Nom : ***Prénom :*** ***Classe :***

Interrogation n°4

(Calculatrice interdite)

Exercice 1 (Questions de cours)

Cocher si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

	Vrai	Faux
A/ Si F est la primitive de f, alors $f' = F$.	☐	☒
B/ Deux primitives d'une même fonction sont égales.	☐	☒
C/ Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.	☐	☒

Exercice 2

Pour chacune des fonctions f suivantes, donner une primitive F :

1. Pour $f(x) = x^3$, on a $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$.

2. Pour $f(x) = \dfrac{5}{x}$, on a $F(x) = 5\ln(x)$.

3. Pour $f(x) = 6\,\mathrm{e}^{3x}$, on a $F(x) = 6 \times \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3} = 2\,\mathrm{e}^{3x}$.

4. Pour $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, on a $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$.

Exercice 3

On s'intéresse à la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. (On rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$)

1. En justifiant, donner la forme des primitives de f.

À constante près, on reconnaît une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}+x^2$.

La fonction u est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$, on peut donc étudier $\ln \circ u$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{2x}{\mathrm{e}+x^2}$.

En compensant la constante, on a que les primitives f sont de la forme

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}+x^2\right) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

2. On note F_0 l'unique primitive de f telle que $F_0(0) = 1$. Donner l'expression de F_0.

F_0 est une primitive de f donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in \mathbb{R}$, $F_0(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}+x^2\right) + C$.

Ainsi, $F_0(0) = \dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) + C = \dfrac{1}{2} + C$. Donc $F_0(0) = 1 \iff \dfrac{1}{2} + C = 1 \iff C = \dfrac{1}{2}$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_0(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}+x^2\right) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(\mathrm{e}+x^2\right) + 1\right)$.