

SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM 4

Macierzowy (niesymetryczny) problem własny - wyznaczanie modów własnych niejednorodnej struny w 1D

Marta Dychała

6 kwietnia 2021

1 Wstęp teoretyczny

Wartością własną λ macierzy A nazywa się liczbę, dla której istnieje niezerowy wektor x spełniający równanie:

$$Ax = \lambda x, \quad (1)$$

gdzie \mathbf{A} to macierz kwadratowa stopnia n . Po przekształceniu równania (1) otrzymuje się warunek, który musi spełniać każda wartość własna macierzy \mathbf{A} :

$$Ax - \lambda x = 0,$$

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Ponieważ z definicji wektor x musi być niezerowy, oznacza to że macierz $A - \lambda I$ musi być macierzą osobliwą:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2)$$

Wzór (2) zwany jest wielomianem charakterystycznym macierzy \mathbf{A} . Wartości własne λ są zatem pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy \mathbf{A} .

Wektor x spełniający równanie (1) nazywa się wektorem własnym macierzy \mathbf{A} odpowiadającym wartości własnej λ . Jedną z własności wektora własnego jest fakt, że może być on przemnożony przez dowolną stałą i nadal spełnia on równanie własne.

Równanie (1) zwane jest także problemem własnym. Jego rozwiązanie jest często konieczne przy tworzeniu modeli matematycznych niektórych zjawisk fizycznych, takich jak na przykład wyznaczanie częstości drgań własnych struny.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Celem laboratorium było wyznaczenie częstości drgań własnych struny (ω), której wychylenie opisane jest w funkcji położenia i czasu $\psi(x, t)$. W tym celu należało przekształcić poniższe równanie falowe w problem własny:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3)$$

Równanie (3) jest funkcją dwóch zmiennych. Aby można było na jego podstawie wyznaczyć wielomian charakterystyczny, należy to równanie uzależnić od jednej zmiennej. Dlatego też najpierw dokonuje się

separacji zmiennych x i t podstawiając $\psi(x, t) = u(x) \cdot \theta(t)$ oraz dzieląc obydwie strony równania przez iloczyn $u\theta$:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{1}{u} = \text{const} = -\omega^2,$$

gdzie ω to częstość kołowa drgań; w ten sposób otrzymuje się równanie uzależnione tylko od zmiennej x :

$$-\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \omega^2 u.$$

Kolejnym krokiem jest wprowadzenie siatki równoległych węzłów czyniąc założenia, że $x = x_i$, $\rho(x) = \rho_i$, $u(x) = \omega^2 u_i$, natomiast odległość między węzłami Δx wynosi:

$$\Delta x = \frac{L}{n+1},$$

gdzie L to długość struny. Uczyniono tutaj założenie iż struna jest przymocowana w punktach $\pm \frac{L}{2}$, z czego wynika, że położenie w przestrzeni wyrażone jest wzorem:

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x(i+1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Za pomocą tak zdefiniowanej odległości między węzłami można dokonać dyskretyzacji równania (3) podstawiając trójpunktowy iloraz różnicowy za drugą pochodną:

$$-\frac{N}{\rho_i} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \omega^2 u_i,$$

Ponieważ ω^2 jest pewną wartością liczbową, można więc dokonać podstawienia $\lambda = \omega^2$. W ten sposób otrzymuje się problem własny, którego wartościami własnymi są kwadraty szukanych częstości kołowych drgań, natomiast odpowiadające im wektory własne są funkcjami wychylenia $u(x)$:

$$\mathbf{A}u = \lambda u, \quad (4)$$

Elementy macierzy \mathbf{A} ze wzoru (4) są zdefiniowane następująco:

$$A_{i,j} = (-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}) \cdot N/(\rho_i \Delta x^2), \quad (5)$$

gdzie $\delta_{i,j}$ jest deltą Kroneckera:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

2.2 Przebieg ćwiczenia

Równanie (3) zostało rozwiązane dla następujących parametrów:

- naciąg struny $N = 1$,
- długość struny $L = 10$,
- gęstość liniowa struny: $\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2$, gdzie α to współczynnik określający gęstość środka struny,
- wymiar macierzy \mathbf{A} : $n = 200$.

