Devoir en temps libre

À rendre le lundi 27/11/2023

■ ■ ■

Exercice 1. Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 60% de son cours. C'est-à-dire que pour chaque question la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{60}{100}$.
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements :

- R : « l'élève A connaît la réponse à la première question. »
- J : « l'élève A répond juste à la première question. »

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $\mathbf{P}\left(J\right) = \frac{11}{15}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève A aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $\mathbf{P}\left(X = k\right)$.

3. Donner $\mathbf{E}\left[X\right]$ et $\mathbf{V}\left(X\right)$, l'espérance et la variance de X.

4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et retirer deux points par réponse fausse.
Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

a) Justifier l'égalité $N = 3X - 40$.

b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.

a) Déterminer la loi de Y.

b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.

c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?