# Rappels sur les suites - Récurrence

## Rappels sur les suites

**Exercice 1** Déterminer la nature (arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre) des suites suivantes :

**a.** $u_n = 0,3n+5$ **b.** $u_n = \dfrac{5n+1}{2}$ **c.** $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ **d.** $u_n = \dfrac{5^n}{4}$

**e.** $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{4}{3}u_n \\ u_1 = 2 \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 9 \\ u_0 = 5 \end{cases}$ **g.** $u_n = \dfrac{7^n}{3^{n+1}}$ **h.** $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5}{7}u_n \\ u_0 = 5 \end{cases}$

**Exercice 2**
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite et conjecturer une expression pour son terme général;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \neq 0$ et on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique et préciser sa raison.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $v_n$ et en déduire celle de $u_n$.

**Exercice 3**
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite et conjecturer une expression pour son terme général;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 2$.
   Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique et préciser sa raison.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $v_n$ et en déduire celle de $u_n$.

## Démonstration par récurrence

**Exercice 4** On considère la même suite $(u_n)$ qu'à l'exercice précédent.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2 \times 4^n + 2$$

**Exercice 5** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $u_n = 3 - 2^{n+1}$.

**Exercice 6**
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+\cdots+2n-1 = n^2$.

**Exercice 7** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{4+u_n^2}$.
1. Calculer les premiers termes et conjecturer une expression pour $u_n$.
2. Démontrer la conjecture par récurrence.

**Exercice 8** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est croissante.

**Exercice 9** Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{5x}$.

On note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant $n$-fois la fonction $f$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f^{(n)}(x) = 5^n e^{5x}$

**Exercice 10** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2}$.

1. Montrer que la fonction $f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

**Exercice 11** Démontrer par récurrence pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$1 + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \cdots + (n \times n!) = (n+1)! - 1$$

**Exercice 12** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\quad n! \geq 2^{n-1}$

## Sommes

**Exercice 13** Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.

1. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Donner une expression de $S_n$ pour tout entier naturel $n$.
2. Calculer la somme $S = \sum_{k=5}^{12} u_k = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$.

**Exercice 14** Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 3$.

1. Pour tout $n \geq 0$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Donner une expression de $S_n$ pour tout entier naturel $n$.
2. Calculer la somme $S = \sum_{k=3}^{9} u_k = u_3 + u_4 + \cdots + u_9$.