



Exercice 1. Vous randonnez dans le parc des Corneilles. Dans ce parc, $\frac{2}{3}$ des visiteurs sont des touristes. Quand vous posez une question à un touriste, sa réponse est juste avec probabilité $\frac{3}{4}$. Si un touriste se voit poser plusieurs fois la même question, il répond toujours indépendamment de ses réponses précédentes. Les autres visiteurs du parc sont des autochtones et ils mentent toujours.

Vous êtes perdu.e et ne savez plus si la sortie du parc se trouve vers l'Est ou vers l'Ouest. Vous demandez au premier passant rencontré si la sortie se trouve vers l'Est ou vers l'Ouest.

1. Le passant vous répond que la sortie se trouve vers l'Est. Quelle est la probabilité que sa réponse soit correcte ? Vous pourrez utiliser les événements :

C « La première réponse est correcte. »

T « la personne interrogée est un touriste. »

2. Vous reposez la même question à la même personne et obtenez la même réponse. Vous pourrez utiliser l'événement :

E_2 « Les deux réponses sont identiques. »

a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux réponses identiques ?

b) Quelle est la probabilité que la réponse obtenue soit correcte sachant qu'on a obtenu deux réponses identiques ?

3. Vous reposez encore la même question à la même personne et obtenez la même réponse. Sachant que ses trois réponses ont été identiques, quelle est la probabilité que sa réponse soit correcte ? Vous pourrez utiliser l'événement :

E_3 « Les trois réponses sont identiques. »

4. Vous reposez la même question, pour la quatrième fois, à la même personne, et obtenez la même réponse. Quelle est la probabilité que cette réponse soit correcte ? Vous pourrez utiliser l'événement :

E_4 « Les quatre réponses sont identiques. »

5. Supposons que le passant ait répondu les 3 premières fois que la sortie se trouve vers l'Est et que, à la quatrième demande, il ait répondu que la sortie se trouve à l'Ouest. Quelle est alors la probabilité que la sortie soit à l'Est (i.e. que sa première réponse soit correcte) ? Vous pourrez utiliser l'événement :

D « Les trois premières réponses sont identiques et la quatrième est différente. »

Votre ami Thomas, qui randonnait en même temps que vous mais sur d'autres chemins, s'est perdu dans ce même parc. Il suspecte que la sortie se trouve vers l'Est avec une probabilité ε , où ε est un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi, en notant E l'événement « la sortie se trouve vers l'Est », alors $\mathbf{P}(E) = \varepsilon$. Il utilise la même stratégie que vous. Ainsi, il arrête le premier passant qu'il croise et lui demande plusieurs fois si la sortie se trouve vers l'Est ou vers l'Ouest.

6. On souhaite montrer que, quelle que soit la réponse fournie par le passant à la première question, Thomas continue à penser que la sortie se trouve vers l'Est avec probabilité ε . Vous pourrez utiliser les événements :

E_1 : « La première réponse indique la sortie vers l'Est. »

W_1 : « La première réponse indique la sortie vers l'Ouest. »

a) Montrer que $\mathbf{P}(E \cap E_1) = \frac{1}{2}\varepsilon$.

b) En utilisant le système complet d'événements (E, \bar{E}) , calculer $\mathbf{P}(E_1)$.

c) En déduire que $\mathbf{P}_{E_1}(E) = \varepsilon$.

d) Montrer de manière analogue que $\mathbf{P}_{W_1}(E) = \varepsilon$.

7. Si Thomas pose sa question deux fois au même passant et que les deux réponses qu'il reçoit sont identiques, montrer qu'il continue à penser que la sortie est vers l'Est avec probabilité ε . Vous pourrez utiliser les événements :

E_2 : « Les deux réponses indiquent la sortie vers l'Est. »

W_2 : « Les deux réponses indiquent la sortie vers l'Ouest. »

8. Si Thomas obtient 3 réponses identiques, quelles sont les probabilités, en fonction de ces réponses, qu'il pense que la sortie est vers l'Est ? Évaluer cette quantité lorsque $\varepsilon = \frac{9}{20}$. Vous pourrez utiliser les événements :

E_3 : « Les trois réponses indiquent la sortie vers l'Est. »

W_3 : « Les trois réponses indiquent la sortie vers l'Ouest. »