— 3 —

Limites de suites

I. Limite d'une suite

1. Limite finie

Définition 1

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert contenant l, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.
On dit que la suite **converge** vers l.

Définition 2

Si une suite n'est pas **convergente**, elle est **divergente**.

Exemple :
La suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1.

Propriété 1

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Preuve. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$: un intervalle ouvert quelconque contenant 0 est de la forme $]-a, b[$ avec $a, b > 0$. Premièrement, pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{1}{n} > 0 > -a$.
Ensuite :

$$\frac{1}{n} < b \iff n > \frac{1}{b}$$

Ainsi pour tout entier $n > \frac{1}{b}$, on a que $-a < \frac{1}{n} < b$ et donc $\frac{1}{n} \in]-a, b[$. □

2. Limite infinie

Définition 3

- On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $A \geq 0$, l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certains rang. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
- On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $B \leq 0$, l'intervalle $]-\infty, B[$ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certains rang. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.
- On dit alors que la suite (u_n) **diverge** vers $\pm\infty$.

Propriété 2

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

⚠️ **Remarque :**

Il existe des suite divergentes qui n'admettent pas de limites infinies.
Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite.

II. Opérations sur les limites

1. Limite d'une somme

limite de (u_n)	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
limite de (v_n)	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de $(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**

⚠️ **Remarque :**

FI signifie **Forme Indéterminée**, ce qui veut dire qu'on ne peut pas prévoir la limite sans un travail particulier sur la suite concernée.

2. Limite d'un produit

limite de (u_n)	l	$l \neq 0$	∞	0
limite de (v_n)	l'	∞	∞	∞
limite de $(u_n v_n)$	$l \times l'$	∞	∞	**FI**

3. Limite d'un quotient

limite de (u_n)	l	l	$l \neq 0$ ou ∞	∞	$\pm\infty$	0
limite de (v_n)	$l' \neq 0$	∞	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0
limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	∞	∞	**FI**	**FI**

III. Limites et comparaisons

1. Théorèmes de comparaison

Propriété 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. Si à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$ et que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Preuve. Soit $A > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, alors il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $u_n \geq A$.
Or, pour un certain $n_2 \in \mathbb{N}$ et pour $n \geq n_2$, on a $v_n \geq u_n$.
Donc pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$ et $n \geq n_0 <$ on a : $v_n \geq u_n \geq A$. Donc $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. □

Propriété 4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. Si à partir d'un certain rang, on a $u_n \geq v_n$ et que $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Exemple :
Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = n^2 + \sin(n)$.

2. Théorème d'encadrement

Propriété 5 : Théorème d'encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$ et que (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite, alors (v_n) converge aussi vers cette limite.

Preuve. Soit un intervalle ouvert I contenant $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.
$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2.
À partir d'un certain rang, que l'on note n_3, on a $u_n \leq v_n \leqslant w_n$.
Ainsi pour tout $n \geq max(n_1; n_2; n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n).
Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ □

Exemple :
Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{\sin(n)}{n}$.

IV. Suites majorées, minorées, bornées

1. Définitions

Définition 4

- Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque :
- Les suites de terme général $\cos(n)$ ou $(-1)^n$ sont bornées.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Exemple :
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrons par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

V. Convergence des suites monotones

Propriété 6

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors la suite (u_n) est majorée par l.

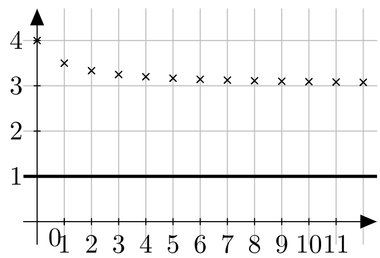
Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe un entier p, tel que $u_p > l$.
L'intervalle ouvert $]l-1, u_p[$ contient l et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite devraient appartenir à $]l-1, u_p[$.
Or, (u_n) est croissante donc pour tout $n \geq p$, on a : $u_n \geq u_p$.
Donc pour tout $n \geq p$, on a que $u_n \notin]l-1, u_p[$ ce qui est contradictoire.
Donc il n'existe pas de $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > \ell$ et (u_n) est bien bornée par l. □

Propriété 7 : Admise

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-contre, la suite décroissante est minorée par 1. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 1 mais n'est pas nécessairement égale à 1.



Propriété 8

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Preuve. Soit un réel A.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > A$.
La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a $u_n \geq u_p$.
Donc pour tout $n > p$, on a $u_n > a$; c'est à dire qu'à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A, +\infty[$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Démonstration analogue pour une suite décroissante et non minorée. □

VI. Étude des suites géométriques

Définition 5

Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq p$, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$. On appelle q la raison de la suite (u_n).

Propriété 9

Si $(u_n)_{n \geq p}$ est une suite géométrique de raison q, alors :

$$\forall n \geq p,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$$

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Propriété 10

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$