



**MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

**Direction générale
de l'enseignement supérieur
et de l'insertion professionnelle**

**Service de la stratégie des formations et de la vie étudiante
Sous-direction des formations et de l'insertion professionnelle
Département des formations du cycle licence
DGESIP A1-2
n°2021-**

Paris, le 11 janvier 2021

1 rue Descartes
75231 Paris SP 05

Note de présentation

L'arrêté qui vous est présenté définit les nouveaux programmes de première et seconde années de la classe préparatoire économique et commerciale technologique (ECT). Il s'inscrit dans le chantier d'adaptation des CPGE à la réforme du lycée et du baccalauréat, chantier piloté conjointement par la DGESIP et l'IGESR, en lien avec la DGESCO. Pour mémoire, les programmes de la voie ECT avaient été rénovés en 2013.

L'écriture des programmes de mathématiques-informatique, droit et économie, et management et sciences de gestion, élaborée en conformité avec les nouveaux programmes du lycée et les nouveaux principes des parcours terminales – CPGE, a été menée par trois groupes de travail (GT), pilotés chacun par un inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche, et un représentant des grandes écoles de commerce et de management, membres de la CGE¹. Ces trois groupes totalisaient une trentaine de membres, issus de l'IGESR, des associations d'enseignants des CPGE économiques (APHEC², ADEPPT³), ainsi que des grandes écoles de commerce et de management. Certains membres, professeurs en classe préparatoire, ont également été désignés par l'IGESR. A la différence des travaux menés sur la voie économique et commerciale générale (ECG), ce travail sur la voie ECT n'a pas exigé la constitution d'un comité de pilotage, dans la mesure où la réforme du lycée n'a pas entraîné de bouleversement pour les classes technologiques.

A côté des programmes de mathématiques-informatique, droit et économie, et management et sciences de gestion, qui occupent les annexes 1, 2 et 3 du présent arrêté, figurent les programmes de lettres et philosophie, à l'annexe 4, et de langues vivantes étrangères, à l'annexe 5, communs avec ceux de la voie générale ECG et présentés aux instances consultatives de décembre 2020 avec les autres programmes de cette voie.

¹ CGE : Conférence des grandes écoles

² APHEC : Association des professeurs des classes préparatoires économiques et commerciales

³ ADEPPT : Association de promotion des classes préparatoires option technologique

Parmi les classes préparatoires technologiques, la classe ECT sera la première à voir ses nouveaux programmes finalisés et publiés. Cette particularité s'explique par sa présence, en Nouvelle-Calédonie, et par la nécessité d'une entrée en vigueur des nouveaux programmes de première année dès la rentrée 2021, fixée au 15 février. En effet, à défaut de cette application anticipée, les candidats d'ECT de Nouvelle-Calédonie seraient dans l'impossibilité de concourir aux épreuves de la session 2023 des concours, premières épreuves à tenir compte des nouveaux programmes.

En métropole, les programmes de première année de la classe ECT entreront en vigueur à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022, et ceux de seconde année à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Ministère de l'enseignement supérieur, de la
recherche et de l'innovation

PROJET

**Arrêté du
relatif aux programmes de la classe préparatoire économique et commerciale technologique
(ECT)**

NOR : ESRS2035788A

**Le ministre de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports, le ministre des outre-mer et
la ministre de l'enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation,**

Vu le code de l'éducation, et notamment ses articles D. 612-19 à D. 612-29 ;
Vu l'arrêté du 23 mars 1995 modifié définissant la nature des classes composant les classes
préparatoires économiques et commerciales aux grandes écoles ;
Vu l'arrêté du 23 mars 1995 modifié définissant l'organisation générale des études et les horaires des
classes préparatoires économiques et commerciales aux grandes écoles ;
Vu l'arrêté du 3 juillet 1995 modifié définissant les objectifs de formation et le programme des classes
préparatoires de première et seconde année économiques et commerciales, option technologique ;
Vu l'avis du Conseil national de l'enseignement supérieur et de la recherche en date du 12 janvier
2021 ;
Vu l'avis du Conseil supérieur de l'éducation en date du 21 janvier 2021,

Arrêtent :

Article 1^{er}

Les programmes de première et seconde années de mathématiques et informatique de la classe
préparatoire économique et commerciale technologique (ECT), fixés à l'annexe I de l'arrêté du 3 juillet
1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 1 du présent arrêté.

Article 2

Les programmes de première et seconde années de droit et d'économie de la classe préparatoire
économique et commerciale technologique (ECT), fixés respectivement aux annexes VI et IV de
l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 2 du présent arrêté.

Article 3

Les programmes de première et seconde années de techniques de gestion et informatique fixés à l'annexe V de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par les programmes de management et sciences de gestion figurant à l'annexe 3 du présent arrêté.

Article 4

Les programmes de première et seconde années de culture générale fixés à l'annexe II de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par les programmes de lettres et philosophie figurant à l'annexe 4 du présent arrêté.

Article 5

Les programmes de première et seconde années de langues vivantes étrangères (LVE) fixés à l'annexe III de l'arrêté du 3 juillet 1995 susvisé, sont remplacés par ceux figurant à l'annexe 5 du présent arrêté.

Article 6

Les dispositions du présent arrêté s'appliquent dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie.

Article 7

Les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021-2022 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022-2023 pour les classes de seconde année.

Dans les îles Wallis-et-Futuna et en Nouvelle-Calédonie, les dispositions du présent arrêté prennent effet à compter de la rentrée de l'année scolaire 2021 pour les classes de première année, et à compter de la rentrée de l'année scolaire 2022 pour les classes de seconde année.

