28/09/2021

MATEMATICA DISCRETA

INSIEMI: collezione di OGGETTI def. ottime

↳ è un concetto primitivo

INSIEME, OGGETTO, CONC. APPARTENENZA

$A = \{a, b, 1\}$

$a \in A$

$b \in A$

$1 \in A$

o per ENUMERAZIONE

$A = \{x \mid x$ è un numero intero e x è divisibile per $2\}$

o per proprietà

INSIEMI che USEREMO

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

SOTTOINSIEMI un insieme i cui elementi appartengono ad un dato INSIEME

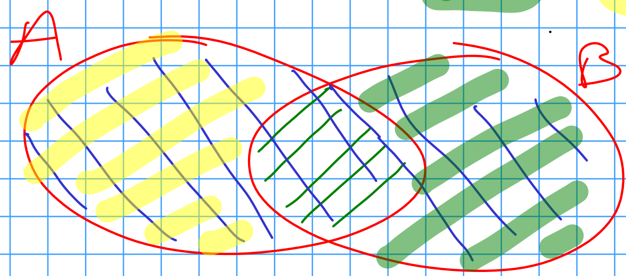
DEF: $A \subseteq B \iff \forall a \in A \Rightarrow a \in B$

DEF: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

DEF: $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

$A \Delta B = \{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}$ +



PROD CARTESIANO: siano A, B due INSIEMI il PRODOTTO CARTESIANO

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

ES

$A = \{1, 2\}$

$B = \{c, d\}$

$A \times B = \{(1,c), (1,d), (2,c), (2,d)\}$

$B \times A = \{(c,1), (c,2), (d,1), (d,2)\}$ diverse

DEF: Una relazione di A e B è un SOTTOINSIEME ρ di $A \times B$

$\rho \subseteq A \times B \nsubseteq B \times A$

"RO" in relazione con

es $\boxed{\rho = \{(1,c), (2,c), (2,d)\}} \Rightarrow 1 \,\rho\, c \qquad 1 \not\rho\, d$

RELAZIONE di un INSIEME su se STESSO

A su A ovvero sotto insiemi di $A \times A$

$A = \{1, C, \square\}$

$A \times A = \{(1,1), (1,C), (1,\square), (C,1), (C,C), (C,\square), (\square,1), \ldots\}$

se $\quad (1,1) \quad (C,C)$

$\rho = \{(1,C), (C,\square), (\square,\square)\}$ — RIFLESSIVA — NO SIMMETRICA — TRANSITIVA

se $\quad$ a b $\quad$ b c $\quad (1,\square)$

DEF
sia ρ una relazione di A su se stesso

1) ρ si dice RIFLESSIVA se
$\forall a \in A \Rightarrow a \rho a$ } per ogni elemento devono esserci le coppie (k,k) $k=k$

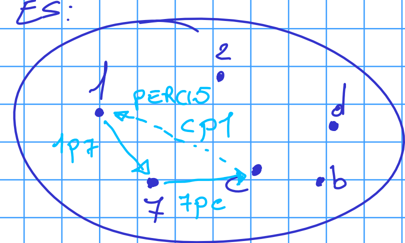
2) ρ si dice SIMMETRICA se
$\forall a, b \in A,\ a \rho b \Rightarrow b \rho a$ } se $\rho = \{(1,C), (C,1)\}$

3) ρ si dice TRANSITIVA se
$\forall a, b, c \in A,\ \underbrace{a\rho b, b\rho c}_{} \Rightarrow a \rho c$ } solo se

⚠ $\boxed{\text{devono essere soddisfatte le coppie}}$ ⚠

controllare tutti gli ELEMENTI

ES:



DEF
Una relazione RIFLESSIVA, SIMMETRICA e TRANSITIVA si dice RELAZIONE di EQUIVALENZA

DEF.
Dato un insieme A e una relazione di EQUIVALENZA su A risulta ottenibile una PARTIZIONE di A data dai BLOCCHI

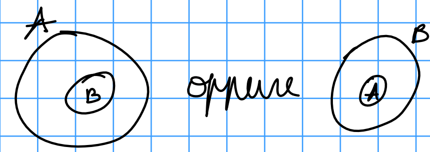
CLASSE di EQUIVALENZA di a ⟵ $[a] = \{b : a \rho b\}$ — il blocco di a è formato da tutti gli elementi in RELAZIONE con a

