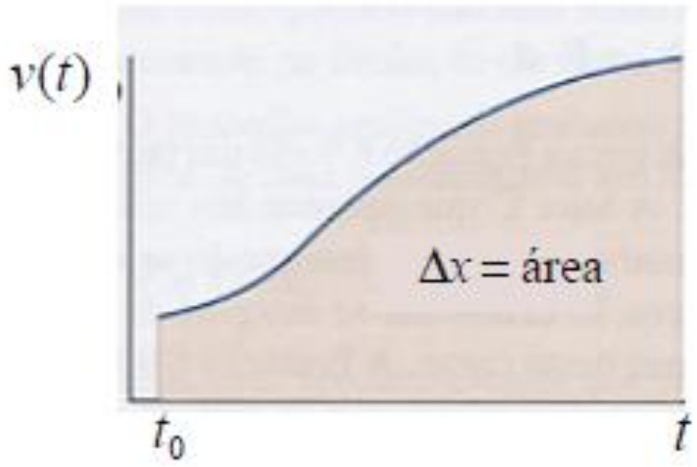
$$\Downarrow$$

$$x(t) - x(t_0) = \sum_i \Delta x_i =$$

$$\sum_i v(t_i)\Delta t$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{e} \quad x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$





Velocidade Constante

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{e} \quad x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

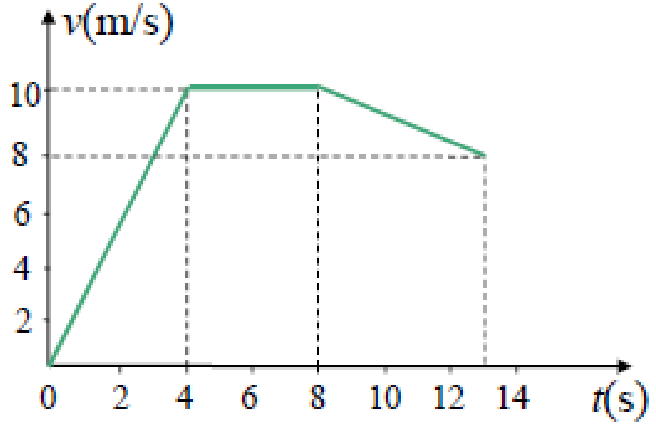
A velocidade é obtida derivando-se a posição em relação ao tempo; geometricamente, a velocidade é o coeficiente angular da reta tangente à curva da posição em função do tempo no instante considerado.

O deslocamento é obtido pela anti-derivação (ou integração) da velocidade; geometricamente, o deslocamento é a área sob a curva da velocidade em função do tempo.

Aceleração Média

Aceleração média: $a_m = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ (unidade: m/s²)

Exemplo: Um corredor acelera uniformemente até atingir 10 m/s em t = 4,0 s. Mantém a velocidade nos próximos 4,0s e reduz a velocidade para 8,0 m/s nos 5,0s seguintes. Acelerações médias:



de 0s até 4s: $a_m = 10\ \text{m/s} / 4\text{s} = 2{,}5\ \text{m/s}^2$

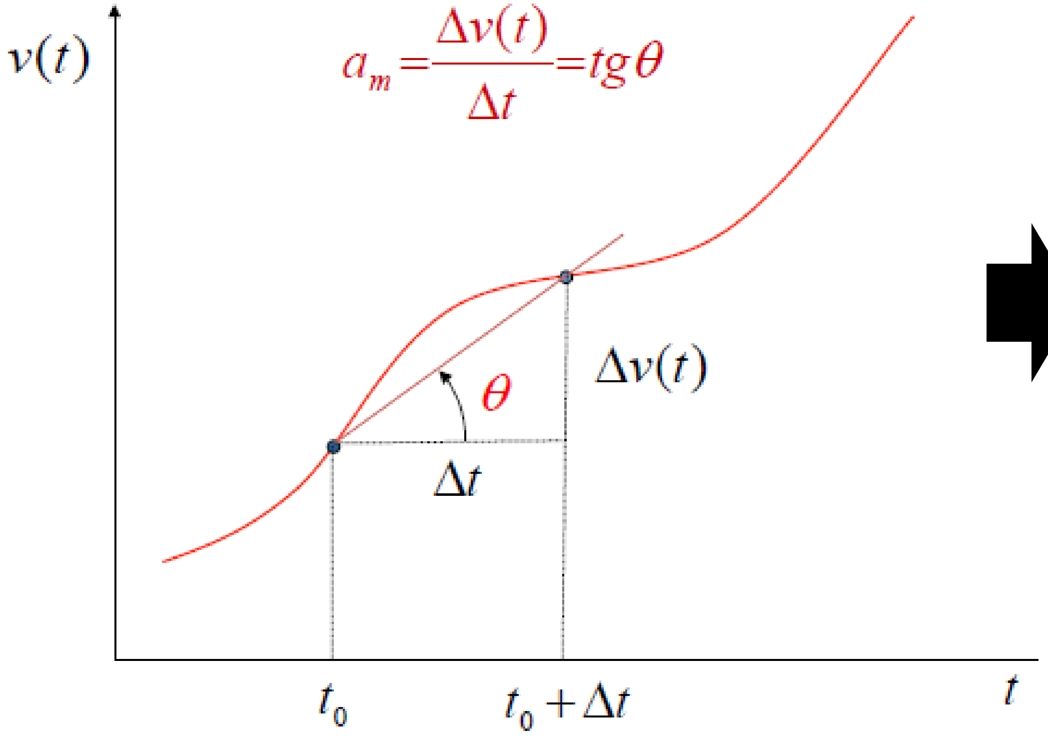
de 4s até 8s: $a_m = 0\ \text{m/s} / 4\text{s} = 0\ \text{m/s}^2$

