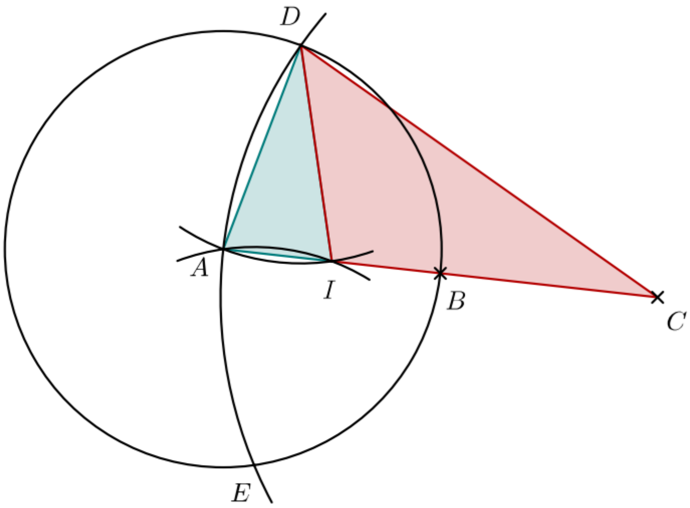
Correction du DHC n°8

1. Voir sujet.

2. On fait apparaître les triangles sur la figure suivante :



3. Par construction, les points D et A sont à égale distance du point C. Autrement dit, CAD est un triangle isocèle dont le sommet principal est le point C.
Donc les angles à sa bases sont égaux, et alors : $\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$.

4. Par construction, les points A et I sont à égale distance du point D. Autrement dit, DAI est un triangle isocèle dont le sommet principal est le point D.
Donc les angles à sa bases sont égaux, et alors : $\widehat{IAD} = \widehat{AID}$.

5. Les points A, I et C sont alignés donc : $\widehat{CAD} = \widehat{IAD}$.

6. D'après la question précédente, on a $\widehat{CDA} = \widehat{CAD} = \widehat{IAD} = \widehat{AID}$.
Les deux triangles possèdent donc 2 angles égaux deux à deux et sont alors semblables.
Quant aux côtés homologues, on peut dire que :

[AD] (dans le triangle CAD) est le côté homologue de [AI]

[CD] (dans le triangle CAD) est le côté homologue de [DI]

[AC] (dans le triangle CAD) est le côté homologue de [AD]

7. Puisque les triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés sont proportionnelles.
On a donc le tableau de proportionnalité suivant :

Longueurs dans DAI	AI	DI	AD
Longueurs dans CAD	AD	CD	AC

On veut alors déterminer le coefficient de proportionnalité dans ce tableau. Puisque $AD = AB$ et que $AC = 2 \times AB$, alors $AC = 2 \times AD$ et donc le coefficient de ce tableau vaut 2.
On en déduit que $AD = 2 \times AI$ et donc, puisque $AD = AB$, que $AB = 2 \times AI$.
Ceci prouve alors que I est le milieu du segment [AB].