Différentielle du déterminant Formule de LIOUVILLE

■ ■ ■

Le déterminant peut être abordé avec différents angles :

* comme une fonction sur les matrices $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \det(M)$;
* Comme une fonction multilinéaire des colonnes $\det : (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n \to \mathbb{R},\ (C_1, \dots, C_n) \mapsto \det(C_1, \dots, C_n)$;
* Comme une fonction des coefficients $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R},\ (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto \det(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Remarque.
Comme $\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, le détemrinant est une forme polynomiale en les coefficiants, donc elle est $\mathscr{C}^1$ et admet une différentielle. On peut donc écrire

$$\det(\underbrace{M+H}_{\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) = \det(M) + \underbrace{\varphi_M}_{\in\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))}(H) + o(H)$$

On peut également montrer cette régularité en raisonnant par récurrence sur la dimension et, lors de l'hérédité, en utilisant le développement par rapport à la première ligne.

I. Calcul de la différentielle

Notons $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ les éléments de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $e_i = (\delta_{i,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ ceux de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
En utilisant la définition de la différentielle pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\varphi_M(H) = \mathrm{d}\det(M)\cdot H = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(M) h_{i,j},$$

où,

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(M) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big[\det(M+hE_{i,j}) - \det(M)\big]$$

En notant $M = [C_1, \dots, C_n]$, alors $M + hE_{i,j} = [C_1, \dots, C_{j-1}, C_j + he_i, C_{j+1}, \dots, C_n]$. En utilisant la linéarité par rapport aux colonnes,

$$\begin{aligned}\det(M+hE_{i,j}) &= \det(M) + h\det(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)\\ &= \det(M) + h(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M)\end{aligned}$$

où on a utilisé le développement par rapport à la j-ème colonne et noté $\Delta_{i,j}(M)$ le mineur correspondant.
Ainsi, $\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(M) = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M)$ et

$$\mathrm{d}\det(M)\cdot H = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(M)h_{i,j}.$$

II. Formule de LIOUVILLE

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(C_1, \dots, C_n)$ des vecteurs colonnes tels que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $C'_j = AC_j$. En notant $C_j = (c_{i,j})_{i\leqslant 1\leqslant n}$,

$$c'_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,j}c_{k,j}.$$

Les $(C_1, \dots, C_n)$ est une famille de solutions de l'équation différentielle $X' = AX$. Leur wronskien est noté $w : t \mapsto \det(C_1(t), \dots, C_n(t))$.
D'après la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned}w'(t) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c'_{i,j}(t)\frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(C_1(t), \dots, C_n(t))\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (-1)^{i+j}c'_{i,j}(t)\Delta_{i,j}(C_1(t), \dots, C_n(t))\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^n (-1)^{i+j}a_{i,k}c_{k,j}\Delta_{i,j}(C_1(t), \dots, C_n(t))\\ &= \sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}(-1)^{i+k}\sum_{j=1}^n c_{k,j}(-1)^{k+j}\Delta_{i,j}(C_1, \dots, C_n)\end{aligned}$$

Or, en utilisant le développement par rapport à la $i$ème colonne,

$$\sum_{j=1}^{n} c_{k,j}(-1)^{k+j}\Delta_{i,j}(C_1,\dots,C_n) = \begin{vmatrix} & (c_{m,\ell})_{\substack{1\leqslant m\leqslant k-1\\ 1\leqslant \ell\leqslant n}} & \\ c_{k,1} & \cdots & c_{k,n} \\ & (c_{m,\ell})_{\substack{k+1\leqslant m\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant n}} & \end{vmatrix}$$

Ainsi, le déterminant étant une forme alternée, cette quantité est nulle si $k \neq i$ (car alors les lignes k et i sont égales) et vaut $\det(C_1,\dots,C_n)$ sinon.
Ainsi,

$$\begin{aligned} w'(t) &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(-1)^{i+i}\det(w(t)) \\ &= \mathrm{Tr}(A(t))w(t) \end{aligned}$$

Mathématiciens

Liouville Joseph (24 mar. 1809 à Saint-Omer (France)-8 sept. 1882 à Paris (France)).