de 8s até 13s: $a_m = -2\ \text{m/s} / 5\text{s} = -0{,}4\ \text{m/s}^2$

Aceleração Média

Aceleração média entre: t_0 e $t_0 + \Delta t$

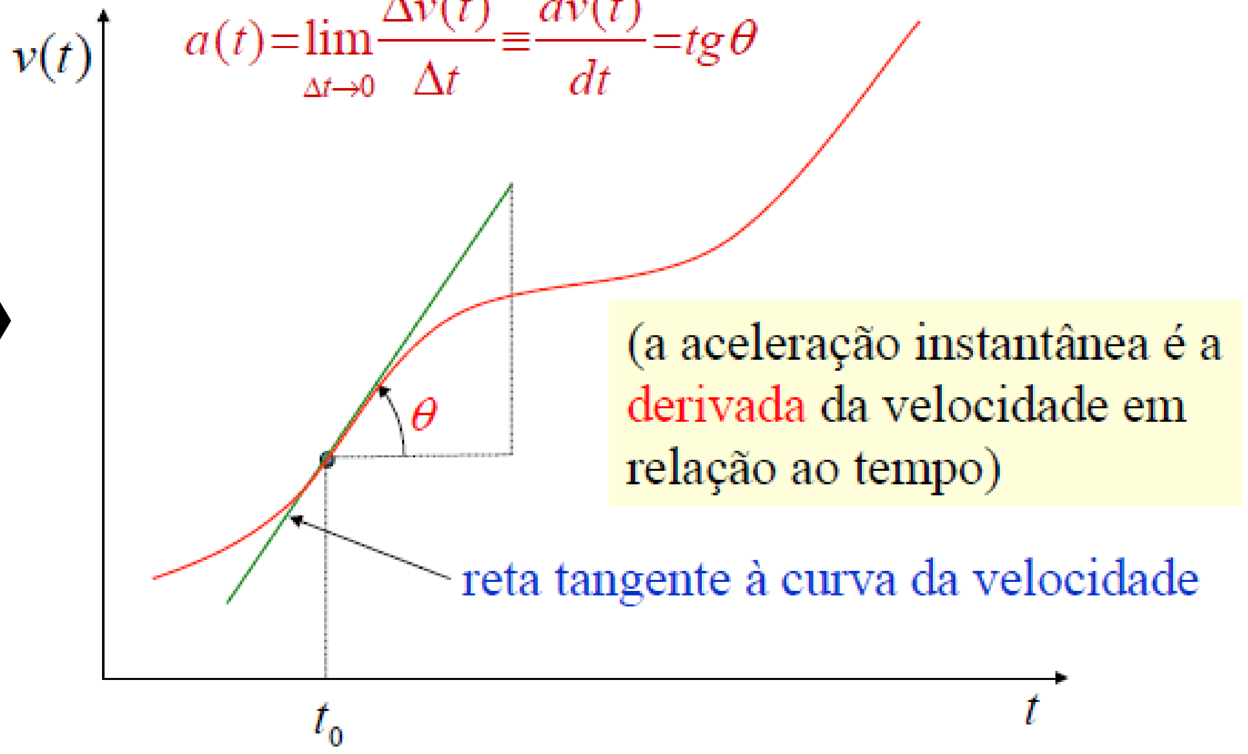
$$a_m = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = tg\,\theta$$



Aceleração instantânea em t_0:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv(t)}{dt} = tg\,\theta$$



Aceleração Constante

Se a aceleração a é constante: $a = a_m = \dfrac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$

Se $t_0 = 0$ e $v(t_0) = v_0$, a velocidade fica:

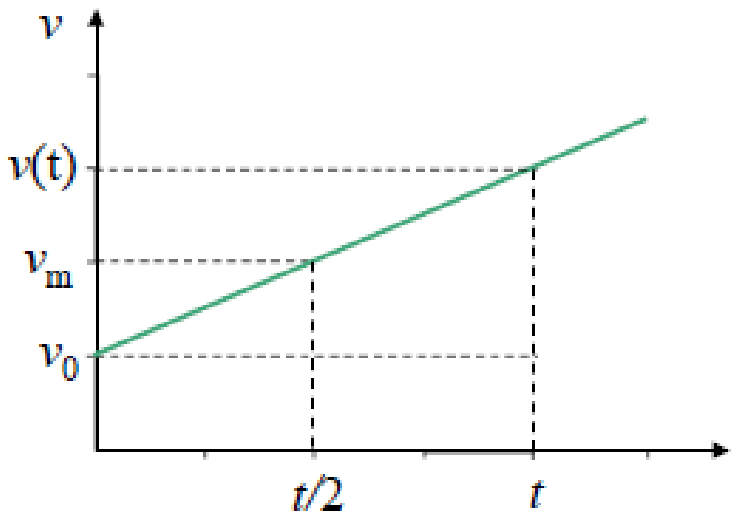
$$v = v_0 + at$$

Note que neste movimento a velocidade média é dada por

$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{v_0 + v(t)}{2}$$

Como $x = x_0 + v_m t$, temos:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

