— 12 —

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Dans tout ce chapitre, l'espace est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

I. Représentation paramétrique de droite

Propriété 1

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul de l'espace. On note (d) la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$. Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$.

Définition 1

Avec les même notations que dans le propriété précédente, on dit que le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$, est une représentation paramétrique de la droite (d).

⚠ **Remarque :**

Attention ! Une représentation paramétrique de droite n'est pas unique !
Il en existe même un infinité.

Exemple :

La droite passant par le point $A(2,1,3)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1,-3,2)$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = 3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Méthode :

On se place dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(1,-3,1)$ et$B(-1,1,4)$ et on veut déterminer si les points $C(-1,1;,4)$ et $D(2,4,2)$ appartiennent à la droite (AB).

1. On donne d'abord un représentation paramétrique de la droite (AB). On détermine $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$ et ainsi, on a la représentation paramétrique suivantes : $\begin{cases} x = 1-2\times t \\ y = -3+4\times t \\ z = 1+3\times t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

2. On remplace x, y et z par les coordonnées du point qu'on étudie. Si le système admet une solution, alors le point appartient à la droite. Sinon, il n'appartient pas à la droite.

   Pour $C(-1,1,4)$, on a $\begin{cases} -1 = 1-2\times t \\ 1 = -3+4\times t \\ 4 = 1+3\times t \end{cases}$ soit $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

   Le système admet une solution donc le point $C \in (AB)$.

   Pour $D(2,4,2)$, on a $\begin{cases} 2 = 1-2\times t \\ 4 = -3+4\times t \\ 2 = 1+3\times t \end{cases}$ soit $\begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{7}{4} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$

   Le système n'admet pas de solution donc le point

   $D \notin (AB)$.

II. Équations cartésiennes

1. Équation de la sphère

Propriété 2

Dans un repère orthonormé, une équation cartésienne de la sphère de rayon R et de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ est :

$$(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 + (z-z_\Omega)^2 = R^2$$

Remarque :

Cela signifie que les points $M(x,y,z)$ qui sont sur la sphère sont ceux qui vérifie l'équation de celle-ci.

2. Équation du plan

Propriété 3

1. Un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
2. Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, alors un vecteur normal de ce plan est $\overrightarrow{n}(a,b,c)$

Exemple :

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x+2y-3z+1=0$. Ce plan admet le vecteur $\overrightarrow{n}(3,2,-3)$ comme vecteur normal.

Considérons le point $A(1,1,2)$. On a $3\times 1+2\times 1-3\times 2+1=0$ donc les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan $\mathcal{P}$. Le point A appartient donc au plan $\mathcal{P}$.

Le point $B(1;5;0)$ n'appartient pas à ce plan : on a $3\times 1+2\times 5-3\times 0+1=14\neq 0$.

Exemple :

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1;5;7)$ et admettant $\overrightarrow{n}(4,-2,3)$ comme vecteur normal. L'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $4x-2y+3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

Or $A\in\mathcal{P}$ donc $4\times 1-2\times 5+3\times 7+d=0 \iff 15+d=0 \iff d=-15$.

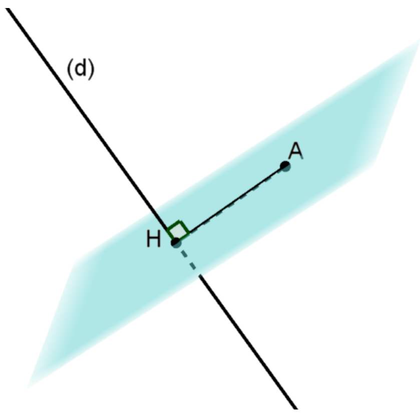
$\mathcal{P}$ admet $4x-2y+3z-15=0$ comme équation cartésienne.

III. Projeté orthogonal

Définition 2

Soient A un point de l'espace et (d) une droite de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$. On appelle projeté orthogonal de A sur (d) le point H de la droite (d) tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$. En particulier,

- Si A appartient à la droite (d), ce point est son propre projeté,
- sinon, la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (d).



