Discreta modulo II

Matrici

Matrici su un campo

Le matrici sono delle tabelle con

> n righe
> m colonne

per esempio qui abbiamo una matrice 2×2 su $\mathbb{R}$

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

All'insieme delle matrici $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ contiene due operazioni.

> La somma binaria interna
>
> Avendo $A = (a_{i,j})_{i,j}$ ed $B = (a_{i,j})_{i,j}$

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j}$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

> si tratta solo di una semplice somma termine a termine

> La moltiplicazione per uno scalare
>
> Avendo $A \in M_{n\times m}\ (\mathbb{R})$

$$\lambda \cdot A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

Es:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

> Similmente abbiamo un prodotto termine a termine

Proprietà delle operazioni

$$+ : M_{n\times m}(\mathbb{R}) \times M_{n\times m}(\mathbb{R}) \to M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

> Nella somma $\times$ inteso come prodotto cartesiano

Le proprietà sono:

> Commutativa: $A + B = B + A \quad (\forall\ A, B)$
> Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\forall\ A, B, C)$
> $\exists$ elemento neutro: Matrice nulla $\bar{O}$
> Elemento neutro: $A + B = \bar{O}$

> *N.B.* nel elemento neutro la matrice A avrà tutti gli elementi positivi e la matrice B avrà i rispettivi elementi con segno opposto.

$$\cdot : \mathbb{R} \times M_{n\times m}(\mathbb{R}) \to M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

> considerando λ come lo scalare appartenente a $\mathbb{R}$ abbiamo queste pseudo proprietà dato che non sono operazioni tra elementi dello stesso tipo.

abbiamo:

> Associativa: $\lambda \cdot (A \cdot M) = (\lambda \cdot M) \cdot A$
> Distributiva: $\lambda(A \cdot B) = \lambda A + \lambda B$
> $(\lambda + B)A = \lambda A + BA$
> Elemento neutro: $1 \cdot A = A$

Trasposta di una matrice

$$()^T : M_{n\times m}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$A(a_{i,j})_{i,j} \to (a_{j,i})_{i,j}$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

> se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ossia se traspongo una matrice quadrata ottengo una matrice dello stesso ordine.

Somma tra trasposte:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda \cdot A)^T = \lambda A^T$$

Moltiplicazione tra matrici

> La moltiplicazione tra matrici è diversa dall'operazione di moltiplicazione per uno scalare.
>
> Ci sono delle condizioni che devono essere rispettate altrimenti non è possibile eseguire questa operazione.

Considerando:

$$A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

$$B \in M_{m\times r}(\mathbb{R})$$

> La condizione di compatibilità è che il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di righe della seconda matrice

Il risultato sarà:

$$A \cdot B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$$

> Il risultato è una matrice con il numero di righe della prima matrice e il numero di colonne della seconda matrice.

Il calcolo dei valori della matrice dell'operazione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 14 & 9 \\ 31 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

> per ottenere il risultato alla posizione $(1,1)$ (prima riga prima colonna)
> si procede cosi -> $2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 24$

> si moltiplica il primo elemento della prima riga con il primo elemento della prima colonna a cui si *somma* il prodotto tra il secondo elemento della prima riga ed il secondo elemento della prima colonna a cui si *somma* il prodotto tra il terzo elemento della prima riga ed il terzo elemento della prima colonna.
>
> Il procedimento è analogo per le altri posizioni della matrice risultante.
>
> Banalmente per l'elemento (1,2) si continua ad usare la prima riga ma stavolta si prende in considerazione la seconda colonna.

