Sprawozdanie - Laboratorium 7
Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Marta Dychała

27 kwietnia 2021

1 Wstęp teoretyczny

Interpolacja to metoda numeryczna polegająca na przybliżeniu postaci pewnej funkcji. Tym przybliżeniem jest funkcja interpolująca $F(x)$, natomiast funkcja dla której szukana jest interpolacja to funkcja interpolowana $f(x)$, której to postać nie zawsze musi być znana. Ze względu na swoje właściwości, interpolacja jest przydatną metodą w całkowaniu numerycznym, w określaniu zależności między otrzymanymi wynikami lub też w przybliżaniu w pewnym przedziale dowolnej funkcji.

Na wykresie funkcji interpolowanej wybierane są pewne punkty x_i zwane węzłami, które są wspólne zarówno dla funkcji interpolowanej jak i funkcji interpolującej ($F(x_i) = f(x_i)$). Następnie wyznacza się przybliżenia wartości funkcji $f(x)$ w punktach nie będącymi węzłami. Tak wyznaczone punkty tworzą funkcję interpolującą $F(x)$.

Jednym z rodzajów interpolacji jest interpolacja wielomianowa Newtona. Polega ona na przybliżeniu pewnej funkcji wielomianem stopnia n, wykorzystując przy tym $n+1$ węzłów. Wzór interpolacyjny Newtona można zapisać wzorem:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \Pi_{i=0}^{j-1}(x - x_i), \tag{1}$$

gdzie $f^{(j)}(x_0)$ to iloraz różnicowy rzędu j dla węzła x_0, natomiast n to stopień szukanego wielomianu.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

W trakcie laboratoriów zadaniem było dokonanie interpolacji wielomianowej Newtona na funkcji postaci:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{2}$$

dla przedziału $[-5, 5]$. W tym celu posłużono się wzorem interpolacyjnym (1). Do obliczenia ilorazów różnicowych wykorzystano rekurencyjną zależność między kolejnymi ilorazami różnicowymi, przy założeniu, że $0 \leqslant j \leqslant n$ oraz $j \leqslant i \leqslant n$:

$$f^i(x_j) = \frac{f^{i-1}(x_j) - f^{i-1}(x_{j-1})}{x_i - x_{i-j}}.$$

Wiedza ta posłużyła do utworzenia tablicy dwuwymiarowej o rozmiarze $n + 1 \times n + 1$, której pierwszą kolumną były wartości funkcji (2) w węzłach, natomiast pozostałe wartości wyznaczono za pomocą algorytmu:

$$\begin{array}{l} for(j = 1; j \leqslant n; j++)\{ \\ \quad for(i = j; i \leqslant n; i++)\{ \\ \quad\quad f_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}} \\ \quad \} \\ \} \end{array} \tag{3}$$

Szukane wartości $f^{(j)}(x_0)$ leżą na głównej diagonali macierzy utworzonej za pomocą algorytmu (4).

W trakcie zajęć rozważono dwa schematy położenia węzłów:

- **równoodległe**, gdzie wszystkie $n+1$ węzłów znajduje się w równej odległości od siebie. Położenie i-tego węzła w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$ wyrażone jest więc wzorem:

$$x_i = x_0 + i \cdot \frac{x_{max} - x_{min}}{n},$$

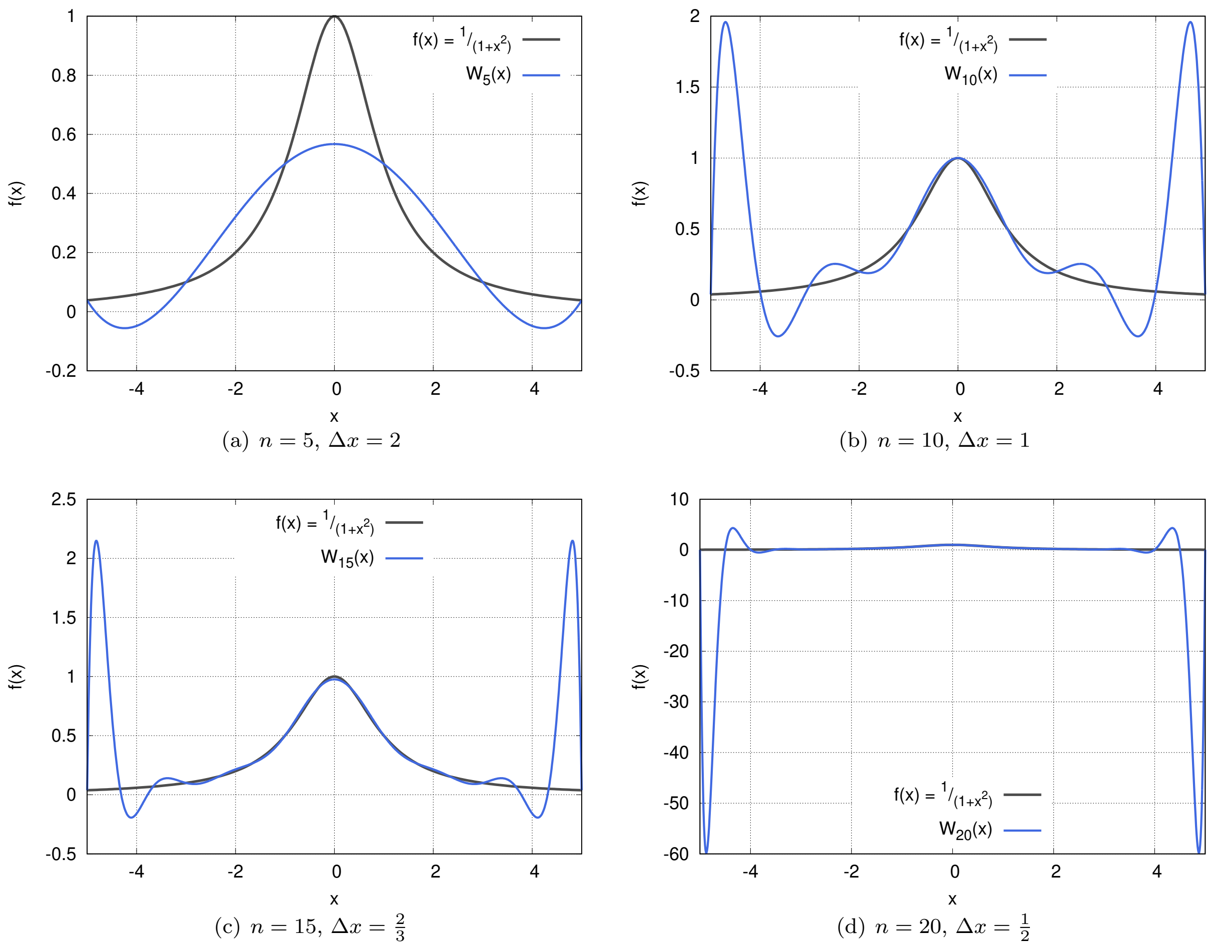
- **miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa** gdzie położenie i-tego węzła w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$ wyznacza wzór:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max})\cos\left(\pi\frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max})\right], \qquad i = 0, 1, .., n,$$

gdzie w każdym przypadku n to stopień wielomianu interpolującego. Interpolacja została wykonana dla powyższych schematów rozłożenia węzłów za pomocą wielomianów stopnia $n = 5, 10, 15, 20$. Funkcję interpolującą wyznaczono za pomocą wzoru (2), dla $x \in [-5, 5]$ z krokiem 0.05.

2.2 Wyniki

Poniżej znajdują się wykresy funkcji interpolujących dla przypadku węzłów równoodległych oraz pierwiastków wielomianu Czebyszewa. Do wykonania wszystkich operacji użyto typu double.



(a) $n = 5$, $\Delta x = 2$

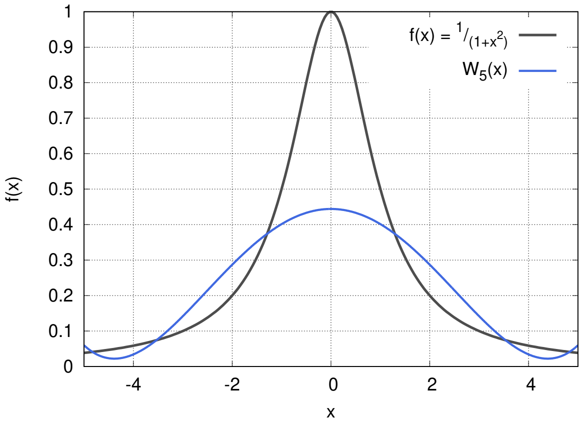
(b) $n = 10$, $\Delta x = 1$

(c) $n = 15$, $\Delta x = \frac{2}{3}$

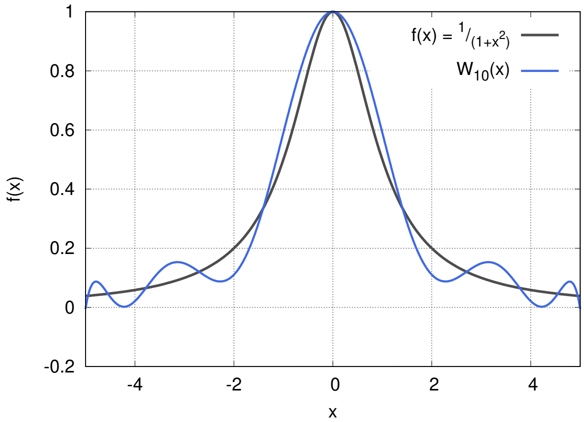
(d) $n = 20$, $\Delta x = \frac{1}{2}$

Rysunek 1: Interpolacja wielomianem Newtona $W_n(x)$ z równoodległymi węzłami.

