Compléments sur la dérivation

Exercice 1 Dériver les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition et de dérivation.

$f_1 : x \longmapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto 8x^7 + \dfrac{4}{x^2}$

$f_3 : x \longmapsto 2x^4 + \mathrm{e}^{3x-1}$ $\qquad$ $f_4 : x \longmapsto (5x^2 + 2x - 1)\,\mathrm{e}^x$

$f_5 : x \longmapsto (1 - 6x^2)\,\mathrm{e}^{3x+2}$ $\qquad$ $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

$f_7 : x \longmapsto \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$ $\qquad$ $f_8 : x \longmapsto \dfrac{x + \mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^x}$

Exercice 2 On considère la fonction $f : x \longmapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

Exercice 3 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{10x + 4}{5x^2 + 1}$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ et que pour tout réel x dans ces intervalles
$$f'(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

Exercice 5 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Déterminer le sens de variations de la fonction f définie pour tout réel $x \in [0;1]$ par $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Exercice 6 À l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$

Exercice 7 Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 2$ et $h(x) = 2 - x$.
Donner une expression de $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(h \circ g)(x)$ et $(f \circ g \circ h)(x)$.

Exercice 8 Exprimer chacune des fonctions suivantes comme la composition de deux fonctions « usuelles ». On ne se souciera pas des domaines de définition.

$f_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{1+x^2}$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto (3x + 8)^7$ $\qquad$ $f_3 : x \longmapsto \sqrt{1 + \mathrm{e}^x}$

Exercice 9 Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une involution de E si pour tout $x \in E$, $(f \circ f)(x) = x$.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
2. Soit a un réel. Montrer que la fonction $x \longmapsto a - x$ est une involution de $\mathbb{R}$.
3. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{b}{x - a} + a$ est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Exercice 10 Dériver les fonctions suivantes, dérivables sur l'intervalle donné.

$f_1 : x \longmapsto (3x + 2)^2$, sur $\mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto (6x^2 + 3x + 4)^3$, sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, sur $]0;+\infty[$ $\qquad$ $f_4 : x \longmapsto \sqrt{2x^2 - 5x + 7}$,sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \longmapsto \dfrac{1}{(3x + 6)^2}$, sur $]-2;+\infty[$ $\qquad$ $f_6 : x \longmapsto \mathrm{e}^{x + \frac{1}{x}}$, sur $]-\infty;0[$