Exercice 13

1. Premièrement, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\3-1\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$.

Ensuite, montrons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas coliénaires. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}$, alors en regardant les premières coordonnées, on a $\lambda \times 1 = -2$ et donc $\lambda = -2$.
Or $-2\overrightarrow{u}=(-2,-2,0) \neq \overrightarrow{v}$ et donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Enfin, pour montrer que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires, on cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v} &\iff \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\mu\\0\\\mu\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-2\mu\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}\lambda-2\mu &= -2\\ \lambda &= 2\\ \mu &= 2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\mu &= 2\\ \lambda &= 2\end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc $\lambda=\mu=2$ et ainsi $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ et ces trois vecteurs sont coplanaires.

2. D'après l'énoncé, on a $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}$
On cherche maintenant à savoir si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$, alors en regardant les premières coordonnées, on a que $-2\lambda=-6$ d'où $\lambda=3$.
Or $3\overrightarrow{AB}=(-6,6,6) \neq \overrightarrow{AM}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et ainsi les points A, B et M ne sont pas alignés.

Exercice 14

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\1-2\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-2\\0-2\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-2\\0-2\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1-2\\4-2\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$.

2. Pour déterminer si des vecteurs forment une base, il faut déterminer s'ils sont coplanaires.

Montrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coliénaires. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AC}$, alors en regardant les premières coordonnées, on a $\lambda \times -1 = -2$ et donc $\lambda = 2$.
Or $2\overrightarrow{AC} = (-2,-4,2) \neq \overrightarrow{AD}$ et donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Enfin, pour montrer que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, on cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD} &\iff \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda\\-2\lambda\\\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\mu\\-2\mu\\3\mu\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda-2\mu\\-2\lambda-2\mu\\\lambda+3\mu\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}-\lambda-2\mu &= -2\\ -2\lambda-2\mu &= -1\\ \lambda+3\mu &= 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-\lambda-2\mu &= -2\\ -2\lambda-2\mu &= -1\\ \lambda &= -3\mu\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}3\mu-2\mu &= -2\\ 6\mu-2\mu &= -1\\ \lambda &= -3\mu\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\mu &= -2\\ 4\mu &= -1\\ \lambda &= -3\mu\end{cases}
\end{aligned}$$

On remarque que les deux premières équations de notre système sont incompatibles : l'une donne $\mu = -2$ et l'autre $\mu = -\frac{1}{4}$.
Donc il n'existe pas de tels λ et μ et donc nos vecteurs ne sont pas colinéaires et forment un base.

3. Comme dans l'exercice 9, on cherche $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ mais cette fois, en utilisant les coordonnées de nos vecteurs.
La résolution d'un système (plus complexe que d'habitude et non exigible pour ce chapitre) nous donne que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et donc les coordonnées du point E dans la base $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ sont $(2,-3,1)$.