VII - Calcul matriciel

À Savoir

Opérations sur les matrices. Addition, Multiplication par un nombre, Multiplication de matrices.

- $*A \times (B+C) = A \times B + A \times C.$
- * $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$.
- * A + 0 = 0 + A = A.
- * A + (-A) = (-A) + A = 0.
- $* A \times I = I \times A = A.$

Attention. En général, $AB \neq BA$.

Exemple 1

Soit A une matrice carrée.

$$A^{3} + 2A^{2} + 3A = A \times A^{2} + 2A \times A + 3A \times I = A(A^{2} + 2A + 3I).$$

À Savoir

Systèmes linéaires. Traduire un système linéaire en équation matricielle et réciproquement.

Utilisation en lien avec :

- * la résolution de systèmes.
- * les suites définies par récurrence.
- * la formule des probabilités totales.

Exemple 2

On pose
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 0\\ 3y + z &= 0 \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \\ -x + 2z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = 3v_n + w_n & \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2w_n \end{cases}$$

À Savoir

$$\begin{cases} A^0 = I, \\ A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}. \end{cases}$$

Caluls de puissances :

27

- * formule donnée et démonstration par récurrence.
- $\ast\,$ puissance des matrices diagonales (par récurrence).
- * formule du binôme de Newton. Si $A \times B = B \times A$, alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

Utile surtout si $A^k = 0$ pour k assez grand.

* si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ (par récurrence).

Chapitre VII - Calcul matriciel ECT 2

À Savoir

Définition de l'inverse. Il existe B telle que AB = I. Alors, $A^{-1} = B$ et BA = I.

Existence d'un inverse :

- * donnée d'une matrice B telle que AB = I.
- * donnée d'une relation telle que $a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$.
- * matrice d'ordre 2 et $ad bc \neq 0 + Calcul$.
- \ast matrice diagonale & tous les coefficients diagonaux non nuls + Calcul.
- * matrice triangulaire & tous les coefficients diagonaux non nuls.
- * calcul par inversion d'un système linéaire ou méthode du pivot sur l'identité.

Exemple 3

Si A est une matrice telle que $A^3 + 2A^2 + A + 5I = 0$. Alors,

$$A\left(A^2 + 2A + I\right) = -5I$$

$$A \times \left(-\frac{1}{5}\left(A^2 + 2A + I\right)\right) = I.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{5} (A^2 + 2A + I)$.

Non-inversibilité. Utiliser une relation AB = AC (ou AB = 0 ou ...). Supposer par l'absurde que A est inversible et en déduire B = C (ou B = 0 ou ...). Obtenir une contradiction.