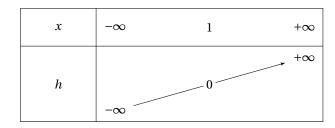
Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Primitives de fonctions usuelles

Exercice 1 (Centres étrangers 2023)

On considère une fonction h définie et continue sur \mathbb{R} dont le tableau de variations est le suivant.



On note H la primitive de h définie sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Quelle propriété est vérifiée par H?

a. H est positive sur
$$]-\infty;0]$$
.

c. H est négative sur
$$]-\infty;1]$$
.

b. H est croissante sur
$$]-\infty;1]$$
.

d.
$$H$$
 est croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 2 Montrer que la fonction
$$f: x \mapsto x \ln(x) - x$$
 est une primitive de $\ln \sup]0; +\infty[$.

Exercice 3 Montrer que
$$F: x \mapsto (2x+1)e^{x^2-1}$$
 est une primitive de $f: x \mapsto (4x^2+2x+2)e^{x^2-1}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 4 Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F: x \mapsto (ax+b) e^{4x+3}$ soit une primitive de la fonction $f: x \mapsto (8x+14) e^{4x+3}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 5 Pour tout réel x, on pose $f(x) = (-3x^2 + 2x + 12)e^{1-3x}$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $F: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{1-3x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exercice 6 Pour tout réel
$$x$$
, on pose $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(1) = 3$.

Exercice 7 Pour tout réel
$$x$$
, on pose $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et $F(x) = \ln(1+e^x)$.
Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(0) = 0$.

Exercice 8 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles donnés.

$$f_{1}: x \mapsto x^{5} + x^{4} - x^{3} + x - 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_{2}: x \mapsto \frac{3}{x} - \frac{2}{x^{2}} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$f_{3}: x \mapsto 7x^{6} + 8e^{4x+2} - \frac{1}{x^{3}} \text{ sur }] - \infty; 0[$$

$$f_{4}: x \mapsto 4x^{4} + 3x^{2} - \frac{5}{x^{2}} + \frac{4}{x^{7}} \text{ sur }] - \infty; 0[$$

$$f_{5}: x \mapsto 3e^{5x+2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_{6}: x \mapsto e^{3x} + x^{4} - \frac{1}{x} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_{7}: x \mapsto \frac{1}{x^{3}} - \frac{5}{x^{4}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_{8}: x \mapsto \frac{2x^{5} + 3x^{2} + 1}{x^{3}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

Exercice 9 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} qui respecte la condition initiale indiquée.

$$f_1: x \mapsto 2x + 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } F_1(3) = 2$$
 $f_2: x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[\text{ avec } F_2(1) = 3$ $f_3: x \mapsto 2 e^{3x-4} + 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } F_3\left(\frac{4}{3}\right) = 5$ $f_4: x \mapsto \frac{3}{x} + x \text{ sur }]-\infty; 0[\text{ avec } F_4(-1) = 2$

Primitive de fonctions composées

Exercice 10 Donner une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la primitive d'une fonction composée.

$$f_{1}: x \mapsto (4x+1) e^{2x^{2}+x+3} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

$$f_{2}: x \mapsto \frac{2x+3}{x^{2}+3x+3} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

$$f_{3}: x \mapsto -\frac{2e^{2x}}{(3+e^{2x})^{2}} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

$$f_{4}: x \mapsto x^{2} e^{x^{3}} \operatorname{sur} \mathbb{R}.$$

$$f_{5}: x \mapsto \frac{4x+10}{x^{2}+5x+7} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

$$f_{6}: x \mapsto \frac{x^{2}+1}{\sqrt{x^{3}+3x}} \operatorname{sur}]0; +\infty[$$

$$f_{7}: x \mapsto -\frac{e^{1/x}}{x^{2}} \operatorname{sur}]0; +\infty[$$

$$f_{8}: x \mapsto x e^{x^{2}-5} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

$$f_{10}: x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \operatorname{sur}]0; +\infty[$$

$$f_{11}: x \mapsto \frac{4x^{3}-6x}{x^{4}-3x^{2}+5} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

$$f_{12}: x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} \operatorname{sur}]1; +\infty[$$

$$f_{13}: x \mapsto \frac{10x}{(5x^{2}+7)^{2}} \operatorname{sur} \mathbb{R}$$

$$f_{14}: x \mapsto \frac{-2x-5}{x^{4}+10x^{3}+25x^{2}} \operatorname{sur}]0; +\infty[$$

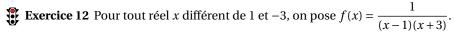
Exercice 11 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} qui respecte la condition initiale indiquée.

$$f: x \mapsto x^2 e^{x^3} \text{ avec } F(0) = 3$$

$$f: x \mapsto \frac{2x}{1+x^2} \text{ avec } F(2) = 7$$

$$f: x \mapsto \frac{8x+4}{2x^2+2x+1} \text{ avec } F(-1) = 3$$

$$f: x \mapsto \frac{-3x}{(x^2+1)^2} \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} F(x) = 2$$



- 1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$, $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$. (On appelle cette technique la *décomposition en éléments simples*)
- 2. En déduire une primitive de f sur]1; $+\infty$ [.

Exercice 13 (Polynésie 2022)

Sélectionner la réponse correcte. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur \mathbb{R} , et si k est la fonction définie sur \mathbb{R} par k(x) = h(2x), alors, une primitive K de k est définie sur \mathbb{R} par...

a.
$$K(x) = H(2x)$$

b.
$$K(x) = 2H(2x)$$

c.
$$K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$$

$$\mathbf{d.}\ K(x) = 2H(x)$$