■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\mathrm{e}^{(1/x)}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f à droite en 0. Étudier la continuité à gauche de f en 0. Déterminer si la fonction f est continue en 0.

2. On considère la fonction φ définie par $t \mapsto 1 + \mathrm{e}^t + t\,\mathrm{e}^t$. Déterminer à l'aide du tableau de variations de φ le signe de $\varphi(x)$ en fonction de la valeur du nombre réel x.

3. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. Donner le signe de f'.

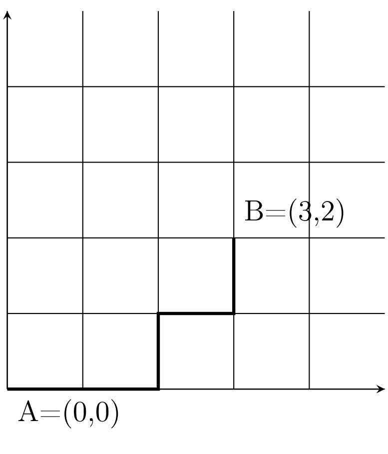
4. Calculer (si elles existent) les dérivées à gauche et à droite en 0. Que peut-on en conclure ?

5. Tracer le tableau de variations de f.

6. Donner l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de l'origine, on précisera en particulier les éventuelles demi-tangentes en 0.

7. Montrer que la fonction admet une asymptote oblique (d'équation $y = ax + b$) au voisinage de $+\infty$. Déterminer les paramètres a et b.

Exercice 2. L'objet du problème est de compter le nombre de chemins reliant deux points d'un quadrillage, en effectuant uniquement des pas de gauche à droite (de (a, b) à $(a + 1, b)$) et de bas en haut (de (a, b) à $(a, b + 1)$).
Précisément, on appellera chemin reliant les points $A = (a, b)$ et $P = (p, q)$ de coordonnées entières une succession de pas, soit de gauche à droite, noté D, soit de bas en haut, noté H, telles que le nombre de D dans le chemin soit égal à $p - a$ et le nombre de H dans le chemin soit égal à $q - b$. La longueur du chemin est égale au nombre de termes D ou H dans le chemin. Par exemple, le chemin $c = (DDHDH)$ relie le point $(0, 0)$ au point $(3, 2)$ et est de longueur 5.



Dans toute la suite, p, q et $n \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers strictement positifs fixés.
Il est vivement conseillé d'illustrer les raisonnements par des dessins.

Préliminaires.

1. Partant de $A = (3, 1)$, où arrive le chemin $(HDDHHH)$?

2. Énumérer tous les chemins reliant $(0, 0)$ à $(1, 3)$. Combien y en a-t-il ?

3. Quelle est la longueur d'un chemin reliant $A = (0, 0)$ à $P = (p, q)$?

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur un chemin pour qu'il relie le point $A = (0, 0)$ au point $P = (p, q)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Combien y-a-t-il de chemins de longueur n ?

Première partie.
On se propose de compter les chemins reliant $A = (0, 0)$ à $P = (p, q)$. On appelle $N_{p,q}$ cette valeur.

6. On considère la fonction Φ sur les chemins qui échange les valeurs D et H. Par exemple, $\Phi(DDHD) = (HHDH)$. Montrer que Φ est une bijection.

7. En déduire que $N_{p,q} = N_{q,p}$, nombre de chemins reliant $A = (0, 0)$ à $Q = (q, p)$.

8. Montrer que $N_{p-1,q} + N_{p,q-1} = N_{p,q}$.

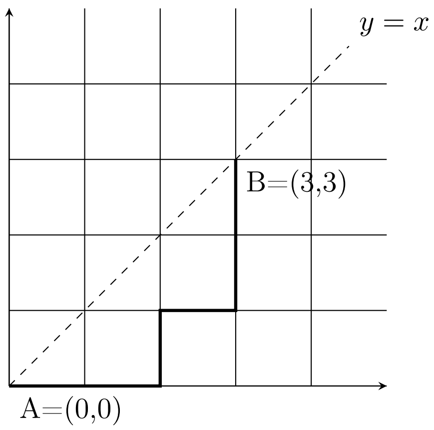
9. Soit c un chemin reliant $A = (0, 0)$ à $P = (p, q)$. Combien y-a-t-il de D ? Quelle est la longueur du chemin ? En déduire directement la valeur $N_{p,q}$.

