— 10 —

Orthogonalité et distances dans l'espace

I. Produit scalaires de deux vecteurs

Si on choisit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace, on sait qu'il existe trois points A, B et C de l'espaces (nécessairement dans le même plan) tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Définition 1

On définit l'angle non orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme l'angle $\widehat{ABC}$ vu dans le plan (ABC).

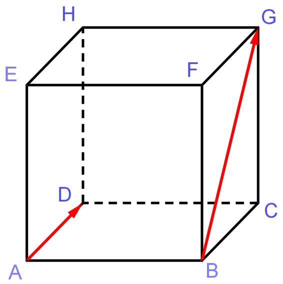
Définition 2

On définit le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ dans l'espace comme le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC). Ainsi, on a :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- Sinon, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Exemple :

Dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$.



D'une part, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$.
L'angle $\widehat{HAD}$ mesure 45° ou $\frac{\pi}{4}$ radians et $AD = 1$. Donc d'après le théorème de Pythagore : $AH = \sqrt{2}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = AD \times AH \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

Définition 3

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Remarque :
Le vecteur $\overrightarrow{0}$ est en particulier orthogonal à tous les autres vecteurs de l'espace.

Propriété 1 : Admise

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, k et k' deux réels.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$. En particulier, $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$.
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$, on dit que le produit scalaire est **symétrique**.
- $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v} + k'\overrightarrow{w}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + k'(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})$ et $(k\overrightarrow{v} + k'\overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = k(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) + k'(\vec{w} \cdot \vec{u})$.
  On dit que le produit scalaire est **bilinéaire**.

Exemple :
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$. On a

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-3\vec{u} + 4\vec{w}) = -3(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 4(\vec{u} \cdot \vec{w}) - 6(\vec{v} \cdot \vec{u}) + 8(\vec{v} \cdot \vec{w}).$$

On remplace alors les valeurs par celle de l'énoncé en rappelant que $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-3\vec{u} + 4\vec{w}) = -3 \times 4^2 + 4 \times (-1) - 6 \times 3 + 8 \times 5 = -30$$

Propriété 2 : Identités de polarisation

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$.

Preuve. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, on a :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$$

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$$

Ce qui donne :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans ces deux expressions, on retrouve les deux premiers points. De plus, en soustrayant ces deux égalités, on trouve que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}.$$

Il suffit de diviser par 4 pour retrouver la dernière égalité recherchée. □

Exemple :
Soient A, B et C trois points de l'espace tels que $AB = 5$, $BC = 7$ et $AC = 8$. On a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||^2 - AB^2 - AC^2).$$

Or, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, d'où

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(CB^2 - AB^2 - AC^2) = -\frac{1}{2}(7^2-5^2-8^2) = -20.$$

II. Bases orthonormées

Définition 4

Soit $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace.

- On dit que la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée si :
  1. $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{k} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0$ (ortho-) ;
  2. $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$ (-normée).
- On dit alors que le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé.

Remarque :
Une famille orthonormée de trois vecteurs forme forcément une base de l'espace.

Propriété 3

On se place dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$. Alors, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Preuve. En décomposant les vecteurs, on a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k})\cdot(x'\overrightarrow{\imath} + y'\overrightarrow{\jmath} + z'\overrightarrow{k})$$

On développe, ce qui donne :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + xz'\vec{\imath}\cdot\vec{k} + yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} + yz'\vec{\jmath}\cdot\vec{k} + zx'\vec{k}\cdot\vec{\imath} + zy'\vec{k}\cdot\vec{\jmath} + zz'\vec{k}\cdot\vec{k}$$

Or, la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée, donc les seuls produits scalaires non nuls sont $\overrightarrow{\imath}\cdot\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}\cdot\overrightarrow{\jmath}$, et $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k}$ qui valent 1.
Il reste donc que : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$ □

Exemple :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(3, -1, 2)$ et $\vec{v}(5, 3, -6)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 + (-1) \times 3 + 2 \times -6 = 15 - 3 - 12 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété 4

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur de l'espace. Alors $\|u\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
En particulier, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points de l'espace, alors

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple :

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $A(1; 2; 5)$ et $B(3; 3; 3)$. On a alors

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

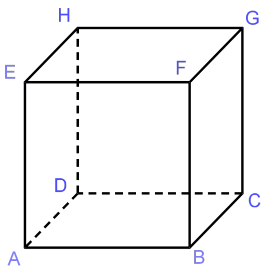
III. Orthogonalité

1. Droites orthogonales

Définition 5

Soit (d) et (d') deux droites de l'espace. On dit que (d) et (d') sont orthogonales si les parallèles à ces deux droites passant par un même point sont perpendiculaires.

Exemple :



On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.
Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales. En effet, la parallèle à (CG) passant par B est la droite (BF) qui est perpendiculaire à la droite (AB).

Propriété 5

Deux droites (d) et (d'), dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, autrement dit si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2. Droite orthogonale à un plan

Définition 6

Soit (d) une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On dit que (d) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à toute droite contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

Propriété 6

Soient (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et P un plan de l'espace dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$.
La droite (d) est orthogonale au plan P si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}_2 = 0$.

Il suffit donc de montrer qu'une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan pour montrer qu'elle est en fait orthogonale à toute droites de ce plan.

Exemple :
On se place dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère les vecteurs $\overrightarrow{v_1}(1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{v_2}(1, 0, 1)$ ainsi que deux points $A(2; 5; 2)$ et $B(5; 8; -1)$. On note P le plan passant par le point O et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\vec{v_2}$ (ces vecteurs n'étant pas colinéaires, ils définissent bien ainsi un plan).
Enfin, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3, 3, -3)$ et puisque l'on est dans un repère orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

- $\overrightarrow{AB} \cdot v_1 = 3 \times 1 + 3 \times 2 + (-3) \times 3 = 0$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot v_2 = 3 \times 1 + 3 \times 0 + (-3) \times 1 = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ donc la droite (AB) est orthogonale au plan P.

3. Vecteur normal à un plan

Définition 7

Soit P un plan et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul. On dit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P s'il est orthogonal à tout vecteur directeur du plan P.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal du plan P.

Propriété 7

Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal au premier est normal au second.

Exemple :

Dans le même contexte qu'aux exemples précédents.
On considère le plan P' passant par un point O', dirigé par $\overrightarrow{w_1}(2, 2, 4)$ et $\overrightarrow{w_2}(0, 2, 2)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}(3, 3, -3)$, qui était normal au plan P, est aussi normal au plan P'.
En effet, les vecteurs $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ ne sont pas colinéaires et définissent donc bien un plan. De plus, puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w_1} = 3 \times 2 + 3 \times 2 + (-3) \times 4 = 0$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w_2} = 3 \times 0 + 3 \times 2 + (-3) \times 2 = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan P'. Les plans P et P' admettent un même vecteur normal, ils sont donc parallèles.

Définition 8

Deux plans sont perpendiculaires si le premier plan contient une droite orthogonale au second plan.

Le concept de plans perpendiculaires peut être trompeur. Par exemple, deux plans perpendiculaires peuvent contenir des droites parallèles. En revanche, il est possible de caractériser la perpendicularité de deux plans en utilisant leurs vecteurs normaux.

Propriété 8

Deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal du second.