— 4 —

Limites de fonctions

I. Limite d'une fonction à l'infini

1. Limite finie à l'infini

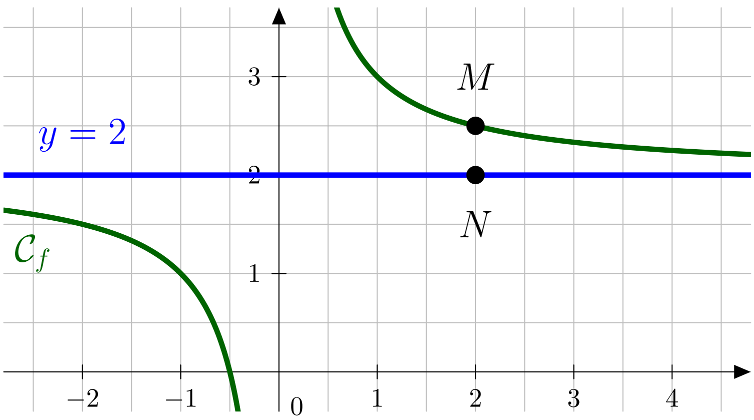
Définition 1

On dit que la fonction f admet pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$$

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.



Intuitivement, dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ revient à dire que les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de 2 lorsque x devient grand. Ainsi, la distance MN tend vers 0.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définition 2

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$), alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou $-\infty$).

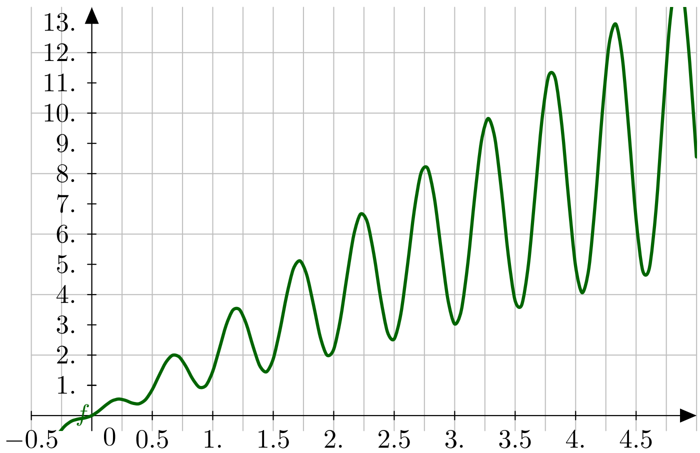
2. Limite infinie à l'infini

Définition 3

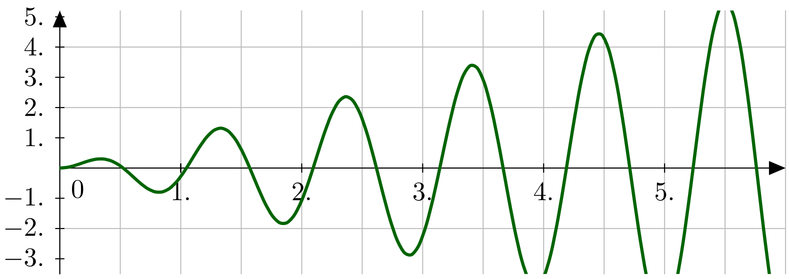
- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty; b[$, $b \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

⚠️ **Remarque :**

- On a une définition similaire pour les limites infinies en $-\infty$ en considérant les x comme « suffisamment petit ».
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie :



3. Limites usuelles

Propriété 1 : Admise

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Si n est pair,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$$

Si n est impair,

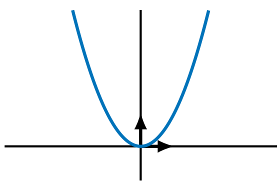
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^-$$

Enfin,

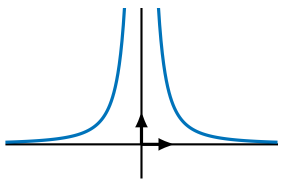
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Afin de pouvoir bien retenir les limites usuelles, le plus simple est de bien connaître les courbes représentatives des fonctions suivantes :

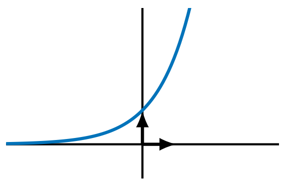
$x \mapsto x^n$, **n pair**



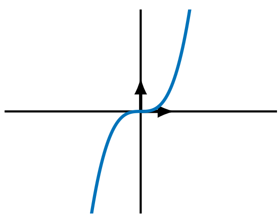
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, **n pair**