Riassumendo in una formula:

$$(C_{i,j})_{i,j} = A \cdot B$$

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{m} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Proprietà:

> Considerando $A, B, C \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$
>
> generalmente non è *commutativa*
> $A \cdot B \neq B \cdot A$ eccetto casi particolari
>
> è *distributiva*
> $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
>
> è *associativa*
> $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

> per la transposizione:
> $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$
> n.b. la trasposizione inverte l'ordine quindi non è sempre compatibile

Dim:
$A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$
$B \in M_{m \times r}(\mathbb{R})$
uguale a $A \cdot B \in M_{n \times r}(\mathbb{R})$

Considerando però le trasposte
$A^T \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
$B^T \in M_{r \times m}(\mathbb{R})$

> dato che il numero delle colonne della prima è diverso dal numero di righe della seconda non sono compatibili e perciò non è possibile l'operazione di moltiplicazione

Elemento neutro molt.mat.

si definisce come elemento neutro per la moltiplicazione tra matrici la cosiddetta matrice di identità.

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Una qualsiasi matrice *compatibile* moltiplicata con la sua rispettiva matrice d'identità ha come risultato se stessa.

n.b. considerando $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
$\Pi_n \cdot A = A \neq A \cdot \Pi_m = A$
si ha lo stesso risultato però si tratta di due operazioni di verse dato che per mantenere la compatibilità si deve cambiare l'ordine della matrice d'identità per poter cambiare la sua posizione.

Matrici scala per righe

La matrice scala per righe è una matrice di qualsiasi dimensione che ha una particolare conformazione nella posizione dei suoi elementi.

Es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

La conformazione è data dalla seguente definizione

DEF: L'elemento più a sinistra diverso da 0 di ogni riga è un 1 (dominante). L'uno dominante di una riga si trova più a destra di un *1-dom* della riga precedente.

Per trasformare una qualsiasi matrice nella sua scala per righe si usano le Operazioni elementari

Proposizioni:

- Il numero di *1-dom* non cambia mai.
- Il numero di *1-dom* non può essere superare il minimo tra righe e colonne.

- Il numero di *1-dom* dipende solo dalla matrice di partenza.

DEF: Sia $A \in M_{n \times M}(\mathbb{R})$ il rango di A è il numero *1-dom* di A

Operazioni elementari

Le operazioni elementari sono tre:

1. Scambiare due righe fra loro
2. Moltiplicare una riga per uno scalare diverso da zero $(\lambda \neq 0)$
3. Sommare ad una riga un multiplo di un'altra

n.b. Se si moltiplica per un numero negativo si ha la sottrazione

Forma scala per righe ridotta

Questa forma particolare della scala per righe si ottiene sempre tramite le operazioni elementari solo che al posto di avere gli zeri sotto gli uno dominanti ne ha anche sopra.

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 \end{pmatrix}$$

Matrice inversa

DEF: Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ A si dice invertibile se

$$\exists B \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) | A \cdot B = B \cdot A = \Pi_n = A^{-1}$$

n.b. è possibili solo per matrici quadrate

Procedura di calcolo:

- Prendo $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

- Considerando $A|\Pi_n$ si avrà una $M_{n\times 2n}(\mathbb{R})$
- Calcolo la matrice ridotta $C = A'|B'$
- Se $A' \to \Pi_n$ allora A è invertibile e la sua inversa $A^{-1} = B'$
- Se $A' \neq \Pi_n$ allora A *non* è invertibile

Es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to operazioni\ elementari \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{4}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Corollario

> $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è invertibile $\Leftrightarrow$ il numero di *1-dom* è uguale a n

---

Matrice triangolare

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è triangolare SUP(INF) se $a_{i,j} = 0 \quad \forall i > j (i < j)$.

PROP: IL DET di una matrice triangolare SUP(INF) è il prodotto della *diagonale*.

Matrice diagonale

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale se $a_{i,j} \neq 0 \; \forall i \neq j$

la moltiplicazione tra matrici diagonali è la moltiplicazione tra gli elementi della diagonale.

