Delineamento Experimental e Estatística

Verossimilhança Máxima

Prof. Marcus Vinícius Vieira – Instituto de Biologia UFRJ

Verossimilhança (*Likelihood*)

- Após um modelo e seus parâmetros serem definidos, e dados coletados, em geral o passo seguinte é estimar seu ajuste (*goodness of fit*)

- Isto é, os valores dos parâmetros do modelo que melhor se ajustam aos dados

  = Estimativa de parâmetros

- Método geral para estimativa de parâmetros: verossimilhança maxima (*maximum likelihood*)

- Quadrados mínimos (*least squares*): caso particular quando os resíduos seguem uma distribuição normal

Verossimilhança Máxima

- Se a probabilidade de um evento *x* depende de parâmetros *p* de um modelo, escrevemos

$P (x \mid p)$

- mas quando falamos de verossimilhança

$L (p \mid x)$

- quer dizer, a verossimilhança dos parâmetros considerando o evento *x*
- Quando estimamos um parâmetro por verossimilhança máxima queremos dizer que procuramos o valor do parâmetro que tenha a maior chance de produzir o evento.

Verossimilhança Máxima

- Previsões baseando-se em premissas ou modelos muito bem estabelecidos: o objetivo é estimar probabilidades de eventos ocorrerem.
- Mas se estivemos analisando dados, já temos o evento, os dados, e mais de uma hipótese para explicá-los?
- Não há mais uma questão probabilística
- Estamos mais interessados na verossimilhança dos parâmetros do modelo que podem ter resultado os dados observados.
- **Probabilidade**

  Sabendo os parâmetros -> Previsão de resultado
- **Verossimilhança**

  Observação de resultado -> Estimativa de parâmetros

	Viés da moeda favorecendo Cara				
Cara	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0	0,59	0,17	0,03	0,00	0,00
1	0,33	0,36	0,16	0,03	0,00
2	0,07	0,31	0,31	0,13	0,01
3	0,01	0,13	0,31	0,31	0,07
4	0,00	0,03	0,16	0,36	0,33
5	0,00	0,00	0,03	0,17	0,59

http://www.rasch.org/rmt/rmt1237.htm

Suponha que em 5 jogadas da moeda foram obtidas 5 caras. Qual o deve ser o viés da moeda?

- Para estimarmos o viés da moeda, olhamos a probabilidade de obter 5 caras em todas as hipóteses. A hipótese onde esta frequência é a mais provável fornece uma estimativa do viés.
- No caso, 0,9 é a estimativa mais próxima do viés.
- O somatório dos valores de uma coluna é sempre 1,0. São as probabilidades dos resultados em cada hipótese, cada coluna uma hipótese.
- Como o somatório dos valores de uma linha é sempre diferente de 1, foi necessário diferenciar estes valores de probabilidades, adotando-se o termo verossimilhança (*likelihood*).

Estimativa por verossimilhança

n = 100 (total de lançamentos da moeda)
h =   56 (total de caras)

OBTIVEMOS 56 CARAS E 44 CORÔAS. É UMA MOEDA “JUSTA”?

Precisamos de um modelo estatístico para descrever o fenômeno!

Variável aleatória binomial

$$P(X)=\frac{n!}{X!(n- X}$$

Estimativa por verossimilhança

Mas no caso temos *X* = 56 e *n* = 100, falta o valor de *p*, que estamos estimando.

$$P(56)=\frac{100!}{56!(100}$$

$$P(56)=\frac{100!}{56!(44)!}$$

$$P(56)=(4,94\times 1$$

Estimativa por verossimilhança

Quando temos uma função do parâmetro (desconhecido),

mas as observações são fixas,

temos uma função de verossimilhança,

(não mais de densidade de probablilidade)

Estimativa por verossimilhança

n = 100 (total de lançamentos da moeda)
h = 56 (total de caras)

