INSTITUT FOURIER

Projet de fin d'étude du Magistère

Homologie et conjecture de Quillen

Mareau Quentin

Encadré par Molinier Rémi

Année 2021

Résumé

Ce mémoire constitue le travail de fin d'étude pour le diplôme de Magistère de mathématiques de l'Institut Fourier à l'Université Grenoble-Alpes. Celui-ci a pour but d'étudier la conjecture du mathématicien américain Daniel Quillen issue de [1]. Celle-ci affirme que pour tout groupe G fini et p divisant $|G|$, si le complexe simplicial $|\mathcal{A}_p(G)|$ est contractile, alors l'intersection de ses p-Sylow est non triviale. De mon travail, on peut alors distinguer deux grandes parties.

Premièrement, on introduit les différentes notions de complexes simpliciaux et d'homologies. Aussi, on s'intéresse à des résultats classiques d'homologies qui nous seront nécessaires et à l'équivalence entre les différentes définitions d'homologies. Cette partie s'inspire en grande partie du travail de l'américain Allen Hatcher dans son ouvrage [2].

Deuxièmement, on s'inspire grandement de l'étude récente du mathématicien espagnol Antonio Díaz Ramos dans [3] sur la conjecture de Quillen. Là où nous avions dans un premier temps traité tout ce qui concerne la topologie algébrique, ici il est beaucoup plus question d'algèbre pure. En effet, on introduit d'abord avec quel complexe simplicial nous allons travailler : celui induit par les ensemble partiellement ordonnés. Puis s'ensuit un grand nombre de résultats de théorie des groupes qui nous permettent de conclure que dans certains cas, comme celui des groupes résoluble, la conjecture de Quillen est vérifiée.

Table des matières

Notations

- $C_G(X)$ désigne l'ensemble des centralisateur de X du groupe G.
- ${}^kH = kHk^{-1}$.
- $|X|$ désigne soit le complexe simplicial induit par X, soit le cardinal de X.
- $D(G)$ désigne le groupe dérivé de G.
- Δ^n désigne le simplexe standard de dimension n.
- ∂ désigne l'opérateur de bord.
- $\mathbb{F}_p$ désigne le corps à p éléments.
- id_X désigne l'application identité sur l'ensemble X.
- $\simeq$ désigne soit l'isomorphisme, soit l'homéomorphisme entre deux ensembles.
- $H_*(X)$ désigne soit l'homologie simpliciale, soit l'homologie singulière de X.
- $H_*^{\Delta}(X)$ désigne l'homologie de Δ-complexe de X.
- $H \leq G$ (resp. $H < G$) signifie que H est un sous-groupe (resp. strict) de G.
- $H \trianglelefteq G$ signifie que H est un sous-groupe distingué de G.
- $N_G(X)$ désigne l'ensemble des normalisateur de X du groupe G.
- $o(x)$ est l'ordre de x dans un groupe.
- $O_p(G)$ désigne le plus grand p-sous-groupe distingué de G.
- $K \rtimes H$ désigne le produit semi-direct entre K et H avec K distingué.
- $\mathrm{Syl}_p(G)$ désigne l'ensemble des p-sous-groupes de Sylow de G.

I Complexes simpliciaux

I.1 Approche géométrique

Pour débuter, on va d'abord introduire les complexes simpliciaux de façon géométrique car plus visuelle.

Définition I.1. Soient p points $s_0, \dots, s_p$ de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartiennent pas à un même hyperplan, c'est-à-dire que $s_1 - s_0, \dots, s_p - s_0$ sont linéairement indépendant.
On définit un p-simplexe ou simplexe de dimension p par σ_p :

$$\sigma_p = [s_0, \dots, s_p] = \mathrm{Conv}(\{s_0 \dots, s_p\}) = \left\{ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i s_i \,\middle|\, \forall i \in [\![0,p]\!] \,,\, \lambda_i \in [0,1] \,,\, \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1 \right\}$$

Exemple. Il est facile de représenter des p-simplexes pour $p \leq 3$. Un 0-simplexe est un point, un 1-simplexe un segment, un 2-simplexe une triangle et un 3-simplexe un tétraèdre.

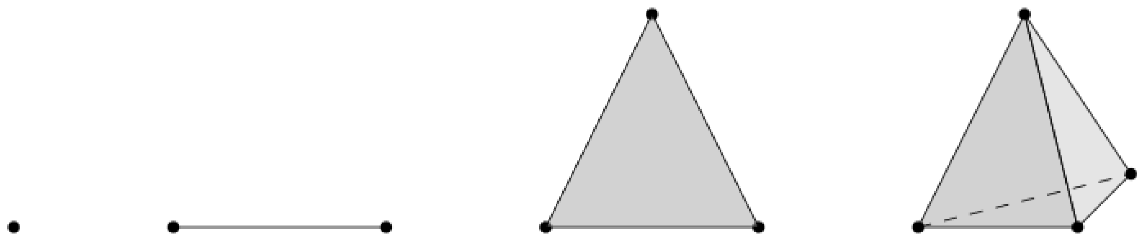


FIGURE 1 – Représentation géométrique des premiers simplexes

On dit alors que les $s_0, \dots, s_p$ sont les sommets de σ_p et note $S(\sigma_p) = \{s_0, \dots, s_p\}$. Aussi, si $S' \subset S(\sigma_p)$ est de cardinal $k < p$, on peut définir un k-simplexe issu de S' appelé face de σ_p.

Remarque. Comme les points d'un p-simplexe ne sont pas sur un même hyperplan, il est clair que l'on ne peut définir des p-simplexes dans $\mathbb{R}^n$ que lorsque $p \leq n$.

Définition I.2. Soit K une collection de simplexes de $\mathbb{R}^n$. On dit que K est un complexe simplicial s'il vérifie :

- toute face τ d'un simplexe $\sigma \in K$ est dans K
- si σ et τ sont deux simplexes de K non disjoints, alors $\sigma \cap \tau$ est une face de σ et τ.

On définit alors la dimension de K comme le maximum des dimension des simplexes qui le compose.

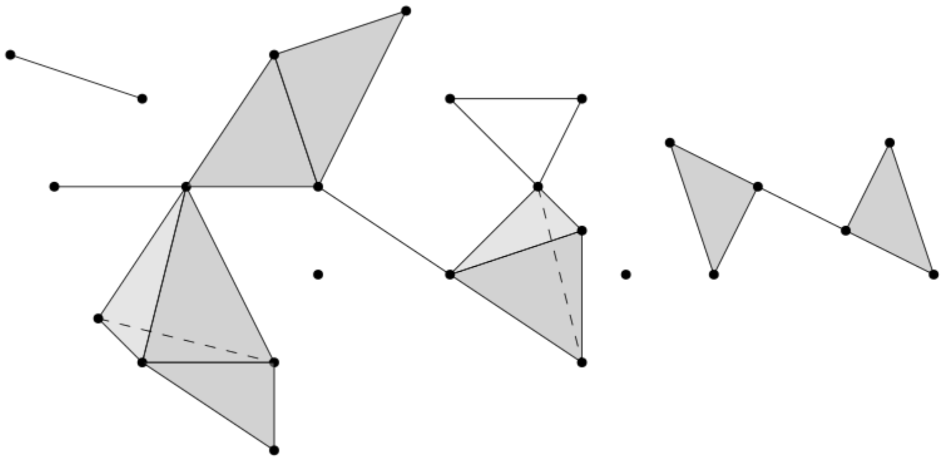


FIGURE 2 – Représentation d'un complexe simplicial de dimension 3

I.2 Complexes abstraits et poset

On va premièrement s'intéresser à la généralisation de la notion de complexe simplicial puis on étudiera une construction particulière de complexe simplicial.

Définition I.3. Un complexe simplicial est une paire (V,K) où V est un ensemble et K une collection de parties de V non vides qui vérifie :

- $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$
- $\forall \sigma \in K, \forall \tau \subseteq \sigma, \tau \neq \emptyset \Longrightarrow \tau \in K$

Les éléments de K sont appelés simplexes et ceux de V sont appelés sommets.
Pour tout simplexe $\sigma \in K$, on note sa dimension : $\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$. On note alors la dimension de (V,K) le maximum des dimensions des simplexes de K.

Remarque. De manière générale, on identifiera (V,K) à K puisque l'on peut construire V à partir de K.

On s'intéresse alors au lien entre les deux approches des complexes simpliciaux. Premièrement, pour un complexe simplicial géométrique, il est assez simple d'extraire un complexe simplicial abstrait. En effet, il suffit de considérer pour V l'ensemble des point s_i de chaque simplexe et à partir de là, on dira qu'une partie $\sigma = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_l}\}$ est dans K si le simplexe $[s_{i_1}, \dots, s_{i_l}]$ est dans le complexe simplicial géométrique.
Pour ce qui est de l'autre sens, il est plus délicat. On appelle cette représentation d'un complexe abstrait dans $\mathbb{R}^n$ la réalisation géométrique de K. Il existe plusieurs manières de faire cette réalisation, cependant la plus simple est de travailler dans un espace de dimension aussi grande qu'il y a de sommets.

Définition I.4. Soit (V,K) un complexe simplicial, on note $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ainsi, tout simplexe $\sigma \in K$ peut être associer à une famille d'indice I_σ.

En notant $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on pose alors pour tout $\sigma \in K$ le simplexe géométrique associé :

$$|\sigma| = \mathrm{Conv}(\{e_i \,|\, i \in I_\sigma\})$$

On définit alors la réalisation géométrique de K comme $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$.

On va maintenant étudier la construction d'un complexe simplicial spécifique qui sera l'objet d'étude lorsque nous parlerons de la conjecture de Quillen. Pour ce faire, on introduit en ensemble P partiellement ordonné de cardinal p, que l'on appellera poset, muni de sa relation d'ordre $\leq$.

Pour construire notre complexe simplicial K, on construit notre collection de simplexes qui correspond aux chaînes d'inégalité stricte :

$$\forall k \in [\![0, p]\!]\,,\; \forall \{x_0, \dots, x_k\} \subseteq P\,,\; \{x_0, \dots, x_k\} \in K \iff x_0 < \dots < x_k$$

Il est assez clair que (P, K) est un complexe simplicial du fait que l'on peut extraire d'une chaîne d'inégalité toutes les sous-chaînes nécessaires à construire toutes les faces de chaque simplexes (y compris les chaînes de taille 1, qui donnent les sommets).

Exemple. On se donne l'ensemble $P = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 12\} \subset \mathbb{Z}$ muni de la relation d'ordre :

$$\forall a, b \in P\,,\; a \leq b \iff a \text{ divise } b \text{ dans } \mathbb{Z}$$

On construit alors toutes les chaînes : $1 < 2 < 6 < 12$, $1 < 3 < 9$, $1 < 3 < 6$ et $1 < 7$. Ainsi le complexe associé K se représente facilement :

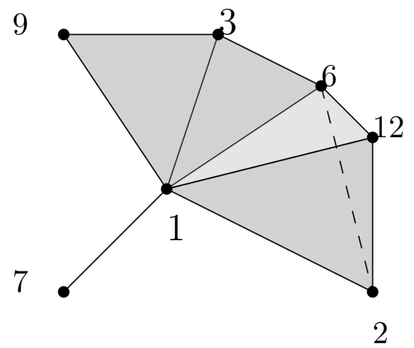


FIGURE 3 – Réalisation du complexe simplicial de P

Une telle construction limite les simplexes possibles.

Par exemple pour trois éléments $a, b, c \in P$; s'ils vérifient que $a \leq b$ et $b \leq c$, alors par transitivité de la relation d'ordre, on a que $a \leq c$ ainsi on doit inclure le simplexes $\{a, b, c\}$.

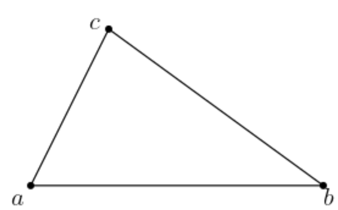


FIGURE 4 – Représentation d'un complexe impossible

Remarque. Pour un espace totalement ordonné, le complexe simplicial associé est en fait l'ensemble de ses parties.

II Introduction à l'homologie

II.1 Définitions et propriétés

On va d'abord définir le concept d'homologie et montrer quelques propriétés qui nous serons nécessaires par la suite lorsque nous en manipulerons.

Définition II.1. Un complexe de groupes abéliens est le couple d'une suite $(C_n)_{n\geq 0}$ de groupes abéliens et d'une suite $(d_n)_{n\geq 0}$ de morphismes de groupes $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ tels que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

La suite $(d_n)_{n\geq 0}$ est appelée différentielle du complexe. Pour tout $n \geq 0$, on appelle l'ensemble des cycles de C_n le noyau de d_n et l'ensemble des bords de C_{n-1} l'image de d_n. On pourra noter C_* le complexe $(C_n, d_n)_{n\geq 0}$.

Remarque. Par convention, $C_{-1} = 0$ et $d_0 = 0$.

Définition II.2. Soit $C_* = (C_n, d_n)_{n\geq 0}$ un complexe de groupes abéliens. L'homologie de C_* est la suite de groupes abéliens quotient définie pour tout $n \geq 0$ par

$$H_n(C) = \mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$$

Les $H_n(C)$ sont appelé groupes d'homologie et on note $H_*(C)$ cette homologie.

Remarque. Le fait que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ donne que $\mathrm{Im}(\partial_n) \subset \mathrm{Ker}(\partial_{n-1})$ et donc que les groupes d'homologies sont bien définis.

Définition II.3. Soient $C_* = (C_n, d_n)_{n\geq 0}$ et $D_* = (D_n, d'_n)_{n\geq 0}$ deux complexes. On appelle morphisme de complexes un suite (f_n) de morphismes de groupes définie pour $n \geq 0$ par $f_n : C_n \longrightarrow D_n$ et telle que $f_n \circ d_{n+1} = d'_{n+1} \circ f_{n+1}$.
On pourra alors noter $f : C_* \longrightarrow D_*$ ce morphisme.

Une façon de représenter la condition sur les f_n est de dire que pour tout $n \geq 0$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & D_{n+1} \arrow[d, "d'_{n+1}"] \\
C_n \arrow[r, "f_n"'] & D_n
\end{tikzcd}$$

Remarque. Pour $f = (f_n)$ un morphisme de complexes, on dit qu'il s'agit d'un isomorphisme de complexe si tous les f_n sont des isomorphismes et $f^{-1} = (f_n^{-1})$ définit l'inverse de f.

Proposition II.1. Tout morphisme de complexes $f : C_* \longrightarrow D_*$ induit une suite de morphisme $\tilde{f} = (\tilde{f}_n : H_n(C) \longrightarrow H_n(D))_{n\geq 0}$ appelée morphisme d'homologie et notée f_*.

Preuve. Pour tout $c \in \mathrm{Ker}(d_n)$, on a : $d'_n(f_n(c)) = f_{n-1}(d_n(c)) = f_{n-1}(0) = 0$ donc $f_n(c) \in \mathrm{Ker}(d'_n)$. De même, si $c \in \mathrm{Im}(d_{n+1})$, alors il existe $c' \in C_{n+1}$ tel que $d_{n+1}(c') = c$. Alors , on a :

$$d'_{n+1}(f_{n+1}(c')) = f_n(d_{n+1}(c')) = f_n(c)$$

Donc $f_n(c) \in \mathrm{Im}(d'_{n+1})$. Le premier point nous permet de définir pour tout $n \geq 0$ la restriction de f_n notée $\varphi_n : \mathrm{Ker}(d_n) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d'_n)$. φ_n est aussi un morphisme de groupe donc si on le compose avec la projection $\pi_n : \mathrm{Ker}(d'_n) \longrightarrow H_n(D)$, on obtient un morphisme $\tilde{\varphi}_n : \mathrm{Ker}(d_n) \longrightarrow H_n(D)$ tel que $\mathrm{Im}(d_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}_n)$ par le deuxième point. Donc par théorème de factorisation, on peut factoriser $\tilde{\varphi}_n$ par un morphisme $\hat{\varphi} : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$ bien défini, ce qui conclut. □

Corollaire II.2. Tout isomorphisme de complexes $f : C_* \longrightarrow D_*$ induit une suite d'isomorphisme $\tilde{f} = (\tilde{f}_n : H_n(C) \longrightarrow H_n(D))_{n\geq 0}$ appelée isomorphisme d'homologie.

Preuve. Il suffit de remarquer que $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\varphi}_n)$ dans la preuve précédente du fait que les f_n soient bijectifs. □

II.2 Homologie simpliciale

Jusqu'à présent, on ne faisait pas la distinction entre deux simplexes $[a,b,c]$ et $[b,a,c]$. Aussi à partir de maintenant, on pourra définir à nos simplexes une notion d'orientation :

Définition II.4. Pour un p-simplexe σ_p, on défini naturellement un ordre total sur les sommets donné par une bijection $f : [\![0,p]\!] \longrightarrow \sigma_p$. On identifiera alors tout autre p-simplexe de mêmes sommets et dont l'ordre des sommets n'est modifiés que par une permutation de signature 1.
Ainsi pour deux permutations ρ et τ de $\mathfrak{S}_{p+1}$ telle que $\varepsilon(\rho) = 1$ et $\varepsilon(\tau) = -1$, si $\sigma_p = [s_0,\dots,s_p]$ alors on note alors $[s_{\rho(0)},\dots,s_{\rho(p)}] = \sigma_p$ et $[s_{\tau(0)},\dots,s_{\tau(p)}] = -\sigma_p$.

Définition II.5. Soit K un complexe simplicial orienté de dimension p, on définit pour $n \leq p$ le groupe des p-chaînes de K, noté $C_n(K)$ comme le groupe libre des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires formelles des n-simplexes orientés. En particulier, pour tout $\sigma \in K$ de dimension n, la notation $-\sigma$ correspond bien à l'inverse de σ dans $C_n(K)$.

Remarque. Par convention, $C_{-1}(K) = 0$ et pour tout $n > p$, $C_n(K) = 0$

On veut maintenant définir un opérateur qui à un simplexe lui associe son bord en un sens naturel :

Définition II.6. Pour $p \leq \dim(K)$, on définit l'opérateur de bord $\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$ par :

$$\partial_p[s_0,\dots,s_p] = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[s_0,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_p]$$

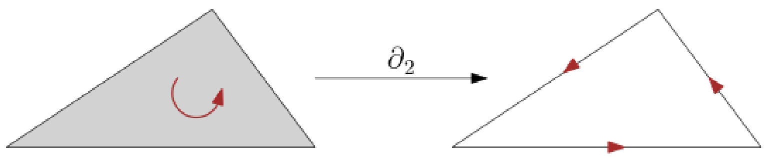


FIGURE 5 – Application de l'opérateur ∂_2 sur un 2-simplexe orienté

Remarque. Par convention, $\partial_0 = 0$ et pour tout $n > p$, $\partial_n = 0$.

Proposition II.3. Pour tout $0 < p \leq \dim(K)$, on vérifie : $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Preuve. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, on note $[s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_p] = [s_0, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_p]$.
Soit $\sigma = [s_0, \ldots, s_p]$ un p-simplexe, on a :

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p(\sigma) = \partial_{p-1}\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_p]\right) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\partial_{p-1}([s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_p])$$

Ceci donne donc :

$$\begin{aligned}
\partial_{p-1} \circ \partial_p(\sigma) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left(\sum_{j<i}(-1)^j[s_0, \ldots, \widehat{s_j}, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_p] - \sum_{j>i}(-1)^j[s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, \widehat{s_j}, \ldots, s_p]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+j}\left(\sum_{j<i}[s_0, \ldots, \widehat{s_j}, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_p]\right) - \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+j}\left(\sum_{j>i}[s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, \widehat{s_j}, \ldots, s_p]\right)
\end{aligned}$$

Ainsi par un échange de sommes et changement d'indices, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_{p-1} \circ \partial_p(\sigma) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+j}\left(\sum_{j<i}[s_0, \ldots, \widehat{s_j}, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_p]\right) - \sum_{j=0}^{p}(-1)^{i+j}\left(\sum_{i<j}[s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, \widehat{s_j}, \ldots, s_p]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+j}\left(\sum_{j<i}[s_0, \ldots, \widehat{s_j}, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_p]\right) - \sum_{i=0}^{p}(-1)^{j+i}\left(\sum_{j<i}[s_0, \ldots, \widehat{s_j}, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_p]\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Ainsi si K est un complexe de dimension p, la suite $\partial = (\partial_n)_{n\geq 0}$ fournit une différentielle et on peut donc définir le complexe des chaînes de K noté $C_*(K) = ((C_n(K)), \partial)$:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{p+2}} 0 \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

On note alors $H_*(K)$ l'homologie du complexe $C_*(K)$.Notons que $H_n(K) = \{0\}$ pour $n > \dim(K)$.

Exemple. On se propose ici de calculer les homologies de complexes assez simples. Étant assez lourds, on ne précisera pas l'ensemble des calculs intermédiaires.

