# Devoir Hors Classe n°5 (facultatif)

## Approfondissement : Intégrale de Wallis

Pour tout entier naturel $n$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

**Partie A : Convergence de la suite $(W_n)$**

1. Calculer $W_0$ et $W_1$.
2. Justifier que pour tout entier naturel $n$, $W_n > 0$.
3. Montrer que la suite $(W_n)$ est décroissante.
4. Que peut-on en déduire sur la suite $(W_n)$ ?

**Partie B : Calcul du terme général**

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

   *Indication : on pourra utiliser une intégration par parties en utilisant la fonction $u$ : $x \mapsto \sin^{n+1}(x)$ et en déterminant une fonction $v$ telle que pour tout réel $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $v'(x) = \sin(x)$.*

2. En déduire que pour tout entier naturel $p$, on a

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

**Partie C : Étude asymptotique**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $J_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

1. En s'aidant de la question **B1**, montrer que la suite $(J_n)$ est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En s'aidant des questions **B1** et **A3**, montrer que pour tout entier naturel $n$, on a

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

3. Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\pi}nW_n^2 = 1$.

---

Cette dernière question permet de démontrer un résultat important de l'analyse appelé **Formule de Stirling** :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$