— 5 —

Compléments sur la dérivation

I. Rappels sur la dérivation

1. Fonction dérivée

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I la fonction

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{cases}$$

Exemple :

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel et h un réel non nul.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité tend vers $2x$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

2. Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$

3. Opérations sur les dérivées

Théorème 1

Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonctions $k\,u$, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est également dérivable sur I. On a alors

$$(k\,u)' = k\,u' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

4. Tangente à la courbe

Définition 2 : Tangente à la courbe

Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$.

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a).$$

Exemple :

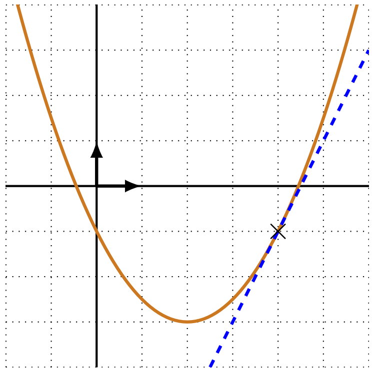
Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$f'(x) = x - 2$$

Déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4

- $f'(4) = 4 - 2 = 2$
- $f(4) = \dfrac{4^2}{2} - 2 \times 4 - 1 = -1$

Cette tangente a pour équation $y = f'(4) \times (x - 4) + f(4)$ soit $y = 2(x - 4) - 1$ et donc $y = 2x - 9$.



5. Variations d'une fonction

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

II. Composition de fonctions

Définition 3 : Fonction composée

Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.
On définit la *fonction composée* de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f \circ g(x) = f(g(x)).$$

L'idée derrière la composition de fonctions est simplement d'appliquer successivement plusieurs fonctions.

$$f \circ g \ :\ x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f[g(x)]$$

Exemple :

Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x+3)^2$.
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 3 = x^2 + 3$.

Attention ! En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$! Ces deux fonctions ne sont d'ailleurs pas forcément définies sur le même ensemble.

Propriété 3

Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x).$$

Exemple :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + 3x - 2$. Pour tout réel x, on a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 2x + 3$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = e^x$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}.$$

Propriété 4 : Cas particuliers

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$.

Exemple :

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
Bien que la fonction f soit définie sur l'intervalle fermé $[-2;2]$, elle n'est en revanche dérivable que sur l'intervalle ouvert $]-2;2[$. Pour tout réel $x \in]-2;2[$, on a

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$