Évaluation n°2

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 (Question de cours)

1. Donner les valeurs de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$.

2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Que signifie que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ?

Exercice 2 **1**. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ,\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x^2) + x - 2$$

a. Déterminer les limites de la fonction g en 0^+ et en $+\infty$

b. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$.
Étudier les variations de la fonction g sur $]0\ ,\ +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on admet pour g le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

où α est un réel compris entre 1 et 2.

2. On considère la fonction f définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x}\ln(x)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0^+ et $+\infty$.

b. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$.
Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ,\ +\infty[$.

3. **a.** Étudier le signe de $f(x) - \ln(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

b. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0\ ,\ +\infty[$.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère $A(2, -1, 3)$ et $B(2, 2, 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(1, 2, 1)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ définissent un plan de l'espace. On note $\mathcal{P}$ ce plan.

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}$.

3. En déduire une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ au degré près.

4. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$.