Devoir commun n°3

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1

Dans cet exercice, les réponses numériques seront données à 10^{-3} *près.*

Un lycéen passe un concours sous forme d'un QCM de 12 questions. Chaque question comporte 4 réponses dont une seule est correcte.

Cet élève n'ayant absolument pas travaillé pour cette épreuve, il décide de répondre au hasard à chacune des questions. On note alors X le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Quelle est la probabilité que le lycéen donne exactement 2 bonnes réponses ?

4. Quelle est la probabilité que le lycéen donne au moins 2 bonnes réponses ?

Les concepteurs du sujet décident de changer le nombre de questions du QCM. On note alors n le nombre de questions et on note p_n la probabilité que l'élève qui répond au hasard ait au moins une réponse correcte.

5. Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $p_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

6. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

7. Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$.
Interpréter ce résultat en fonction du contexte de l'exercice.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(4,5,7)$, $B(7,-1,10)$ et $C(8,0,8)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. On considère un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\y\\z\end{pmatrix}$ avec $y, z \in \mathbb{R}$.
Déterminer les valeurs de y et z telles que $\overrightarrow{n}$ soit normal au plan (ABC).

Exercice 3 **1**. Soit g la fonction définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + x - 3$$

a. Justifier que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

Donner une approximation de α à 10^{-2} près.

c. Dresser un tableau de signe de $g(x)$ en fonction de $x \in]0,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

a. Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

b. On admet que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Démontrer que pour $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

c. En déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$.

3. On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

a. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$. on a : $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

b. En déduire que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}$ admettent un unique point d'intersection dont on déterminera les coordonnées.