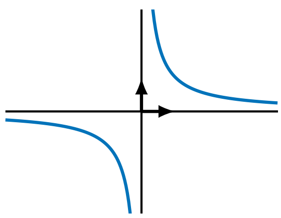
$x \mapsto e^x$



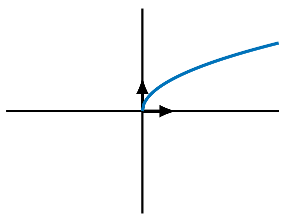
$x \mapsto x^n$, **n impair**



$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, **n impair**



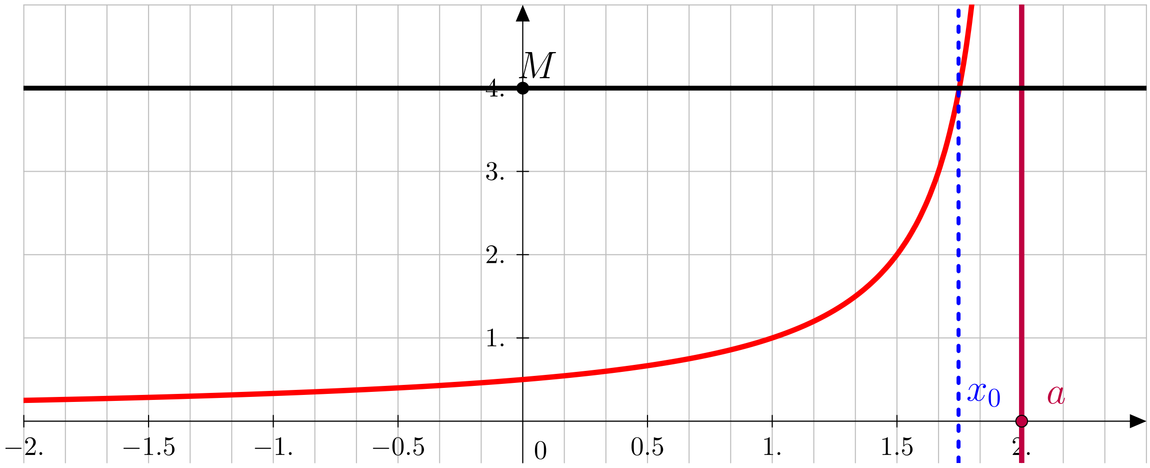
$x \mapsto \sqrt{x}$



II. Limite en un point

Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a.



En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de a.

Si on prend un réel $M > 0$ quelconque, l'intervalle $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de a.

Définition 4

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle $]M; +\infty[$, $M \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a et on note : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en a si tout intervalle $]-\infty; m[$, $m \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a et on note : $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Définition 5

La droite d'équation $x = A$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f si :

$$\lim_{x \to A} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to A} f(x) = -\infty$$

Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

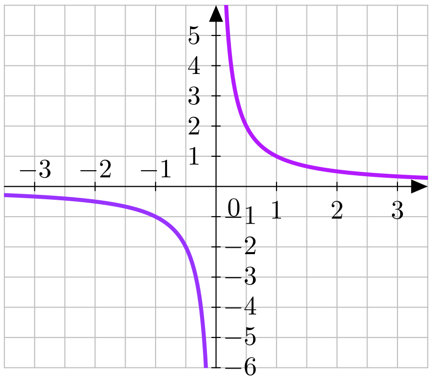
- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

- Si $x > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

On parle de limite à gauche en 0 et de limite à droite en 0.



III. Opération sur les limites

α peut désigner un réel quelconque ou $\pm\infty$.

1. Limites d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2. Limites d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)\times g(x))$	$l \times l'$	$\pm\infty$ suivant les signes de f et g autour de α	$\pm\infty$ suivant les signes de f et g autour de α	F.I.

3. Limites d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	l	l	$l \neq 0$ ou $\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	l'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$ suivant les signes de f et g autour de α	F.I.	$\pm\infty$ suivant les signes de f et g autour de α	F.I.

4. Composition de limites

Propriété 2 : Admise

Soient a, b et c des réels ou $\pm\infty$. Soient u et v des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = c$.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2-\dfrac{1}{x}}$. On souhaite calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
On considère les fonctions u et v définie par : $u(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Donc $f(x) = v(u(x))$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 2$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2-\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{u(x)} = \lim\limits_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

IV. Comparaison de limites

Théorème 1 : Théorème de comparaison

Soient I un intervalle et a un élément de cet intervalle ou l'une de ces bornes. Soient f et g deux fonctions définies sur I.

- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple :

On souhaite montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$. Ainsi, $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. On construit alors le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On s'aperçoit alors que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1$, et donc que $e^x \geqslant 1 + x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient I un intervalle et a un élément de cet intervalle ou l'une de ces bornes. Soient f, g et h trois fonctions définies sur I.
Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$, alors g admet également une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

🖊 **Exemple :**

Pour tout réel non nul x, on pose $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$.
On a alors, pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

V. Croissances comparées

Propriété 3 : Croissances comparées

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

🖊 **Exemple :**

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{e^x - x}{e^x}$. On a alors $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} = 1 - \dfrac{x}{e^x}$.
Or, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.