Deteminante

Determinante di una matrice

> **DEF:** *induttiva*
> se $A \in M_{1\times1}(\mathbb{R})$ allora $det(A) = a_{11}$
> se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ allora prendo la prima riga e
>
> **Formula di Lablace**
>
> $$det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1,i}det(A_{1,i})$$

Es della prima ipotesi:

$$D(7) = 7$$

Es della seconda ipotesi con una 2×2

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2}(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 4 \ + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot 3$$

> il membro $(-1)^{1+i}$ si può omettere se si considera il segno di $a_{1,i}$ secondo il seguente schema:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

Genericamente

> quando si tratta con matrici 2×2 si può usare il seguente trucchetto:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

> si prende la diagonale principale e la si moltiplica per la diagonale formata con gli angoli opposti con il segno invertito.

> quando si tratta con matrici 3×3 si può usare la *regola di Sarrus*

> **Proposizione**
> Il determinante di una trasposta è uguale al determinante della trasposta
>
> $$D(A) = D(A^T)$$

Le operazioni elementari posso modificare il determinante

> 1. Se scambio due righe/colonne il determinante cambia segno (se ho due righe uguali il Det è 0).
> 2. Se moltiplico tutta la riga per uno scalare allora il determinante è moltiplicato per lo scalare.
> 3. Se sommo ad un riga/colonna un multiplo di un altra il determinante non cambia.

Ci sono altre tecniche per calcolare il determinare come l'uso del [Rango per minori].

Rango per minori

> Data una qualsiasi matrice, prendono il nome di sotto-matrici quelle matrici ottenute eliminando alcune righe e/o colonne della matrice in esame, mentre si dicono minori associati a una matrice i determinanti delle sotto-matrici *quadrate* da essa estratte.

DEF:

> Sia $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ il rango per minori di A *è il massimo* r tale che esiste un minore di ordine r in A
> che sia $\neq 0$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

se considerassi la sotto-matrice 2×2 formata dalle prime righe e colonne, per poi calcolarne il determinante

$$D\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 11$$

dato che $Det \neq 0$ allora la matrice principale ha almeno rango 2 dato che esiste almeno *una* sotto-matrice 2×2 che ha un determinante diverso da zero.

Ovviamente non finisce qui prendendo in considerazione una matrice 3×3 con relativo calcolo del det.

$$D\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se $Det \neq 0$ allora la matrice principale che può avere al massimo rango 4 ha almeno rango 3 dato che esiste almeno *una* sotto-matrice 3×3 che ha un determinante diverso da zero.

Metodo degli orlati

È una strategia per il calcolo del rango di una matrice che sfrutta i minori.

PROP:
Un orlato di una sotto-matrice B di A è una sotto-matrice C di A che ha una riga e una colonna in più di B ed ha B come sotto-matrice.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \mathbf{4} & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{5} & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Considerando la sotto matrice centrale evidenziata dei minori possono essere

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{1} & \underline{2} & 0 \\ \underline{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & 0 \\ \underline{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} oppure \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \underline{0} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \underline{2} \\ 1 & \underline{5} & \underline{2} & \underline{7} \end{pmatrix}$$

TH:

Sia $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ con una sotto-matrice $B_{r \times r}$ con $Det(B) \neq 0$ se *tutti* gli orlati di $B_{(r+1) \times (r+1)}$ hanno $Det = 0 \rightarrow$ rango per minori A è r.

Prop:

Sia $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ allora *il rango di A* è **uguale** al suo rango per *minori*.

Sistemi lineari

Un sistema lineare in n incognite $x_1, \dots, x_n$ e m equazioni è un sistema del tipo

$$(*) = a_{ij}, b_j \in \mathbb{R} \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

questa è solo una scrittura formale in cui le incognite x non sono altro che un segnaposto.

> Una soluzione di $(*)$ è una *n-upla* si numeri reali $(\in \mathbb{R}^n)$ tali che:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ . \\ . \\ a_{m1}\alpha_1 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

> In cui la soluzione è una *n-upla* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

ora questo sistema ha un significato.

> - Un sistema è *compatibile* se $\exists$ almeno una soluzione.
> - È incompatibile se non ha soluzione.