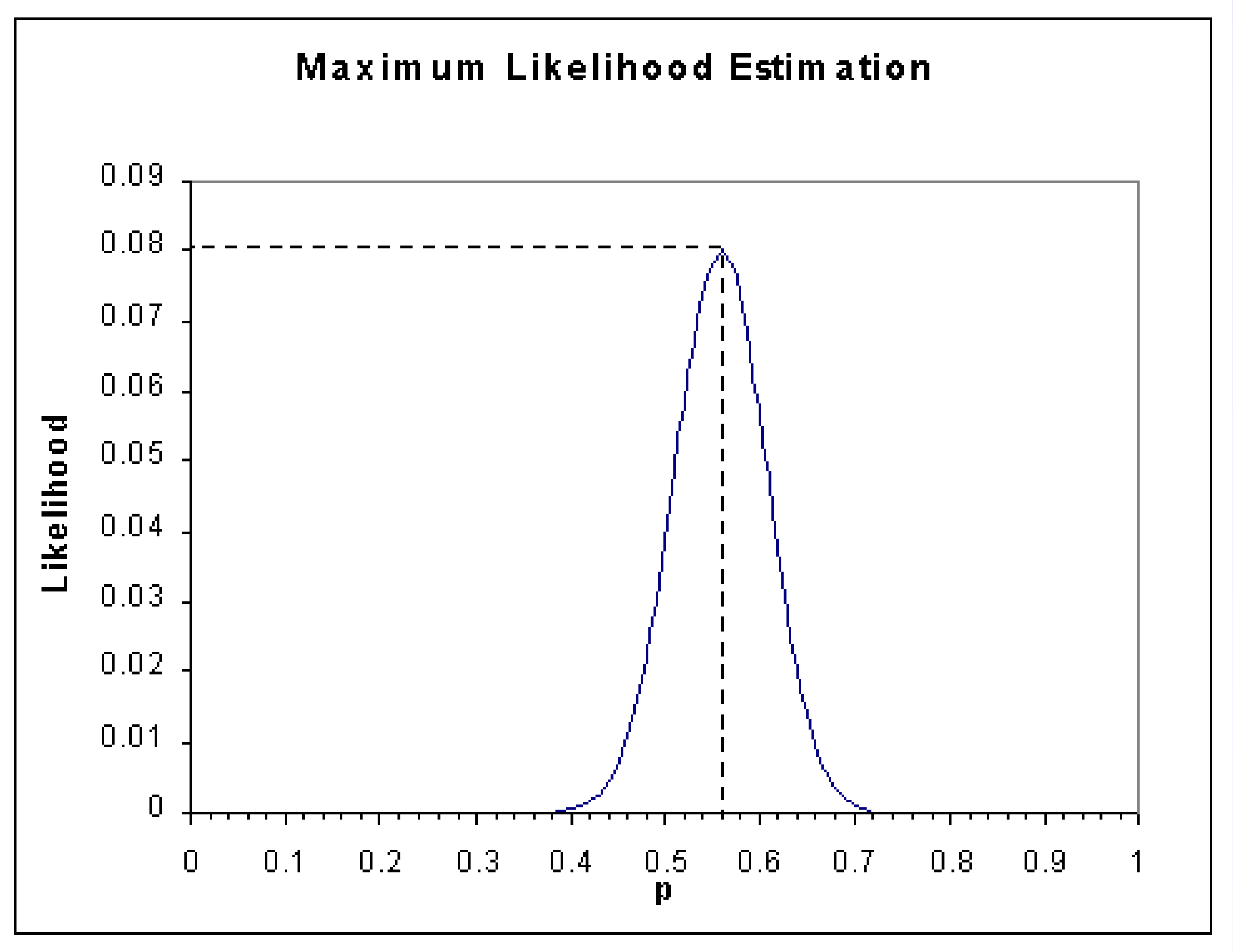
OBTIVEMOS 56 CARAS E 44 CORÔAS. É UMA MOEDA "JUSTA"?