Article 8

Le directeur général de l'enseignement scolaire, la directrice générale des outre-mer et la directrice générale de l'enseignement supérieur et de l'insertion professionnelle sont chargés, chacun en ce qui le concerne, de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

Fait le

Pour le ministre de l'éducation nationale, de la
jeunesse et des sports, et par délégation :
Le directeur général de l'enseignement scolaire,
E. GEFFRAY

Pour le ministre des outre-mer, et par délégation :
La directrice générale des outre-mer,
S. BROCAS

Pour la ministre de l'enseignement supérieur, de la
recherche et de l'innovation, et par délégation :
La directrice générale de l'enseignement supérieur
et de l'insertion professionnelle,
A.-S. BARTHEZ



Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique ECT

Annexe 1

Programmes de mathématiques - informatique

1^{ère} et 2^{nde} années



Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique ECT

Programmes de mathématiques - informatique

1^{ère} année

Table des matières

INTRODUCTION	2
1 Objectifs généraux de la formation	3
2 Compétences développées	3
3 Architecture des programmes	3
 ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE	 6
I - Outils mathématiques	6
1 - Raisonnement	6
2 - Ensembles, applications	6
a) Ensembles, parties d'un ensemble	7
b) Applications	7
3 - Calculs numériques et algébriques	7
4 - Polynômes à coefficients réels	8
5 - Fonction valeur absolue	8
 II - Suites réelles	 8
 III - Fonctions réelles d'une variable réelle	 8
1 - Généralités	9
2 - Limites	9
3 - Continuité	9
4 - Dérivabilité	9
5 - Convexité	10
 IV - Probabilités sur un univers fini	 11
1 - Espaces probabilisés finis	11
a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements	11
b) Probabilité	11
c) Probabilité conditionnelle	11
d) Indépendance en probabilité	11
2 - Variables aléatoires réelles	12
 ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE	 13

I - Systèmes linéaires et introduction au calcul matriciel	13
1 - Systèmes linéaires	13
2 - Calcul matriciel	13
II - Compléments d'analyse	13
1 - Suites réelles	13
2 - Continuité sur un intervalle	14
3 - Fonctions logarithme et exponentielle	14
III - Probabilités sur un univers fini	15
1 - Coefficients binomiaux	15
2 - Lois usuelles finies	15
IV - Intégration sur un segment	15
1 - Définition	16
2 - Premières propriétés de l'intégrale	16
3 - Application	16
ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET D'ALGORITHMIQUE	17
I - Éléments d'informatique et d'algorithmique	17
1 - Langage Python	17
a) Types de base	17
b) Structures de contrôle	18
c) Utilisation de bibliothèques	18
2 - Liste de savoir-faire exigibles en première année	19
II - Liste de thèmes	19
1 - Suites	19
2 - Statistiques descriptives univariées	19
3 - Bases de données	20
a) Commandes exigibles	21
b) Commandes non exigibles	21
4 - Probabilités	21

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, notamment dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise à développer en particulier chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates** : savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser** : savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter** : être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter** : savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser les concepts et les techniques mathématiques** : savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement** : comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC voie technologique est celui de l'enseignement obligatoire de la classe de terminale sciences et technologies du management et de la gestion. Le programme se situe dans le prolongement de ceux des classes de première et terminale de la filière STMG.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du lycée, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants en classes de première et de terminale.

Le programme s'organise autour de quatre points qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- Une approche de l'algèbre linéaire est présentée en première année par le biais des systèmes d'équations linéaires et l'introduction du calcul matriciel, qui sera poursuivi en seconde année.
- L'analyse en 1ère année, vise à mettre en place l'ensemble des outils usuels autour des suites et des fonctions. L'aspect opératoire et l'interprétation graphique sont privilégiés. Aucune difficulté théorique n'est soulevée.
- Les probabilités et les statistiques s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en classe de terminale. Le cadre principal est celui des univers finis pour lesquels le langage abstrait des probabilités est mis en place.
- L'analyse de données sous forme descriptive ou l'utilisation d'une base de données relationnelles permettent d'aborder différents aspects de la manipulation de données volumineuses.
- L'utilisation d'un langage de programmation et de certaines de ses fonctionnalités est enseignée tout au long de l'année au service du programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités, par exemple, permettent d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales...) et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté ; en revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur y conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.


Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités, ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée. Les démonstrations ne sont pas exigibles.

La pratique des automatismes installée au lycée dans l'objectif d'acquérir des connaissances, des méthodes et des stratégies immédiatement mobilisables peut être poursuivie sous différentes formes, en accord avec le contenu du cours.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par

eux-mêmes.

Le symbole  indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées. Dans certaines situations, en continuité avec les programmes de lycée, l'utilisation d'un tableur peut s'avérer adaptée.

Les étudiants ont déjà une pratique algorithmique acquise au lycée. Dans leurs études futures, ils seront amenés à utiliser différents logiciels conçus pour la résolution de problématiques liées à certains contextes. Une pratique régulière d'outils informatiques les prépare utilement en ce sens. Par ailleurs, l'utilisation d'un outil informatique (programme informatique ou tableur) permet l'observation de résultats mathématiques en situation, l'exploration et la modélisation de situations non triviales plus réalistes et offre la possibilité d'expérimenter et de conjecturer.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

Le premier semestre doit permettre la consolidation des notions étudiées jusqu'en terminale tout en les approfondissant.

I - Outils mathématiques

Ce chapitre présente quelques points de vocabulaire, quelques notations, ainsi que des modes de raisonnements indispensables pour avoir la capacité d'argumenter rigoureusement sur un plan mathématique. Ces outils ne doivent pas faire l'objet d'un exposé théorique, les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée et à l'aide d'exemples nombreux et variés issus des différents chapitres étudiés, et pourront être renforcées au delà, en fonction de leur utilité.

1 - Raisonnement

On confrontera les étudiants à divers modes de raisonnements (démontrer une implication, une équivalence, raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence) à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés.

Les étudiants doivent savoir :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde ;
- raisonnement par récurrence (récurrence simple).

Notations : \exists , \forall .

Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

2 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications. On s'appuiera sur des représentations graphiques.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance.
 Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble vide. Réunion. Intersection. Ensembles disjoints. Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.
 Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E .
 Lois de Morgan.
 Produit cartésien.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).
 Le complémentaire d'une partie A de E est noté \bar{A} .

On introduira les notations \mathbf{R}^2 et \mathbf{R}^n .

Cardinal d'un ensemble fini.
 Si A et B sont disjoints :
 $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
 Formule de Poincaré pour deux ensembles.
 $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

La notion de cardinal est introduite pour son application au calcul des probabilités (uniquement dans le cas de l'équiprobabilité). Tout exercice de dénombrement pur est exclu.

b) Applications

Définition.
 Image, antécédent.
 Composition.
 Bijection, application réciproque.

Ces notions seront introduites sur des exemples simples.
 La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.

3 - Calculs numériques et algébriques

Il s'agit de rappeler les notations \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} et \mathbf{R} , les propriétés des opérations arithmétiques, les règles de calcul, le traitement des égalités et des inégalités.

