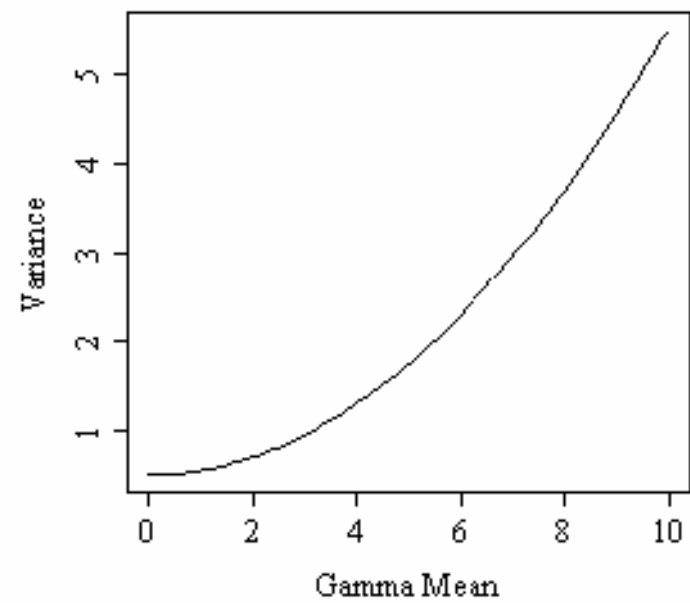
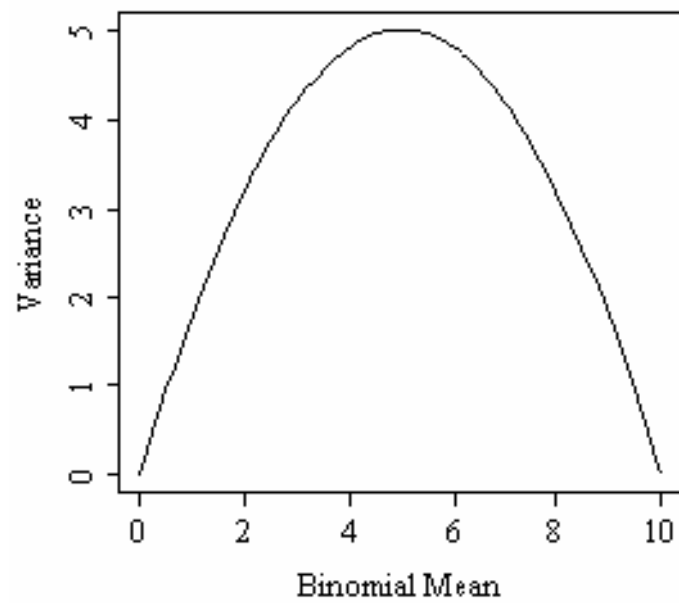
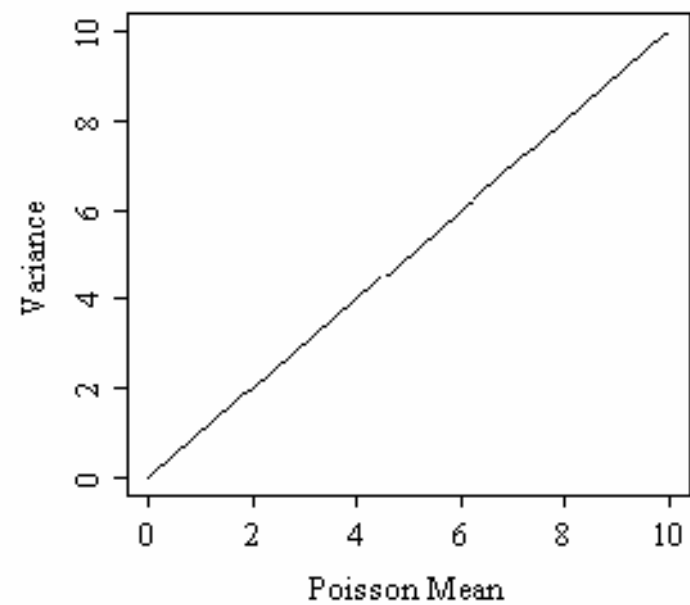
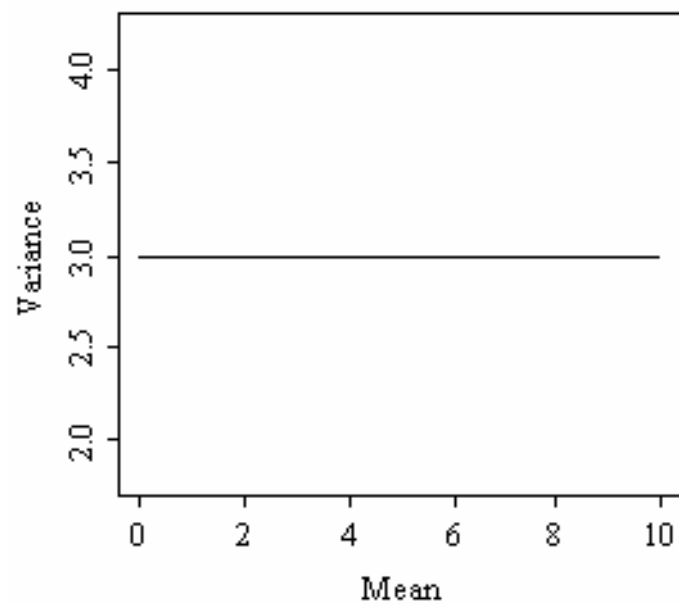