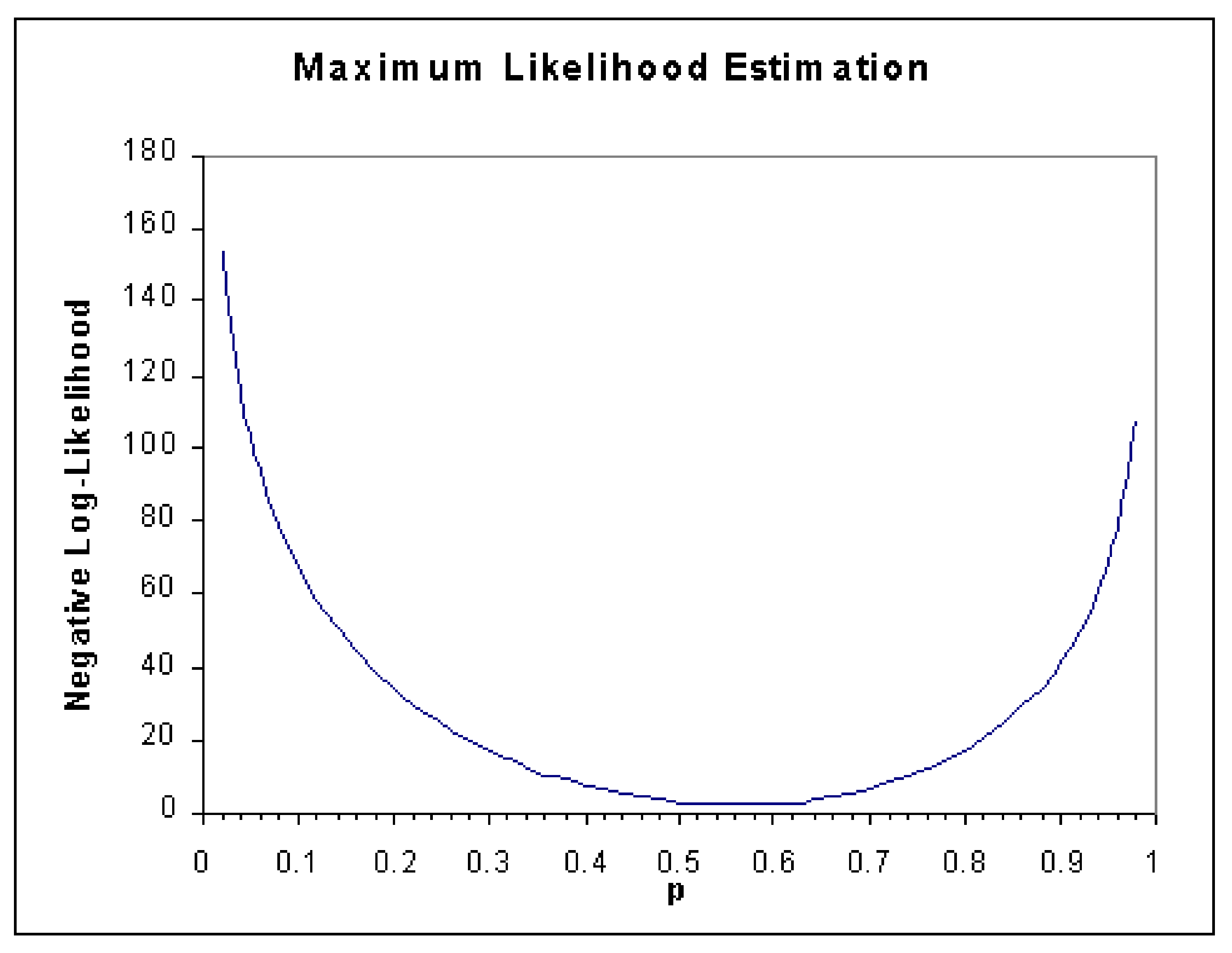
Se p = 0,5

$$L(p = 0.5 \mid data) = \frac{100!}{56!44!} 0.5^{56} 0.5^{44} = 0.0389$$

$$L(p = 0.52 \mid data) = \frac{100!}{56!44!} 0.52^{56} 0.48^{44} = 0.0581$$

p	L	p	L
0.48	0.0222	0.50	0.0389
0.52	0.0581	0.54	0.0739
0.56	0.0801	0.58	0.0738
0.60	0.0576	0.62	0.0378


Maximum Likelihood Estimation
Likelihood
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
p


Maximum Likelihood Estimation
Negative Log-Likelihood
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
p

