

VIII - Probabilités

I - Univers

À Savoir

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

Exemple 1

Les résultats obtenus à l'issue de deux lancers successifs d'un dé.

À Savoir

L'**univers** est l'ensemble des résultats possibles pour une expérience. Généralement noté Ω .

Exemple 2 - 2 lancers d'un dé

$$\Omega = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq 6\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$$

À Savoir

Un **événement** est une partie (ou sous-ensemble) de l'univers Ω .

Exemple 3 - 2 lancers d'un dé

A : obtenir un nombre pair lors du premier lancer.
 B : la somme des deux lancers est un nombre pair.

À Savoir

Deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$

Exemple 4 - 2 lancers d'un dé

A : obtenir un nombre pair lors du premier lancer.

B : la somme des deux lancers vaut 2.

Si on considère l'événement $A \cap B$, le premier dé renvoie un nombre pair, donc supérieur ou égal à 2. Comme le second dé renvoie au moins 1, la somme des deux est supérieure ou égale à 3. Ainsi, A et B sont incompatibles.

À Savoir

L'événement **contraire** de A , noté \overline{A} , est l'ensemble des expériences de Ω qui ne sont pas dans A .

Exemple 5 - 2 lancers d'un dé

A : obtenir un nombre pair lors du premier lancer.

\overline{A} : obtenir un nombre impair lors du premier lancer.

À Savoir

Un **système complet d'événements** est une famille d'événements A_1, \dots, A_n tels que

$$\begin{cases} A_i \neq \emptyset & \forall 1 \leq i \leq n \\ A_i \cap A_j = \emptyset & \forall 1 \leq i \neq j \leq n \\ \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \end{cases}$$

Exemple 6 - 2 lancers d'un dé

A_2 : la somme des deux résultats vaut 2.

A_3 : la somme des deux résultats vaut 3.

$$\vdots$$

A_{12} : la somme des deux résultats vaut 12.

(A_2, \dots, A_{12}) est un système complet d'événements.

II - Probabilités

À Savoir

Une **probabilité** sur un ensemble fini Ω est une application définie sur l'ensemble des événements et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que

- * $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
- * si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

À Savoir

L'**équiprobabilité** est la probabilité définie (lorsque Ω est fini) par

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Exemple 7 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : le résultat du premier lancer est pair.

$$A = \{(2i, j), 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 6\} = \{2, 4, 6\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket.$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}.$$

À Savoir

- * $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- * $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Exemple 8 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : le résultat du premier lancer est pair.

C : le résultat du second lancer est pair.

$A \cup C$: le résultat d'un des lancers est pair.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2},$$

$$A \cap C = \{(2i, 2j), 1 \leq i, j \leq 3\} = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\},$$

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}(A \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

À Savoir

Si $\mathbf{P}(B) \neq 0$, alors la **probabilité conditionnelle de A sachant B** vaut $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.

Exemple 9 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : le résultat du premier lancer est un 2.

B : le résultat du premier lancer est pair.

On a vu précédemment que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Si le résultat du premier lancer est 2, alors le résultat est pair.

Ainsi, $A \cap B = A$ et

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}.$$

Finalement, la probabilité que le résultat du premier lancer soit égal à 2 sachant qu'il est pair est égale à

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

À Savoir

Formule des probabilités composées. Si $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Cette formule est utile lorsque l'expérience est une succession d'étapes qui ont une influence les unes sur les autres.

Exemple 10 - Une urne

Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules noires. On effectue 4 tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 2 boules rouges puis 2 boules noires ?

On note :

A_1 : la première boule tirée est rouge.

A_2 : la seconde boule tirée est rouge.

A_3 : la troisième boule tirée est noire.

A_4 : la quatrième boule tirée est noire.

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \\ &\quad \cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) \\ &= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} \\ &= \frac{5}{13 \times 7}. \end{aligned}$$

À Savoir

Formule des probabilités totales. Si (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A \cap A_i).$$

Cette formule est utile lorsque le résultat d'une expérience peut

être plus facile à décrire lorsqu'on le décompose selon différents cas possibles.

Exemple 11 - La même urne

Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge ? On distingue les cas où la première boule tirée est rouge (événement A_1) et les cas où la première boule tirée est noire (événement $\overline{A_1}$). Comme $(A_1, \overline{A_1})$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_2 \cap A_1) + \mathbf{P}(A_2 \cap \overline{A_1}) \\ &= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \times \frac{10}{14} \\ &= \frac{10 \times 14}{15 \times 14} = \frac{5 \times 2 \times 14}{5 \times 3 \times 14} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

À Savoir

Formule de Bayes. Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$, alors

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}_B(A) \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Exemple 12 - La même urne

L'expérimentateur tire successivement 2 boules et cache le résultat de son premier tirage. Sachant que le second tirage est une boule rouge, quelle est la probabilité que le premier tirage soit une boule rouge ?

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{A_2}(A_1) &= \frac{\mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(A_2)} \\ &= \frac{\frac{9}{14} \times \frac{10}{15}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

III - Indépendance

À Savoir

A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Exemple 13 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : le résultat du premier lancer est pair.

C : le résultat du premier lancer est un multiple de 3.

$$C = \{(3i, j), 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6\} = \{3, 6\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{2 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap C = \{(6, j), 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$. Les événements A et C sont indépendants.

À Savoir

Les événements A_1, \dots, A_n sont **mutuellement indépendants** si pour tout $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$.

Peut être utilisé entre les différents lancers d'une pièce, d'un dé, d'un tirage avec remise,...