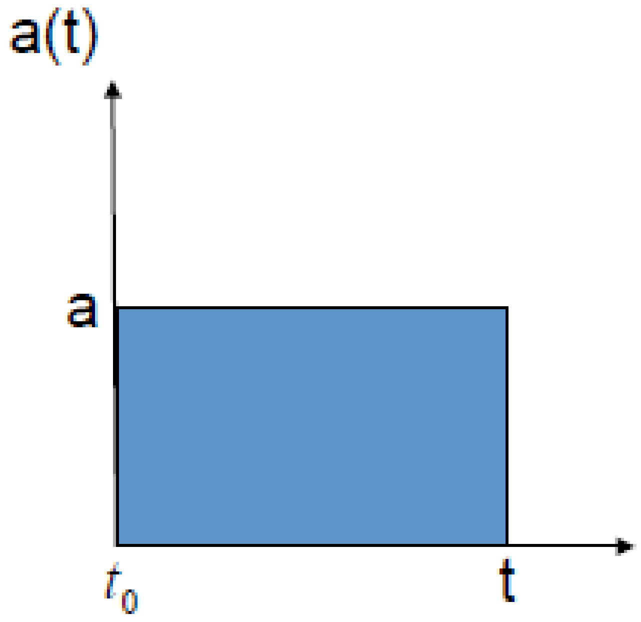
$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

Aceleração Constante

Este é novamente o problema inverso. Considere inicialmente o caso de aceleração constante. Então:

$$v - v_0 = a(t - t_0)$$

Note que $a(t\text{-}t_0)$ é a área sob a curva da aceleração $a(t)$ = constante em função do tempo.



Este também é um resultado geral. Para demonstrá-lo, usaremos que para intervalos de tempo muito curtos podemos escrever

$$\Delta v = a(t)\Delta t$$

onde $a(t)$ é a aceleração instantânea no instante t.

Aceleração Constante

Dividimos o intervalo (t-t_0) em um número grande N de pequenos intervalos Δt .

$$\Delta v_i \approx a(t_i)\ \Delta t$$

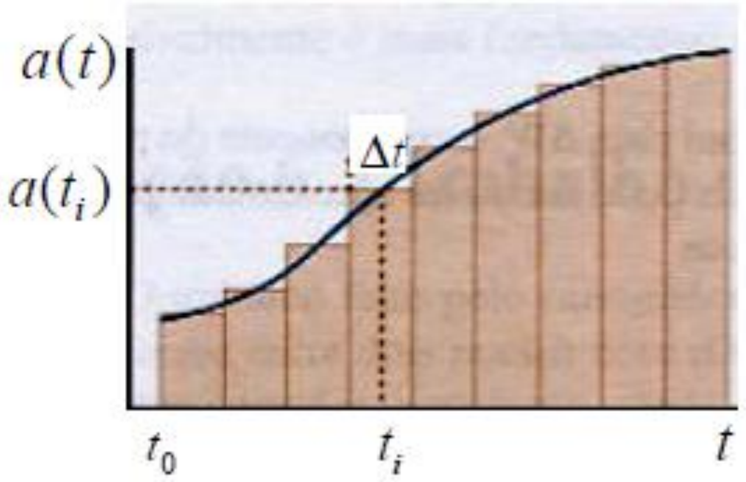
$$\Downarrow$$

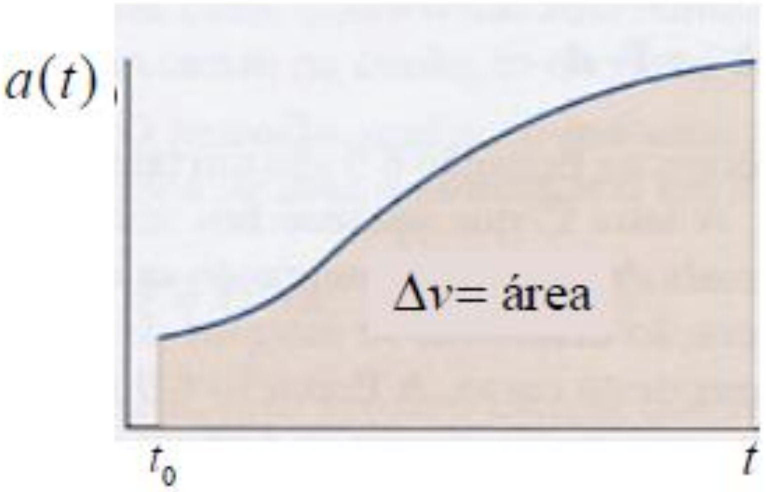
$$v(t)\ - v(t_0)\ =\ \sum_i \Delta v_i =$$

$$\sum_i a(t_i)\Delta t$$

No limite N → ∞ e Δt→0:

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t')dt'$$





Aceleração Constante

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \qquad \text{e} \qquad v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

A aceleração é obtida derivando-se a velocidade; geometricamente, é o coeficiente angular da reta tangente à curva da velocidade em função do tempo no instante considerado.

A velocidade é obtida pela anti-derivação (ou integração) da aceleração; geometricamente, a variação de velocidade é igual à área sob a curva da aceleração em função do tempo.

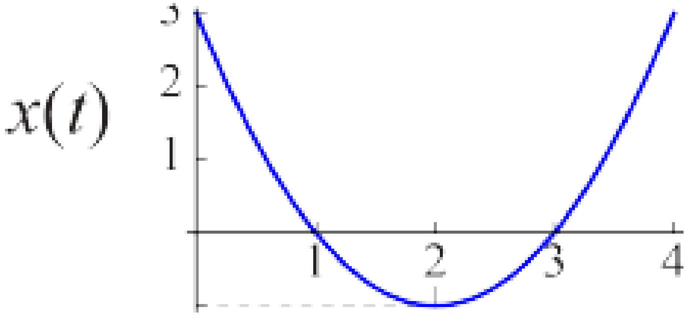
Aplicação Exemplo

1. O movimento de uma partícula é descrito pela equação: $x = t^2 - 4t + 3$ (x em m e t em s)

a) fazer o gráfico de $x(t)$;
b) calcular $v(t)$ e $a(t)$ e fazer os gráficos correspondentes.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2t - 4 \quad (\mathrm{m/s})$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2 \quad (\mathrm{m/s^2})$$

