T.P. XI - Exercice d'annales

Solution de l'exercice 1. [BCE ESCP - 2016 - Exerice 4]

1. À l'issue du premier saut, la puce a sauté de 1, 2 ou 3 abscisses. Ainsi, la loi de A_1 est donnée par :

k	1	2	3
$\mathbf{P}([A_1 = k])$	$= \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

En utilisant la description de la loi,

$$\mathbf{E}[A_1] = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

De même,

$$\mathbf{E}\left[A_1^2\right] = \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(A_1) = \mathbf{E}\left[A_1^2\right] - \mathbf{E}[A_1]^2 &= \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \frac{60}{16} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}.\end{aligned}$$

2. a) À l'issue du premier saut, la puce saute de 1, 2 ou 3 unités. Comme le premier saut se situe soit à l'abscisse 1, soit à l'abscisse 2, soit à l'abscisse 3, alors

$$A_2(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

De plus, en utilisant le système complet d'événements $([A_1 = 1], [A_1 = 2], [A_1 = 3])$,

* Si $A_2 = 2$, alors la puce a effectué deux sauts de longueur 1. Ainsi, $\mathbf{P}([A_2 = 2]) = \frac{1}{4}$.
* Si $A_2 = 3$, alors soit la puce a effectué un saut de 1 puis un saut de 2 ; soit elle a effectué un saut de 2 puis un saut de A. Ainsi,

$$\mathbf{P}([A_2 = 3]) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

* Si $A_2 = 4$, alors soit la puce a effecuté un saut de 1 puis un saut de 3 ; soit elle a effectué deux sauts de 2 ; soit elle a effectué un saut de 3 puis un saut de 1. Ainsi,

$$\mathbf{P}([A_2 = 4]) = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

* Si $A_2 = 5$, alors soit la puce a effecuté un saut de 2 puis un saut de 3 ; soit elle a effectué un saut de 3 puis un saut de 2. Ainsi,

$$\mathbf{P}([A_2 = 5]) = 2\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

* Si $A_2 = 6$, alors la puce a effectué deux sauts de longueur 3. Ainsi, $\mathbf{P}([A_2 = 2]) = \frac{1}{16}$.

b) En utilsiant la description de la loi précédente,

$$\mathbf{E}[A_2] = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4 \cdot 5}{16} + \frac{5}{8} + \frac{6}{16} = \frac{7}{2}.$$

3. a) Z_2 est égal au nombre de sauts de trois unités effectués lors des 2 premiers sauts. Ainsi, $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

* Si $Z_2 = 2$, alors deux sauts de trois unités ont été effectués et $A_2 = 6$. Ainsi,

$$\mathbf{P}([Z_2 = 2] \cap [A_2 = 6]) = \mathbf{P}([Z_2 = 2]) = \frac{1}{16},$$
$$\mathbf{P}([Z_2 = 2] \cap [A_2 = k]) = 0, \ \forall\ k \neq 6.$$

* Si $Z_2 = 1$, alors un saut de trois unité a été effectué ; l'autre saut est alors égal à 1 ou 2 unités. De plus, le saut de trois unités peut

avoir été effectué au premier ou au deuxième instant. Ainsi,

$$\mathbf{P}([Z_2=1]\cap[A_2=4]) = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}([Z_2=1]\cap[A_2=5]) = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

* Si $Z_2=0$, les deux sauts effectués peuvent être d'une ou deux unités. Ainsi,

$$\mathbf{P}([Z_2=0]\cap[A_2=2]) = \mathbf{P}([A_2=2]) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}([Z_2=0]\cap[A_2=3]) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}([Z_2=0]\cap[A_2=4]) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

On obtient ainsi la loi de couple suivante :

a \ z	0	1	2	$\mathbf{P}([A_2=a])$
2	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{16}$
5	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
6	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\mathbf{P}([Z_2=z])$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	

D'après la loi de Z_2,

$$\mathbf{E}[Z_2] = 0\cdot\frac{9}{16}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

b) D'après la loi du couple (A_2, Z_2),

$$\mathbf{E}[A_2Z_2] = 4\cdot 1\cdot\frac{1}{4}+5\cdot 1\cdot\frac{1}{8}+6\cdot 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{4\cdot 2+5+6}{8} = \frac{19}{8}.$$

D'après la définition de la covariance,

$$\mathrm{Cov}(A_2,Z_2) = \mathbf{E}[A_2Z_2]-\mathbf{E}[A_2]\,\mathbf{E}[Z_2] = \frac{19}{8}-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Comme $\mathrm{Cov}(A_2,Z_2)\neq 0$, alors A_2 et Z_2 ne sont pas indépendantes.

