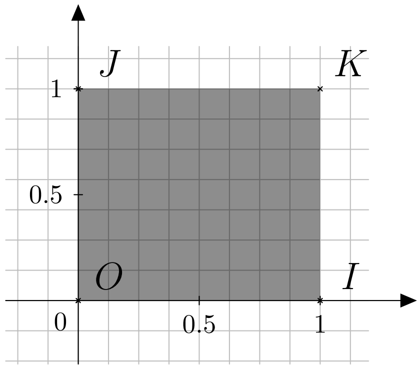
— 16 —

# Calcul intégral

## I. Intégrale d'une fonction continue positive

**Définition 1**

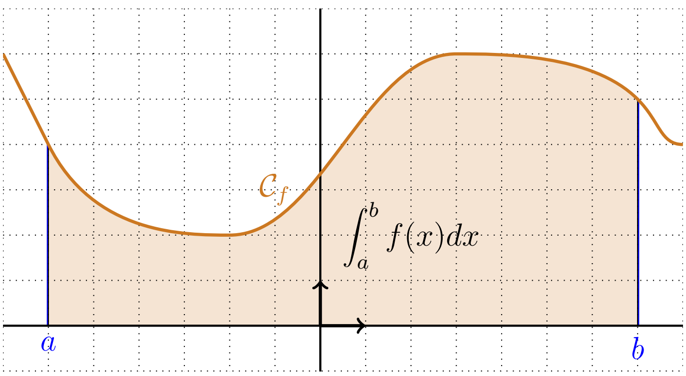
On considère un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $I(1;0)$, $K(1;1)$ et $J(0;1)$.
On appelle unité d'aire (noté u.a) du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'aire du rectangle $OIKJ$.




Dans tout ce chapitre, on se place désormais dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

**Définition 2**

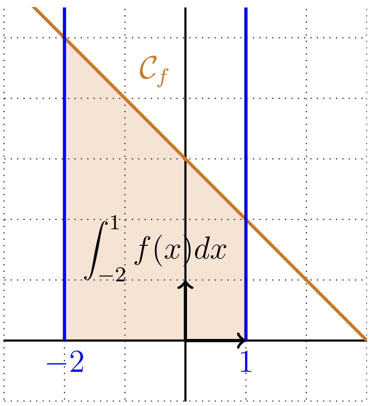
Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction $f$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
L'aire délimitée par $\mathcal{C}_f$, par l'axe des abscisses et par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aires se note $\int_a^b f(x)dx$ et s'appelle l'intégrale de $f(x)$ pour $x$ allant de $a$ à $b$.



**Exemple :**
Il est possible d'encadrer l'aire sous la courbe en utilisant le quadrillage.
Ici, l'aire sous la courbe est composée de 44 carreaux entiers, l'intégrale est donc supérieur ou égale à 44. Par ailleurs, si on ajoute les 17 carreaux que traverse la courbe, on a alors que l'intégrale est inférieure à 61.
On a alors $44 \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant 61$.

L'idée première du calcul intégral découle de la question suivante : peut-on faire la somme des termes d'une fonction ? Pour une fonction définie sur un intervalle, la réponse est non, ou en tout cas, pas au sens classique des sommes.
Le calcul intégral est alors introduit par Leibniz au XVII$^e$ siècle pour répondre à cette question. Le symbole $\int$, qui n'est autre qu'un « S » allongé, est quant à lui resté comme héritage au mot « somme ».

**Exemple :**
Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = 6 - 2x$. On cherche la valeur de $\int_{-2}^{1} f(x)dx$.




Pour tout réel $x \in [-2, 1]$, on a bien $f(x) \geqslant 0$.

Le polygone délimité par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$ est un trapèze.

L'aire d'un trapèze dont les côtés parallèles ont pour longueur $b$ et $B$ et dont la hauteur vaut $h$ est de $\dfrac{(B+b)h}{2}$.

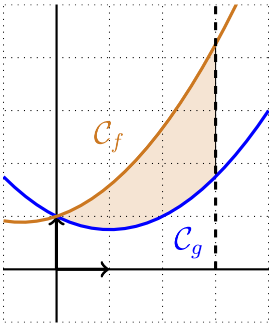
On a donc $\int_{-2}^{1} f(x)dx = \dfrac{(5+2)\times 3}{2} = 10,5$.

