18/10/2021 DISCRETA

PRINCIPIO di INDUZIONE

$\mathbb{N}_0$

supponiamo di avere un certo $U \subseteq \mathbb{N}_0$ t.c.

1) $0 \in U$
2) se $n \in U$ allora $n+1 \in U$ $\Rightarrow U = \mathbb{N}_0$

IMPLICA

1') $n_0 \in U$
2') se $n \in U \Rightarrow n+1 \in U$ $\Rightarrow U = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_0\}$

SEMPLICE MODIFICAZIONE

Suppongo di voler DIMOSTRARE

$\boxed{\forall n \Rightarrow p(n) \text{ è vero}}$

$p(n) \leftarrow$ predicato

- FAR VEDERE che $p(n_0)$ è vero [PASSO BASE]
- " " che se $p(n)$ è vero $\xRightarrow{(\text{allora})}$ $p(n+1)$ è vero [PASSO INDUTTIVO]

$\Rightarrow$ $\forall n \geq n_0$ allora $p(n)$ è vero

$U = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid p(n) \text{ è vero}\}$

PASSO BASE $n_0 \in U$
" INDUTTIVO $n \in U \Rightarrow n+1 \in U$ $\Rightarrow U = \{n \geq n_0 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

DIM. per INDUZIONE che

$\forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$

PREDICATO
è un uguaglianza
$a = b$

$\forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \boxed{p(n)}$ è VERA

P.B. $n_0 = 0$

$p(0)$ è VERA? sì

$\underbrace{\boxed{\sum_{i=0}^{0} i}}_{0} = \underbrace{\boxed{\frac{0 \cdot 1}{2}}}_{0}$

P.I. se $P(n)$ è vero allora $P(n+1)$ è vero

$P(n) = \text{"}\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\text{"}$ $\leftarrow$ ASSUMO CHE È VERA

$P(n+1) = \text{"}\underline{\sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}\text{"}$ $\leftarrow$ DIMOSTRATO CHE È VERO

$$0+1+2+3+\dots+n = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\underbrace{\boxed{0+1+2+3+\dots+n}}_{\sum_{i=0}^{n} i} + (n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} i$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + \underbrace{\boxed{\sum_{i=n+1}^{n+1} i}}_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} i + n+1 \qquad \sum_{i=0}^{n} i \to P(n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 =$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2} =$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

DIM. che $\forall n \geq 1$ si ha $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}}$ predicato $P(n)$

P.B. $n=1$

$$P(1) = \text{“}\sum_{i=1}^{1} \underbrace{\frac{1}{i(i+1)}}_{\underbrace{\frac{1}{1(1+1)}}_{1/2}} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+1}}}_{1/2}\text{”}$$

P.I.

$$P(n) = \text{“}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}\text{”}$$

$$P(n+1) = \boxed{\text{“}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}\text{”}}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}}_{} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)}}_{} =$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

DIMOSTRARE che $\forall\, n \geq 1$ si ha che

$$\underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$$

$$\sum_{i=2}^{n+1} (i-1)i$$

P.B. $P(1)$

$P(1) =$ "$1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}}$"

"$1\cdot 2 = 1\cdot 2$"

P.I. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n) =$ "$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$"

$P(n+1) =$ "$1\cdot 2 + \ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$"

$$\underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)} + \underbrace{(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$(n+1)(n+2)\left[\frac{n}{3} + 1\right] =$$

$$= (n+1)(n+2) \cdot \frac{n+3}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)+(n+2)+(n+3)}{3}$$

DIM che $\forall\, n > 2$ si ha che $n^2 > 2n+1$ $\qquad P(n) =$ "$n^2 > 2n+1$"

P.B. $P(3)$

$P(3) =$ "$9 > 7$" VERA

P.I.

$P(n) =$ "$n^2 > 2n+1$"

$P(n+1) =$ "$(n+1)^2 > \boxed{2(n+1)+1}$"

$$(n+1)^2 = \underbrace{\boxed{n^2} + 2n + 1} > \boxed{2n+1} + 2n + 1$$

$$4n + 2 = 2n + 2n + 2 > 2n + 3$$

perché è almeno 3

ES.

$n^3 + 3 > 2n + 1 + 3$