Logarithme népérien

Exercice 1 Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de x, l'expression donnée a-t-elle un sens ?

1. $\ln x$
2. $\ln(3-x)$
3. $\ln(x+2)$
4. $\dfrac{1}{\ln(x^2)}$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

1. $2\ln(x)+1=3$
2. $\ln(3x-4)=0$
3. $e^{3x+2}=4$
4. $2+3\ln(3x-2)=-1$
5. $\ln(e^{3x+4})=5$
6. $e^{2x-3}=3-\pi$
7. $(e^{2x}-3)(e^x+5)=0$
8. $(\ln(x))^2-\ln(x)=0$
9. $(e^x-1)\ln(x-e)=0$

Exercice 3 En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $3e^{2x}+9e^x-30=0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Résoudre les inéquations suivantes. On précisera bien les domaines de résolution.

1. $\ln(5x-3)\geqslant 0$
2. $\ln(9x-2)<0$
3. $\ln(3x+1)\geqslant\ln(3-x)$

Exercice 5 Soit $f\,:\,x\mapsto\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On admet que pour tout $y\in]-1,1[$, il existe un unique réel x tel que $y=f(x)$. Exprimer x en fonction de y.

Pour prouver qu'un tel y existe, on doit utiliser des résultats vus dans le chapitre sur la continuité.

Exercice 6 Simplifier les écritures suivantes.

1. $\ln(3)+\ln(4)-\ln(6)$
2. $\dfrac{\ln(9)}{\ln(3)}-\ln(1)$
3. $4\ln(3)-\ln(9)+2\ln(27)$
4. $\ln(3x^2)-\ln(3)$ avec $x>0$

Exercice 7 Montrer que pour tout réel x, on a : $\ln(1+e^{-x})=\ln(1+e^x)-x$.

Exercice 8 Montrer que pour tout réel $x>1$, on a : $\ln(x^2-1)-\ln(x^2+2x+1)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Exercice 9 Résoudre l'équation $\ln(4x^2)+6\ln(x)-3=0$, d'inconnue $x>0$.

Exercice 10

1. Donner la valeur de $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)+\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$?
2. Conjecturer la valeur de $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$.
3. Montrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 11 On considère la suite (u_n) définie par $u_0=e^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $e^2\leqslant u_n$.
2. En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n=\ln(u_n)-2$.
   a. Exprimer u_n en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
   b. Montrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=\exp\left(2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
   d. Retrouver la limite de la suite (u_n) à l'aide de cette expression.

Exercice 12 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1-x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2\ln(x))$
5. $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x^2\ln(x))$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-\ln(x))$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(e^x-x)$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x-x)$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x-\ln(x))$

Exercice 13 Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
4. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.

Exercice 14 Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.

Exercice 15 On rappelle que pour tous $a>0$ et $n\in\mathbb{Z}$, on vérifie que $a^n=\mathrm{e}^{\ln(a^n)}=\mathrm{e}^{n\ln(a)}$. On se sert de cette propriété pour généraliser la puissance pour tout réel.
Soit $a>0$, on définit alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $a^x=\mathrm{e}^{x\ln(a)}$. De plus, on considère $f : x\mapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que pour $a>0$ et $x, y\in\mathbb{R}$, on a $a^{x+y}=a^x\times a^y$.
2. Justifier que f est dérivable et donner l'expression de f'.

Exercice 16 Résoudre l'inéquation $(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)<0$ sur $\mathbb{R}$. On précisera le domaine de définition de cette expression.

Exercice 17 À l'aide du logarithme, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant les conditions suivantes.

1. $2^n \geqslant 40000$
2. $1.01^n \geqslant 2$
3. $0.7^n \leqslant 10^{-3}$
4. $121\times 0,97^{2n+1}\leqslant 1$
5. $3\times 1,1^n-150\geqslant 365$
6. $10^{12}\times 2^{-n}\leqslant 0,1$

Exercice 18 La population d'une ville augmente de 3% chaque année. Après combien d'années cette population aura-t-elle doublé ?

Exercice 19 On considère $f : x\mapsto \ln(1+e^x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.
4. Pour tout réel x, on pose $g(x)=f(x)-x$.
   a. Montrer que pour tout réel x, $g(x)=\ln(1+e^{-x})$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.
5. a. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   b. En déduire que pour tout réel x, $f(x)\geqslant x$.
6. Construire l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.