Limites de suites

Exercice 1 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sqrt{n}$.

1. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100$.
2. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100000$.
3. Soit A un réel quelconque. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant A$.
4. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4 - 3n$.

1. Calculer u_{30}, u_{70}, u_{1000}. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?
2. Soit A un réel. Résoudre l'équation $u_n \leqslant A$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.
3. Que peut-on en conclure sur la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+6}{n+1}$.

1. Donner des valeurs approchées au centième de u_{10}, u_{100}, u_{1000}.
2. La suite (u_n) semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$.
4. En déduire la limite de (u_n)

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}$

A-t-on $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$?

Exercice 5 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = 2n^2 + 3n - 3$
2. $u_n = n^2 - n + 1$
3. $u_n = \dfrac{2}{n+2}$
4. $u_n = \dfrac{3n^2+2}{n+3}$
5. $u_n = \dfrac{4n-2}{n+8}$
6. $u_n = \left(n^2 - 7n + 2\right)\left(5n + \sqrt{n}\right)$
7. $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$
8. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$
9. $u_n = -\sqrt{n^3+7}$
10. $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$
11. $u_n = \dfrac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$
12. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(2 - 3n + 8n^2\right)$

Exercice 6 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a : $u_n \geqslant 2^n$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 7

1. Déterminer la limite de la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
2. Déterminer la limite de la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

Exercice 8 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin n}{n^3}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $-\dfrac{1}{n^3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^3}$
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 9 Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 0$.

Exercice 10 Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 3$.

Exercice 11 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{5n+2}$.

1. Quel est le rôle de l'algorithme ci-contre ?
2. Coder l'algorithme dans le langage de la calculatrice, puis l'exécuter en saisissant en entrée $A = 20$, puis $A = 50$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite (u_n) ?
4. Démontrer, à l'aide de la définition, cette conjecture.

```
from math import *
A=eval(input('Saisir la valeur de A'))
N=0
U=sqrt(2)
while U<=A:
    U=sqrt(5*N+2)
    N=N+1
print(N)
```

Exercice 12 On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :
   a. la suite (w_n) tend vers $-\infty$ b. la suite (u_n) tend vers $-\infty$ c. la suite (w_n) n'a pas de limite
2. Si $w_n = 2u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $(\ell > 0)$, alors :
   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ b. On ne peut rien dire sur la limite de (v_n) c. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ et $w_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, alors :
   a. On ne peut rien dire sur la convergence de la suite (v_n) b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$ c. la suite (v_n) n'a pas de limite
4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$, alors :
   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ c. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$

Exercice 13 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n).

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.
2. Si (u_n) converge vers un nombre réel ℓ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.
3. Si (u_n) est une suite strictement positive et si (u_n) converge vers un nombre réel ℓ, alors $\ell > 0$.
4. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, alors la suite (w_n) converge.

Exercice 14 *À l'hôtel de Hilbert* L'hôtel de Hilbert possède une petite spécificité : il possède une infinité de chambres. Aujourd'hui, bonne nouvelle, il est complet pour toute la semaine à venir !

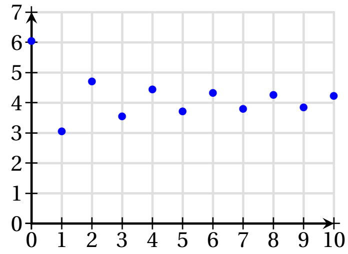
Le réceptionniste de l'hôtel reçoit un appel d'un groupe souhaitant réserver des chambres pour demain. Contre toute attente, il prend leur réservation, sort de derrière son comptoir et écrit le message suivant sur le panneau d'information de l'hôtel :

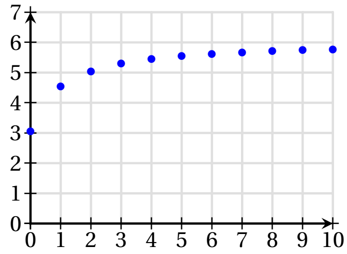
> Chères clientes, chers clients, à compter de demain, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les occupants de la chambre n seront déplacés en chambre $n+10$. Veuillez nous excuser pour la gêne occasionnée.

