Devoir en temps libre

À rendre le lundi 22/01/2024

■ ■ ■

Exercice 1. Les parties **A**, **B** et **C** sont indépendantes et dans chaque partie l'urne considérée initialement est la suivante :
Une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges.
Pour les parties **B** et **C** on pourra utiliser les événements R_k : « le k^e tirage donne une boule rouge » et B_k : « le k^e tirage donne une boule blanche », pour k entier naturel non nul.

Partie A

1. On tire simultanément deux boules dans cette urne puis on les remet dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

2. On effectue maintenant une succession de tirages simultanés de 2 boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage) jusqu'à obtenir un tirage constitué de 2 boules rouges. Soit N la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

a) Quelles sont les valeurs prises par N ?

b) Reconnaître la loi de N. On précisera $\mathbf{P}([N = k])$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

c) En déduire son espérance et sa variance.

d) Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au plus tard au quatrième tirage.

Partie B

On effectue des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. Soit Y la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

3. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

4. Décrire l'événement $[Y = 2]$ et calculer $\mathbf{P}([Y = 2])$.

5. Déterminer la loi de Y, son espérance $\mathbf{E}[Y]$ et sa variance $\mathbf{V}(Y)$.

6. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête. Exprimer Z en fonction de Y.
En déduire la loi de Z, son espérance Z et sa variance $\mathbf{V}(Z)$.

Partie C

Dans cette partie, on effectue des tirages d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à ce que l'on obtienne 2 boules consécutives de la même couleur. On note X la variable aléatoire égale au numéro (rang) du tirage où l'expérience s'arrête.
Par exemple si les tirages ont donné successivement rouge, blanc, rouge, blanc, rouge, rouge, alors $X = 6$.

7. Quelles sont les valeurs prises par X ?

8. Calculer $\mathbf{P}([X = 2])$ et $\mathbf{P}([X = 3])$.

9. Décrire l'événement $[X = 4]$ puis l'événement $[X = 2k]$ pour tout entier $k \geqslant 1$ et montrer que pour tout entier naturel k non nul : $\mathbf{P}(X = 2k) = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$.

10. Décrire l'événement $[X = 5]$, puis l'événement $[X = 2k + 1]$ pour tout entier $k \geqslant 1$ et montrer que pour tout entier naturel k non nul : $\mathbf{P}(X = 2k + 1) = \left(\frac{3}{16}\right)^{k}$.

11. Calculer les sommes $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = 2k])$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = 2k + 1])$. Vérifier que $S_1 + S_2 = 1$.

12. On admet que, si $-1 < x < 1$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Calculer l'espérance de X.