Sprawozdanie - Laboratorium 8
Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Marta Dychała

5 maja 2021

1 Wstęp teoretyczny

Interpolacja to metoda numeryczna polegająca na przybliżeniu pewnej funkcji $f(x)$ funkcją interpolującą $F(x)$. Dla funkcji f wybierane są pewne punkty (x_i, y_i), zwane węzłami, które stają się punktami przecięcia funkcji interpolującej z interpolowaną. Następnie w punktach nie będącymi węzłami, wyznaczana jest funkcja interpolująca.

Jednym z rodzajów interpolacji jest interpolacja funkcjami sklejanymi. Polega ona na dopasowaniu do pewnej funkcji f tzw. funkcji sklejanej $s(x)$ stopnia m.

Dla funkcji f w przedziale $[a, b]$ dane jest $n + 1$ punktów takich, że:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Punkty te wyznaczają n podprzedziałów przedziału $[a, b]$ określonych jako $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n - 1$. Funkcja $s(x)$ określona na przedziale $[a, b]$ nazywana jest funkcją sklejaną stopnia m (gdzie $m \geq 1$) jeżeli:

- $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale (x_i, x_{i+1}),
- $s(x) \in C^m$.

W każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ funkcja $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m, czyli:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}, \quad x \in (x_i, x_{i+1})$$

natomiast funkcja interpolująca to kombinacja liniowa elementów bazy $\{s_i(x)\}$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x) \quad x \in [a, b]$$

Najczęściej stosuje się interpolację funkcją sklejaną stopnia trzeciego ($m = 3$). Wtedy dla funkcji $s(x)$ musi zachodzić poniższy warunek:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, ..., n; \quad n \geq 2$$

Aby wyznaczyć funkcję $s(x)$ trzeciego stopnia należy wyznaczyć $n + 3$ parametry, z czego $n + 1$ parametrów to szukane węzły. Pozostałe dwa parametry to warunki początkowe, których są trzy rodzaje:

- 1 rodzaj - warunek dla pierwszej pochodnej:

$$s^{(1)}(a + 0) = \alpha_1$$
$$s^{(1)}(b - 0) = \beta_1$$

- 2 rodzaj - warunek dla drugiej pochodnej:

$$s^{(2)}(a+0) = \alpha_2$$
$$s^{(2)}(b-0) = \beta_2$$

gdzie α i β to określone liczby.

- 3 rodzaj (stosowany dla funkcji okresowych) - warunek na 1 i 2 pochodną:

$$s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0), \quad i = 1,2$$

1.1 Wyznaczanie wartości drugich pochodnych w węzłach

Przyjmijmy oznaczenie: $M_j = s^2(x_j)$, $j = 0,1,...,n$. Zgodnie z założeniami, druga pochodna funkcji $s(x)$ jest ciągła i liniowa w każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$. Można więc zapisać:

$$\begin{array}{l} s_{i-1}^{(2)} = M_{i-2}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \\ x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h_i = x_i - x_{i-1} \end{array}$$

Całkując wyrażenie dwukrotnie, otrzymujemy:

$$s_{i-1}^{(1)}(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i} + A_i$$

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$$

gdzie stałe A_i oraz B_i wyznaczamy korzystając z warunku interpolacji:

$$\begin{array}{lcl} s_{i-1}(x_{i-1}) = M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + B_i = y_{i-1} & \rightarrow & B_i = y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \\ s_{i-1}(x_i) = M_i\frac{h_i^2}{6} + A_ih_i + B_i = y_i & \rightarrow & A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}) \end{array}$$

Pochodna funkcji $s(x)$ w punkcie x_i musi być ciągła:

$$\begin{array}{c} s_{i-1}^{(2)}(x_i) = s_i^{(1)}(x_i) \quad i = 1,2,...,n \\ s_{i-1}^{(1)}(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \\ s_i^{(1)}(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \end{array}$$

W ten sposób po porównaniu prawych stron równania uzyskujemy (n-1) równań, które można zapisać w postaci:

$$\mu_iM_{i-1} + 2M_i + \lambda_iM_{i+1} = d_i \quad i = 1,2,...,n-1$$

W którym współczynniki λ_i, μ_i oraz wyraz wolny d_i wyrażone są wzorami:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \tag{1}$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i \tag{2}$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) \tag{3}$$

Do układu równań należy dołączyć jeszcze 2 równania wynikające z dodatkowych warunków:

- 1 rodzaj - warunek dla pierwszej pochodnej:

$$\begin{array}{rl} 2M_0 + M_1 = d_0 & d_0 = \frac{6}{h_i}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1\right) \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n & d_n = \frac{6}{h_i}\left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) \end{array}$$

- 2 rodzaj - warunek dla drugiej pochodnej:

$$M_0 = \alpha_2 \quad M_n = \beta_2 \tag{4}$$

gdzie $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$s. W ten sposób otrzymujemy układ równań, który można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Po znalezieniu rozwiązań powyższego układu równań (współczynniki M_i), wartości funkcji sklejanej w każdym z punktów $x \in [x_{i-1}, x_i]$ wyznacza się zgodnie ze wzorem:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \tag{6}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

W trakcie zajęć laboratoryjnych zadaniem było napisanie programu wyznaczającego interpolację przy pomocy funkcji sklejanych będącymi wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach. Interpolacja miała być wykonana dla $x \in [-5, 5]$. W każdym przypadku węzły były rozłożone równoodlegle, zgodnie ze wzorem:

$$x_i = x_0 + i \cdot \frac{x_{max} - x_{min}}{n},$$

Ponieważ rozważany przedział, to $[-5, 5]$, w naszym przypadku $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$. Dla równoodległego położenia węzłów $h_i = const.$ co oznacza, że $\mu_i = \lambda_i = 0.5$. Ponadto m_i były drugimi pochodnymi w węzłach, dlatego też wybrano 2 rodzaj warunków początkowych opisany równaniami (4). W naszym przypadku $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, co uprościło układ równań (5):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & \cdots & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 2 & 0.5 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

gdzie współczynniki d_i zostały wyznaczone zgodnie ze wzorem (3).

W celu wyznaczenia interpolacji danej funkcji, należało napisać dwie procedury:

- `void wyzM(float *xw, float *yw, float *m, int n, float alfa, float beta` - do wyznaczenia wartości drugich pochodnych w węzłach. Funkcja ta wykorzystywała metodę Gaussa-Jordana, która posłużyła do rozwiązania układu równań (7). Argumenty funkcji `WyzM` to:
  - **xw** - wektor z położeniami węzłów,
  - **yw** - wektor z wartościami funkcji interpolowanej w węzłach. Do obliczenia współczynników m_i
  - **m** - wektor do którego zapisywane są obliczone drugie pochodne w węzłach
  - **alfa** i **beta** - wartości drugich pochodnych w skrajnych węzłach

- `float wyzSx(float *xw, float *yw, float *m, int n, float x)` - do wyznaczenia wartości funkcji sklejanej w punkcie x zgodnie ze wzorem (6) (za M_i podstawiamy m_i), gdzie argumentami są:
  - **xw** - wektor z położeniami węzłów,
  - **yw** - wektor z wartościami funkcji interpolowanej w węzłach
  - **m** - wektor z obliczonymi drugimi pochodnymi w węzłach
  - **x** - argument, dla którego jest obliczana wartość funkcji sklejanej

W obydwu procedurach wykorzystano bibliotekę numeryczną Numerical Recipes, a konkretniej pliki *nrutil.h*, *nrutil.c* oraz do rozwiązania układu równań (7) - *gaussj.c* i procedurę `gaussj()` zawartą w tym pliku.

Za pomocą powyższych procedur należało przeprowadzić interpolację funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{8}$$

oraz

$$f_2(x) = \cos(2x) \tag{9}$$

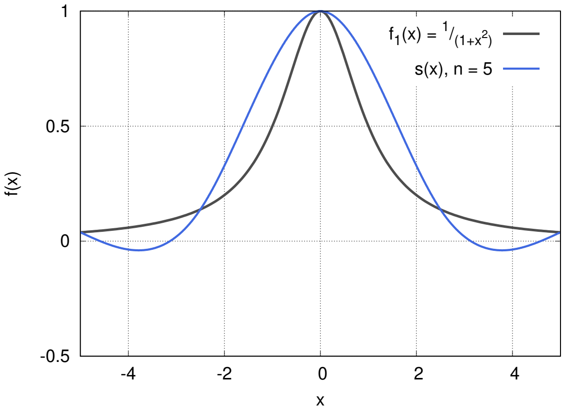
Jako warunki początkowe na obu krańcach interpolacji przyjęto $\alpha = \beta = 0$. Interpolacje wykonywano dla liczby węzłów $n = 5, 8, 21$ w przedziale $x \in [-5, 5]$. Ponadto dla liczby węzłów $n = 10$ oraz dla funkcji $f_1(x)$ w przedziale $x \in [-5, 5]$ wyznaczono wartości drugich pochodnych w węzłach, które porównano z "dokładniejszymi" wartościami liczonymi zgodnie z wzorem:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2}, \tag{10}$$