**Propriété 1**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur $[a, b]$.
On suppose que pour tout réel $x \in [a, b]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$.
L'aire délimitée par les courbes de $f$ et de $g$ ainsi les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Il est alors possible de déterminer l'aire entre deux courbes sans même savoir l'aire sous chacune de ces deux courbes.

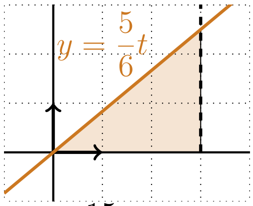
**Exemple :**
Pour tout réel $t$, on pose $f(t) = \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{3} + 1$ et $g(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{2} + 1$.
On souhaite déterminer l'aire entre les courbes de $f$ et $g$ entre les abscisses 0 et 3.




Pour tout réel $t \in [0,3]$, on a

$$f(t) - g(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{3} + 1 - \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + 1\right) = \frac{5t}{6}.$$

Cette quantité est positive sur $[0,3]$, L'aire entre la courbe de $f$ et celle de $g$ entre les abscisses 0 et 3 vaut donc $\int_0^3 \frac{5}{6}t dt$.




Or, cette intégrale correspond à l'aire d'un triangle dont la base a pour longueur 3 et la hauteur associée vaut $\frac{5}{6} \times 3$ soit $\frac{5}{2}$.
Cette aire vaut $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5}{2}$, soit $\frac{15}{4}$.

Ainsi, l'aire entre les courbes de $f$ et de $g$ entre les abscisses 0 et 3 vaut $\frac{15}{4}$ unités d'aire.

# II. Intégrales et primitives

## 1. Théorème fondamental de l'analyse

**Théorème 1 : Théorème fondamental de l'analyse**

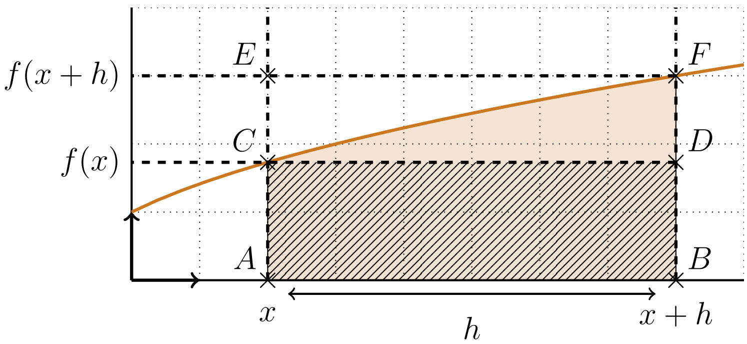
Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
La fonction $F \ : \ x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.
En particulier, toute fonction continue positive admet une primitive.

***Preuve.*** On ne démontre que le cas où $f$ est strictement croissante.
Le but ici est de démontrer que $F' = f$. Autrement dit que pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

- On considère deux réels $x$ et $x+h$ de l'intervalle $[a;b]$ et on suppose que $h > 0$.

$F_a(x+h) - F_a(x)$ représente l'aire sous la courbe de $f$ entre $a$ et $x+h$ à laquelle on retire l'aire sous la courbe de $f$ entre $a$ et $x$. C'est donc l'aire sous la courbe de $f$ entre $x$ et $x+h$. Ainsi, $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$.



On a représenté ci-dessus, la courbe de la fonction $f$. Puisque $f$ est strictement croissante, alors l'aire $\int_x^{x+h} f(t)dt$ est comprise entre l'aire de $ABCD$ et celle de $ABFE$.
Or, $\mathcal{A}_{ABCD} = h \times f(x)$ et $\mathcal{A}_{ABFE} = h \times f(x+h)$. On a donc :

$$hf(x) < F(x+h) - F(x) < hf(x+h) \iff f(x) < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x+h) \quad \text{car } h > 0$$

Comme $f$ est continue sur $[a,b]$, $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.
Donc pas encadrement, on a $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

- Dans le cas où $h < 0$, la démonstration est similaire (les encadrements sont inversés).

On en déduit finalement que pour tout $x \in [a,b]$, on a $F'(x) = f(x)$. □

**Propriété 2**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et $F$ une primitive quelconque de $f$ sur cet intervalle. Alors on a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. On note $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
En particulier, cette quantité de dépend pas de la primitive $F$ choisie.

