Nom :

Question de cours :

- Rappeler le domaine de définition de la fonction $\ln$, son allure, sa dérivée et la valeur de $\ln(1)$.
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, rappeler les règles de calculs concernant $e^x \times e^y$ et $(e^x)^n$.

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $2e^{6x} - 5 < 0$ 2. $4e^{2x} - 5 \geq 0$ 3. $2^x = 3$
4. $\ln(x^2 - x - 1) = 0$ 5. $3^{2x+1} = 5^{3x-2}$ 6. $\ln(\ln(x)) > 0$

Exercice :

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $a^n = e^{n\ln(a)}$.
2. Rappeler la définition de a^x pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On rappelle que si deux fonction f, g sont dérivables en x et composables (au sens où $g \circ f$ est bien définie) alors $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $h\ :\ x \mapsto a^x$. Écrire h comme la composée $g \circ f$ de deux fonctions dérivables f et g.
4. Donner les fonctions dérivées de f et g et en déduire la dérivée de h pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, rappeler la définition de a^x. Prouver que $a^{x+y} = a^x \times a^y$ en utilisant les propriétés de $\exp$ et $\ln$.

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 3) \leq 0$ 2. $3^x - 2 = 0$ 3. $2e^{-4x} - 3 \leq 0$
4. $\dfrac{e^x + 1}{2e^x - 1} < 2$ 5. $\ln(x)^2 - \ln(x) - 2 = 0$ 6. $5^{3x+2} \leq 3^{2x+1}$

Exercice :

On définit les fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Calculer $\mathrm{ch}(0)$ et $\mathrm{sh}(0)$.
2. Étudier la parité de ch et sh.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

On pose maintenant $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 + \mathrm{th}(x)^2$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler le domaine de définition de la fonction $\exp$, son allure, sa dérivée et la valeur de $\exp(0)$.
- Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, rappeler les règles de calculs concernant $\ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(x^n)$.

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $3e^{2x-1} - 2 > 0$
2. $\ln(x)^2 - 1 \leq 0$
3. $5^x = 2$
4. $e^{2x} - e^x - 2 = 0$
5. $\ln(\ln(x)) < 0$
6. $3^{8x-1} = 7^{3x+1}$

Exercice :

Soient les fonctions f et g suivantes définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x - 1 - \ln(x)$$

1. Étudier les variations de f et g et en déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x \geq 1, \qquad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $x = e^{\frac{1}{n}}$, montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Commentaire :