Lycée Ozenne
DL n°16

Devoir en temps libre

À rendre le lundi 18/03/2024

ECT 2
11/03/2024

■ ■ ■

Exercice 1.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4x(1-x^2) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Véfifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X de densité f et on note F_X sa fonction de répartition.

2. a) Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

b) Montrer que X possède une variance et vérifier qu'elle est égale à $\frac{11}{225}$.

3. Montrer que l'on a : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x^2)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

4. Soit U et V deux variables aléatoires à densité, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $M = \min(U,V)$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, on a $\mathbf{P}(M > x) = \mathbf{P}(U > x)\,\mathbf{P}(V > x)$. On admet que M est une variable aléatoire à densité et on note F_M sa fonction de répartition.

a) En notant G la fonction de répartition commune à U et V, rappeler l'expression de $G(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

b) En déduire, pour tout réel x, les expressions de $\mathbf{P}(M > x)$ et de $F_M(x)$ en fonction de $G(x)$.

c) Donner enfin explicitement $F_M(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

5. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \sqrt{M}$ et on note F_Z sa fonction de répartition.

a) Déterminer $F_Z(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

b) En déduire que X et Z suivent la même loi.

6. Compléter le script `Python` suivant qui simule la variable M à la ligne 3, afin qu'il simule la variable X à la ligne 4.

```
1 U = rd.random()
2 V = rd.random()
3 M = np.min(U, V)
4 X = ...
```