PARTIZIONE, dato A insieme, una PARTIZIONE è un insieme di sottoinsiemi di A
$A_1, A_2, \ldots$ TALE che $\forall i \Rightarrow A_i \neq \emptyset$
$\forall i,j \Rightarrow A_i \wedge A_j \neq \emptyset$
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$

ρ rel di EQ
se $a \rho a' \Rightarrow [a] = [a']$
Classi di EQ coincidenti

$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$

$A \neq B \iff \exists\, a \in A \overset{e}{\land} a \notin B \overset{o}{\lor} \exists\, b \in B \land b \notin A$



SUPPONENDO

$a \rho a'$

$[a] \subseteq [a']$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\{b \in A \mid a \rho b\} \qquad \{b \in A \mid a' \rho b\}$

prendere un $c \in [a]$ voglio far vedere che $c \in [a']$

$\Updownarrow$

$a \rho c$

so anche che $a \rho a' \Rightarrow a' \rho a$, $a \rho c \Rightarrow a' \rho c$ (TRANSITIVA)

$\Updownarrow$

$c \in [a']$

$[a'] \subseteq [a]$

$d \in [a'] \iff \left.\begin{array}{l} a' \rho d \\ a \rho a' \end{array}\right\} a \rho d$

$\Updownarrow$

$d \in [a]$

TEOREMA

$\underbrace{\text{SE } a' \not\rho\, a}_{\text{TESI}} \Rightarrow \underbrace{[a] \cap [a'] = \emptyset}_{\text{IPOTESI}}$

1) NEGARE LA TESI

$\exists\, x \in A$ T.C. $x \in [a] \land x \in [a']$

$a \rho x$

$a' \rho x \Rightarrow x \rho a' \Rightarrow a \rho a' \iff a' \rho a$ CONTRADIZIONE perciò la TESI È VERA

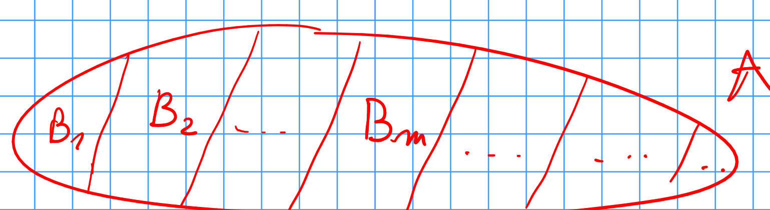
$[a] \neq \emptyset$ perché ogni elemento è in relazione con se stesso

$\|$

$\{x \in A \mid a \rho x\}$

$[a] \cup [b] \cup [c] \cup \ldots = A$

DATA una PARTIZIONE di un insieme A $\left((B_i)_{i \in I} \mid B_i \neq 0 \mid B_i \cap B_j \neq \emptyset \mid \bigcup_{i \in I} B_i = A \right.$ allora posso associare ad esso una relazione di EQUIVALENZA ρ su A definita da $x, y \in A \quad x \rho y \iff \exists\, B_i : x, y \in B_i$



ρ è riflessiva per ogni $x \in A$ $x \in B_i$ per qualche "i" allora $x \rho x$ perché x e x sono nello stesso blocco

BLOCCO di una partizione → B_i e B_j uguali o disgiunti

ρ è simmetrica: $x \rho y \Rightarrow x, y \in B_i$ per qualche "i" $\Rightarrow y, x \in B_i \Rightarrow y \rho x$

ρ è transitiva: $x \rho y \Rightarrow x, y \in B_i$ per " "i" $\Rightarrow$

$y \rho z \Rightarrow y, z \in B_j$ per " "j" $\Rightarrow$

$y \in \underbrace{B_i \cap B_j \neq \emptyset}$ $\Rightarrow B_i = B_j \Rightarrow x, y, z \in B_i = B_j =$

$\Rightarrow x, z \in B_i = B_j \Rightarrow \boxed{x \rho z}$

TH Ad ogni relazione di eq corrisponde una partizione e VICEVERSA

DEF Siano A, B due insiemi e sia $\underbrace{\rho \text{ una relazione di } A \text{ su } B}$ $\Rightarrow A \times B$ SOTTOINSIEME

ρ è detta funzione da A a B se $\underbrace{\forall a \in A \Rightarrow \exists!\, b \in B : a \rho b}$

