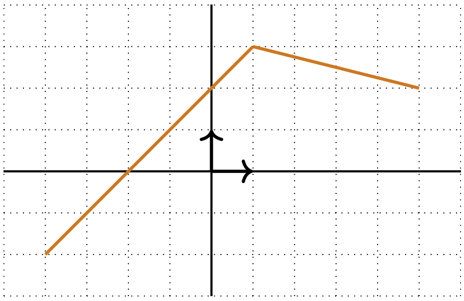
Calcul intégral

Calculs d'intégrales par représentations graphiques

Exercice 1

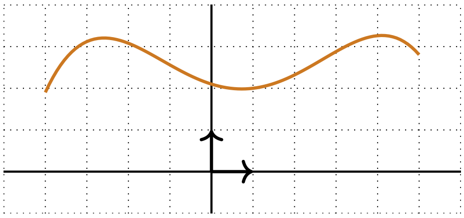
On considère une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-contre dans un repère orthonormé.
Déterminer les valeurs des intégrales suivantes



$$\int_{-2}^{0} f(x)dx \qquad \int_{0}^{5} f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx \qquad \int_{-2}^{5} f(x)dx$$

Exercice 2



On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.
Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)dx$.

Exercice 3 Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x + 8$. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [0;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Après avoir déterminé la nature de la courbe représentative de f, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Intégrales et primitives

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{-5}^{7} \sqrt{2}dx$ **b.** $\displaystyle\int_{3}^{14} \frac{1}{x}dx$ **c.** $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)dx$

d. $\displaystyle\int_{0}^{10} \mathrm{e}^{-5x}dx$ **e.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)dx$ **f.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)dx$

g. $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x}dx$ **h.** $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}dx$ **i.** $\displaystyle\int_{0}^{2} ((x+1)(x+2))dx$

j. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}dx$ **k.** $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{1}{x^2}dx$ **l.** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}dx$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{-2}^{4} 2x\mathrm{e}^{x^2}dx$ **b.** $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ **c.** $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}dx$

d. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2x}{1+x^2}dx$ **e.** $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$ **f.** $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}dx$

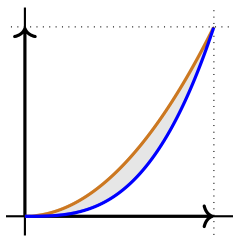
Exercice 7 Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.
3. Calculer alors $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)dx$.

Exercice 8

On a tracé ci-contre, dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Justifier que, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant g(x)$.
2. Calculer l'aire de la surface grisée.



Exercice 9 Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$ en utilisant celle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

Exercice 10 Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 3x+2$ sur $[-2;3]$.

Exercice 11 Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto -x^2+4x$ sur $[0;4]$.

Intégration par parties

Exercice 12 À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)\,dx$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = x$.

Exercice 13 Le but de cet exercice est de déterminer une primitive de la fonction ln. Puisque ln est continue, le théorème fondamental de l'analyse affirme qu'une primitive est $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt$, définie pour $x > 0$.
À l'aide d'une intégration par partie astucieuse, déterminer la valeur de l'intégrale précédente afin de donner une primitive de ln.

Exercice 14 En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,dx$.

Exercice 15 Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx \quad \text{et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

Exercice 16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire?
3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0;1]$, $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. **a.** En effectuant une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

   b. Étudier la convergence de la suite (nI_n).