Correction du DHC n°5

Approfondissement : Intégrale de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

Partie A : Convergence de la suite (W_n)

1. $W_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0(x)dx = \int_0^{\pi/2} 1dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$
   $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1$
2. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sin(x) \geq 0$ et sin n'est pas identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx > 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))dx$.
   Puisque pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$, alors $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$ d'où $\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x) \geq 0$. On a donc $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))dx \leq 0$.
   Donc (W_n) est décroissante.
4. La fonction (W_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

Partie B : Calcul du terme général

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n+1}(x)dx$$

   Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose

   $$u(x) = \sin^{n+1}(x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\cos(x)$$

   $$u'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \sin(x)$$

   Les fonctions u, v sont dérivables et les fonction u', v' sont continue. Donc par intégration par parties, on a :

   $$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin^{n+1}(x)dx = \Big[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^n(x)dx$$

   Or $\Big[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\Big]_0^{\pi/2} = 0$, on a donc :

   $$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^n(x)dx = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x))\sin^n(x)dx$$

Ensuite,

$$\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2(x))\sin^n(x)dx = \int_0^{\pi/2}\sin^n(x)dx - \int_0^{\pi/2}\sin^{n+2}(x)dx = W_n - W_{n+2}$$

On a finalement :

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}) = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

Ainsi, on a :

$$W_{n+2}+(n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n \iff (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \iff W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $U_p = W_{2p}$ et $V_p = W_{2p+1}$. Ainsi,

$$U_{p+1} = W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2}U_p$$

$$V_{p+1} = W_{2(p+1)+1} = W_{(2p+1)+2} = \frac{(2p+1)+1}{(2p+1)+2}W_{2p+1} = \frac{2p+2}{2p+3}V_p$$

Étude de (U_p) **:** On peut écrire (cela nécessiterait, en toute rigueur, une preuve par récurrence) :

$$U_p = \frac{2p-1}{2p}U_{p-1} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)}U_{p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots\times\times 3\times 1}{2p(2p-2)\ldots 4\times 2}U_0$$

Or $U_0 = W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ensuite, on va astucieusement remarquer que notre numérateur ressemble à $(2p)!$ auquel il manquerait un terme sur deux. Ajoutons ces termes et compensons au dénominateur :

$$\frac{(2p-1)(2p-3)\cdots\times 3\times 1}{2p(2p-2)\cdots\times 4\times 2} = \frac{2p(2p-1)\times(2p-2)\times\cdots\times 2\times 1}{(2p(2p-2)\cdots\times 4\times 2)\times(2p(2p-2)\cdots\times 4\times 2)}$$

Ceci donne donc $\dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots\times 3\times 1}{2p(2p-2)\cdots\times 4\times 2} = \dfrac{(2p)!}{(2p(2p-2)\cdots\times 4\times 2)^2}$.
Ensuite, on factorise chacun des facteurs du dénominateur par 2 :

$$2p(2p-2)\cdots\times 4\times 2 = 2p\times 2(p-1)\times\cdots\times(2\times 2)\times(2\times 1)$$

Puis on regroupe les 2 :

$$2p\times 2(p-1)\times\ldots(2\times 2)\times(2\times 1) = 2\times 2\times\cdots\times 2\times p(p-1)\times\cdots\times 2\times 1$$

On obtient alors

$$2p(2p-2)\cdots\times 4\times 2 = 2^p p!$$

On a alors que $U_p = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}U_0 = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$.
Étude de (V_p) **:** De la même façon, on écrit :

$$V_p = \frac{2p}{2p+1}V_{p-1} = \frac{2p(2p-1)}{(2p+1)(2p-1)}V_{p-2} = \frac{2p(2p-2)\cdots\times\times 4\times 2}{(2p+1)(2p-1)\ldots 3\times 1}V_0$$

Par les mêmes astuces de calculs que pour (U_p) et en remarquant que $V_0 = W_1 = 1$, on a alors que :

$$V_p = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Finalement, on obtient donc que :

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Partie C : Étude asymptotique

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on remarque tout d'abord que la J_n est non nul d'après la question **A2**. De plus, on a $J_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1}$ donc :
$$\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{(n+2)W_{n+2}W_{n+1}}{(n+1)W_{n+1}W_n} = \frac{(n+2)W_{n+1}}{(n+1)W_n}$$
D'après la question **B1**, on a que $\dfrac{(n+2)W_{n+1}}{(n+1)W_n} = 1$ donc $\dfrac{J_{n+1}}{J_n} = 1$.
On en conclut que $J_{n+1} = J_n$ et donc que (J_n) est constante.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $J_n = J_0 = W_1 W_0 = \dfrac{\pi}{2}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que (W_n) est décroissante donc $W_{n+1} \leq W_n$ d'où $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.
De plus, on a $W_{n+2} \leq W_{n+1}$ et $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$. On a alors :
$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}$$
Finalement, on a
$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ par la question **C1**.
On a donc que : $W_{n-1} = \dfrac{\pi}{2nW_n}$. Or d'après la question **C2**, on a $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$.
En remplaçant W_{n-1}, on obtient que : $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{2nW_n^2}{\pi} \leq 1$.
Puisque $\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors par encadrement, on a finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\pi}nW_n^2 = 1$.