Sprawozdanie - Laboratorium 9
Aproksymacja w bazie wielomianów Grama

Marta Dychała

12 maja 2021

1 Wstęp teoretyczny

Aproksymacja to metoda numeryczna polegająca na dopasowaniu pewnej funkcji do wartości określonych w pewnych punktach. W przeciwieństwie do interpolacji, dla której potrzebne jest określenie punktów wspólnych zarówno dla oryginalnej funkcji jak i funkcji dopasowywanej (węzłów), tak dla aproksymacji punkty te są jedynie pomocnicze, a otrzymana funkcja nie musi pokrywać się z punktami, a jedynie z ich przybliżeniem. Omawiana własność aproksymacji sprawia, że metoda ta jest przydatna przy określaniu przebiegu funkcji z danymi obarczonymi błędem pomiaru.

Jednym z rodzajów aproksymacji jest aproksymacja średniokwadratowa na dyskretnym zbiorze $n+1$ punktów. Zakładając, iż dane jest $n+1$ punktów, które tworzy pewną funkcję $f(x)$, której przybliżenie chcemy odnaleźć, to funkcja $F(x)$ jest aproksymacją funkcji $f(x)$ w punkcie x wtedy i tylko wtedy, kiedy zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów błąd oszacowania funkcji jest jak najmniejszy:

$$||F(x) - f(x)|| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2,$$

gdzie $w(x_i)$ to waga funkcji w danym punkcie x_i.

Aproksymację średniokwadratową można przeprowadzać w bazie wielomianów, zwanymi także wielomianami Grama, które tworzą ciąg funkcyjny:

$$\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$$

Wielomiany te są ortogonalne, tj. dla każdego z n węzłów aproksymacji $(x_1, x_2, ..., x_n)$ spełniony jest warunek:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 0, \quad j \neq k$$

oraz nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i) > 0.$$

Narzucając warunki początkowe:

$$\varphi_{-1}(x_k) = 0 \quad \varphi_0(x_k) = 1 \tag{1}$$

kolejne wielomiany ortogonalne można wyznaczyć rekurencyjnie - na podstawie dwóch poprzednich - zgodnie ze wzorem:

$$\varphi_{j+1}(x_k) = (x_k - \alpha_{j+1})\varphi_j(x_k) - \beta_j\varphi_{j-1}(x_k) \quad j = 0, 1, 2..., n-1, \tag{2}$$

gdzie n to liczba węzłów użyta do aproksymacji, natomiast współczynniki α_{j+1} oraz β_j możemy wyznaczyć jako:

$$\alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i\varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_j^2(x_i)} \tag{3}$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i \varphi_{j-1}(x_i)\varphi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{j-1}^2(x_i)} \tag{4}$$

Znając postaci wielomianów w węzłach, wartość funkcji F w punkcie x będącą aproksymacją pewnej funkcji f obliczamy ze wzoru:

$$F(x_k) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_j}{s_j} \varphi_j(x_k), \tag{5}$$

gdzie m to maksymalny stopień wielomianu Grama w bazie użytego do aproksymacji danej funkcji, natomiast współczynniki c_j oraz s_j wyrażone są wzorami:

$$c_j = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \varphi_j(x_i) \tag{6}$$

$$s_j = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_j^2(x_i) \tag{7}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

W trakcie zajęć laboratoryjnych zadaniem było znalezienie aproksymacji funkcji:

$$f(x) = sin\left(\frac{14\pi x}{x_{max} - x_{min}}\right)\left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \tag{8}$$

Przyjęto następujące parametry:

- $x_{min} = -4$,
- $x_{max} = 4$,
- $x_0 = 2$,
- $\sigma = \frac{x_{max} - x_{min}}{16}$.

Ponadto na funkcję f nałożono niewielkie zaburzenie stochastyczne (szum) $C_{rand}(x)$, czyli w tym przypadku do każdej wartości w węźle dodano liczbę pseudolosową z przedziału $[-0.1, 0.1]$, w wyniku czego jej ostateczną postać opisywał poniższy wzór:

$$f_{szum}(x) = f(x) + C_{rand}(x). \tag{9}$$

Aproksymacja miała być znaleziona z wykorzystaniem wielomianów Grama w przedziale $x \in [x_{min}, x_{max}]$, na siatce równoodległych węzłów. Węzły były indeksowane od zera, w wyniku czego położenie i-tego węzła można było obliczyć wykorzystując równanie:

$$x_i = x_{min} + i \cdot \frac{x_{max} - x_{min}}{n-1}$$

Do wyznaczenia wielomianów bazy ortogonalnej $\varphi_j(x_k)$ użyto dwuwymiarowej tablicy o wymiarach $m + 1 \times N$, gdzie na podstawie warunków początkowych (1) zostały wyznaczone wielomiany:

$$\varphi_0(x_k) = 1 \quad \varphi_1(x_k) = (x_k - \alpha_1)\varphi_0(x_k)$$

Kolejne wielomiany $\varphi_j(x_k)$ zostały wyznaczone za pomocą równania (2), gdzie współczynniki α_{j+1} oraz β_j zostały wyznaczone zgodnie ze wzorami (3) i (4). Ponieważ wartości parametrów α_{j+1} oraz β_j nie są zależne od m, tablicę wielomianów wypełniono tylko raz, dla $m = 50$.

Po obliczeniu wielomianów Grama, wyznaczono postaci pierwszych siedmiu wielomianów Grama stosując normę:

$$||\varphi_j(x_k)|| = \frac{\varphi_j(x_k)}{\varphi_j(x_0)}$$

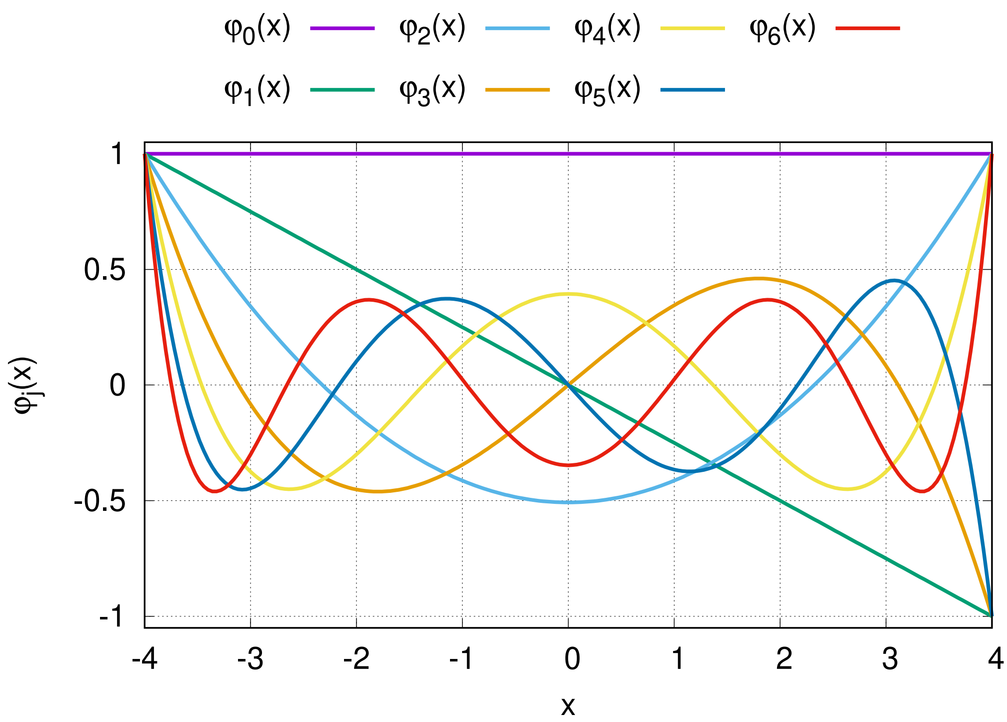
tak aby ich wartości zmieniały się w zakresie $[-1, 1]$.

Następnie dokonano aproksymacji funkcji (8) z wprowadzonym szumem dla $m = 10, 30, 50$. Każdorazowo operacja ta była wykonywana dla $N = 201$ węzłów, a za wagę przyjęto $w(x) = 1$. Do obliczenia wartości w węzłach dopasowywanej funkcji $F(x)$ posłużono się równaniem (5), gdzie współczynniki c_j oraz s_j obliczono na postawie wzorów (6) i (7).

