

SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM 1

Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Marta Dychała

10 marca 2021

1 Wstęp teoretyczny

Jedną z metod bezpośrednich rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych (UARL) jest metoda Gaussa-Jordana. Metody tej używa się przy macierzowej postaci układu równań liniowych opisaną równaniem:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

gdzie:

- \mathbf{A} - macierz współczynników,
- \mathbf{x} - macierz niewiadomych,
- \mathbf{b} - macierz wyrazów wolnych.

Aby w powyższym układzie równań można było użyć metody Gaussa-Jordana, należy rozszerzyć macierz \mathbf{A} o macierz \mathbf{b} . W ten sposób otrzymamy macierz \mathbf{C} , składającą się z dwóch części - macierzy współczynników (część \mathbf{A}) oraz macierzy wyrazów wolnych (część \mathbf{b}):

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

W celu znalezienia rozwiązania UARL przekształcamy część \mathbf{A} na macierz jednostkową, czyli na taką, której przekątna zawiera wyłącznie same jedynki, zaś poza nią znajdują się same zera. Macierz \mathbf{C} modyfikujemy po wierszach, tj. możemy dodawać do siebie wiersze, zamieniać je miejscami lub mnożyć przez skalar różny od zera. W efekcie modyfikując macierz \mathbf{C} , równocześnie dokonujemy przekształceń w częściach \mathbf{A} i \mathbf{b} do momentu uzyskania macierzy poniżej:

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{array} \right]$$

Kiedy macierz \mathbf{A} stanie się macierzą jednostkową, ostatnia kolumna macierzy \mathbf{C} staje się zbiorem rozwiązań UARL:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_m = c_m \end{cases}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Głównym celem zajęć laboratoryjnych było rozwiązanie metodą Gaussa-Jordana równania oscylatora harmonicznego:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \quad (1)$$

Aby można było rozwiązać równanie (1) za pomocą omawianej metody, należy wyprowadzić zależność między kolejnymi niewiadomymi. W tym celu wykorzystuje się przybliżenie $\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2}$ dane wzorem:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \approx \frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2}. \quad (2)$$

W równaniu (2) przyjmujemy, że $\Delta t = h$, $t = ih$ oraz $x_i = x(ih)$. W ten sposób korzystając z równania (1), wyprowadzamy wzór pozwalający na wyznaczenie wartości x_{i+1} w zależności od x_i oraz x_{i-1} :

$$\begin{aligned} -\omega^2 x(t) &= \frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2}, \\ -\omega^2 h^2 x(t) &= x(t+h) - 2x(t) + x(t-h), \\ x((i+1)h) + (\omega^2 h^2 - 2)x(ih) + x((i-1)h) &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymany wzór jest prawdziwy dla $i > 0$:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i - x_{i-1} = 0. \quad (3)$$

Do wyznaczenia jednoznacznego rozwiązania potrzebujemy jeszcze informacji o wartościach x_0 oraz x_1 . Są one określone poprzez warunki początkowe: $x_0 = A$, gdzie A to początkowe wychylenie z położenia równowagi, natomiast x_1 otrzymujemy ze wzoru na wartość prędkości początkowej ciała: $\frac{x_1 - x_0}{h} = v_0$. Na podstawie tak przyjętych założeń, równanie (2) dla pierwszych siedmiu kroków czasowych przyjmuje następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.2 Treść zadania

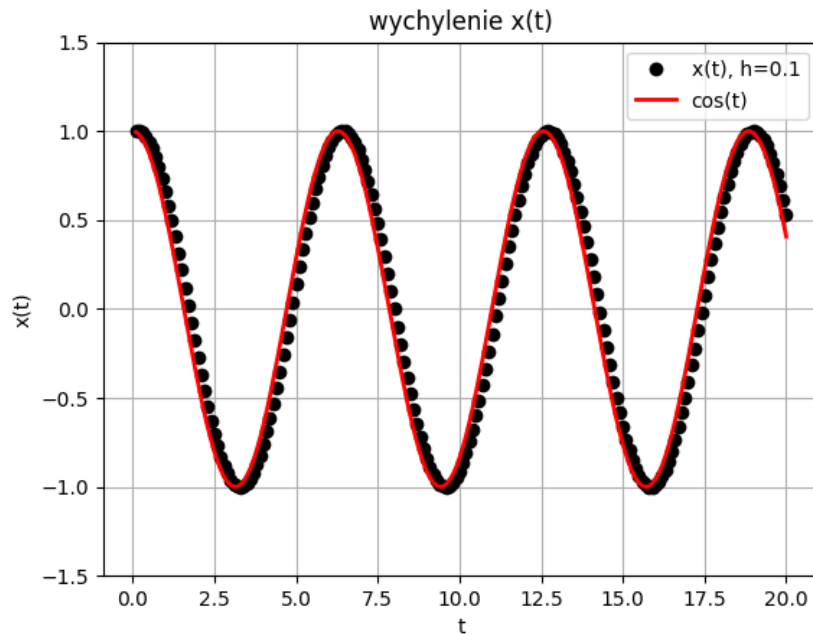
W trakcie zajęć mieliśmy za zadanie rozwiązać układ (4) dla pierwszych dwustu kroków oraz narysować zależność $x(t)$ wychylenia z położenia równowagi od czasu. Przyjęliśmy następujące założenia:

- częstość kołowa $\omega = 1$,
- prędkość początkowa $v_0 = 0$,
- początkowe wychylenie z położenia równowagi $A = 1$,
- krok całkowania $h = 0.1$,
- $N = 200$ kroków czasowych.

2.3 Wyniki

Na podstawie warunków początkowych oraz równania (3) utworzyliśmy kolejno macierz wyrazów wolnych \mathbf{b} oraz macierz współczynników \mathbf{M} . Następnie wykorzystaliśmy utworzone macierze w procedurze `gaussj()`, aby rozwiązać układ równań (4) metodą Gaussa-Jordana. Procedura użyta do zrealizowania zadania pochodzi z biblioteki Numerical Recipes.

Wynik działania utworzonego programu zapisaliśmy do pliku tekstowego, na podstawie którego wygenerowaliśmy poniższy wykres. Ponadto porównaliśmy nasz rezultat z rozwiązaniem analitycznym równania (1), $x(t) = A \cos(\omega t)$:



Rysunek 1: Wykres zależności wychylenia z położenia równowagi od czasu w oscylatorze harmonicznym. Czarnymi kropkami oznaczono przybliżenie rozwiązania równania (1) uzyskane za pomocą metody Gaussa-Jordana, natomiast czerwoną linią - rozwiązanie analityczne równania (1).

3 Wnioski

Za pomocą metody Gaussa-Jordana można dokonywać przybliżeń dowolnych funkcji i to z dużą dokładnością. Jak widać na Rysunku 1, uzyskany przez nas wynik niemalże pokrywa się z teorią. Jeśli zmniejszylibyśmy h i zwiększylibyśmy N , to nasze przybliżenie byłoby jeszcze bardziej precyzyjne. Dokładność wyznaczenia wykresu funkcji zależy w dużej mierze od wielkości pojedynczego kroku oraz od ilości kroków.