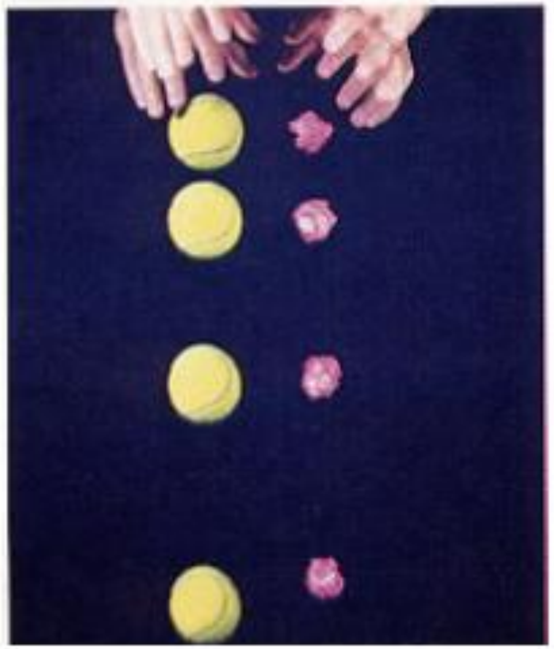


Aceleração Gravitacional – Queda Livre

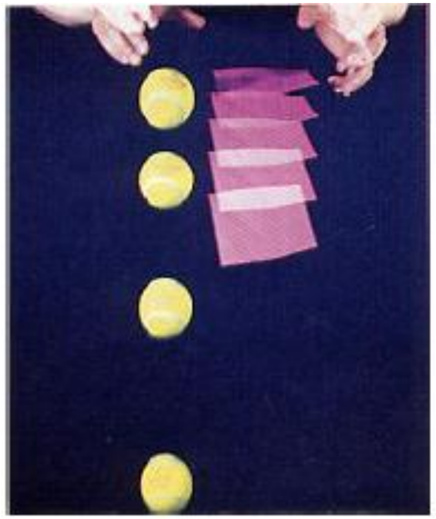
Galileu, o primeiro físico moderno, estudou a queda dos corpos. Refutou as hipóteses de Aristóteles.

Através de experimentos, mostrou que os corpos caem com a mesma velocidade (aceleração), independentemente de sua massa.

$x \sim t^2$, $v \sim t$: consequências de uma aceleração constante!



Mas... devemos notar que há, em geral, outras forças atuando no corpo em queda considerado, o que pode frustrar uma experiência se não formos suficientemente cuidadosos.



Aceleração Gravitacional – Queda Livre

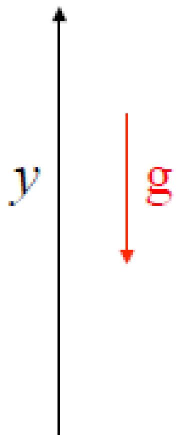
As equações de movimento para o caso da aceleração da gravidade -g são (ao longo do eixo y):

$$v = v_0 - gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

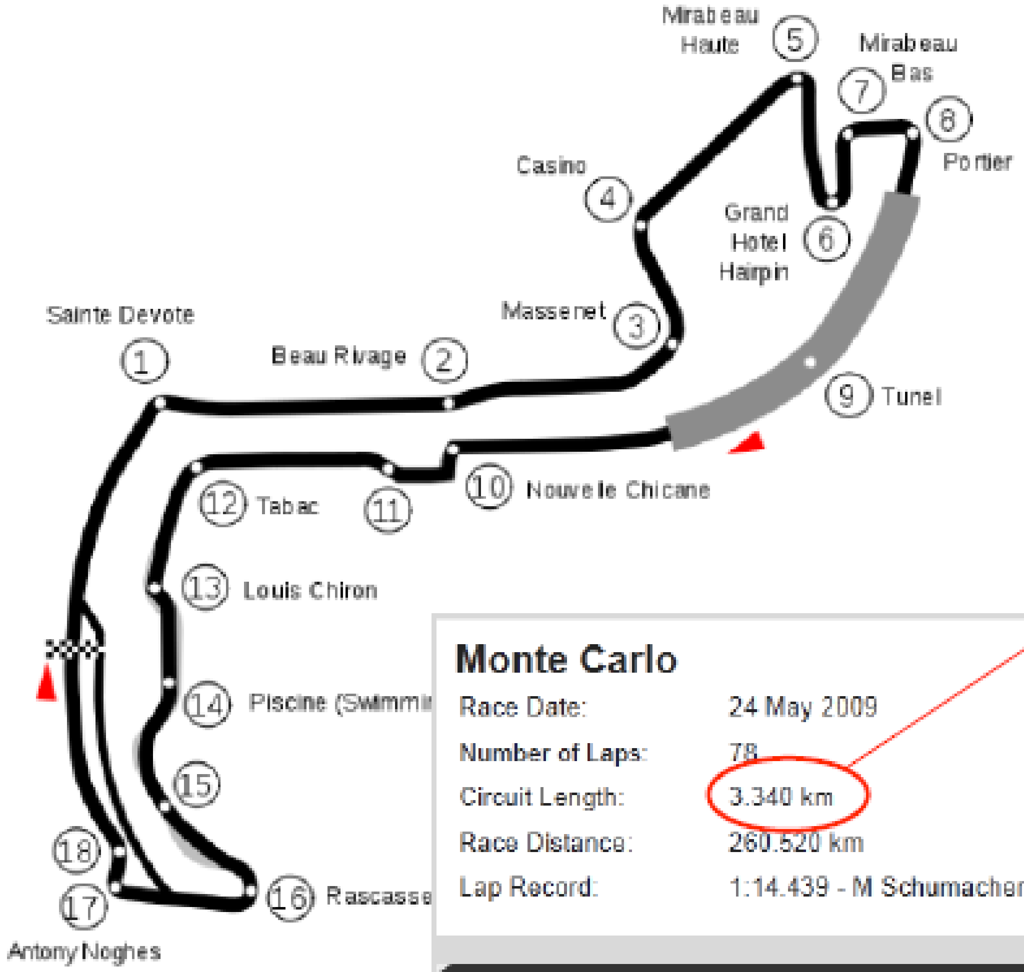
$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)\, t$$

