Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé.

Équations paramétriques des droites

Exercice 1 Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2,5,-3)$ et dirigée par $\vec{u}(3,2,-3)$

Exercice 2 On considère les points $A(1,3,-2)$ et $B(2,5,-4)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 3 On considère les points $A(1,2,7)$ et $B(3,-1,6)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 5-4t \\ y = 1+6t \\ z = -3+2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

1. Le point A appartient-il à la droite Δ ?
2. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $C(6,-1,2)$ et parallèle à Δ.

Exercice 4 On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

$$(d_1) : \begin{cases} x = -5+2t \\ y = 11-3t \\ z = 11-2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 7-4t' \\ y = 1-2t' \\ z = -2+5t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

Exercice 5 On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

$$(d_1) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = -5+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 2+t' \\ y = -1 \\ z = 3+6t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires.

Équations cartésiennes

Exercice 6 On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y-z+1=0$ ainsi que les points $A(2,-3,1)$, $B(0,0,1)$, $C(0,2,5)$ et $D(1,5,3)$.

1. Quels sont les points qui appartiennent au plan $\mathscr{P}$?
2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

Exercice 7
Soient P le plan d'équation $2x-5y+3z-2=0$ et (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1+t \\ z = 1+3t \end{cases}$.

Montrer que la droite (d) est incluse dans le plan P.

Exercice 8 Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2,5,-1)$ et admettant $\vec{n}(2,-3,1)$ comme vecteur normal.

Exercice 9 Soit P_1 et P_2 les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+3y-5z+1=0$ et $4x+6y-10z+3=0$. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont parallèles mais non confondus.

Exercice 10 On considère les points $A(2,-1,0)$, $B(1,0,-3)$ et $C(6,6,1)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x-y-z+4=0$. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Exercice 11 On considère les points $A(-1,2,0)$, $B(1,2,4)$, $C(-1,1,1)$, $D(5,3,0)$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2,-1,-1)$ est normal au plan (ABC).
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Le point D appartient-il à ce plan ?
4. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan (ABC) passant par D.

Exercice 12 Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection du plan P d'équation cartésienne $2x-3y-2z+1=0$ et de la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=5-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Exercice 13 On considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x+y-z+3=0$ et $3x+2y-z+1=0$.

1. Donner un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$. Ces plans sont-ils parallèles ?
2. Montrer que les points $A(1,1,6)$ et $B(2,0,7)$ appartiennent aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. En déduire une représentation paramétrique de $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

Projeté orthogonal

Exercice 14 On considère le point A de coordonnées $(5,1,3)$, le point B de coordonnées $(-2,-2,-2)$ et le plan $\mathscr{P}$ passant par B et dirigé par $\overrightarrow{v_1}(2,4,3)$ et $\overrightarrow{v_1}(1,3,3)$.
On considère le point H de coordonnées $(2,4,1)$.

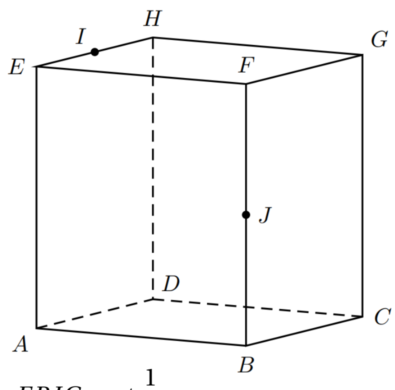
1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
2. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$
3. Montrer que le point H appartient au plan $\mathscr{P}$.
4. Que peut-on en déduire sur le point H ?

Exercice 15 On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+4y-5z+1=0$ ainsi que le point $A(6,8,-9)$.

1. Le point A appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 16 On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ dans un repère orthonormé. Montrer que le point $L(4,0,3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5,3,1)$ sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 17 Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côtés de longueur 1 représenté ci-dessous.
On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.
L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(1,-2,2)$ est normal au plan (BGI).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   c. On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   a. En utilisant le triangle FIG pour base, montrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ vaut $\frac{1}{6}$.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right)$.
   d. Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.