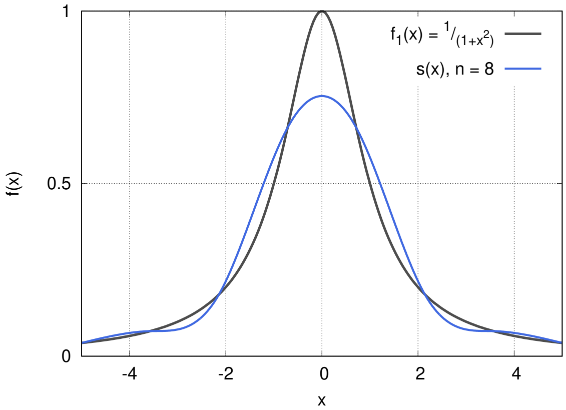
gdzie $\Delta x = 0.01$.

2.2 Wyniki

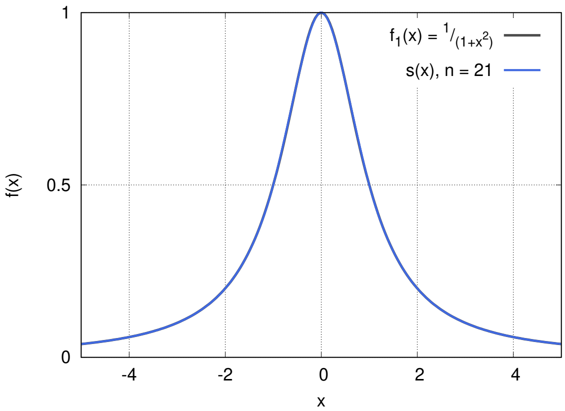
Do wygenerowania poniższych wykresów wykorzystano program Gnuplot.



(a) $n = 5$, $h = 2.5$



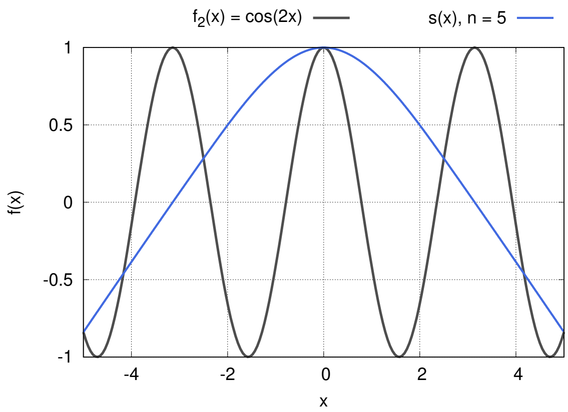
(b) $n = 8$, $h = \frac{10}{7}$



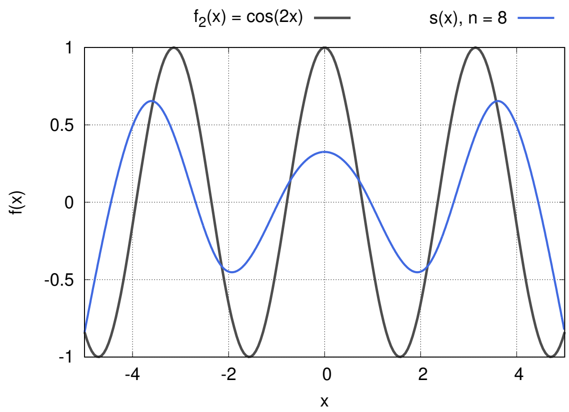
(c) $n = 21$, $h = 0.5$

Rysunek 1: Wyniki interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n węzłów.

