Nom :

Question de cours :

- Soient A, B deux propositions telles que $A \Rightarrow B$. Donner la contraposée de cette implication.
- On considère la proposition : *Aucun réels n'est quotient d'entiers*. Dire si la proposition est vraie et donner sa négation en français.

Exercice :

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

a) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq N$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \leq N$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \iff \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

Exercice :

Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n est impair, alors n^2 est impair. En déduire que $n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

2) Montrer alors, par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice :

1) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + \cdots + n$. Montrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2) On définit (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a : $0 < u_n < 2$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- On considère la proposition "Tout polynôme du second degré admettant une racine a un discriminant positif". Dans cette phrase, la condition *"discriminant positif"* est une condition nécessaire ou suffisante pour l'existence d'une racine ?
- On considère la proposition : *Aucun entier n'est supérieur à tous les autres*. Dire si la proposition est vraie et donner sa négation en français.

Exercice :

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit $f(x, y) = xy^2 + x$. Dire si les propositions suivantes sont vraies :

a) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x, y) \geq 0$.

b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x, y) = 0$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ f(x, y) = 0$.

d) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x, y) = 0$.

Exercice :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

a) Calculer u_2 et u_3. Conjecturer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice :

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Montrer que (u_n) est croissante.

2) On se propose de montrer l'importance de l'étape d'initialisation du raisonnement par récurrence. Supposons que $9|2$ (ce qui est évidemment faux), montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $9|(10^n + 1)$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- On considère la proposition : "Si le discriminant d'un polynôme du second degré est positif ou nul, alors il existe une racine de ce polynôme". Dans cette phrase, la condition *"discriminant positif"* est une condition nécessaire ou suffisante pour l'existence d'une racine ?
- On considère la proposition : *Il existe un entier qui divise tous les autres*. Dire si la proposition est vraie et donner sa négation en français.

Exercice :

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

a) $\exists r \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{N}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 4 \iff x = 2$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$

d) $\forall \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{p}{q} \leq 2 \iff p \leq 2$

Exercice :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = 3u_n - 8$.

Montrer par que récurrence que $u_n = 8 \times 3^n + 4$.

Exercice :

1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et on a $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(1+x)^n > 1 + nx$.

Commentaire :