■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer. Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. Soit M et I les matrices d'ordre 3 définies par : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer M^2 et M^3 et en déduire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que M n'est pas inversible.

b) Pour tout entier $n \geqslant 3$, déterminer M^n.

c) Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$. En déduire que $(I - M)$ est inversible et donner son inverse $(I - M)^{-1}$.

d) Déterminer un polynôme annulateur de la matrice M.

e) En déduire la seule valeur propre possible de M.

2. On pose : $S = M + I$.

a) À l'aide de la formule du binôme, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice S^n en fonction de I, M et M^2.

b) Déterminer la deuxième colonne de la matrice S^n.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ les trois suites définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ w_0 = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} & = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} & = -3u_n + w_n \\ w_{n+1} & = u_n \end{cases}.$$

a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

c) Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n. Montrer que $u_n + v_n + w_n = 1$.

4. Dans cette question, on se propose de déterminer une matrice J d'ordre 3, triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux nuls et une matrice P d'ordre 3, inversible, qui vérifient la relation $J = PMP$.

a) On pose : $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices colonnes V et W définies par : $V = -MU$ et $W = M^2 U$.

b) Soit P la matrice d'ordre 3 dont la première colonne est W, la deuxième est V et la troisième est U.
Calculer P^2 ; en déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

c) Expliciter la matrice $J = PMP$.

Exercice 2. On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} & = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} & = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2, v_1 et v_2.

2. Compléter le script Python suivant qui permet de déterminer u_n et v_n pour n fixé à 50.

```
n = ...
u = ...
v = ...
for i in range(1, n+1):
    u = ...
    v = ...

print(u)
print(v)
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}w_n$.

b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

c) i. Montrer que l'on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

ii. En déduire à l'aide de la question **3.a)** l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

iii. Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.

d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.

e) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.

Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.

5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}([X = n]) = t_n$.

a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y.

b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 3. On considère la fonction f définie par :

$$\forall\ x \in [1, +\infty[,\ f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

1. a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout t de $[1, x]$, puis montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Justifier l'existence, sur $[1, +\infty[$, de la dérivée f' de la fonction f et montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

d) Montrer que la fonction f est convexe sur $[1, +\infty[$.

e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ?

Dans la suite, on se propose de montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 1$.

2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par :

$$\forall\, t \in [1,+\infty[,\ g(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}.$$

b) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant \int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\,\mathrm{e}$.

c) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 3, on a l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_3^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x-3}{x^3}\,\mathrm{e}^x\,.$$

3. a) Grâce à une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x de $[1,+\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) À l'aide d'une deuxième intégration par parties, établir l'égalité suivante :

$$\forall\, x \in [1,+\infty[,\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\,\mathrm{e} + 2\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. a) Utiliser les questions précédentes pour déterminer un encadrement de $f(x)$ qui soit valable pour tout réel x de $[3,+\infty[$.

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} xf(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 1$.

Exercice 4. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n (respectivement Y_n) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la n-ième expérience, c'est-à-dire après le tirage d'une boule et de la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'événement : « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k-ième tirage ».

1. a) Justifier que $X_1(\Omega) = [\![1,2]\!]$. Donner la loi de X_1. Calculer $\mathbf{E}[X_1]$ et $\mathbf{V}(X_1)$.

b) Exprimer les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$ en fonction des événements B_1, B_2, R_1 et R_2.

c) Montrer que X_2 suit la loi discrète uniforme sur $[\![1,3]\!]$. En déduire $\mathbf{E}[X_2]$ et $\mathbf{V}(X_2)$.

2. a) Donner sous forme de tableau la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

b) Calculer la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer l'événement $[X_n = 1]$ en fonction des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

b) Montrer que $\mathbf{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{n+1}$. De même, calculer $\mathbf{P}([X_n = n+1])$.

4. a) Établir pour tout entier $k \in [\![2, n+1]\!]$, les égalités suivantes :

$$\mathbf{P}_{[X_n=k-1]}([X_{n+1} = k]) = \frac{k-1}{n+2} \text{ et } \mathbf{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = k]) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

b) En déduire pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, une relation entre $\mathbf{P}([X_{n+1} = k])$, $\mathbf{P}([X_n = k])$ et $\mathbf{P}([X_n = k-1])$.

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

5. On rappelle que l'appel à la fonction `randint(a, b)` du module `numpy.random` renvoie un entier suivant une loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{a, a+1, \ldots, b-1\}$. Compléter le programme suivant afin qu'il simule une réalisation de la variable aléatoire X_{20}.

```
import numpy.random as rd
n = ...
r = 1
b = 1
for k in range(1, n+1):
    if rd.randint(1, k+2) <= r:
        ....
    else:
        ....
x = ...
print(x)
```

6. a) Justifier que les variables aléatoires X_n et Y_n sont de même loi.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, que vaut $X_n + Y_n$?

c) Quel est le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$ de X_n et Y_n ?