— 6 —

Convexité

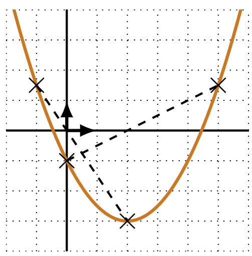
I. Convexité, concavité

Définition 1

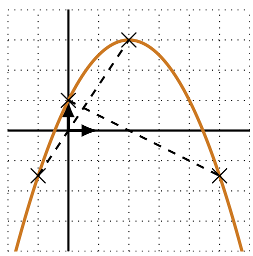
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

- On dit que f est **convexe** sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a < b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[a, b]$.
- On dit que f est **concave** sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a < b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[a, b]$.

Fonction convexe

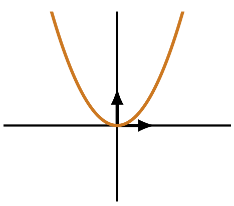


Fonction concave

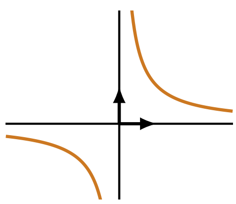


Rappel de certaines courbes représentatives

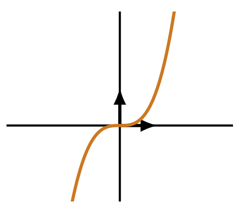
$x \mapsto x^2$



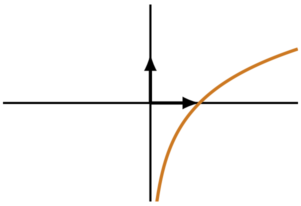
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$



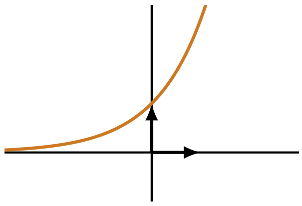
$x \mapsto x^3$



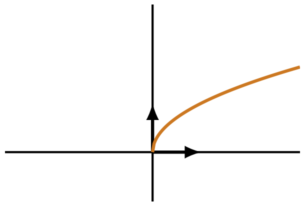
$x \mapsto \ln(x)$



$x \mapsto e^x$



$x \mapsto \sqrt{x}$



Exemple :

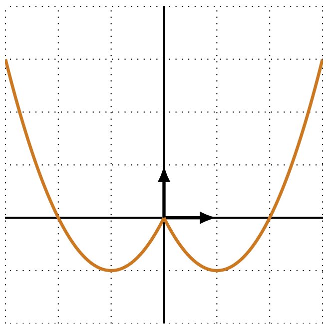
Les fonction $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple :

Attention : on parle bien de convexité sur un intervalle. Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'une fonction f est convexe sur deux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ que f est aussi convexe sur $[a,c]$.



La fonction représentée ci-dessus est convexe sur $[-3;0]$ et sur $[0;3]$ mais n'est pas convexe sur $[-3,3]$.

II. Fonctions dérivables

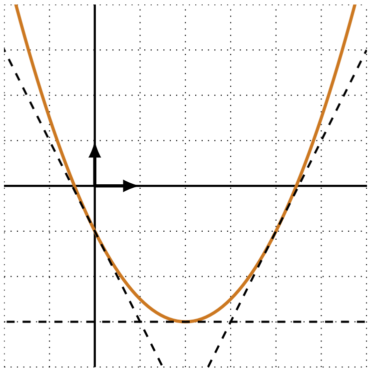
1. Caractérisation des fonctions convexes

Propriété 1

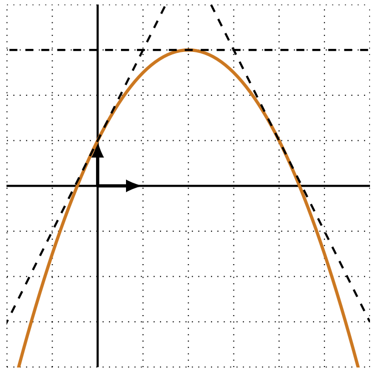
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- f est convexe sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- f est concave sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Définition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On dit que f est deux fois dérivable sur I si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I.
On note f'' la dérivée de f', appelée dérivée seconde de f.

Propriété 3

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

L'étude de la convexité d'une fonction revient à l'étude de signe de sa dérivée seconde (si celle-ci existe, bien entendu).

***Preuve.* Si $f'' \geqslant 0$, alors f est convexe** : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.
Soit $a \in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Pour tout $x \in I$, posons alors $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$. g est deux fois dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ et $g''(x) = f''(x)$.
Ainsi, puisque pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$, on a aussi $g''(x) \geqslant 0$. g' est donc croissante sur I. Or, $g'(a) = 0$. Résumons toutes ces informations dans un tableau.

x		a	
$g''(x)$		$+$	
g'	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$
$g(x)$	$+$	0	$+$

Finalement, pour tout $x \in I$, $g(x) \geqslant 0$, ce qui signifie que $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$: la courbe de f est au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a. $\square$

Exemple :

Pour tout entier naturel pair $n \geqslant 2$, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En effet, la dérivée seconde de cette fonction est la fonction $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$.
Or, n étant pair, $n-2$ l'est aussi, et pour tout réel x, on a donc $x^{n-2} \geqslant 0$.

2. Point d'inflexion

Définition 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Un **point d'inflexion** est un point où la convexité de la fonction f change. La tangente à la courbe de f en un point d'inflexion traverse la courbe de f.

Propriété 4

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si f présente un point d'inflexion à l'abscisse a, alors $f''(a) = 0$.
- Réciproquement, si $f''(a) = 0$ et si f'' **change de signe** en a, alors f présente un point d'inflexion en a.

Cela rappelle naturellement le cas des extremum locaux. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Cependant, si $f'(a) = 0$, f admet un extremum local en a seulement si f' change de signe en a.

Exemple :

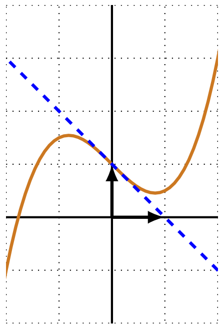
Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - x + 1$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 1$ et $f''(x) = 3x$.

Ainsi, $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$.

f est donc concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

La courbe de f présente un point d'inflexion à l'abscisse 0.



Attention : l'annulation de la dérivée seconde n'est pas une condition suffisante de présence d'un point d'inflexion !

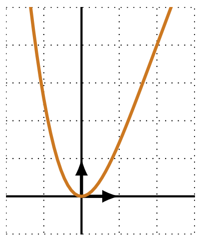
Exemple :

Pour tout réel x, on pose $g(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2$.

La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$ et $g''(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Ainsi, pour tout réel x, $g''(x) \geqslant 0$. g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Puisqu'il n'y a pas de changement de convexité, g ne présente pas de point d'inflexion, et pourtant $g''(2) = 0$.



III. Inégalités de convexité

1. Inégalités de milieux

Propriété 5

Soient f une fonction définie sur un sur un intervalle I et $a, b \in I$.

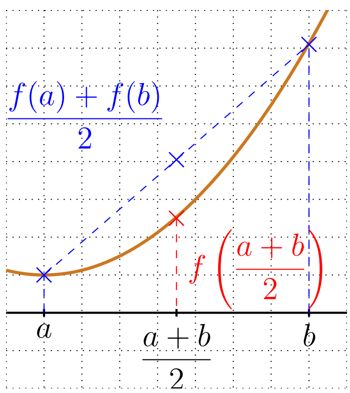
- Si f est convexe, alors $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
- Si f est concave, alors $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Preuve. On considère les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.
Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

Or, la fonction f étant convexe sur I, le segment $[AB]$ se situe au-dessus de la courbe représentative de f. En particulier,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$



□

Exemple :

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b, $\exp\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{e^a+e^b}{2}$.

Exemple :

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$.