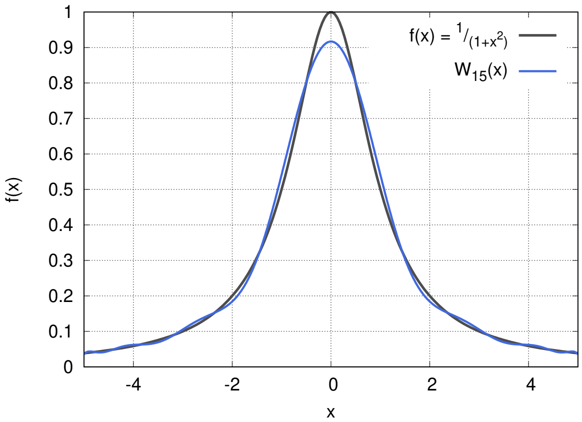
Jak widać na wykresach na poprzedniej stronie, zwiększenie liczby węzłów sprawia, że funkcja interpolująca jest coraz lepiej dopasowana do funkcji interpolowanej na środku przedziału, jednak na jego krańcach dokładność dopasowania maleje. Dla przypadków $n = \{10, 15, 20\}$ w pobliżu krańców przedziału można zaobserwować, że dopasowany wielomian posiada ekstrema, w których wartości znacznie się różnią od analogicznych w oryginalnej funkcji.



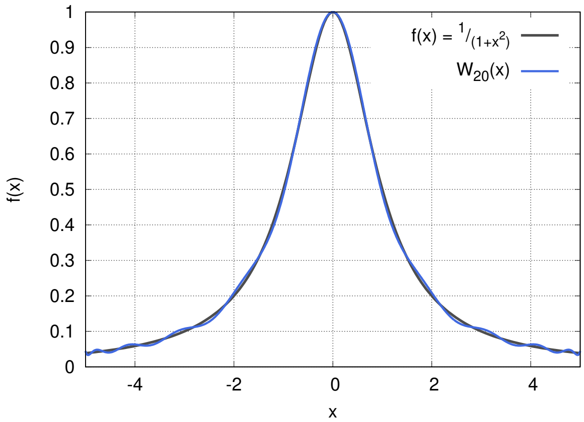
(a) $n = 5$



(b) $n = 10$



(c) $n = 15$



(d) $n = 20$

Rysunek 2: Interpolacja wielomianem Newtona $W_n(x)$ z węzłami, które są zerami wielomianu Czebyszewa.

Dla rozmieszczenia węzłów określonych jako miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa, dokładność dopasowania wielomianu do funkcji wejściowej wraz ze zwiększeniem liczby węzłów jest coraz lepsza. Ponadto dla wyższych wartości n coraz trudniej jest zauważyć pojedyncze ekstrema dopasowanego wielomianu, co świadczy o skuteczności zastosowanej metody do wyznaczenia węzłów.

3 Wnioski

Okazuje się, iż większa liczba węzłów nie zawsze gwarantuje ulepszenie interpolacji; większe znaczenie bowiem ma sposób określenia odległości między węzłami.

Jeżeli węzły znajdują się w równej odległości między sobą, to po zwiększeniu stopnia wielomianu do pewnej wartości pojawia się efekt Runge'go - funkcja interpolująca jest gorzej dopasowana pomimo zwiększenia liczby węzłów. Można to zauważyć na Rysunku 1. - dla $n = \{10, 15, 20\}$ funkcje interpolujące posiadają ekstrema o wartościach zupełnie różnych niż funkcja interpolowana w odpowiadających im punktach.

Interpolacja przebiega zupełnie inaczej, jeżeli do wyznaczania kolejnych węzłów zostaną zastosowane zera wielomianu Czebyszewa. Wtedy też efekt Runge'go nie zostanie zaobserwowany, a wraz ze wzrostem liczby węzłów funkcja interpolująca coraz wierniej odwzorowuje funkcję interpolowaną. Dla $n = 20$ dopasowywany wielomian niemalże pokrywa się z funkcją interpolowaną.