

## VII - Calcul matriciel

### À Savoir

**Opérations sur les matrices.** Addition, Multiplication par un nombre, Multiplication de matrices.

- \*  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ .
- \*  $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$ .
- \*  $A + 0 = 0 + A = A$ .
- \*  $A + (-A) = (-A) + A = 0$ .
- \*  $A \times I = I \times A = A$ .

**Attention.** En général,  $AB \neq BA$ .

### Exemple 1

Soit  $A$  une matrice carrée.

$$A^3 + 2A^2 + 3A = A \times A^2 + 2A \times A + 3A \times I = A(A^2 + 2A + 3I).$$

### À Savoir

**Systèmes linéaires.** Traduire un système linéaire en équation matricielle et réciproquement.

**Utilisation** en lien avec :

- \* la résolution de systèmes.
- \* les suites définies par récurrence.
- \* la formule des probabilités totales.

### Exemple 2

On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2w_n \end{cases} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n$$

### À Savoir

$$\begin{cases} A^0 = I, \\ A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}. \end{cases}$$

**Calculs** de puissances :

- \* formule donnée et démonstration par récurrence.
- \* puissance des matrices diagonales (par récurrence).
- \* formule du binôme de Newton. Si  $A \times B = B \times A$ , alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Utile surtout si  $A^k = 0$  pour  $k$  assez grand.

- \* si  $A = PDP^{-1}$ , alors  $A^n = PD^nP^{-1}$  (par récurrence).

### À Savoir

**Définition de l'inverse.** Il existe  $B$  telle que  $AB = I$ . Alors,  $A^{-1} = B$  et  $BA = I$ .

**Existence** d'un inverse :

- \* donnée d'une matrice  $B$  telle que  $AB = I$ .
- \* donnée d'une relation telle que  $a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$ .
- \* matrice d'ordre 2 et  $ad - bc \neq 0$  + Calcul.
- \* matrice diagonale & tous les coefficients diagonaux non nuls + Calcul.
- \* matrice triangulaire & tous les coefficients diagonaux non nuls.
- \* calcul par inversion d'un système linéaire ou méthode du pivot sur l'identité.

### Exemple 3

Si  $A$  est une matrice telle que  $A^3 + 2A^2 + A + 5I = 0$ . Alors,

$$A(A^2 + 2A + I) = -5I$$

$$A \times \left( -\frac{1}{5}(A^2 + 2A + I) \right) = I.$$

Ainsi,  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\frac{1}{5}(A^2 + 2A + I)$ .

**Non-inversibilité.** Utiliser une relation  $AB = AC$  (ou  $AB = 0$  ou ...). Supposer par l'absurde que  $A$  est inversible et en déduire  $B = C$  (ou  $B = 0$  ou ...). Obtenir une contradiction.