Remarque :

H est en fait l'intersection de la droite (d) et du plan $\mathcal{P}$ qui passe par le point A et auquel la droite (d) est normale. Si l'on connaît un point et un vecteur directeur de la droite (d), il est alors possible de donner sa représentation paramétrique et de donner l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ afin de déterminer le projeté orthogonal de A sur (d).

Exemple :

Soient (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$ et A le point de coordonnées $(3, 3, 3)$. On vérifie facilement que le point A n'appartient pas à la droite (d). Un vecteur directeur de la droite (d) est le vecteur $\overrightarrow{n}(-1, 1, -2)$. Notons alors $\mathcal{P}$ le plan passant par A est dont $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal : la droite (d) sera ainsi orthogonale à ce plan. On peut déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ comme étant :

$$-x + y - 2z + 6 = 0$$

Le projeté orthogonal H de A sur (d) est le point d'intersection de (d) et de $\mathcal{P}$.
Notons $H(x, y, z)$ et t le paramètre dans l'équation de (d).
Puisque $H \in (d)$, alors on a que $x = 1 - t$, que $y = 3 + t$ et que $z = 1 - 2t$.
De plus $-x+y-2z+6 = 0$ donc en remplaçant les valeurs de x, y et z dans cette dernière équation, on aboutit à

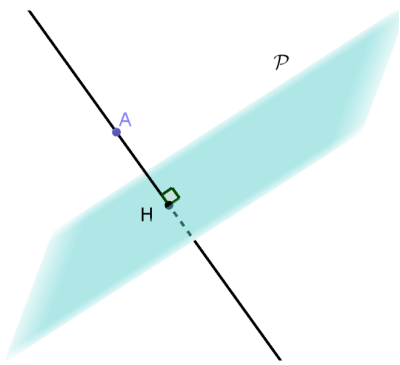
$$-(1 - t) + (3 + t) - 2(1 - 2t) + 6 = 0 \iff 6t + 6 = 0 \iff t = -1$$

Ainsi, $x = 1 - (-1) = 2$, $y = 3 + (-1) = 2$ et $z = 1 - 2 \times (-1) = 3$. Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est donc le point $H(2, 2, 3)$.

Définition 3

Soient A un point de l'espace, $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{n}$. En particulier

- Si A appartient au plan $\mathcal{P}$, ce point est son propre projeté
- sinon, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathcal{P}$



Définition 4

Soient A un point de l'espace et (d) une droite (ou $\mathcal{P}$ un plan).
On appelle distance de A à (d) (ou à $\mathcal{P}$) la plus petite distance AM pour M un point de la droite (d) (ou du plan $\mathcal{P}$). On la note $d(A, (d))$ (ou $d(A, \mathcal{P})$).

Propriété 4

Soit $\mathcal{S}$ un plan ou une droite de l'espace. Soient A un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}$. On a alors que $d(A, \mathcal{S}) = AH$.

Preuve. Soit K un point de $\mathcal{S}$. On a alors

$$AK^2 = ||\overrightarrow{AK}||^2 = ||\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK}||^2 = ||\overrightarrow{AH}||^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} + ||\overrightarrow{HK}||^2.$$

Or, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan ou à la droite $\mathcal{S}$, auquel appartiennent les points H et K. Ainsi, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} = 0$. De plus, $||\overrightarrow{HK}||^2 \geqslant 0$. Ainsi, on a bien $AK^2 \geqslant AH^2$.
Les distances sont positives donc par croissance de la fonction racine, on a

$$AK \geqslant AH.$$

□

Exemple :

On considère la droite (d) et le point A de l'exemple précédent. On a déterminé que le projeté orthogonal H de A sur (d) avait comme coordonnées $H(2, 2, 3)$.
On a ainsi que $\overrightarrow{AH}(-1, -1, 0)$ et donc $AH = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
Donc la distance entre A et la droite (d) est $\sqrt{2}$.