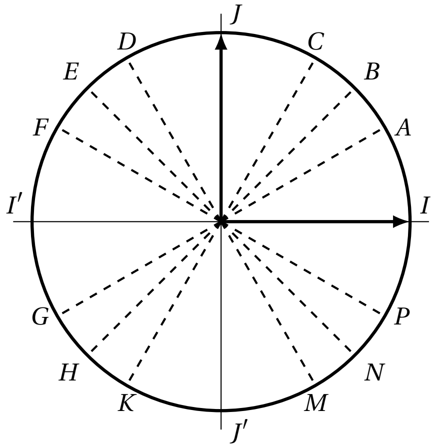
Fonctions trigonométriques

Rappels

Exercice 1 On se place sur le cercle trigonométrique tracé ci-dessus et sur lequel sont placés certains points.



Déterminer les points images par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique des réels suivants.

π	2π	-3π	18π
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{2}$	$\frac{-7\pi}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$
$\frac{-7\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{3}$	$\frac{-37\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{4}$

Exercice 2 En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes.

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$.

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos(x) = 0$ $\qquad$ $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$.

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos(x) = 0$ $\qquad$ $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 5 Résoudre l'équation $\cos(x)^2 - \frac{1}{2} = 0$ sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 6 Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi, \pi]$.

$\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos(x) \geqslant 0$ $\qquad$ $\cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $2\cos(x) + 1 > 2$

Exercice 7 Soit x un réel. Que vaut $(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2$?

Exercice 8 On admet que pour tous réels a et b, on a $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Fonctions trigonométriques

Exercice 9 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2+\cos(x)}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f(-\pi)$.
3. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel x, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Exercice 10 On admet que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de leur dérivée.

$f_1 : x \mapsto \cos(3x) + x$

$f_2 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

$f_3 : x \mapsto \cos(e^x)$

$f_4 : x \mapsto \sin^3(x)$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$

$f_6 : x \mapsto \ln(1+\cos(x)^2)$

Exercice 11 Le but de cet exercice est de prouver d'une nouvelle manière que pour tout réel x, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Que peut-on dire sur la fonction f ?
2. Calculer $f(0)$ et conclure.

Exercice 12 Pour tout réel x, on pose $f(x) = x + \cos(x)$.

1. Construire le tableau de variations de f en incluant les éventuelles limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0.

Exercice 13 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$, définie sur $[0;2\pi]$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[0;2\pi]$ et que pour tout réel $x \in [0;2\pi]$, $f'(x) = \dfrac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}$.
2. Construire le tableau de variations de f sur $[0;2\pi]$.

Exercice 14 Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $x \geqslant \sin(x)$.

Exercice 15 Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$ et $g(x) = \sin(\ln x)$.
Montrer que f est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Exercice 16 On admet que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$. Donner une primitive de ces fonctions.

$f_1 : x \mapsto \cos(3x) - 2\sin(5x)$

$f_2 : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$

$f_3 : x \mapsto 2x\cos(x^2)$

$f_4 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

Exercice 17 Calculer les intégrales suivantes

a. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(x)\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(2x)\,dx$

d. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)^3\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(2x^2)$

f. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2}\,dx$

Exercice 18 À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx$.

Exercice 19 À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x\cos(x)\,dx$.

Exercice 20 *(Centres étrangers 2024)*
On considère les équations différentielles $(E)\ :\ y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ et $(E_0)\ :\ y' = y$.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_0).
2. On considère la fonction $h : x \mapsto 2\cos(x) + \sin(x)$, que l'on admet définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que h est solution de l'équation différentielle (E).
3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de (E) telle que $g(0) = 0$.