Le point. Ici, notre complexe est $K = \{\{x\}\}$. Les $C_n(K)$ pour $n \geq 1$ sont triviaux et $C_0(K) = [x]\mathbb{Z}$. Ainsi, comme $\partial_0 = 0$ alors $\mathrm{Ker}(\partial_0) = C_0(K)$ et comme $\mathrm{Im}(\partial_1) = \{0\}$ alors $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_n(K) = \{0\}$ pour $n \geq 1$.

Le segment. Ici, notre complexe est $K = \{\{a,b\},\{a\},\{b\}\}$ donc $C_0(K) = [a]\mathbb{Z} + [b]\mathbb{Z}$, $C_1(K) = [a,b]\mathbb{Z}$ et les autres chaînes sont triviales.
On peut alors calculer $\mathrm{Ker}(\partial_1) = \mathrm{Im}(\partial_2) = \{0\}$ donc $H_1 = \{0\}$. Quant à $H_0(K)$, on a que $\mathrm{Ker}(\partial_0) = C_0(K)$ et $\mathrm{Im}(\partial_1) = ([b]-[a])\mathbb{Z}$ donc on pose le morphisme :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad C_0(K) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ k_1[a] + k_2[b] &\longmapsto k_1 + k_2 \end{aligned}$$

On a directement que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\partial_1)$ donc comme φ est surjectif, par passage au quotient, on a que $H_0(K) = \mathrm{Ker}(\partial_0)/\mathrm{Im}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}$. Aussi, $H_n(K) = \{0\}$ pour $n \geq 2$.

Le triangle. Ici $K = \{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a\},\{b\},\{c\}\}$ donc $C_0(\mathbb{Z}) = [a]\mathbb{Z} + [b]\mathbb{Z} + [c]\mathbb{Z}$, $C_1(K) = [a,b]\mathbb{Z} + [b,c]\mathbb{Z} + [a,c]\mathbb{Z}$ et $C_2(K) = [a,b,c]\mathbb{Z}$ et les autres sont triviaux.
Premièrement on a $\mathrm{Ker}(\partial_0) = C_0(K)$ et $\mathrm{Im}(\partial_1) = ([a]+[c])\mathbb{Z} + ([b]-[c])\mathbb{Z}$ donc on pose le morphisme :

$$\begin{aligned} \phi : \quad C_0(K) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ k_1[a] + k_2[b] + k_3[c] &\longmapsto k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

On se rend alors compte que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Im}(\partial_1)$ donc par passage au quotient, comme ϕ est surjectif alors $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$. De plus, il est clair que $\mathrm{Im}(\partial_2) = ([a,b]+[b,c]-[a,c])\mathbb{Z} = \mathrm{Ker}(\partial_0)$. Donc $H_1(K) = \{0\}$ et $H_n(K) = \{0\}$ pour $n \geq 2$.
Notons que si nous n'avions pas considéré le simplexe $[a,b,c]$ dans K, alors on aurait eu $H_1(K) = ([a,b]+[b,c]-[a,c])\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.
La tétraèdre. Comme pour les exemples précédents, on explicite de la même manière K, $C_0(K)$,$C_1(K)$,$C_2(K)$ et $C_3(K)$. Ainsi, on trouve :

$$\mathrm{Ker}(\partial_1) = ([a,b]-[a,c]+[b,c])\mathbb{Z} + ([a,b]-[a,d]+[b,d])\mathbb{Z} + ([a,c]-[a,d]+[c,d])\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Im}(\partial_1) = ([a]-[d])\mathbb{Z} + ([b]-[d])\mathbb{Z} + ([c]-[d])\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Ker}(\partial_2) = ([a,b,c]+[a,b,d]+[a,c,d]+[b,c,d])\mathbb{Z}$$

On trouve aussi que $\mathrm{Im}(\partial_2) = \mathrm{Ker}(\partial_1)$ et $\mathrm{Im}(\partial_3) = \mathrm{Ker}(\partial_2)$ donc $H_1(K) = \{0\}$ et $H_2(K) = \{0\}$. De plus, comme $\mathrm{Ker}(\partial_3) = \{0\}$ alors $H_3(K) = \{0\}$. Enfin comme pour les exemples précédents, par un morphisme astucieux on trouve que $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$. Aussi $H_n(K) = \{0\}$ pour $n \geq 4$.

Exemple. Cette fois-ci, on regarde un complexe moins classique que ceux qui précèdent.
On regarde $K = \{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{c,d\},\{b,d\},\{d,e\},\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\}\}$.

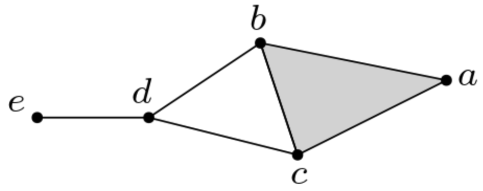


FIGURE 6 – Réalisation du complexe K

On trouve alors $\mathrm{Ker}(\partial_1) = ([a,b]+[b,c]-[a,c])\mathbb{Z} + ([b,c]+[c,d]-[b,d])\mathbb{Z}$,
$\mathrm{Im}(\partial_1) = ([a]-[e])\mathbb{Z} + ([b]-[e])\mathbb{Z} + ([c]-[e])\mathbb{Z} + ([d]-[e])\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(\partial_2) = ([a,b]+[b,c]-[a,c])\mathbb{Z}$
Comme $\mathrm{Ker}(\partial_2) = \{0\}$, on a donc : $H_2(K) = \{0\}$, $H_1(K) \simeq \mathbb{Z}$, $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_n(K) = \{0\}$ pour $n \geq 3$.

Remarque. 1. On définit le morphisme $\varepsilon : C_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $\varepsilon(\sum_i n_i\sigma_i) = \sum_i n_i$. Celui-ci nous permet alors de définir le complexe de chaîne suivant :

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{p+2}} 0 \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

On définit alors pour tout $n \geq 0$ ce que l'on appelle l'homologie réduite de K, notée $\tilde{H}_n(K)$, par : $\tilde{H}_n(K) = H_n(K)$ si $n > 0$ et $\tilde{H}_0(K) = \mathrm{Ker}(\varepsilon)/\mathrm{Im}(\partial_1)$.
Cette notion ne change pas grand chose à la "philosophie" derrière l'homologie mais apparaît de nombreuses fois dans la seconde partie de ce mémoire consacrée à la conjecture de Quillen.

2. Au lieu de considérer $C_n(K)$ comme le groupe libre des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires des n-simplexes de K, on peut aussi regarder, pour A un groupe abélien, $C_n(K;A)$ le groupe libre des combinaisons A-linéaires des n-simplexes de K. $(C_n(K;A))_{n\geq 0}$ est appelé le complexe à coefficients dans A et son homologie associée $(H_n(K;A))_{n\geq 0}$ l'homologie à coefficients dans A. On admettra que les résultats de topologie algébrique qui suivent concernant l'homologie s'appliquent aussi à l'homologie à coefficients pour tout groupe abélien A.

III Δ-complexes et homologie singulière

III.1 Δ-complexes

Définition III.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-simplexe standard :

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \forall i \in [\![0,n]\!] \,, t_i \geq 0 \,\text{et} \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

Dans le contexte des Δ-complexes, on se rapproche de nouveau de l'approche géométrique des n-simplexes. Ainsi, on notera $\{s_0, \ldots, s_n\}$ les sommets de Δ^n, c'est- à-dire : $s_0 = (1,0,\ldots,0), s_1 = (0,1,0,\ldots,0)$,etc...
De plus, pour $m+1$ sommets distincts de Δ_n, notés $v_0, \ldots, v_m$, on reprend la notation d'une face

$[v_0, \dots, v_m]$ comme l'enveloppe convexe de ces sommets. Ainsi, il est clair qu'une face de Δ^n est bien incluse dans Δ^n. Aussi, on identifie toute face de Δ^n de dimension $m < n$ à Δ^m par homéomorphisme.
Enfin on définit le bord de Δ^n comme l'ensemble des faces de Δ^n de dimension $n-1$ et on le note $\partial\Delta^n$. De même, on définit l'intérieur de Δ^n par $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$.

L'idée pour construire des Δ-complexes est de voir une espace topologique X comme un "assemblage" des Δ^n.

Définition III.2. Un Δ-complexe K sur un espace topologique X est une collection d'applications $\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$, indexée par α [1], qui vérifie :

1. Pour tout α, la restriction $\sigma_\alpha|\mathring{\Delta}^n$ est injective et tout point de X appartient à l'image d'une unique telle restriction.
2. Tout restriction de σ_α à une des faces de Δ^n est en fait une autre application $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$ de K.
3. Un ensemble $A \subset X$ est ouvert si et seulement si pour tout α, $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ est un ouvert de Δ^n.

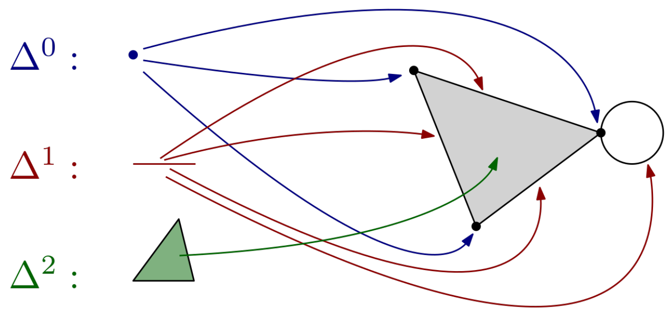


FIGURE 7 – Représentation d'un Δ-complexe

Remarque. Le point 3. nous donne en particulier que les σ_α sont continues mais la propriétés est encore plus forte que ça comme nous aurons l'occasion de le remarquer. Les point 1. et 2. se voient bien sur la représentation ci-dessus, on impose une injectivité sur l'intérieur des simplexes mais celle-ci ne peut être préservée sur le bord du simplexe. Aussi la deuxième partie du point 1. permet de ne pas avoir de redondance sur les applications associées aux "morceaux" de X.

L'avantage de cette définition de complexes simpliciaux est qu'elle autorise de nouvelles formes telles que des cycles par exemple et que l'on associe directement un complexe à un espace topologique.

Maintenant, revoyons certaines notion connues mais adaptées à cette définition :

Définition III.3. Soit K un Δ-complexe sur X, on note alors $\Delta_n(X)$ le groupe libre des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires des , toujours appelé groupe des n-chaînes

1. Notons que n dépend de α

On définit alors l'opérateur de bord $\partial_n : \Delta_n(X) \longrightarrow \Delta_{n-1}(X)$ tel que pour tout $\sigma \in \Delta_n$:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|[s_0 \dots, \widehat{s_i}, \dots, s_n]$$

Remarque. On maintient les convention vue plus tôt concernant ∂_0 et Δ_{-1}.
De plus, si on ne précise pas l'orientation des simplexes, c'est que l'on choisit pour celle-ci celle induite par l'ordre des sommets.

Proposition III.1. Pour tout $n > 0$, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

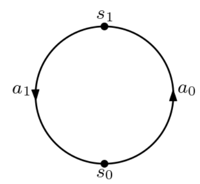
Preuve. Similaire à la proposition (II.3). □

Sans d'avantage de précisions, on définit de manière totalement analogue à ce qui précède l'homologie de notre Δ-complexe comme vu plus tôt. On appelle alors cette homologie : **homologie simpliciale de X** [2] et on la note $H_n^\Delta(X)$.

Exemple. On étudie rapidement l'homologie du cercle $\mathbb{S}^1$ sous deux aspect que l'on verra équivalents :

Pour le premier cas ci-contre, on a un Δ-simplexe sur $\mathbb{S}^1$ composé de deux sommets s_0, s_1 et de deux arrêtes $a_0 = [s_0, s_1], a_1 = [s_1, s_0]$ auxquels on associe des simplexes $\sigma_{0,0}, \sigma_{0,1}, \sigma_{1,0}, \sigma_{1,1}$. Aussi on a :

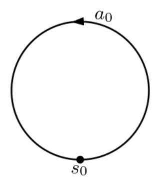
$$\Delta_0(X) = \sigma_{0,0}\mathbb{Z} + \sigma_{0,1}\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \Delta_1(X) = \sigma_{1,0}\mathbb{Z} + \sigma_{1,1}\mathbb{Z}$$



On se rend alors compte facilement que :

$$\mathrm{Ker}(\partial_1) = (\sigma_{1,0} + \sigma_{1,1})\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\partial_1) = (\sigma_{0,0} - \sigma_{0,1})\mathbb{Z}$$

Ceci nous donne alors que $H_1^\Delta(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_0^\Delta(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$.



Un travail similaire sur la seconde figure nous donne en fait le même résultat mais beaucoup plus rapidement.

Après un tel exemple, il est légitime de se demander si l'homologie ne varie pas en fonction du Δ-complexe. La réponse à cette question est en fait un corollaire d'un résultat plus général que l'on verra plus tard qui montrera l'équivalence entre l'homologie simpliciale de l'homologie dite singulière.

III.2 Lien avec les complexes simpliciaux

On peut dès à présent travailler sur le lien entre les Δ-complexes et les complexes simpliciaux abstraits. En effet, ceux-ci sont similaires au sens qu'ils ont la même homologie pour leur définitions respectives. Le but est alors de trouver certaines propriétés sur les Δ-complexes et de les

2. Il sera nécessaire de voir en quoi cette appellation ne dépend que de X

appliquer à nos complexes abstrait. Aussi, cette équivalence n'étant pas facile à montrer, on se contentera de montre que pour tout complexe abstrait, on peut construire un Δ-complexe ayant la même homologie. Ce sens est plus simple à montrer et nous suffit pour la suite.

Soit un complexe simplicial $(V,K) = (\{s_0,\ldots,s_n\},K)$ de dimension n. Pour tout p-simplexe $\{s_{i_1},\ldots,s_{i_p}\} \in K$, on a déjà vu qu'on pouvait lui associer un simplexe géométrique $[s_{i_1},\ldots,s_{i_p}]$ dans $\mathbb{R}^n$. Or, il existe un homéomorphisme naturel $\sigma_{[s_{i_1},\ldots,s_{i_p}]} : \Delta^p \longrightarrow [s_{i_1},\ldots,s_{i_p}]$. De plus celui-ci vérifie toutes les hypothèses d'une application de Δ-complexe.
Aussi, pour tout $\{s_{i_1},\ldots,s_{i_p}\} \in K$, il existe une application $\sigma_{[s_{i_1},\ldots,s_{i_p}]}$ d'un Δ-complexe. Il s'ensuit que $\Delta_n(K) \simeq C_n(K)$ pour tout $n \geq 0$ et par définition des opérateurs ∂, le noyau et l'image coïncident pour nos deux complexes. On a alors que $H_n^{\Delta} \simeq H_n$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque. On peut tout à fait construire pour tout Δ-complexe un complexe géométrique ayant la même homologie grâce à un procédé appelé subdivision barycentrique. Cependant, l'étude de la subdivision barycentrique est plutôt complexe et non nécessaire pour les résultats que l'on désire montrer dans ce mémoire.

Remarque. On précise alors que lorsque l'on prétend qu'un complexe abstrait (V,K) possède certaines propriétés topologiques, on sous-entend que le sous-espace d'un $\mathbb{R}^m$ associé possède ces mêmes propriétés pour la topologie induite.
Par exemple, le complexe $(\{1,2,3,4\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,4\},\{1,2,3\}\})$ est dit connexe.
En effet l'espace associé est clairement connexe :

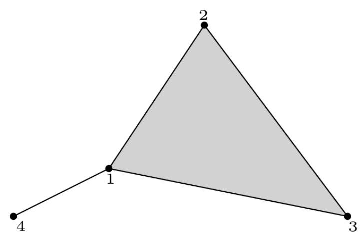


FIGURE 8 – Exemple d'un complexe simplicial connexe

III.3 Homologie singulière

Pour l'instant, nous avons vu deux homologies définies différemment. Ici on va en définir une dernière pour laquelle un grand nombre de propriétés fondamentales sont plus simples à démontrer. Le but sera ensuite de prouver que toutes les définitions vue plus tôt sont finalement équivalentes.

Définition III.4. Pour $n \in \mathbb{N}$, un n-simplexe singulier d'un espace topologique X est une application continue $\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow X$

On peut voir cette définition comme un allègement des propriétés par rapport aux Δ-simplexes, ce qui permet d'avoir plus de simplexes possibles.

Définition III.5. Le groupe des n-chaînes singulières, que l'on note $C_n(X)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les n-simplexes singuliers de X. On définit alors pour tout $n \geq 0$ l'opérateur de bord ∂_n qui à un n-simplexe σ_n donne :

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_n|[s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_n]$$

Remarque. On rappelle une dernière fois que l'on a pour convention $\partial_0 = 0$.
Comme pour les Δ-complexes, l'orientation des simplexes est induite par l'ordre des sommets.

Notons que cette définition, à l'inverse de tout ce qui précède, ne dépend pas d'un complexe que l'on aurait nous-même défini. De plus, considérer la totalité des simplexes singuliers nous donne alors en général un groupe de chaîne très grand.

Proposition III.2. Pour tout $n > 0$, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Preuve. Similaire à la proposition (II.3). □

La définition et la proposition qui précèdent nous permettent alors de définir une dernière homologie, appelée **homologie singulière** définie comme d'habitude par la suite $(H_n(X))_{n\geq 0} = (\mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1}))_{n\geq 0}$. La première chose à faire alors est de remarquer que si deux espaces sont homéomorphes, ils ont même homologie singulière.

Remarque. Dans la suite de cette section, on ne précisera pas "homologie singulière" lorsque l'on parle d'homologie.

Proposition III.3. Soient X et Y deux espaces homéomorphes, alors pour tout $n \geq 0$, on vérifie : $H_n(X) \simeq H_n(Y)$.

Preuve. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme. Celui-ci induit alors pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme de groupe $f_n : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$ qui à tout n-simplexe σ_n donne $f_n(\sigma_n) = f \circ \sigma_n$.
Ainsi par définition, on a :

$$f_{n-1} \circ \partial_n(\sigma_n) = f_{n-1} \circ \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_n|[s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_n] \right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f \circ \sigma_n|[s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_n] = \partial_n' \circ f_n(\sigma_n)$$

On a alors que $f_* = (f_n)$ est un isomorphisme d'homologie par le corollaire (II.2). □

Proposition III.4. Soit $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ où les X_α sont les composantes connexes par arcs de X. Alors pour tout $n \geq 0$, $H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$

Preuve. Soient $n \geq 0$ et σ_n un n-simplexe singulier. Comme Δ^n est connexe par arcs et que σ_n est continue, alors $\sigma_n(\Delta^n)$ est connexe par arcs. Ceci signifie que l'image de σ_n est inclus dans un certains X_α.
Ainsi, chaque n-simplexe peut-être associé à une composante connexe par arcs de X, ce qui donne donc : $C_n(X) = \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$.

Enfin, comme l'opérateur de bord préserve cette appartenance à une certaine composante connexe par arcs, cela se traduit par une décomposition en somme directe similaire pour son image et son noyau, ce qui permet de vérifier que $H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$. $\square$

Proposition III.5. Si X est connexe par arcs et non vide, alors $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Preuve. On pose le morphisme :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & C_0(K) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \sum_i k_i\sigma_i & \longmapsto & \sum_i k_i \end{array}$$

Le but ici est de d'utiliser le théorème de factorisation sur ψ afin de montrer que $H_0(X) = C_0(K)/\mathrm{Im}(\partial_1) \simeq \mathbb{Z}$. Comme $K \neq \emptyset$, alors ψ est surjectif et il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\partial_1)$.

- Premièrement, pour tout $\sigma_1 : \Delta^1 \longrightarrow X \in C_1(K)$, on a :

$$\psi(\partial_1(\sigma)) = \psi(\sigma|[s_j] - \sigma|[s_i]) = 1 - 1 = 0$$

  Donc $\mathrm{Im}(\partial_1) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

- Deuxièmement, soit $\sigma_0 = \sum_i k_i\sigma_i \in \mathrm{Ker}(\psi)$, alors $\sum_i k_i = 0$.
  Soit $x_0 \in X$, par connexité par arc, il existe pour tout i un chemin $\gamma_i : [0,1] \longrightarrow X$ allant de x_0 à $\sigma_i(s_0)$. On pose alors σ_0 l'unique 0-simplexe d'image x_0.
  Quitte à considérer un homéomorphisme de $[0,1]$ à $[s_0, s_1]$, on peut voir $\gamma_i : \Delta^1 \longrightarrow X$ comme un 1-simplexe tel que $\gamma_i|[s_0] = \sigma_0$ et $\gamma_i[s_1] = \sigma_i$ car les σ_i et σ_0 n'associent qu'un unique point.
  Ainsi, $\partial_1\left(\sum_i k_i\gamma_i\right) = \sum_i k_i\sigma_i - \sum_i k_i\sigma_0 = \sum_i k_i\sigma_i$ par hypothèse. Donc $\mathrm{Ker}(\psi) \subset \mathrm{Im}(\partial_1)$ ce qui conclut.

$\square$

Remarque. Les deux propositions précédentes nous donnent que pour un espace topologique $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, où les X_α sont les composantes connexes par arcs, on a $H_0(X) \simeq \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$

Proposition III.6. Si X est un point, alors $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ et pour tout $n > 0$, on vérifie $H_n(X) = 0$.

