Correction - Bac Blanc (Sujet 2)

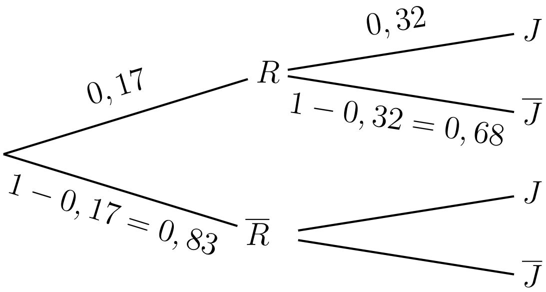
(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 4 exercices indépendants.

Exercice 1

Partie A

1. On représente la situation à l'aide de cet arbre pondéré :



2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française, donc $P(J) = 0,11$.

   La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $P\left(\overline{R} \cap J\right)$.

   D'après la formule des probabilités totales : $P(J) = P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right)$. Donc :

   $$P\left(\overline{R} \cap J\right) = P(J) - P(R \cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$$

   Ainsi, $P\left(\overline{R} \cap J\right) \approx 0,056$ à 10^{-3} près.

4. $P_{\overline{R}}(J) = \dfrac{P\left(\overline{R} \cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0,056}{0,83} \approx 0,0675$

   La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,75 %.

Partie B

1.
   - On interroge une personne au hasard et il n'y a que deux possibilités : elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0,17$, ou pas, avec une probabilité de $1 - p = 0,83$.
   - On réalise $n = 50$ fois ce questionnement de façons identiques et indépendantes.

   Donc $X \sim \mathcal{B}(50; 0,17)$.

2. $P(X=5)=\binom{50}{5}\times 0,17^5\times(1-0,17)^{50-5}\approx 0,069$

Il y a donc une probabilité de $0,069$ que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

Autrement dit, le recenseur affirme que $P(X<13)\geqslant 0,95$.

Or $P(X<13)=P(X\leqslant 12)\approx 0,929<0,95$ donc cette affirmation est fausse.

4. Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $E(X)=np=50\times 0,17=8,5$.

Exercice 2 **1**. **a.** Premièrement, on a $\overrightarrow{AB}(-2,3,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$. Il est clair que ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C, non alignés, définissent un plan. De plus,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=-2\times 3+3\times 2+0\times 6=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}=-2\times 3+0\times 2+1\times 6=0$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal plan (ABC) donc une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $3x+2y+6z+d=0$. Enfin, $A\in(ABC)$ donc :

$$3+2\times 0+6\times 0+d=0 \iff 6+d=0 \iff d=-6$$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $3x+2y+6z-6=0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

a. La droite d est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à (ABC).

De plus elle passe par le point O de coordonnées (0 ; 0 ; 0).

La droite d a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 6t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$

b. La droite d coupe le plan (ABC) au point H.

Les coordonnées du point H vérifient le système $\begin{cases} x_H = 3t \\ y_H = 2t \\ z_H = 6t \\ 3x_{\mathrm{H}}+2y_{\mathrm{H}}+6z_{\mathrm{H}}-6 = 0 \end{cases}$

Donc $3\times 3t+2\times 2t+6\times 6t-6=0$ ce qui équivaut à $9t+4t+36t=6$ ou $49t=6$ donc $t=\dfrac{6}{49}$.

$x_H=3t$ donc $x_H=\dfrac{18}{49}$, $y_H=2k$ donc $y_H=\dfrac{12}{49}$, et $z_H=6k$ donc $z_H=\dfrac{36}{49}$.

Le point H a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\ ;\ \dfrac{12}{49}\ ;\ \dfrac{36}{49}\right)$.

c. $\mathrm{OH}^2 = (x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{O}})^2 + (y_{\mathrm{H}} - y_{\mathrm{O}})^2 + (z_{\mathrm{H}} - z_{\mathrm{O}})^2 = \left(\dfrac{18}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{49}\right)^2 + \left(\dfrac{36}{49}\right)^2 = \dfrac{18^2 + 12^2 + 36^2}{49^2} = \dfrac{1764}{49^2}$

Donc $\mathrm{OH} = \sqrt{\dfrac{1764}{49^2}} = \dfrac{42}{49} = \dfrac{7 \times 6}{7 \times 7} = \dfrac{6}{7}$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

- En prenant le triangle OAB pour base de la pyramide OABC, la hauteur est OC, et le volume $\mathcal{V}$ est égal à $\dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \mathrm{OC}$ où $\mathcal{B}$ est l'aire du triangle OAB.