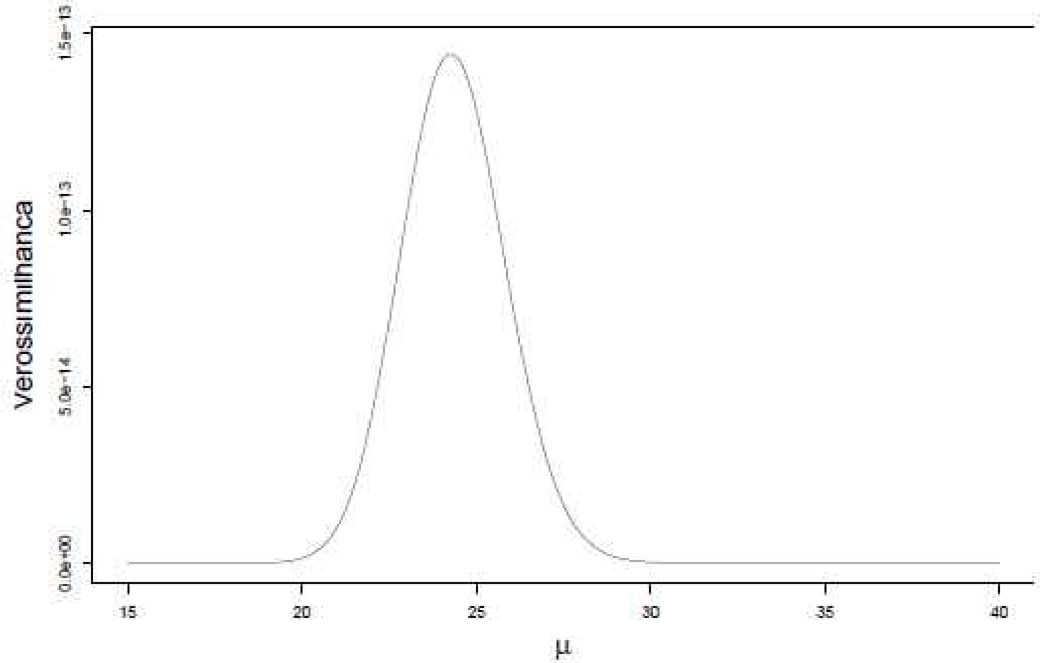
$$\mathcal{L}\{\mu|X_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}. = e^{-\mu} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!}$$

PARCELA	NO. DE PLÂN
(i)	(X=x
1	24
2	27

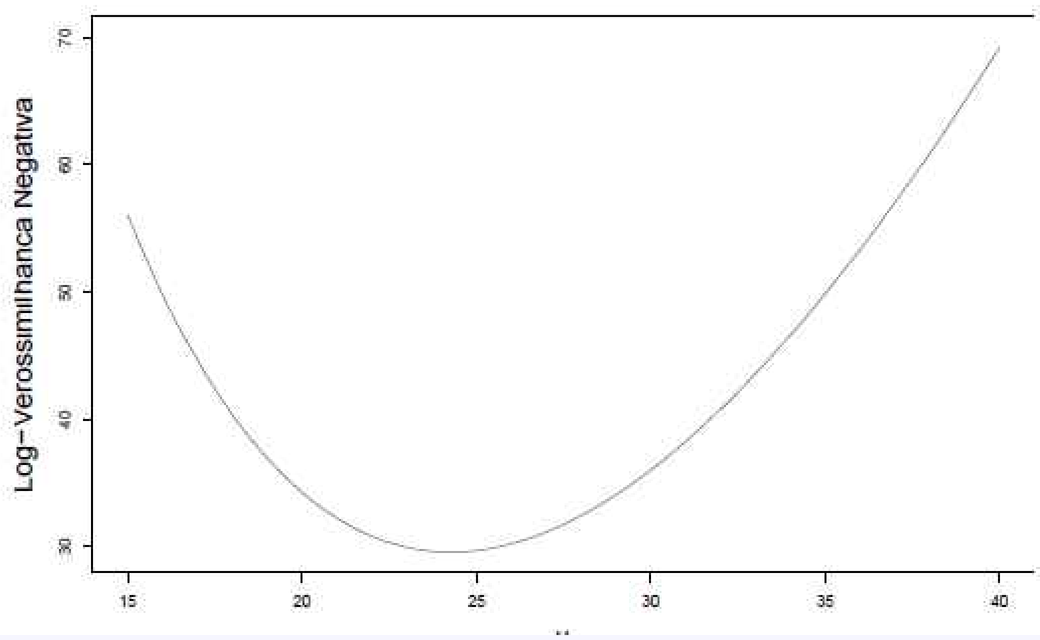
$$\mathbf{L}\{\mu|X_n\} \;=\; n\mu - \log(\mu)\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i!)$$