Preuve. Pour tout $n \geq 0$, il n'existe qu'un simplexe noté σ_n qui à tout élément de Δ^n associe l'unique élément de X. Ainsi, $\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\sigma_n$ donne 0 si n est impair et σ_n sinon. Ceci donne alors le complexe :

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Ceci donne alors directement que pour $n > 0$, on a $H_n(X) = 0$ puisque les images et noyaux coïncident, de plus on a clairement que comme $\mathrm{Im}(\partial_1) = 0$, alors $H_0 \simeq \mathbb{Z}$. $\square$

III.4 Invariance homotopique

Le but est maintenant de montrer que lorsque des espaces sont homotopiquement équivalents, alors leurs groupes d'homologies sont isomorphes. Pour ce faire on va d'abord montrer que lorsque des applications entre complexes de chaînes sont homotopes en un sens que l'on va définir, alors cette propriété est bien vérifiées.

Définition III.6. Soient deux morphisme de complexes de chaînes $\phi, \psi : C_* \longrightarrow D_*$. Une homotopie entre ϕ et ψ est une suite de morphismes de groupes $P = (P_n : C_n \longrightarrow D_{n+1})_{n\geq 0}$ telle pour tout $n \geq 0$, on vérifie :

$$\phi_n - \psi_n = \partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n$$

Si une telle application existe, on dira que ϕ et ψ sont homotopes.

Remarque. Par convention, on pose $P_{-1} = 0$.

Lemme III.7. Si $\phi, \psi : C_* \longrightarrow D_*$ sont deux morphismes de complexes de chaînes homotopes, alors ils induisent le même morphisme $\phi_* = \psi_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$.

Preuve. On note $P = (P_n)$ l'homotopie entre ϕ et ψ. Pour tout $n \geq 0$, si $c \in \mathrm{Ker}(\partial_n)$, alors

$$\phi_n(c) - \psi_n(c) = \partial_n(P) \in \mathrm{Im}(\partial'_n)$$

Donc par passage au quotient, $[\phi_n(c)] = [\psi_n(c)]$ dans $H_n(D)$, ce qui conclut. □

Définition III.7. Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. Une homotopie entre f et g est une application continue $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que pour tout $x \in X$,

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad H(x,1) = g(x)$$

On dit alors que f et g sont homotopes.

Remarque. On pourra dissocier les deux notions d'homotopies en les nommant "homotopie algébrique" pour la première et "homotopies topologique" pour la seconde.

On va maintenant rapprocher ces deux notions d'homotopies :

Théorème III.8. Si deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont homotopes, alors leurs morphismes de complexes de chaînes induits respectifs (f_n) et (g_n) sont homotopes.

Preuve. Le but ici est de réussir à construire une homotopie algébrique entre les morphismes (f_n) et (g_n) à partir de l'homotopie topologique de f et g.
Nous allons être contraint de travailler sur ce que nous appellerons des prismes, c'est-à-dire des espaces $\Delta^n \times [0,1]$. La première étape sera alors de réussir à subdiviser nos prismes en union de Δ-simplexes.

On note $I=[0,1]$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $\Delta^n \times \{0\} = [s_0,\dots,s_n]$ et $\Delta^n \times \{1\} = [v_0,\dots,v_n]$. Ainsi, on peut remarquer que le prisme $\Delta^n \times I$ est union des Δ-simplexes de dimension $n+1$ $[s_0,\dots,s_i,v_i,\dots,v_n]$ qui intersecte $[s_0,\dots,s_{i+1},v_{i+1},\dots,v_n]$ en une face commune de dimension n.

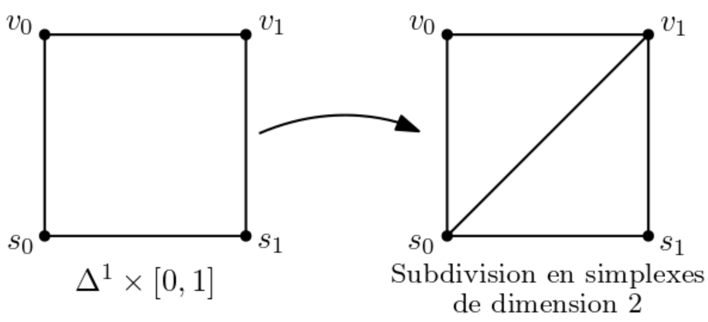


FIGURE 9 – Subdivision d'un prisme en simplexes

On pose alors $H : X \times I \longrightarrow Y$ l'homotopie entre nos fonction f et g. Pour tout $n \geq 0$ et tout n-simplexe $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$, on peut alors définir l'application continue $H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) : \Delta^n \times I \longrightarrow Y$. Enfin, on pose ce que l'on appelle l'opérateur de prismes la suite des $P_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ tel pour tout n-simplexe σ, on a :

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|[s_0,\dots,s_i,v_i,\dots,v_n]$$

Le but est alors de montrer que cet opérateur est une homotopie entre f_* et g_* :

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(P_n(\sigma)) = & \sum_{j\leq i} (-1)^i(-1)^j H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|[s_0,\dots,\widehat{s_j},\dots,s_i,v_i,\dots,v_n] \\ & - \sum_{j\geq i} (-1)^i(-1)^j H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|[s_0,\dots,s_i,v_i,\dots,\widehat{v_j},\dots,v_n]\end{aligned}$$

Parmi tous les termes où $i=j$, seul deux ne s'annulent pas. Ces deux termes sont :

$$H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|[\widehat{s_0},v_0,\dots,v_n] = H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|[v_0,\dots,v_n] = g \circ \sigma = g_n(\sigma)$$

$$-H \circ (\sigma \times \mathrm{id}|[s_0,\dots,s_n,\widehat{v_n}] = -H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|[s_0,\dots,s_n] = -f \circ \sigma = -f_n(\sigma)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}P_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = & \sum_{i<j} (-1)^i(-1)^j H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|[s_0,\dots,s_i,v_i,\dots,\widehat{v_j},\dots,v_n] \\ & - \sum_{i>j} (-1)^i(-1)^j H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|[s_0,\dots,\widehat{s_j},\dots,s_i,v_i,\dots,v_n]\end{aligned}$$

Ceci correspond exactement à tous les termes de $-\partial_{n+1}(P_n(\sigma))$ où $i \neq j$. Ainsi :

$$\partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = g_n - f_n$$

Donc $P = (P_n)$ est bien une homotopie entre (f_n) et (g_n). □

Corollaire III.9. Si $f, g : X \longrightarrow Y$ sont deux applications continues homotopes alors elles induisent le même morphisme d'homologie.

L'un des principaux intérêts de ce corollaire est que si deux espaces sont homotopiquement équivalents, alors ils ont même homologie.

Définition III.8. Deux espaces topologiques X et Y sont dit homotopiquement équivalents s'il existe deux fonction continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $f \circ g$ est homotope à id_X et $g \circ f$ est homotope à id_Y.

Remarque. On pourra aussi dire dans la suite que f est une équivalence homotopique s'il existe g vérifiant les propriétés de la définition.

Corollaire III.10. Deux espaces homotopiquement équivalents ont des homologies isomorphes.

Preuve. Soient X et Y deux espaces homotopiquement équivalents, on pose f et g les fonctions telles que $f \circ g$ est homotope à id_X et $g \circ f$ est homotope à id_Y.
On précise que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ et $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Or d'après le corollaire précédent, on a $(f \circ g)_* = \mathrm{id}_{H_*(X)}$ et $(g \circ f)_* = \mathrm{id}_{H_*(Y)}$ donc $f_*^{-1} = g_*$ donc f_* est bien un isomorphisme d'homologie. □

Grâce à ce corollaire, on va pouvoir caractériser l'homologie des tous les espaces dits **contractiles**.

Définition III.9. On dit que X se rétracte par déformation sur $A \subset X$ s'il existe une application continue $r : X \times [0,1] \longrightarrow X$ qui vérifie :

- $\forall x \in X$, $r(x,0) = x$.
- $\forall x \in X$, $r(x,1) \in A$.
- $\forall A \in a$, $r(a,1) = a$.

Intuitivement, on interprète cette déformation comme un rétrécissement continue de X.

Proposition III.11. Si X se rétracte par déformation sur $A \subset X$, alors X et A sont homotopiquement équivalent. En particulier, ils ont la même homologie.

Preuve. Soit r une rétraction de X sur A. On pose alors $f : X \longrightarrow A$ définie pour tout $x \in X$ par $f(x) = r(1,x) \in A$ et $g : A \longrightarrow X$ l'inclusion. Aussi on a que $f \circ g = \mathrm{Id}_A$ et que $g \circ f = f$ qui est homotope à Id_X puisque r est continue. □

La réciproque est fausse en générale, cependant un cas pour lequel on a l'équivalence est celui des espaces contractiles :

Définition III.10. Un espace X est dit contractile s'il se rétracte par déformation sur un point.

Remarque. Un espace contractile est nécessairement connexe par arcs.

Proposition III.12. Soit X un espace topologique, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est contractile.
2. L'application identité est homotope à une application constante.
3. X est homotopiquement équivalent à un point.

Preuve. $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$ **:** Si on note $r : X \times [0,1] \longrightarrow X$ l'application de rétraction de X en un point $\{x_0\} \subset X$. Celle-ci vérifie alors que $r(.,0) = \mathrm{id}_X$ et que $r(.,1)$ est la fonction constante égale à x_0. Donc r fournit bien un homotopie entre ces deux applications par continuité.
$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{3})$ **:** Supposons que l'identité de X est homotope à l'application constante égale à x_0. On pose alors $f : X \longrightarrow \{x_0\}$ la fonction constante égale à x_0 et $g : \{x_0\} \longrightarrow X$ qui à x_0 donne x_0. On a alors $f \circ g = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$ et $g \circ f$ homotope à l'identité par hypothèse donc X est bien homotopiquement équivalent à $\{x_0\}$.
$(\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{1})$ **:** Si X est homotopiquement équivalent à un point $\{x_0\}$, on peut supposer que celui-ci soit dans X. Aussi, il n'existe qu'une unique application de X dans $\{x_0\}$ qui est constante, notée f. De plus par hypothèse, il existe $g : \{x_0\} \longrightarrow X$ telle que $g \circ f$ est homotope à l'identité de X. On note alors $x_1 \in X$ l'unique image de g. Ainsi l'homotopie entre $g \circ f$ et id_X vérifie :

$$\forall x \in X, \quad H(x,0) = x \quad \text{et} \quad H(x,1) = x_1$$

En particulier, $H(x_1,1) = x_1$ donc H est une rétraction par déformation de X sur $\{x_1\}$. □

Ainsi, en assemblant tous les résultats que l'on vient de voir, on rapproche directement l'homologie de tout espace contractile à celle d'un point.

Corollaire III.13. Si X est un espace contractile, alors $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$ et pour $n > 0$, on a $H_n(X) = 0$.

Corollaire III.14. Si X est un espace contractile, alors pour $n \geq 0$, on a $\tilde{H}_n(X) = 0$.

IV Équivalence des homologies

Le but de cette partie est de voir en quoi toutes le notions d'homologie vue plus tôt sont en fait équivalentes. Ainsi, on pourra généraliser tous les résultats uniquement vus pour l'homologie singulière à tout autre homologie et en particulier à l'homologie simpliciale qui est celle qui nous intéressera pour l'étude sur la conjecture de Quillen.

IV.1 Homologie relative

Une notion particulière mais nécessaire est celle d'homologie relative. Heursistiquement, il s'agit de calculer l'homologie d'un espace auquel on aurait substitué une partie.

Plus précisément, si X est un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble, alors on peut définir pour tout $n \geq 0$ le groupe quotient : $C_n(X,A) = C_n(X)/C_n(A)$. Il est clair que pour tout $\sigma_A \in C_n(A)$, on a $\partial_n(\sigma_A) \in C_{n-1}(A)$. Ceci induit alors un opérateur [3] $\partial : C_n(X,A) \longrightarrow C_{n-1}(X,A)$. Cette opérateur vérifie alors lui aussi $\partial^2 = 0$, ce qui permet alors de définir l'homologie relative par $H_n(X,A) = \mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\partial)$. Le but de cette partie est alors de vérifier que l'on peut définir une suite exacte telle :

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow H_{n-1}(X,A) \longrightarrow \ldots$$

Pour ce faire on va d'abord montrer un résultat qui utilise ce que l'on appelle le **lemme du serpent** qui fait partie d'une discipline appelée la "chasse de diagramme".

On s'intéresse à des complexes de chaînes singulières A_*, B_*, C_* qui forment le diagramme ci-contre. On suppose de plus ce diagramme commutatif et que chaque colonne est une suite exacte courte, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Im}(i)$. Le but est alors de montrer que lorsque l'on passe aux groupes d'homologies d'un tel diagramme, on tombe sur la suite exacte longue suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\ldots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On va donc dans un premier temps définir l'opérateur $\partial : H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A)$.

La première chose à remarquer est que si les suites des colonnes sont exactes, alors i est injectif et j surjectif. Ensuite, on va considérer un cycle $c \in \mathrm{Ker}(\partial_n)$ et donc $b \in B_n$ tel que $j(b) = c$ par surjectivité.

Par commutativité, on a alors $j(\partial(b)) = \partial(j(b)) = \partial(c) = 0$ donc $\partial(b) \in \mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Im}(i)$. Ainsi il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $i(a) = \partial(b)$ et $i(\partial(a)) = \partial(i(a)) = \partial\partial(b) = 0$ donc par injectivité de i, on a que $\partial(a) = 0$.

On peut alors essayer de définir dans un premier temps le morphisme :

$$\begin{aligned} \varphi : \ \mathrm{Ker}(\partial) &\longrightarrow H_{n-1}(A) \\ c &\longmapsto [a] \end{aligned}$$

Cependant, il faut noter que a n'est à priori pas uniquement déterminé donc il faut vérifier que le passage au quotient permet d'avoir un morphisme bien défini.

3. Notons que dans cette partie, on simplifiera les notations telle que ∂ ou encore celles des morphismes de complexes par soucis de lisibilité. Ainsi, on note par exemple ∂ l'opérateur de bord sans préciser les espaces de départ et d'arrivée s'il n'y a pas d'ambiguïté.

D'abord, a est uniquement déterminé par $\partial(b)$ car i est injective. De plus si on choisit deux éléments $b, b' \in B_n$ tels que $j(b) = j(b') = c$, alors $b' - b \in \mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Im}(i)$ donc il existe $a_0 \in A_n$ tel que $i(a_0) = b' - b$.
Ceci donne donc que $\partial(b') = \partial(b) + \partial(i(a_0))$. On note alors a et a' les uniques pré-images respectives de b et b' par i. Donc par commutativité, on a $i(a') = i(a) + \partial(i(a_0)) = i(a + \partial(a_0))$ donc en passant au quotient, $[a'] = [a]$.

On a alors vu que φ était bien défini, mais maintenant on veut définir l'opérateur $\partial : H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ donc il nous reste à vérifier que l'on peut factoriser ce morphisme, c'est-à-dire vérifier que $\mathrm{Im}(\partial) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Soit $c \in \mathrm{Im}(\partial)$, alors il existe $c' \in C_{n+1}$ tel que $\partial(c') = c$. De plus, comme j est surjectif, il existe $b \in B_{n+1}$ tel que $j(b') = c'$.
Aussi on a $j(\partial(b')) = \partial(j(b')) = c$ donc un élément $a \in A_{n-1}$ de la classe de $\varphi(c)$ vérifie $i(a) = \partial(\partial(b')) = 0$ donc comme i est injective, on a que $a = 0$. Ceci donne alors que la classe de $\varphi(c)$ est la classe de 0 donc $\mathrm{Im}(\partial) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc sa factorisation $\partial : H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ est bien définie.

Maintenant que nous avons bien défini l'opérateur ∂, il nous reste à voir si celui-ci nous permet de bien définir une chaîne d'homologie et que celle-ci est bien exacte comme énoncé plus tôt.

Théorème IV.1. La suite d'homologie suivante est exacte :

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Preuve. On va en grande partie faire référence à la définition de ∂ vue précédemment et en particulier, on garde les mêmes notations. On procède alors étape par étape :

1. $\mathrm{Im}(i_*) \subset \mathrm{Ker}(j_*)$: Le résultat vient directement du fait que $j_* i_* = (ji)_* = 0$.
2. $\mathrm{Im}(j_*) \subset \mathrm{Ker}(\partial_*)$: Pour tout $[b] \in H_n(B)$, on a nécessairement que b est un cycle de B_n et donc que $\partial(b) = 0$. Ainsi par définition de ∂_*, on a que $\partial_* \circ j_* = 0$.
3. $\mathrm{Im}(\partial_*) \subset \mathrm{Ker}(i_*)$: Par définition de ∂_*, il existe $b \in B_n$ tel que $i_*(\partial_*([c])) = [\partial(b)] = 0$ donc $i_* \circ \partial = 0$.
4. $\mathrm{Ker}(j_*) \subset \mathrm{Im}(i_*)$: Une classe $[b] \in \mathrm{Ker}(j_*)$ est donnée par un cycle $b \in B_n$ tel que $j(b)$ soit un bord. Autrement dit, il existe $c' \in C_{n+1}$ tel que $\partial(c') = j(b)$. Comme j est surjectif, il existe $b' \in B_{n+1}$ tel que $j(b') = c'$.
Or comme $j(\partial(b')) = \partial(j(b')) = j(b)$ alors $b - \partial(b') \in \mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Im}(i)$. Ainsi, il existe $a \in A_n$ tel que $i(a) = b - \partial(b')$. La première chose à vérifier pour passer l'homologie est que a est bien un cycle [4]. On a alors $i(\partial(a)) = \partial(i(a)) = \partial(\partial(b')) - \partial(b) = 0$ or par injectivité de i, ceci nous donne directement que $\partial(a) = 0$. Pour finir il suffit de passer à l'homologie, ce qui donne que : $i_*([a]) = [b - \partial(b')]$.
5. $\mathrm{Ker}(\partial_*) \subset \mathrm{Im}(j_*)$: Soit $[c] \in \mathrm{Ker}(\partial_*)$, alors l'élément $a \in A_{n-1}$ de la définition est un bord et

4. On réitérera cette vérification dans ce qui suit pour les mêmes raisons

il existe $a' \in A_n$ tel que $\partial(a') = a$. Aussi, si on prend un élément $b \in B_n$ de la définition tel que $i(a) = \partial(b)$ alors on vérifie : $\partial(b - i(a')) = \partial(b) - i(\partial(a')) = i(a) - i(a) = 0$.
Ainsi, on a bien que $b - i(a')$ est un cycle de B_n. et on vérifie aussi que $j(b - i(a')) = c - j \circ i(a') = c$ donc $j_*([b - i(a')]) = [c]$.
6. $\mathrm{Ker}(i_*) \subset \mathrm{Im}(\partial_*)$: Soit $[a] \in \mathrm{Ker}(i_*)$, alors $i(a)$ est un bord de B_{n-1} et on pose alors $b \in B_n$ tel que $\partial(b) = i(a)$. On a donc $\partial(j(b)) = j(\partial(b)) = j \circ i(a) = 0$ donc on peut passer au quotient et on a : $\partial_*([j(b)]) = [a]$ par définition. □

Corollaire IV.2. Soient X un espace topologique et $A \subset X$, la suite d'homologie suivante est exacte :

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

avec i l'inclusion de $C_n(A)$ dans $C_n(X)$ et j la projection de $C_n(X)$ sur $C_n(X)/C_n(A)$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'on peut définir naturellement un diagramme commutatif comme celui vu plus tôt à partir de i et j. En particulier, il est clair que i est injectif, j surjectif et que $\mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Im}(i)$ donc que les suites sont bien exacte. On conclut par le théorème précédent. □

Remarque. On peut généraliser la suite définie pour une paire (X,A) à un triplet (X,A,B), c'est à dire que $B \subset A \subset X$. Celui-ci donne dans un premier temps les suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow C_n(A,B) \longrightarrow C_n(X,B) \longrightarrow C_n(X,A) \longrightarrow 0$$

Le dernier morphisme non trivial venant du théorème d'isomorphisme :

$$C_n(X)/C_n(A) = (C_n(X)/C_n(B))/(C_n(A)/C_n(B))$$

Enfin, cette suite donne :

$$\dots \longrightarrow H_n(A,B) \longrightarrow H_n(X,B) \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow H_{n-1}(A,B) \longrightarrow \dots$$

IV.2 Équivalence d'homologies

Grâce à ce qui précède, nous allons pouvoir rapprocher la notion d'homologie simpliciale et celle d'homologie singulière. Pour commencer, nous allons énoncer un résultat important nécessaire pour ce qui suit. Cependant, celui-ci est issu du théorème d'excision, qui ne sera pas traitée dans ce mémoire, et qui est un théorème extrêmement puissant lorsque l'on utilise l'homologie relative :

Définition IV.1. Soient X,Y deux espaces topologiques, $A \subset X$ et $B \subset Y$, alors une application de pairs $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ est une application $f : X \longrightarrow Y$ telle que $f(A) \subset B$.

