Correction - Bac Blanc (Sujet 1)

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 4 exercices indépendants.

Exercice 1 **1**. Dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$$I\left(0, \frac{1}{4}, 1\right),\ J\left(\frac{1}{4}, 0, 1\right),\ K\left(1, 0, \frac{1}{4}\right)$$

2. On a $\overrightarrow{AG}\,(1,1,1)$, $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right)$, $\overrightarrow{IK}\left(1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.
Or $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 = 0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IK} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), il alors est normal à ce plan.

3. Puisque $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK), alors :

$$M(x,y,z) \in (IJK) \iff 1x + 1y + 1z + d = 0$$

Or on a $I\left(0, \frac{1}{4}, 1\right) \in (IJK)$ donc :

$$0 + \frac{1}{4} + 1 \times 1 + d = 0 \iff 1 + 4 + 4d = 0 \iff 4d = -5 \iff d = -\frac{5}{4}$$

Finalement : $M(x,y,z) \in (IJK) \iff x + y + z - \frac{5}{4} = 0 \iff 4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
Le plan (IJK) a pour équation cartésienne $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.

4. On a $\overrightarrow{BC}\,(0,1,0)$ et $B(1,0,0)$. Donc une représentation paramétrique de (BC) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& t \\ z &=& 0 \end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R}$$

5. Puisque $L \in (BC)$, les coordonnées de $L(x,y,z)$ vérifient qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& t \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

Or $L \in (IJK)$ donc $4x + 4y + 4z - 5 = 0$. En remplaçant, on a :

$$4 \times 1 + 4t + 4 \times 0 - 5 = 0 \iff 4t + 4 - 5 = 0 \iff 4t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{4}$$

Les coordonnées de L sont donc $\left(1, \frac{1}{4}, 0\right)$.

6. Soit $M\left(\dfrac{1}{4}, 1, 0\right)$. Comme L $\in (IJK)$, il suffit de vérifier que M est aussi un point de ce plan, soit d'après le résultat de la question 4. :
$4x_{\mathrm{M}} + 4y_{\mathrm{M}} + 4z_{\mathrm{M}} - 5 = 4 \times \dfrac{1}{4} + 4 \times 1 + 4 \times 0 - 5 = 4 + 1 - 5 = 0$ donc M $\left(\dfrac{1}{4}; 1; 0\right) \in$ (IJK).
Conclusion : les points I, J, K, L et M sont coplanaires.

Exercice 2

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4}x = +\infty$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,$f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times (-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{x} \times (1 + \mathrm{e}^{-x})} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^{x} + 1} + \dfrac{\mathrm{e}^{x} + 1}{4(\mathrm{e}^{x} + 1)} = \dfrac{-4 + \mathrm{e}^{x} + 1}{4(\mathrm{e}^{x} + 1)}$
Donc $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 3}{4(\mathrm{e}^{x} + 1)}$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $4(e^{x} + 1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{x} - 3$. Or :

$$\mathrm{e}^{x} - 3 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x} \geqslant 3 \iff x \geqslant \ln(3)$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4.
- $f(2) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2}\right) + \dfrac{1}{4} \times 2 \approx 0,63$ donc $f(2) < 1$.
- $f(5) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-5}\right) + \dfrac{1}{4} \times 5 \approx 6,25$ donc $f(5) > 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution sur $\alpha \in [2, 5]$. De plus, $\ln(3) \approx 1,1$ donc $[2\ ;\ 5] \subset]\ln(3)\ ;\ +\infty[$, et donc la fonction f est strictement croissante sur $[2\ ;\ 5]$. Ainsi, la solution α est unique. À l'aide de la calculatrice, on trouve que $3 \leqslant \alpha \leqslant 4$.

Partie B

1. **a.** Pour tout réel x :
   - $\mathrm{e}^{x} > 0$;
   - $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $\mathrm{e}^{x} + 1 > 0$ donc $(\mathrm{e}^{x} + 1)^2 > 0$.

   Donc $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^2} > 0$.

b. Pour tout réel x, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe ; sa courbe représentative est donc située au-dessus de toutes ses tangentes, donc au-dessus de Δ.

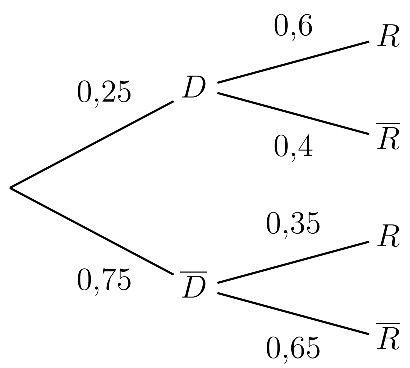
De plus, comme la fonction f est convexe, sa courbe représentative entre les points M et N est située en-dessous de la sécante (MN).

Donc la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ \alpha]$, est à l'intérieur du quadrilatère $MNPQ$.

Exercice 3

Partie A

1.



2. $\mathbb{P}\left(\overline{D} \cap R\right) = \mathbb{P}\left(\overline{D}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = 0,2625$.

3. On a de même $\mathbb{P}(D \cap R) = \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

D'après la loi des probabilités totales :

$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(D \cap R) + \mathbb{P}\left(\overline{D} \cap R\right) = 0,15 + 0,2625 = 0,4125$.

4. Il faut trouver $\mathbb{P}_R\left(\overline{D}\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(R \cap \overline{D}\right)}{\mathbb{P}(R)} = \dfrac{0,2625}{0,4125} \approx 0,64$.

Partie B

1. Les tirs sont indépendants et à chaque tir la probabilité de le réussir est égale à 0,35 : la variable aléatoire X égale au nombre de réussites suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

2. On a $\mathbb{E}[X] = np = 10 \times 0,35 = 3,5$. En moyenne, Stéphanie réussira $3,5$ tirs sur 10.

3. À l'aide de la calculatrice, on a $\mathbb{P}(X \geqslant 6) \approx 0,095$.

Exercice 4 **1.** On doit choisir 6 maillots parmi les 11 disponibles.

Il y a donc $\binom{6}{11} = 462$ possibilités : l'affirmation est **fausse**.

2. Un mot correspond à un 3-arrangement dans un échantillon de 8 lettres.

Il y a donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités : l'affirmation est **vraie**.

3. Pour décrire une main avec un carré, il faut déterminer la valeur des carte (c'est à dire la valeur des 4 cartes de même valeur) et la dernière carte. Il y a 8 valeurs possibles pour le carré en lui-même. Une fois ces 4 cartes déterminées, il reste $32 - 4 = 28$ possibilité pour la dernière carte. Il y a donc 112 carrés possibles : l'affirmation est **fausse**.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or $\frac{-1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: l'affirmation est **fausse**.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \frac{-3x^2\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}{2x^2\left(\frac{1}{2x^2} + 1\right)} = \frac{-3\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}{2\left(\frac{1}{2x^2} + 1\right)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{-3}{2} \times 1 = \frac{-3}{2}$$

Donc f admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -\frac{3}{2}$: l'affirmation est **fausse**.