> Sia $(*)$ un sistema lineare posso associare a $(*)$ due matrici

Matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Matrice completa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

in cui la colonna formata da $b_1, \ldots, b_m$ è la colonna dei termini noti.
Ossia la parte a destra dell'uguale.

Es:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 4 \\ 7x + 2z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

TH: Rouchè-Capelli

> Sia $(*)$ un sistema lineare allora $(*)$ è compatibile **se e solo se**
>
> $$RANGO(A) = RANGO(\overline{A})$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 7 \\ 7x + 4y = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Il $RANGO(A) \neq RANGO(\overline{A})$ perciò secondo il teorema di *Rouchè-Capelli* non sono compatibili.

TH: Cramer

> Sia $(*)$ un sistema lineare in n equazioni ed n incognite se $DET(A) \neq 0$ allora esiste un *unica* soluzione $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e si trova:
>
> $$\alpha_i = \frac{DET(A_i)}{DET(A)}$$
>
> dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con la colonna B dei termini noti

n.b.
funziona esclusivamente con le matrici quadrate.

Es:

$$\begin{cases} 3x + -5y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$DET(A) = DET\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 11$$

Essendo che il determinante è $\neq$ da 0 si tratta di un sistema si *Cramer*.
Perciò ho un *unica* soluzione che è una coppia (α, β):

$$\alpha = \frac{DET(A_i)}{DET(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{11} = \frac{39}{11}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{11} = \frac{39}{11}$$

Avendo come soluzione:

$$S = \left\{ \left(\frac{39}{11}, \frac{39}{11} \right) \right\}$$

Eliminazione di Gauss

Un sistema può essere trasformato in uno "più semplice" usando l'eliminazione di *Gauss*.
Un esempio di sistema semplice può essere:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 1 \end{cases} \qquad S = \{(3, 7, 1)\}$$

guardando le matrici associate abbiamo un caso familiare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

riducendo la matrice completa nella sua forma scala per righe abbiamo i risultati sull'ultima colonna con le relative incognite.

Ci possono essere anche altri casi non è detto che la forma scala per righe venga sempre uguale alla matrice di identità. In quei casi l'incognita aggiuntiva che rimane su una delle righe farà parte della soluzione.

Es:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad S = \{(3z, 7)\}$$

Ci possono essere anche casi in cui il sistema è imposibile, ad esempio quando la stessa incognita ha due vaori diversi oppure quando in una delle matrici la riga non ha uno dominanti ma solo un valore sulla colonna delle soluzioni, sarebbe una contraddizione dato che è come porre $0 = 1$ chiaramente errato.

Sistemi lineari parametrici

Sono dei sistemi simili a quelli lineari solo che nell'equazioni si trova un parametro che diversifica il metodo di risoluzione.

Es:

$$\begin{cases} x-3y-2z=0 \\ x+ky+2kz=1 \end{cases}$$

Ora volendo passare alla fase risolutiva come prima cosa calcoliamo il determinante che per soddisfare cramer implica lo spostare l'ultima colonna nella matrice dei coefficenti a destra ottendendo cosi:

$$DET(A)=DET\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & k \end{pmatrix}=k+3$$

Qui dobbiamo dividere in due casi

- il primo in cui $DET(A)\neq 0$
  che è soddisfatto se e solo se $k\neq -3$ la risoluzione procede come per un sistema normale solo che la soluzione conterrà sicuramente la variabile k

$$S_{k\neq -3}=\left\{\left(\frac{-8kz+3}{k+3},\frac{1-2kz+2z}{k+3},z\right)t.c.\,z\in\mathbb{R}\right\}$$

- il secondo in cui $DET(A)=0$
  che è soddisfatto se e solo se $k=-3$ si sostituisce k con -3 nelle matrice completa e dei coefficienti. **È di estrema importanza controllare la compatibilità** con il *Th. di Rouchè-capelli*.
  Una volta che i ranghi delle due matrici sono uguali si procede alla normale risoluzione. con $DET(A')=-8$

$$S_{k=3}=\left\{\left(\frac{24y+2}{8},y,-\frac{1}{8}\right)t.c.\,y\in\mathbb{R}\right\}$$