Proposition IV.3. Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un fermé non vide qui est une déformation par rétractation d'un voisinage de X, alors la projection $q : (X,A) \longrightarrow (X/A, A/A)$ induit un isomorphisme $q_* : H_*(X,A) \longrightarrow H_*(X/A, A/A) \simeq \tilde{H}_*(X/A)$.

Maintenant, développons un exemple important qui nous aidera à prouver l'important résultat de cette partie :

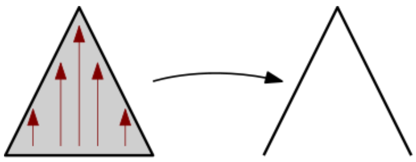
Exemple. Pour tout $n \geq 0$, on propose de montrer que l'identité $i_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$ est un cycle qui engendre le groupe $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. Le fait que l'on regarde l'homologie relative donne directement que les i_n sont bien des cycles. Aussi on montre le reste par récurrence.
n = 0 : On a que Δ^0 est un point et $\partial\Delta^0 = \emptyset$ donc $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) \simeq \mathbb{Z}$ est bien engendré par un élément qui est i_0.
Hérédité : Soit $\Lambda \subset \partial\Delta^n$ l'ensemble des faces de dimension $n-1$ de Δ^n sauf une notée F. Aussi, on veut montrer les isomorphismes suivants :

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\simeq} H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{\simeq} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

Pour le premier isomorphisme, on regarde le triplet $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ qui donne la suite :

$$\dots \longrightarrow H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow \dots$$

Or la construction de Λ permet de déformer Δ^n par rétractation en Λ tel représenté ci-dessous :



Aussi, pour tout $k \geq 0$, on a $H_k(\Delta^n, \Lambda) \simeq H_k(\Lambda, \Lambda) = \{0\}$ par la proposition (III.11). Enfin on a la suite exacte suivante, et donc l'isomorphisme attendu :

$$\dots \longrightarrow H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Le second isomorphisme est induit par l'inclusion $i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \partial\Delta^n$ donnée par la face F. En effet, pour $n = 1$, c'est clair puisque i est un homéomorphisme.
Pour $n > 1$, puisque $\partial\Delta^{n-1}$ est non vide, on peut quotienter de façon à ce que i induise l'homéomorphisme $\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \simeq \partial\Delta^n/\Lambda$ et donc $H_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}) \simeq H_{n-1}(\partial\Delta^n/\Lambda)$.
Finalement, comme $\partial\Delta^{n-1}$ et Λ vérifient les hypothèses de la proposition précédente, on a que $\tilde{H}_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \simeq \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$, d'où $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \simeq H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ puisque $n > 1$. Aussi, il s'ensuit que le cycle i_n est envoyé par le premier isomorphisme sur $\pm i_n \in C_{n-1}(\partial\Delta^{n-1}, \Lambda)$.

Pour prouver l'équivalence des notions d'homologie, nous procéderons par récurrence. Cependant, avant toute chose, il est nécessaire de prouver un lemme fondamental qui consiste encore en une "chasse de diagramme", appelé **Five-Lemma** ou encore **Lemme des cinq** :

Lemme IV.4 (Five-Lemma). Soit un diagramme commutatif de groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r, "i'"'] & B' \arrow[r, "j'"'] & C' \arrow[r, "k'"'] & D' \arrow[r, "l'"'] & E' \end{tikzcd}$$

Si α,β,δ et ε sont des isomorphismes, alors γ aussi.

Preuve. Comme dit plus tôt, cette preuve est encore une chasse de diagramme. On va procéder en deux étapes :

1. Si β et δ sont surjectifs et ε injectif alors γ est surjectif.
Soit $c' \in C'$, on pose $d' = k'(c') \in D'$. Il existe $d \in D$ tel que $\delta(d) = d'$ par surjectivité de δ. Or $\mathrm{Im}(k') \subset \mathrm{Ker}(l')$ donc $l'(k'(c)) = l'(d') = 0$.
Aussi, par commutativité du diagramme, $\varepsilon(l(d)) = k'(\delta(d)) = k'(d') = 0$ donc $l(d) \in \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ donc par injectivité, $l(d) = 0$. On a donc que $d \in \mathrm{Ker}(l) \supset \mathrm{Im}(k)$ donc il existe $c \in C$ tel que $k(c) = d$.
Par commutativité, on a alors $k'(\gamma(c)) = \delta(k(c)) = d' = k'(c')$ d'où $k'(\gamma(c) - c') = 0$.
Donc $\gamma(c) - c' \in \mathrm{Ker}(k') \supset \mathrm{Im}(j')$ et il existe $b' \in B'$ tel que $j'(b') = \gamma(c) - c'$. Or par surjectivité de β, il existe $b \in B$ tel que $\beta(b) = b'$.
Enfin, par commutativité, on a $\gamma(j(b)) = j'(\beta(b)) = \gamma(c) - c'$ donc $\gamma(c - j(b)) = c'$ et γ est bien surjectif.

2. Si β et δ sont injectifs et α surjectif alors γ est injectif.
Soit $c \in C$ tel que $\gamma(c) = 0$. On pose $d = k(c)$, on a alors par commutativité que $\delta(d) = \delta(k(c)) = k'(\gamma(c)) = 0$ donc $d \in \mathrm{Ker}(\delta)$. Or par injectivité, on a donc que $d = 0$ et $c \in \mathrm{Ker}(k) \supset \mathrm{Im}(j)$ donc il existe $b \in B$ tel que $j(b) = c$.
On pose alors $b' = \beta(b)$, et on vérifie par commutativité $j'(b') = \gamma(j(b)) = 0$ donc $b' \in \mathrm{Ker}(j') \supset \mathrm{Im}(i')$. Il existe alors $a' \in A'$ tel que $i(a') = b'$. Par surjectivité de α, il existe alors $a \in A$ tel que $\alpha(a) = a'$.
Enfin par commutativité, $\beta(i(a)) = i'(\alpha(a)) = i'(a') = b'$ donc par injectivité de β, on a que $b = i(a) \in \mathrm{Im}(i) \subset \mathrm{Ker}(j)$ donc $c = j(b) = 0$ et γ est bien injectif. $\square$

Remarque. Il est facile de remarquer que l'on a montré un résultat plus fort que celui énoncé dans le Five-Lemma. En réalité, la version originale de ce lemme nécessite uniquement α surjectif et ε injectif mais celle donnée est plus adaptée à ce qui suit.

Théorème IV.5. Soit X un Δ-complexe, pour tout $n \geq 0$, on vérifie : $H_n^{\Delta}(X) \simeq H_n(X)$.

Preuve. On note dans cette preuve X^k le k-squelette de X, c'est à dire l'ensemble des images des Δ-simplexes de dimension k ou moins. Par ailleurs, le fait que l'on parle de simplexe singulier ou Δ-simplexe dépend du contexte et sera précisé au long de la preuve.

On procède alors par récurrence sur k avec l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\text{(HR) : Soit } k \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ on vérifie } H_n^{\Delta}(X^k) \simeq H_n(X^k)$$

$\mathbf{k = 0}$ **:** On ne considère ici que les points du Δ-complexe X. Donc les applications sont les mêmes pour l'homologie singulière et simpliciale.

Hérédité : Soit $k \geq 1$, on suppose alors (HR) vraie pour $k-1$, on considère pour tout $n \geq 0$ le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}^{\Delta}(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^k) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\Delta}(X^{k-1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{n+1}(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k,X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1})
\end{array}$$

D'après (HR), les colonnes 2 et 5 sont des isomorphismes. De fait, il est clair que si l'on arrive à montrer que les colonnes 1 et 4 en sont aussi, alors on pourra directement conclure par le lemme des cinq. Pour faire ceci, on commence par remarquer que si $n \neq k$, alors $\Delta_n(X^k,X^{k-1})$ est nul et si $n = k$, alors $\Delta_n(X^k,X^{k-1})$ est un un groupe abélien libre engendré par les k-simplexes de X. Aussi, on a donc exactement la même description pour les groupes d'homologies $H_n^{\Delta}(X^k,X^{k-1})$.
On veut maintenant étudier les groupes d'homologies correspondant $H_n(X^k,X^{k-1})$. Pour commencer, on considère $\phi : \bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k \longrightarrow X^k$ l'application formée des simplexes singuliers σ_{α}. Ainsi, on décrit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & X^k \\
{\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\pi}} \\
(\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k)/(\bigsqcup_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k) & \xrightarrow{\quad\tilde{\phi}\quad} & X^k/X^{k-1}
\end{array}$$

On note $\tilde{x_0}$ la classe de $\bigsqcup_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k$ et $\tilde{y_0}$ celle de X^{k-1}. Soient $\tilde{x_1}, \tilde{x_2}$ deux classes de $(\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k)/(\bigsqcup_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k)$, on veut vérifier que $\tilde{\phi}$ est bien définie, c'est-à-dire que $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \tilde{\phi}(\tilde{y})$. On a deux cas : si $x_1 \in \partial\Delta_{\alpha}^k$, alors x_2 aussi et $\phi(x_1), \phi(x_2) \in X^{k-1}$ donc $\tilde{\phi}(\tilde{x_1}) = \tilde{\phi}(\tilde{x_2}) = \tilde{\pi}(\phi(x_1)) = \tilde{y_0}$. Sinon, alors par la définition de notre espace quotient, on a nécessairement que $x_1 = x_2$. Donc $\tilde{\phi}$ est bien définie.
Aussi, il est clair que $\tilde{\phi}$ est bijective, cependant on désire montrer qu'il s'agit d'un homéomorphisme sachant que l'on muni nos espaces de la topologie quotient :
Soit U un ouvert de X^k/X^{k-1} d'où $\phi^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(U))$ est ouvert car ϕ est continue. Aussi, on a donc que $\pi^{-1}(\tilde{\phi}^{-1}(U))$ est un ouvert, or par définition de la topologie quotient, ceci est équivalent à ce que $\tilde{\phi}(U)$ soit un ouvert : $\tilde{\phi}$ est continue.
Soit V un ouvert de $(\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k)/(\bigsqcup_{\alpha} \partial\Delta_{\alpha}^k)$, on veut vérifier que $\tilde{\phi}(U)$ est ouvert. On remarque que, par définition de la topologie quotient d'une part, mais aussi par propriétés de la fonction ϕ d'autre

part, on a :

$$\tilde{\phi}(U) \text{ ouvert} \iff \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\phi}(U)) \text{ ouvert} \iff \phi^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\phi}(U))) \text{ ouvert}$$

Or $\phi^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\phi}(U))) = (\tilde{\pi} \circ \phi)^{-1}(\tilde{\phi}(U)) = (\tilde{\phi} \circ \pi)^{-1}(\phi(U)) = \pi^{-1}(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(U)))$ et comme $\tilde{\phi}$ est bijective, on conclut que $\pi^{-1}(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(U))) = \pi^{-1}(U)$. Enfin, $\pi^{-1}(U)$ étant ouvert, on a par l'équivalence que $\tilde{\phi}(U)$ est ouvert, ce qui conclut sur le fait que $\tilde{\phi}$ est un homéomorphisme.
Par conséquent, $H_n(X^k, X^{k-1})$ est nul si $n \neq k$ et est un groupe libre abélien engendré par les k-simplexes de X si $k = n$. En effet, ce dernier point découle de l'exemple précédent où l'on a vu que $H_k(\Delta^k, \partial\Delta^k)$ est engendré par l'identité. On a donc bien montré que les colonnes 1 et 4 sont effectivement des isomorphismes, ce qui termine la récurrence et donne l'équivalence de nos deux homologies. $\square$

V Complexes simpliciaux appliqués aux groupes

V.1 Rappels de théorie des groupes

Dans un premier temps on va rappeler la notion de p-Sylow et le théorème du même nom qui sont fondamentaux pour tout ce qui suit :

Définition V.1. Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre $n = p^\alpha q$ tel que $p \nmid q$. On appelle alors p-Sylow de G tout sous-groupe S_p d'ordre p^α. et on note $\mathrm{Syl}_p(G)$ l'ensemble des p-Sylow de G.

Théorème V.1 (Sylow)**.** Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre $n = p^\alpha q$ tel que $p \nmid q$, alors :

1. Il existe au moins un p-Sylow.
2. Tous les p-Sylow de G sont conjugués entre eux.
3. Si on note N_p le nombre de p-Sylow, alors $N_p \mid q$ et $N_p \equiv 1 \mod p$.
4. Tout p-sous-groupe de G est contenu dans un p-Sylow de G.

Proposition V.2. Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre $n = p^\alpha q$ tel que $p \nmid q$, alors il existe un unique plus grand p-sous-groupe distingué de G en terme d'ordre de groupe.
On note alors ce groupe $O_p(G)$ ce groupe et on vérifie que $O_p(G) = \bigcap_{S \in \mathrm{Syl}_p(G)} S$.

Preuve. En considérant le sous-groupe trivial comme p-sous-groupe, on a toujours l'existence d'un p-sous-groupe distingué dans G. Aussi, comme G est fini, on peut définir H un p-sous-groupe distingué de G tel que pour tout autre p-sous-groupe distingué H', on vérifie : $|H| \geq |H'|$.
La première chose à remarquer est que $O_p(G) = \bigcap_{S \in \mathrm{Syl}_p(G)} S$ est distingué. Ceci est direct du fait que tous les p-Sylow soient conjugués entre eux.
D'autre part, H est contenu dans un p-Sylow noté S. Or pour tout autre p-Sylow S', il existe $g \in G$ tel que $S' = gSg^{-1}$ et comme H est distingué dans G, alors $gHg^{-1} = H$. Donc $H \subset S'$ et plus spécifiquement : $H \subset O_p(G)$.
Finalement, comme $O_p(G)$ est distingué, $|O_p(G)| \leq |H|$ ce qui donne que $O_p(G) = H$. □

Un cadre principal d'étude est celui d'un groupe $G = K \rtimes H$ où H est une p-groupe abélien et K un groupe d'ordre q tel que $p \nmid q$. Pour simplifier on dira que K est un p'-groupe.
Afin de pouvoir donner quelques résultats important, il nous sera nécessaire d'admettre le lemme suivant :

Lemme V.3 (Glauberman)**.** Soit H un groupe agissant sur un groupe K par conjugaison et tel que $|H| \wedge |K| = 1$. Supposons aussi qu'au moins l'un de ces deux groupes est résoluble. Si K agit transitivement sur un ensemble Ω, et si H agit aussi sur ce même ensemble Ω et que l'on vérifie :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall k \in K, \forall h \in H, \quad h \cdot (k \cdot \omega) = (hkh^{-1}) \cdot (h \cdot \omega)$$

Alors il existe un point fixe pour l'action de H sur Ω et de plus l'ensemble de ces points fixes est une $C_K(H)$-orbite.

Remarque. On rappelle que le centralisateur de I dans K pour $I \leq K$ est $C_K(I) = \{k \in K \,|\, \forall i \in I, ik = ki\}$.
Cependant, pour H agissant sur K, on définit $C_K(H)$ comme les points fixes de cette action.

Preuve. La preuve est difficile est nécessite des résultats qui ne sont pas nécessaire pour ce qui suit. Celle-ci correspond au lemme (13.8) de [4]. □

Définition V.2. Soit G le produit semi-direct $G = K \rtimes H$ où H est p-groupe abélien et K un p'-groupe. Pour tout sous-groupe $I \leq G$, on définit $\mathcal{N}(I)$ l'ensemble des p-Sylow qui contiennent I et $N(I) = |\mathcal{N}(I)|$.

Proposition V.4. Soit G le produit semi-direct $G = K \rtimes H$ où H est p-groupe abélien et K un p'-groupe. Soit $I \leq H$, on vérifie :

1. I est l'unique conjugué de I qui est inclus dans H.
2. $N(I) = |C_K(I)|/|C_k(H)|$.
3. Si $N \trianglelefteq K$ est H-invariant, c'est-à-dire que pour tout $n \in N$ et $h \in H$, on vérifie : $hnh^{-1} \in n$, alors $C_{K/N}(H) \simeq C_K(H)N/N$.

Preuve. 1. Soit $g \in G$ et ${}^gI = gIg^{-1}$. On suppose alors que ${}^gI \subset H$, cependant on remarque qu'il existe $k \in K$ et $h \in H$ tel que $g = kh$. Ainsi comme H est abélien et que $I \leq H$, alors on a ${}^gI = gIg^{-1} = khIh^{-1}k^{-1} = kIk^{-1} = {}^kI$. Soit $i \in I$, on a alors $\underbrace{i^{-1}ki}_{\in K}k^{-1} \in K$ car K est distingué dans G et $i^{-1}\underbrace{kik^{-1}}_{\in H} \in H$ car ${}^kI \subset H$ par hypothèse. Or $H \cap K = \{1\}$ donc $k \in C_K(I)$ et ${}^gI = {}^kI = I$
2. On considère ici l'action de conjugaison de $C_K(I)$ sur $\mathcal{N}(I)$. Le premier point est que cette action est transitive.
Soit $J \in \mathcal{N}(I)$, il existe $g \in H$ tel que ${}^gH = J$. De plus si $g = kh$ avec $k \in K$ et $h \in H$, alors on a directement que $J = {}^kH$. Enfin comme $I \subset J$, alors ${}^{k^{-1}}I \subset H$ et donc ${}^kI = I$. Ainsi si $i_1 \in I$, alors il existe $i_2 \in I$ tel que $ki_1k^{-1} = i_2$ d'où $\underbrace{i_1^{-1}ki_1}_{\in K}k^{-1} = i_1^{-1}i_2 \in I \subset H$ donc $i_1 = i_2$ et $k \in C_K(I)$. On conclut alors avec la formule des classes.
3. Ce point utilise directement le lemme de Glauberman avec $\Omega = K/N$. On veut d'abord vérifier les hypothèses pour utiliser le lemme.
Premièrement, pour tout $h \in H$ et $[k] \in K/N$ on définit l'action de H sur K/N par $h \cdot [k] = [hkh^{-1}]$. On vérifie que celle-ci est bien définie : soient $k \in K$ et $n \in N$ de sorte que $[k] = [kn]$. On a alors $h \cdot [kn] = [hknh^{-1}] = [hkh^{-1}hnh^{-1}] = [hkh^{-1}n']$ avec $n' = hnh^{-1} \in N$ par hypothèse. Ainsi $h \cdot [kn] = h \cdot [k]$ et l'action est bien définie. De plus, pour $k \in K$ et $[k'] \in K/N$, l'action de K sur K/N est donnée par $k \cdot [k'] = [kk']$ et est clairement transitive. Enfin, pour $k \in K$, $[k'] \in K/N$ et $h \in H$ on a :

$$(hkh^{-1}) \cdot (h \cdot [k']) = (hkh^{-1}) \cdot [hk'h^{-1}] = [hkh^{-1}hk'h^{-1}] = [hkk'h^{-1}] = h \cdot (k \cdot [k'])$$

Ainsi, par le lemme, il existe un point fixe pour l'action de H sur K/N et l'ensemble des ces points fixes est une $C_K(H)$-orbite. Autrement dit $C_{K/N}(H)$ est la $C_K(H)$-orbite de $[1]$ car $[1]$ est un point fixe. Or une façon d'écrire cette orbite est $C_K(H)N/N$, ce qui montre le résultat. $\square$

Corollaire V.5. Soit $G = K \rtimes H$ où H est p-groupe abélien et K un p'-groupe. Soit $I \leq H$, alors il existe un unique conjugué de I par p-Sylow.

Preuve. Soient $k_1, k_2 \in K$ et $I_1 = {}^{k_1}I$ et $I_2 = {}^{k_2}I$ deux conjugués de I tels que $I_1, I_2 \subset S \in Syl_p(G)$. Il existe $k \in K$ tel que ${}^kH = S$ d'où ${}^{k_1}I < {}^kH$. Ainsi nous avons ${}^{k^{-1}k_1}I < H$ d'où ${}^{k^{-1}k_1}I = I$ par le point 1. de la proposition précédente et donc $I_1 = {}^kI$. Par le même procédé, on a $I_2 = {}^kI$ et donc ${}^{k_1}I = {}^{k_2}I$. $\square$

Remarque. Ce corollaire est très important et apparaît dans les preuves de nombreuses propositions que nous traiterons par la suite.

V.2 Cas des groupes abéliens élémentaires

Un cas important dans tout ce qui va suivre est donné par : $H = \mathbb{F}_p^r$. Ainsi, on peut voir H comme un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension r et on dira alors que H est une p-groupe élémentaire abélien de G. De fait, on peut alors considérer des hyperplans de H qui sont les sous-groupes I de H tels que $[H : I] = p$. On dira alors que des hyperplans sont indépendants si les formes linéaires associées sont indépendantes dans le dual H^*.