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{x, y\}$ $\rho = \{\cancel{(1,x)}, (1,y), (2,x), (3,y)\} \subseteq A \times B$

così è una relazione

NON È rel

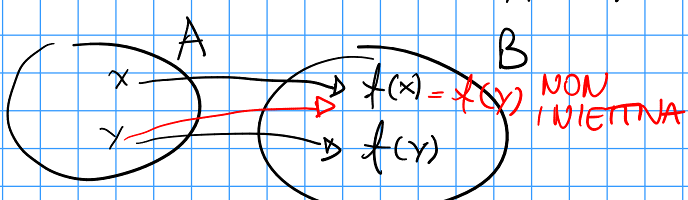
FUNZIONE $f : A \to B$ $\boxed{a f b \Leftrightarrow f(a) = b}$

INIETTIVA se

$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

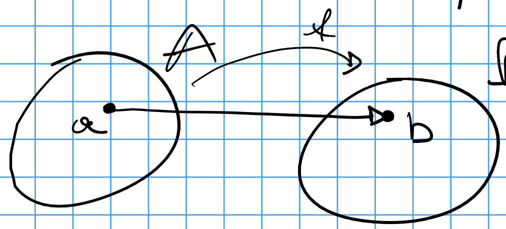
$\boxed{\forall x \neq y \in A} \Rightarrow \boxed{f(x) \neq f(y)}$

$(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in A)$



SURIETTIVA

se $\forall b \in B \Rightarrow \exists a \in A \mid f(a) = b$



BIETTIVA

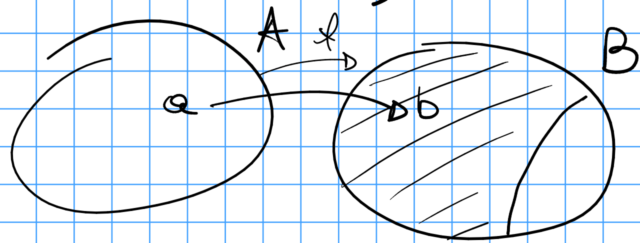
$\Updownarrow$

SUR + INIE

$\forall b \in B \Rightarrow \exists!\, a \in A \mid f(a) = b$

DEF: SIA $f : A \to B$ allora

$$\text{imm}(f) = \{ b \in B : \exists a \in A \text{ con } f(a) = b \}$$
$$= \{ f(a) : a \in A \}$$



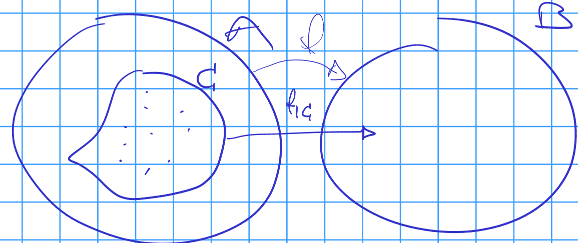
DATA $f : A \to B$ e dato $C \subseteq A$

posso considerare la FUNZIONE

$$\boxed{f_{|C} : C \to B}$$
$$c \mapsto f(c)$$

f ristretto a C

restrizione DOMINIO



POSSO sempre CONSIDERARE $f : A \to B$
$$a \mapsto f(a)$$
$$f : A \to \text{im}(f)$$

è sempre SURIETTIVA

$\forall b \in \text{im}(f) \Rightarrow \exists a \in A : f(a)$

restrizione CODOMINIO

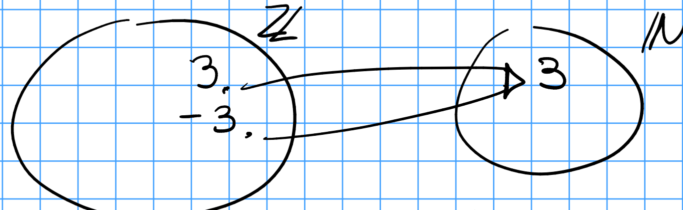
ES $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

oppure $f_{|C} : C \to \mathbb{N}_0$ $\quad C = \{-x \mid x \in \mathbb{N}_0\}$ tutti i negativi

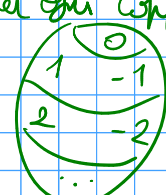
per renderla INIETTIVA $f_{|\mathbb{N}_0}$ $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

