Devoir en temps libre

À rendre le lundi 18/09/2023

■ ■ ■

Exercice 1. Partie I

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t : x \mapsto t(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Étudier cette fonction et donner son tableau de variation en précisant ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tracer une représentation graphique de t sur $\mathbb{R}$.

2. Soit x et y des nombres réels. Démontrer la relation suivante

$$t(x+y) = \frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)}.$$

Partie II

Dans la suite du problème, on étudie les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |f(x)| < 1,\ \text{ et } f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}.$$

3. Montrer que $f(0) = 0$.

4. On suppose que f est continue en 0 . Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

5. On suppose désormais, et jusqu'à la fin du problème, que f est dérivable en 0. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que f est impaire.

On admet, pour la question suivante, que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$.

7. Montrer que f est monotone.

8. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Montrer que, pour tout nombre réel a, le rapport $\frac{g(x+a)}{g(x)}$ est indépendant de x.

9. En déduire les fonctions g, puis f.

Indication : On pourra calculer $g'(x)$.