— 17 —

Fonctions trigonométriques

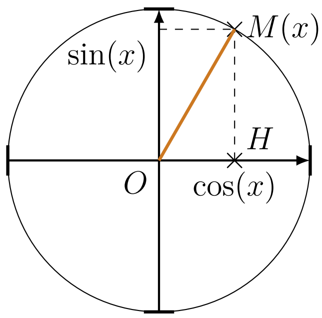
Les courbes de ce chapitre seront représentées dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Rappels

Définition 1

Soit x un réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique. On appelle :

- Cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de $M(x)$.
- Sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de $M(x)$.



Propriété 1

Pour tout réel x,

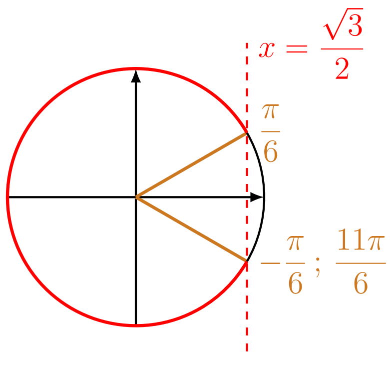
$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \qquad \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

Exemple :
Les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$ sont $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Exemple :
Le solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ sur $[0, 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Exemple :

On veut résoudre l'inéquation $\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi]$. Pour ce genre d'inéquations, on peut s'aider du cercle trigonométrique ci-contre.
Ainsi, l'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$.



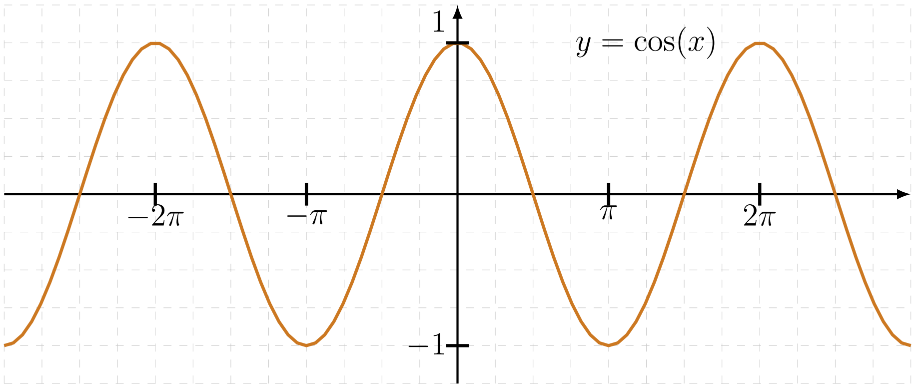
II. Fonctions trigonométriques

1. Définitions

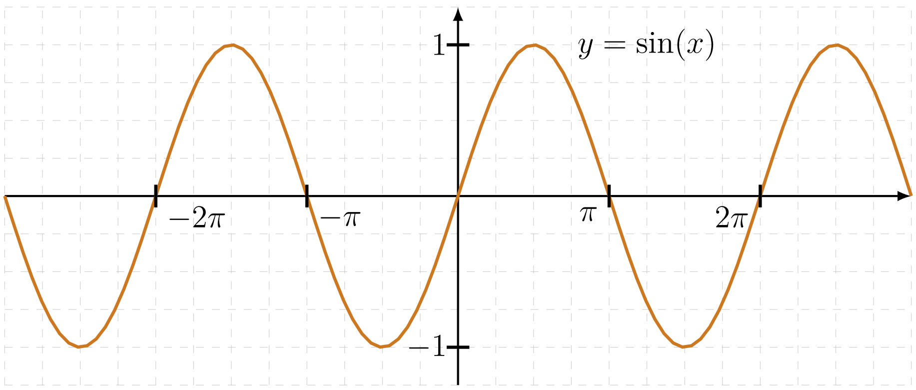
Définition 2

La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.

La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
cos	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1
$\cos(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	



x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
sin	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0
$\sin(x)$	0		$-$		0		$+$		0

2. Parité et périodicité

Propriété 2 : Parité

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(-x) = \cos(x)$: la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$: la fonction sinus est impaire.

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées alors que la courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple :

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Propriété 3 : 2π-périodicité

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

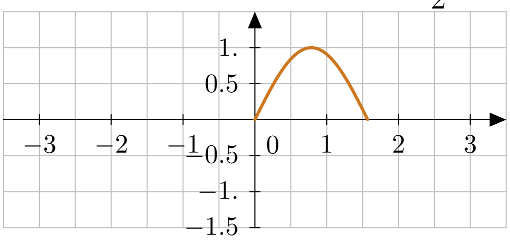
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

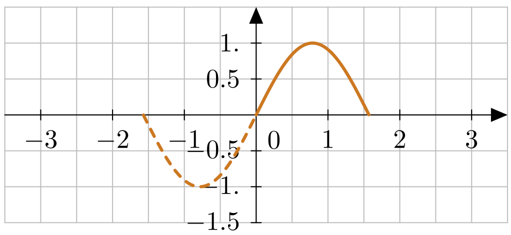
On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

Exemple :

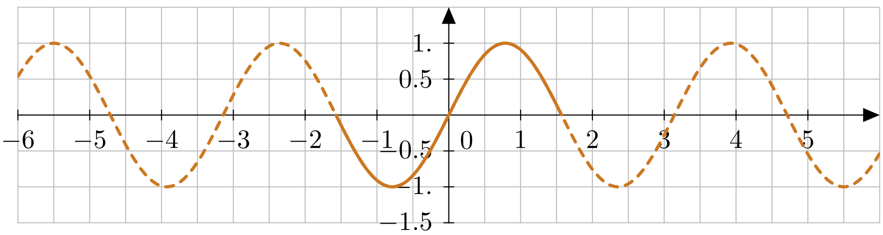
$\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4 \times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Les propriétés précédentes permettent, en particulier, de reconstruire la totalité d'une courbe représentative à partir d'une portion de celle-ci.
On considère la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ représentée sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Grâce à la parité du sinus, on peut aussi la représenter sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$:





Enfin, grâce à la périodicité du sinus, on peut représenter la fonction sur $\mathbb{R}$:



3. Autres propriétés

Propriété 4

Pour tout nombre réel x, on a :

- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

⚠️ **Remarque :**

Pour toutes ces propriétés, il faut s'entraîner à les retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

4. Dérivées des fonctions trigonométriques

Propriété 5

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$$

🖊 **Exemple :**

On considère la fonction $g : x \mapsto 2\cos(x) + 5x$ définie sur $\mathbb{R}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2\sin(x) + 5$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $-2 \leq -2\sin(x) \leq 2$ donc $3 \leq -2\sin(x) + 5 \leq 7$.

En particulier, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 6

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors $\sin(u)$ et $\cos(u)$ sont également dérivables sur cet intervalle I et on a

$$(\sin(u))' = u' \times \cos(u) \qquad \text{et} \qquad (\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$$

🖊 **Exemple :**

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sin(3x^2 - 4x + 5)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (6x - 4)\sin(3x^2 - 4x + 5)$.

Propriété 7

Soit a un réel non nul.

- Une primitive de $x \mapsto \cos(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \sin(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos(ax)}{a}$.

Exemple :

• Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3\cos(2x) - 5\sin(9x)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = \dfrac{3}{2}\sin(2x) + \dfrac{5}{9}\cos(9x)$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \cos(x)\sin(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \sin'(x) \times \sin(x)$. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie pour tout réel x par $G(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x)$.