■ ■ ■

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi : E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$ une application multilinéaire et $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions dérivables de I, intervalle de $\mathbb{R}$ à valurs dans $\mathbb{R}$. On étudie ici la dérivabilité de $\psi : t \mapsto \varphi(f_1(t), \ldots, f_p(t))$.
Pour cela, on étudie le taux d'accroissement de ψ. Soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} &= \frac{1}{h}\big[\varphi(f_1(t+h), \ldots, f_p(t+h)) - \varphi(f_1(t), \ldots, f_p(t))\big] \\
&= \frac{1}{h}\big[\varphi(f_1(t+h), \ldots, f_p(t+h)) - \varphi(f_1(t), f_2(t+h), \ldots, f_p(t+h))\big] \\
&\quad + \frac{1}{h}\big[\varphi(f_1(t), f_2(t+h), \ldots, f_p(t+h)) - \varphi(f_1(t), \ldots, f_p(t))\big] \\
&= \varphi\left(\tfrac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h}, f_2(t+h), \ldots, f_p(t+h)\right) \\
&\quad + \frac{1}{h}\big[\varphi(f_1, f_2(t+h), \ldots, f_p(t+h)) - \varphi(f_1(t), f_2(t), f_3(t+h), \ldots, f_p(t+h))\big] \\
&\quad + \frac{1}{h}\big[\varphi(f_1(t), f_2(t), f_3(t+h), \ldots, f_p(t+h)) - \varphi(f_1(t), \ldots, f_p(t))\big] \\
&= \sum_{i=1}^{p} \varphi\big(f_1(t), \ldots, f_{i-1}(t), \tfrac{f_i(t+h)-f_i(t)}{h}, f_{i+1}(t+h), \ldots, f_p(t+h)\big).
\end{aligned}$$

Comme les fonctions f_i sont continues et dérivables, et que la fonction φ est une application multilinéaire sur un espace de dimension finie donc est continue,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} = \sum_{i=1}^{p} \varphi\left(f_1(t), \ldots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \ldots, f_p(t)\right).$$

Ainsi, $\varphi(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable et

$$\varphi(f_1, \ldots, f_p)' = \sum_{i=1}^{p} \varphi\left(f_1(t), \ldots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \ldots, f_p(t)\right).$$