Premièrement, le but va être de prouver une proposition importante pour la suite mais pour ce faire on doit admettre le théorème suivant :

Théorème V.6. Soit H un p-groupe élémentaire abélien agissant fidèlement sur un p'groupe K et $I \leq H$. Alors

$$|C_K(I) : C_K(S)| = \prod_M |C_K(M) : C_K(I)|$$

où M parcourt tous les sous-groupes maximaux de S contenant I.

Preuve. Ce théorème et sa preuve apparaissent en tant que (2.1) du [5]. $\square$

Proposition V.7. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K est un p'-groupe. Si H agit fidèlement sur K, alors il existe r hyperplans indépendants de H noté $H_1, \ldots, H_r$ tels que $N(H_i) > 1$.

Preuve. On pose $\mathcal{M}(H)$ l'ensemble des sous-groupes maximaux de H et pour tout $M \in \mathcal{M}(H)$, on note $c_M = |C_K(M) : C_K(H)|$. Par le théorème (V.6), pour tout $I \leq H$, on a

$$|C_K(I)| = |C_K(H)| \prod_{\substack{M \in \mathcal{M}(H) \\ M \geq I}} c_M$$

Ainsi pour $I = \{0\}$, on a que $|K| = |C_K(S)| \prod_{M \in \mathcal{M}(I)} c_M$ et donc en divisant les deux expressions précédentes, pour tout $I \leq H$, on a :

$$|K : C_K(I)| = \prod_{\substack{M \in \mathcal{M}(S) \\ M \not\geq I}} c_M$$

On considère alors $I = \bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}(H) \\ c_M > 1}} M$ de sorte que $c_M = 1$ si $M \not\geq I$ vu que par définition, $c_M \geq 1$.
Donc par ce qui précède, on a donc $|K : C_K(I)| = \prod_{M \not\geq I} c_M = 1$ donc $C_K(I) = K$. Donc l'action de I induite par celle de H est triviale et fidèle, et alors $I = \{0\}$.
Enfin, on conclut en remarquant que dans le cas où $H = \mathbb{F}_p^r$, ses sous-groupes maximaux sont en fait ses hyperplans. Ainsi, le fait que I soit trivial s'interprète comme le fait que le système donné par les équations des hyperplans tels que $c_M > 1$ admet au moins r équations linéairement indépendantes. Ceci se traduit alors comme l'existence d'au moins r hyperplans indépendants tels que $c_M > 1$. Or $c_M = |C_K(M) : C_K(H)| = N(M)$ d'après la proposition (V.4) donc on a bien r hyperplans indépendants $H_1, \dots, H_r$ tels que $N(H_i) > 1$. $\square$

Toujours dans le même contexte, un outil important et nécessaire sera les suites finis de $[\![1, r]\!]$ sans répétitions, notées $[i_1, \dots, i_l]$ pour $l \leq r$. On note aussi S_l^r l'ensemble des suites de $[\![1, r]\!]$ de taille l. Tout l'intérêt de ces suites est que l'on peut les utiliser pour construire des hyperplans de H. On rappelle que l'on peut noter tout élément de H comme un r-uplet de $\mathbb{F}_p$, ainsi on définit :

$$H_{[i_1,\dots,i_l]} = \{(x_1, \dots, x_r) \in H \,|\, x_{i_1} = \cdots = x_{i_l} = 0\}$$

On peut alors remarquer que $H_{[i_1,\dots,i_l]} = H_{[i_1]} \cap \cdots \cap H_{[i_l]} \simeq \mathbb{F}_p^{r-l}$ et que

$$H_{[i_1,\dots,i_l]} = H_{[j_1,\dots,j_l]} \iff \{i_1, \dots, i_l\} = \{j_1, \dots, j_l\}$$

Enfin, on définit à ces suites une notion de signature : $\varepsilon([i_1, \dots, i_l]) = (-1)^{n+m}$ avec n le nombre de transpositions nécessaires à la suite $[i_1, \dots, i_l]$ pour la rendre croissante et m le nombre de termes différents de $[1, \dots, l]$ une fois la suite ordonnée. Celle-ci est bien définie car $(-1)^n$ peut aussi être défini de manière équivalente comme la signature de la permutation associées au passage de la suite initiale à la suite croissante.

Exemple. Pour illustrer rapidement le calcul de la signature, on considère la suite $[2, 5, 1, 4] \in S_4^5$. Trois transpositions permettent d'obtenir la suite croissante $[1, 2, 4, 5]$ et les termes $4, 5$ diffèrent de la suite $[1, 2, 3, 4]$ donc $\varepsilon([2, 5, 1, 4]) = (-1)^{3+2} = -1$.

Lemme V.8. Soient $[i_1, \dots, i_{r-1}], [j_1, \dots, j_{r-1}] \in S_{r-1}^r$ telles que $[i_1, \dots, i_{r-2}] = [j_1, \dots, j_{r-2}]$ et $i_{r-1} \neq j_{r-1}$. Alors $\varepsilon([i_1, \dots, i_{r-1}]) + \varepsilon([j_1, \dots, j_{r-1}]) = 0$.

Preuve. On note respectivement $\varepsilon([i_1, \dots, i_{r-1}]) = (-1)^{n_i + m_i}$ et $\varepsilon([j_1, \dots, j_{r-1}]) = (-1)^{n_j + m_j}$ comme dans la définition de la signature. On peut supposer sans perte de généralité que $i_{r-1} < j_{r-1}$.

Comme $\{i_1,\dots,i_{r-2}\} = [\![1,r]\!] \setminus \{i_{r-1}, j_{r-1}\} = \{j_1,\dots,j_{r-2}\}$, on note alors n le nombre de transpositions nécessaires pour ordonner $[i_1,\dots,i_{r-2}]$ (et donc aussi $[j_1,\dots,j_{r-2}]$). On cherche alors le nombre de transpositions nécessaires pour replacer i_{r-1} et j_{r-1} et ainsi rendre la suite entière croissante. Pour simplifier, on suppose $[i_1,\dots,i_{r-2}]$ et $[j_1,\dots,j_{r-2}]$ déjà triée et on ajoutera n au calcul de n_i et n_j. Ce qu'il faut alors remarquer est que comme $i_{r-1} < j_{r-1}$, alors la suite croissante de tous les termes est en fait :

$$1 < \cdots < i_{r-1} < \cdots < j_{r-1} < \cdots < r$$

Ainsi, si on place les deux termes i_{r-1} et j_{r-1} en dernière position, il faut respectivement $r - i_{r-1}$ et $r - j_{r-1}$ transposition pour les replacer. Cependant, pour ce qui est de la première suite, j_{r-1} ne fait pas parti des termes et de fait une transposition de moins est nécessaire. Ceci donne alors $n_i = n + r - 1 - i_{r-1}$ et $n_j = n + r - j_{r-1}$.
Enfin, il est clair que $m_i = r - j_{r-1}$ et que $m_j = r - i_{r-1}$. On obtient donc $(n_j + m_j) - (n_j + m_j) = 1$ et donc que $\varepsilon([i_1,\dots,i_{r-1}]) = -\varepsilon([j_1,\dots,j_{r-1}])$. $\square$

Toujours dans la même contexte, on va maintenant s'intéresser au complexe de poset donné par l'ensemble des p-groupes abéliens élémentaires de H noté $\mathcal{A}_p(H)$ ordonné par l'inclusion. On note alors $\Delta(\mathcal{A}_p(H))$ le complexe associé à ce poset et le but dans un premier temps va être d'expliciter une chaîne particulière de $C_{r-1}(\Delta(\mathcal{A}_p(H));A)$ où A est un groupe abélien.
Pour ce faire, on définit pour toute suite $[i_1,\dots,i_l] \in S_l^r$ le l-simplexe :

$$\sigma_{[i_1,\dots,i_l]} = H_{[i_1,\dots,i_l]} < \cdots < H_{[i_1]} < H$$

Remarque. L'un des premières choses à remarquer est que :

$$\sigma_{[i_1,\dots,i_l]} = \sigma_{[j_1,\dots,j_l]} \iff [i_1,\dots,i_l] = [j_1,\dots,j_l]$$

Ceci permet alors de définir pour tout $a \in A$ la chaîne suivante :

$$Z_{H,a} = \sum_{[i_1,\dots,i_{r-1}] \in S_{r-1}^r} \varepsilon([i_1,\dots,i_{r-1}]) \cdot a \cdot \sigma_{[i_1,\dots,i_{r-1}]}$$

Proposition V.9. Pour tout $a \in A$, la différentielle de $Z_{H,a}$ vérifie :

$$\partial(Z_{H,a}) = (-1)^{r-1} \sum_{[i_1,\dots,i_{r-1}] \in S_{r-1}^r} \varepsilon([i_1,\dots,i_{r-1}]) \cdot a \cdot \tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]}$$

avec $\tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]} = H_{[i_1,\dots,i_l]} < \cdots < H_{[i_1]}$.

Preuve. On peut écrire $\partial = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \partial_k$ où les ∂_k vérifient pour toute suite $[i_1,\dots,i_{r-1}] \in S_{r-1}^r$:

$$\partial_k(\sigma_{[i_1,\dots,i_{r-1}]}) = H_{[i_1,\dots,i_{r-1}]} < \cdots < H_{[i_1,\dots,i_{r-k}]} < H_{[i_1,\dots,i_{r-2-k}]} < \cdots < H_{[i_1]} < H$$

On va alors montrer que pour tout $k \in [\![1, r-2]\!]$ on a $\partial_k(Z_{H,a}) = 0$. On commence en regardant le cas $k = 0$, on a alors :

$$\partial_0(\sigma_{[i_1,\ldots,i_{r-1}]}) = H_{[i_1,\ldots,i_{r-2}]} < \cdots < H_{[i_1]} < H$$

Ainsi, on remarque d'abord que :

$$\partial_0(\sigma_{[i_1,\ldots,i_{r-1}]}) = \partial_0(\sigma_{[j_1,\ldots,j_{r-1}]}) \iff [i_1, \ldots, i_{r-2}] = [j_1, \ldots, j_{r-2}]$$

Or lorsqu'on somme sur S^r_{r-1}, on peut d'abord choisir les $r-2$ premiers termes puis le dernier parmi les deux restants, ceci donne alors :

$$Z_{H,a} = \sum_{[i_1,\ldots,i_{r-2}] \in S^r_{r-2}} \varepsilon([i_1, \ldots, i_{r-2}, i]) \cdot a \cdot \sigma_{[i_1,\ldots,i_{r-2},i]} + \varepsilon([i_1, \ldots, i_{r-2}, j]) \cdot a \cdot \sigma_{[i_1,\ldots,i_{r-2},j]}$$

où i et j sont les deux termes différents des autres dans $\{1, \ldots, r\}$. On peut alors appliquer le lemme (V.8) qui donne que $\varepsilon([i_1, \ldots, i_{r-2}, i]) = -\varepsilon([i_1, \ldots, i_{r-2}, j])$ et donc que $\partial_0(Z_{H,a}) = 0$.
Pour ce qui est de $0 < k \leq r-2$, comme $k > 0$, alors on a bien $H_{[i_1,\ldots,i_{r-1}]} = H_{[j_1,\ldots,j_{r-1}]}$ donc $\{i_1, \ldots, i_{r-1}\} = \{j_1, \ldots, j_{r-1}\}$. De plus, d'après l'expression de ∂_k donnée plus tôt, on a alors que $\partial_k(\sigma_{[i_1,\ldots,i_{r-1}]}) = \partial_k(\sigma_{[j_1,\ldots,j_{r-1}]})$ si et seulement si les seuls termes qui diffèrent sont i_{r-k-1}, i_{r-k} et j_{r-k-1}, j_{r-k} et que $\{i_{r-k-1}, i_{r-k}\} = \{j_{r-k-1}, j_{r-k}\}$. Les deux suites ne diffèrent alors que d'une transposition et ont donc des signatures opposées. Par une séparation de la somme similaire à celle de ∂_0, on alors que $\partial_k(Z_{H,a}) = 0$.
On conclut alors que $\partial(Z_{H,a}) = \partial_{r-1}(Z_{H,a})$ qui correspond bien à l'expression attendue. □

V.3 Généralisation aux produits semi-directs

On a toujours $H = \mathbb{F}_p^r$ et on considère le produit semi-direct $G = K \rtimes H$ où K est un p'-groupe. De plus, on regarde maintenant $\mathcal{A}_p(G)$ et $C_{r-1}(\Delta(\mathcal{A}(G)); A)$ et le but est de définir, à la manière de ce qui précède, une chaîne particulière.
La première chose à faire est de choisir pour tout $S \in Syl_p(G)$ un élément $k_S \in K$ tel que $S = {}^{k_S}H$ et un élément $a_S \in A$. Ainsi, on définit :

$$Z_{S,a_S} = {}^{k_S}(Z_{H,a_S})$$

On veut alors bien que vérifier cette définition ne dépend pas du choix de k_S :

Lemme V.10. Soient $k_1, k_2 \in K$ tels que ${}^{k_1}H = {}^{k_2}H$ et $a \in A$. Alors ${}^{k_1}(Z_{H,a}) = {}^{k_2}(Z_{H,a})$

Preuve. Le résultat est direct si l'on montre que pour toute suite $[i_1, \ldots, i_{r-1}] \in S^r_{r-1}$, les simplexes ${}^{k_1}\sigma_{[i_1,\ldots,i_{r-1}]}$ et ${}^{k_2}\sigma_{[i_1,\ldots,i_{r-1}]}$ sont égaux.
Or pour tout $l \in [\![1, r-1]\!]$, en remarquant que $H_{[i_1,\ldots,i_l]}$ est un sous-groupe de H, on directement par le lemme (V.5) que ${}^{k_1}H_{[i_1,\ldots,i_l]} = {}^{k_2}H_{[i_1,\ldots,i_l]}$ car tous les deux inclus dans le même p-Sylow. De fait, les simplexes sont bien identiques. □

Ceci permet alors de définir pour une famille $a = (a_S)_{S\in Syl_p(G)}$ d'éléments de A et une famille $(k_S)_{S\in Syl_p(G)}$ d'éléments de K tels que ${}^{k_S}H = S$ la chaîne :

$$Z_{G,a} = \sum_{S\in Syl_p(G)} Z_{S,a_S}$$

On veut maintenant savoir à quelles conditions les éléments de cette forme sont des cycles :

Proposition V.11. Soit $a = (a_S)_{S\in Syl_p(G)}$ une famille de A, il existe $T \subset S^r_{r-1} \times Syl_p(G)$ tel que :

$$\partial(Z_{G,a}) = (-1)^{r-1} \sum_{([i_1,\dots,i_{r-1}],S)\in T} \varepsilon([i_1,\dots,i_{r-1}]) \cdot \left(\sum_{S'\in\mathcal{N}({}^{k_S}H_{[i_1]})} a_{S'} \right) \cdot {}^{k_S}\tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]}$$

où $\tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]} = H_{[i_1,\dots,i_l]} < \dots < H_{[i_1]}$

Preuve. Pour commencer, on remarque que $\partial(Z_{G,a}) = \sum_{S\in Syl_p(G)} \partial({}^{k_S}Z_{H,a})$ or par la proposition (V.9), on a directement que :

$$\partial({}^{k_S}Z_{H,a_S}) = (-1)^{r-1} \sum_{[i_1,\dots,i_{r-1}]\in S^r_{r-1}} \varepsilon([i_1,\dots,i_{r-1}]) \cdot a_S \cdot {}^{k_S}\tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]}$$

On va maintenant définir une relation d'équivalence sur $S^r_{r-1} \times Syl_p(G)$ donnée par :

$$([i_1,\dots,i_{r-1}],S) \sim ([j_1,\dots,j_{r-1}],S') \iff {}^{k_S}\tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]} = {}^{k_{S'}}\tau_{[j_1,\dots,j_{r-1}]}$$

Pour chaque classe d'équivalence, on choisit alors un unique représentant quelconque et on forme T l'ensemble de ces représentants.

Le but est alors maintenant de caractériser les différentes classes d'équivalence afin de retrouver la formule de la proposition. Soit $([i_1,\dots,i_{r-1}],S) \in T$ et soit $([j_1,\dots,j_{r-1}],S') \sim ([i_1,\dots,i_{r-1}],S)$, la première chose à remarquer est que ${}^{k_S}H_{[i_1]} = {}^{k_{S'}}H_{[j_1]} < {}^{k_{S'}}H$. On a alors ${}^{k_{S'}^{-1}k_S}H_{[i_1]} = H_{[j_1]} < H$ donc par le point 1. de la proposition (V.4), on a $H_{[i_1]} = H_{[j_1]}$. De la même façon, on a aisément que $H_{[i_1,\dots,i_l]} = H_{[j_1,\dots,j_l]}$ pour tout $1 \le l \le r-1$ donc on a nécessairement $[i_1,\dots,i_{r-1}] = [j_1,\dots,j_{r-1}]$. D'autre part, si $[i_1,\dots,i_{r-1}] = [j_1,\dots,j_{r-1}]$ et si ${}^{k_S}H_{[i_1]} < {}^{k_{S'}}H$ alors on a de nouveau que ${}^{k_{S'}^{-1}k_S}H_{[i_1]} < H$ donc toujours par le point 1. de la proposition (V.4), on a bien ${}^{k_S}H_{[i_1]} = {}^{k_{S'}}H_{[i_1]}$. Aussi, pour tout $l \in [\![1, r-1]\!]$, $H_{[i_1,\dots,i_l]}$ est un sous-groupe de $H_{[i_1]}$ donc ${}^{k_S}H_{[i_1,\dots,i_l]} < {}^{k_{S'}}H$. On a donc directement le même résultat que pour $H_{[i_1]}$ et donc ${}^{k_S}\tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]} = {}^{k_{S'}}\tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]}$. On a finalement :

$$([i_1,\dots,i_{r-1}],S) \sim ([j_1,\dots,j_{r-1}],S') \iff [i_1,\dots,i_{r-1}] = [j_1,\dots,j_{r-1}] \quad \text{et} \quad {}^{k_S}H_{[i_1]} < {}^{k_{S'}}H$$

Enfin, en remarquant que la signature est constante sur les classes d'équivalence, on a directement le résultat. □

Comme on a regroupé les termes en fonction des $\tau_{[i_1,\dots,i_{r-1}]}$, on en conclut directement que $Z_{G,a}$

est un cycle si et seulement si pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ et tout K-conjugué ${}^kH_{[i]}$ de $H_{[i]}$, on vérifie :

$$\sum_{S \in \mathcal{N}({}^kH_{[i]})} a_S = 0$$

De plus, s'il existe $S \in Syl_p(G)$ tel que $a_S \neq 0$, alors on a $Z_{G,a} \neq 0$.
Un cas particulier est lorsque pour tout $S \in Syl_p(G)$, on choisit $a_S = a \in A$. Ainsi, la chaîne $Z_{G,a}$ est un cycle si et seulement si pour tout $i \in [\![1,r]\!]$:

$$N(H_{[i]}) \cdot a = 0$$

On va maintenant se servir de cette étude pour caractériser une partie des cycles et donc une partie des classes d'homologies :

Définition V.3. Si un cycle de $C_{r-1}(\Delta(\mathcal{A}_p(G));A)$ est de la forme $Z_{G,a}$, alors on dit que $[Z_{G,a}]$ est une classe constructible de $\tilde{H}_{r-1}(|\mathcal{A}_p(K \rtimes H)|;A)$.

On peut alors aisément remarquer que les classes constructibles forment un sous-groupe de $\tilde{H}_{r-1}(|\mathcal{A}_p(K \rtimes H)|;A)$ noté $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(K \rtimes H)|;A)$ mais aussi que pour $r=1$, toutes les classes sont constructibles d'où $\tilde{H}^c_0(|\mathcal{A}_p(K \rtimes H)|;A) = \tilde{H}_0(|\mathcal{A}_p(K \rtimes H)|;A)$.

Corollaire V.12. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe. S'il existe r hyperplans indépendants $H_1, \dots, H_r$ et $D > 1$ qui divise $N(H_1), \dots, N(H_r)$, alors $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(G)|;\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}) \neq \{0\}$.

Preuve. Quitte à effectuer un changement de base, on peut supposer que $H_i = H_{[i]}$ pour $i \in [\![1,r]\!]$. On choisit alors $A = \mathbb{Z}/D\mathbb{Z}$ et $a = 1$ ainsi $Z_{G,a}$ est bien un cycle puisque $N(H_i) \cdot 1 = 0 \mod D$ par hypothèse. □

Corollaire V.13. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ agit fidèlement sur un q-groupe K pour un nombre premier $q \neq p$. Alors $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(G)|;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \neq \{0\}$.

