■ ■ ■

Exercice 1. On pose, pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$:

$$f(x) = x\ln(1+x).$$

note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère plan.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$: $f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$.

c) En déduire les variations de la fonction f' sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

3. Tracer l'allure $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan, en soignant le tracé au point d'abscisse 0.

4. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

b) Vérifier que : $\forall\, x \in [0,1]$, $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

c) En déduire la valeur de l'intégrale I.

5. On considère à présent la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in]-1,+\infty[,\ f_n(x) = x^n\ln(1+x).$$

On pose alors pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

6. a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Problème. ()

On note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

et on note $u \in \mathscr{L}(E)$ l'unique endomorphisme ayant A pour matrice dans la base $\mathscr{C}$.

Partie I : Étude de la matrice A

1. a) Déterminer le rang de la matrice A.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

c) Déterminer $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

2. On définit les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que $P = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}$ soit la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ vers la base $\mathscr{B}$.

b) Déterminer la matrice D de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$.

c) Exprimer la matrice A en fonction des matrices D et P.

3. Calculer la matrice P^{-1}.

4. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $MD = DM$ si et seulement si M est diagonale.

Partie II : Résolution de $X^2 = A$

On propose de résoudre, dans cette partie, l'équation $X^2 = A$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $Y = P^{-1}XP$. Déterminer une condition (C) sur Y équivalente à $X^2 = A$.

6. a) Montrer que si Y vérifie la condition (C), alors $YD = DY$.

b) En déduire que la matrice Y satisfait la condition (C) si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \{-1, 1\}^2$ tel que $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}$.

7. En déduire les matrices $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ satisfaisant $X^2 = A$.

8. a) Déterminer le nombre m de solutions de l'équation $X^2 = A$. On notera $\{X_1, \ldots, X_m\}$ l'ensemble de ces solutions.

b) Déterminer, sans calcul, la somme S de ces m solutions, i.e. $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$.

c) Montrer, sans calcul, que si X_i et X_j sont deux solutions, alors X_i et X_j commutent.

d) Déterminer le produit $T = X_1 \cdots X_m$ en fonction de A.

Partie III : Calcul du commutant de A

On note $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ ; \ AM = MA\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A.

9. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

10. Montrer que $M \in \mathscr{C}(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est diagonale.

11. En déduire qu'il existe trois matrices M_1, M_2, M_3 que vous expliciterez telles que

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \lambda M_1 + \mu M_2 + \nu M_3, \ (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

12. Calculer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

Problème. () L'objectif du problème est l'étude de l'efficacité d'un traitement T destiné à éradiquer une population de cellules indésirables. Pour tester T, on agit comme suit :

1. On prélève une cellule unique C_0 à laquelle on applique T, ce qui a pour effet de partager C_0 en un nombre naturel aléatoire Z_1 de cellule(s) identique(s) à C_0 qu'on appellera enfant(s) de C_0 ou descendant(s) de première génération de C_0 lorsque $Z_1 > 0$. Si $Z_1 = 0$ (ce que l'on souhaite), le traitement est terminé.
2. Lorsque C_0 a k enfant(s) avec $k \geqslant 1$, on leur applique à chacun le traitement T et leur comportement sera le même que celui de C_0 et ceci indépendemment les uns des autres lorsque $k > 1$.
3. À l'issue de cette deuxième étape, on obtiendra un nombre naturel aléatoire Z_2 de descendant(s) de deuxième génération. Si $Z_2 = 0$, on s'arrête. Sinon, on poursuit dans les mêmes coniditions et, pour $n \geqslant 1$, on notera Z_n le nombre de descendants de n-ième génération tant que $Z_n > 0$.

Hypothèses & Mises en équation. On dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dont on ne précisera pas les caractéristiques. On supposera que $Z_0 = 1$. Pour tout entier naturel k, on notera $p_k = \mathbb{P}(Z_1 = k)$ (ce réel représente donc la probabilité, pour une cellule quelconque, d'avoir k enfants). On supposera qu'il existe un entier naturel K non nul tel que $p_K \neq 0$ et pour tout $k > K$, $p_k = 0$. Bien entendu, $\sum_{k=0}^{K} p_k = 1$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'ensemble des valeurs que peut prendre Z_n est $Z_n(\Omega) \subset [\![0, K^n]\!]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_{k,n})_{k \in [\![1, K^n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que Z_1. $X_{k,n}$ représente le nombre d'enfants qu'aura la k-ème cellule de la n-ème génération. Alors, d'après la description précédente, si $Z_n > 0$, alors $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n}$. Sinon, $Z_{n+1} = 0$.

2. Montrer que, s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $Z_n = 0$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$, $Z_{n+k} = 0$.

On notera, pour tout entier naturel n, $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Lorsque $\lim u_n = 1$, T est dit efficace.
Remarque. Les cellules de la $(n+1)$ème génération de C_0 sont celles de la n-ème génération de l'ensemble des enfants de C_0. Ceci se formalise comme suit. Soit $n \in [\![1, n]\!]$.

