Exercice 17

1. On a $I\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ et $J\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$.

2. **a.** On voit directement sur la figure que B, G et I ne sont pas alignés et forment donc un plan.

   Ce plan est donc dirigé par $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

   Ensuite, puisque notre repère est orthonormé, on a :

$$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{n} = 0\times 1 + 1\times(-2) + 1\times 2 = 0 \text{ et } \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{n} = -1\times 1 + \frac{1}{2}\times(-2) + 1\times 2 = 0$$

   Donc $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BGI).

   b. Le plan (BGI) admet donc une équation cartésienne de la forme $x - 2y + 2z + d = 0$.
   Or $B \in (BGI)$ donc $1 + d = 0$ donc $d = -1$. Ainsi, une équation cartésienne du plan (BGI) est $x - 2y + 2z - 1 = 0$

   c. On a les coordonnées de $H(0,1,1)$ et de $J\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ donc :

$$I\begin{pmatrix}\frac{0+1}{2}\\\frac{1+0}{2}\\\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

   Or $\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} - 1 = 2 - 2 = 0$ donc $K \in (BGI)$

3. **a.** On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$$

   où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   Ici, on a aisément que l'aire du triangle FIG vaut $\frac{FG\times FE}{2} = \frac{1}{2}$. De plus la hauteur de la pyramide est $FB = 1$.
   Donc $V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{6}$.

   b. Si Δ est orthogonale à (BGI), alors est elle dirigée par $\overrightarrow{n}$. Ensuite on a $F(1,0,1)$ donc un représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

   c. On note $F'(x,y,z)$. Puisque $F' \in \Delta \cap (BGI)$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$1 + t - 2(-2t) + 2(1 + 2t) - 1 = 0 \iff 1 + t + 4t + 2 + 4t - 1 = 0 \iff 9t + 2 = 0 \iff t = -\frac{2}{9}$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9} \\ y = -2 \times \left(-\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{4}{9} \\ z = 1 - 2 \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{9} \end{cases}$$

On a donc $F'\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$.

d.

$$FF' = \sqrt{\left(\frac{7}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{9} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{16}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Or, en utilisant le triangle BGI comme base, la hauteur du tétraèdre $FGBI$ relative à cette base n'est autre que (FF'). Si on note $\mathscr{A}_{BGI}$ l'aire du triangle (BGI), il en vient que le volume du tétraèdre vaut $\dfrac{\mathscr{A}_{BGI} \times FF'}{3}$ soit $\dfrac{2A_{BGI}}{9}$.

Or, d'après les questions précédentes, ce volume vaut $\dfrac{1}{6}$. Ainsi, $\mathscr{A}_{BGI} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{3}{4}$.