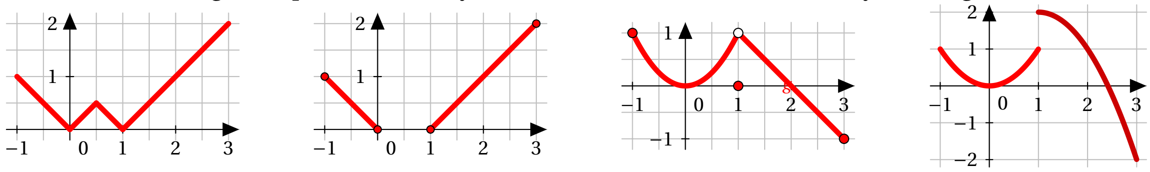
Continuité

Continuité d'une fonction

Exercice 1 Dans chaque repère ci-dessous, la courbe tracée représente une fonction f.

1. Déterminer les intervalles où f est continue.
2. Donner l'image de 1 par la fonction f. Coïncide-t-elle avec les limites de f en 1, à gauche et à droite ?



Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x)$.
3. La fonction f est-elle continue en -1 ?

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 4 On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x, $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 6 Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1;2]$.

Exercice 7 On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1;0]$?
3. Que vaut $f(0)$? Quel est le signe de $f(-1)$?
4. En déduire que l'équation $e^x + x = 0$ admet exactement une solution sur $[-1;0]$.

Exercice 8 On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 9x^2 - 60x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. En déduire la nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Soit f et g les fonction définies pour tout réel x par $f(x) = (1-x)e^x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$.

1. Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et en donner une valeur à 10^{-2} près. On note α ce réel.
3. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$ et construire le tableau de variations de g.

Exercice 10 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f(x) \in [0;1]$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.

Suites et fonction continue

Exercice 11 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Vérifier que si $x \in [0;6]$, alors $f(x) \in [0;6]$.
3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0;6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 12 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{5}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.
5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 13 On considère la fonction f définie par $f(0) = 1$ et pour tout réel non nul x, $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.

1. Que vaut $f(u_n)$ pour tout entier naturel n ?
2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ et $f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$. La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice 14 *(Amérique du Nord 2021)*

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par par

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,75u_n(1 - 0.15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 0,75x(1 - 0.15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Déterminer la limite l de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace() ci-dessous.

```python
def menace():
    U = 0.6
    N = 0
    while U > 0.02:
        U = 0.75*U*(1-0.15*U)
        N = N+1
    return N
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace(). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.