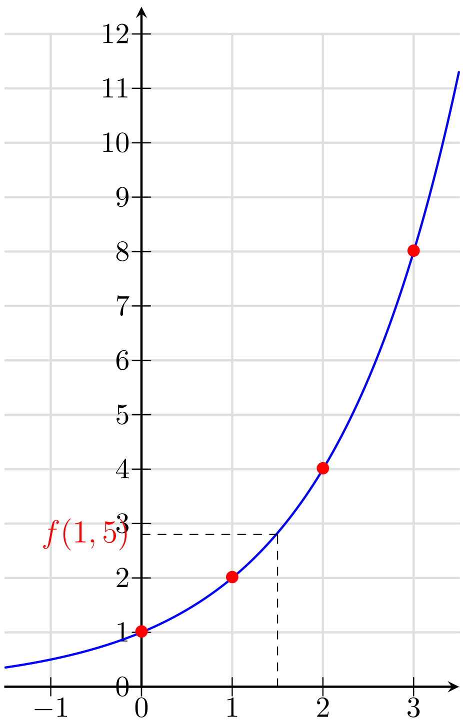
— 2 —

Fonctions exponentielles

I. Fonction exponentielle de base a

1. Définition

On considère la suite géométrique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2^n$. On place dans le graphique ci-contre les valeurs de (u_n) en rouge.
On prolonge ensuite, via la courbe bleue, les valeurs possibles et on note f la fonction associée à cette courbe.
$f(1) = 2$, $f(2) = 4$ et $f(1,5) \approx 2,8$.
On peut aussi prolonger les valeurs sur les nombres réels négatifs.
Pour tout réel x, on note $f(x) = 2^x$.
$f \ : \ x \mapsto 2^x$ est appelée fonction exponentielle de base 2.



Définition 1

Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction exponentielle de base a**

Exemple :

La fonction exponentielle de base 3,2 définie sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto$ ....

2. Propriétés algébriques

Propriété 1

Soient $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ et n un entier relatif, alors :

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^n = a^{x \times n}$$

Exemple :

Simplifier les expressions suivantes :

$A = 5^2 \times 5^{-4}$ $\qquad B = \dfrac{3^{2,5} \times 3^{1,2}}{3^{-4}}$ $\qquad C = (2^{1,2})^5 \times 2^{-2,5}$

....

....

....

....

3. Variations de la fonction exponentielle

Propriété 2

Soit f la fonction exponentielle de base $a > 0$.

- Si $a > 1$, alors f est croissante ;
- Si $a = 1$, alors f est constante ;
- Si $0 < a < 1$, alors f est décroissante.

Remarque :

On retrouve les même variations que pour les suites géométriques.

Exemple :

Donner les variations des fonctions f et g définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 0.6^x$ et $g(x) = -2 \times 3^x$.

....

....

....

II. Application au calcul du taux d'évolution moyen

On rappelle que pour n évolutions successives de taux $t_1, t_2, \dots, t_n$, on part de notre valeur initiale V_i et on la multiplie par $(1 + t_1)$, puis $(1 + t_2), \dots,$ puis enfn par $(1 + t_n)$ pour obtenir notre valeur finale V_f. Autrement dit :

$$V_f = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n)V_i$$

Rechercher le **taux d'évolution moyen** revient à chercher quel taux t_M il aurait fallu appliquer n fois pour passer de V_i à V_f.

Définition 2

Pour n évolutions successives de taux $t_1, \dots, t_n$, le taux d'évolution moyen est le nombre t_M tel que :

$$(1 + t_M)^n = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n)$$

Propriété 3

Pour n évolutions successives de taux $t_1, \dots, t_n$, le coefficient multiplicateur CM vaut

$$CM = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n)$$

De plus on a $t_M = CM^{\frac{1}{n}} - 1$.

Exemple :

Le prix d'un parfum augmente de 15%, puis diminue de 5% et réaugmente enfin de 10%. Donner le taux d'évolution moyen cette évolution.

....

....

....

....