■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. Deux candidates, Alice et Béa se présentent à un concours, la première étant plus averse au risque. On pose A et B leurs notes respectives et on modélise l'aversion au risque de la façon suivante :

- A suit une loi discrète sur l'ensemble $[\![9, 11]\!]$ (probabilité $\frac{1}{3}$ pour chaque valeur),
- B suit aussi une loi uniforme discrète mais sur l'ensemble $[\![8, 12]\!]$ (probabilité $\frac{1}{5}$ pour chaque valeur).
- A et B sont indépendantes.

1. a) Calculer les espérances des variables A et B.

b) Calculer leurs variances.

2. Le concours retient la candidate ayant la meilleure note. En cas d'égalité, personne n'est sélectionné.

a) Quelle est la probabilité que $A = B$?

b) Conditionnellement à $B = 10$, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?

c) Dans le cas général, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?

d) Quelle est la probabilité qu'Alice soit sélectionnée ?

On suppose désormais qu'il y a deux candidates supplémentaires, Aria et Bénédicte, mais toujours une seule place au concours. Aria est averse au risque comme Alice, sa note A' est donc de même loi que A ; la note B' de Bénédicte est de même loi que B. Les notes sont toutes supposées indépendantes les unes des autres.

3. a) Quelle est la probabilité que $B = 12$?

b) Conditionnellement à $B = 12$, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?

c) Dans le cas général, quelle est la probabilité que Aria soit sélectionnée ?

d) Quelle est la probabilité que Alice ou Aria soit sélectionnée ?

e) Quelle est la probabilité que Béa ou Bénédicte soit sélectionnée ?

On observe 100 notes, $X_1, \ldots, X_{100}$, supposées indépendantes. On note p la proportion de ces variables aléatoires qui sont de même loi que B, les autres étant de même loi que A. On souhaite estimer cette proportion p.

4. a) On suppose que la première candidate est averse au risque, quelle est alors la loi conditionnelle de sa note X_1 ?

b) Même question s'il s'agit d'une candidate non averse au risque.

c) En déduire la loi non conditionnelle de X_1.

d) Calculer l'espérance de X_1.

e) On pose $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} (X_i - 10)^2$. Calculer son espérance.

f) Proposer un estimateur $\hat{p}$ sans biais de p.

Exercice 2.
Première partie
Soit $(a,b) \in]0,1[^2$ vérifiant $a+b<1$. Soit X une variable aléatoire discrète dont la distribution est donnée par :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{, avec probabilité } a \\ 0 & \text{, avec probabilité } 1-(a+b) \\ -1 & \text{, avec probabilité } b \end{cases}$$

1. Calculez l'espérance de X.

2. On pose $Y = X^2$.

a) Quelle est la loi de Y ?

b) Calculez l'espérance de Y.

c) Combien vaut la variance de X ?

d) Calculez la variance de Y.

e) Quelle est la loi de $P = \frac{Y+X}{2}$?

f) Quelle est la loi de $M = \frac{Y-X}{2}$?

3. Calculez

a) $\mathbf{P}_{[Y=1]}(X=1)$,

b) $\mathbf{P}_{[X=1]}(Y=1)$,

c) $\mathbf{P}(P=M)$,

d) $\mathbf{P}(PM=0)$.

4. a) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité

$$\mathbf{P}_{[Y=1]}(X=1) = \mathbf{P}_{[P=0]}(X=0) \ ? \tag{1.1}$$

Représentez l'ensemble des solutions dans un plan cartésien.

b) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité

$$\mathbf{P}_{[Y=1]}(X=-1) = \mathbf{P}_{[M=0]}(X=0) \ ? \tag{1.2}$$

Représentez l'ensemble des solutions sur le graphique précédent.

c) Les deux équations (1.1) et (1.2) peuvent-elles être simultanément vérifiées ?

Deuxième partie
On tire $X_1, \ldots, X_n$, un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X et, pour chaque tirage X_i, on définit les variables Y_i, P_i et M_i comme précédemment.

5. On pose $S_P = \sum_{i=1}^{n} P_i$.

a) Montrez que S_P donne le nombre de tirages X_i égaux à 1.

b) Quelle est la loi de S_P ?

c) On estime a par $\hat{a}_1 = \frac{S_P}{n}$. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_1$.

6. On suppose désormais que $a=b$.

a) Montrez que $a < \frac{1}{2}$.

b) On pose $S_M = \sum_{i=1}^{n} M_i$.

i. Pourquoi peut-on estimer a par $\hat{a}_0 = \frac{S_M}{n}$?

ii. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_0$.

c) Pour $t \in]0,1[$, on pose $\hat{a}_t = t\hat{a}_1 + (1-t)\hat{a}_0$.

i. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_t$.

ii. Pour quelle valeur de $t^* \in]0,1[$, a-t-on une variance minimale ?

d) Quel est le meilleur estimateur de a : $\hat{a}_1$, $\hat{a}_0$ ou $\hat{a}_{t^*}$?

e) Montrez que

$$\hat{a}_{t^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{2n}.$$

Exercice 3.
Quelques résultats d'analyse
On admettra la formule de Stirling : $n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

2. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$ et en déduire que la suite (u_n) est minorée.

3. En déduire un équivalent de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

5. Montrer que, pour tout entier n non nul, $\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$.

6. Préciser la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

7. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}$.

8. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul $0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}$.

b) Montrer que, pour tout entier $p \geqslant k$, $0 \leqslant a_p - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$.

c) En déduire que, pour tout entier k non nul, $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$.

Marche aléatoire sur une droite
Soit $(O; \overrightarrow{\imath})$ un axe gradué. Dans la suite du problème, tous les instants considérés sont des nombres entiers naturels.
Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$ saute à chaque instant sur le point d'abscisse $k+1$ ou sur le point d'abscisse $k-1$, avec la même probabilité. Chaque saut est indépendant du précédent.
La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n \geqslant 1)$.

9. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.

10. Pour tout $k \geqslant 1$, montrer que : $\mathbf{P}(O_{2k+1} = 1) = 0$ et $\mathbf{P}(O_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$.

11. Exprimer l'espérance $\mathbf{E}[U_n]$ en fonction des (a_k).

12. Montrer que $\mathbf{E}[U_n] = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+1}{4^k}\binom{2k}{k} - \frac{2k-1}{4^{k-1}}\binom{2k-2}{k-1}\right)$.

13. En déduire un équivalent simple de $\mathbf{E}[U_n]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Marche aléatoire dans le plan

Le plan est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Une particule située sur un point de coordonnées $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, saute à chaque instant sur l'un des points de coordonnées $(k+1, \ell+1)$, $(k+1, \ell-1)$, $(k-1, \ell+1)$ ou $(k-1, \ell-1)$ avec la même probabilité (i.e. qu'à chaque étape, la particule se déplace selon la diagonale d'un carré). Chaque saut est indépendant du précédent.
La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ $(n \geqslant 1)$.

14. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.

15. Pour tout $k \geqslant 1$, calculer $\mathbf{P}(O_{2k+1} = 1)$ et $\mathbf{P}(O_{2k} = 1)$.

16. Montrer que $\mathbf{E}[U_n] = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}$.

17. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4\pi k^2} \leqslant \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{\pi k}$.

18. En admettant que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n \geqslant 1}$ converge, déterminer un équivalent simple de $\mathbf{E}[U_n]$ lorsque n tend vers $+\infty$.