Nell'insieme $\mathbb{Z}$ si consideri la relazione data $\boxed{a\rho b \Leftrightarrow a^2-b^2=4b-4a}$ $\forall a,b\in\mathbb{Z}$

★ ρ è di equivalenza?

è RIFF? si

$\forall a\in\mathbb{Z}\quad a\rho a \Leftrightarrow a^2-a^2=4a-4a$

$0=0$

è SIMM? si

$(\forall a,b\quad a\rho b \Rightarrow b\rho a)$?

$a\rho b \Leftrightarrow a^2-b^2=4b-4a$ vero per ipotesi

$a\rho b \overset{?}{\Leftrightarrow} b^2-a^2=4a-4b \Leftrightarrow -(\underbrace{a^2-b^2}) = -(\underbrace{4b-4a})$

è TRANS? si

$(\forall a,b,c\quad \underbrace{a\rho b, b\rho c}_{\text{IPOTESI VERO}} \Rightarrow a\rho c)$

$$\left.\begin{array}{l} a\rho b \Leftrightarrow a^2-b^2=4b-4a \\ b\rho c \Leftrightarrow b^2-c^2=4c-4b \end{array}\right\}\ \text{VERO per ipotesi}$$

$$a^2\cancel{-b^2+b^2}-c^2=\cancel{4b}-4a+4c\cancel{-4b}$$

$$a^2-c^2=+4c-4a \Rightarrow a\rho c$$

determinare una $c\in\mathbb{Z}$ tale che $c\rho 4$

$c\rho 4 \Leftrightarrow c^2-(4)^2=4\cdot 4-4c$

$c^2-16=16-4c$

$c^2+4c-32=0$

se $\boxed{c=0}$? $-32=0$ NON soddisfa l'eq

è quindi $c=0$ non è in relazione con 4

determinare esplicitamente un valore $c\in\mathbb{Z}$ che sia rel con 4

$c\rho 4$? TUTTI i valori che sono in relazione ρ con 4 soddisfano $c^2+4c-32=0$

$[4]=\{4,-8\}$

$c=\dfrac{-4\pm\sqrt{4+32}}{1}=-2\pm 6 \begin{cases}-8\\ 4\end{cases}$

$\overset{\mathbb{Z}}{c_1}\cdot\overset{?}{c_2}=\overset{\mathbb{Z}}{P}$ $\quad c_2=\overset{\mathbb{Q}}{\boxed{\dfrac{P}{c_1}}}$

quali sono i valori di $\mathbb{Z}$ t.c. ρ con a?

$$a\rho b \iff a^2-b^2=4b-4a$$

se prendo $a\neq 0$

$$[a]=\{a,-a-4\}$$

$$\mathbb{Z}/\rho=\left\{\{a,-a-4\}\mid a\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\{1,2,1,5\}=\{1,2,5\}$$

$$\underbrace{b^2}_{\text{INCOGNITA}}+4b\underbrace{-a^2-4a}_{\text{VALORE NOTO}}=0$$

$a\neq 0$

$$a\cdot y=-a^2-4a$$

$$y=-\frac{a^2-4a}{a}=-a-4$$

UNA rel ρ su $\mathbb{R}^2$

$$(x,y)\,\rho\,(z,t)\iff x+y=z+t$$

es $(1,1)\,\rho\,(2,0)$

è di EQUIVALENZA? si

è rifl?

$$(x,y)\,\rho\,(x,y)\iff x+y=x+y\quad\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$1+1=1+1$$
$$2=2$$

è SIMM? devo usare l'implica

$$(x,y)\,\rho\,(z,t)\Rightarrow(z,t)\,\rho\,(x,y)$$

$$\overset{1}{x}+\overset{1}{y}=\overset{2}{z}+\overset{0}{t}\Rightarrow\overset{2}{z}+\overset{0}{t}=\overset{1}{x}+\overset{1}{y}$$

è TRANS

$$(x,y)\,\rho\,(z,t)\wedge(z,t)\,\rho\,(q,r)\Rightarrow(x,y)\,\rho\,(q,r)$$

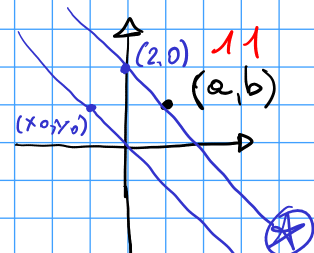
$$x+y-z-t=0\wedge+z+t-q-r=0\qquad x+y=q+r$$

$$x+y\cancel{-z-t+z+t}-q-r=0$$

$$x+y=q+r$$

$$(x,y)\,\rho\,(q,r)$$

$\mathbb{R}^2$



quali sono $(x,y)\,\rho\,(1,1)$

$$x+y=2$$

$$y=-x+2$$

$$y=-x+(x_0+y_0)$$

le classi di eq di $[1,1]$ sono tutti i punti che sono sulla retta

INSIEME QUOZ.

$$\mathbb{R}^2/\rho=\{y=-x+\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$$

oppure

$$=\{[a,0]\mid a\in\mathbb{R}\}$$

ES: $A = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ $\sim$ = relazione

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ $\in A$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ $\in A$

$f \sim g \Leftrightarrow f(1) = g(1)$

è equivalenza?

RIF $\forall f \in A$

$f \sim f \Leftrightarrow f(1) = f(1)$

SIMM

$\forall f, g \in A \quad f \sim g \Rightarrow g \sim f$?

$f(1) = g(1) \Rightarrow g(1) = f(1)$

TRANS?

$\forall f, g, h \in A \quad f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sim h$

$f(1) = g(1) \wedge g(1) = h(1) \Rightarrow f(1) = h(1)$

l'uguaglianza è TRANSITIVA

$\mathbb{Z}$

$x \rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

è RIFF? sì

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \rho x \Rightarrow x^2 = x^2$

è SIMM?

$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \rho y \Rightarrow y \rho x$

$x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$

è TRAN

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

$x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$

l'uguaglianza è TRANSITIVA

classi di eq.

$[x] = \{x, -x\}$

$[0] = \{0\}$

RELAZIONE di eq MODULO $m \in \mathbb{N}$

$x \mid z \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z} : z = x \cdot y$

DEF: $X \equiv_m Y \Leftrightarrow m \mid X - Y$

$x, y \in \mathbb{Z}$

$1 \equiv_3 6 \quad 3 \mid 1 - 6 = -3$

$3 \mid -3$

RIFF? si

$X \equiv_m X \qquad m \mid x - x = 0$ ← divisibile per ogni $\mathbb{N}$

$0 = 0 \cdot m$

SIMM?

DEF di $m \mid x - y$

$x \equiv_m Y \qquad m \mid x - Y \qquad \boxed{\exists c \in \mathbb{Z} : x - y = c \cdot m}$

$y - x = -(x - y) = -c \cdot m = (-c) \cdot m = m \mid y - x$

$Y \equiv_m X \qquad m \mid y - x = -(x - y)$

$Y \equiv_m X$

$3 \equiv_2 1$

$2 \mid 3 - 1$

$(3 - 1) = 2 \cdot 1$ ← c

$(1 - 3) = 2 \cdot (-1)$ ← $-c$

È TRANS

$X \equiv_m Y \qquad m \mid X - Y \qquad x - Y = c \cdot m \qquad c \in \mathbb{Z}$

segnato

$Y \equiv_m Z \qquad m \mid Y - Z \qquad Y - Z = \bar{c} \cdot m \qquad \bar{c} \in \mathbb{Z}$

$x \equiv_2 z \qquad m \mid x - z \qquad x - z = (x - y) + (y - z) = c\,m + \bar{c}\,m$

$= (c + \bar{c})\,m$

$3 \mid 9 \quad e \quad 3 \mid 6$

$9 = 3 \cdot 3 \qquad 6 = 3 \cdot 2$ → quoziente

$m = 7$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_7 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 \mid x - 1\}$

$= \{1, 8, 15, 22, \dots$

se $n = 1$ di $\sim$ l'ins quoz?

$n = 0$ // //