

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Primitives de fonctions usuelles

Exercice 1 (Centres étrangers 2023)

On considère une fonction h définie et continue sur \mathbb{R} dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h	$-\infty$	0	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Quelle propriété est vérifiée par H ?

- a. H est positive sur $] -\infty; 0]$.
 b. H est croissante sur $] -\infty; 1]$.
 c. H est négative sur $] -\infty; 1]$.
 d. H est croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 2 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de \ln sur $]0; +\infty[$.

Exercice 3 Montrer que $F : x \mapsto (2x + 1)e^{x^2-1}$ est une primitive de $f : x \mapsto (4x^2 + 2x + 2)e^{x^2-1}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 4 Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax + b)e^{4x+3}$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto (8x + 14)e^{4x+3}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 5 Pour tout réel x , on pose $f(x) = (-3x^2 + 2x + 12)e^{1-3x}$. Déterminer trois réels a , b et c tels que la fonction $F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{1-3x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exercice 6 Pour tout réel x , on pose $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$. Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(1) = 3$.

Exercice 7 Pour tout réel x , on pose $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et $F(x) = \ln(1+e^x)$. Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(0) = 0$.

Exercice 8 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles donnés.

$$f_1 : x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 + x - 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8e^{4x+2} - \frac{1}{x^3} \text{ sur }]-\infty; 0[$$

$$f_4 : x \mapsto 4x^4 + 3x^2 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^7} \text{ sur }]-\infty; 0[$$

$$f_5 : x \mapsto 3e^{5x+2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_6 : x \mapsto e^{3x} + x^4 - \frac{1}{x} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^4} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$f_8 : x \mapsto \frac{2x^5 + 3x^2 + 1}{x^3} \text{ sur }]0; +\infty[$$

Exercice 9 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} qui respecte la condition initiale indiquée.


$$f_1 : x \mapsto 2x + 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } F_1(3) = 2$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[\text{ avec } F_2(1) = 3$$

$$f_3 : x \mapsto 2e^{3x-4} + 1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } F_3\left(\frac{4}{3}\right) = 5$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{3}{x} + x \text{ sur }]-\infty; 0[\text{ avec } F_4(-1) = 2$$

Primitive de fonctions composées

 **Exercice 10** Donner une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la primitive d'une fonction composée.

$$f_1 : x \mapsto (4x+1)e^{2x^2+x+3} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_3 : x \mapsto -\frac{2e^{2x}}{(3+e^{2x})^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{4x+10}{x^2+5x+7} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_7 : x \mapsto -\frac{e^{1/x}}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_9 : x \mapsto 3e^{5x+2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_{11} : x \mapsto \frac{4x^3-6x}{x^4-3x^2+5} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_{13} : x \mapsto \frac{10x}{(5x^2+7)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+3x+3} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_4 : x \mapsto x^2 e^{x^3} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_8 : x \mapsto x e^{x^2-5} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_{10} : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_{12} : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$f_{14} : x \mapsto \frac{-2x-5}{x^4+10x^3+25x^2} \text{ sur }]0; +\infty[$$

 **Exercice 11** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} qui respecte la condition initiale indiquée.

$$f : x \mapsto x^2 e^{x^3} \text{ avec } F(0) = 3$$


$$f : x \mapsto \frac{8x+4}{2x^2+2x+1} \text{ avec } F(-1) = 3$$

$$f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2} \text{ avec } F(2) = 7$$

$$f : x \mapsto \frac{-3x}{(x^2+1)^2} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2$$

 **Exercice 12** Pour tout réel x différent de 1 et -3 , on pose $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$, $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$. (On appelle cette technique la *décomposition en éléments simples*)
2. En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

 **Exercice 13** (Polynésie 2022)

Sélectionner la réponse correcte. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur \mathbb{R} , et si k est la fonction définie sur \mathbb{R} par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur \mathbb{R} par...

a. $K(x) = H(2x)$

b. $K(x) = 2H(2x)$

c. $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$

d. $K(x) = 2H(x)$