Spazi Vettoriali

> **DEF:**
> Sia V un insieme non vuoto di oggetti chiamati *vettori* che sia $\mathbb{K}$ un campo siano definite due operazioni chiamate
> SOMMA $\oplus : V \times V \rightarrow V$
> PRODOTTO $\odot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$
> **tali che**
> $\oplus$ è essociativa, commmutativa, $\exists$ el. neutro ed $\exists$ el. opposto.
>
> $\odot$ Associativa: $\lambda \cdot (A \cdot M) = (\lambda \cdot M) \cdot A$
> Distributiva: $\lambda(A \cdot B) = \lambda A + \lambda B$
> $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
> Elemenento neutro: $1 \cdot A = A$
>
> se valgono tutte V è detto spazio VETTORIALE su $\mathbb{K}$.

$0 \cdot v =$ vettore nullo $\bar{o}$ cioè l'elemento neutro rispetto alla somma (vale in ogni spazio vettoriale)

> **DEF:**
> Sia V(sp. vettoriale) su $\mathbb{K}$ siano $V_1, \ldots, V_n \in V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ il vettore $\lambda_1 V_1, \ldots, \lambda_n V_n \in V$ prende il nome di **COMBINAZIONE LINEARE** di $V_1, \ldots, V_n$ con gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Es:
$\mathbb{R}^3$
$V_1 = (1,0,2) \quad \lambda_1 = 2$
$V_2 = (0,3,3) \quad \lambda_2 = 7$
Combinazione lineare:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 2(1,0,2) + 7(0,3,3) = (2,0,4) + (0,21,21) = (2,21,25)$$

n.b.
se il risultato è $\bar{o}$ allora comb. lin. NULLA

> **DEF:**
> $(V_1, \ldots, V_n) \in V$ si dicono *linearmente **indipendenti*** se $\lambda_1 V_1, \ldots, \lambda_n V_n = \bar{o}$ implica che
> $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

> **DEF:**
> $(V_1, ..., V_n) \in V$ si dicono *linearmente* ***dipendenti*** se $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 V_1, ..., \lambda_n V_n = \bar{o}$ se la scrittura e diventa $\lambda_n \neq 0$

Per determinare se due vettori sono linearmente indipendenti come prima cosa bisogna preparare la combinazione lineare tra i vettori con dei generici scalari ed uguagliare il tutto al vettore nullo

$$\lambda_1 V_1, ..., \lambda_n V_n = \bar{o}$$

porre l'uguaglianza significa determinare un sistema in cui troviamo i valori degli scalari.
Se i valore assunto da ogni scalare è 0 sono *linearmente indipendenti* PER DEFINIZIONE.

Un altro modo è calcolando il determinante della matrice quadrate rispetto al sistema.

- Se il DET è uguale a 0 non si tratta di un sistema di cramer quindi ha infinite soluzioni perciò i vettori sono lin. DIPENDENTI.
- Se il DET è diverso da 0 si tratta si un sistema di cramer con un unica soluzione e i vettori sono lin. INDIPENDENTI.

> **PROP:**
> $V_1, ..., V_k \in V$ sono linearmente indipendenti se e solo se il rango $\begin{pmatrix} | & & | \\ V_1 & ... & V_k \\ | & & | \end{pmatrix}$ è k.