Ze wzorów (5) i (6) wynika następujący przepis na określony element macierzy \mathbf{A} :

$$A_{i,j} = \begin{cases} \frac{2N}{\rho_i \Delta x^2} & i = j \\ \frac{-N}{\rho_i \Delta x^2} & j = i+1 \vee j = i-1 \\ 0 & j > i+1 \vee j < i-1 \end{cases} \quad (7)$$

Macierz \mathbf{A} utworzona na podstawie wzoru (7) była dla $\alpha > 0$ macierzą niesymetryczną¹, dlatego też do wyznaczenia wartości własnych oraz odpowiadającym im wektorom własnym wykorzystano funkcje z biblioteki GSL przeznaczone do pracy z macierzami niesymetrycznymi:

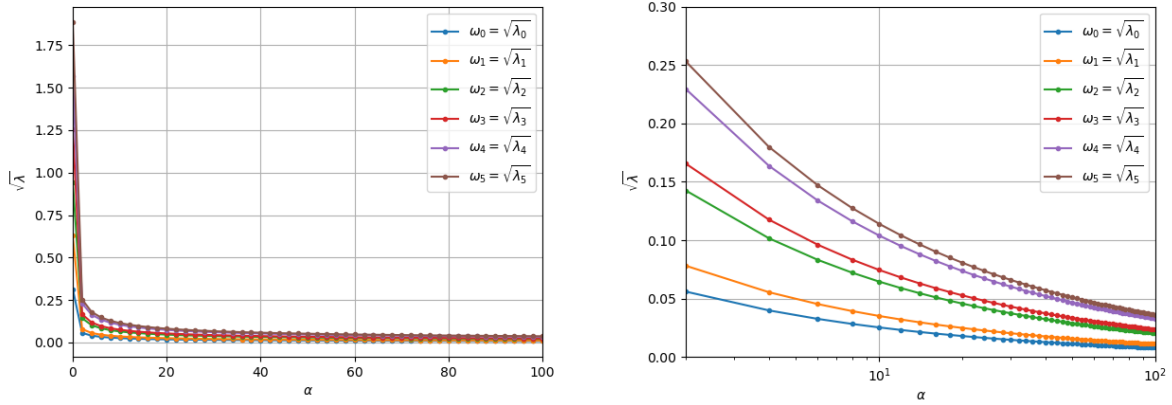
¹Macierz niesymetryczna - macierz kwadratowa \mathbf{A} stopnia n , która jest różna od swojej macierzy transponowanej; innymi słowy istnieje co najmniej jedna para elementów macierzy \mathbf{A} spełniająca nierówność: $a_{ij} \neq a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

- `gsl_eigen_nonsymmv(gsl_matrix *A, gsl_vector_complex *eval, gsl_matrix_complex *evec, gsl_eigen_nonsymmv_workspace *w)` - do wyznaczenia wartości własnych macierzy **A**, które po wykonaniu procedury znajdują się w wektorze **eval**, zaś wektory własne odpowiadające wartościom własnym znajdują się w macierzy **evec**.
- `gsl_eigen_nonsymmv_sort(gsl_vector_complex *eval, gsl_matrix_complex *evec, gsl_eigen_sort_t sort_type)` - do posortowania wartości własnych (wektor **eval**) oraz odpowiadającym im wektorom własnym (macierz **evec**) w kolejności rosnącej (wartość argumentu `sort_type` wynosi **GSL_EIGEN_SORT_ABS_ASC**).

2.3 Wyniki

Po obliczeniu potrzebnych danych, otrzymane wyniki zapisano do plików tekstowych, na podstawie których za pomocą bibliotek języka Python Matplotlib oraz NumPy sporządzono odpowiednie wykresy.

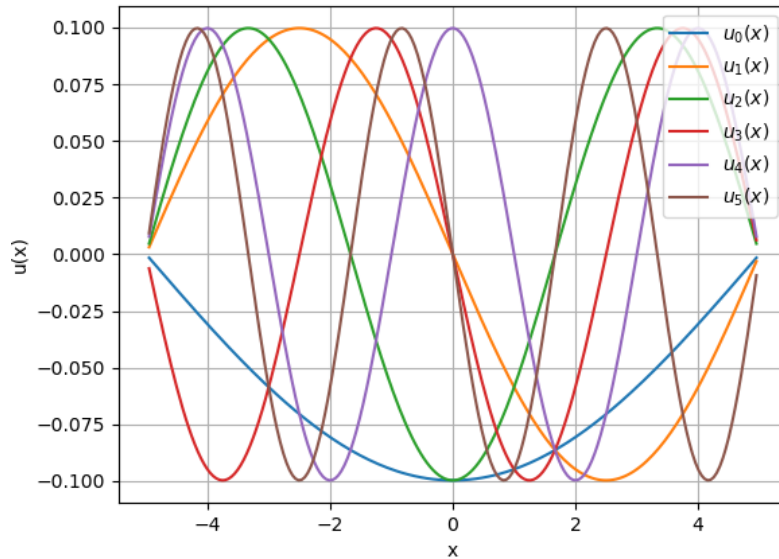
Pierwszy rodzaj wykresu to zależność wartości sześciu najmniejszych pierwiastków równania (3) od parametru α . W celu sporządzenia wykresów wykonywano obliczenia równania (7) dla $\alpha \in [0; 100]$ przyjmując krok $\Delta\alpha = 2$. Dla każdej wartości α wybrano sześć najmniejszych pierwiastków z wartości własnych, w wyniku czego utworzyły one sześć wykresów $\omega(\alpha)$:



Rysunek 1: Wartości pierwiastków z sześciu najmniejszych wartości własnych w funkcji $\omega(\alpha)$, gdzie $\omega = \sqrt{\lambda_k}$ w skali liniowej (po lewej) oraz logarytmicznej (po prawej).