4. Comme t prend la valeur 1 ou 2 avec probabilité $1/2$, la valeur 3 avec probabilité $1/4$ et la valeur 4 avec probabilité $1/4$, alors

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

A = np.zeros((1, 101))
for k in range(1, 102):
    t = rd.randint(1, 5)
    if t <= 2:
        A[0, k] = 1
    elif t == 3:
        A[0, k] = 2
    elif t == 4:
        A[0, k] = 3

print(A)
```

5. X_n compte le nombre de 1 lors d'une série de n sauts indépendants pour lesquels la probabilité d'obtenir 1 vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.
Y_n compte le nombre de 2 lors d'une série de n sauts indépendants pour lesquels la probabilité d'obtenir 2 vaut $\frac{1}{4}$. Ainsi, $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,\frac{1}{4}\right)$.
Z_n compte le nombre de 3 lors d'une série de n sauts indépendants pour lesquels la probabilité d'obtenir 3 vaut $\frac{1}{4}$. Ainsi, $Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,\frac{1}{4}\right)$.
X_n+Y_n compte le nombre de 1 ou de 2 lors d'une série de n sauts indépendants pour lesquels la probabilité d'obtenir 1 ou 2 vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Ainsi, $X_n+Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,\frac{3}{4}\right)$.

6. a) Le nombre de sauts effectués lors des n premiers sauts vaut n. De plus, ces sauts sont de 1, 2 ou 3 unités. Ainsi, $X_n+Y_n+Z_n=n$.
En utilisant cette relation ainsi que les propriétés de la covariance,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_n, X_n+Y_n) &= \mathrm{Cov}(n-X_n-Y_n, X_n+Y_n)\\ &= \mathrm{Cov}(n, X_n+Y_n)-\mathrm{Cov}(X_n+Y_n, X_n+Y_n)\\ &= 0-\mathbf{V}(X_n+Y_n) = -n\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3n}{16}.\end{aligned}$$

b) D'après les propriétés de la variance,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(X_n+Y_n\right) &= \mathbf{V}\left(X_n\right)+\mathbf{V}\left(Y_n\right)+2\mathrm{Cov}\left(X_n,Y_n\right)\\ \frac{3n}{16} &= \frac{n}{4}+\frac{3n}{16}+2\mathrm{Cov}\left(X_n,Y_n\right)\\ \mathrm{Cov}\left(X_n,Y_n\right) &= -\frac{n}{8}.\end{aligned}$$

c) D'après la définition,

$$\begin{aligned}\rho(X_n,Y_n) &= \frac{\mathrm{Cov}\left(X_n,Y_n\right)}{\sqrt{\mathbf{V}\left(X_n\right)}\sqrt{\mathbf{V}\left(Y_n\right)}} = -\frac{\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4}}\sqrt{\frac{3n}{16}}}\\ &= -\frac{\frac{n}{8}}{\frac{\sqrt{3}n}{2\cdot 4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

7. a) A_n est l'abscisse du point à l'instant n. Comme il y a X_n sauts de 1 unité, Y_n sauts de 2 unités et Z_n sauts de 3 unités, alors

$$A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance et les lois obtenues précédemment,

$$\mathbf{E}\left[A_n\right] = \mathbf{E}\left[X_n\right]+2\mathbf{E}\left[Y_n\right]+3\mathbf{E}\left[Z_n\right] = \frac{n}{2}+2\frac{n}{4}+3\frac{n}{4} = \frac{7n}{4}.$$

b) En utilisant les questions **6.a)** et **7.a)**,

$$A_n = X_n + 2Y_n + 3(n - X_n - Y_n) = 3n - 2X_n - Y_n.$$

D'après les propriétés de la variance,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(A_n\right) &= \mathbf{V}\left(3n-2X_n-Y_n\right) = \mathbf{V}\left(2X_n+Y_n\right)\\ &= 4\mathbf{V}\left(X_n\right)+\mathbf{V}\left(Y_n\right)+4\mathrm{Cov}\left(X_n,Y_n\right) = 4\frac{n}{4}+\frac{3n}{4}-4\frac{n}{8} = \frac{5n}{8}.\end{aligned}$$

Toujours d'après cette relation,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(A_n+2X_n\right) &= \mathbf{V}\left(3n-Y_n\right)\\ \mathbf{V}\left(A_n\right)+4\mathbf{V}\left(X_n\right)+4\mathrm{Cov}\left(A_n,X_n\right) &= \mathbf{V}\left(Y_n\right)\\ \frac{5n}{8}+4\frac{n}{4}+4\mathrm{Cov}\left(A_n,X_n\right) &= \frac{3n}{4}\\ \mathrm{Cov}\left(A_n,X_n\right) &= -\frac{7n}{32}.\end{aligned}$$

8. La commande `np.cumsum` permet d'effectuer les sommes des sauts successifs. Ainsi, on obtient le tracé de la position de la puce en fonction du temps. □