Correction - Évaluation n°3

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 (Question de cours)

1. Les solutions de l'équation sont de la forme $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{7x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Exercice 2 **1**. On a que $10y' + y' = 0 \iff 10y' = -y \iff y' = -\dfrac{1}{10}y$.

Les solutions de (H) sont donc de la forme $y_h \ : \ x \mapsto C\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. On note y_c une solution constante de (E). Ainsi, on sait que $10y_c' + y_c = 30$.

De plus, puisque y_c est constante, on a que $y_c' = 0$. Ceci donne donc :

$$10y_c' + y_c = 30 \iff y_c = 30$$

Une solution de (E) est donc la fonction y_c constante égale à 30.

3. On note f une solution quelconque de (E), alors f est de la forme $f = y_h + y_c$.

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \geqslant 0$, on a $f(t) = C\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right) + 30$.

4. Puisque v est solution, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \geqslant 0$, on a $v(t) = C\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right) + 30$.

De plus, on a :

$$v(0) = 0 \iff C\exp\left(-\frac{0}{10}\right) + 30 = 0 \iff C + 30 = 0 \iff C = -30$$

Donc pour tout $t \geqslant 0$, on a que $v(t) = -30\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right) + 30$

5. On remarque que v correspond à la solution trouvée dans la question précédente.

v est deux fois dérivable comme composée de fonction deux fois dérivables et pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$v'(t) = \frac{30}{10}\exp\left(-\frac{t}{10}\right) = 3\exp\left(-\frac{t}{10}\right)$$
$$v''(t) = -\frac{3}{10}\exp\left(-\frac{t}{10}\right)$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive, on déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $v'(t) > 0$ et $v''(t) < 0$. Ainsi v est croissante et concave sur $[0, +\infty[$.

6. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{t}{10}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-30\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)\right) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 30$.

7. La question revient à résoudre l'inéquation $v(t) \geqslant 15$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors :

$$\begin{aligned} v(t) \geqslant 15 &\iff -30\exp\left(-\frac{t}{10}\right) + 30 \geqslant 15 \\ &\iff -30\exp\left(-\frac{t}{10}\right) \geqslant -15 \\ &\iff \exp\left(-\frac{t}{10}\right) \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{car } -30 < 0 \\ &\iff -\frac{t}{10} \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff -t \leqslant -10\ln(2) \\ &\iff t \geqslant 10\ln(2) \qquad \text{car } -1 < 0 \end{aligned}$$

Donc $v(t)$ dépasse 15m.s^{-1} pour $t \geqslant 10\ln(2) \approx 7$, donc après environ 7 secondes.

Exercice 3 **1**. Puisque toutes les issues sont équiprobables, alors on a la loi suivante :

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. L'espérance est donc donnée par :

$$\mathbb{E}[X] = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3) + 4 \times \mathbb{P}(X = 4)$$

Donc $\mathbb{E}[X] = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$.

3. X, Y et Z suivent la même loi et ont donc la même espérance. Ainsi :

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X + Y + Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z] = 2,5 + 2,5 + 2,5 = 7,5$$

4. Il y a trois tirages qui amènent à l'évènement $S = 4$. Il s'agit de $(1,1,2)$, $(1,2,1)$ et $(2,1,1)$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = 4) = \mathbb{P}\left((X = 1) \cap (Y = 1) \cap (Z = 2)\right) + \mathbb{P}\left((X = 1) \cap (Y = 2) \cap (Z = 1)\right) \\ + \mathbb{P}\left((X = 2) \cap (Y = 1) \cap (Z = 1)\right) \end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires sont indépendantes, on a donc :

$$\mathbb{P}(S = 4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$