Correction du DHC n°4

Qualité du devoir	**Note** /5
Non rendu (après 2 séances).	0
Aucun investissement et/ou soin : travail bâclé !	1
Partie du sujet non traitée ou bâclée.	2
Travail correct mais qui aurait mérité plus d'investissement.	3
Bon travail mais quelques erreurs et/ou manque de soin.	4
Très bon travail, soigneux et détaillé.	5

Exercice 1 1. Les solutions de l'équation $y' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x}$ où λ est un réel quelconque.

2. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - C(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

   b) Puisque f est solution de (E), on a, pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. Ainsi, pour tout réel x, on a :

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - C(x)\,\mathrm{e}^{-x} + C(x)\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \iff C'(x)\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \iff C'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

   c) On reconnaît une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^x$, qui est une fonction strictement positive. Une primitive de cette fonction est $\ln(u)$. La fonction $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ convient donc. Ainsi, d'après ce qui précède, une solution de (E) est donc $f : x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x} + \ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^{-x}$ où C est un réel quelconque.

Exercice 2 1. a) Deux primitives de cette fonction peuvent être $F_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $F_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 1$

   b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_1(b) - F_1(a) = \mathrm{e}^{2b} - \mathrm{e}^{2a} \qquad \text{et} \qquad F_2(b) - F_2(a) = \mathrm{e}^{2b} + 1 - \left(\mathrm{e}^{2a} + 1\right) = \mathrm{e}^{2b} - \mathrm{e}^{2a}$$

   c) On remarque que les deux expressions sont égales. Si on prend deux primitives quelconque F_1 et F_2, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + C$. Ainsi, on retrouve que :

$$F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) + C - (F_1(a) + C) = F_1(b) - F_1(a)$$

   Ceci montre que la propriété observée précédemment ne dépend pas des primitives choisies.

2. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$.
   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(x)$.
   Une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
   Donc :
$$\int_1^2 x dx = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} dx = \ln(\mathrm{e}) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$
$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$$