Correction - Devoir commun n°1

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 4 exercices indépendants.

Exercice 1

Pour $n \geq 1$, on pose P_n : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : P_1 : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1 \times (1+1)}{2}$ »

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1 \times (1+1)}{2}$ et ainsi, P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que P_n est vraie. C'est à dire :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons que P_{n+1} est vraie :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{par factorisation}
\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie et (P_n) est héréditaire.

Conclusion : P_1 est vraie et (P_n) est héréditaire donc par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Donc pour tout $n \geq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2

1. D'après l'énoncé, on a $a_1 = (1 + 0,10)a_0 = 1,1 \times a_0 = 1,1 \times 2000 = 2200$
et $a_2 = 1,1 \times a_1 = 1,1 \times 2200 = 2420$.
L'entreprise produit donc 2200 alarmes la semaine 1 et 2420 alarmes la semaine 2.

2. D'après l'énoncé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $a_{n+1} = 1,1 \times a_n$.
Donc (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,1$.

3. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = a_0 \times q^n = 2000 \times (1,1)^n$.

4. D'après la question précédente, on a $a_{20} = 2000 \times (1,1)^{20} \approx 13455$.
Donc, au bout de 20 semaines, l'entreprise produit environ 13455 alarmes.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : « $2000 \leq w_{n+1} \leq w_n$ ».
Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : P_0 : « $2000 \leq w_1 \leq w_0$ »
On a $w_0 = 2500$ et $w_1 = 0,8w_0 + 400 = 0,8 \times 2500 + 400 = 2400$.
Donc $2000 \leq w_1 \leq w_0$ et ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie. C'est à dire :

$$2000 \leq w_{n+1} \leq w_n$$

Montrons que P_{n+1} est vraie :

$$\begin{aligned} 2000 \leq w_{n+1} \leq w_n &\iff 0,8 \times 2000 \leq 0,8w_{n+1} \leq 0,8w_n \qquad \text{car } 0,8 \geq 0 \\ &\iff 1600 + 400 \leq 0,8w_{n+1} + 400 \leq 0,8w_n + 400 \\ &\iff 2000 \leq w_{n+2} \leq w_{n+1} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie et (P_n) est héréditaire.

Conclusion : P_0 est vraie et (P_n) est héréditaire donc par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2000 \leq w_{n+1} \leq w_n$

Exercice 4

1. Calculons d'abord u_5 : puisque il s'agit d'une suite géométrique de raison $1,1$ telle que $u_0 = 3$, alors $u_5 = 3 \times (1,1)^5 \approx 4,83$.

Ensuite, on rappelle que, concernant un suite géométrique de raison $q \neq 1$, pour tous entiers naturels $p \leq n$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - p}$$

En utilisant cette formule avec $p = 5$, $n = 20$ et $q = 1,1$, on a alors :

$$\sum_{k=5}^{20} u_k = 4,83 \times \frac{1 - (1,1)^{16}}{1 - 1,1} \approx 173,64$$

2. On réutilise la formule de la question 1, avec $p = 0$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - p} = 3 \times \frac{1 - (1,1)^{n+1}}{1 - 1,1} = 3 \times \frac{(1,1)^{n+1} - 1}{0,1}$$