

# T.D. VIII - Intégration

## I - Calculs d'intégrales

**Exercice 1. (⚙️)** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1. $f_1(x) = \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}.$ | 5. $f_5(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$ |
| 2. $f_2(x) = \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}.$ | 6. $f_6(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}.$          |
| 3. $f_3(x) = x\sqrt{1-2x^2}.$         | 7. $f_7(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$                  |
| 4. $f_4(x) = (e^x+1)^3 e^x.$          | 8. $f_8(x) = \frac{\ln^{27}(x)}{x}.$             |

**Exercice 2. (Changements de variables, ⚙️)** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f_1(x) = \frac{1}{e^x+1}.$<br>$\varphi : u \mapsto \ln(u), \frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}.$ | 3. $f_3(x) = \frac{1}{2x \ln(x)+x}.$<br>$\varphi : u \mapsto e^u.$           |
| 2. $f_2(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$<br>$\varphi : u \mapsto u^2.$  | 4. $f_4(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}.$<br>$\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}.$ |

**Exercice 3. (Intégrations par parties, ⚙️)** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |                        |                           |
|------------------------|---------------------------|
| 1. $f_1(x) = x e^x.$   | 3. $f_3(x) = x^2 \ln(x).$ |
| 2. $f_2(x) = x^2 e^x.$ |                           |

**Exercice 4. (⚙️)**

1. Montrer qu'il existe  $a, b$  réels tels que

$$\forall x \in [0, 1], \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx.$

**Exercice 5. (Fonction bêta)** Pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx.$$

1. Pour  $q$  non nul, déterminer une relation entre  $I_{p,q}$  et  $I_{p+1,q-1}$ .
2. Exprimer la valeur de  $I_{p,q}$  à l'aide de factorielles.

## II - Inégalités

**Exercice 6. (⚙️)** Montrer que  $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \leq 1.$

**Exercice 7. (→)**

1. Montrer que, pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

2. En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t) dt + \ln(n).$$

3. En utilisant une primitive de  $\ln$ , en déduire la limite de la suite de terme général  $\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)}.$

**Exercice 8. (→)** Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$

1. En utilisant la concavité du logarithme, montrer que

$$\forall x \in ]0, 1[, \forall t \in ]x^2, 1[, \frac{2 \ln(x)}{x^2 - 1} (t - 1) \leq \ln(t) \leq t - 1.$$

2. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 1.

3. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et calculer sa dérivée.

**Exercice 9.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ .

1. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $0 \leq I_n \leq \ln(2)$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(I_n)$ .
3. En déduire que la suite  $(I_n)$  converge.
4. Montrer que :  $\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1 + x) \leq x$ .
5. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

**Exercice 10.** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2) dx$  et  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^2} dx$ .

1. a) Calculer  $J_1$ .  
b) Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ .  
c) En déduire que  $(J_n)$  converge et déterminer sa limite.
2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \geq 1, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

- b) Montrer que la suite  $(I_n)$  converge.
- c) Montrer que la suite  $(nI_n)$  converge et déterminer sa limite.

### III - Intégrales généralisées

**Exercice 11. (✱)** En comparant l'intégrande avec une fonction de référence, montrer que les intégrales suivantes convergent :

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt</math>.</li> <li>2. <math>\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + t^4} dt</math>.</li> <li>4. <math>\int_0^1 \frac{\ln t}{1 + t^4} dt</math>.</li> </ol> |
|---|--|

**Exercice 12. (✱✱)** Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\int_0^1 x \ln^2(x) dx</math>.</li> <li>2. <math>\int_0^1 \ln^2(t) dt</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}</math>.<br/><math>\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}</math>.</li> </ol> |
|--|--|

### IV - Intégrales classiques

**Exercice 13. (Expression intégrale de la factorielle, ✱✱)** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $I_0$ .
2. Montrer que l'intégrale  $I_n$  converge.
3. Montrer que  $I_{n+1} = (n+1)I_n$ .
4. En déduire, pour tout  $n$  entier naturel, une expression simple de  $I_n$ .

**Exercice 14. (Fonction Gamma d'Euler, ✱)** Pour tout réel  $x$  strictement positif, on pose  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

1. Soit  $x > 0$ .  
a) Pour tout  $t \in ]0, 1]$ , rappeler la définition de  $t^{x-1}$ .  
b) Déterminer un équivalent, lorsque  $t \rightarrow 0$  de  $t^{x-1} e^{-t}$ .  
c) En déduire que  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$  converge.  
d) Montrer qu'il existe un réel  $a$  tel que

$$\forall t \geq a, t^{x-1} e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

- e) En déduire que  $\int_a^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  converge.
- f) En déduire que la fonction  $\Gamma$  est bien définie.
2. En utilisant une intégration par parties sur le segment  $[\varepsilon, M]$  puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 et  $M$  vers  $+\infty$ , montrer que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
3. En déduire, pour tout  $n$  entier naturel, la valeur de  $\Gamma(n+1)$ .