25/10/2021 DISCRETA

$X+Y$

$X\left(1+\frac{Y}{X}\right)$

RICORSIONE

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è detta ricorsiva se viene definita specificando il valore dei primi m termini $a_1,\dots,a_m$ ed una funzione $f:\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, $s\le m$ tale che $a_i = f(a_{i-1},\dots,a_{i-s})$ per ogni $i>m$

ES

reg. di FIBONACCI $a_1=1$, $a_2=1$ $\forall n\ge 2$ $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$

Definizione 2.7. *Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali è detta* ricorsiva lineare omogenea *se viene definita specificando il valore dei primi m termini $a_1,\dots,a_m$ e tale che esiste un $s\le m$ con $a_i=\alpha_1 a_{i-1}+\dots+\alpha_s a_{i-s}$ per ogni $i>m$.*

Non è restrittivo supporre che $s=m$.

NON C'È IL TERMINE NOTO

Teorema 2.8. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione ricorsiva lineare* $\boxed{\text{omogenea}}$ *definita da $a_i=\alpha_1 a_{i-1}+\dots+\alpha_m a_{i-m}$ per ogni $i>m$. Supponiamo che il polinomio $\boxed{x^m-\alpha_1 x^{m-1}-\dots-\alpha_{m-1}x^{m-1}-\alpha_m}$ abbia m radici λ_m, $k=1,\dots,m$, distinte. Allora si ha che esistono $B_k\in\mathbb{C}$ tali che per ogni $i>m$*

$$a_n = B_1\lambda^n+\dots+B_m\lambda_m^n=\sum_{k=1}^{m}B_k\lambda_k^n$$

ES

$X_1=\boxed{1}$

$X_2=\boxed{1}$

$\alpha_1=1$

$\alpha_2=1$

$$X_n = 1X_{n-1}+1X_{n-2}$$

$$x^2-x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$$

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$$

$$X_n = B_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + B_2\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases}\cancel{1}\ 2 = B_1\left(\frac{1+\sqrt5}{\cancel{2}}\right)^{\boxed{1}} + B_2\left(\frac{1-\sqrt5}{\cancel{2}}\right)^{\boxed{1}}\\ \cancel{1}\ 4 = B_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2 + B_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2\end{cases}$$

SECONDO TERMINE

$$\frac{(1+\sqrt5)^2}{\cancel{4}} + \frac{(1+\sqrt5)^2}{\cancel{4}}$$

$$4 = B_1(1+5+2\sqrt5)+B_2(1+5-2\sqrt5)$$

DIVISO PER 2

$$\begin{cases} 2 = B_1(1+2\sqrt{5}) + B_2(1-2\sqrt{5}) \\ 2 = B_1(3+\sqrt{5}) + B_2(3-\sqrt{5}) \end{cases}$$

$2 = B_2(3+\sqrt{5}) + B_1(3-\sqrt{5})$

$B_2(3-\sqrt{5}-3-\sqrt{5})$

$B_2(-2\sqrt{5})$

$0 = 2B_1 + 2B_2$

$\boxed{B_1 = -B_2}$

$B_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad B_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ES

$x_1 = 3$

$x_2 = -1$

?

$x_3 = x_2 + 6x_1 = -1 + 18 = +17$

$x_n = \overset{x_1}{1}x_{n-1} + \overset{x_2}{6}x_{n-2} \overset{x_3=?}{+7x_{n-3}}$

NON HA SENSO

EQ ASS

$x^2 - 1x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = -2$

$x = 3$

$x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2} - 2x_{n-3}$

$x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\boxed{x_n = B_1(-2)^n + B_2(3)^n}$$

$x_{n=1} = 3 = B_1(-2)^1 + B_2(3)^1$

$x_{n=2} = -1 = B_1(-2)^2 + B_2(3)^2$

$$\begin{cases} 3 = -2B_1 + 3B_2 \\ -1 = 4B_1 + 9B_2 \end{cases}$$

$B_1 = \dfrac{3B_2 - 3}{2}$

$-1 = \cancel{4}\left(\dfrac{3B_2-3}{\cancel{2}}\right) + 9B_2$

$-1 = 6B_2 - 6 + 9B_2$

$15B_2 = 5 \Rightarrow B_2 = \dfrac{1}{3}$

$B_1 = \dfrac{3B_2 - 3}{2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$

$\Rightarrow x_n = -1(-2)^n + \dfrac{1}{3}(3)^n$

SE i risultati della eq associata sono uguali

RADICE con MOLTEPLICITÀ 2 (o più)

$$a_n = \sum_{K=1}^{t} \left(\sum_{J=1}^{r_K} A_{KJ} n^{J-1} \lambda_K^n \right)$$

ES

$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 4$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1$

~~da $x_n = B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n$~~

$x_n = B_1 \lambda_1^n + B_2 n^1 \cdot \lambda_1^n$

$x^3 =$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -1$

$x_n = B_1 \cdot \lambda_1^n + B_2 n \cdot \lambda_2^n + B_3 \lambda_3^n$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 1$

$x_n = B_1 \lambda_1^n + B_2 n \lambda_2^n + B_3 n^2 \cdot \lambda_3^n$

$\lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = 7 \quad \lambda_3 = 4 \quad \lambda_4 = 4$ dipende dalla molteplicità

$x_n = B_1 \cdot \lambda_1^n + B_2 n \cdot \lambda_2^n + B_3 \cdot \lambda_3^n + B_4 \cdot n \cdot \lambda_4^n$

ESERCIZI

dst $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ INDUZIONE

1) PASSO BASE $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{2} 1^3 + 2^3$$

2) PASSO $n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (n+1)^3 + \sum_{i=1}^{n} i^3 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha i + \beta i^2 + \gamma = \sum \alpha i + \sum \beta i^2 + \sum \gamma$$

$$\alpha \sum i + \beta \sum i^2 + \gamma \sum 1$$