Puissances entières de 10.
 Puissances entières d'un réel.
 Développement, factorisation d'expressions algébriques.
 Racine carrée d'un réel positif. Propriétés.
 Identités remarquables.

On attend en particulier la maîtrise des formules
 $(xy)^n = x^n y^n$, $x^{n+m} = x^n x^m \dots$
 On manipulera également des quotients.

Les attendus se limitent aux formules suivantes :
 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Manipulation des inégalités.
 Notion d'intervalle.
 Intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert.
 Résolution d'équations et d'inéquations simples.
 Résolution de systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.


Il s'agit d'une reprise des types d'équations et d'inéquations abordées dans les classes antérieures et pratiquées en gestion.

4 - Polynômes à coefficients réels

Toute étude théorique sur les polynômes est exclue. On identifie polynôme et fonction polynomiale.

Racines et signe d'un polynôme du premier et du second degré. Discriminant.

Somme et produit des racines


Illustration graphique. 

Factorisation d'un trinôme du second degré de discriminant positif ou nul.

Polynômes de degré quelconque.

Somme, produit de polynômes.

Factorisation d'un polynôme par $(x - a)$ si a est racine de ce polynôme.

Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. 

Application à l'étude d'équations et d'inéquations.

Illustration graphique.

5 - Fonction valeur absolue

Définition, notation, propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance dans \mathbf{R} .


II - Suites réelles

On présentera des exemples de suites issus du monde économique (capital et taux d'intérêt, emprunt à annuités constantes).

Les notions de comportement et de limite ne seront abordées qu'au second semestre.


Ce chapitre fournira l'occasion d'illustrer le raisonnement par récurrence et donnera l'occasion de consolider les connaissances du lycée de programmation en Python.

Suites constantes, suites arithmétiques, suites géométriques.

Calcul du n -ième terme. 

Savoir montrer qu'une suite est constante, arithmétique ou géométrique.

Suites arithmetico-géométriques

Calcul du n -ième terme. 

Une formule explicite pourra être donnée, mais on introduira la méthode sur des exemples.

Terme général d'une suite.


Sur des exemples, application à la recherche du terme général d'autres suites à l'aide des suites usuelles.

Aucune étude générale de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est au programme.

Somme des n premiers nombres entiers naturels et somme des n premiers termes de la suite (q^k) . Notation \sum .

Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques. Transformation de

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

$\sum_{i=1}^n au_i$ et $\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)$. 

III - Fonctions réelles d'une variable réelle

Il s'agit de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et les notions nécessaires à leur représentation graphique. Les fonctions logarithme et exponentielle

n'étant étudiées qu'au second semestre, il convient donc ici d'utiliser des fonctions qui se déduisent simplement des fonctions polynomiales, rationnelles, valeur absolue ou racine carrée. On utilise autant que possible des représentations graphiques pour présenter et illustrer les concepts introduits.

1 - Généralités

Vocabulaire : ensemble de définition, image, antécédent, représentation graphique d'une fonction.

Fonctions paires, impaires.

Fonctions monotones, strictement monotones.

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Somme, produit, quotient de fonctions, composée de fonctions.

Introduction de la notion de fonction bijective, fonction réciproque.

Illustration avec les fonctions usuelles connues : carré, cube, inverse, racine carrée, valeur absolue.

Lien avec l'équation $f(x) = c$.

2 - Limites

La définition formelle d'une limite est hors programme. Toute étude théorique sur les limites est exclue. Les résultats seront énoncés sans démonstration et illustrés par des représentations graphiques.

Limite d'une fonction en un point.



Limite à droite, limite à gauche.

Extension de la notion de limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Notion de limite infinie en un point, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Opérations algébriques sur les limites.

Limite d'une fonction composée.

Limites des fonctions polynomiales et rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$.

Les limites sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou leur quotient.

Interprétation graphique des limites : droites asymptotes, asymptotes parallèles aux axes.



Toute recherche systématique des branches infinies est hors-programme.

3 - Continuité

Continuité d'une fonction en un point.


Continuité de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions continues. Composition de deux fonctions continues.

Une fonction f est continue en a si et seulement si $f(x)$ admet pour limite $f(a)$ quand x tend vers a .

Le prolongement par continuité est hors programme.

4 - Dérivabilité

Dérivabilité d'une fonction en un point, nombre dérivé.

Interprétation graphique. 

Équation de la tangente en un point.

Approximation affine au voisinage d'un point. ►

Fonction dérivée.

Notation f' .

Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée.

Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.

Résultat admis.

Principe de Lagrange : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geq 0$ sur I , ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .

Tableau de variation.

Sur des exemples, application à l'étude d'équations et d'inéquations, à l'obtention de majorations et de minoration.

Extremum local d'une fonction dérivable.

Une fonction f , dérivable sur un intervalle ouvert I , admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

Dérivée seconde, notation f'' .

La notion de fonction de classe C^p ou C^∞ est hors programme.

Représentation graphique de fonctions.

5 - Convexité

Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Les fonctions étudiées sont au moins de classe C^2 . Tous les résultats de ce paragraphe seront admis et illustrés par des représentations graphiques. L'inégalité de la convexité n'est pas un attendu. La notion de convexité sera abordée principalement pour préciser des représentations graphiques de fonctions.

Définition d'une fonction convexe.

Une fonction est convexe (respectivement concave) si la courbe est au-dessous (respectivement au-dessus) des cordes. ►

Position d'une courbe par rapport aux tangentes dans le cas où la fonction est convexe et dérivable.



Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Si la dérivée d'une fonction convexe f de classe C^2 sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.

Caractérisation d'un point d'inflexion si f est deux fois dérivable.



Représentation graphique des fonctions convexes.

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.

Allure locale du graphe.

Exemples d'étude de points d'inflexion.

IV - Probabilités sur un univers fini

L'objectif est de mettre en place dans le cas fini, un cadre dans lequel on puisse énoncer des résultats généraux et mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique. On fera le lien avec l'emploi des arbres pondérés préconisé durant le cycle terminal du lycée.

1 - Espaces probabilisés finis

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire.

Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles, événements contraires.

Système complet d'événements finis.

On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.

On se limitera aux systèmes complets d'événements de type A_1, \dots, A_n ($n \in \mathbf{N}^*$) où les A_i sont des parties deux à deux disjointes et de réunion égale à Ω .

b) Probabilité

Une probabilité est une application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et pour tous A et B incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux événements.

Cas de l'équiprobabilité.

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.

Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

Formule des probabilités composées.

