Primitives

Primitives de fonctions usuelles

Exercice 1 *(Centres étrangers 2023)*
On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Quelle propriété est vérifiée par H ?

a. H est positive sur $]-\infty;0]$.

b. H est croissante sur $]-\infty;1]$.

c. H est négative sur $]-\infty;1]$.

d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $]0;+\infty[$.

Exercice 3 Montrer que $F : x \mapsto (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2-1}$ est une primitive de $f : x \mapsto (4x^2+2x+2)\,\mathrm{e}^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{4x+3}$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto (8x+14)\,\mathrm{e}^{4x+3}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Pour tout réel x, on pose $f(x) = (-3x^2+2x+12)\,\mathrm{e}^{1-3x}$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $F : x \mapsto (ax^2+bx+c)\,\mathrm{e}^{1-3x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Pour tout réel x, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(1) = 3$.

Exercice 7 Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ et $F(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$.
Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(0) = 0$.

Exercice 8 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles donnés.

$f_1 : x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.

$f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8\,\mathrm{e}^{4x+2} - \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$

$f_4 : x \mapsto 4x^4 + 3x^2 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x^7}$ sur $]-\infty;0[$

$f_5 : x \mapsto 3\,\mathrm{e}^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x} + x^4 - \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{5}{x^4}$ sur $]0;+\infty[$.

$f_8 : x \mapsto \dfrac{2x^5+3x^2+1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$

Exercice 9 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui respecte la condition initiale indiquée.

$f_1 : x \mapsto 2x+1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F_1(3) = 2$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ avec $F_2(1) = 3$

$f_3 : x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{3x-4} + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F_3\left(\dfrac{4}{3}\right) = 5$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{3}{x} + x$ sur $]-\infty;0[$ avec $F_4(-1) = 2$

Primitive de fonctions composées

Exercice 10 Donner une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la primitive d'une fonction composée.

$f_1 : x \mapsto (4x+1)\,e^{2x^2+x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto -\dfrac{2\,e^{2x}}{(3+e^{2x})^2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto x^2\,e^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$.

$f_5 : x \mapsto \dfrac{4x+10}{x^2+5x+7}$ sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}$ sur $]0;+\infty[$

$f_7 : x \mapsto -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

$f_8 : x \mapsto x\,e^{x^2-5}$ sur $\mathbb{R}$

$f_9 : x \mapsto 3\,e^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

$f_{11} : x \mapsto \dfrac{4x^3-6x}{x^4-3x^2+5}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1;+\infty[$

$f_{13} : x \mapsto \dfrac{10x}{(5x^2+7)^2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{14} : x \mapsto \dfrac{-2x-5}{x^4+10x^3+25x^2}$ sur $]0;+\infty[$

$f_{15} : x \mapsto (3x^2+1)(x^3+x+8)$ sur $\mathbb{R}$

$f_{16} : x \mapsto (4x+2)(x^2+x-5)^3$ sur $\mathbb{R}$

$f_{17} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$

$f_{18} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x}$ sur $]0;+\infty[$

Exercice 11 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui respecte la condition initiale indiquée.

$f : x \mapsto x^2\,e^{x^3}$ avec $F(0)=3$

$f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ avec $F(2)=7$

$f : x \mapsto \dfrac{8x+4}{2x^2+2x+1}$ avec $F(-1)=3$

$f : x \mapsto \dfrac{-3x}{(x^2+1)^2}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=2$

Exercice 12 Pour tout réel x différent de 1 et -3, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$. (On appelle cette technique la *décomposition en éléments simples*)
2. En déduire une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

Exercice 13 *(Polynésie 2022)*

Sélectionner la réponse correcte. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par...

a. $K(x)=H(2x)$ **b.** $K(x)=2H(2x)$ **c.** $K(x)=\dfrac{1}{2}H(2x)$ **d.** $K(x)=2H(x)$