$$\mathbf{L}\{\mu|X_n\} \;=\; n\mu - \log(\mu)\,k_1 + k_2$$

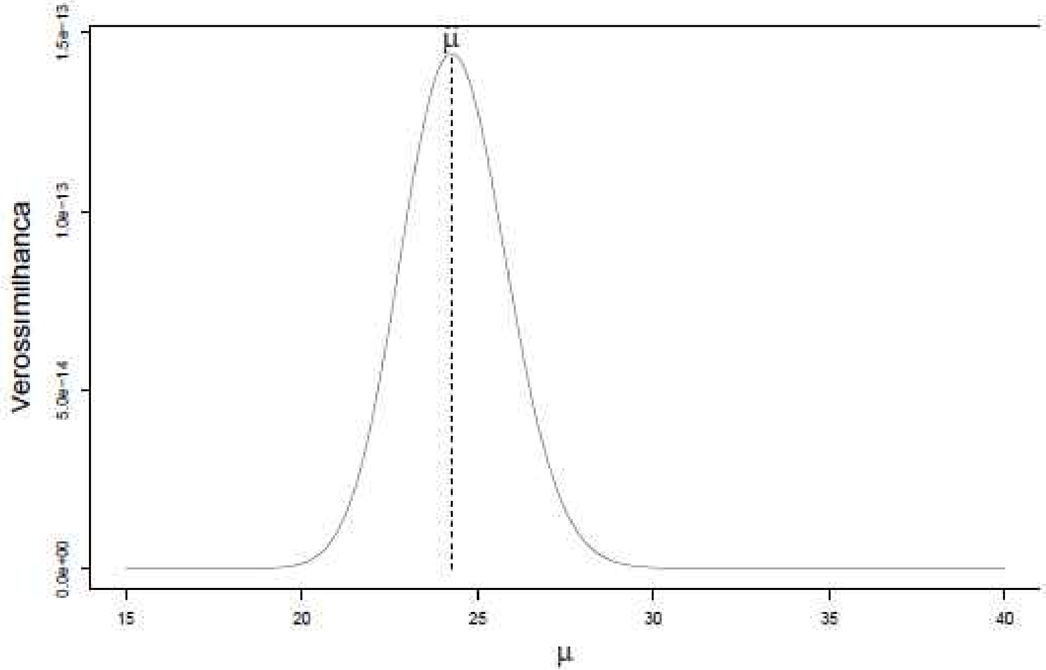
PARCELA	NO. DE PLÂNT
(i)	(X=xi
1	24
2	27



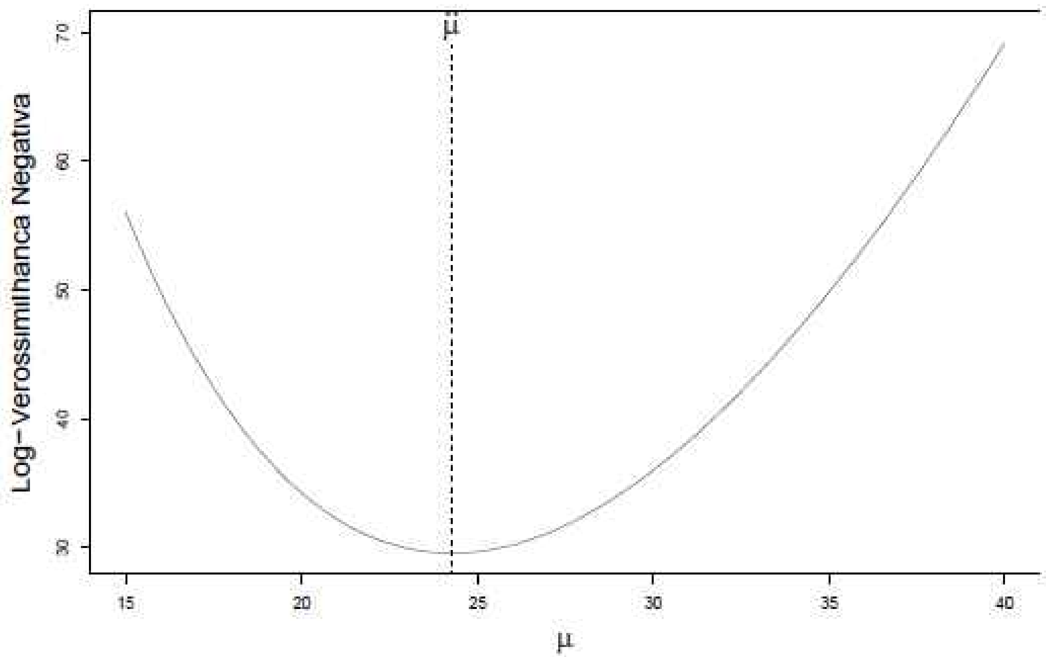
Verossimilhanca
1.5e-13
1.0e-13
5.0e-14
0.0e+00
15
20
25
30
35
40
μ