- NON è INIETTIVA perché per ESEMPIO 7, -7
- Sì è SURRIETTIVA // $\boxed{n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(n) = n \quad |n| = n}$ dim di SURIETTIVITÀ. $\text{im}(f) = \mathbb{N}_0$



$$C = \{0, 1\} \cup \{-2, -3, \dots\}$$

per ogni coppia ne scegli uno solo



FUNZ. INCLUSIONE

$A \subseteq B$

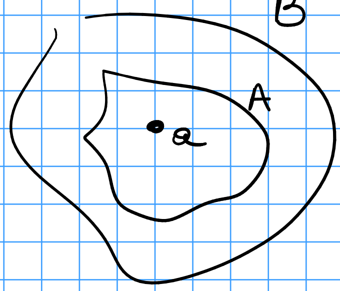
$i_A : A \to B$

$a \mapsto a$

FUNZ IDENTITÀ $\Rightarrow$ BIETTIVA

$id_A : A \to A$

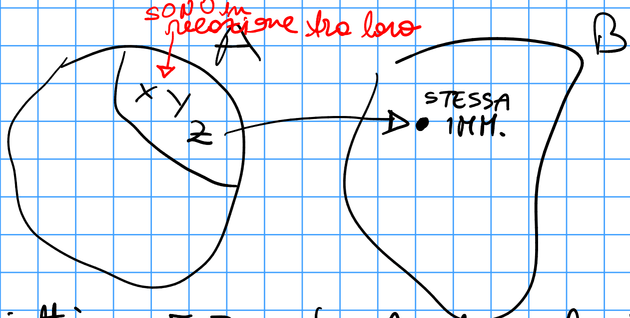
$a \mapsto a$



$f : A \to B$ posso associare ad esso una relazione di EQ ρ_f

$x \, \rho_f \, y \iff f(x) = f(y)$

sono in relazione tra loro



- RIFLESSIVA $x \, \rho_f \, y \quad f(x) = f(y) \; \forall x \in A$
- SIMM. $x \, \rho_f \, y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$ $\quad y \, \rho_f \, x$
- TRANSITIVA $x \, \rho_f \, y, \; y \, \rho_f \, z$
  se $f(x) = f(y), \; f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$ $\quad x \, \rho_f \, z$

se f è iniettiva $[x]_{\rho_f} = \{ y \in A : f(y) = f(x) \} = \{x\}$

DEF: LA partizione associata A_{ρ_f} si chiama INSIEME QUOZIENTE di A RISPETTO A f

ES

$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$

NO INIET.

NO SUR.

$f(1) = a$

$f(2) = a$

$f(3) = a$

$f(4) = c$

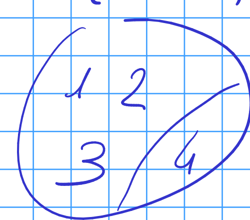
$[1]_{\rho_f} = \{1, 2, 3\}$

$[2]_{\rho_f} = \{1, 2, 3\}$

$[3]_{\rho_f} = \{1, 2, 3\}$

$[4]_{\rho_f} = \{4\}$

$A_f = \{ \{1, 2, 3\}, \{4\} \}$



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A_f \arrow[r, "{[a]}"] & im(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$1 \mapsto \{1, 2, 3\}$

$2 \mapsto \{1, 2, 3\}$

$3 \mapsto \{1, 2, 3\}$

$4 \mapsto \{4\}$

π = proiezione canonica $\quad \pi : A \to A_f$

$a \mapsto [a]$

$\tilde{f}$ $\to$ SEMPRE BIETTIVA

$\tilde{f} : A_f \to im f$

$[a] \to f(a)$

$\tilde{f}(\{1, 2, 3\}) = a$

$\tilde{f}(\{4\}) = c$

05/10/2021

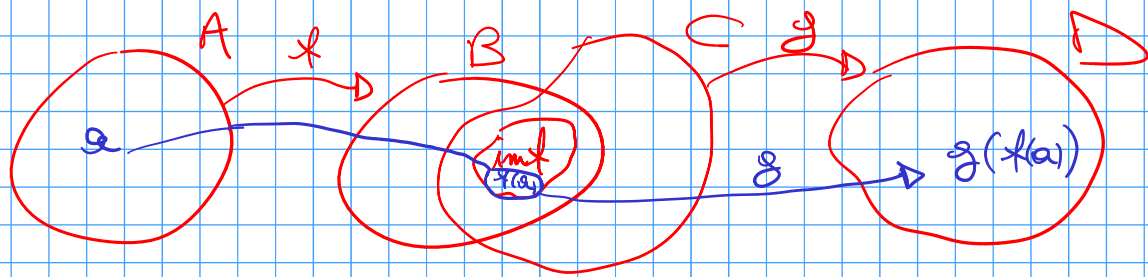
COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$f: A \to B$ con $\text{img}(f) \subseteq C$