Modelos Lineares Generalizados

- Histórico

$$f(y; \theta, \phi) = \exp \left\{ \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi) \right\} \quad (3.1)$$



a) Distribuição normal

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{-(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$
$$= \exp\left[\frac{y\mu - \frac{\mu^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right]$$

Comparando com a Equação (3.1) obtemos:

$$\theta = \mu; \quad b(\theta) = \frac{\mu^2}{2}; \quad a(\phi) = \phi; \quad \phi = \sigma^2; \quad c(y, \phi) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \frac{y^2}{2\sigma^2}$$

Média e variância de y :

$$E(y) = \frac{db(\theta)}{d\theta} = \mu; \quad \text{var}(y) = \frac{d^2b(\theta)}{d\theta^2} a(\phi) = \sigma^2$$

Algumas distribuições da família exponencial

distribuição	normal	binomial	Poisson	gama	gaussiana inversa
Notação	$N(\mu, \sigma^2)$	$B(m, \pi)/m$	$P(\lambda)$	$Ga(\nu, \frac{\nu}{\mu})$	$IG(\mu, \sigma^2)$
Suporte	$(-\infty, +\infty)$	$\{0, \frac{1}{m}, \dots, 1\}$	$\{0, 1, \dots\}$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
θ	μ	$\ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$	$\ln \lambda$	$-\frac{1}{\mu}$	$-\frac{1}{2\mu^2}$
$a(\phi)$	σ^2	$\frac{1}{m}$	1	$\frac{1}{\nu}$	σ^2
ϕ	σ^2	1	1	$\frac{1}{\nu}$	σ^2
ω	1	m	1	1	1
$c(y, \phi)$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\phi} + \ln(2\pi\phi)\right)$	$\ln\left(\frac{m}{my}\right)$	$-\ln y!$	$\nu \ln \nu - \ln \Gamma(\nu)$ $+(\nu - 1) \ln y$	$-\frac{1}{2}\left\{\ln(2\pi\phi y^3) + \frac{1}{y\phi}\right\}$
$b(\theta)$	$\frac{\theta^2}{2}$	$\ln(1 + e^\theta)$	e^θ	$-\ln(-\theta)$	$-(-2\theta)^{1/2}$
$b'(\theta) = E(Y)$	θ	$\pi = \frac{e^\theta}{1+e^\theta}$	$\lambda = e^\theta$	$\mu = -\frac{1}{\theta}$	$\mu = (-2\theta)^{-1/2}$
$b''(\theta) = V(\mu)$	1	$\pi(1 - \pi)$	λ	μ^2	μ^3
$var(Y)$	σ^2	$\frac{\pi(1-\pi)}{m}$	λ	$\frac{\mu^2}{\nu}$	$\mu^3\sigma^2$

O que é um modelo “linear”?

- Uma equação que contem
 - variáveis
 - parâmetros
 - resíduos aleatórios

.... que é linear nos parâmetros e variáveis aleatórias

O que é linear?

$$Y = a + bx$$

$$Y = a + bx + cx^2$$

$$z = x^2$$

$$Y = a + bx + zx$$

“Um” preditor linear *(linear predictor)*

$$\eta_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j$$

Função de ligação (*link function*)

$$\eta = g(\mu)$$

Função de ligação canônica para algumas distribuições da família exponencial

Distribuição	Ligação Canônica
normal	$\eta = \mu$
Poisson	$\eta = \ln \mu$
binomial	$\eta = \ln(\pi / (1 - \pi))$
gama	$\eta = 1 / \mu$
normal inversa	$\eta = 1 / \mu^2$

Desviança (*deviance*)

$$\begin{aligned}\text{deviance} &= -2 \log_e(\mathcal{L}(\hat{\theta})) + 2 \log_e(\mathcal{L}_s(\hat{\theta})), \\ &= -2 \left(\log_e(\mathcal{L}(\hat{\theta})) - \log_e(\mathcal{L}_s(\hat{\theta})) \right),\end{aligned}$$

Family (Error structure)	Deviance
Normal	$\sum (y - \bar{y})^2$
Poisson	$2 \sum y \ln(y / \mu) - (y - \mu)$
Binomial	$2 \sum y \ln(y / \mu) + (n - y) \ln(n - y) / (n - \mu)$
Gamma	$2 \sum (y - \mu) / y - \ln(y / \mu)$
Inverse Gaussian	$\sum (y - \mu)^2 / (\mu^2 y)$