■ ■ ■

Exercice 1.

1. On pose $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x + y = 1,\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0\right\}$.

a) Dessiner C dans le plan $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que si $(x, y) \in C$, alors $1 - 2\sqrt{xy} \geqslant 0$.

c) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

On cherche à généraliser l'expression précédente pour trois réels positifs x, y, z.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$. On cherche à maximiser f sous la contrainte

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 1,\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, z \geqslant 0\right\}.$$

a) Pourquoi le maximum de f est-il atteint pour $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$?

b) Écrire le lagrangien $L(x, y, z, \lambda)$ associé au problème sous contrainte où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un multiplicateur de Lagrange.

c) Calculer le gradient de L.

d) Déterminer les conditions du premier ordre.

e) En déduire que le maximum de f sous la contrainte C est atteint pour $x = y = z$.

f) Quelle est la valeur de ce maximum ?

3. Soit maintenant x, y, z trois réels positifs. Montrer que

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}.$$