Correction du DHC n°2

Qualité du devoir	**Note** /5
Non rendu (après 2 séances).	0
Aucun investissement et/ou soin : travail bâclé !	1
Partie du sujet non traitée ou bâclée.	2
Travail correct mais qui aurait mérité plus d'investissement.	3
Bon travail mais quelques erreurs et/ou manque de soin.	4
Très bon travail, soigneux et détaillé.	5

Exercice 1

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\1-0\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}\frac{2+1}{2}\\\frac{0+1}{2}\\\frac{2+1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

2. Pour déterminer si des vecteurs forment une base, il faut déterminer s'ils sont coplanaires.

- Montrons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{v}$, alors en regardant les premières coordonnées, on a $\lambda \times 0 = 2$, ce qui est impossible.

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

- Enfin, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v} &\iff \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda\\0\\\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\mu\\2\mu\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda\\-\mu\\\lambda+2\mu\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}2\lambda &= -1\\ -\mu &= 1\\ \lambda+2\mu &= 1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\lambda &= -\dfrac{1}{2}\\ \mu &= -1\\ \lambda+2\mu &= 1\end{cases}
\end{aligned}$$

On remarque que la dernière équation de notre système est incompatible avec les valeurs de λ et μ : $\lambda+2\mu=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}\neq 1$.

Donc il n'existe pas de tels λ et μ et donc nos vecteurs ne sont pas colinéaires et forment une base.

3. Puisque I est le milieu de $[AB]$, on a :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v}$$

On a donc $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 2

1. Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0$.
En particulier, on a donc que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = qu_n < u_n$ puisque $0 < q < 1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_{n+1} < u_n$, c'est à dire que (u_n) est décroissante.
Ensuite, puisque $u_0 > 0$ et $q > 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n = u_0q^n > 0$. Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée donc convergente.
On rappelle que, d'après le cours, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ donc (u_n) converge vers 0.

3. On pose $a = q - 1$. Puisque $q > 1$, alors $a > 0$ et donc on peut appliquer l'inégalité de Bernoulli. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1+a)^n \geq 1 + na \iff (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1) \iff q^n \geq 1 + n(q-1)$$

4. Puisque $q - 1 > 0$, alors $n(q-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc :

$$1 + n(q-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Par comparaison, on a alors que $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Puisque $u_n = u_0q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a aussi que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

6. On va étudier l'expression $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ en fonction de q.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$ et donc $1 - q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Or $1 - q < 0$ donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ et donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-q}$.