# Devoir en temps libre

Optionnel



■ ■ ■

**Problème.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

**1. a)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et en déduire que $f$ est continue à droite en 0.

**b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que $f$ est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de $f$ en 0, noté $f'_d(0)$.

**2. a)** Déterminer, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de $x$, où $f'$ désgine la fonction dérivée de $f$.

**b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis donner les variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.

**c)** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de $f$.

**d)** Vérifier que, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x) = \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x}$. La fonction $f$ est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+^*$ ?

**3. a)** Calculer $\lim\limits_{u\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}$.

**b)** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$.

**c)** On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de $(\mathscr{C})$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel $n$.

**4. a)** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n > 0$.

**b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

**c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

**5. a)** Montrer que, pour tout $n$ entier naturel, on a la relation $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

**b)** En déduire que la suite de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ est divergente.

**Exercice 1. (Dénombrement de surjections)** Soient $q$, $k$, $p$ trois entiers tels que $0 \leqslant q \leqslant k \leqslant p$.

**1.** Montrer que $\binom{p}{k} \cdot \binom{k}{q} = \binom{p}{q} \cdot \binom{p-q}{p-k}$.

**2.** En déduire $\sum\limits_{\ell=q}^{p} (-1)^{p-\ell} \binom{p}{\ell}\binom{\ell}{q} = \delta_{p,q}$, où $\delta_{p,q} = 0$ si et seulement si $p \neq q$.

**3.** Soient $n$ un entier naturel, $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ deux familles de réels. On suppose que pour tout entier $p \in [\![0,n]\!]$, $\sum\limits_{q=0}^{p} \binom{p}{q} a_q = b_p$. Pour tout entier $p \in [\![0,n]\!]$, exprimer $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k} b_k$ en fonction de $a_p$.

**Nombre de surjections** Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on note $S_n^p$ le nombre d'applications surjectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. Par convention, on pose $S_n^0 = S_0^n = 0$ et $S_0^0 = 1$.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

**a)** Déterminer $S_n^1$, $S_n^2$, $S_n^n$.

**b)** Soit $p > n$. Déterminer $S_n^p$.

**c)** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $p^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_n^k$.

**d)** On suppose $n$ différent de 0. En déduire que

$$\forall\ p \in [\![1, n]\!],\ S_n^p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

**5. a)** On suppose que $2 \leqslant p \leqslant n$. En considérant la restriction à $[\![1, n-1]\!]$ d'une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, montrer que

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1}\right).$$

**b)** Cette relation est-elle encore vraie lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$ ?

**c)** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $S_{n+1}^n = \frac{n}{2}(n+1)!$.