Notation P_A .

Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales.

Si A_1, \dots, A_n est un système complet, alors pour tout événement B on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

Formule de Bayes.

d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Indépendance mutuelle de n événements.

Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i , avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

2 - Variables aléatoires réelles

On rappelle que l'univers Ω considéré est fini. Toutes les définitions qui suivent concernent ce seul cas.

Une variable aléatoire est une application de Ω dans \mathbf{R} .

Système complet associé à une variable aléatoire.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire X .

Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Espérance d'une variable aléatoire finie.

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Variable aléatoire $Y = g(X)$ lorsque g est une fonction à valeurs réelles.

Théorème de transfert.

Variance d'une variable aléatoire. Écart-type.

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Formule de Kœnig-Huygens.

Variables centrées, centrées réduites.

On adoptera les notations habituelles telles que $[X = x]$, $[X \leq x]$, etc.

$$F_X(x) = P([X \leq x]).$$

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Résultat admis.

$$E(X) = \sum_i x_i P([X = x_i]).$$

Linéarité de l'espérance.

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) P([X = x_i]). \text{ Théorème admis}$$

Notations $V(X)$, $\sigma(X)$.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X .

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

I - Systèmes linéaires et introduction au calcul matriciel

Ce chapitre sera repris, en deuxième année, avec une étude plus spécifique des matrices carrées. Tout développement théorique est hors programme.

1 - Systèmes linéaires

Résolution.

Méthode du pivot de Gauss.

On présentera la méthode du pivot de Gauss à l'aide d'exemples numériques et on se limitera à des systèmes de trois équations à trois inconnues.

On prendra les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes :

$L_i \leftrightarrow L_j$; $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$;

$L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$; $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$.

2 - Calcul matriciel

L'objectif est d'introduire les matrices qui seront utilisées en seconde année. On s'appuie sur des exemples numériques de matrices réelles. La notation des coefficients sous la forme $m_{i,j}$ n'est pas un attendu du programme. Le programme exclut toute notion de structure.

Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes.

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.

Matrices lignes, matrices colonnes.

Opérations sur les matrices : multiplication par un scalaire, somme, produit de deux matrices.

Les définitions des opérations sur les matrices seront présentées à l'aide d'exemples issus de situations concrètes. Les propriétés des opérations seront admises sans démonstration et illustrées sur des exemples.

Ecriture matricielle d'un système.

II - Compléments d'analyse

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de \mathbf{R} . Les étudiants doivent pouvoir traiter les situations qui s'y ramènent.

Toute étude théorique sur les limites (suites ou fonctions) est exclue. On utilise autant que possible des représentations graphiques pour présenter et illustrer les concepts introduits. Les résultats seront énoncés sans démonstration.

1 - Suites réelles

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur le raisonnement par récurrence. On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en

particulier pour illustrer la notion de convergence. ►

Suite monotone, minorée, majorée, bornée.

Limite d'une suite, définition des suites convergentes.

Généralisation aux limites infinies.

Unicité de la limite.

Opérations sur les limites.

Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Existence d'une limite par encadrement.

Théorème de la limite monotone.

$(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n sauf pour un nombre fini d'entre eux.



On étendra sans démonstration tous les résultats connus sur les limites de fonctions de la variable réelle aux suites.

Le théorème de composition de limite d'une suite convergente par une fonction continue est hors-programme.

Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.

Toute suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2 - Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Fonction continue strictement monotone sur un intervalle. Caractère bijectif.

Corollaire (TVI et bijection).

Ces énoncés seront admis.

On utilisera ce résultat pour étudier des équations du type $f(x) = k$. ►

On admettra la continuité de la fonction réciproque.

Représentation graphique de la fonction réciproque.

Toute étude théorique sur les fonctions réciproques est exclue.

Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]a, b[$. Extension au cas des autres intervalles, éventuellement en considérant les limites au bord.

Application à la dichotomie. ►

3 - Fonctions logarithme et exponentielle

Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

Fonction logarithme népérien.

Dérivée, limites, représentation graphique.

Propriétés algébriques du logarithme.

La fonction logarithme est introduite comme primitive de la fonction inverse sur \mathbf{R}_+^* .

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Fonction exponentielle.
Dérivée, limites, représentation graphique.
Propriétés algébriques de l'exponentielle.

Fonctions puissances (exposant réel).

Croissances comparées des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de l'infini et au voisinage de 0.

La fonction exponentielle est introduite comme réciproque de la fonction logarithme.

$\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$.

Notation e^x .

Pour $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x^\alpha \ln x)$.
Pour n entier naturel non nul, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$.

III - Probabilités sur un univers fini

1 - Coefficients binomiaux

On donne dans ce paragraphe l'interprétation combinatoire de ces coefficients mais on évitera toute technicité dans les exercices.

Factorielle, notation $n!$.

Parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.


Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{k}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\text{Relation } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$


Formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Interprétation de $n!$ en tant que nombre de permutations d'un ensemble à n éléments. 

On pourra faire le lien entre les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant k succès pour n répétitions.

Ces relations pourront faire l'objet de manipulations sur la notation factorielle.

La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul pour le calcul numérique des coefficients. 

2 - Lois usuelles finies

Chacune de ces lois sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise. Les étudiants doivent savoir reconnaître ces lois à partir de situations concrètes.

Loi certaine. Espérance et variance.


Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Espérance et variance.

Loi de Bernoulli. Espérance et variance.


Loi binomiale. Espérance et variance.

Application : formule du binôme de Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. 

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. 

Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec la loi $\mathcal{B}(n, p)$ pour $p = \frac{a}{a+b}$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.

IV - Intégration sur un segment

Pour le calcul d'intégrales à partir des primitives, on se limitera à des exemples simples. Les changements de variable sont hors programme.

1 - Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.

Dans le cas où f est affine positive, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Toute fonction f continue sur un intervalle y admet au moins une primitive F .

Admis.

Sur un intervalle si F est une primitive de f alors toute autre primitive est de la forme $F + c$ où c est une constante.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur I . Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I .

2 - Premières propriétés de l'intégrale


Relation de Chasles.

Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue positive.

Sur des exemples, illustration à l'aide de la méthode des rectangles. 

3 - Application

Introduction de la notion de variable aléatoire à densité : exemple de la loi uniforme sur un segment.

Simulation. 

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET D'ALGORITHMIQUE

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

L'objectif est de poursuivre la formation initiée au lycée concernant l'algorithmique et l'utilisation de l'outil informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.