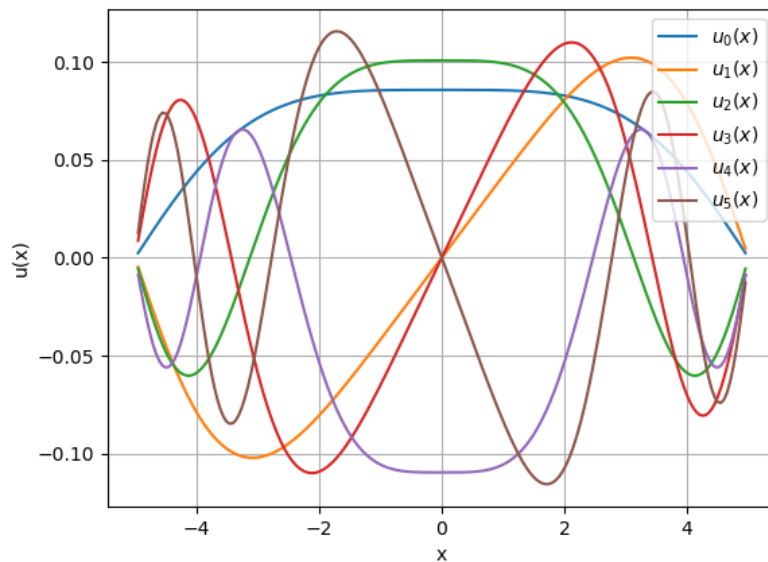
Na Rysunku 1. można zauważyć, że im większa jest gęstość struny, tym mniejsza jest częstość kołowa drgań, która wraz ze zwiększaniem się parametru α maleje coraz łagodniej.

Kolejnym rodzajem wykresu było wychylenie punktu od osi x w funkcji $u(x)$. Wykresy sporządzono na podstawie wektorów własnych odpowiadających sześciu najmniejszym wartościom własnym. Jako parametr α przyjęto na początku wartość $\alpha = 0$:



Rysunek 2: Wektory własne odpowiadające sześciu najmniejszym wartościom własnym dla $\alpha = 0$.

a następnie $\alpha = 100$:



Rysunek 3: Wektory własne odpowiadające sześciu najmniejszym wartościom własnym dla $\alpha = 100$.

Otrzymane wyniki widoczne na Rysunku 2. oraz 3. są zgodne z teoretycznymi; mogą się one jedynie

różnić jedynie znakiem.

Jak można zauważyć, w zależności od wartości parametru α otrzymane wektory własne wykazują różne prawidłowości. Dla przypadku z rysunku 2. struna ma jednorodną gęstość, co sprawia, że wykresy funkcji $u_n(x)$ mają postać $n + 1$ połówek wykresu funkcji sinus. Natomiast dla przypadku z rysunku 3., gdzie gęstość struny nie jest jednorodna, wykresy $u_n(x)$ dla parzystych n są spłaszczone na środku, natomiast dla nieparzystych n wykresy mają postać nieregularnej sinusoidy o zwiększonej amplitudzie drgań w pobliżu środka struny - są to skutki zwiększonej gęstości na środku struny.

3 Wnioski

Wartość parametru α dla funkcji gęstości znacząco wpływa na formowanie się wektorów i wartości własnych z niesymetrycznego problemu własnego.

W pierwszej grupie wykresów mogliśmy zaobserwować jak parametr α wpływa na częstość drgań; im większa jego wartość, tym mniej gwałtownie maleje wykres funkcji $\omega(\alpha)$.

Postać funkcji gęstości struny okazuje się być szczególnie istotna przy obliczaniu wektorów własnych, znacząco wpływając na kształt ich wykresów, co można zauważyć na dwóch ostatnich grupach wykresów. Dla $\alpha = 0$ funkcja gęstości jest funkcją stałą - $\rho(x) = 1$ - w wyniku czego struny drgają w sposób sinusoidalny, niczym nie zaburzony. Natomiast kiedy funkcja gęstości nie jest liniowa - tak jak to jest chociażby w przypadku $\alpha = 100$ - wyraźnie można dostrzec zniekształcenia drgań struny przez jej niejednorodną gęstość - $\rho(x) = 1 + 400x^2$. Powstające wypłaszczenie na wykresach o parzystych indeksach jest wynikiem zwiększonej gęstości w środku struny.