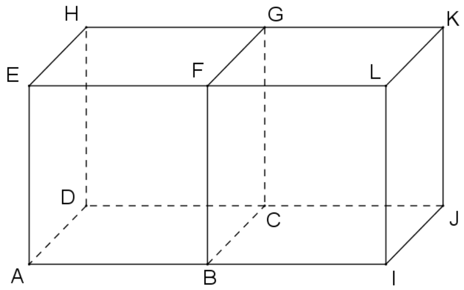
Vecteurs de l'espace

Exercice 1

On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte. Compléter les égalités de vecteurs suivantes.



$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{B\ldots}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{E\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{F\ldots}$

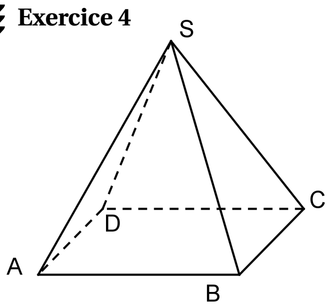
$\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{A\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{\ldots A}$

Exercice 2 En utilisant la même figure, exprimer...

- ... le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JD}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{DL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JE}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{BK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{CG}$.

Exercice 3 Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[IJ]$.
Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MK}$

Exercice 4

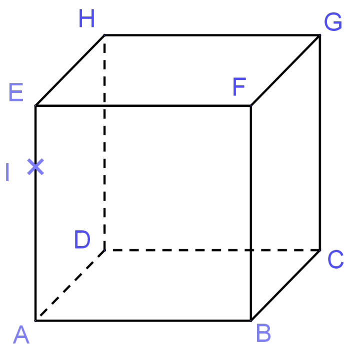


On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et de sommet S.

On considère les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS}$.
Montrer que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.
Ceci implique que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Droites et plans de l'espace

Exercice 5



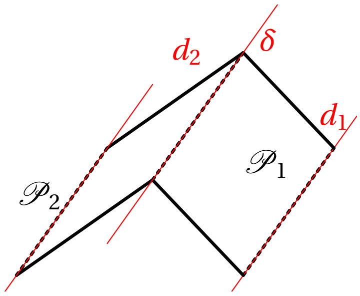
On considère le $ABCDEFGH$ ci-contre, ainsi qu'un point I sur le segment $[AE]$.
Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont coplanaires ou non. Si oui, préciser si elles sont parallèles ou sécantes. Lorsqu'elles sont sécantes, construire le point d'intersection de ces droites.

(AB) et (FG)	(AF) et (IE)
(CD) et (EB)	(DI) et (EH)
(IB) et (FA)	(GF) et (DA)

Exercice 6 Sur le cube précédent, déterminer...

a. l'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH).
b. un plan parallèle au plan (BFG).
c. l'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB).
d. l'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD).
e. un plan parallèle au plan (IEB).
f. l'intersection de la droite (AI) et du plan (FGH).

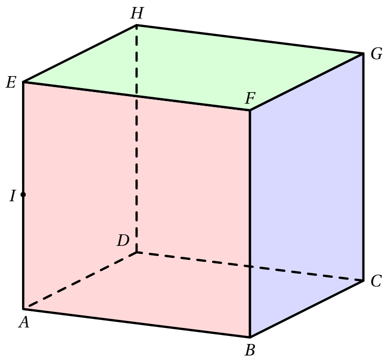
Exercice 7



Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans sécants suivant une droite δ. Soient $d_1 \in \mathscr{P}_1$ et $d_2 \in \mathscr{P}_2$ deux droites parallèles, montrer que la droite δ est parallèle aux deux droites d_1 et d_2.

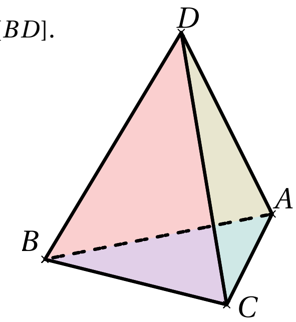
Bases et repères de l'espace

Exercice 8



1. Donner un repère du plan (ABC).
2. Donner un repère de la droite (AE)
3. On note I le milieu de $[AE]$
   a. $\left(I; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right)$ est-il un repère d'un plan ? Justifier.
   b. $\left(I; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}\right)$ est-il un repère d'un plan ? Justifier.
4. Donner trois différentes bases de l'espace en utilisant les points de la figure.

Exercice 9 Soit un tétraèdre $ABCD$. On note I le milieu de $[CD]$ et J le milieu de $[BD]$.



1. L'espace est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$
   a. Donner les coordonnées de tous les points de la figure.
   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
2. Mêmes questions avec l'espace rapporté au repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$.

Exercice 10 On considère les points $A(0,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(3,1,1)$ et $D(1,1,1)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit E le point de coordonnées $(2;2;4)$. Déterminer les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soit I le point de l'espace tel que$F$ soit le milieu de $[AI]$ et J le milieu de $[EF]$. Démontrer que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 11 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1,3,5)$, $B(2,7,-1)$ et $C(5,19,-19)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 12 On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2,4,-1)$, $B(3,-2,5)$ et $C(6,7,-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$.
3. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$.

Exercice 13 On considère les points $A(1,1,2)$ et $B(-1,3,4)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires.
2. Soit M, le point du plan défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v}$. Les points A, B et M sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 14 On se place dans un repère de l'espace $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2,2,0)$, $B(0,1,0)$, $C(1,0,1)$, $D(0,0,3)$ et $E(-1,4,0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?
3. Donner les coordonnées du point E dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.