■ ■ ■

Exercice 1. Soit s un réel strictement positif. On définit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s \\ \frac{2s^2}{x^3} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

On modélise, pour un employé pris au hasard dans la population, le nombre S de SMIC (salaire minimum) que vaut son salaire. On note s le SMIC. Par définition, on a toujours $S \geqslant s$. Si par exemple un employé gagne 2 SMIC, son salaire vaut $S = 2s$.

On suppose que S est une variable aléatoire à densité, de densité f, où f est la fonction définie ci-dessus.

2. Montrer que la fonction de répartition de S est la fonction F définie par :

$$\forall\, x \in]-\infty, s[,\ F(x) = 0 \text{ et } \forall\, x \in [s, +\infty[,\ F(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2.$$

3. Dresser le tableau de variations de F sur $[s, +\infty[$ et représenter l'allure de sa courbe sur $\mathbb{R}$.

4. Soit G la fonction définie sur $[0,1[$ par $\forall\, y \in [0,1[,\ G(y) = s\sqrt{\frac{1}{1-y}}$.

a) Montrer que F est une bijection de $[s, +\infty[$ vers $[0,1[$.

b) Montrer que $\forall\, y \in [0,1[,\ G(y) \in [s, +\infty[$.

c) Montrer que $\forall\, y \in [0,1[,\ F(G(y)) = y$.

5. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1[$ et V la variable aléatoire égale à $G(U)$.

a) Rappeler la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1[$.

b) Montrer que $\forall\, x \in [s, +\infty[,\ \mathbf{P}(V \leqslant x) = \mathbf{P}(U \leqslant F(x)) = F(x)$ et $\forall\, x \in]-\infty, s[,\ \mathbf{P}(V \leqslant x) = 0$.

c) En déduire que V est une variable aléatoire de même loi que S.

6. Compléter la fonction `S` suivante en langage Python qui prend en entrée le réel strictement positif `s` et qui renvoie une simulation de S.

On rappelle que la commande `rd.random()` *renvoie un nombre aléatoire compris entre et* 0 *et* 1 *selon une loi uniforme sur* $[0,1[$.

```python
import numpy.random as rd

def S(s):
    U = rd.random()
    S = ...
    return S
```

7. Démontrer que S admet une espérance et vérifier que $\mathbf{E}[S] = 2s$.

8. S admet-elle une variance ?

9. Démontrer que la proabilité qu'un employé ait un salaire d'au moins $\frac{3}{2}s$ vaut $p = \frac{4}{9}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère $S_1, \dots, S_n$ n variables aléatoires indépendantes représentant le salaire de n salariés distincts.

On s'intéresse ici au nombre N_n de ces n salariés qui ont un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}s$.

On admet que N_n est une variable aléatoire.

10. Déterminer la loi de N_n.

11. Calculer $\mathbf{E}[N_n]$ et vérifier que $\mathbf{V}(N_n) = \frac{20n}{81}$.

12. Déterminer, en fonction de n, la probabilité qu'au plus 2 employés parmi les n aient un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}s$.

13. Notons $M_n = \frac{1}{2n}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n)$.

a) Déterminer l'espérance de M_n.

b) On considère le programme suivant où `S` est la fonction en langage Python obtenue à la question **6**.

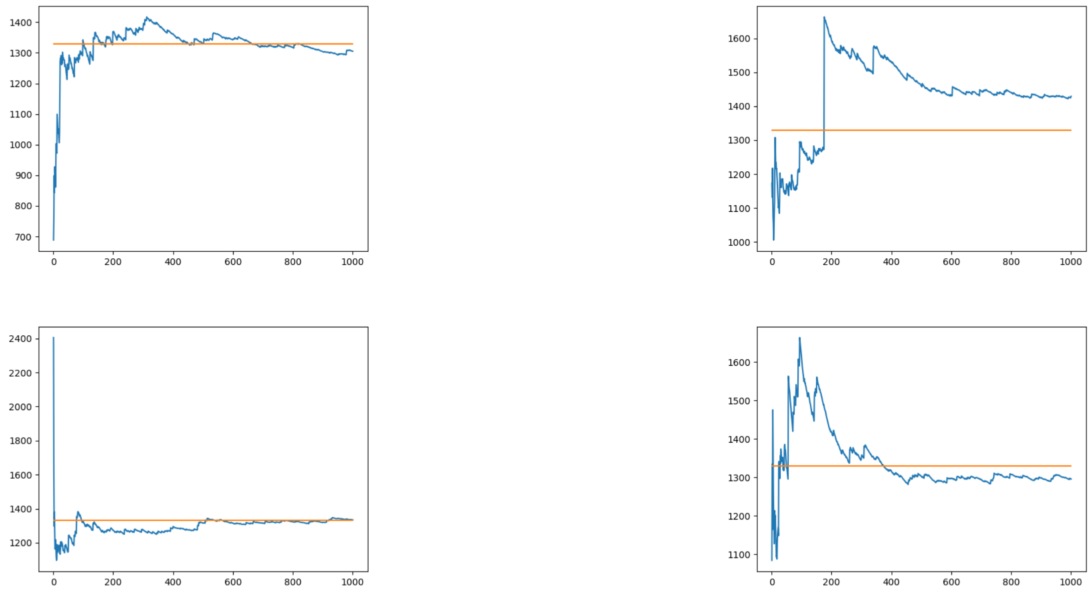
```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

n = 1000
s = 1330
M = 0
F = np.zeros(n)
X = np.zeros(n)
L = np.zeros(n)
for k in range(1, n+1):
    M = M + S(s)
    F[k-1] = 1/(2*k)*M
    X[k-1] = k
    L[k-1] = s

plt.plot(X, F)
plt.plot(X, L)
plt.show()
```

Que représente F ?

c) On obtient les courbes suivantes :



Justifier que les appels différents de ce programme donnent des courbes différentes.
Que permet de conjecturer ces courbes sur le comportement des réalisations de M_n quand n tend vers $+\infty$?