Preuve. Par la proposition (V.7), il existe r hyperplans indépendants $H_1, \dots, H_r$ tels que pour tout i, $N(H_i) > 1$. De plus, par le point 2. de la proposition (V.4), on a $N(H_i) = C_K(I)/C_K(H)$. Or comme $C_K(I)$ est un sous-groupe de K, alors q divise $C_K(I)$ et donc $N(H_i)$ aussi. On conclut finalement avec le corollaire précédent. □

Afin d'obtenir un dernier corollaire intéressant pour notre étude, il faut remarquer que s'il l'on donne certaines propriétés à A, alors on obtient certains résultats intéressant. En effet, il est assez clair que pour que $Z_{G,a}$ soit un cycle, alors on doit obtenir une solution au système homogène donné par les équations de la forme :

$$\sum_{S \in \mathcal{N}({}^kH_{[i]})} a_S = 0$$

Ainsi, il est clair que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on doit vérifier autant d'équations que de conjugués de $H_{[i]}$, c'est à dire : $|K|/|C_K(H_{[i]})|$. Aussi on a autant de variables qu'il n'existe de p-Sylow de G et il suffit alors d'utiliser le point 2. de la proposition (V.4) avec $I = 1$ pour déterminer qu'il en

existe $|K|/|C_K(H)|$. Finalement on doit donc trouver une solution à un système de $\sum_{i=1}^{r}|K|/|C_K(H_{[i]})|$ équations à $|K|/|C_K(H)|$ inconnues.
Cette remarque sert alors lorsque l'on choisit pour A un anneau principal. En effet, le théorème de la base adaptée concernant les modules libres de type fini nous permet de dire que si l'on a dans notre système homogène moins d'équations que de variables, alors il existe au moins une solution non triviale. Ainsi, ce qu'il faut retenir pour le corollaire suivant est que :

$$\sum_{i=1}^{r}|K|/|C_K(H_{[i]})| < |K|/|C_K(H)| \iff \sum_{i=1}^{r} 1/N(H_{[i]}) < 1$$

Corollaire V.14. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ agit fidèlement sur un p'-groupe K dont l'ordre a pour décomposition en nombre premiers $|K| = q_1^{\delta_1} \dots q_l^{\delta_l}$. Si pour tout pour tout $i \in [\![1,l]\!]$, on a $r < q_i$ alors $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(G)|;\mathbb{Z}) \neq \{0\}$

Preuve. On peut supposer sans perte de généralités que $q_1 < \dots < q_l$ et donc l'hypothèse revient à $r < q_1$. On va alors utiliser ce qui précède afin de montrer qu'il existe un cycle de la forme $Z_{G,a}$ vu que $\mathbb{Z}$ est un anneau principal. De plus par la proposition (V.7), il existe $H_1,\dots,H_r$ des hyperplans de H tels que $N(H_i) > 1$. Aussi, quitte à effectuer un changement de base, on peut supposer que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a $H_i = H_{[i]}$. Le dernier argument vient du point 2. de la proposition (V.4) qui nous permet de dire que, comme $C_K(H_{[i]})$ est un sous-groupe de K, alors son ordre divise $|K|$ et donc $N(H_{[i]})$ aussi. On obtient ainsi que $N(H_{[i]}) \geq q_1$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, ce qui donne $\sum_{i=1}^{r} 1/N(H_{[i]}) \leq r/q_1 < 1$ et nous permet de conclure. □

Un outil de représentation du produit semi-direct d'un $p$groupe élémentaire abélien avec un p'-groupe utilise les graphe :

Définition V.4. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe. On définit alors $\mathcal{G}$ le graphe dont les sommets sont les K-conjugués de H et des $H_{[i]}$ et les arêtes les inclusions entre eux.

Exemple. Un exemple que l'on peut traiter est le cas du groupe $G = K \rtimes H = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{F}_2^2$ avec l'action de H sur K donnée par :

$$\forall (x_1,x_2) \in K, \quad (1,0)\cdot(x_1,x_2) = (-x_1,x_2) \text{ et } (0,1)\cdot(x_1,x_2) = (x_1,-x_2)$$

On pose alors les hyperplans $H_1 = H_{[1]} = 0 \times \mathbb{F}_2$ et $H_2 = H_{[2]} = \mathbb{F}_2 \times 0$.

$$\forall (x_1,x_2) \in K, \quad (1,0)\cdot(x_1,x_2) = (-x_1,x_2) \text{ et } (0,1)\cdot(x_1,x_2) = (x_1,-x_2)$$

Ceci permet alors d'expliciter rapidement les éléments de H conjugués par $k = (x_1,x_2) \in K$:[5]

$$^k((0,0),(0,0)) = ((0,0),(0,0)),\ ^k((0,0),(1,0)) = ((2x_1,0),(1,0))$$

5. On confond ici la notion de produit semi-direct interne et externe. Ainsi on a $K \simeq K \times 0$.

$$^k((0,0),(0,1)) = ((0,2x_2),(0,1)),\ ^k((0,0),(1,1)) = ((2x_1,2x_2),(1,1))$$

Ceci permet alors aisément de remarquer qu'il existe 9 K-conjugués de H et 6 K-conjugués issus des hyperplans. Ceci est d'ailleurs confirmé par le point 2. de la proposition (V.4) vu qu'il est facile de voir que $C_K(H_1) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times 0$, $C_K(H_2) = 0 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $C_K(H) = 0 \times 0$.
On note alors sur le graphe ci-dessous en majuscule les K-conjugués de H et en minuscule ceux des hyperplans. On fait aussi remarquer que par le point 1. de la proposition(V.4), les sommets des conjugués de H sont tous de degrés $r = 2$ et ceux des conjugués de $H_{[i]}$ tous de degrés $N(H_{[i]})$.
Enfin, une autre particularité de ce groupe est que H agit fidèlement sur K donc d'après les deux corollaire précédent, on a directement que $\tilde{H}_1^c(|\mathcal{A}_2(G)|;\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \neq \{0\}$ et $\tilde{H}_1^c(|\mathcal{A}_2(G)|;\mathbb{Z}) \neq \{0\}$.

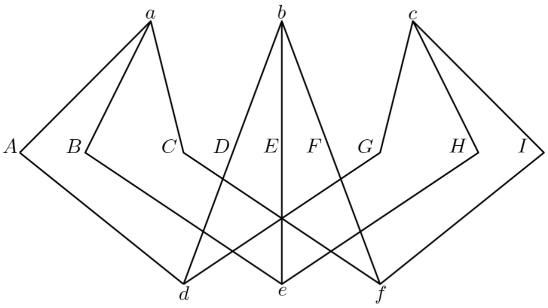


FIGURE 10 – Graphe associé au groupe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{F}_2^2$

V.4 D-systèmes

Avant d'étudier la conjecture de Quillen, on va conclure cette partie en introduisant la notion de D-système permettant de montrer quelques résultats nécessaire pour la suite :

Définition V.5. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe. Soit $\mathcal{S} \subset Syl_p(G)$ non vide. On pose alors pour tout $I \leq G$ l'ensemble $\mathcal{N}_\mathcal{S}(I) = \mathcal{S} \cap \mathcal{N}(I)$ et donc aussi $N_\mathcal{S}(I) = |\mathcal{N}_\mathcal{S}(I)|$.
Pour $D > 1$, on dit alors que $\mathcal{S}$ est un D-système de G si D divise $N_\mathcal{S}(^kH_{[i]})$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ et tout $k \in K$.

Théorème V.15. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe. S'il existe un D-système de G alors $\tilde{H}_{r-1}^c(|\mathcal{A}_p(G)|;\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}) \neq \{0\}$.

Preuve. Soit $\mathcal{S}$ un D-système de G et soit la famille $(a_S)_{S \in Syl_p(G)}$ de $\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}$ construite telle que $a_S = 1$ si $S \in \mathcal{S}$ et $a_S = 0$ sinon. Ainsi, la chaîne $Z_{G,a}$ est non triviale et on a aussi pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ et $k \in K$ que :

$$\sum_{S \in \mathcal{N}(^kH_{[i]})} a_S = N_\mathcal{S}(^kH_{[i]}) = 0 \mod D$$

Donc $Z_{G,a}$ est un cycle et donc $\tilde{H}_{r-1}^c(|\mathcal{A}_p(G)|;\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}) \neq \{0\}$. □

Lemme V.16. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe. Supposons qu'il existe pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ des éléments $c_i \in C_K(H_{[i]}) \setminus C_K(H)$ tels que pour tous i, j, on ait $c_ic_j = c_jc_i$. Alors l'ensemble $\mathcal{S} = \{^{c_1^{\delta_1} \dots c_r^{\delta_r}}H | \delta_i \in \{0,1\}\}$ est de cardinal 2^r.

Preuve. Il est clair qu'il suffit de montrer que tous les p-Sylow de $\mathcal{S}$ sont tous distincts. Supposons ${}^{c_1^{\delta_1}\dots c_r^{\delta_r}}H = {}^{c_1^{\delta_1'}\dots c_r^{\delta_r'}}H$ alors ${}^{c_1^{\delta_1-\delta_1'}\dots c_r^{\delta_r-\delta_r'}}H = H$ par hypothèse sur les c_i. Ainsi on pose $\varepsilon_i = \delta_i - \delta_i'$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$. Le but est alors de montrer que pour tout $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \in \{-1,0,1\}^r$, si ${}^{c_1^{\varepsilon_1}\dots c_r^{\varepsilon_r}}H = H$, alors $\varepsilon_i = 0$ pour tout i.

On suppose alors qu'il existe $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r) \in \{-1,0,1\}^r$ tel que ${}^{c_1^{\varepsilon_1}\dots c_r^{\varepsilon_r}}H = H$. Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ on considère un élément non trivial $h_i \in \bigcap\limits_{j\neq i} H_{[j]}$ de sorte que $H = \langle h_1,\dots,h_r\rangle$. De plus pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a $\bigcap\limits_{j\neq i} H_{[j]} \leq H$ donc par le point 1. de la proposition (V.4) que ${}^{c_1^{\varepsilon_1}\dots c_r^{\varepsilon_r}}\bigcap\limits_{j\neq i} H_{[j]} = \bigcap\limits_{j\neq i} H_{[j]}$. Or par hypothèse sur les c_j, on a directement que ${}^{c_1^{\varepsilon_1}\dots c_r^{\varepsilon_r}}\bigcap\limits_{j\neq i} H_{[j]} = {}^{c_i^{\varepsilon_i}}\bigcap\limits_{j\neq i} H_{[j]}$. Ainsi, il existe $h_i' \in \bigcap\limits_{j\neq i} H_{[j]}$ tel que $c_i^{\varepsilon_i}h_ic_i^{-\varepsilon_i} = h_i'$ d'où $\underbrace{h_i^{-1}c_i^{\varepsilon_i}h_i}_{\in K}c_i^{-\varepsilon_i} = h_i^{-1}h_i \in H$ donc $h_i' = h_i$. Ainsi on a ${}^{c_i^{\varepsilon_i}}h_i = h_i$.

Finalement, on a que s'il existe i_0 tel que $\varepsilon_i \neq 0$, alors par ce qui précède $c_{i_0}h_{i_0} = h_{i_0}c_{i_0}$. Or comme $H = \langle H_{[i_0]}, h_{i_0}\rangle$, on a donc que $c_{i_0} \in C_K(H)$ ce qui est absurde. Ceci montre alors que tous les ε_i sont nuls, ce qui conclut. $\square$

Théorème V.17. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe. Supposons qu'il existe pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ des éléments $c_i \in C_K(H_{[i]}) \setminus C_K(H)$ tels que pour tous i,j, on ait $c_ic_j = c_jc_i$. Alors il existe un 2-système de G et par conséquent $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(G)|;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq \{0\}$.

Preuve. On pose $\mathcal{S} = \{{}^{c_1^{\delta_1}\dots c_r^{\delta_r}}H | \delta_i \in \{0,1\}\}$ et on veut alors montrer qu'il s'agit d'un 2-système. Soient $i \in [\![1,r]\!]$ et $k \in K$, le but est alors de montrer que $N_{\mathcal{S}}({}^kH_{[i]})$ est pair.

Si $N_{\mathcal{S}}({}^kH_{[i]}) = 0$, alors c'est direct.Si $N_{\mathcal{S}}({}^kH_{[i]}) \geq 1$, alors il existe ${}^{c_1^{\delta_1}\dots c_r^{\delta_r}}H \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}({}^kH_{[i]})$.

On suppose dans un premier temps que $\delta_i = 0$, comme les c_j commutent avec c_i, alors on a :

$$^{c_i}({}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H) = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_ic_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}c_i}H$$

Donc par le corollaire (V.5), on a directement que :

$$^{c_i}({}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H_{[i]}) = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_ic_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H_{[i]} = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}c_i}H_{[i]}$$

Or comme $c_i \in C_K(H_{[i]})$, alors ${}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}c_i}H_{[i]} = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H_{[i]}$. Aussi, toujours par le corollaire (V.5), on a indépendamment de l'hypothèse $\delta_i = 0$ que :

$$^kH_{[i]} = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_r^{\delta_r}}H_{[i]} < {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_r^{\delta_r}}H$$

On a donc que finalement que $({}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_ic_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H) \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}({}^kH_{[i]})$.

De plus, on remarque que ce K-conjugué est différent de ${}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H$. En effet, s'ils étaient égaux, alors on aurait ${}^{c_i}H = H$, ie pour tout $h_1 \in H$, il existe $h_2 \in H$ tel que $c_1h_1c_1^{-1} = h_2$. On a alors $\underbrace{h_1^{-1}c_ih_1}_{\in K}c_i^{-1} = h_1^{-1}h_2 \in H$ donc $h_1^{-1}h_2 = 1 \iff h_1 = h_2$. On aurait donc $c_i \in C_K(H)$, ce qui est absurde par hypothèse.

On a donc montré que :

$$^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}(^kH_{[i]}) \Rightarrow {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_i \dots c_r^{\delta_r}}H \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}(^kH_{[i]})$$

De plus ces deux conjugués sont différents par ce qui précède.

Or pour le cas $\delta_i = 1$, c'est totalement similaire : on conjugue dès le départ par c_i^{-1}, on a alors par le même procédé que ce qui précède que :

$$^{c_1^{\delta_1}\dots c_i^{-1}c_i\dots c_r^{\delta_r}}H_{[i]} = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_ic_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}c_i^{-1}}H_{[i]} = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_ic_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H_{[i]}$$

Et donc toujours du fait que $^kH_{[i]} = {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_r^{\delta_r}}H_{[i]} < {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_r^{\delta_r}}H$, on a alors $(^{c_1^{\delta_1}\dots c_i^{-1}c_ic_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H) \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}(^kH_{[i]})$.

On a donc aussi que :

$$^{c_1^{\delta_1}\dots c_i\dots c_r^{\delta_r}}H \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}(^kH_{[i]}) \Rightarrow {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}(^kH_{[i]})$$

Finalement on a donc :

$$^{c_1^{\delta_1}\dots c_{i-1}^{\delta_{i-1}}c_{i+1}^{\delta_{i+1}}\dots c_r^{\delta_r}}H \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}(^kH_{[i]}) \iff {}^{c_1^{\delta_1}\dots c_i\dots c_r^{\delta_r}}H \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}(^kH_{[i]})$$

On peut alors conclure avec le lemme précédent, vu que tous les p-Sylow sont distincts, que $N_{\mathcal{S}}(^kH_{[i]})$ est pair. □

Corollaire V.18. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ agit fidèlement sur un p'-groupe abélien K. Alors il existe un 2-système de G et par conséquent $\tilde{H}_{r-1}^c(|\mathcal{A}_p(G)|;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq \{0\}$.

Preuve. Par la proposition (V.7), il existe r hyperplans indépendant $H_1,\dots,H_r$ tels que $N(H_i) > 1$ pour tout i. Par un changement de base adapté, on peut avoir pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ que $H_i = H_{[i]}$. On rappelle alors que $N(H_i) = |C_K(H_{[i]})|/|C_K(H)|$ et donc, comme $N(H_i) > 1$ pour tout i, alors pour tout i, il existe $c_i \in C_K(H_i)\setminus C_K(H)$. De plus comme K est abéliens, tous les c_i commutent donc on valide toutes les hypothèses de la proposition précédente, ce qui conclut. □

Théorème V.19. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe. Soient $N \trianglelefteq K$ un sous-groupe distingué H-invariant de K et $\overline{G} = G/N$. Pour tout classe $[Z_{\overline{G},\overline{a}}] \in \tilde{H}_{r-1}^c(|\mathcal{A}_p(\overline{G})|;A)$, on peut remonter à une classe $[Z_{G,a}] \in \tilde{H}_{r-1}^c(|\mathcal{A}_p(G)|;A)$.

Remarque. L'important à retenir du théorème ci-dessus est que si $\tilde{H}_{r-1}^c(|\mathcal{A}_p(\overline{G})|;A)$ est non trivial, alors $\tilde{H}_{r-1}^c(|\mathcal{A}_p(G)|;A)$ ne l'est pas non plus. Or il est parfois plus facile de travailler avec le groupe $\overline{G}$ plutôt que G.

Preuve. On considère la projection $\pi : G \longrightarrow \overline{G}$. Vu que N est un sous-groupe de K alors il clair que π induit une application surjective $\tilde{\pi} : Syl_p(G) \longrightarrow Syl_p(\overline{G})$.

Soit $\pi(S) \in Syl_p(G)$, on veut premièrement montrer que $\tilde{\pi}^{-1}(\pi(S)) = \{{}^nS \mid n \in N\}$. Il est clair que comme $\mathrm{Ker}(\pi) = N$, alors pour tout $n \in N$, alors $\pi({}^nS) = \pi(S)$. Pour l'autre inclusion on considère dans un premier temps $S = H$. Soit alors ${}^kH$ un autre p-Sylow tel que $\pi({}^kH) = \pi(H)$. Or vu que π est un morphisme, on a $\pi({}^kH) = {}^{\pi(k)}\pi(H)$. Ainsi, si on note $\overline{H} = \pi(H)$ on a ${}^{\pi(k)}\overline{H} = \overline{H}$. Or on rappelle $\overline{H}$ est un p-Sylow de K/N et on a déjà vu de nombreuses fois que dans ce contexte, lorsque un élément normalise un p-Sylow, alors il le centralise : $k \in C_{K/N}(\overline{H})$.
Or on peut aisément voir que $\overline{H} = HN/N$. De plus, on rappelle qu'il y a deux points de vu pour le centralisateur : $C_{K/N}(HN/N)$ correspond au point de vu des éléments de K/N qui commutent avec tous ceux de HN/N alors que $C_{K/N}(H)$ correspond aux point fixe de l'action de H sur K/N. Cependant, ces deux notions coïncident donc $C_{K/N}(HN/N) = C_{K/N}(H)$ et par le point 3. de la proposition (V.4), on a alors $C_{K/N}(\overline{H}) = C_K(H)N/N$.
Ainsi, on a alors $\pi(k) \in C_K(H)N/N$ d'où $k \in C_K(H)N$. On conclut alors en écrivant $k = k_0n$ avec $k_0 \in C_K(H)$ et $n \in N$ et en remarquant que N et H-invariant que :

$${}^kH = {}^{k_0n}H = {}^{k_0nk_0^{-1}kk_0}H = {}^{n'}H \text{ avec } n' = k_0nk_0^{-1} \in N$$

Ceci nous donne alors l'autre inclusion, ce qui confirme que $\tilde{\pi}^{-1}(\pi(S)) = \{{}^nS \mid n \in N\}$.
Sachant que dans nos hypothèse, on a une famille $\overline{a} = (\overline{a}_{\overline{S}})_{\overline{S} \in Syl_p(\overline{G})}$, on considère la famille d'éléments de A donnée par $a = (a_S)_{S \in Syl_p(G)}$ où $a_S = \overline{a}_{\pi(S)}$. On considère alors ${}^kH_{[i]}$ pour $k \in K$ et $i \in [\![1, r]\!]$, on veut maintenant montrer que $\tilde{\pi}(\mathcal{N}({}^kH_{[i]})) = \mathcal{N}({}^{\pi(k)}\pi(H_{[i]}))$.
L'inclusion directe est claire. Pour ce qui est du sens indirect, on considère $S \in Syl_p(G)$ tel que ${}^{\pi(k)}\pi(H_{[i]}) \subset \pi(S)$. Or ${}^{\pi(k)}\pi(H_{[i]}) = \pi({}^kH_{[i]})$ d'où ${}^kH_{[i]}N \subset SN$. Aussi ${}^kH_{[i]}$ est un p-sous-groupe de SN donc contenu dans p-Sylow de SN, c'est-à-dire un conjugué de S dans SN. Soient $s \in S$ et $n \in N$ tels que ${}^{sn}({}^kH_{[i]}) \subset S$,[6] on a alors :

$${}^kH_{[i]} \subset {}^{n^{-1}s^{-1}}S = {}^kH_{[i]} \subset {}^{n^{-1}}S \in \tilde{\pi}^{-1}(\pi(S)) \text{ par ce qui précède.}$$

Enfin, on rappelle alors que le but est de montrer que $\displaystyle\sum_{S \in \mathcal{N}({}^kH_{[i]}} a_S = 0$, aussi on sépare la somme tel :

$$\sum_{S \in \mathcal{N}({}^kH_{[i]})} a_S = \sum_{\pi(S) \in \mathcal{N}({}^{\pi(k)}\pi(H_{[i]}))} \; \sum_{S' \in \mathcal{N}({}^kH_{[i]}) \cap \tilde{\pi}^{-1}(\pi(S))} \overline{a}_{\pi(S)}$$

Cependant, on remarque que $\mathcal{N}({}^kH_{[i]}) \cap \tilde{\pi}^{-1}(\pi(S)) = \{{}^nS \mid n \in N \cap C_K({}^kH_{[i]})\}$ par ce qui précède. On a ainsi que le cardinal de cet ensemble est $m_S = |C_N({}^kH_{[i]})|/|C_N(S)|$.
On veut alors montrer que pour tout $S \in \mathcal{N}({}^kH_{[i]})$, les m_S sont égaux. Pour ce faire, soient $S_1, S_2 \in Syl_p(G)$ et soit $n \in C_N(S_1)$. Premièrement, on sait qu'il existe $k \in K$ tel que ${}^kS_1 = S_2$. Soit $s_2 \in S_2$,

6. En vérité, on devrait écrire ${}^kH_{[i]} \subset {}^{sn}S$ et donc ${}^{n^{-1}s^{-1}}({}^kH_{[i]}) \subset S$. Cependant, SN étant un groupe (vu que N est distingué), il existe $n' \in N$ et $s' \in S$ tels que $s'n' = n^{-1}s^{-1}$

il existe alors $s_1 \in S_1$ tel que $s_2 = ks_1k^{-1}$ et ainsi :

$$knk^{-1}s_2 = knk^{-1}ks_1k^{-1} = kns_1k^{-1} = ks_1nk^{-1} = ks_1k^{-1}knk^{-1} = s_2knk^{-1}$$

Donc $n \in C_N(S_1) \Rightarrow knk^{-1} \in C_N(S_2)$. Or la conjugaison étant bijective, on a directement que $|C_N(S_1)| = |C_N(S_2)|$. Finalement, pour tout $S \in \mathcal{N}({}^kH_{[i]})$, les m_S sont égaux à un certain $m \geq 1$, ce qui donne donc :

$$\sum_{S \in \mathcal{N}({}^kH_{[i]})} a_S = m \cdot \left(\sum_{\pi(S) \in \mathcal{N}({}^{\pi(k)}\pi(H_{[i]}))} \overline{a}_{\pi(S)} \right) = 0$$

L'expression est bien nulle par ce qui précède et d'après l'hypothèse que $Z_{\overline{G},\overline{a}}$ est un cycle. Ainsi on obtient bien le résultat attendu : $Z_{G,a}$ est un cycle non trivial. □

VI Conjecture de Quillen

VI.1 Réciproque de la conjecture

Même si la conjecture de Quillen n'est toujours pas certaine, sa réciproque a été prouvée depuis longtemps. L'une des preuves, qui est celle que l'on va traitée ici, est donnée par Quillen lui-même et traitée dans [1].

