Correction - Évaluation n°1

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1

1. $\overrightarrow{u}$ est coplanaire à $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}$.
2. Pour $q \in]-1,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 2 1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-3\end{pmatrix}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc A, B et C ne sont pas alignés.
3. *(Comment trouver les facteurs λ et μ)* Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD} &\iff \begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\lambda-2\mu\\-2\lambda-3\mu\\-2\lambda-3\mu\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} -4\lambda-2\mu &= -4\\ -2\lambda-3\mu &= -1\\ -2\lambda-3\mu &= -1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -4\lambda &= -4+2\mu\\ -2\lambda-3\mu &= -1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda &= 1-\frac{1}{2}\mu\\ -2\lambda-3\mu &= -1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda &= 1-\frac{1}{2}\mu\\ -2+\mu-3\mu &= -1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda &= 1-\frac{1}{2}\mu\\ -2\mu &= 1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda &= 1+\frac{1}{4}\\ \mu &= -\frac{1}{2}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{4}\\ \mu &= -\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

4. On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{AB}$ donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
5. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, alors les points A, B, C et D sont sur le même plan.
   Ainsi les droites (AB) et (CD) sont coplanaires. Puisqu'elles ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

Exercice 3 1. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : « $T_n \geqslant 20$ ». Procédons par récurrence :

Initialisation : $T_0 = 180 \geqslant 20$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie, c'est à dire que $T_n \geqslant 20$. Montrons que P_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} T_n \geqslant 20 &\iff 0,955 \times T_n \geqslant 0,955 \times 20 \qquad \text{car } 0,955 \geqslant 0 \\ &\iff 0,955T_n \geqslant 19,1 \\ &\iff 0,955T_n + 0,9 \geqslant 19,1 + 0,9 \\ &\iff 0,955T_n + 0,9 \geqslant 20 \\ &\iff T_{n+1} \geqslant 20 \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie et (P_n) est héréditaire.

Conclusion : P_0 est vraie et (P_n) est héréditaire donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= 0,955T_n + 0,9 - T_n \\ &= -0,045T_n + 0,9 \\ &= -0,045\left(T_n - \frac{0,9}{0,045}\right) \\ &= -0,045(T_n - 20) \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, on a $T_n \geqslant 20$, donc $T_n - 20 \geqslant 0$.
Ceci montre alors que $T_{n+1} - T_n \leq 0$ et donc (T_n) est décroissante.

c. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = T_n - 20$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = T_{n+1} - 20 &= 0,955 \times T_n + 0,9 - 20 \\ &= 0,955\ T_n - 19,1 \\ &= 0,955 \left(T_n - \frac{19,1}{0,955} \right) \\ &= 0,955(T_n - 20) \\ &= 0,955\ u_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 0,955 u_n$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n$.

Ainsi, puisque $u_n = T_n - 20$ alors $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,955^n = 0$ car $0,955 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 20$.