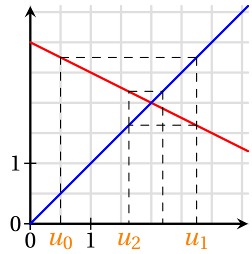
1. a. Dans quelle chambre seront déplacés les occupants de la chambre 1 ? De la chambre 5 ?
   b. De combien de personnes est composé le groupe ayant réservé aujourd'hui ?
2. Quel message aurait pu écrire le réceptionniste si le groupe avait compté 1000 personnes ? Une infinité de personnes ?

Majorant, minorant et variations

Exercice 15 Pour chacune des suites représentées graphiquement ci-dessous, conjecturer un majorant, un minorant ou un encadrement.

1. 

2. 

3. 

Exercice 16 Donner un minorant et/ou un majorant évident de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 3 + 5n$

2. $u_n = 5 + \dfrac{1}{n+1}$

3. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3$

4. $u_n = 4(-1)^n + \dfrac{1}{4}$

5. $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$

6. $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - 4$

7. $u_n = n + (-1)^n$

Exercice 17

1. Montrer que la suite de terme général :
   a. $n^2 - 4n + 6$ est minorée et en donner un minorant
   b. $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée et en donner un majorant
   c. $\dfrac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant *(indication : $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$)*
   d. $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8
   e. $\dfrac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{2}$
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ est bornée par 2 et 5.

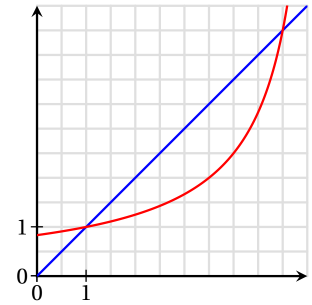
Exercice 18 En utilisant la méthode la plus adaptée, étudier les variations de la suite (u_n) dans chacun des cas ci-dessous et en déduire si u_0 est un majorant ou un minorant de (u_n) :

1. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout $n \geqslant 0$;
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n - 5n^2 - 2$ pour tout $n \geqslant 0$;
3. $u_n = 2n^3 - 3n^2 - 120n + 3$ pour tout $n \geqslant 0$;
4. $u_n = \dfrac{5}{3^{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$;
5. $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 19 On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{5n+1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.
   c. Que peut-on alors dire sur la convergence de la suite ?
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = f(v_n) = \dfrac{5v_n + 1}{v_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
   c. Que peut-on alors dire sur la convergence de la suite ?

Exercice 20 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{5}{6-u_n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.



On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;\,5{,}5]$ par $f(x) = \dfrac{5}{6-x}$ et la droite d'équation $y = x$. On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Reproduire la figure et construire les points d'abscisses u_0, u_1, u_2 sur l'axe des abscisses.
2. Montrer que cette suite est bornée par 1 et 4.
3. Conjecturer le sens de variation de (u_n) puis démontrer cette conjecture.

Exercice 21 Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^3 + 3\sin(n)$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -5n^4 + 2n^4 \sin\left(\sqrt{n}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^4 - n^3\cos\left(n^5\right)$
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(3+(-1)^n\right)0{,}7^n$

Convergence des suites monotones

Exercice 22 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}(u_n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que la limite ℓ de la suite vérifie $\ell = \dfrac{1}{10}(\ell+1)^2$ et $\ell \leqslant 5$. Déterminer cette limite.

Exercice 23 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{12}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{-60x+68}{-12x+5}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que si $x \in [2\,;4]$ alors $f(x) \in [2\,;4]$.
3. En déduire que (u_n) est bornée par 2 et 4.
4. a. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{12u_n^2 - 65u_n + 68}{-12u_n + 5}$.
   b. Dresser le tableau de signe de $\dfrac{12x^2 - 65x + 68}{-12x+5}$. En déduire que (u_n) est croissante.
5. Que peut-on en déduire sur le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 24 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \dfrac{1}{2}x + 4$.
   b. Sans calcul, placer les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   c. Conjecturer une minoration, une majoration et les variations de (u_n).
2. Démontrer ces conjectures.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 25 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que (u_n) est convergente.