Nom :

Question de cours :

- Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Soit $x \in E$, on pose $y = f(x)$. À quel ensemble appartient y ? x est-il l'image de y ou l'inverse ? x est-il l'antécédent de y ou l'inverse ?
- Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Donner une expression de $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice :

1. On considère les applications : $\varphi : \ x \mapsto x^2$, $\psi : \ x \mapsto \sqrt{x}$ et $\theta : \ x \mapsto 2x + 1$ Écrire les applications suivantes comme compositions de φ, ψ et θ : $f_1 : \ x \mapsto 2x^2 + 1$ $\quad f_2 : \ x \mapsto |x|$ $\quad f_3 : \ x \mapsto 4x^2 + 4x + 1$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$. On note A l'ensemble des antécédents de 0 par f. Déterminer A.

Exercice :

Pour les applications suivantes, considérées de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, dire si elles sont bijectives :

1. $n \mapsto n^2$, $\quad$ 2. $n \mapsto n + 1$, $\quad$ 3. $n \mapsto 3n$

Exercice :

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

Dire si f est une bijection. Si ce n'est pas le cas, trouver deux intervalles $I, J \subset \mathbb{R}$ tels que la fonction

$$\begin{aligned} g\colon I &\to J \\ x &\mapsto g(x) = f(x) \end{aligned}$$

soit une bijection et donner une expression de la réciproque de g.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler la définition d'une application bijective.
- Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = 3x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{1}{3x}$. Donner une expression de $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice :

1. On considère les applications : $\varphi :\ x \mapsto x^3$, $\psi :\ x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\theta :\ x \mapsto x + 1$ Écrire les applications suivantes comme compositions de φ, ψ et θ : $f_1 :\ x \mapsto \frac{1}{x^3}$ $\qquad f_2 :\ x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $\qquad f_3 :\ x \mapsto \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 8$. On note A l'ensemble des antécédents de 0 par f. Déterminer A.

Exercice :

On considère l'application $x \mapsto 2x$. Dire si elle est bijective si c'est une application de :

1. $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\qquad$ 2. $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, $\qquad$ 3. $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

Exercice :

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -2x^2 - 8x \end{aligned}$$

Dire si f est une bijection. Si ce n'est pas le cas, trouver deux intervalles $I, J \subset \mathbb{R}$ tels que la fonction

$$\begin{aligned} g \colon I &\to J \\ x &\mapsto g(x) = f(x) \end{aligned}$$

soit une bijection et donner une expression de la réciproque de g.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- À quelle condition sur une application f peut-on parler d'application réciproque ? Rappeler la définition de l'application réciproque.
- Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Donner une expression de $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice :

1. On considère les applications : $\varphi : \ x \mapsto x^2 - 1$, $\psi : \ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $\theta : \ x \mapsto 3x - 1$ Écrire les applications suivantes comme compositions de φ, ψ et θ : $f_1 : \ x \mapsto 3x^2 - 4$ $\quad f_2 : \ x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - 1$ $\quad f_3 : \ x \mapsto \dfrac{1}{9x^2 - 6x}$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. On note A l'ensemble des antécédents de 0 par f. Déterminer A.

Exercice :

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 5x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

Dire si f est une bijection. Si ce n'est pas le cas, trouver deux intervalles $I, J \subset \mathbb{R}$ tels que la fonction

$$\begin{aligned} g \colon I &\to J \\ x &\mapsto g(x) = f(x) \end{aligned}$$

soit une bijection

Exercice :

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est injective si : $\forall x, y \in E, \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
Autrement dit, tout élément de F possède au plus un antécédent.
On dit que f est surjective si : $\forall y \in F, \exists x \in E, \ f(x) = y$. Autrement dit, tout élément de F possède au moins un antécédent. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
1. Montrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Commentaire :