Nom :

Question de cours :

- Rappeler les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$
- Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice :

Montrer que les fonctions réelles définies ci-dessous sont continues :

1.$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2.$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x^3} & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice :

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$. Soit f une fonction 1-périodique telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} = a$.

1. Soient $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n) = a$.
2. Soient $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de $f(x+n)$? En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n) = f(x)$.
3. En déduire que f est constante.

Exercice :

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un point fixe, c'est-à-dire un point $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}e^x$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$
- Que dire de l'image d'une segment par une application continue ?

Exercice :

Montrer que les fonctions définies ci-dessous sont continues sur leur domaine de définition :

1.$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2.$\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice :

Que dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$?

Exercice :

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

1. Donner une représentation graphique d'une fonction périodique.
2. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique continue est bornée.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(x)$
- Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la continuité de f en a.

Exercice :

Montrer que les fonctions réelles définies ci-dessous sont continues :

1.$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 1 \\ \ln(x^2 - x + 1) \text{ sinon} \end{cases}$

2.$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Exercice :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.

Exercice :

1. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$.

On se donne un fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante. Le but de l'exercice est démontrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire un point $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On pose $g \ : \ x \mapsto f(x) - x$.

2. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
3. En déduire que f possède un point fixe.

Commentaire :