

T.D. IV - Variables aléatoires discrètes

I - Lois usuelles finies

Exercice 1. (⚙️) Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de moyenne p . On note $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Déterminer la loi de Y_n .

Exercice 2. (⚙️) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. On note N la variable aléatoire qui vaut 0 si $X_1 = \dots = X_n = 1$ et $\min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket ; X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N .

II - Variables aléatoires finies

Exercice 3. (⚙️) Un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 est lancé une fois. La probabilité d'apparition de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer l'espérance et la variance de X .
3. Déterminer $\mathbf{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.

Exercice 4. (⚙️) Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à vider l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 5. (🏹) On tire sans remise $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir $1, 3, \dots, 2n-1$ dans cet ordre et consécutivement.

2. Déterminer la probabilité de tirer $1, 3, \dots, 2n-1$ dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.

3. On note X la variable aléatoire associée au rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer $\mathbf{E}[X]$.

On pourra utiliser la formule $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$.

Exercice 6. (🏹)

1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du triangle de Pascal et une somme télescopique, montrer que $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.

2. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de toutes les boules blanches. Déterminer la loi de X . Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

III - Lois usuelles infinies

Exercice 7. (⚙️) Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 8. (⚙️) Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note S la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de S ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la

variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T .

Exercice 9. Soit Y une variable aléatoire telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Y = k) = e^{-k} - e^{-(k+1)}.$$

On pose $Z = Y + 1$.

1. Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(Y = k) = 1$.
2. Reconnaître la loi de Z puis en déduire son espérance et sa variance.
3. En déduire l'espérance et la variance de Y .
4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 10. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que

$$\forall n \geq 1, \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbf{P}([X > n])$.

1. Justifier que $[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$.
2. En déduire que $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}([X = n])$.
3. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]).$$

4. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$.
5. Exprimer, pour tout n entier naturel la valeur de u_n en fonction de n puis reconnaître la loi de X .
6. Exprimer $\mathbf{P}([X \leq n])$ en fonction de n .

Exercice 11. (\star) Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $X_{i,m} = |\{k \in \llbracket 1, m \rrbracket ; U_k = i\}|$.

1. Déterminer la loi de $X_{i,m}$.

2. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de la famille $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $Y_i = X_{i,N}$. Déterminer la loi de Y_i .

Exercice 12. (\star) Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à $\frac{1}{12}$. On note X le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

1. Déterminer la loi de X , son espérance $\mathbf{E}[X]$ et sa variance $\mathbf{V}(X)$.

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X . On considère l'extrait de la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivant :

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathbf{P}([Y = k])$ | 0,006 | 0,034 | 0,084 | 0,140 | 0,175 | 0,175 | 0,146 |

2. Déterminer des valeurs approchées de $\mathbf{P}(X \leq 3)$ puis $\mathbf{P}(X \geq 4)$.

IV - Variables aléatoires infinies

Exercice 13. Un sauteur tente de franchir successivement les hauteurs numérotées 1, 2, 3, ..., n , ... On suppose que les sauts sont mutuellement indépendants et que la probabilité de franchir la hauteur numéro n vaut $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer la loi de X et vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$.

2. Soit Y une variable aléatoire telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.

a) Exprimer $\mathbf{V}(Y)$ sous forme d'une somme.

b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-1)^2}{k!}$.

3. Calculer l'espérance de X .

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$.
3. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X = 0)$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$.

V - Fonctions de répartition

Exercice 15. (✳) Soit X (resp. Y) une variable aléatoire de fonction de répartition F (resp. G) et $p \in]0, 1[$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$[\max\{X, Y\} \leq x] = [X \leq x] \cap [Y \leq x].$$

2. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. On pose $Z = \max\{X, Y\}$. Exprimer la fonction de répartition F_Z de Z en fonction de celles de X et de Y .
4. En supposant que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, déterminer la fonction de répartition puis la loi de Z .
5. On pose $W = \min\{X, Y\}$. Exprimer la fonction de répartition F_W de W en fonction de celles de X et de Y .
6. En supposant que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, déterminer la fonction de répartition puis la loi de W .

Exercice 16. (✳) Soit X une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition. On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ est un ensemble fini et que $x_1 < \dots < x_p$.

1. Montrer que F est à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Montrer que F est croissante.
3. Déterminer $F(x)$ pour tout $x < x_1$, puis pour tout $x \geq x_p$. En déduire les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Soient $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et $x \in [x_i, x_{i+1}[$. Déterminer $F(x)$ et en déduire la valeur de $F(x_i^+) - F(x_i^-)$.
5. En déduire les points de discontinuité de F .

VI - Lois jointes

Exercice 17. (✳) Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

| $x \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 |
| 1 | p | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

1. Déterminer la valeur de p .
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) puis les espérances de X et de Y .
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 1]$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbf{P}([X = 0] \cup [Y = 1])$.
6. Calculer la covariance de X et de Y .
7. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. En déduire $\rho(X, Y)$.
8. Calculer $\text{Cov}(X + Y, X)$, $\text{Cov}(X, X + Y)$, $\text{Cov}(2X, X)$ et $\mathbf{V}(X + Y)$.

Exercice 18. (✳) On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces. On note X le plus grand des résultats obtenus et Y le plus petit.

1. Décrire l'ensemble des valeurs prises par (X, Y) .
2. Décrire l'événement $[X = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([X = 1])$.

3. Décrire l'événement $[Y = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([Y = 1])$.
4. Décrire puis calculer la probabilité de l'événement $[X = 1] \cap [Y = 1]$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 19. () Une pièce biaisée dont face apparaît avec probabilité p est lancée n fois. Une *excursion* est une série de lancers qui renvoient le même résultat. Par exemple, dans la séquence $FFPFPPF$, il y a 5 excursions : FF , P , F , PP , F . On note R le nombre d'excursions.

Montrer que $\mathbf{E}[R] = 1 + 2(n-1)p(1-p)$ puis calculer $\mathbf{V}(R)$.

Indication : Exprimer R en fonction des événements I_j : « le $(j+1)$ -ème lancer est différent du j -ème ».