



Rappels sur les suites - Récurrence


Rappels sur les suites

 **Exercice 1** Déterminer la nature (arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre) des suites suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a. } u_n = 0,3n + 5 & \text{b. } u_n = \frac{5n+1}{2} & \text{c. } u_n = \frac{2n+1}{n+3} & \text{d. } u_n = \frac{5^n}{4} \\ \text{e. } \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{4}{3}u_n \\ u_1 = 2 \end{cases} & \text{f. } \begin{cases} u_{n+1} - u_n = 9 \\ u_0 = 5 \end{cases} & \text{g. } u_n = \frac{7^n}{3^{n+1}} & \text{h. } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n \\ u_0 = 5 \end{cases} \end{array}$$


 **Exercice 2** On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite et conjecturer une expression pour son terme général ;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \neq 0$ et on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.
Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de v_n et en déduire celle de u_n .


 **Exercice 3** On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$


1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite et conjecturer une expression pour son terme général ;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 2$.
Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de v_n et en déduire celle de u_n .

Démonstration par récurrence

 **Exercice 4** On considère la même suite (u_n) qu'à l'exercice précédent.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2 \times 4^n + 2$$

 **Exercice 5** Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = 3 - 2^{n+1}$.

 **Exercice 6**

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2$.


 **Exercice 7** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$.

1. Calculer les premiers termes et conjecturer une expression pour u_n .
2. Démontrer la conjecture par récurrence.

 **Exercice 8** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

 **Exercice 9** Démontrer par récurrence pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1 + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \cdots + (n \times n!) = (n+1)! - 1$$

 **Exercice 10** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$


Sommes

 **Exercice 11** Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.

1. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Donner une expression de S_n pour tout entier naturel n .

2. Calculer la somme $S = \sum_{k=5}^{12} u_k = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$.

 **Exercice 12** Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 3$.

1. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Donner une expression de S_n pour tout entier naturel n .

2. Calculer la somme $S = \sum_{k=3}^9 u_k = u_3 + u_4 + \cdots + u_9$.