Pour commencer on rappelle que pour un groupe G, la notation $\mathcal{A}_p(G)$ désigne l'ensemble des p-sous-groupes élémentaires abéliens non triviaux de G. On considère aussi $\zeta_p(G)$ l'ensemble des p-sous-groupes non triviaux de G de sorte que $\mathcal{A}_p(G) \subset \zeta_p(G)$.

Définition VI.1. Soient deux posets X et Y, on dit que $f : X \longrightarrow Y$ est une application de posets si pour tous $x, x' \in X$, si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$.

Remarque. Si X et Y sont deux posets, alors on définit une relation d'ordre dite naturelle sur $X \times Y$:

$$(x,y) \leq (x',y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

Lemme VI.1. Soient X, Y deux posets, on vérifie que $|X \times Y| \simeq |X| \times |Y|$.

Preuve. Ce homéomorphisme est directement induit par les projections sur X et sur Y qui sont des applications de posets. □

Proposition VI.2. Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications de posets telles que pour tout $x \in X$, on a $f(x) \leq g(x)$. Alors les applications continues associées $|f|$ et $|g|$ sont homotopes.

Preuve. On considère le poset $X \times \{0 < 1\}$ muni de sa relation d'ordre naturelle et l'application $H : X \times \{0 < 1\} \longrightarrow Y$ définie telle que pour tout $x \in X$:

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad H(x,1) = g(x)$$

On veut alors vérifier que H est bien une applications de posets. Soient $(x,\delta),(x',\delta') \in X \times \{0<1\}$ tels que $(x,\delta) \leq (x',\delta')$, c'est-à-dire que $x \leq x'$ et $\delta \leq \delta'$.
Si $\delta < \delta'$, alors on a $\delta = 0$ et $\delta' = 1$. Ainsi on vérifie par hypothèse :

$$H(x,\delta) = f(x) \leq g(x) \leq g(x') = H(x',\delta')$$

Si $\delta = \delta'$, alors on peut supposer sans perte de généralités que $\delta = 0$ et on vérifie donc :

$$H(x,\delta) = f(x) \leq f(x') = H(x',\delta')$$

H est donc bien une application de posets et elle induit alors un application continue :

$$|H| : |X \times \{0<1\}| \longrightarrow |Y|$$

Or on rappelle que $|X \times \{0<1\}| \simeq |X| \times |\{0<1\}| = |X| \times [0,1]$. On conclut qu'il existe effectivement une homotopie entre $|f|$ et $|g|$. □

Lemme VI.3. Pour un poset X, s'il existe $x_0 \in X$ et une application de posets $f : X \longrightarrow X$ tels que $x \leq f(x) \geq x_0$ pour tout $x \in X$, alors X est contractile. On dira alors que X est canoniquement contractile.

Preuve. La relation vérifiée par hypothèse nous donne directement que f, Id_X et l'application constante en x_0 vérifient les hypothèses de la proposition précédente. On a alors les homotopies associées, ce qui conclut directement. □

Définition VI.2. Soient X et Y deux posets et $f : X \longrightarrow Y$ une application de posets. Soit $y \in Y$, on définit :

$$f/y = \{x \in X \mid f(x) < y\}$$

$$y \backslash f = \{x \in X \mid f(x) > y\}$$

Remarque. Il est assez clair que par hypothèse sur la fonction f, les ensemble f/y et $y\backslash f$ forment de nouveaux posets.

Lemme VI.4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application de posets. Si pour tout $y \in Y$, le poset f/y ou $y\backslash f$ est contractile, alors f induit une équivalence homotopique.

Preuve. La preuve de ce lemme apparaît dans [1] et nécessite une connaissance de la théorie des catégories. □

Lemme VI.5. Si P est un p-groupe non trivial, alors $|\mathcal{A}_p(G)|$ est contractile.

Preuve. On considère le sous-groupe de P défini par $B = \{x \in Z(G) \mid o(x) = 1 \text{ ou } p\}$.
Premièrement, comme P est un p-groupe, alors son centre $Z(G)$ est non trivial. Aussi, p divise $|Z(G)|$ donc par Cauchy, il existe un élément d'ordre p dans $Z(G)$ et donc que B est non trivial.
Finalement, B est un p-sous-groupe élémentaire de P tel que pour tout $A \in \mathcal{A}_p(P)$ on vérifie que AB est un groupe tel que $A \leq AB \geq B$ donc par le lemme (VI.3), $\mathcal{A}_p(P)$ est contractile. □

Proposition VI.6. Soit G un groupe, l'inclusion $\mathcal{A}_p(G) \subset \zeta_p(G)$ induit une équivalence homotopique.

Preuve. Si on note i cette inclusion, il est clair qu'il s'agit d'une application de posets. Aussi par le lemme (VI.4), il suffit de montrer que $|i/P|$ est contractile pour tout $P \in \zeta_p(G)$. Cependant :

$$i/P = \{H \in \mathcal{A}_p(G) \,|\, H = i(H) \leq P\} = \mathcal{A}_p(P)$$

Ainsi comme tout $P \in \zeta_p(G)$ est un p-groupe non trivial, par le lemme précédent on vérifie que $|\mathcal{A}_p(P)|$ est contractile. $\square$

Maintenant que l'on a montré tous ces résultats préliminaires, on peut directement s'intéresser à la réciproque de la conjecture de Quillen :

Proposition VI.7. Si $O_p(G) \neq 1$, alors $|\mathcal{A}_p(G)|$ est contractile.

Preuve. Comme l'inclusion $\mathcal{A}_p(G) \subset \zeta_p(G)$ induit une équivalence homotopique, alors il suffit de vérifier que $|\zeta_p(G)|$ est contractile.
La chose à remarquer est alors que $O_p(G)$ est un p-sous-groupe distingué non trivial de G. Aussi pour tout $P \in \zeta_p(G)$, on a alors que $PO_p(G)$ est un groupe tel que $P \leq PO_p(G) \geq O_p(G)$ donc $\zeta_p(G)$ est contractile par le lemme (VI.3). $\square$

VI.2 Résultats préliminaires

Pour l'étude de la conjecture, il nous sera nécessaire de manipuler des groupes résolubles, nilpotents et des sous-groupes dits caractéristiques, nous allons alors en rappeler les définitions et donner quelques propriétés qui seront nécessaires.

Définition VI.3. Soit G un groupe, on dit qu'un sous-groupe H est caractéristique si pour tout $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, on vérifie $\psi(H) = H$.

Lemme VI.8. Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué dans G, alors si K est un sous-groupe caractéristique de H, il est distingué dans G.

Preuve. On considère un automorphisme de conjugaison par un élément $g \in G$ noté $\psi_g : G \longrightarrow G$. Comme H est distingué, on a alors $\psi_g(H) = H$ donc cet automorphisme induit $\psi'_g \in \mathrm{Aut}(H)$. Or K est caractéristique dans H donc $\psi'_g(K) = \psi_g(K) = K$ ce qui donne directement que K est distingué dans G. $\square$

Définition VI.4. Soit G un groupe, on définit son groupe dérivé $D(G)$ comme le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ pour $x, y \in G$.
Aussi, on définit par récurrence la suite $D^n(G)$ par $D^0(G) = G$ et $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$. On dit alors que G est résoluble s'il existe $n \geq 0$ tel que $D^n(G) = 1$.

Proposition VI.9. Soit G un groupe résoluble, alors :

- Tout sous-groupe de G est résoluble.
- L'image de G par un morphisme de groupes est un groupe résoluble.

- Pour tout sous-groupe distingué H de G, le groupe quotient G/H est résoluble.

Preuve. Pour le premier point, il suffit de remarquer que pour tout groupe G et sous-groupe H, les commutateurs de H sont aussi des commutateurs de G. Aussi, on a directement que $D(H) \leq D(G)$ et il s'ensuit que pour tout $n \geq 0$, $D^n(H) \leq D^n(G)$. Finalement, si G est résoluble, il est alors clair que H l'est aussi.
Pour le deuxième point, on se donne un morphisme de groupes surjectif $f : G \longrightarrow G'$. Pour tous $x', y' \in G'$, il existe $x, y \in G$ tels que $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$. Ainsi $[x', y'] = [f(x), f(y)] = f([x, y])$. On en conclut que $D(G') \leq f(D(G))$ et donc si G est résoluble, comme $f(1) = 1$, on a bien que G' est résoluble.
Le dernier point découle directement du point précédent pour le morphisme de projection sur G/H. □

Lemme VI.10. Si G est un groupe fini résoluble, si N est un sous-groupe normal minimal de G, alors N est un groupe abélien élémentaire.

Définition VI.5. Soit G un groupe, si A et B sont deux sous-groupes de G, on note $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $[x, y]$ pour $x \in A$ et $y \in B$.
Aussi, on définit par récurrence la suite $C^n(G)$ par $C^1(G) = G$ et $C^{n+1}(G) = [G, C^n(G)]$. On dit alors que G est nilpotent s'il existe $n \geq 1$ tel que $C^n(G) = 1$.

Remarque. Pour un groupe nilpotent G, son ordre de nilpotence est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $C^{n+1} = 1$

Proposition VI.11. Soit G un groupe nilpotent, alors :

- Tout sous-groupe de G est nilpotent.
- L'image de G par un morphisme de groupes est un groupe nilpotent.
- Pour tout sous-groupe distingué H de G, le groupe quotient G/H est nilpotent.

Preuve. La preuve est similaire à celle des groupes résolubles. □

Proposition VI.12. Tout groupe nilpotent est résoluble.

Preuve. On admet ce résultat. Celui-ci se montre plutôt bien par récurrence en admettant le fait que $[C^n(G), C^m(G)] \leq C^{n+m}(G)$ pour tous entiers $n, m \geq 1$. Cependant, ce dernier résultat est plus compliqué à montrer (voir [6]). □

Lemme VI.13. Soit G un groupe nilpotent non trivial, alors $Z(G) \neq 1$.

Preuve. Soit n l'ordre de nilpotence de G et sa suite de sous-groupe associée :

$$G = C^1(G) \trianglerighteq C^2(G) \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq C^n(G) \trianglerighteq C^{n+1}(G) = 1$$

Comme $G \neq 1$, alors $n > 0$ et par définition de l'ordre de nilpotence, on a $C^n(G) \neq 1$. Aussi, $C^{n+1}(G) = [C^n(G), G] = 1$ donc pour tout $g \in G$ et tout $h \in C^n(G)$, on vérifie que $gh = hg$ d'où $C^n(G) \leq Z(G)$. Ceci donne donc directement que $Z(G) \neq 1$. □

Proposition VI.14. Soit G un groupe simple nilpotent, alors G est abélien.

Preuve. Si G est trivial, il n'y a rien à montrer.
Si $G \neq 1$, le sous-groupe $Z(G)$ est distingué dans G donc $Z(G) = 1$ ou $Z(G) = G$ car G simple. Aussi, par le lemme précédent, $Z(G) \neq 1$ donc $Z(G) = G$ et G est abélien. □

Proposition VI.15. Un sous-groupe G est nilpotent si et seulement si $G/Z(G)$ est nilpotent.

Preuve. Si G est trivial, il n'y a rien à montrer.
Si $G \neq 1$, le sens direct vient du fait que tout quotient d'un groupe nilpotent est nilpotent.
Pour la réciproque, on pose $G^* = G/Z(G)$ et on suppose alors G^* nilpotent donc on a la suite de sous-groupes suivante :

$$G^* = C^1(G^*) \trianglerighteq C^2(G^*) \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq C^n(G^*) \trianglerighteq C^{n+1}(G^*) = 1$$

Par la bijection entre les sous-groupes de G^* et ceux de G contenant $Z(G)$, il existe une suite de sous-groupes de G :

$$G = H_1 \geq H_2 \geq \cdots \geq H_n \geq H_{n+1} = Z(G)$$

On veut alors montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $C^k(G) \leq H_k$.
Pour $k = 1$, on vérifie bien ce que l'on veut vu que $H_1 = G = C^1(G)$.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$, on suppose que $C^{k-1}(G) \leq H_{k-1}$. On rappelle que $C^k = [C^{k-1}(G), G]$ et on note π la projection de G sur G^*. Soient $x \in C^{k-1}(G)$ et $y \in G$, on a alors $\pi(xyx^{-1}y^{-1}) = \pi(x)\pi(y)\pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1}$. Comme $x \in C^{k-1}(G)$, alors par hypothèse de récurrence, $x \in H_{k-1}$ et donc $\pi(x) \in C^{k-1}(G^*)$. Aussi $\pi(y) \in G^*$ donc finalement, on vérifie que $\pi(xyx^{-1}y^{-1}) \in C^k(G^*)$ et donc $xyx^{-1}y^{-1} \in H_k$, ce qui conclut la récurrence. Enfin, il suffit de remarquer que $[C^{n+1}(G), G] \leq [H_{n+1}, G] = [Z(G), G] = 1$ d'où G est nilpotent. □

Lemme VI.16. Tout p-groupe est nilpotent.

Preuve. Soit G un p-groupe, on note $|G| = p^n$ pour $n \geq 0$. On procède alors par récurrence forte sur n.
Pour $n = 0$, il est clair que $G = 1$ est nilpotent.
Pour l'hérédité, soit $n \geq 1$, on suppose que pour tout entier $k < n$, un p-groupe d'ordre p^k est nilpotent. Aussi, soit G un groupe d'ordre p^n, on vérifie que $Z(G) \neq 1$ et donc $G/Z(G)$ est un p-groupe d'ordre p^k avec $k < n$ et donc par hypothèse de récurrence, celui-ci est nilpotent. Donc par la proposition précédente, G est donc aussi nilpotent, ce qui conclut. □

Théorème VI.17. Soit G un groupe fini, on a équivalence des assertions suivantes :

1. G est nilpotent.
2. Pour tout sous-groupe propre $H < G$, on vérifie que $H < N_G(H)$.
3. Tout sous-groupe maximal de G est distingué dans G.
4. Tout sous-groupe de Sylow de G est distingué dans G. En particulier, d'après le théorème de Sylow, ceux-ci sont uniques.

5. G est produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : On note $|G| = n$ l'ordre de G et on procède par récurrence forte sur n :
n = 1 : Il est clair que dans ce cas $H = 1$ et donc de fait $N_G(H) = G$.
Hérédité : On suppose alors l'hypothèse vraie pour tout entier naturel inférieur à $n \in \mathbb{N}$. Aussi, on suppose que $|G| = n+1$ et soit $H < G$. On a alors deux cas à traiter :
Soit $Z(G)$ n'est pas inclus dans H. Dans ce cas, comme $Z(G) \leq N_G(H)$, alors on a bien $N_G(H) \neq H$.
Soit $Z(G) \leq H$ et alors on considère le groupe quotient $G/Z(G)$. Ainsi, comme $Z(G)$ est non trivial, vu que G est nilpotent, alors $|G/Z(G)| < n$. De plus, par quotient de groupes, on vérifie que $G/Z(G)$ est nilpotent. On pose H^* l'image de H dans $G/Z(G)$. Par la bijection entre les sous-groupes de $G/Z(G)$ et ceux de G contenant $Z(G)$, on a que H^* est sous-groupe propre de $G/Z(G)$ et donc par donc hypothèse de récurrence, on pose $N^* = N_{G/Z(G)}(H^*)$ de sorte que $H^* < N^*$. Ainsi, toujours par la bijection entre les sous-groupes de $G/Z(G)$ et ceux de G contenant $Z(G)$, on a alors qu'il existe un sous-groupe N de G tel que H soit normal dans N et $H \neq N$ puisque H^* est normal dans N^*. Ceci donne alors que $H \neq N_G(H)$, ce qui termine la récurrence.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Soit H un sous-groupe maximal de G. Par hypothèse, $H < N_G(H)$ donc par maximalité de H, on a nécessairement $N_G(H) = G$ et donc que H est distingué dans G.
(3) $\Rightarrow$ (4) : Soit S un p-Sylow pour un nombre premier p. Supposons que $N_G(S) < G$, il existe alors M un sous-groupe maximal de G tel que $N_G(S) \leq M$. Soit $g \in G$, on a $S \leq M$ donc comme M est maximal, il est distingué dans G et donc $gSg^{-1} = S' \leq gMg^{-1} = M$.
S et S' sont donc deux p-Sylow de M et il existe donc $h \in M$ tel que $S' = hSh^{-1}$. On vérifie donc $h^{-1}gSg^{-1}h = S$ et donc $h^{-1}g \in N_G(S) \leq M$. Finalement, comme $h \in M$, alors $g \in M$ et donc $M = G$. On a donc une contradiction vu que M est maximal et donc $N_G(S) = G$ et S est distingué.
(4) $\Rightarrow$ (5) : On note $P_1, \ldots, P_s$ les sous-groupes de Sylow de G associés aux nombres premiers $p_1, \ldots, p_s$. On rappelle que si deux sous-groupes H, K de G vérifient que H et K sont distingués dans G et que $H \cap K = 1$ alors $HK \simeq H \times K$.
Aussi on procède par récurrence : soit $1 \leq t \leq s-1$, on suppose que $P_1 \ldots P_t \simeq P_1 \times \cdots \times P_t$ et on veut montrer que $P_1 \ldots P_{t+1} \simeq P_1 \times \cdots \times P_{t+1}$. On pose alors $H = P_1 \ldots P_t$ et $K = P_{t+1}$. Soit $g \in H \cap K$, on a $o(g) | |K|$ et $o(g) | p_{t+1}$ par Lagrange. Or par hypothèse de récurrence, $|H| = |P_1| \ldots |P_t| = p_1 \ldots p_t$ donc $o(g) = 1$ et $g = 1$. On applique alors la proposition rappelée précédemment donc $P_1 \ldots P_{t+1} = HK \simeq H \times K \simeq P_1 \times \cdots \times P_{t+1}$, ce qui termine la récurrence.
On conclut alors en prenant $t = s$ ce qui donne $G = P_1 \ldots P_s \simeq P_1 \times \cdots \times P_s$.
(5) $\Rightarrow$ (1) : Ce point découle directement du lemme précédent. En effet, comme tous les sous-groupes de Sylow sont des p-groupes, alors chacun d'eux est nilpotent et donc G est nilpotent. $\square$

Définition VI.6. Soit G un groupe, on définit les sous-groupes suivants :

- $F(G)$ est le plus grand sous-groupe distingué nilpotent de G et appelé sous-groupe de Fitting.
- $O_\infty(G)$ est le plus grand sous-groupe distingué résoluble de G.
- $\phi(G)$ est l'intersection des sous-groupes maximaux de G et appelé sous-groupe de Frattini.

