■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbf{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathscr{B} = (A, B, C)$ et pour a, b, c réels on pose

$$M_{abc} = aA + bB + cC.$$

1. Prouver que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{F}$. Donner la dimension de $\mathbf{F}$.

2. Montrer que la matrice C^2 appartient à $\mathbf{F}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère les matrices suivantes :

$$N_1 = A - B - C,\ N_2 = 2A - 2B - C,\ N_3 = A.$$

3. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (N_1, N_2, N_3)$ est une base de $\mathbf{F}$.

4. Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Déterminer son inverse.

5. Soit a, b, c trois nombres réels. On note x, y, z les coordonnées de M_{abc} dans $\mathscr{B}'$. On a donc $M_{abc} = xN_1 + yN_2 + zN_3$. Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.

Exercice 2.

Partie 0 : Identités binomiales

Les résultats de cette partie peuvent être admis si besoin pour la partie II.

1. a) Soit k, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \leqslant n$. Montrer que $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

b) Montrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant k$. Montrer que :

$$\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}.$$

Indication : On pourra utiliser une récurrence sur $\mathbb{N}$.

Partie I : Urnes et probabilités

Une urne contient $N \in \mathbb{N}^*$ boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N ?

2. Dans une première expérience, on tire successivement **avec remise** les boules une par une, jusqu'à tirer la boule marquée du chiffre 1. On note alors X le nombre de tirages effectués. Quelle est la loi de X ? En préciser les paramètres.

3. Dans une seconde expérience, on tire successivement **sans remise** les boules une par une, jusqu'à tirer la boule marquée du chiffre 1. On note alors Y le nombre de tirages effectués. Montrer que Y suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$.

4. Dans une troisième expérience, on effectue un tirage de $r \in \{1, \ldots, N\}$ boules **sans remise**, et l'on note Z le nombre de boules tirées et marquées d'un chiffre inférieur ou égal à $m \in \{1, \ldots, N\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$, $n \leqslant r$. Montrer que $\mathbf{P}(Z = n) = \frac{\binom{m}{n}\binom{N-m}{r-n}}{\binom{N}{r}}$.

Partie II : Construction d'un estimateur

L'objectif de cette partie est de construire un estimateur du nombre N de boules dans l'urne. On suppose que l'on a tiré **successivement et sans remise** k boules dans l'urne, k fixé. On note $X_1, \ldots, X_k$ les numéros du tirage, et on définit $X_{(k)} = \max\{X_1, \ldots, X_k\}$.

5. Montrer que $\mathbf{P}\left(X_{(k)} = n\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant n < k, \\ \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{N}{k}} & \text{si } k \leqslant n \leqslant N. \end{cases}$

6. Montrer que $\mathbf{E}\left[X_{(k)}\right] = \frac{k}{k+1}(N+1)$.

7. En déduire un estimateur sans biais de N.

Exercice 3. Cet exercice s'intéresse à l'étude d'endomorphismes spécifiques de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, et si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que la puissance n^{e}, $n \in \mathbb{N}$, d'un endomorphisme est définie de la façon suivante :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Un endomorphisme est *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. On définit alors *l'indice de nilpotence* p^* de f : $p^* = \min\{p \in \mathbb{N}^* \; ; \; f^p = 0\}$. C'est le plus petit entier positif p tel que f^p est nul. De même, une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et on définit de manière similaire l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.
Soit les matrices N_1 et N_2 suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont nilpotentes, et préciser leur indice de nilpotence.

Dans toute la suite du problème, on considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ nilpotent non nul et on note p^* son indice de nilpotence.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{p^*-1}(x_0) \neq 0$.

a) Pourquoi un tel x_0 existe-t-il ?

b) Montrer que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p^*-1}(x_0))$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

c) En déduire que $p^* \leqslant 3$.

Dorénavant, et jusqu'à la question **6**, on suppose en plus que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

3. On veut montrer qu'alors $p^* = 3$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $p^* = 2$.

a) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

b) En déduire une absurdité et conclure.

4. Exprimer f sous forme matricielle dans la base $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right)$.

5. En déduire que f s'exprime dans une base bien choisie comme N_2.

6. Bonus. Montrer que lorsque $\dim \operatorname{Ker} f = 2$, f s'exprime dans une base bien choisie comme N_1.

Exercice 4. On place dans une enveloppe un exemplaire de chacun des billets en euros. On rappelle que les valeurs faciales de ces billets sont 5, 10, 20, 50, 100, 200 et 500 et on note l'ensemble de ces valeurs B. On va tirer deux billets de valeurs respectives X et Y et analyser le jeu suivant :

- si $X > Y$, le joueur gagne $X - Y$;
- si $Y > X$, le joueur perd $Y - X$;
- si la différence est nulle, il n'y a ni gain ni perte.

On note $G = X - Y$.

Première partie : tirage avec remise
On tire un premier billet dont la valeur est notée X que l'on replace dans l'enveloppe, puis on tire un second billet, de valeur Y.

1. a) X et et Y suivent donc la même loi. Donnez cette loi.

b) Calculez le gain espéré $\mathbf{E}[G]$.

c) Donnez les probabilités des événements suivants

i. nul N : « $X = Y$ »,

ii. victoire V : « $X > Y$ »,

iii. défaite D : « $X < Y$ ».

d) Le jeu vous semble-t-il équilibré ?

2. a) On tire $X = 50$. Conditionnellement à ce tirage, calculez

i. la probabilté de N,

ii. la probabilité de V,

iii. la loi de G,

iv. l'espérance de G

b) Soit $x \in B$. Conditionnellement à $X = x$, calculez

i. la proabilité de N,

ii. la loi de G,

iii. l'espérance de G.

c) On tire X publiquement et on demande au joueur s'il veut se retirer du jeu sans gain ni perte. Pour quelle(s) valeur(s) de X le joueur a-t-il intérêt à se retirer ?

Deuxième partie : tirage sans remise
On tire toujours un premier billet de valeur X, mais cette fois-ci sans le remettre dans l'enveloppe. On tire ensuite un second billet, de valeur Y qui est donc différente de X : $\mathbf{P}(N) = 0$.

3. a) Quelle est la loi de Y ?

b) Quelle est la probabilité de V ?

c) Combien vaut le gain espéré ?

d) Le jeu vous semble-t-il équilibré ?

4. a) On tire $X = 100$.

i. Quelle est la loi conditionnelle de G ?

ii. Combient vaut alors l'espérance de G ?

b) Soit $x \in B$.

i. Donnez la loi de G conditionnellement à $X = x$.

ii. Combien vaut alors l'espérance de G ?

c) On tire X publiquement et on demande au joueur s'il veut se retirer du jeu sans gain ni perte. Pour quelle(s) valeur(s) de X le joueur a-t-il intérêt à se retirer ?