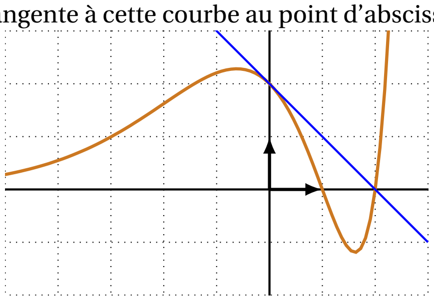
Convexité

Convexité, concavité

Exercice 1 On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a également tracé la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
2. Donner une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f'(-3)$.
4. La fonction f semble-t-elle convexe ou concave sur $[-5;-2]$? sur $[-2;1]$? sur $[1;2]$?

Exercice 2 On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		0		3
f	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

On sait de plus que f est convexe sur $[-5;-2]$ puis concave sur $[-2;3]$.
Tracer une courbe représentative compatible avec ces données.

Convexité des fonctions dérivables

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Soit $a > 0$.

1. Montrer que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) = \frac{(a-x)^2}{a^2 x}.$$

2. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?

Exercice 4 Voici le tableau de variation de la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $[-7 ; 5]$.

x	-7		-2		-1		5
$f'(x)$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Déterminer la convexité de f.
3. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Exercice 5 Soient a et b deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est également convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 7 Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$.
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

Exercice 8 On considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Justifier que pour tout réel x, $0 < f(x) < 1$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{3}{4}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,
$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-x})^3}.$$
6. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe/concave.

Exercice 9 Soit f une fonction dérivable, convexe et croissante sur un intervalle $[a;+\infty[$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Inégalités de convexité

Exercice 10 Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $[0;+\infty[$?
2. En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :
$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$
3. Quelle inégalité a-t-on redémontré ?

Exercice 11 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$.

1. Pour tout réel $x > 0$, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
2. f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
4. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$. Représenter graphiquement cette inégalité.

Exercice 12 *(Exercice de synthèse)* On considère la fonction f définie pour tout réel x par
$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$

La courbe représentative de f dans un repère orthogonal sera notée $\mathscr{C}_f$.

1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On y inclura les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,
$$f''(x) = (16x^2 - 32x + 12)\,\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$
3. En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en chacun des points d'inflexion.
5. Montrer que pour tout réel x, $f(2-x) = f(x)$. Comment interpréter cette propriété ?
6. Représenter l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.