> **i vettori sono linearmente indipendenti se il rango è uguale al numero di vettori**

> **DEF:**
> $V_1, ..., V_k \in V$ sono detti GENERATORI di V se $\forall v \in V => \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che $\lambda_1 V_1, ..., \lambda_n V_n = V$

Per verificare se dei vettori sono un sistema di generatori dello spazio vettoriale devo risolvere il sistema di equazioni data la loro combinazione lineare, quindi:

1. ho ad esempio due vettori per la quale voglio determinare se dono generatori
2. faccio la combinazione lineare con dei generici scalari e ricavo la matrice associata
3. eguaglio la matrice data la combinazione lineare a dei valori di destinazione (a,b) e determino il sistema
4. se il sistema ammette soluzioni nelle incognite per qualsiasi valore di a e b allora i vettori sono dei generatori. Se viceversa, allora non sono generatori

---

> **DEF:**
> Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
> $V_1, \dots, V_k \in V$ si dicono BASE di V se sono linearmente INDIPENDENTI **ed** GENERATORI

Basi Canoniche in $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^2 \quad (1,0)(0,1)$
- $\mathbb{R}^3 \quad (1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)$
- $\mathbb{R}^n \quad (1,0,\dots)(0,1,\dots,0)\dots(0,\dots,0,1)$

> **TH:**
> Sia V uno spazio vettoriale ogni BASE di V ha lo steso numero di elementi(vettori). Tale numero prendi il nome di ***DIMENSIONE*** di V.

Sottospazi Vettoriali

> **DEF:**
> Sia V spazio vettoriale un SOTTOINSIEME "U" di V è detto ***sottospazio vettoriale*** di V se è esso stesso spazio vettoriale rispetto alle stesso operazioni in V

PROP:
Se $U \subseteq V$(sottoinsieme) allora $U \leq V$(sottospazio) se e solo se

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall u_1, u_2 \in U => \lambda u_1 + \mu u_2 \in U$$

criterio per definire se un sottospazio appartiene a V.

PROP:
Se $U \leq V$ allora la sua diemensione(# el. della base)

$$0 \leq dim(U) \leq dim(V)$$

inoltre $dim(U) = 0$ se e solo se $U = \{\bar{o}\}$
$dim(U) = V = dim(V)$ se e solo se $U = V$

PROP:
Se $U_1, U_2 \leq V$ allora $U_1 \cap U_2 \leq V$ è ancora un sottospazio

> **DEF:**
> Se $U_1, U_2 \leq V$
> $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$
> si dice somma di U_1, U_2

n.b. l'unione non è un sottospazio la SOMMA si.

Generatori di sottospazi

> **DEF:**
> Sia V sp. vettoriale e siano $V_1, \ldots, V_n$ vettori di V chiamo $U = \{\lambda_1 V_1, \ldots, \lambda_n V_n | \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$ sottospazio di V generato da $V_1, \ldots, V_n$

> $$U =< V_1, \dots, V_n >$$
>
> "sottospazio generato da" combinazioni lineari dai vettori

Somma tra due spazi generati

$U =< V_1, \dots, V_n >$ e $W =< W_1, \dots, W_n >$

U e W si sommano facendo la combinazione lineare dei generici vettori

$U + W =< V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_n >$

Intersezione

$U \cap W$
per effetuare l'intersezione basta trovare il generico vettore di U poi il generico vettore di W
che poi eguaglio. Il sistema creato da questa uguaglianza ha come *soluzioni* il vettore che si può scrivere in entrambi i modi (ossia che verifica l'equazione).

n.b.
un sottospazio non è mai vuoto perchè contiene lo zero vettore.

> **TH di GRASSMAN:**
> Sia V uno spazio vettoriale $U, W \leq V$ allora
>
> $$dim(U \cap W) + dim(U + W) = dim(U) + dim(W)$$
>
> da cio evinciamo che
>
> $$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$
>
> per facilitare il calcolo della dimensione della somma.

Quando due spazi sono uguali?

> **se**
> $dim(V) = dim(W)$
> $dim(V \cap W) = dim(V)$
> $dim(V + W) = dim(V)$
> **allora**
> $V = W$

PRECISAZIONI
Si può determinare la dimensione dell'immagine anche attraverso le matrice generata dai vettori.
Mettendo i vett. in riga il rango della matrice definisce la dimensione della somma.
Se per fare il calcolo qualche riga viene esclusa nella stesura della base non va compreso.

