Devoir surveillé

■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. On considère les matrices carrées A, I, O et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - 3I.$$

1. a) Calculer B, B^2, B^3.

b) En déduire B^k pour tout entier k supérieur ou égal à 3.

2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$A^n = 3^n \left(I + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right).$$

Est-ce encore vrai pour $n \in \{0, 1\}$?

3. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par les relations :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n, \; v_{n+1} = u_n + 3v_n, \; w_{n+1} = -u_n + 3w_n.$$

On note pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

c) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n, v_n, w_n en fonction de n, puis les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_1 = 0, \; u_2 = \frac{4}{9}, \text{ et } \forall\, n \geqslant 1, \; u_{n+2} = \frac{1}{3} u_{n+1} + \frac{2}{9} u_n.$$

On considère également les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = QAP$$

ainsi que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les matrices colonnes :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } Y_n = QX_n.$$

1. Vérifier que les deux matrices PQ et D sont diagonales (*Les calculs devront être inscrits sur la copie*).

2. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

3. Soit $n \geqslant 1$. Donner, en la justifiant, la relation liant X_{n+1}, A et X_n. Prouver que $PY_n = X_n$. En déduire que :

$$Y_{n+1} = DY_n.$$

4. Prouver que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\, Y_n = D^{n-1}Y_1.$$

5. Calculer Y_1 et expliciter les coefficients de la matrice colonne Y_n.

6. En déduire que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\, u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

Exercice 3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \mathrm{e}^x - 1 + x$.

1. a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ d'unité 2 cm.

2. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation : $f'(x) = \frac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$.

b) Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées en **2**.

4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie pour tout réel x la relation : $f''(x) = \frac{2-x}{\mathrm{e}^x}$. Étudier la convexité de f.

5. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ et D.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$ et

$$\forall\, n \geqslant 1\; u_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit f la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = (1+t)^{3/2}$.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

b) En déduire la valeur de u_0.

2. a) Établir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente ; donner sa limite.

3. a) Établir pour tout entier naturel n, à l'aide d'une intégration par parties, la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 (t^n + t^{n+1})\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante : $u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5}$.

4. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

b) En déduire pour tout entier naturel n, à l'aide de la question **3.b**, l'inégalité suivante : $u_n \geqslant \frac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.

d) Montrer que la suite $(nu_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.