

Évaluation n°2

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 (Question de cours)

1. Donner les valeurs de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$.

2. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Que signifie que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux ?

Exercice 2 1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x^2) + x - 2$$

a. Déterminer les limites de la fonction g en 0^+ et en $+\infty$

b. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Étudier les variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on admet pour g le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

où α est un réel compris entre 1 et 2.

2. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x} \ln(x)$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0^+ et $+\infty$.

b. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3. a. Étudier le signe de $f(x) - \ln(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

b. En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la courbe représentative de la fonction \ln sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère $A(2, -1, 3)$ et $B(2, 2, 2)$ et le vecteur $\vec{u}(1, 2, 1)$.

1. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \vec{u} définissent un plan de l'espace. On note \mathcal{P} ce plan.

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

3. En déduire une mesure de l'angle entre \overrightarrow{AB} et \vec{u} au degré près.

4. Déterminer un vecteur \vec{n} normal au plan \mathcal{P} .