Devoir en temps libre

À rendre le lundi 22/01/2024

■ ■ ■

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (T_n) une suite de variables aléatoires. La suite (T_n) *converge en probabilité* vers α si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(|T_n - \alpha| > \varepsilon\right) = 0.$$

Soit $(X_i,\, i \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $i \geqslant 1$, on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$.

1. Donner la loi de Y_i, $i \geqslant 1$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$. Calculer l'espérance mathématique et la variance de T_n.

3. Montrer que la suite $(T_n)_{n>0}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante $X = 2p$.

Exercice 2.

1. Soit $x \in]0,1[$ et n un entier naturel.

a) Montrer que $(1-x)\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$.

b) En déduire que lorsque n tend vers l'infini, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{1-x}$.

c) Montrez de même que $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{(1-x)^2}$.

On pose alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2. On dispose de deux dés : l'un des dés est pipé de façon à ce qu'on tire toujours la face 6, l'autre est équilibré (chaque face a une probabilité $\frac{1}{6}$). Pour identifier le dé pipé, on emploie la méthode suivante : on lance les deux dés jusqu'à ce qu'on obtienne un tirage différent de 6, ce qui permet de distinguer le dé non pipé du dé pipé. On note I le nombre de tirages nécessaires à l'identification.

a) Quelle est la probabilité d'avoir à faire un second tour (et donc $I > 1$) ?

b) Quelle est la probabilité que $I = 2$?

c) Quelle est la probabilité qu'on identifie le dé pipé au tour k (et donc $I = k$) ?

d) Quelle est l'espérance de I ?

3. On suppose ici que les deux dés étaient en fait équilibrés. On suit donc la méthode précédente jusqu'à ce qu'on pense avoir identifié le dé pipé (au tirage $I = k$) ou que l'on s'aperçoive que les deux dés sont non pipés (on note alors $I = 0$ par convention).

a) i. Quelle est la probabilité que $I = 1$?

ii. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que $I = k$?

iii. En déduire la probabilité que $I = 0$.

iv. Calculez l'espérance de I.

b) i. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que $I = k$ sachant que $I > 0$?

ii. Vérifiez qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

iii. Calculez l'espérance de cette loi.

iv. Retrouve-t-on l'espérance calculée en **2.d)** ?