L'utilisation de l'outil informatique se fait en continuité avec le cours de mathématiques et sera suivi d'une mise en œuvre sur ordinateur. Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le programme d'informatique s'articule autour de trois thèmes : études de suites, statistiques descriptives univariées, bases de données relationnelles.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites en préambule lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Le langage informatique retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales, option technologique, est Python.

1 - Langage Python

Le langage Python propose un grand nombre de bibliothèques logicielles, avec des utilités variées. Les bibliothèques jugées nécessaires sont listées, chacune avec une liste restreinte de fonctions essentielles que les étudiants devront avoir manipulées. Seules celles dans la colonne de gauche sont exigibles, et leur syntaxe précise doit être rappelée. D'autres fonctions, par commodité, pourront être utilisées en classe, mais ceci ne pourra se faire qu'avec parcimonie. L'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique de connaissances mathématiques.

a) Types de base

Affectation : `nom = expression`

L'expression peut être du type numérique, booléen, matriciel (ndarray) ou chaîne de caractères.

permet d'insérer un commentaire

+	-	*	/	**
---	---	---	---	----

==	>	<	>=	<=	!=
----	---	---	----	----	----

True	False	and	or	not
------	-------	-----	----	-----

from ... import *, import ... as

On insiste sur l'importance de l'ajout judicieux de commentaires.

Opérations arithmétiques de base.

Comparaison, test.

Logique.

Importation d'une bibliothèque.

b) Structures de contrôle

On réinvestit les notions de compteurs et d'accumulateurs vues au lycée. La maîtrise des structures de programmation de base (if, while, for) constitue l'un des objectifs majeurs de l'informatique en première année.

Instruction d'affectation : =.

Instruction conditionnelle if, elif, else.

Boucle for; Boucle while.

Définition d'une fonction :

def f(p_1, \dots, p_n)

return.

c) Utilisation de bibliothèques

Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

from ... import *, import ... as

Importation d'une bibliothèque.

— Dans la bibliothèque `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.e`, `np.pi`

`np.exp`, `np.log`, `np.sqrt`, `np.abs`,

`np.floor`

`np.array`.

`np.dot`

+	-	*	/	**
---	---	---	---	----

`np.sum`, `np.min`, `np.max`, `np.mean`,

`np.cumsum`, `np.median`, `np.var`, `np.std`

Constantes e et π .

Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. Création de tableaux ou matrices.

`np.zeros`, `np.ones`, `np.eye`, `np.arange`,

`np.linspace`, `np.reshape`.

Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne du tableau.

Multiplication matricielle.

On pourra utiliser `a, b = np.shape(M)` pour obtenir la taille de la matrice M.

Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.

Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`

— Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`
`rd.random.`

— Dans la librairie `pandas`

Exemple d'importation : `import pandas as pd`
`pd.mean, pd.std.`

Indicateurs statistiques.

— Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`
`plt.plot, plt.show`

Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes non exigibles `xlim, ylim, axis, grid, legend`.
 Représentations statistiques
`plt.hist, plt.bar, plt.boxplot.`

2 - Liste de savoir-faire exigibles en première année

C1 : Savoir manipuler les structures algorithmiques de base (if, for, while), connaître la syntaxe d'une fonction simple et savoir l'utiliser.

C2 : Savoir produire des graphiques et indicateurs afin d'interpréter des données statistiques.

C3 : Savoir étudier des suites numériques, calculer des valeurs, tracer des graphiques et conjecturer des résultats sur le comportement de la suite.

C4 : Stocker, organiser et extraire des données structurées volumineuses.

C5 : Savoir modéliser des phénomènes aléatoires et effectuer des simulations de variables aléatoires.

II - Liste de thèmes

1 - Suites

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C1** et **C3**)

Calcul des termes d'une suite.

Exploitation graphique des résultats.

Exemples : taux d'intérêt, emprunt.

Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite.

On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique.

Valeur approchée d'une constante.

Détermination du rang d'arrêt.

2 - Statistiques descriptives univariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C2**)

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques issues de l'économie, du monde de l'entreprise ou de la finance, en insistant sur les représentations graphiques. On insistera sur le rôle des différents indicateurs de position et de dispersion étudiés.

Série statistique associée à un échantillon.
Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâton, histogrammes.

Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles.

Indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile.

Analyse d'un caractère quantitatif : caractéristiques de position (moyenne, médiane); mode(s); caractéristiques de dispersion (variance et écart-type empiriques, quartiles, déciles).

On pourra également utiliser les commandes :
`pd.read_csv`, `head`, `shape`, `pd.describe`

`pd.median`, `pd.count`, `pd.sort_values`

On notera bien que les paramètres empiriques sont calculés à partir de l'échantillon observé. On montrera les avantages et les inconvénients des caractéristiques liées à la structure euclidienne (moyenne et écart-type) et ceux qui sont liés à la structure d'ordre (quantiles).

3 - Bases de données

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : C4)

L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.

L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On pourra pour introduire la problématique donner l'exemple de la base de données utilisée par un progiciel de gestion intégré (PGI), outil informatique permettant de piloter une entreprise, présenté dans le cours de management. Cette base de données stocke les informations communes à de nombreux services (comptabilité, gestion du personnel, gestion des stocks, fichier clients...). On introduira les concepts d'interrogation et de mise à jour d'une base de données à l'aide d'exemples simples issus de ce contexte.

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire "PRIMARY KEY", clef étrangère "FOREIGN KEY", schéma relationnel.

Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.
Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.

Opérateurs arithmétiques +, -, *.

Opérateurs de comparaison :

=, <>, <, <=, >, >=.

Opérateurs logiques : "AND", "OR", "NOT".

On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier "INTEGER", chaîne "TEXT".

a) Commandes exigibles

"WHERE"

"SELECT nom_de_champ FROM nom_de_table". Sélection de données dans une table.

"INSERT INTO nom_de_table ". Insertion de données dans une table. On pourra utiliser "VALUES (élément1, élément2,...)".

"DELETE FROM nom_de_table ". Suppression de données d'une table.

"UPDATE nom_de_table ". Mise à jour de données d'une table.

b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité et si besoin la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union "UNION", intersection "INTERSECTION", différence "EXCEPT".

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min "MIN", max "MAX", somme "SUM", moyenne "AVG", comptage "COUNT".

