Devoir en temps libre

À rendre le lundi 09/10/2023

■ ■ ■

Exercice 1.
On suppose dans cet exercice qu'on ne connaît pas de valeur précise de $\sqrt{2}$. Ainsi, on utilisera uniquement les propriétés de la fonction racine carrée.

Partie I : Une méthode géométrique

Soit $a > 0$ tel que $a^2 \neq 2$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}_+\backslash\{a\}$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \dfrac{2 + au_n}{a + u_n}$.

1. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n \neq -a$ et $u_n \neq a$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$ dans un repère orthonormé, A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a et M_n le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse u_n.

2. Montrer que, pour tout n entier naturel le réel u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite (AM_n) avec l'axe des abscisses.

3. Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que les points A, M_0 et M_1.

4. Soit n un entier naturel.

a) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a-\sqrt{2}}{a+u_n}(u_n - \sqrt{2})$.

b) En déduire que $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right| \cdot \left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

c) Montrer finalement que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \cdot \left|u_0 - \sqrt{2}\right|$.

5. Choisir un réel a pour lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Partie II : Méthode de Newton - Algorithme de Babylone

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $a_0 = 1{,}5$ et pour tout entier n naturel, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$. On note $g : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

6. Dresser le tableau de variations de g.

7. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

8. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$.

9. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n^2$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n - \sqrt{2} \leqslant (a_0 + \sqrt{2}) \cdot (a_0 - \sqrt{2})^{2^n}$.

10. En notant A_n le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a_n, montrer que a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}$ en A_n avec l'axe des abscisses.