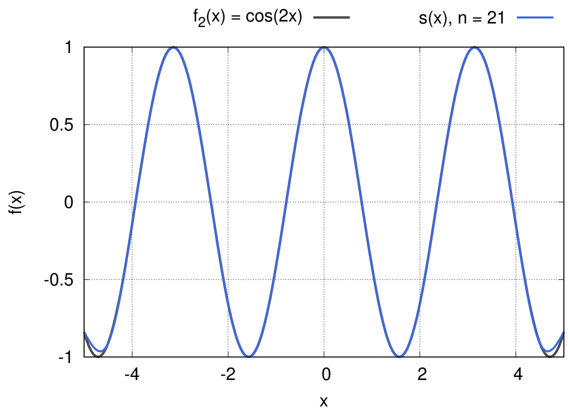
Jak widać na powyższych wykresach, wraz ze wzrostem liczby węzłów oszacowanie funkcji sklejonej do funkcji wejściowej jest coraz dokładniejsze. Dla $n = 21$ funkcja interpolująca niemal pokrywa się z funkcją interpolowaną. Pomimo zastosowania równoodległego położenia węzłów, dla funkcji $f_1(x)$ nie zaobserwowano efektu Runge'go, czyli gorszego dopasowania funkcji interpolowanej do funkcji interpolującej mimo zwiększenia liczby węzłów.



(a) $n = 5$, $h = 2.5$



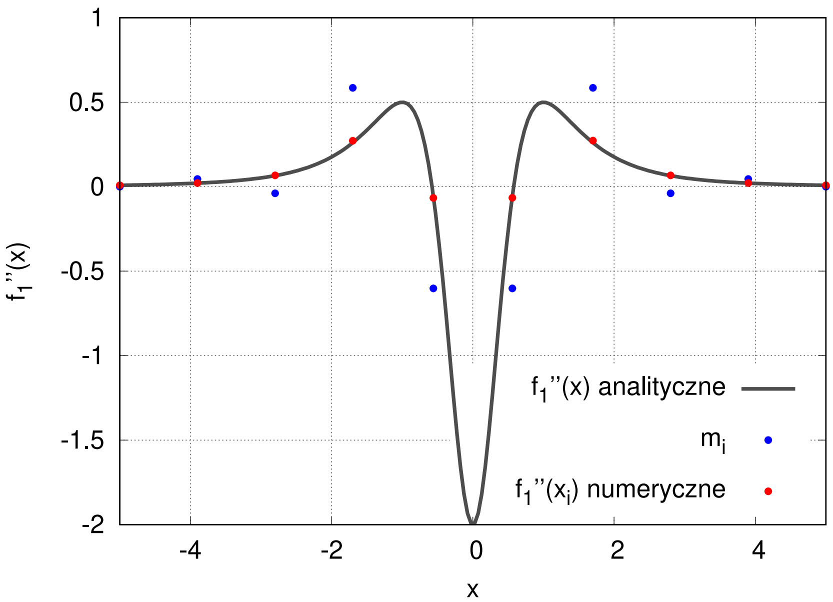
(b) $n = 8$, $h = \frac{10}{7}$



(c) $n = 21$, $h = 0.5$

Rysunek 2: Wyniki interpolacji funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n węzłów.

Także dla funkcji $f_2(x)$ dopasowanie wraz ze wzrostem liczby węzłów jest coraz bardziej dokładne, w wyniku czego efekt Runge'go nie występuje. Podobnie jak dla funkcji f_1, dla $n = 21$ funkcja interpolująca niemalże pokrywa się z interpolowaną, gorsze dopasowanie występuje jedynie w pobliżu granic przedziału.



Rysunek 3: Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla $n = 10$ węzłów porównane z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego oraz z pochodną wyprowadzoną analitycznie.

Jak widać na powyższym wykresie, dokładność obliczonych drugich pochodnych w węzłach (niebieskie kropki) rośnie wraz z oddalaniem się od środka przedziału, dlatego interpolacja funkcji $f_1(x)$ była mniej dokładnie wyznaczona na środku przedziału, co jest szczególnie widoczne na Rysunku 1b, gdzie środkowy wierzchołek otrzymanej krzywej jest "znacznie niżej" niż w oryginalnej funkcji.

3 Wnioski

Interpolacja funkcjami sklejanymi jest wyjątkowo skuteczną metodą znajdowania przybliżeń danych funkcji. Wraz ze zwiększoną liczbą węzłów zwiększa się także dokładność dopasowania funkcji, a efekt Runge'go nie pojawił się w żadnym przypadku pomimo zastosowania węzłów równoodległych. Okazuje się. że dla metody interpolacji za pomocą funkcji sklejanych równoodległe położenie węzłów jest wystarczające, aby przy odpowiednio dużej liczbie węzłów uzyskać satysfakcjonujące przybliżenie danej funkcji. Omawiana metoda interpolacji okazuje się być bardziej skuteczna od interpolacji Newtona omawianej w poprzednim sprawozdaniu, gdzie efekt Runge'go był zaobserwowany dla f_1 na krańcach przedziału.