Devoir en temps libre

À rendre le lundi 11/09/2023

■ ■ ■

Exercice 1. On considère la fonction polynôme P, de degré 3, donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

1. Montrer que P s'annule pour $x = -1$.

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

3. En déduire que P admet deux racines et les déterminer.

4. Calculer, en les justifiant, les limites de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

5. Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations en faisant figurer les limites calculées à la question **4**.

6. Montrer que la courbe représentative de P dans un repère orthonormé admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{3}$.

7. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. Dans un repère orthonormé d'unité 3 cm, tracer la représentation graphique de P en faisant figurer les tangentes horizontales et en hachurant la surface correspondant au calcul de I. Pour cela, on donne $P\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq 1{,}19$.

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 2x - 1)\,\mathrm{e}^x\,.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

9. Calculer l'image de 0 par f.

10. Calculer, en les justifiant, les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

11. Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle s'annule en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

12. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation en faisant figurer les limites calculées à la question **10** et l'image de 0 obtenue à la question **9**.

13. Déterminer le signe de $f(-\sqrt{3})$ et $f(\sqrt{3})$.

14. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, admet une unique solution α.

b) Montrer que $\alpha < 0$.

15. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 et montrer qu'elle passe par $O = (0,0)$, l'origine du repère.

16. Dans cette question, on cherche à déterminer le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère.

a) Montrer que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 passe par l'origine si et seulement si

$$f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0.$$

b) En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 passe par l'origine si et seulement si $P(x_0) = 0$, où P est la fonction polynôme étudiée au début de l'exercice.

c) Conclure quant au nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère.