■ ■ ■

Exercice 1. Soit $n > 0$ un entier et L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathrm{Im}(L)$ son image et $\mathrm{Ker}(L)$ son noyau. Pour tout $i \geqslant 1$, on note $L^i = \underbrace{L \circ L \circ \cdots \circ L}_{i \text{ fois}}$ la composée i fois de L.

Première partie

1. Soit $j \geqslant 1$ un entier, montrez que $\mathrm{Ker}(L^j) \subset \mathrm{Ker}(L^{j+1})$ et $\mathrm{Im}(L^{j+1}) \subset \mathrm{Im}(L^j)$. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(L^j)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(L^{j+1}))$.

2. Montrez qu'il existe i un entier positif tel que $\mathrm{Ker}(L^i) = \mathrm{Ker}(L^{i+1})$.

3. Soit donc i un entier positif tel que $\mathrm{Ker}(L^i) = \mathrm{Ker}(L^{i+1})$.

a) Montrez que $\mathrm{Im}(L^i) = \mathrm{Im}(L^{i+1})$.

b) Montrez que pour tout $j \geqslant i$, $\mathrm{Ker}(L^i) = \mathrm{Ker}(L^j)$ et $\mathrm{Im}(L^i) = \mathrm{Im}(L^j)$.

Deuxième partie

On dit que L est nilpotente s'il existe un entier positif p tel que $L^p = 0$ et on appelle *indice de nilpotence* le plus petit de ces entiers p.

4. a) Pour $n = 2$, montrez que l'application A définie par

$$A : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

est nilpotente et donnez son indice.

b) Montrez que l'application B définie par :

$$B : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

n'est pas nilpotente.

Soit L une matrice nilpotente d'indice p.

5. Montrez que pour tout entier positif $k < p$, $\dim(\mathrm{Ker}(L^k)) < \dim(\mathrm{Ker}(L^{k+1}))$ et que pour tout $k \geqslant p$, $\dim(\mathrm{Ker}(L^k)) = n$.

6. a) Montrez que la seule valeur propre d'une application linéaire nilpotente est 0.

b) On suppose que L est une application linéaire dont la matrice dans la base usuelle de $\mathbb{R}^n$ est triangulaire et dont la seule valeur propre est 0. Montrez que L est nilpotente.

c) Donnez dans le cas $n = 3$, un exemple d'application linéaire qui ne possède que 0 comme valeur propre réelle et qui n'est pas nilpotente.

7. a) Soient A et B deux applications linéaires nilpotentes qui commutent, c'est-à-dire telles que $A \circ B = B \circ A$. Montrez que $A + B$ est nilpotente.

b) Proposez deux applications linéaires nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente.
On pourra se placer dans le cas $n = 2$.