2.2 Wyniki

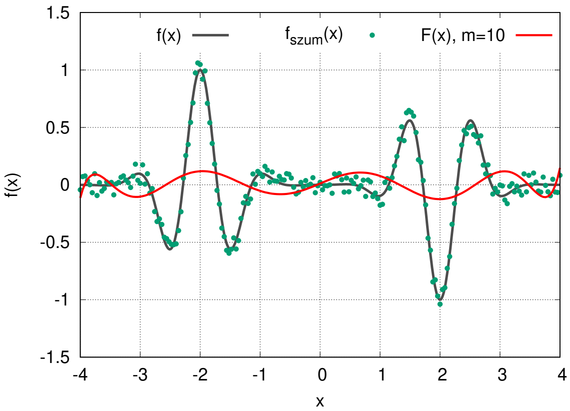
Do wygenerowania wszystkich wykresów użyto programu Gnuplot.

Poniżej znajduje się pierwsze siedem wielomianów ortogonalnych Grama $\varphi_j(x)$ stopnia j:

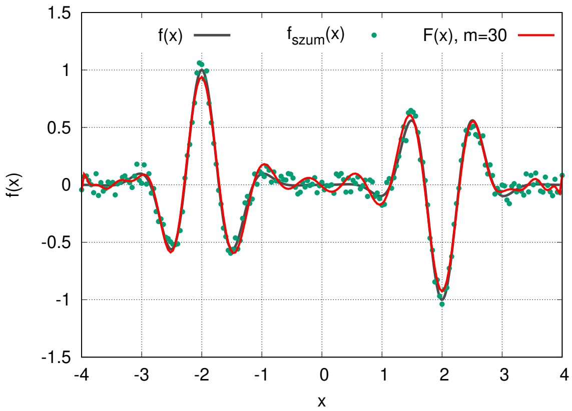


Rysunek 1: Wykresy pierwszych siedmiu wielomianów Grama stopnia j na przedziale $[-4, 4]$.

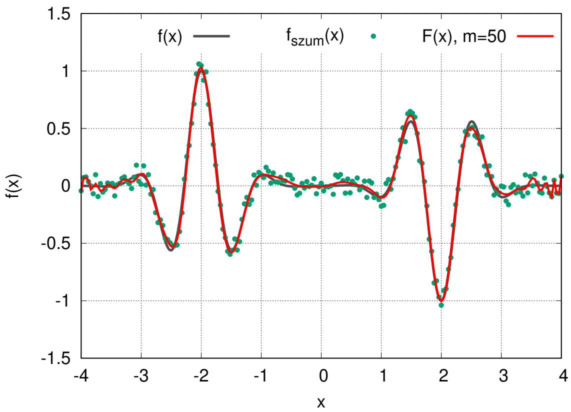
Kolejne wykresy przedstawiają aproksymację funkcji (8) z wprowadzonym szumem dla $m = 10, 30, 50$:



(a) $m = 10$



(b) $m = 30$

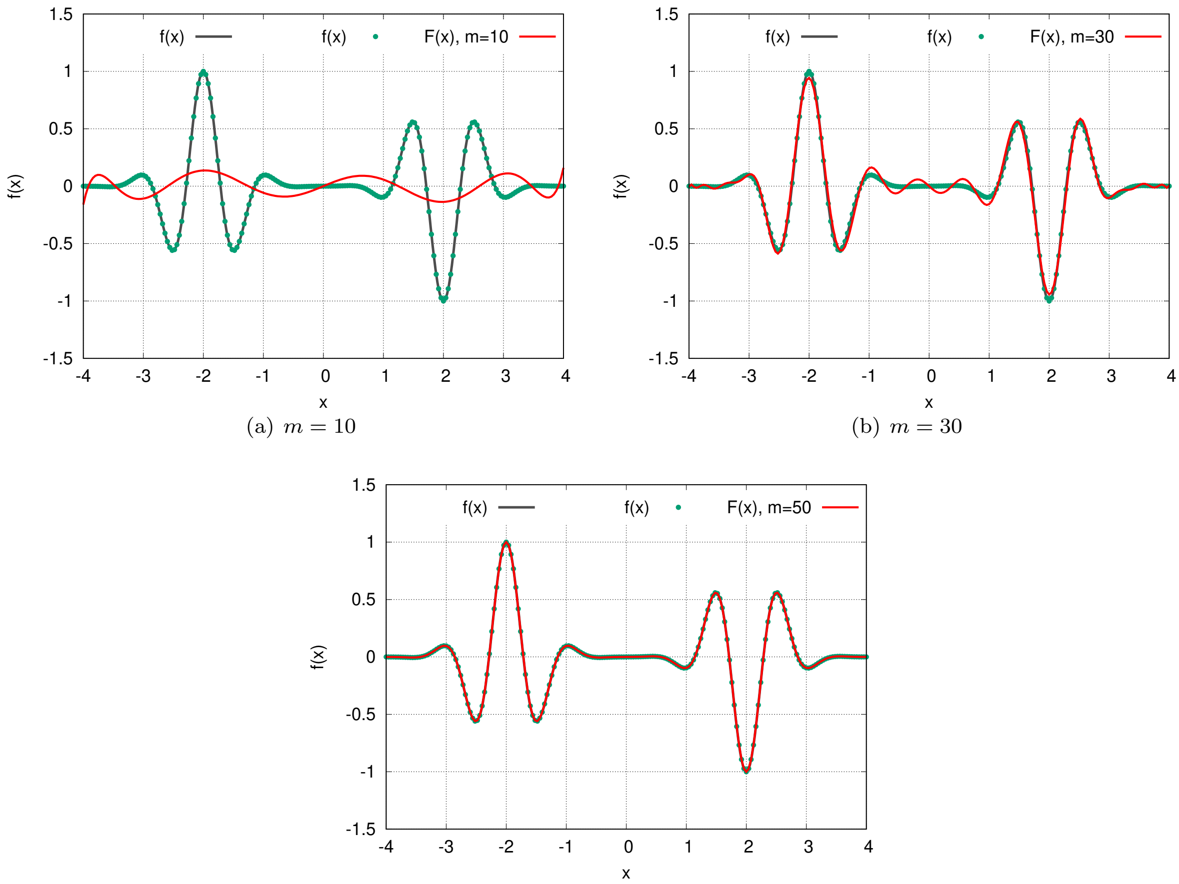


(c) $m = 50$

Rysunek 2: Wyniki aproksymacji funkcji $f_{szum}(x)$ za pomocą $m + 1$ wielomianów Grama.

Jak widać na powyższych wykresach, wraz ze wzrostem parametru m rośnie dokładność wyznaczenia oryginalnej funkcji w pobliżu jej ekstremów, jednakże w obszarach gdzie funkcja $f(x)$ jest stała, pojawia się coraz więcej niewielkich oscylacji, co jest szczególnie widoczne na krańcach przedziału dla $m = 50$. Także i na środku przedziału dla $m = 30$ pojawiają się oscylacje w wartościach funkcji $F(x)$, jednak "zmniejszają się" one wraz ze wzrostem m, w wyniku czego dla $m = 50$ wykres $F(x)$ na środku przedziału niemalże pokrywa się z wykresem $f(x)$.

Ponadto w celu zbadania skuteczności aproksymacji w bazie wielomianów Grama, dokonano aproksymacji funkcji (8) bez nałożonego szumu dla $m = 10, 30, 50$:



(a) $m = 10$

(b) $m = 30$

(c) $m = 50$

Rysunek 3: Wyniki aproksymacji funkcji $f(x)$ bez wprowadzonego szumu za pomocą $m + 1$ wielomianów Grama.

Okazuje się, że bez wprowadzonego szumu przybliżenie funkcji $f(x)$ zostało znalezione szybciej, a przy $m = 50$ wykres funkcji $F(x)$ wręcz pokrywa się z teoretycznym.

3 Wnioski

Metoda aproksymacji w bazie ortogonalnych wielomianów Grama okazuje się być bardzo skuteczną metodą znajdowania zależności między otrzymanymi danymi. Im większa jest liczba wielomianów Grama użyta do aproksymacji, tym bardziej dokładne jest przybliżenie danej funkcji. Wpływ na skuteczność aproksymacji ma także stopień rozproszenia danych - im lepiej ułożenie punktów obrazuje przebieg pewnej funkcji, tym szybciej można znaleźć jej przybliżenie.

Porównując ze sobą wykresy z Rysunku 2 oraz 3 można dojść do wniosku, że szukana funkcja jest wyznaczana z dość dużą dokładnością nawet przy niewielkim rozproszeniu danych, które okazuje się mieć wpływ na otrzymane przybliżenie dopiero przy większych wartościach m. W obydwu przypadkach dla $m = 10$ otrzymane przebiegi funkcji $F(x)$ niewiele się od siebie różnią; dopiero przy $m = 30$ można dostrzec niewielkie różnice między dwoma przypadkami, zwłaszcza na krańcach przedziału. Dla $m = 50$ otrzymane przybliżenie na postawie danych obarczonych szumem różni się jedynie na krańcach przedziałów od przybliżenia otrzymanego na podstawie funkcji bez szumu.