Applicazioni lineari

DEF:
Siano U e V sp. vett. sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Una *applicazione* $L : U \to V$ è detta ***lineare*** se

$$L(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) = \lambda \cdot L(u_1) + \mu \cdot L(u_2)$$
$$operazioni\ in\ U = operazioni\ in\ V$$

Dato un vettore $u \in U$ ad esso si associa la sua combinazione lineare $L(u) \in V$.
Pertanto la combinazione lineare della somma di vettori di uno scalare equivale alla somma delle combinazioni lineari di ogni vettore, ognuno moltiplicato per uno scalare.

Quando un app. è lineare?

Un'applicazione lineare si ha quando applicando lo 0 vettore in entrata, si ha il vettore nullo in uscita.

DEF:
Sia $L : U \to V$ lineare

$$KER(L) = \{u \in U | L(u) = \bar{o}_v\} = L^{-1}(\bar{o}_v)$$

$$IM(L) = \{L(u) | u \in U\}$$

entrambi sono dei sottospazi

$$KER(L) \subseteq U$$
$$IM(L) \subseteq V$$

Il kernel non è vuoto contiene sempre almeno lo zero vettore che è diverso dal vuoto
L'immagine no è mai vuota dato che c'è sempre lo zero vettore essendo che $KER \subseteq IM$

TH:
$KER(L) \leq U$ (ker è un sottospazio di U)
$IM(L) \leq V$ (Im è un sottospazio di V)

dim:
è vero che l'immagine del kernel è lo zero vettore?

$u_1, u_2 \in KER(L)$
$\lambda u_1 + \mu u_2 \in KER(L)$?

se $L(\lambda u_1 + \mu u_2) = \bar{o}_v$
allora $\lambda L(u_1) + \mu L(u_2) = \bar{o}_v$ dato che $\lambda L(u_1) = \mu L(u_2) = \bar{o}_v$

> **TH:**
> $L : U \to V$ ed $u_1, \dots, u_n$ è una base di U allora
>
> $$IM(L) =< L(u_1), \dots, L(u_n) >$$
>
> insieme di COMBINAZIONI LINEARI che generano una BASE -> detti generatori

Per trovare l'immagine si fa l'applicazione sulla base canonica rispettivamente all'insieme di arrivo per poi formare una matrice mettendo i vettori risultatnti in colonna. Il rango della matrice è la dimensione dell'immagine.

TH della DIMENSIONE:
Sia $L : U \to V$ lineare allora

$$dim(KER(L)) + dim(IM(L)) = dim(U)$$

posso calcolare o la dimensione dell'immagine senza calcolare l'immagine con:

$$dim(IM(L)) = dim(U) - dim(KER(L))$$

o posso calcolare la dimensione del kernel senza calcolare il kernel con:

$$dim(KER(L)) = dim(U) - dim(IM(L))$$

PROP:
Sia $L : U \to V$ lineare allora

- L è INIETTIVA se e solo se $KER(L) = (\bar{o}_v)$ ossia la sua dimensione è 0
- L è SURIETTIVA se e solo se $IM(L) = V$

se L è sia iniettiva che suriettiva allora L si dice ***ISOMORFISMO***

PROP:
Se L è un isomorfismo allora L^{-1} è lineare.

Auto valori, Auto Vettori e diagonalizzazione

> **DEF:**
> Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ un elemento $\lambda \in (\mathbb{R})$ si dice autovalore di A se *esiste* un vettore $V \in (\mathbb{R})^n \backslash \{\bar{o}\}$ tale che
>
> $$A \cdot V = \lambda \cdot V$$
>
> il vettore V di dice *AUTOVALORE* di A *relativo* all'autovalore λ .
>
> L'**auto-spazio** relativo a λ
>
> $$A_\lambda = \{V \in \mathbb{R}^n | A \cdot V = \lambda \cdot V\} \leq \mathbb{R}^n$$
>
> La dimensione dell'auto-spazio deve essere maggiore di 0 (almeno 1). Per DEFINIZIONE contiene un vettore **non nullo**.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda \Pi_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

ed andando a determinare il polinomio caratteristico

$$DET(A - \lambda \Pi_2) = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

trovando le radici abbiamo

$$DET(A - \lambda \Pi_2) = (\lambda - 5)(\lambda - 1)$$

in questo caso gli autovalori sono relativamente $\lambda = 5$ e $\lambda = 1$.