Les commandes "DISTINCT", "ORDER BY"

4 - Probabilités

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1 C2 et C5**)

Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle. Loi uniforme, loi binomiale.
`rd.randint` .

Simulation de phénomènes aléatoires.



Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie technologique ECT

Programmes de mathématiques - informatique

2nde année

Table des matières

1	Objectifs généraux de la formation	2
2	Compétences développées	2
3	Architecture des programmes	3
	ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE	4
I -	Matrices	4
II -	Compléments d'intégration : propriétés de l'intégrale	5
III -	Compléments sur les sommes et séries numériques	5
1 -	Compléments sur les sommes	5
2 -	Séries	5
IV -	Probabilités et statistiques	5
1 -	Couples de variables aléatoires discrètes finies	5
2 -	Variables aléatoires discrètes infinies	6
a)	Généralités	6
b)	Lois usuelles	7
	ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE	7
I -	Réduction des matrices carrées	7
II -	Compléments d'analyse	8
III -	Probabilités et statistiques	8
1 -	Variables aléatoires à densité continue par morceaux	8
2 -	Variables aléatoires à densité usuelles	9
3 -	Convergences et approximations	9
a)	Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	9
b)	Suites de variables aléatoires discrètes finies	10
c)	Loi faible des grands nombres	10
4 -	Estimation	10
a)	Estimation ponctuelle.	11
b)	Estimation par intervalle de confiance.	11
	Enseignement annuel d'informatique et d'algorithmique	12

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique	12
1 - Liste des savoir-faire et compétences	12
II - Langage Python	13
III - Liste des thèmes	13
1 - Statistiques descriptives bivariées	13
2 - Simulation de lois, application au calcul d'espérances	13
3 - Bases de données	14
a) Commandes exigibles	14
b) Commandes non exigibles	14
4 - Théorème limite central	14

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, notamment dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates** : savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser** : savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter** : être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.

- **Raisonnement et argumenter** : savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques** : savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement** : comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC voie technologique se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés d'économie et de gestion dispensés en Grande Ecole ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire, le programme se concentre sur le calcul matriciel. Le principal objectif est l'introduction de la notion de valeurs propres et de vecteurs propres et la diagonalisation des matrices carrées de taille inférieure à 3. On évitera des exemples trop calculatoires.
- En analyse, les séries et les intégrales généralisées sont étudiées en vue de leurs applications aux probabilités (variables aléatoires discrètes infinies et variables aléatoires à densité).
- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité, abordées dès la première année, sont complétées. L'objectif de cette partie du programme est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse et une compréhension plus aboutie des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance que les étudiants ont rencontrés dès le lycée.
- Les travaux pratiques de mathématiques et d'informatique sont organisés autour de la poursuite de l'étude des fonctionnalités du langage SQL et, avec Python, de la simulation de lois de probabilités en continuité du programme de première année, et de thèmes de statistiques en lien avec le programme de mathématiques, avec l'objectif d'éclairer ces notions par des illustrations concrètes. Les savoir-faire et compétences que les étudiants doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique.


Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole  indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées. Dans certaines situations, en continuité avec les programmes de lycée, l'utilisation d'un tableur peut s'avérer adaptée.

Les étudiants ont déjà une pratique algorithmique acquise au lycée. Dans leurs études futures, ils seront amenés à utiliser différents logiciels conçus pour la résolution de problématiques liées à certains contextes. Une pratique régulière d'outils informatiques les prépare utilement en ce sens. Par ailleurs, l'utilisation d'un outil informatique (programme informatique ou tableur) permet l'observation de résultats mathématiques en situation, l'exploration et la modélisation de situations non triviales plus réalistes et offre la possibilité d'expérimenter et de conjecturer.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Matrices

Le programme exclut toute notion de structure. On ne traite que le cas des matrices réelles.

Matrices carrées d'ordre n . Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Matrices triangulaires, matrices diagonales, matrice identité.

Matrices inversibles.

Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Critère d'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.

Exemples de calcul des puissances n -ièmes d'une matrice. Cas d'une matrice diagonale.

Formule du binôme pour les matrices qui commutent.

Résultat admis.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Formule de l'inverse dans ce cas. La notation $\det(A)$ pourra être utilisée, mais elle sera limitée au cas des matrices carrées d'ordre 2. La notion de déterminant est hors-programme.

On se limitera à des exemples simples, par exemple lorsque l'une des matrices est nilpotente.

Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires.

Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss.

Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.

On se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

II - Compléments d'intégration : propriétés de l'intégrale

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur les calculs d'intégrales introduits au S2.

Linéarité de l'intégrale.

Intégration par parties.

Si u, v, u' et v' sont des fonctions continues sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Positivité de l'intégrale. Comparaison d'intégrales.

III - Compléments sur les sommes et séries numériques

1 - Compléments sur les sommes

Ce chapitre sera l'occasion de revenir sur les calculs de sommes traités en première année ►.

Somme télescopique.

Décalage d'indice.

On se limitera, sur des exemples simples, à des décalages d'indice de type $k' = k + 1$.

2 - Séries

Les séries sont introduites exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Définition. Convergence d'une série. Somme d'une série convergente.

Condition nécessaire de convergence.

Série géométrique. Convergence et somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

La série $\sum x^n$ converge si et seulement si

$$|x| < 1, \text{ et dans ce cas : } \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Les dérivées des séries géométriques ne font pas partie des attendus du programme.

IV - Probabilités et statistiques

Tout excès de technicité est exclu.

1 - Couples de variables aléatoires discrètes finies

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires.

Lois marginales, lois conditionnelles.

Indépendance de deux variables aléatoires.

Espérance d'une somme de deux variables aléatoires, linéarité de l'espérance.

Espérance d'un produit de deux variables aléatoires.

Cas de deux variables aléatoires X et Y indépendantes.

Covariance. Propriétés.

Formule de Koenig-Huygens.

Variance d'une somme de deux variables aléatoires.

Coefficient de corrélation linéaire.

Propriétés.

La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$.

X et Y sont indépendantes si, pour tous intervalles réels I et J , les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants.

On remarquera que si l'une des variables aléatoires X, Y est constante, X et Y sont indépendantes.

Résultat admis.

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Résultat admis.

$$E(XY) = E(X)E(Y). \text{ Résultat admis.}$$

La réciproque est fausse.

Notation $\text{Cov}(X, Y)$.

Linéarité à droite, à gauche. Symétrie.

Si $a \in \mathbf{R}$, $\text{Cov}(X, a) = 0$.