Log−Verossimilhanca Negativa
70
60
50
40
30
15
20
25
30
35
40



Verossimilhanca
μ
15
20
25
30
35
40
0.0e+00
5.0e−14
1.0e−13
1.5e−13



Log−Verossimilhanca Negativa
μ
15
20
25
30
35
40
30
40
50
60
70

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

$u \sim N(0, s^2)$

$$P(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(u - \bar{u}\right)/\sigma\right)^2}$$

$$L(\text{amostra}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(u_1/\sigma\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i/\sigma\right)^2}$$

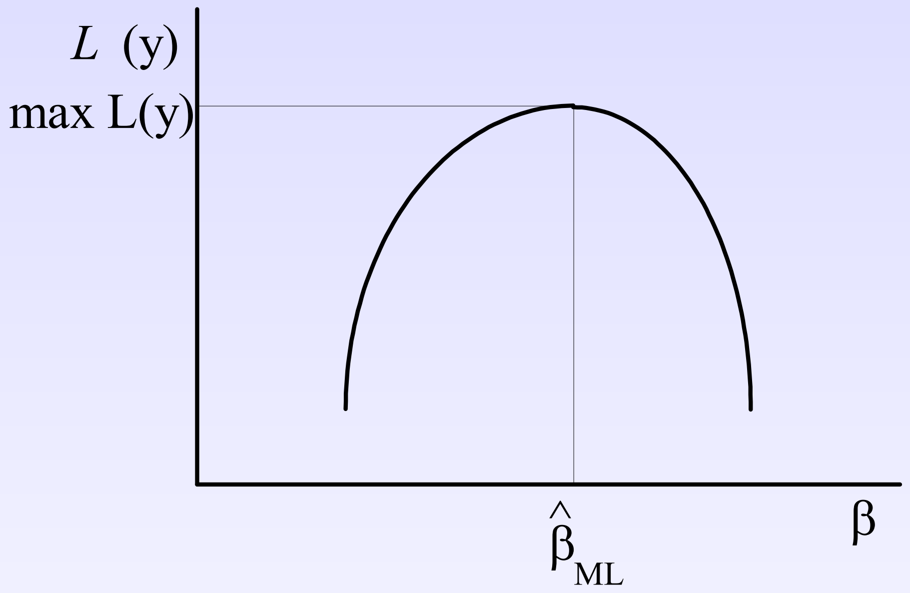
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum\left(u_i - \bar{u}\right)/\sigma\right)^2}$$

$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i/\sigma\right)^2}\right) \qquad \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i/\sigma\right)^2}$$