  $\mathcal{B} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$ et $\mathrm{OC} = 1$.

  Donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1$ (u. a.).
- En prenant le triangle ABC pour base de la pyramide OABC, la hauteur est OH, et le volume $\mathcal{V}$ est égal à $\dfrac{1}{3} \times \mathcal{B}' \times \mathrm{OH}$ où $\mathcal{B}'$ est l'aire du triangle ABC.

  $\mathrm{OH} = \dfrac{6}{7}$ et $\mathcal{V} = 1$ donc $1 = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B}' \times \dfrac{6}{7}$ et donc $\mathcal{B}' = \dfrac{49}{14} = \dfrac{7 \times 7}{7 \times 2} = \dfrac{7}{2} = 3,5$.

L'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{7}{2} = 3,5$ (u. a.).

Exercice 3

Partie A

1. Pour tout $x > 0$, on a : $g'(x) = \dfrac{2\frac{1}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$

2. **a.** La valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ est l'image de e par f : $f(\mathrm{e}) = \dfrac{2\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

b. Soit $x > 0$, on a $g'(x) = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$ et $x^2 > 0$.

Ainsi, $g'(x)$ est du signe de $2 - 2\ln x = 2(1 - \ln x)$.

- Sur $]0\,;\mathrm{e}[$, $\ln x < 1$ donc $1 - \ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
- Sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$, $\ln x > 1$ donc $1 - \ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

c. Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

Partie B

1. f est de la forme u^2 avec $u = \ln$.
Or $(u^2)'(x) = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2\ln x}{x} = g(x)$
Donc sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f' = g$.

2. On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f' = g$.

Sur l'intervalle $]0\ ;1[$, la fonction g est négative donc f' est négative ; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]1\ ;+\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive ; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x = 1$.

3. On étudie la convexité de la fonction f.

D'après les questions précédentes, la fonction g, dérivée de la fonction f, est croissante sur $]0\ ;\mathrm{e}[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

De même, la fonction g, dérivée de la fonction f, est décroissante sur $]\,\mathrm{e}\ ;+\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

De plus, la fonction g donc la fonction f', change de sens de variation en $x = \mathrm{e}$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x = \mathrm{e}$.

4. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est :
$y = f'(\mathrm{e})\,(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$. On a : $f'(\mathrm{e}) = g(\mathrm{e}) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$; $f(\mathrm{e}) = (\ln \mathrm{e})^2 = 1$
L'équation devient : $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}\,(x - \mathrm{e}) + 1$ soit $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 2 + 1$ c'est-à-dire $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.

5. La fonction f est convexe sur $]0, \mathrm{e}]$ donc sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes. En particulier, elle est au dessus de celle étudiée dans la question précédente.
On en déduit que sur $]0, \mathrm{e}]$, on a : $\ln(x)^2 \geqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.

Exercice 4 **1**. Disons que Astrid commence à constituer son équipe, elle a donc 5 choix parmi 18 (on exclut Astrid et Assia des choix). Ensuite, Assia aura donc 5 choix parmi les 13 personnes restantes.
Il y a donc $\dbinom{18}{5} \times \dbinom{13}{5} = 8568 \times 1287 = 11027016$ possibilités : l'affirmation est **fausse**.

2. Pour qu'un nombre comporte 10 chiffres, il ne doit pas commencer par 0. On a donc 9 possibilités pour le premier chiffre, puis 9 encore, puis 8, puis 7,etc...

Il y a donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3265920$: l'affirmation est **fausse**.

3. On a un choix ordonnée, avec potentiellement des répétition, et 9 choix à chaque étape (8 couleur + le vide). On a donc $9^5 = 59049$ possibilités : l'affirmation est **vraie**.

4. On a $\lim\limits_{x\to 5^-} x^2 - 11x + 28 = -2$ et $\lim\limits_{x\to 5^-} x^2 - 25 = 0^-$.
Donc $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$: l'affirmation est **vraie**.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{-3}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{n^2}$. Or $\dfrac{-3}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{3}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: l'affirmation est **vraie**.