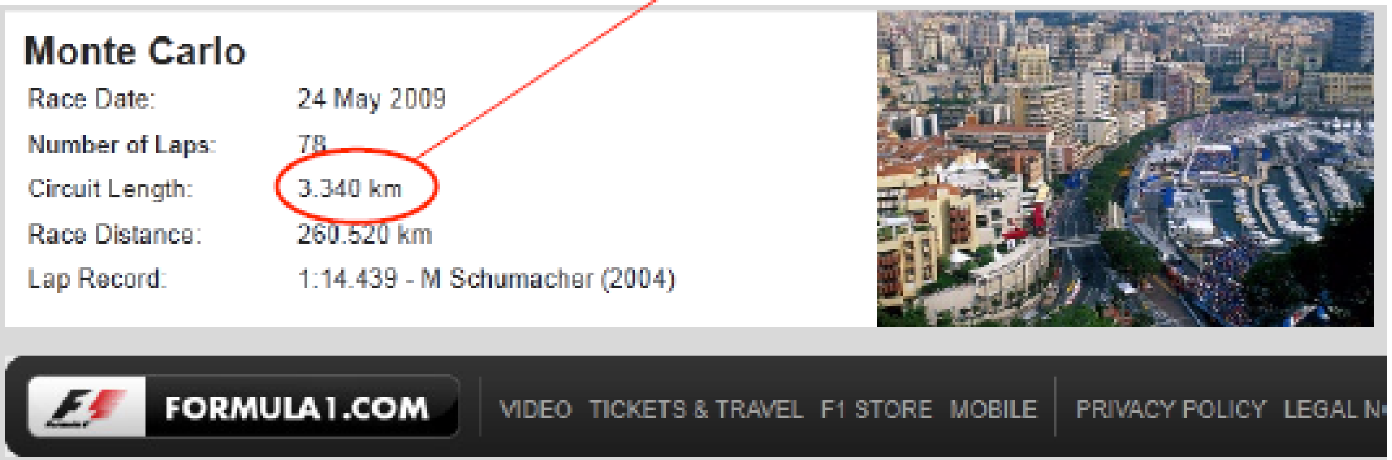


Todo objeto em *queda livre* fica sujeito a uma aceleração dirigida *para baixo*, qualquer que seja seu movimento inicial (objetos atirados para cima ou para baixo ou aqueles soltos a partir do repouso).

GP Mônaco



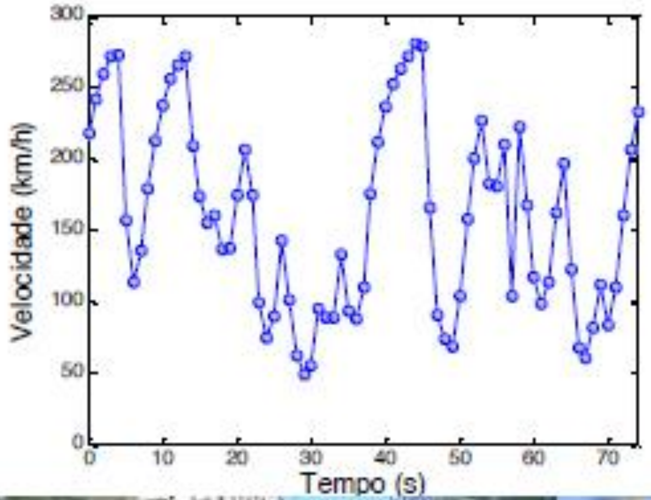
1 volta = 3,340 km



Monte Carlo

Race Date:	24 May 2009
Number of Laps:	78
Circuit Length:	3.340 km
Race Distance:	260.520 km
Lap Record:	1:14.439 - M Schumacher (2004)