> **DEF:**
> La #molteplicità molteplicità **algebrica** di un autovalore λ è la sua molteplicità (numero di volte) come radice del *polinomio caratteristico*.

> **DEF:**
> Sia λ un autovalore la **Molteplicità GEOMETRICA**
>
> $$\mu_g(\lambda) = DIM(A_\lambda)$$
>
> La dimensione dell'auto-spazio determina la molteplicità geometrica.

PROP:

> Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ allora $\forall\lambda$ *Autovalore*
>
> $$1 \leq \mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda) \leq n$$
>
> Corollario:
> se $\mu_a = 1$ allora **sicuramente** $\mu_g = 1$

> **Def:**
> $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ A si dice **DIAGONALIZZABILE** se
>
> $$\exists P \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ \ Invertibile$$
>
> $$\exists D \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ \ Diagonale$$
>
> tale che
>
> $$A = P^{-1}DP$$

TH:
$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ A si dice **DIAGONALIZZABILE** se e solo se

1. $\sum_\lambda \mu_a(\lambda) = n$
2. $\forall\lambda \ \ \mu_g(\lambda) = \mu_a(\lambda)$

La matrice D ha in diagonale gli autovalori con relativa molteplicità.
La matrice P ha le basi degli autospazi in colonna.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dato che si conoscono gli autovalori per determinare gli **autospazio** si procede con il seguente procedimento:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

questa disposizione è la precedente eguaglianza $A \cdot V = \lambda \cdot V$.

Il posto occupato da 5 è uno degli autovalori che ha il suo relativo autospazio.
Per ogni autospazio usiamo ogni autovalore.

Creando il sistema relativo all'equazione fondamentale e risolvendolo si ottiene che

$$A_5 = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$$

una possibile base è $\langle(1, 1)\rangle$ ciò ci dice che ha dimensione uno soddisfacendo cosi le ipotesi del teorema.

Lo stesso procedimento vale per $\lambda = 1$ che ci dà

$$A_1 = \{(-3y, y)|x \in \mathbb{R}\}$$

anche qui una possibile base è $\langle(-3,1)\rangle$le ipotesi sono soddisfatte rendendo cosi la matrice diagonalizzabile.

Le matrici D e P per definizione sono:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

PROCEDIMENTO PER DETERMINARE SE UNA MATRICE E' DIAGONALIZZABILE

1. Si prende la matrice considerata e data poi la matrice $A - \lambda\Pi_n$ si determina il polinomio caratteristico e le relative radici.
2. Date le matrici (e quindi gli autovalori) si determina subito la molteplicità algebrica di ognuno. La somma delle molteplicità però deve essere uguale al grado del polinomio caratteristico
3. Per la molteplicità algebrica si hanno due casi:
   a. Dato un autovalore se la sua molteplicità algebrica è 1 allora lo sarà anche l sua molteplicità geometrica
   b. Se la molteplicità algebrica è maggiore di uno si avrà calcolare la molteplicità geometrica determinando la dimensione dell'auto-spazio relativo all'auto-valore.
4. Se un autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica uguali allora per quell'autovalore quella matrice è diagonalizzabile.

n.b.
Ogni λ ha il suo autospazio.

> **def:** #molteplicità
> Considerando $P(x)$ α è radice di *MOLTEPLICITÀ* r se $(x-\alpha)^r / P(x)$ e $(x-\alpha)^{r+1} \nmid P(x) \mu_a(\lambda)$