Exercice 11

1. Montrons par récurrence ces deux résultats en même temps. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n \ : \ « \, e^2 \leq u_{n+1} \leq u_n \, »$$

Initialisation : Montrons P_0, c'est à dire que : $e^2 \leq u_0 \leq u_1$.
$u_0 = e^3$ et $u_1 = e\sqrt{e^3} = e^{2,5}$ donc $e^2 \leq u_1 \leq u_0$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que P_n est vraie pour un entier naturel n. Montrons alors que P_{n+1} est vraie :

$$\begin{aligned} e^2 \leq u_{n+1} \leq u_n &\iff \sqrt{e^2} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n} \qquad \text{par croissante de la fonction racine} \\ &\iff e \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n} \\ &\iff e \times e \leq e\sqrt{u_{n+1}} \leq e\sqrt{u_n} \qquad \text{car } e \geq 0 \\ &\iff e^2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie et (P_n) est héréditaire.

Conclusion : P_0 est vraie et (P_n) est héréditaire donc P_n est vraie pour tout entier naturel n.

2. D'après la question précédente, on a que (u_n) est décroissante et minorée par e^2 donc elle converge. *Pour déterminer la limite, on utilise le théorème du point fixe vu au chapitre 11. Il s'agit de regarder l'expression $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ à la limite.*
Si on note $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$, alors l'expression vue à la limite donne que $l = e\sqrt{l}$. On résout cette équation pour trouver que $l = e^2$.

3. **a.** $a_n = \ln(u_n) - 2 \iff \ln(u_n) = a_n + 2 \iff u_n = \exp(2 + a_n)$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2 = \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2 = \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$$

   Donc $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, ainsi (a_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$ et $a_0 = \ln(e^3) - 2 = 3 - 2 = 1$.

   c. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = a_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   Ainsi, $u_n = \exp(2 + a_n)) = \exp\left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

   d. $0 < \frac{1}{2} < 1$, et alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \exp(2+0) = e^2$.

Exercice 19

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$ donc $1 + e^x > 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on écrit $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 1 + e^x$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et par composition, on a finalement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x))\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

3. Premièrement, on a $1+e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$ et $1+e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Ensuite, d'après la question précédente, on a pour $x \in \mathbb{R}$ que $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} > 0$.
Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	$+\infty$

4. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) = f(x)-x = \ln(1+e^x)-x = \ln(1+e^x)+(-x) = \ln(1+e^x)+\ln(e^{-x}) = \ln((1+e^x)e^{-x}) = \ln(1+e^{-x})$$

b. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = f(-x)$ et donc :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

5. **a.** D'après ce qui précède, g est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = -f'(-x) < 0$.
On construit alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
g	$+\infty$ ↘	0

b. On voit sur le tableau de variation que g est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) \geq 0 \iff f(x) - x \geq 0 \iff f(x) \geq x$$

6.