Vettel - GP Mônaco



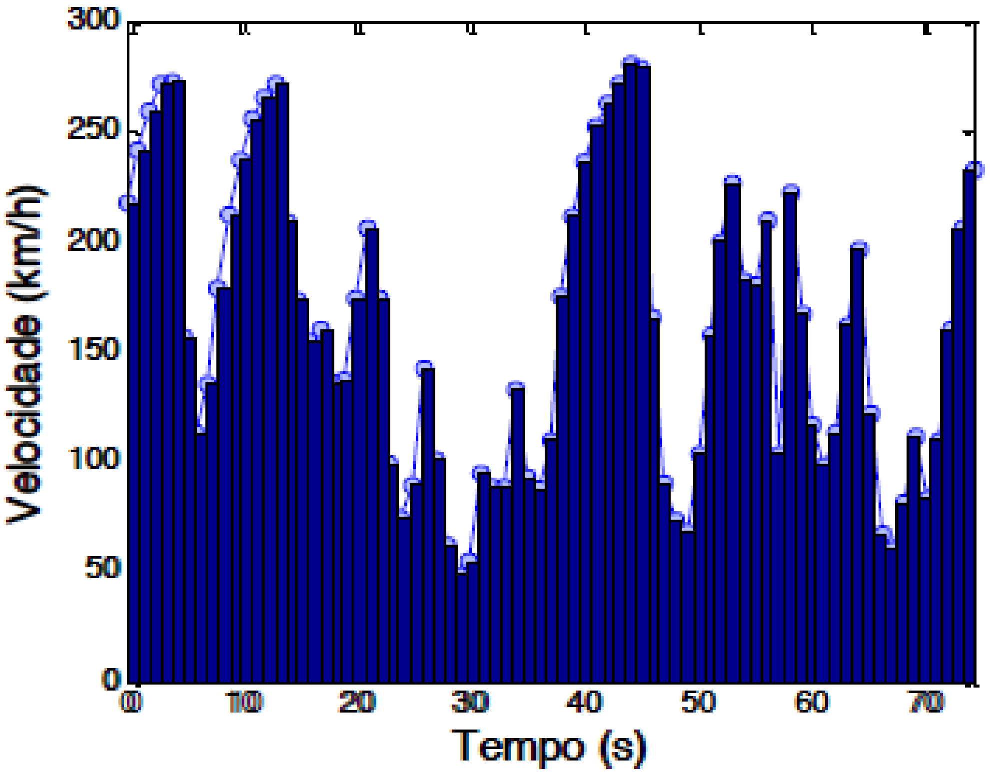
Tempo	Velocidade	Tempo	Velocidade	Tempo	Velocidade
0	218	25	90	50	104
1	242	26	143	51	158
2	260	27	101	52	200
3	272	28	62	53	227
4	273	29	49	54	183
5	157	30	55	55	181
6	114	31	95	56	210
7	136	32	89	57	104
8	179	33	89	58	223
9	213	34	133	59	168
10	238	35	93	60	117
11	256	36	88	61	99
12	266	37	110	62	114
13	272	38	176	63	162
14	209	39	212	64	197
15	174	40	237	65	123
16	155	41	253	66	68
17	161	42	263	67	61
18	137	43	272	68	82
19	138	44	281	69	112
20	175	45	279	70	84
21	207	46	166	71	110
22	175	47	91	72	161
23	100	48	74	73	207
24	75	49	69	74	233

Link: http://www.youtube.com/watch?v=boOqf49sd8g&feature=related

Velocidade Média e Instantânea

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$ e $$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

Área sob a curva = deslocamento



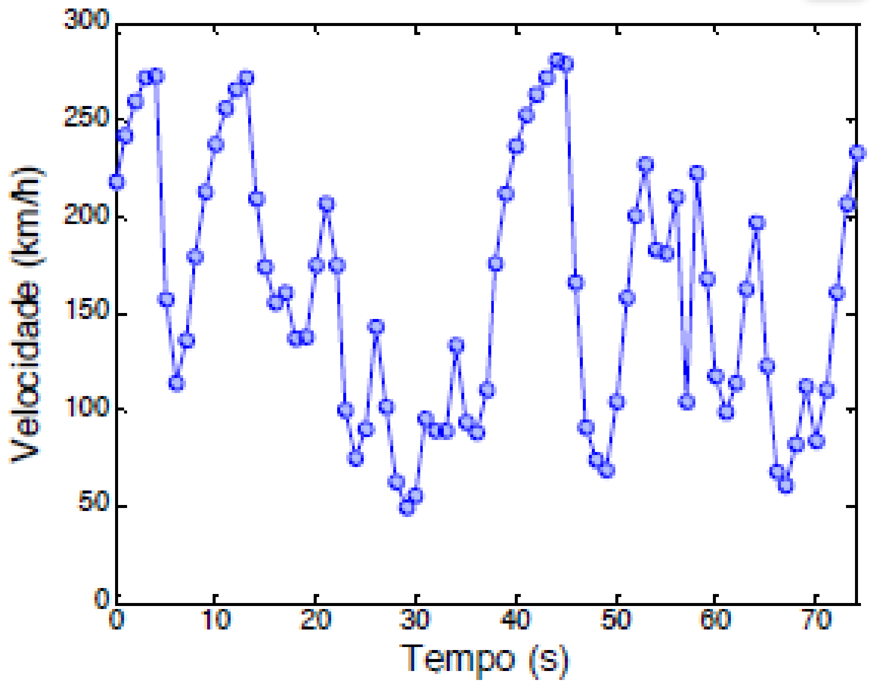
1 volta = 3.35km!!!!!

