Devoir en temps libre

À rendre le lundi 08/01/2024

■ ■ ■

Exercice 1. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi donnée par :

$$\mathbf{P}([X=0]) = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}([X=1]) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbf{P}([X=2]) = \frac{1}{2}.$$

On a donc également :

$$\mathbf{P}([Y=0]) = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}([Y=1]) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbf{P}([Y=2]) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S = X + Y$ et $T = XY$ et on admet que S et T sont des variables aléatoires.

1. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par S, puis déterminer la loi de S.

b) En déduire que l'espérance de S est égale à $\frac{5}{2}$.

c) Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit S.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T.

b) Vérifier que $\mathbf{P}([T=0]) = \frac{7}{16}$, puis déterminer la loi de T.

c) En déduire que l'espérance de T est égale à $\frac{25}{16}$.

d) Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit T.

3. Déterminer la loi du couple (S, T) puis retrouver les lois de S et de T.

4. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?

5. Vérifier que $\mathbf{E}[ST] = \frac{45}{8}$, puis calculer $\mathrm{Cov}(S, T)$.

Exercice 2. On pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}.$$

1. a) Montrer que l'on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs.

On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n, le réel u_n est bien défini et strictement positif.

b) Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    u = 1/2
    for k in range(2, n+1):
        u = ......
    return u
```

2. Donner la valeur de u_2, puis vérifier que $u_3 = \frac{1}{12}$.

3. a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir l'encadrement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}.$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

4. Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \frac{1}{u_k}$.

a) Établir l'égalité :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ v_{k+1} - v_k = 2(k+1).$$

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

c) Par sommation de l'égalité obtenue à la question **4.a)**, établir la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, v_n = n(n+1).$$

d) En déduire explicitement u_n en fonction de n puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5. a) Déterminer les constantes a et b pour lesquelles, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}.$$

b) Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 1, calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n$.

c) En déduire que la série de terme général u_n converge et donner sa somme.

6. a) Expliquer pourquoi on peut maintenant considérer une variable aléatoire X dont la loi est donnée par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, \mathbf{P}\left([X = n]\right) = u_n.$$

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

c) En déduire l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geqslant \ln(N+2) - \ln(2).$$

d) Montrer alors que X ne possède pas d'espérance.