■ ■ ■

La question **5.b)** repose sur la notion de série qui sera étudiée ultérieurement.

**Problème.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

**1. a)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et en déduire que $f$ est continue à droite en 0.

**b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que $f$ est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de $f$ en 0, noté $f'_d(0)$.

**2. a)** Déterminer, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de $x$, où $f'$ désgine la fonction dérivée de $f$.

**b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis donner les variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.

**c)** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de $f$.

**d)** Vérifier que, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x) = \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x}$. La fonction $f$ est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+^*$ ?

**3. a)** Calculer $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-u} - 1}{u}$.

**b)** En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$.

**c)** On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de $(\mathscr{C})$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel $n$.

**4. a)** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n > 0$.

**b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

**c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

**d)** Compléter les commandes suivantes pour qu'elles affichent le rang $n$ à partir duquel $u_n \leqslant 10^{-3}$.

```
import numpy as np

n = 0
u = 1
while u > 0.001:
    u = ...
    n = ...

print(n)
```

**5. a)** Montrer que, pour tout $n$ entier naturel, on a la relation $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

**b)** En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est divergente.