***Preuve.*** On considère la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ l'unique primitive de $f$ sur $[a,b]$ qui s'annule en $a$. Soit $F$ une autre primitive de $f$ sur $[a,b]$, il existe donc une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x$, on a $F_a(x) = F(x) + k$.
Or, on sait que $F_a(a) = 0$. Il en vient que $F(a) + k = 0$ et donc $k = -F(a)$. Ainsi, pour tout réel $x \in [a,b]$,

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

En particulier, $F_a(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. □

**Exemple :**
$x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ donc :

$$\int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$$

## 2. Généralisation à l'ensemble des fonctions continues

**Définition 3**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $F$ une primitive de $f$ sur cet intervalle. On définit l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ par $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

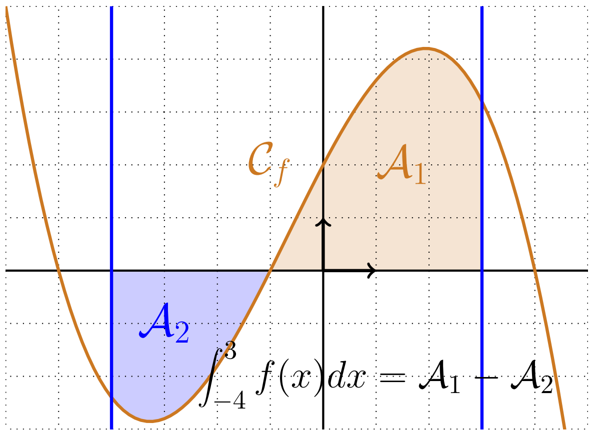
**Exemple :**

On cherche à calculer $\int_{-2}^{1} x^3 dx$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $[-2; 1]$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4}$. Ainsi,

$$\int_{-2}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

La quantité ici est négative, il n'est pas possible de l'interpréter directement comme une aire. Il s'agit en réalité de la différence de l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses lorsque la courbe est au-dessus de cet axe et de cette même aire lorsque la courbe est cette fois en-dessous de l'axe des abscisses.




## 3. Propriétés de l'intégrale

**Propriété 3**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et $c$ un réel de l'intervalle $[a, b]$. Soit $\lambda$ réel.

- $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ ;
- $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$ ;
- **(Relation de Chasles)** $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

**Propriété 4**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Si pour tout réel $x$ dans $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

**Propriété 5**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout réel $x$, $f(x) \leqslant g(x)$.
On a alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

**Exemple :**

Soit $f$ une fonction continue sur $[-2,5]$ telle que pour tout $x \in [-2;5]$, $x \leqslant f(x) \leqslant 7$.
Ainsi, $\int_{-2}^5 xdx \leqslant \int_{-2}^5 f(x)dx \leqslant \int_{-2}^5 7dx$.
Or, $\int_{-2}^5 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^5 = \frac{21}{2}$ et $\int_{-2}^5 7dx = [7x]_{-2}^5 = 49$. Ainsi, $\frac{21}{2} \leqslant \int_{-2}^5 f(x)dx \leqslant 49$.

**Exemple :**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^n \mathrm{e}^{\sin(x)}\,dx$$

Montrons que $(u_n)$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} \mathrm{e}^{\sin(x)} - \int_0^n \mathrm{e}^{\sin(x)} = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{\sin(x)} \quad \text{par Chasles}$$

Pour tout $x \in [n, n+1]$, on a que $\mathrm{e}^{\sin(x)} \geq 0$ et donc $\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{\sin(x)} \geq 0$.
On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ : $(u_n)$ est croissante.

## 4. Valeur moyenne d'une fonction

**Définition 4**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[a,b]$ le réel

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

**Exemple :**

La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2+1$ sur $[1\,;4]$ vaut

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 (x^2+1)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3}+4-\frac{1^3}{3}-1\right) = 24.$$

# III. Intégration par parties

**Propriété 6**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ dont les dérivées sont continues sur cet intervalle. Alors

$$\int_a^b (uv')(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)dx.$$

***Preuve.*** $uv$ est dérivable sur $[a, b]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, c'est-à-dire $uv' = (uv)' - u'v$. On a donc :

$$\int_a^b u(x)v'(x) = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx \iff \int_a^b u(x)v'(x) = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)$$

□

**Exemple :**

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$.

- Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $u(x) = x$. On a alors $u'(x) = 1$ ;
- Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ de sorte que $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

On cherche alors à calculer $\displaystyle\int_0^1 (u'v)(x)dx$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (uv')(x)dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 (u'v)(x)dx = \left[x \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}dx.$$

Or, $\displaystyle\left[x \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 = \frac{\mathrm{e}^2}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 1 \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}$. Ainsi,

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}.$$