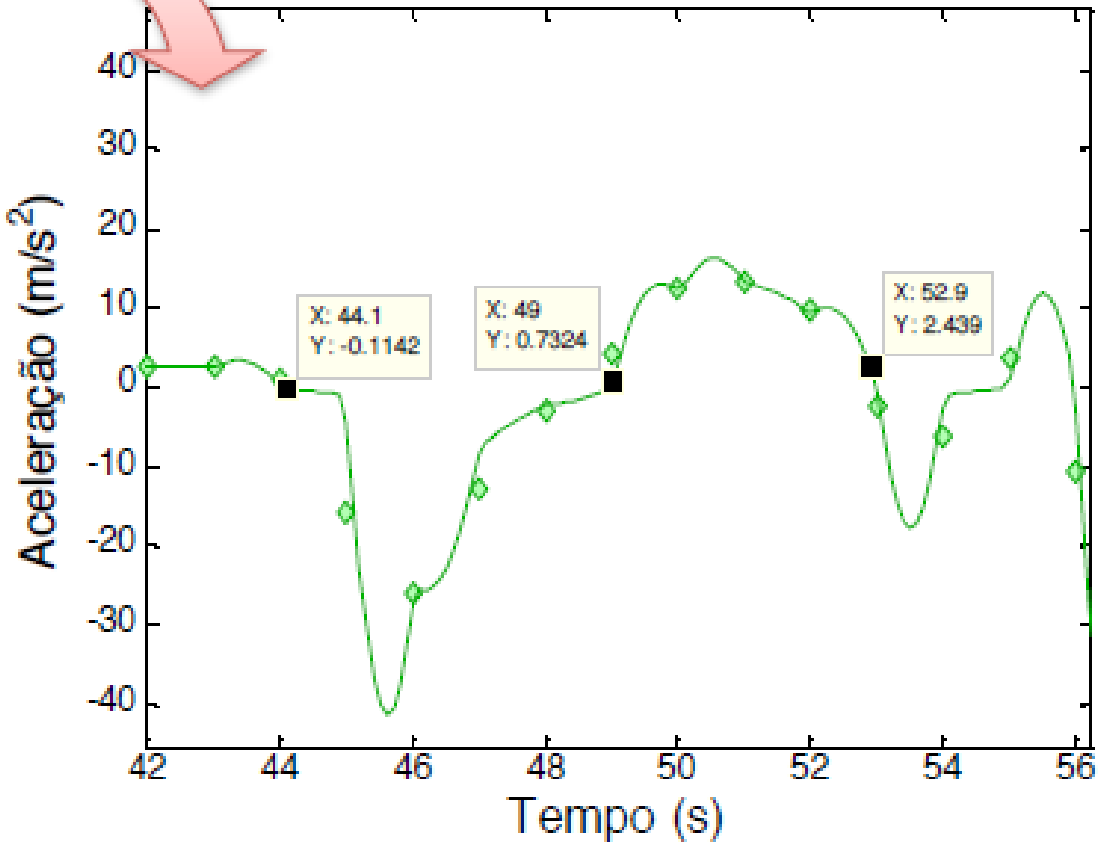
$$v_{em} = \frac{\text{distância total}}{\Delta t} = \frac{3.35\,\text{km}}{74\text{s}} \times \frac{3600\,\text{s}}{1\text{h}} = 163\text{km/h}$$

Aceleração média e Instantânea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Deriva





Aplicação Exemplo

1 - A velocidade de uma partícula que se move ao longo do eixo *x* varia com o tempo segundo a expressão $v(t) = (40 - 5t^2)$ m/s, onde *t* é dado em segundos.

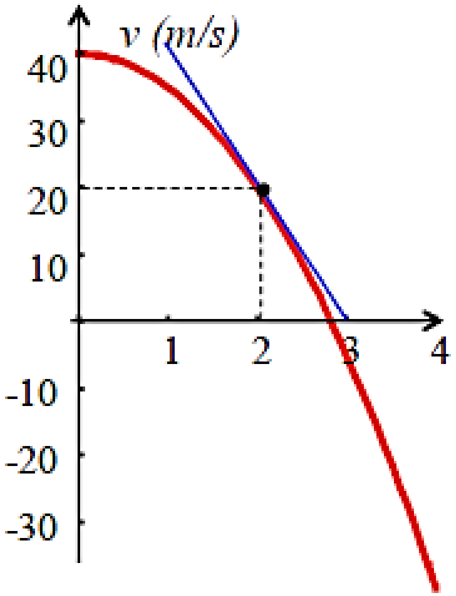
a) ache a aceleração média no intervalo de $t = 0$ a $t = 2{,}0$ s;
b) determine a aceleração em $t = 2{,}0$ s.
c) determine a expressão da posição da partícula em função do tempo, admitindo que ela parte de $x = 0$ em $t = 0$?

Resp:

a) $a_m = \frac{20-40}{2{,}0-0} = -10\text{m/s}^2$

b) $a = \frac{dv}{dt} = -10t.$ Em $t = 2{,}0s \Rightarrow a = -20\text{m/s}^2$

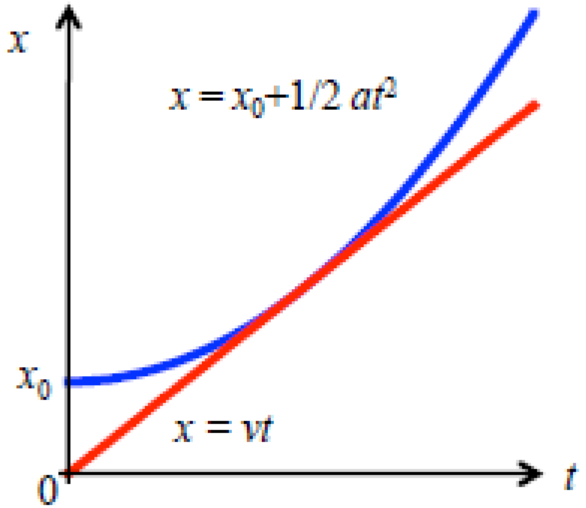
c) $x(t) = 40t - \frac{5}{3}t^3$



Aplicação Exemplo

2 – chegando atrasado a uma estação ferroviária, um passageiro corre com velocidade constante ao longo da plataforma onde o trem está parado. Quando ele se encontra a 25 m do último vagão, o trem arranca com aceleração constante de 0,5 m/s^2.

a) qual deve ser a velocidade mínima do passageiro para que ele consiga alcançar o trem?;
b) na realidade, o passageiro, carregando bagagem, tem uma velocidade de 4,0 m/s, de modo que ele não consegue alcançar o trem. Qual é a distância mínima a que ele chega?



