Nom :

Question de cours :

- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. À quelle condition peut-on effectuer le produit AB ?
- Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comment appelle-t-on ce genre de matrice ? Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut D^n ?

Exercice :

Lorsque c'est possible, calculer les matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice :

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $QP = PQ = I_2$.

2) Calculer $D = QAP$. Que remarque-t-on ? Montrer que $A = PDQ$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nQ$.

4) Donner l'expression de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire celle de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -3 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Donner toutes les valeurs de a telles que A et B commutent.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler ce que sont les matrices triangulaires inférieures et supérieures et les matrices diagonales. Donner des exemples.
- Donner une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice :

Lorsque c'est possible, calculer les matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice :

On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= 3y_n + z_n \\ z_{n+1} &= 3z_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

1) Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = A^n U_0$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de A^n et calculer les valeurs de x_n, y_n, z_n.

Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_2$. En déduire une expression de A^5 en fonction de A et I_2.
Calculer alors A^5.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler ce qu'est la distributivité du produit matriciel.
- Donner la formule de Newton pour les matrices en rappelant dans quels cas elle s'applique.

Exercice :

Lorsque c'est possible, calculer les matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2, A^3 et A^4.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = 2^{n-1} A$.

Exercice :

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - 4A^2 + 8A - 15I_n = 0_3$ et en déduire que A est inversible et donner une expression de son inverse.

Commentaire :