$\text{Cov}(X, X) = V(X)$.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle, la réciproque étant fausse.

Notation $\rho(X, Y)$.

$$\text{Si } \sigma(X)\sigma(Y) \neq 0, \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

$|\rho(X, Y)| \leq 1$. Interprétation dans le cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.

2 - Variables aléatoires discrètes infinies

a) Généralités

On se limitera aux variables aléatoires positives dont l'image est indexée par \mathbf{N} . Aucune difficulté théorique ne sera soulevée au moment de l'extension des propriétés.

Notion d'espace probabilisé avec Ω non fini.

Extension des définitions et des propriétés des variables aléatoires discrètes au cas où l'image est un ensemble infini dénombrable : loi de probabilité, fonction de répartition, espérance, variance, écart-type.

b) Lois usuelles

Chacune des lois usuelles sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise.

Loi géométrique.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La reconnaissance de la loi géométrique comme loi du premier succès est exigible.

Espérance et variance.

Résultats admis.

Loi de Poisson.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Espérance et variance.

Résultats admis.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Réduction des matrices carrées

L'objectif est l'introduction de la notion de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice. La notion de polynôme minimal, la résolution générale des systèmes $AX = \lambda X$ (avec λ paramètre quelconque) et toute théorie sur la réduction sont hors programme.

Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est à proscrire. Dans la pratique, on se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

Polynôme d'une matrice. Polynôme annulateur.

Sur des exemples, utilisation d'un polynôme annulateur pour la détermination de l'inverse d'une matrice carrée. Toutes les indications devront être données aux candidats pour l'obtention d'un polynôme annulateur.

On pourra vérifier que le polynôme $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Matrices carrées diagonalisables.

Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice D , diagonale, et une matrice carrée P , inversible, telles que $D = P^{-1}AP$.

Valeur propre, vecteur propre d'une matrice carrée.

Avec les notations de la définition précédente, on remarquera que la matrice P est construite à partir de vecteurs propres de A et la matrice D des valeurs propres correspondantes, mais leur construction n'est pas exigible.

Si Q est un polynôme annulateur de A , toute valeur propre de A est racine de Q .

Résultat admis.

Recherche de valeurs propres.

Pour ce faire, on utilisera un polynôme annulateur.

La recherche de vecteurs propres ne pourra être demandée que dans le cas de valeurs propres de multiplicité 1. Dans les autres cas, les vecteurs propres devront être donnés.

Sur des exemples, diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre inférieur ou égal à 3.

Application au calcul des puissances de A .

Sur des exemples, étude de suites linéaires récurrentes d'ordre 2 et de systèmes de suites récurrentes.

La méthode générale de résolution est hors-programme.

II - Compléments d'analyse

Les notions introduites dans ce chapitre le sont exclusivement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Le calcul des intégrales généralisées est effectué par des recherches de primitives sur des intervalles du type $[a, b]$, l'application de la relation de Chasles, et des passages à la limite en $-\infty$ et/ou $+\infty$.

Les intégrales généralisées en un point réel sont hors-programme.

Intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Convergence et définition.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie, et dans ce cas, $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$.

Intégrale $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ où f est une fonction continue sur $]-\infty, b]$.

Extension aux intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée lors du passage du calcul des intégrales des fonctions continues à celui des intégrales des fonctions continues sauf en un nombre fini de points.

III - Probabilités et statistiques

1 - Variables aléatoires à densité continue par morceaux

Ce paragraphe généralise l'étude de la loi uniforme effectuée en première année.

Le passage du cas discret au cas continu n'est pas explicite. On se limitera à des calculs de probabilités du type $P([X \in I])$, où I est un intervalle de \mathbf{R} .

Densité de probabilité.

Une fonction f définie sur \mathbf{R} est une densité de probabilité si elle est positive, continue sur \mathbf{R} éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

On se limitera en pratique à des fonctions continues par morceaux, cette notion étant elle-même hors-programme.

Variable aléatoire à densité.

Une variable aléatoire X admet une densité si sa fonction de répartition F_X peut s'écrire sous la forme $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$ où f est une densité de probabilité.

Sur des exemples, détermination d'une densité de $aX + b$ ou de X^2 .

Espérance, variance et écart-type.

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

2 - Variables aléatoires à densité usuelles

Chacune des lois usuelles sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise.

Loi uniforme. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$.

Loi exponentielle. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2 , où $\sigma > 0$.

Densité.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Espérance et variance.

Résultats admis.

Loi normale centrée réduite.

Densité.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

On attend des étudiants qu'ils sachent utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

3 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.

Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance,

$$\forall a > 0, \quad P([X \geq a]) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = |X|^r, r \in \mathbf{N}^*$.

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Résultat non exigible.

b) Suites de variables aléatoires discrètes finies

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires.

Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes si, pour tout choix de n intervalles réels I_1, \dots, I_n , les événements $[X_1 \in I_1], \dots, [X_n \in I_n]$ sont mutuellement indépendants.

Indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires.

Les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout entier $n \geq 1$, les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

Espérance de la somme de n variables aléatoires.

Variance d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.


Application à la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

c) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*, \bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Alors $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$.

Illustrations. .

4 - Estimation

L'objectif de ce chapitre est, sans insister sur les aspects formels, de dégager la signification de la loi des grands nombres (approche fréquentiste) et de mettre en place la problématique de l'estimation. On introduit sur un exemple simple et concret (par exemple un sondage) cette problématique : on considère un phénomène aléatoire, qu'on a abstrait par une variable aléatoire réelle X dans une famille de lois

dépendant d'un paramètre inconnu θ (sur l'exemple du sondage, une loi de Bernoulli). Le problème de l'estimation consiste alors à déterminer une valeur approchée du paramètre θ à partir d'un échantillon de données x_1, \dots, x_n obtenues en observant n fois le phénomène.

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n définies sur un même espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Les X_1, \dots, X_n seront supposées P_θ -indépendantes et de même loi que X pour tout θ . On pourra éventuellement introduire la notion d'estimateur, mais ce n'est pas un attendu du programme. Dans les cas considérés, le paramètre sera déterminé par la moyenne de la variable aléatoire. On s'appuie sur la loi faible des grands nombres pour justifier l'utilisation de l'estimateur $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ pour estimer l'espérance commune des variables aléatoires indépendantes X_i de même loi que X .

Echantillon.

a) Estimation ponctuelle.

