Devoir en temps libre

À rendre le lundi 26/02/2024

■ ■ ■

Exercice 1. Dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n, on dit qu'une matrice est semi-magique si et seulement si les sommes des coefficients d'une même ligne sont toutes égales entre elles et égales aux sommes des coefficients d'une même colonne. On note $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des matrices semi-magiques de taille n :

$$A \in \mathbb{S}_n \ \Leftrightarrow\ \exists\, c \in \mathbb{R}\ ;\ \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} = c \text{ et } \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} = c.$$

1. On fixe pour cette partie $n = 3$ et on note J la matrice ne contenant que des 1 :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifiez que $J \in \mathbb{S}_3$. Proposez une matrice $N \notin \mathbb{S}_3$.

b) Soit $M \in \mathbb{S}_3$. Montrez qu'il existe un réel a tel que $JM = MJ = aJ$. Quelle est la valeur de a ?

c) Montrez réciproquement que si une matrice M vérifie $JM = MJ = aJ$ pour a un réel quelconque alors $M \in \mathbb{S}_3$.

2. On fixe pour cette partie $n = 2$.

a) Montrez que $\mathbb{S}_2$ est un espace vectoriel.

b) Proposez une base $\mathscr{B}$ et en déduire la dimension de cet espace vectoriel.

On définit l'application linéaire f qui à toute matrice $A \in \mathbb{S}_2$ associe $\sum_{i=1}^{2} a_{1,i}$.

c) Quel est le noyau de f ?

d) Quelle est la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$? son rang ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire discrète prenant trois valeurs, selon la loi de probabilité suivante : $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(X = 2) = \frac{b}{3}$ et $\mathbf{P}(X = 3) = \frac{c}{3}$.

1. Quelles contraintes s'appliquent sur b et c ? Exprimer l'espérance de X en fonction de b.

2. Soit 3 tirages indépendants et identiquement distribués (X_1, X_2, X_3) de X. Exprimer les probbilités suivantes en fonction de b.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une suite strictement décroissante ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir une suite constante ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir une suite croissante ?

3. Soit n tirages indépendants et identiquement distribués $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X.

a) Montrer que la moyenne empirique $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ des observations X_i de X est un estimateur sans biais de l'espérance de X.

b) En déduire un estimateur $\hat{b}$ sans biais de b.

c) Quelle est sa variance ?

4. On note n_2 le nombre d'observations de $X = 2$ parmi nos tirages de X.

a) Montrer que n_2 peut s'interpréter comme le résultat d'une répétition d'épreuves de Bernoulli.

b) En déduire l'espérance de n_2 et proposer un nouvel estimateur $\widetilde{b}$ sans biais de b.

c) Quelle est sa variance ?

5. On apprend que n_3 observations de la réalisation $X = 3$ ont été effectuées, parmi les n tirages. On a donc n_2 observations de $X = 2$ et n_3 observations de $X = 3$ parmi n tirages.

a) Calculer l'espérance de n_3 et proposer un troisième estimateur $\ddot{b}$ sans biais de b.

b) Quelle est sa variance ?

6. Quel est le meilleur estimateur de b ? On pourra discuter du résultat suivant la valeur de b.