$g: C \to D$ $\qquad \text{img}(f) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ con } f(a) = b\}$

posso considerare $g \circ f : A \to D$

DEFINITA DA $\qquad a \mapsto g(f(a))$



$\text{im} f \subseteq C$

ES

im prima contenuta nel dominio della seconda

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$

$x \mapsto |x|+1 \to \text{im} f \subseteq \mathbb{Z}$

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$x \to x^2$

$g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(|x|+1)^2$

POSSO fare il contrario?

$f \circ g \quad \text{im}(g) \subseteq \mathbb{Z}$ ✓

$f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$

$x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$

$f(x^2)$

$|x^2|+1$

DIVERSE

TH: sia $f: A \to B$ allora esiste ed è unica

$\tilde{f}$ BIIETTIVA che verifica $\boxed{i \circ \tilde{f} \circ \pi_f = f}$ (SUR + BII + INIET.)

DOVE $i: \text{im}(f) \to B$ INCLUSIONE

$b \to b$

$\pi_f : A \to A_f$

$a \mapsto [a]$

$\tilde{f}([a]) = f(a)$

TH di decomposizione CANONICA

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\pi_f"'] & B \\ A_f \arrow[r, "\tilde{f}"] & \text{im} f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$[a] \mapsto f(a)$

DEF INSIEME delle parti di A

sia dato A insieme

L'insieme delle PARTI di A

$\mathcal{P}(A)$ è l'insieme costituito

da TUTTI i sottoinsiemi di A

$A=\{1,2,3\}$ $\quad \emptyset \subseteq A$

$\boxed{\forall x \; x\in\emptyset \Rightarrow x \in A}$ DEF SOTTOINSIEME

INSIEME DELLE PARTI

$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$1 \notin \mathcal{P}(\{1,2\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\ldots\}$ $\neq 1$

$1\neq\{1\}$

$\{1\}\neq\{\{1\}\}$

$\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$

$\emptyset\in\mathcal{P}(\emptyset)$

$A\in\mathcal{P}(A) \Leftrightarrow A\subseteq A$

QUANTI insiemi ha $\mathcal{P}$ "l'insieme di parti" ? $2^{|A|}$ ← ELEMENTI DI A

DEF: SIA A un INSIEME e $\overbrace{B\subseteq A}^{\text{SOTTOINSIEME}}$ allora la FUNZIONE caratteristica di B è

$$\chi_B : A \rightarrow \{0,1\}$$
$$a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } a\notin B \\ 1 & \text{se } a\in B\end{cases}$$

ES

$A=\{1,2,3,6\}$

$B=\{1,3\}$ $\quad \chi_B(1)=1 \quad \chi_B(3)=1$

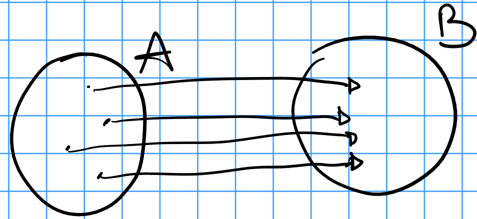
$\chi_B(2)=0 \quad \chi_B(6)=0$

DATA $f:A\rightarrow\{0,1\}$ allora ESISTE un UNICO $B\subseteq A$ tale che $\chi_B\equiv f$

$$B=\{a\in A \mid f(a)=1\}\subseteq A$$

TH: ESISTE UNA BIEZIONE TRA L'INSIEME delle funzioni $\{f:A\rightarrow\{0,1\}\}$ e l'INSIEME delle PARTI di A

TH: se A e B sono INSIEMI FINITI allora $|\{f: A \to B\}| = |B|^{|A|}$



$A=\{1,2,3\}$ $\quad B=\{x,y\}$

$1 \mapsto |B|$ POSSIBILITÀ

$2 \mapsto |B|$ POSSIBILITÀ

$3 \mapsto |B|$ POSSIBILITÀ

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} \quad \to \text{CARDINALITÀ}$$

$$\| \quad |\{f: A \to \{0,1\}\}| = |\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$$

(ES) per ESONERO

SIA $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri NATURALI $\boxed{\text{su}}$ $\qquad \rho = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\mathbb{N}^2$ DEFINIRE LA SEGUENTE RELAZIONE

$$\rho = \{(\underbrace{(x,y)}_{\mathbb{N}^2},\underbrace{(z,t)}_{\mathbb{N}^2}) \mid z = 2x\}$$

$(1,3)\,\rho\,(2,7)$

$(1,3)\,\rho\,(2,10)$

$(1,3)\,\not\rho\,(4,5)$

$(x,y)\,\rho\,(x,y)$? NO, RIFLESSIVA

es $(1,1)\,\not\rho\,(1,1)$

$\underbrace{(x,y)\,\rho\,(z,t)}_{z=2x} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{(z,t)\,\rho\,(x,y)}_{x=2z}$ NO, SIMMETRICA

$z=2x \neq x=2z$

$(2,4)\,\rho\,(4,5)$

$(4,5)\,\not\rho\,(2,4)$

$(1,2)\,\rho\,(2,5)$

$(2,5)\,\rho\,(4,20)$

$(1,2)\,\not\rho\,(4,20)$ NO, TRANSITIVA

(ES) $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $\qquad a\rho b \Leftrightarrow a\cdot b>0$

$1\rho 7$ perché $1\cdot 7>0$

$(-5)\rho(-6)$

$4\rho(-7)$

è riflessiva? $x\rho x \Leftrightarrow x\cdot x>0$

1) SI $\quad (x^2>0)$

$\forall x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

è simm? $\boxed{x\rho y} \Rightarrow xy>0 \Rightarrow yx>0 \Rightarrow \boxed{y\rho x}$

2) SI

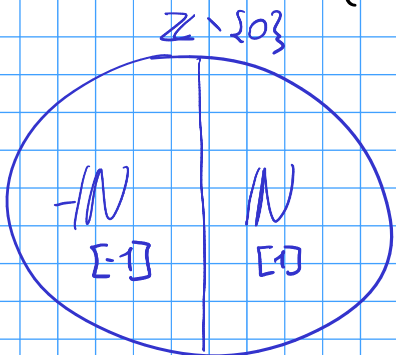
$\Downarrow$

PROSSIMA DOMANDA

PARTIZIONE associata a ρ?

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : 1 \rho x\}$? $\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x > 0\} = \mathbb{N}$ su tutti NATURALI

$[-1] : \{x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : -1 \rho x\} = \{x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \underbrace{-1x > 0}_{x<0}\} = -\mathbb{N}$



QUOZIENTE RISPETTO a ρ

$\mathbb{Z} \setminus \{0\} / \rho = \{[1], [-1]\}$

$\{\mathbb{N}, -\mathbb{N}\}$

TRANSITI $x \rho y \wedge y \rho z$

3) SI! $\Downarrow$

$xy > 0 \wedge yz > 0$

$(xy)(yz) = xy^2z > 0$

$xz \quad y^2 > 0$

$xz > 0$

$\boxed{x \rho z}$

$\mathbb{Z} \quad x \rho y \Leftrightarrow 2 \nmid x + y$

$\nmid$ NON DIVIDE

RIF? NO

$x \rho x \Leftrightarrow 2 \nmid x + x = 2x$ FALSA

ES

$1 \not\rho 1 \quad 2 \mid 1+1$ — DIVIDE

SIMM? SI

$x \rho y \quad 2 \nmid x + y \Rightarrow 2 \nmid y + x \Rightarrow y \rho x$

TRANSI? NO

$x \rho y \qquad 2 \nmid x + y$

$\Rightarrow$

$y \rho z \qquad 2 \nmid y + z$

$2 \mid \underbrace{x+y}_{\text{DISPARI}} + \underbrace{y+z}_{\text{DISPARI}} = x + 2y + z$

$(x+z) + (2y)$

$2 \mid x + z \Rightarrow \boxed{x \not\rho z}$

ES

$1 \rho 6 \quad 2 \nmid 7$

$6 \rho 11 \quad 2 \nmid 17$

MA $1 \not\rho 11 \quad 2 \mid 12$

chiedere come trovare insieme quoziente