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i/\sigma\right)^2}$$

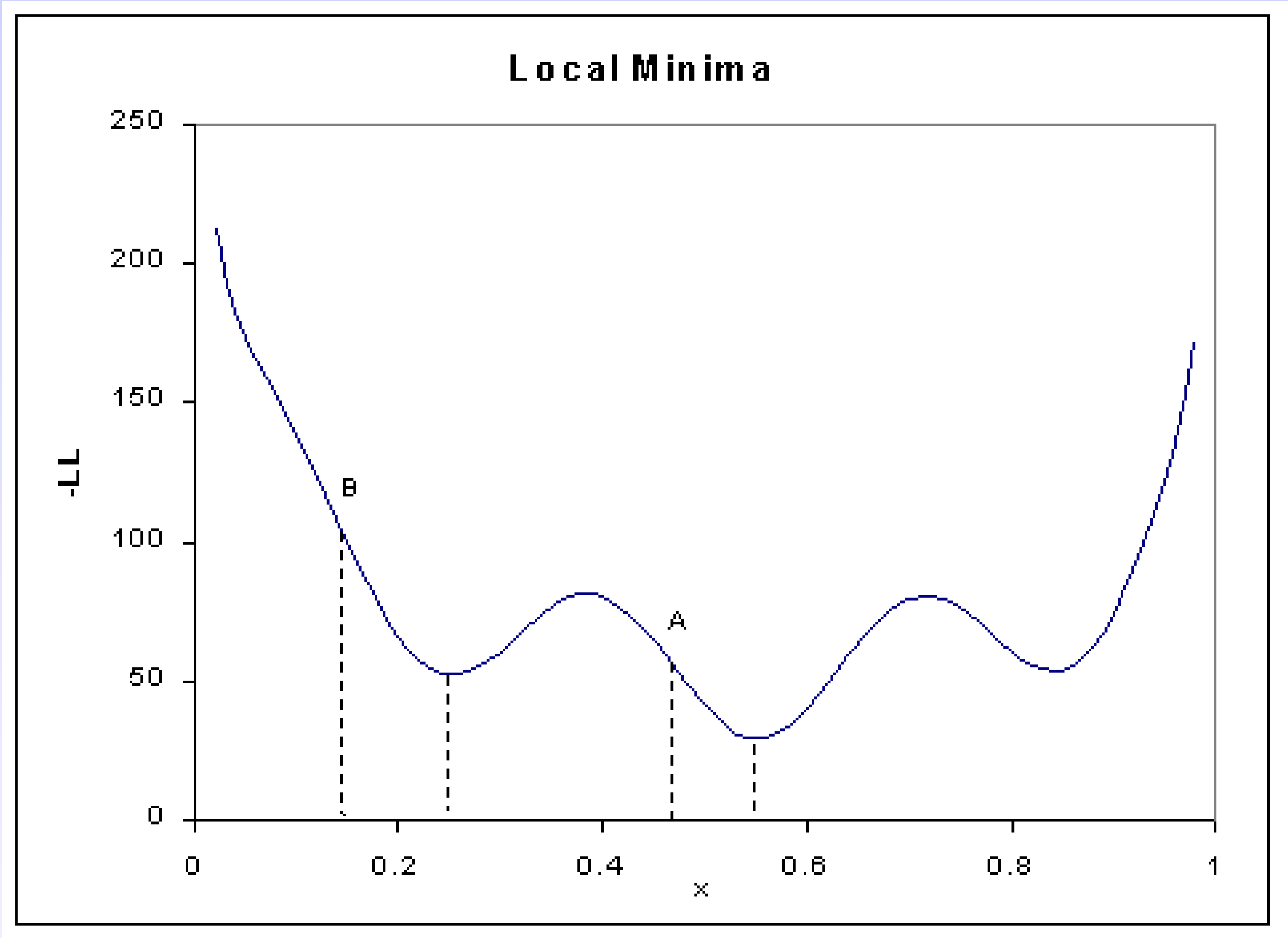
- Log L = $-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2} \quad -$

- Log L = $-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2}$ –



- A estimativa de σ^2 que maximiza sua verossimilhança é a Soma dos Quadrados dos Resíduos por *n* = RSS/*n*
- Que difere da estimativa de σ^2 pelos quadrados mínimos: RSS/(*n*-*k*) (devido à correção do viés para amostras pequenas)
- Este viés não é importante para estimativas de VM, mas RSS é divido por valores diferentes!

- Log L = $-\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2\pi RSS}{n}\right)-\frac{1}{2}\frac{RS}{RSS}$


Local Minima
250
200
150
100
50
0
-LL
B
A
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

Lei ou princípio da verossimilhança

- Duas hipóteses, A e B
- Resultado *x* podem ocorrer segundo estas duas hipóteses e uma variável aleatória X
- P(A) = x > P(B) = x
- Razão de verossimilhança:

mede a **força de evidência** a favor de uma hipótese