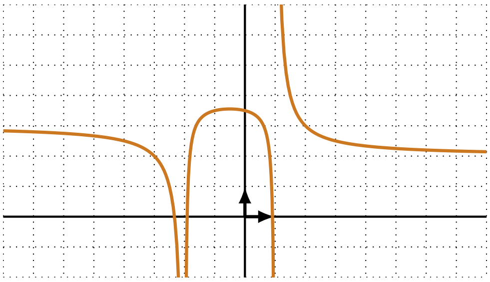
Limites de fonctions

Détermination et opérations sur les limites

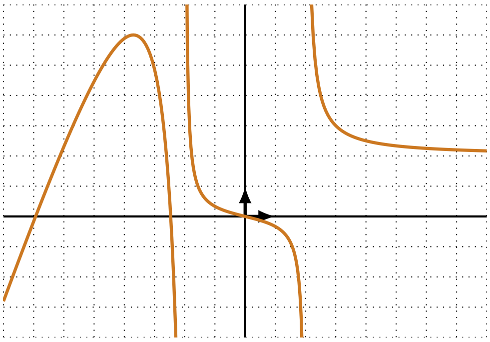
Exercice 1 On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dans un repère orthonormé.



A l'aide de cette représentation graphique, déterminer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f ?

Exercice 2 On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les valeurs de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$?

Exercice 3 On considère une fonction f dont le tableau de variations est donnée ci-dessous. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$	-4	2	5	7	$+\infty$
f	2 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	-3	↗ $+\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	-3	↗ 1

1. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to(-4)^-} f(x)$, $\lim_{x\to(-4)^+} f(x)$, $\lim_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim_{x\to 5^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à $\mathscr{C}_f$?
3. Dans un repère orthonormé, tracer une courbe d'une fonction compatible avec ce tableau de variations.

Exercice 4 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{x\to+\infty} (x^3+x-3)$ **b.** $\lim_{x\to-\infty} (x^3+x-3)$ **c.** $\lim_{x\to+\infty} (x^3+x^2-3)$

d. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$ **e.** $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$ **f.** $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\right)$

g. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$ **h.** $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$ **i.** $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2x}{1-x}\right)$

j. $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{2x}{1-x}\right)$ **k.** $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{1-x}\right)$ **l.** $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x}{1-x}\right)$

m. $\lim_{x\to+\infty} \left((1-2x)\,e^{x}\right)$ **n.** $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2-3x+1\right)$ **o.** $\lim_{x\to-\infty} \left(x^2-3x+1\right)$

p. $\lim_{x\to-\infty} \left(e^{-x^2+7x-3}\right)$ **q.** $\lim_{x\to-\infty} \left(\exp\left(\frac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$ **r.** $\lim_{x\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

Exercice 5 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$, $+\infty$, -1^+ et -1^-.

Exercice 6 Une autre forme indéterminée...

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $2x^3+6x^2-9x+1=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}$.

Exercice 7 On rappelle qu'une fonction f est dérivable en x si le taux de variation $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

1. Écrire le taux de variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et h.
2. Que vaut $f'(0)$? En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

Comparaison de limites

Exercice 8 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x, $x-2 \leqslant f(x) \leqslant x+2$. Que peut-on en déduire pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 9 Déterminer les limites de chaque fonction en $+\infty$:

1. $f : x \mapsto x^2+2\cos(x)$
2. $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)+x}$
4. $k : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$

Exercice 10 Soit f une fonction telle que, pour tout $x>1$,

$$\frac{2x^2+3}{3x^2-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x^2+5x}{3x^2-x}$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11 La fonction tangente hyperbolique est la fonction notée th et définie pour tout réel x par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x)$.
2. Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

3. En déduire le tableau de variations de th.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th à l'abscisse 0.
5. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe th ainsi que sa tangente à l'abscisse . 0.

Exercice 12 On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(x) = \mathrm{e}^x + x - 1$.

1. Factoriser l'expression de $\ell(x)$ par e^x.
2. Déterminer les limites de ℓ en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 13 Déterminer les limites de chaque fonction en $-\infty$ et en $+\infty$:

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{x}$
3. $h : x \mapsto \mathrm{e}^x+2$

Exercice 14 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$. Étudier la fonction f (domaine de définition, variation, signe et limites). Esquisser sa courbe représentative dans un repère orthonormé.