La réalisation de $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ observée sur l'échantillon x_1, \dots, x_n est l'estimation du paramètre obtenue sur cet échantillon.

On donne les exemples de la loi de Bernoulli et de la loi de Poisson.

b) Estimation par intervalle de confiance.

La démarche consiste non plus à donner une estimation ponctuelle du paramètre θ mais à trouver un intervalle aléatoire, appelé intervalle de con-

fiance, qui le contienne avec une probabilité minimale donnée. Ce paragraphe a uniquement pour but de préciser le vocabulaire employé. Les situations seront étudiées sous forme d'exercices dans des séances d'exercices et de travaux pratiques, aucune connaissance autre que ce vocabulaire n'est exigible sur les intervalles de confiance. On introduit l'intervalle de confiance obtenu à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On en explique la signification. On remarque que la précision augmente avec la taille de l'échantillon. La démonstration n'est pas un attendu du programme.

Intervalle de confiance : La probabilité que l'intervalle $\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{V(X)}{na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{V(X)}{na}} \right]$ contienne la moyenne $E(X)$ est supérieure à $1 - a$.

On se limitera au cas d'une variable de Bernoulli.

Résultat non exigible.

En pratique, la variance V est inconnue, mais on peut la majorer par $\frac{1}{4}$.

On particularise numériquement les intervalles de confiance au seuil de confiance de 90 % et de 95 %.

Intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart-type est connu.

On remarque que dans la pratique, l'écart-type n'est pas connu, ce qui conduit à utiliser l'écart-type de l'échantillon (écart-type empirique).

Enseignement annuel d'informatique et d'algorithmique

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

En première année, les élèves ont consolidé les bases de manipulation du langage Python. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de permettre aux étudiants de l'utiliser de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Le programme d'informatique s'articule autour de quatre thèmes : statistiques descriptives bivariées, études de suites et de fonctions, simulation de lois, estimation.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc.), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Le langage informatique retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales, option technologique, est Python.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes exigibles du programme de première année sont exigibles, et leur syntaxe précise doit être rappelée. D'autres fonctions, par commodité, pourront être utilisées en classe, mais ceci ne pourra se faire qu'avec parcimonie. L'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique de connaissances mathématiques. Ces commandes supplémentaires devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires devront être données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de «copier-coller» qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

1 - Liste des savoir-faire et compétences

C1 : Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.

C2 : Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.

C3 : Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

C4 Stocker, organiser et extraire des données structurées volumineuses.

II - Langage Python

Les commandes exigibles ont été listées dans le programme de première année.

III - Liste des thèmes

1 - Statistiques descriptives bivariées

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1** et **C3**)

On s'appuiera sur les représentations graphiques pour montrer l'intérêt et les limites des indicateurs.

Série statistique à deux variables, nuage de points associé.

Point moyen (\bar{x}, \bar{y}) du nuage.

Covariance empirique, coefficient de corrélation empirique, droites de régression.

On tracera le nuage de points et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire.

Analyse de deux caractères quantitatifs : covariance empirique, corrélation linéaire empirique, ajustement affine par la méthode des moindres carrés.

On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer et on soulignera la distinction entre corrélation et causalité.

On pourra donner des exemples d'utilisation de la droite de régression pour faire des prévisions dans le cadre de problèmes concrets.

On pourra utiliser les commandes : `plt.scatter`, `np.polyfit`, `np.corrcoef` ou un tableur

2 - Simulation de lois, application au calcul d'espérances

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, et **C3**)

Ces simulations de variables aléatoires seront introduites comme illustrations de problèmes concrets, et permettront d'en vérifier la compréhension par les étudiants. Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique. On pourra utiliser les générateurs de nombres aléatoires selon les lois uniformes, binomiales, géométriques, normales, de la bibliothèque `numpy.random` : `rd.random`, `rd.binomial`, `rd.randint`, `rd.geometric`, `rd.poisson`, `rd.exponential`, `rd.normal` .

Simulation de la loi uniforme sur $[0, 1]$; sur $[a, b]$.

Simulation de phénomènes aléatoires à partir de lois usuelles.

Méthodes de simulation d'une loi géométrique.

Comparaison entre différentes méthodes : utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation du générateur `rd.random`.

Simulation de lois usuelles.

3 - Bases de données

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C4**)

Dans la continuité du programme de première année, on poursuit l'étude du langage SQL avec la création de table et l'interrogation avancée via l'instruction JOIN. On introduira ces concepts à l'aide d'exemples simples issus de contextes appropriés.

a) Commandes exigibles

"SELECT* FROM nom_de_table_1 INNER JOIN nom_de_table_2".

Réalisation d'une jointure. On pourra ajouter une condition "ON Φ " dans le cas où Φ est une conjonction d'égalités.

Aucune autre notion de jointure n'est dans ce programme.

"CREATE TABLE nom_de_table.

Création d'une table.

b) Commandes non exigibles

Les commandes non exigibles ont été listées dans le programme de première année.

4 - Théorème limite central

(Durée indicative : 4 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, et **C3**)

L'objectif est ici de dégager des conséquences importantes du théorème limite central qui n'est pas au programme. On met en œuvre sur des exemples ce théorème, qu'on pourra énoncer sans formaliser la notion de convergence. On souhaite dégager la pertinence de l'utilisation de la loi normale pour modéliser les phénomènes résultant de nombreux phénomènes aléatoires indépendants et de l'intervalle de confiance asymptotique dont on pourra mettre en valeur la précision.

Etude de la distribution des moyennes empiriques par simulation informatique de la loi de $X = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ où Y_1, \dots, Y_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi discrète d'espérance μ et d'écart type σ .

On cherche à visualiser la convergence vers la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ . On pourra produire un échantillon de taille N des moyennes empiriques d'échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ , et le représenter sous forme d'un histogramme. On observera l'effet de l'augmentation de n sur la dispersion des moyennes.

Simulation informatique de la loi de $X = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ où Y_1, \dots, Y_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme à densité sur $[0, 1]$.

On remarquera que la variable aléatoire centrée réduite associée à X est une approximation de la loi normale centrée réduite et on sensibilisera les étudiants au théorème limite central, en testant cette simulation avec d'autres lois.

Intervalle de confiance asymptotique.

On compare l'intervalle de confiance obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec l'intervalle de confiance asymptotique, qu'on présentera en invoquant le théorème limite central pour estimer le paramètre d'une loi de Bernoulli.