Proposition VI.18. Les sous-groupes $F(G), O_\infty(G)$ et $\phi(G)$ sont caractéristiques.

Preuve. Soit $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, on a premièrement que $\psi(F(G))$ est distingué et nilpotent. Ainsi, on a par définition de $F(G)$ que $\psi(F(G)) \subset F(G)$ et donc que $F(G) \subset \psi^{-1}(F(G))$. Or comme $\psi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$, alors on a $F(G) \subset \psi^{-1}(F(G)) \subset F(G)$ d'où $\psi(F(G)) = F(G)$.
Deuxièmement, on a aussi que $\psi(O_\infty(G))$ est distingué et résoluble donc par le même procédé que pour $F(G)$, on conclut que $\psi(O_\infty(G)) = O_\infty(G)$.
Enfin, soit H un groupe maximal, on suppose qu'il existe un sous-groupe K de G tel que $\psi(H) \subset K \subsetneq G$. Ainsi on a $H \subset \psi^{-1}(K) \subsetneq G$ et donc par maximalité de H : $H = \psi^{-1}(K)$. Donc $\psi(H)$ est bien maximal ce qui permet de conclure que $\psi(\phi(G)) = \phi(G)$. □

Lemme VI.19. Soit G un groupe nilpotent, alors son quotient de Frattini $G/\phi(G)$ est abélien.

Preuve. Il est clair que si le groupe dérivé de G est inclus dans $\phi(G)$, alors le quotient de Frattini est bien abélien.
Soit M un sous-groupe maximal de G, alors celui-ci est distingué dans G par le point 3. de la proposition précédente. Aussi, on a alors directement que G/M est un groupe simple mais aussi nilpotent. Donc par la proposition (VI.14), celui-ci est abélien.
Enfin, G/M étant abélien, alors $D(G) \leq M$ donc comme ceci est vérifier pour tout sous-groupe maximal, en particulier $D(G) \leq \phi(G)$. □

Proposition VI.20. Soit G un groupe fini, alors $F(G)$ est le produit direct des $O_p(G)$ pour p divisant $|G|$.

Preuve. Ce résultat provient directement du point 3. de la proposition (VI.17). En effet, le produit des $O_p(G)$ est effectivement un groupe nilpotent et distingué dans G donc inclus dans $F(G)$. Cependant, si cette inclusion est stricte, alors il existe un p tel que $O_p(G)$ ne soit pas un p-Sylow de $F(G)$. Or ceci induit qu'il existe un p-groupe de G plus grand que $O_p(G)$, ce qui est absurde. □

Remarque. Les techniques utilisées pour montrer que des sous-groupes maximaux sont caractéristiques s'appliquent aussi aux sous-groupes minimaux. En particulier, il est clair le sous-groupe distingué minimal d'un groupe est caractéristique.

Proposition VI.21. Soient G un groupe et H un sous-groupe caractéristique de G, alors $C_G(H)$ est caractéristique.

Preuve. Soient $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ et $g \in C_G(H)$. Pour tout $h \in H$, il existe $h' \in H$ tel que $\psi(h') = h$ d'où

$$\psi(g)h = \psi(gh') = \psi(h'g) = h\psi(g)$$

On a donc bien $\psi(C_G(H)) = C_G(H)$. □

VI.3 Étude de la conjecture

Premièrement on rappelle la conjecture de Quillen :

Conjecture (Quillen ($\mathcal{QC}$))**.** Si $|\mathcal{A}_p(G)|$ est contractile, alors $O_p(G) \neq 1$.

On va maintenant prouver que cette conjecture est vraie pour certains groupes G. Pour ce faire, on va d'abord définir la notion de dimension de Quillen puis utiliser les nombreux résultats que l'on a démontré au cours des dernières parties.

Définition VI.7. Soit G un groupe fini de p-rang r. On dit que G a une dimension de Quillen en p s'il vérifie :

$$O_p(G) = 1 \Rightarrow \tilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) \neq \{0\}$$

Ainsi, si un groupe G possède une dimension de Quillen en p on dira qu'il vérifie $(\mathcal{QD}_p)$ qui correspond à la condition ci-dessus. Ceci dit on peut donner une première proposition très simple :

Proposition VI.22. Soit G un groupe qui vérifie la condition $(\mathcal{QD}_p)$, alors G vérifie $(\mathcal{QC})$.

Preuve. La contraposée de $(\mathcal{QD}_p)$ nous donne que si $\tilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) = \{0\}$, alors $O_p(G) \neq 1$. Or par le corollaire (III.14), si $|\mathcal{A}_p(G)|$ est contractile, alors $\tilde{H}_{r-1}(\mathcal{A}_p(G), \mathbb{Q}) = \{0\}$. □

Ici on s'est intéressé à l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$, cependant le résultat ci-dessus convient à toute homologie à coefficient. Ainsi on commence par généraliser la définition qui précède pour un groupe abélien A quelconque.

Définition VI.8. Soit $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe et soit A un groupe abélien. On dit alors que G a une dimension de Quillen constructible en p sur A s'il vérifie :

$$O_p(G) = 1 \Rightarrow \tilde{H}^c_{r-1}(\mathcal{A}_p(G), A) \neq \{0\}$$

Ainsi, on note $(\mathcal{QD}_p^{c,A})$ cette condition et $(\mathcal{QD}_p^c)$ correspond à la même condition mais valable pour tout groupe abélien A. On va maintenant revenir sur des résultats vu précédemment avec ce nouveau vocabulaire mais pour ce faire, il est nécessaire de démontrer le lemme suivant :

Lemme VI.23. Si $G = K \rtimes H$ où $H = \mathbb{F}_p^r$ et K un p'-groupe, alors $O_p(G) = 1$ si et seulement si l'action de H sur K est fidèle.

Preuve. Pour prouver ce lemme, on peut, sans perte de généralité, se focaliser sur le point de vue d'un produit semi-direct interne et d'une action de conjugaison.
Pour le sens direct, on suppose que $O_p(G) = 1$. Or on rappelle que $O_p(G)$ correspond à l'intersection de tous les p-Sylow et de fait pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, il existe $k \in K$ tel que $khk^{-1} \notin H$. En particulier $khk^{-1} \neq h$ d'où $hkh^{-1} \neq k$ donc h ne fixe pas tous les $k \in K$, autrement dit : l'action de conjugaison est fidèle.
Pour le sens réciproque, on suppose qu'il $h \in O_p(G) \setminus \{1\}$ pour montrer qu'alors l'action n'est pas fidèle. Par hypothèse, pour tout $k \in K$, on a que $khk^{-1} \in O_p(G)$. Or, toujours par le même procédé, si on écrit $khk^{-1} = h'$, alors $\underbrace{h^{-1}kh}_{\in K}k^{-1} = h^{-1}h' \in H$ donc $h = h'$ et h fixe tous les $k \in K$ pour l'action de conjugaison, ce qui conclut. □

Théorème VI.24. Le groupe $K \rtimes \mathbb{F}_p^r$ vérifie $(\mathcal{QD}_p^{c,\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}})$ si K est un q-groupe avec $p \neq q$.

Preuve. Résultat direct du lemme précédent et du corollaire (V.13). □

Théorème VI.25. Le groupe $K \rtimes \mathbb{F}_p^r$ vérifie $(\mathcal{QD}_p^{c,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})$ si K est un p'-groupe abélien.

Preuve. Résultat direct du lemme précédent et du corollaire (V.18). $\square$

Théorème VI.26. Le groupe $K \rtimes \mathbb{F}_p^r$ vérifie $(\mathcal{QD}_p^{c,\mathbb{Z}})$ si K est un p'-groupe dont l'ordre a pour décomposition en nombre premiers $|K| = q_1^{\delta_1} \dots q_l^{\delta_l}$ avec pour tout $i \in [\![1,l]\!]$, on a $r < q_i$.

Preuve. Résultat direct du lemme précédent et du corollaire (V.14). $\square$

Ceci fait, on peut alors se pencher sur les derniers résultats de ce mémoire faisant directement références à la conjecture de Quillen. On commence alors par quelques définitions :

Lemme VI.27. Soit G un groupe fini, on vérifie que : $O_\infty(C_G(F(G))) = Z(F(G))$

Preuve. On pose $G^* = G/Z(F(G))$ et $H = O_\infty(C_G(F(G)))$, le but est alors de montrer que la projection de H sur G^*, notée H^*, vérifie que $H^* = 1$. Aussi on pose X^* le sous-groupe normal minimal de H^* et il est clair que $X^* = 1$ si et seulement si $H^* = 1$. On suppose que $H^* \neq 1$ or comme H est résoluble par définition, alors H^* aussi et donc par le lemme (VI.10), X^* est un p-groupe pour un nombre premier p.
Ainsi, on a alors que $X = PZ(F(G))$ avec $P \in Syl_p(X)$. De plus, on remarque d'abord que comme $F(G)$ est nilpotent, alors $Z(F(G))$ aussi et comme $Z(F(G)) \leq C_G(F(G))$ alors il est clair que $Z(F(G)) \leq H$. Ceci donne alors que $X \leq H \leq C_G(F(G))$ et donc que X centralise $F(G)$ et par suite $Z(F(G))$. On a alors que P est distingué dans X.
Enfin, on désire montrer que $P \leq F(G)$. On aimerait tout d'abord vérifier que $O_p(X) \leq O_p(G)$, pour ce faire il suffit de montrer que X est distingué dans G. En effet, si c'était le cas, comme $O_p(X)$ est caractéristique dans X, alors par le lemme (VI.8), on aurait que $O_p(X)$ est distingué dans G. Ainsi par définition de $O_p(G)$, on obtient directement le résultat attendu. Pour montrer ceci, on commence par appliquer le lemme (VI.8) de nombreuses fois à la suite :

$$F(G) \trianglelefteq G \Rightarrow C_G(F(G)) \trianglelefteq G \Rightarrow O_\infty(C_G(F(G))) \trianglelefteq G$$

Les arguments ici étant que $O_\infty(C_G(F(G)))$ est caractéristique dans $C_G(F(G))$ qui est lui-même caractéristique dans G. On rappelle qu'il y a une bijection entre les sous-groupes distingués de $G/Z(G)$ et les sous-groupes distingué de G contenant $Z(G)$. De fait, on a alors que H^* est distingué dans G^* et donc, comme X^* est caractéristique dans H^*, on a aussi que X^* est distingué dans G^*. Finalement, toujours par la bijection des sous-groupes distingués, on a aussi $X \trianglelefteq G$.
On a alors $P \leq O_p(X) \leq O_p(G) \leq F(G)$ et donc comme P centralise $F(G)$ alors finalement : $P \leq C_{F(G)}(F(G)) = Z(F(G))$.
On conclut alors que $X = Z(F(G))$ d'où $X^* = H^* = 1$ et donc $H = Z(F(G))$. $\square$

Corollaire VI.28. Soit G un groupe résoluble, alors $C_G(F(G)) \subset F(G)$.

Preuve. Comme G est résoluble, tous ses sous-groupes aussi et de fait $O_\infty(C_G(F(G))) = C_G(F(G))$. On a alors $C_G(F(G)) = Z(F(G)) \subset F(G)$ par le lemme précédent. $\square$

Proposition VI.29 (Burnside)**.** Soit ψ un p'-automorphisme d'un p-groupe qui induit l'identité sur $P/\phi(P)$, alors ψ est l'identité sur P.

Preuve. Ce résultat et sa démonstration peuvent être trouvé dans [7]. $\square$

Remarque. Un p'-automorphisme est un automorphisme dont l'ordre n'est pas divisible par p.

Corollaire VI.30. Soit H un p-groupe agissant fidèlement sur un q-groupe K avec $p \neq q$, alors l'action induite sur $K/\phi(K)$ est fidèle.

Preuve. Soit $h \in H \setminus \{1\}$, on note $\rho_h \in \mathrm{Aut}(K)$ l'automorphisme induit par l'action. On note aussi $m = o(\rho_h)$ de sorte que, comme H est un p-groupe, alors $m = p^s$ avec $s \geq 1$.
On remarque alors que $\rho_h^m = \rho_{h^m} = \mathrm{Id}$ d'où $o(\rho_h)|m$. Il existe alors $0 < t \leq m$ tel que $o(\rho_h) = p^t$ donc ρ_h est un q'-automorphisme d'un q-groupe. Ainsi comme l'action de H sur K est fidèle, alors $\rho_h \neq \mathrm{Id}$ et donc par la contraposée du théorème de Burnside, il en va de même de l'automorphisme induit $\tilde{\rho}_h$. $\square$

Théorème VI.31. Le groupe $K \rtimes \mathbb{F}_p^r$ vérifie $(\mathcal{QD}_p^{c,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})$ si K est un p'-groupe résoluble.

Preuve. On rappelle que $F(G)$ est le produit direct des $O_q(G)$ pour q divisant $|G|$. Donc si on suppose que $O_p(G) = 1$, alors $F(G)$ est finalement le produit direct des $O_q(G)$ pour q divisant $|K|$, autrement dit : $F(K \rtimes H) = F(K)$.
Aussi, comme $G = K \rtimes H$ est résoluble par hypothèse, par le corollaire (VI.28), on a que $C_G(F(K)) \cap H \subset F(G) \cap H = F(K) \cap H = \{1\}$ donc l'action de H sur $F(K)$ est fidèle.
De plus, par le corollaire (VI.30) on a que l'action de H sur $O_q(K)/\phi(O_q(K))$ est fidèle pour tout q divisant $|K|$. Or comme $F(K)$ est produit des $O_q(K)$, alors l'action de H sur $F(K)/\phi(F(K))$ est fidèle.
Enfin comme $F(K)$ est nilpotent, alors $F(K)/\phi(F(K))$ est abélien et donc on peut appliquer le corollaire (V.18) pour dire que $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(F(K)/\phi(F(K)) \rtimes H)|; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq \{0\}$. Or par le théorème (V.19), on a alors $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(F(K) \rtimes H)|; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq \{0\}$.
Finalement, on conclut par l'inclusion $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(F(K) \rtimes H)|; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq \{0\} \subset \tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(G)|; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq \{0\}$ $\square$

Pour le résultat suivant, on désire utiliser un résultat démontré dans [8] qui concerne les groupes dits p-résoluble. Ainsi, on commence d'abord à introduire cette notion :

Définition VI.9. Un groupe G est dit p-résoluble s'il existe une suite de sous-groupes distingués

$$1 = V_0 < \cdots < V_n = G$$

telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, le quotient V_{i+1}/V_i est un soit un p-groupe soit un p'-groupe.

Aussi, Hall et Higman précise que pour un tel groupe, on peut toujours trouver sa p-suite supérieure

$$1 = P_0 \leq N_0 < P_1 < N_1 < \cdots < P_l \leq N_l = G$$

définie de sorte que pour tout $k \in [\![0, l-1]\!]$, le quotient N_k/P_k est le plus grand p'-sous-groupe distingué de G/P_k et P_{k+1}/N_k le plus grand p-sous-groupe de G/N_k.

Remarque. On peut généraliser facilement les deux notions précédentes pour Π une famille de nombres de premiers.

Aussi, un résultat important à retenir est qu'un groupe est résoluble si et seulement si il est p-résoluble pour tout les diviseurs premiers p de $|G|$.

On énonce alors le résultat démontré dans [8] :

Proposition VI.32. Si G est un groupe Π-résoluble sans Π'-sous-groupe distingué non trivial, alors $N_0 = 1$ et $C_G(P_1) \leq P_1$.

Corollaire VI.33. Soit G un groupe résoluble tel qu'il existe p avec $O_p(G) = 1$, alors $C_G(O_{p'}(G)) \leq O_{p'}(G)$.

Preuve. On pose $\Pi' = p$ et donc par extension $\Pi = p'$. G étant résoluble, il est en particulier Π-résoluble donc on peut définir sa Π-suite supérieure

$$1 = P_0 \leq N_0 < P_1 < N_1 < \cdots < P_l \leq N_l = G$$

Ainsi, par définition $N_0 = N_0/P_0$ est le plus grand p-sous-groupe de $G = G/P_0$, c'est à dire $N_0 = O_p(G) = 1$. Aussi, $P_1 = P_1/N_1$ est le plus grand p'-sous-groupe de $G = G/N_1$, donc $P_1 = O_{p'}(G)$. On conclut alors par la proposition précédente. $\square$

Théorème VI.34. La conjecture de Quillen est vérifiée pour les groupes résolubles.

Preuve. Soit G un groupe résoluble tel qu'il existe p avec $O_p(G) = 1$. Soient r le p-rang de G et $H \in \mathcal{A}_p(G)$ de rang r. Par le corollaire (VI.33), le sous-groupe $K = O_{p'}(G)$ contient son centralisateur dans G et par conséquent, H agit fidèlement sur K qui est lui-même résoluble. Finalement, par le théorème (VI.31), on a que $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(K \rtimes H)|; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq \{0\}$.
Par inclusion, $\tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(K \rtimes H)|; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leq \tilde{H}^c_{r-1}(|\mathcal{A}_p(G)|; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ donc on vérifie $(\mathcal{QD}_p^{c,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})$. Ainsi par (VI.22), on vérifie $(\mathcal{QC})$. $\square$

VI.4 Compléments

Même si ce qui précède s'inspire très largement du travail de Diáz dans [3], le cas des groupes résolubles avait déjà été traité par Quillen lui-même dans [1]. En effet, celui-ci avait déjà remarqué comment passer du théorème (VI.31) au théorème (VI.34) et s'était donc intéressé directement à la preuve de (VI.31). De plus, il avait aussi observé un résultat plus fort qui est :

$$\text{Tout } G = K \rtimes \mathbb{F}_p^r, \text{ avec } K\ p'\text{-résoluble, vérifie } (\mathcal{QD}_p) \Rightarrow \text{Tout groupe } p'\text{-résoluble vérifie } (\mathcal{QD}_p)$$

En effet, il suffit de constater que le corollaire (VI.33) s'adapte pour les groupes p-résolubles. Ainsi la preuve du théorème suivant est similaire à celle de (VI.34). Cependant, il ne fait pas apparaître de preuve que tout groupe $G = K \rtimes \mathbb{F}_p^r$, avec K p'-résoluble, vérifie $(\mathcal{QD}_p)$, ce qui permettrait d'aboutir. Il faudra attendre le travail de Alperin qui nécessite la classification de groupes finis simples pour avoir ce chaînon manquant et ainsi valider les deux théorèmes suivants :

Théorème VI.35. Le groupe $K \rtimes \mathbb{F}_p^r$ vérifie $(\mathcal{QD}_p^{c,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})$ si K est un p'-groupe.

Théorème VI.36. La conjecture de Quillen est vérifiée pour les groupes p-résolubles.

Dans son article, Díaz donne aussi une preuve du théorème (VI.35) qui diffère quelque peu de celle de Alperin mais qui utilise aussi la classification des groupes finis simples.
Les travaux de Quillen et Alperin ont alors motivé une dizaine d'années plus tard un certain nombre de chercheurs à travailler sur la classification des groupes vérifiant la conjecture. On peut citer de manière non exhaustive M. Aschbacher, S. Smith ou encore P.B. Kleidman qui font partie de ceux ayant donnés de forts résultats concernant cette classification. Notamment, Aschbacher et Kleidman prouvent dans [9] que la classification est vérifiée pour les groupes presque simples, c'est à dire les groupes G tel qu'il existe $S \trianglelefteq G$ simple vérifiant $C_G(S) = 1$. Quant à Aschbacher et Smith, ils s'intéressèrent aux groupes contenant ou non un sous-groupe isomorphe à $U(n)$, qui est le groupe des matrices unitaires de taille $n \times n$. Ils donnent alors dans [10] le résultat suivant :

Théorème VI.37. Soit $p > 5$, les groupes ne contenant pas de sous-groupe isomorphe à $U(q)$ où $q \equiv -1 \mod p$ et q impair vérifient la conjecture de Quillen pour p.

Bibliographie

[1] Daniel Quillen. Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroupes of a group, 1978. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870878900580.

[2] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2000.

[3] Antonio Díaz Ramos. On quillen's conjecture for p-solvable groups, 2018. https://arxiv.org/pdf/1604.01922.pdf.

[4] I. Martin Isaacs. Character theory of finite groups, 1976.

[5] Trevor Hawkes and I. Martin Isaacs. On the poset of p-subgroups of a p-solvable group, 1988.

[6] Jean-Pierre Serre. Cours sur les groupes finis, 1978/1979. https://www.college-de-france.fr/media/jean-pierre-serre/UPL2937151343298039815_1___Groupes_finis.pdf.

[7] Daniel Gorenstein. *Finite Groups*. 1980.

[8] P. Hall and Graham Higman. *On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem*. 1956.

[9] M. Aschbacher and P.B. Kleidman. *On a conjecture of Quillen and a lemma of Robinson*. 1990.

[10] M. Aschbacher and S. Smith. *On Quillen's conjecture for the p-groups complex*. 1993.

[11] Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire, 2009. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf.

[12] M. Aschbacher. *Finite Group Theory*. 2000.