— 1 —

Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence sert à montrer qu'une infinité de propositions P_n sont vraies pour $n \geq n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. On s'y prend en 3 étapes :

- **Initialisation :** On montre qu'une proposition P_{n_0} est vraie pour $n_0 \in \mathbb{N}$.

- **Hérédité :** On montre que pour tout $n \geq n_0$, si la proposition P_n est vraie, alors la proposition P_{n+1} l'est aussi.
On dit que la propriété « P_n est vraie » est héréditaire.

- **Conclusion :** Puisque on a initialisé à n_0 et que notre propriété est héréditaire, alors pour tout $n \geq n_0$: P_n est vraie.

Exemple :
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = 3u_n + \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = 2$.
Montrer par récurrence que (u_n) est croissante.

Propriété 1 : Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel $a \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Preuve. Soit $a \geq 0$, on va montrer par récurrence que l'inégalité est valable pour tout entier naturel n :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$.
On a donc bien que $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a$.

- **Hérédité :** On suppose que l'inégalité est vérifiée pour un entier naturel n, montrons qu'elle l'est aussi pour $n+1$:

$$\begin{aligned}(1+a)^n \geq 1+na &\iff (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na) \quad \text{car } 1+a \geq 1\\ &\iff (1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2\\ &\iff (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2\\ &\iff (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \quad \text{car } a \geq 0\end{aligned}$$

Notre propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion :** Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

$\square$

🖋 **Exemple :**
Soit $q > 1$, montrer que pour tout entier naturel n, on a : $q^n \geq 1+n(q-1)$