3. Cas triviaux.

a) Décrire la suite (Z_n) lorsque $p_0 = 1$.

b) Que se passe-t-il lorsque $p_0 = 0$.
On supposera dans la suite que $p_0 \in]0, 1[$.

Partie IV : Un premier exemple

On suppose dans cette partie que la loi de Z_1 est définie par $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ et $p_0 + p_1 = 1$.

4. Calculer u_0 et u_1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $Z_n \in \{0, 1\}$.

5. Soit n un entier naturel.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = 0)p_0 + \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = 1)p_1.$$

b) Montrer que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = 1) = u_n$.

c) En déduire que $u_{n+1} = p_0 + p_1 u_n$.

6. En déduire la valeur de u_n en fonction de p_0, p_1 et n. Le traitement est-il efficace ?

Partie V : Un deuxième exemple

On suppose dans cette partie que la loi de Z_1 est définie par p_0, p_1, p_2 tels que $p_0 > 0$, $p_2 > 0$ et $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

7. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = k) = u_n^k$.
On pourra décomposer les individus de la génération $n + 1$ en fonction de leur ancêtre de la génération 1.

8. En déduire que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = p_0 + p_1 u_n + p_2 u_n^2$.

On note f la fonction définie pour tout réel $x \in [0, 1]$ par $f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$.

9. a) Déterminer les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ puis le signe de f, f' et f'' (soyez précis quant aux inégalités strictes et larges).

b) Représenter le graphe de f dans les trois cas suivants : $f'(1) < 1$, $f'(1) = 1$ et $f'(1) > 1$ en choisissant, dans chacun de ces cas, des valeurs simples de p_0, p_1 et p_2.

10. On note Δ la première bissectrice, d'équation cartésienne $y = x$.

a) Montrer que, lorsque $f'(1) \leqslant 1$, le graphe de f se trouve au-dessus Δ.

b) Lorsque $f'(1) = 1$, montrer que le graphe de f est tangent à Δ au point de coordonnées $(1, 1)$.

c) Lorsque $f'(1) > 1$, montrer que le graphe de f recoupe Δ au point d'abscisse p_0/p_2.

11. Montrer que la suite de terme général u_n est strictement croissante et majorée par $\min\{p_0/p_2, 1\}$.

12. En déduire la limite de (u_n) dans les différents cas envisagés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le traitement soit efficace.

Dans la suite, on cherche à préciser la convergence de la suite (u_n).

13. Dans le cas où $f'(1) < 1$, montrer que pour tout entier naturel n, $1 - u_{n+1} \leqslant (1 - u_0)[f'(1)]^{n+1}$.

14. On suppose que $f'(1) = 1$. Soit n un entier naturel.

a) Montrer que $\frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{p_0}{p_1+p_0(1+u_n)} \leqslant 1$.

b) En déduire que $1 - u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$.

Partie VI : Généralisation partielle

On suppose qu'il existe un entier naturel k supérieur ou égal à 2 tel que $p_k > 0$ et $\sum_{j=0}^{k} p_j = 1$. On notera $m = \mathbb{E}[Z_1]$. Pour tout réel $s \in [0,1]$, on note $g_n(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_n}\right]$ et $g(s) = \mathbf{E}\left[s^{Z_1}\right]$. Enfin, $g^{(n)}$ désignera l'itérée n-ème de g, i.e. $g^{(n)} = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}$.

15. Propriétés de g.

a) Exprimer $g(0)$ et $g(1)$ en fonction de $p_0, \dots, p_k$.

b) Exprimer $g'(1)$ en fonction de m.

c) Montrer que $g'' > 0$.

d) Exprimer $g_n(0)$ en fonction de u_n.

16. Probabilité d'extinction.

a) Montrer que $g_n = g^{(n)}$.

On pourra décomposer en fonction des valeurs que peut prendre Z_n.

b) Montrer que la suite $(g_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel q.

On admettra que $q = \mathbb{P}(\exists\, n \in \mathbb{N}\ ;\ Z_n = 0)$.

Si vous avez du temps, montrez ce résultat...

17. On veut montrer que g admet au plus un point fixe dans $]0,1[$. Pour cela, on suppose que g admet deux points fixes dans $]0,1[$ que nous noterons q_1 et q_2.

a) Montrer qu'il existe deux réels distincts ξ_1, $\xi_2 \in]0,1[$ tels que $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 1$.

b) Conclure.

18. Le cas $m \leqslant 1$. Soit f la fonction définie pour tout $s \in [0,1]$ par $h(s) = g(s) - s$.

a) Montrer que la fonction h est strictement décroissante.

b) En déduire que pour tout $s \in [0,1[$, $g(s) > s$.

c) En déduire que $q = 1$.

19. Le cas $m > 1$.

a) Montrer qu'il existe un réel $s_0 \in [0,1[$ tel que pour tout $s \in]s_0,1[$, $g(s) < s$.

b) En déduire que $q < 1$.

20. Le cas $m = 1$. On définit sur $[0,1[$ la fonction b par $\frac{1}{1-g(s)} = \frac{1}{1-s} + b(s)$.

a) Calculer $\lim_{s\to 1} b(s)$.

b) Déterminer un équivalent de $1 - g_n(0)$.