Resp:

a) $x_0+1/2\; at^2 = vt$

$1/2\; at^2 - vt+x_0 = 0$ deve ter uma raiz dupla $\Rightarrow$

$v^2-2ax_0=0 \Rightarrow v \geq \sqrt{2ax_0} = 5{,}0\,\mathrm{m/s}$

b) dist= $l = 1/2\; at^2 + x_0 - vt$

$\frac{dl}{dt} = 0 \Rightarrow t = 8{,}0\,\mathrm{s} \Rightarrow \mathrm{dist} = 9{,}0\,\mathrm{m}$

Aplicação Exemplo

1 – A figura representa o gráfico ($v \times t$) do movimento de uma partícula.

a) De quanto variou a posição da partícula nos intervalos (0-2,0) s, (2,0-4,0) s, (4,0-6,0) s, (5,0- 8,0) s?

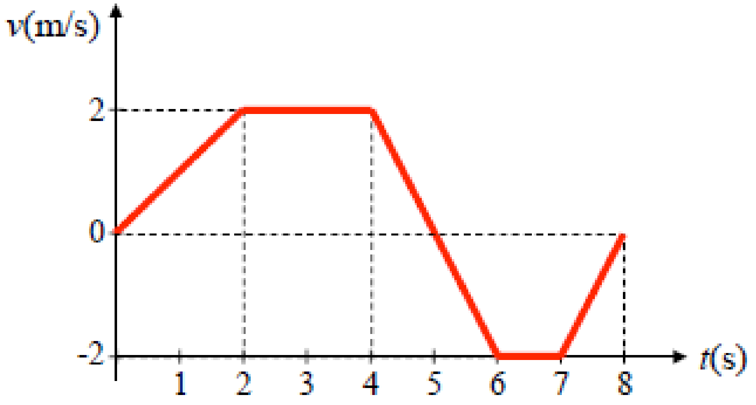
b) Supondo-se que $x = 0$ em $t = 0$, em que instante a partícula passará de novo pela origem

c) Qual é a velocidade média da partícula nos intervalos (0-2,0)s; (2,0-4,0)s; (2,0-6,0)s; (3,0-7,0) s; (5,0-8,0) s?

d) Qual é a aceleração média da partícula nos intervalos (0-2,0)s; (2,0-4,0)s; (2,0-6,0)s; (5,0- 8,0) s?

e) Qual é a aceleração da partícula nos instantes t = 1,0s; t = 3,0s; t = 5,0 s; t = 6,5s?

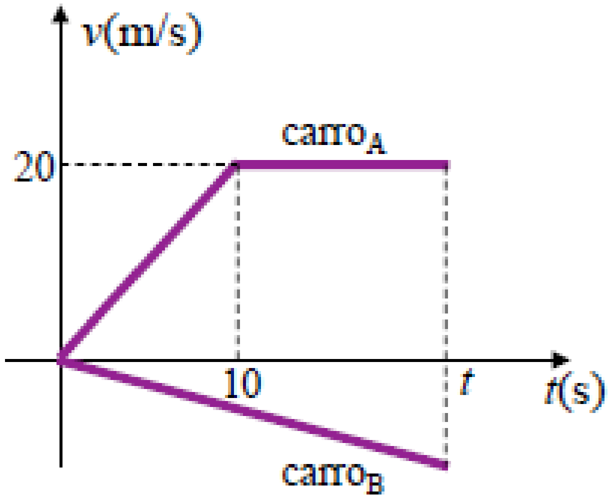
f) Faça o gráfico da aceleração da partícula em função do tempo;



Aplicação Exemplo

4 - Dois automóveis partem simultaneamente de dois marcos A e B de uma distando 5×102 m, indo um ao encontro do outro. O automóvel A mantém uma aceleração constante de 2,0 m/s2 até atingir a velocidade de 20 m/s, continuando em movimento uniforme (velocidade constante). O automóvel B mantém sempre uma aceleração constante de 1,0 m/s2.

a) quanto tempo depois da partida os automóveis se encontram?;
b) a que distância do marco A se dá o encontro?



Resp:

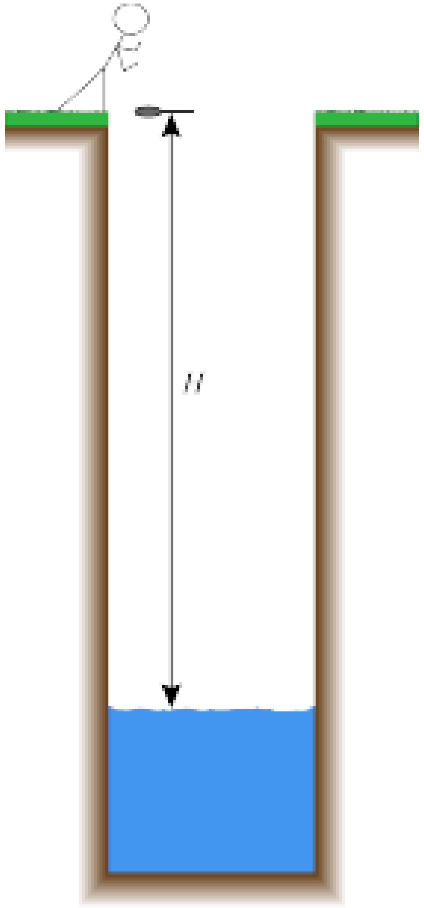
a) $\frac{1}{2}\times10\times20+20(t-10)+\frac{1}{2}t^2=500\Rightarrow t=20\text{s}$

b) $3{,}0\times10^2$ m;

Aplicação Exemplo

3 - Um menino deixa cair, a partir do repouso, uma pedra dentro de poço de água. Após t = 2s ele escuta o som da pedra batendo na água.

a) Qual a profundidade do poço?
b) Quanto tempo a pedra leva para chegar ao fundo do poço?
Considere que a velocidade do som no ar é de 300 m/s



Resp.:
a) $H = 18{,}8$ m
b) $t_{queda} = 1{,}9$ s