10. En comptant de deux façons différentes le nombre de chemins allant du point $A = (0, 0)$ au point $B = (n, n)$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} N_{k,n-k}^2 = N_{n,n}.$$

Indication : quelle est la longueur des chemins ?

Seconde partie.
On s'intéresse désormais aux chemins allant du point $A = (0, 0)$ au point $B = (n, n)$ restant toujours sous la diagonale (première bissectrice, $y = x$) mais qui peuvent la toucher. Ici un chemin sous la diagonale de $A = (0, 0)$ à $B = (3, 3)$.



On note C_n le nombre de chemins sous la diagonale et l'on pose par convention $C_0 = 1$. Un chemin ne restant pas sous la diagonale sera appelé chemin franchissant. On note F_n le nombre de chemins franchissants.

11. Quel est le premier terme d'un chemin sous la diagonale ? le dernier ?

12. Calculer le nombre de chemins sous la diagonale, ne rencontrant la diagonale qu'aux extrémités A et B.

13. Soit c un chemin sous la diagonale rencontrant la diagonale au moins une fois en dehors des extrémités. On note $K = (k, k)$, $0 < k < n$ le premier point de rencontre. Montrer que le nombre de chemins sous la diagonale rencontrant la diagonale pour la première fois en $K = (k, k)$ est égal à $C_{k-1}C_{n-k}$.

14. En déduire la formule de récurrence

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}.$$

15. Calculer C_4 à l'aide de cette formule.

16. Que vaut la somme $C_n + F_n$?

17. Soit c un chemin franchissant. On note $K = (k, k)$, $0 < k < n$ le premier point de franchissement et $K' = (k, k+1)$ le premier point au-dessus strictement de la diagonale. Le chemin c se décompose donc en un chemin c_1 de A à K' suivi d'un chemin c_2 de K' à B. Quel est le point d'arrivée du chemin $\Phi(c_2)$ (où la fonction Φ est la fonction définie en première partie qui échange les valeurs D et H) partant de K' ? Montrer que la transformation d'un chemin c (franchissant en K) vers le chemin c' consistant en c_1 suivi de $\Phi(c_2)$ réalise une bijection des chemins franchissants vers tous les chemins reliant $A = (0, 0)$ à $B' = (n-1, n+1)$.

18. En déduire la formule $C_n = N_{n,n} - N_{n-1,n+1}$.

19. En utilisant la première partie, déduire de la question précédente la formule

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1 et $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A.
On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.
L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égale à $\frac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'événement : « il fait beau le jour n » ;
- $\overline{B_n}$ l'événement : « il fait mauvais le jour n » ;
- $u_n = \mathbf{P}(B_n)$ et $v_n = \mathbf{P}\left(\overline{B_n}\right)$.

1. a) Donner la valeur de u_1.

b) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_{B_n}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.

2. a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = \frac{\ell}{5} + \frac{3}{5}$ puis la nature de la suite de terme général $w_n = u_n - \ell$.

d) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.

e) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.

3. a) Soit U_n l'événement « il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée ». Calculer $\mathbf{P}(U_n)$.

b) Soit V_n l'événement « il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée ». Calculer $\mathbf{P}(V_n)$.

Exercice 4. On lance deux dés à six faces non pipés (chaque face a la même probabilité d'être tirée), et on note D_1 et D_2 les deux valeurs obtenues, qu'on suppose indépendantes. On note leur somme $S = D_1 + D_2$.

1. Quelle est la probabilité que S soit égale à 12 ? à 6 ? à 1 ?

2. Quelle est la probabilité que S soit paire ? divisible par 4 ? par 9 ?

3. a) Calculez la probabilité de chacun des 3 événements suivants :

- A : « D_1 est paire »,
- B : « S est paire »,
- C : « $S \geqslant 10$ ».

b) Montrez que A et B sont indépendants.

c) Montrez que A et C ne sont pas indépendants et calculez la probabilité conditionnelle de C sachant A.