— 19 —

Compléments

I. Équations bicarrées

Définition 1

On appelle **équation bicarrée** les équations de la forme

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Méthode :

1. On pose le changement de variable $X = x^2$. L'équation devient donc $aX^2 + bX + c$.
2. On résout cette nouvelle équation. En fonction du signe du discriminant, le nombre de solutions peut varier de 0 à 2. Dans le cas où il en existe 2, on les appelle X_1 et X_2 (s'il en existe une unique, on la nomme X_0 et la suite est similaire).
3. Puisque X_1 et X_2 résolvent notre équation, alors si il existe des x tels que $x^2 = X_1$ ou $x^2 = X_2$, ce sont de bons candidats pour les solutions à notre équation de départs.
4. On note l'ensemble de ces x (qui sont, au maximum, au nombre de 4) et on vérifient qu'ils sont, ou non, solutions de l'équation de départ

Exemple :

On considère l'équation $(E) \ : \ x^4 - x^2 - 2$ dans $\mathbb{R}$.

On effectue le changement de variables $X = x^2$, ce qui nous donne l'équation :

$$(E') \ : \ x^2 - x - 2$$

Le discriminant de l'équation (E') est $\Delta = (-1)^2 + 4 \times 2 = 9 = 3^2$. Les solutions de (E') sont donc :

$$X_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Puisque $X_1 < 0$, alors il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = X_1$. Cependant, il existe deux valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $x^2 = X_2 = 2$. On les notes alors $x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$.
On vérifie ensuite si x_1 et x_2 sont solutions de (E) en réinjectant ces valeur dans l'équation. Après calcul, on voit qu'elle le sont : les solutions de (E) sont $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

⚠️ **Remarque :**

• Si on veut résoudre ce genre d'équations dans le corps des complexes $\mathbb{C}$, alors il suffit d'étendre les $x \in \mathbb{C}$ qui vérifient que $x^2 = X_1$ ou $x^2 = X_2$.

• Certaines équations se résolvent de manière similaire mais avec un changement de variable différent. Par exemple : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$ avec $X = \mathrm{e}^{x}$.

II. Décomposition en éléments simples

La décomposition en éléments simples est une technique utilisée pour décomposer une fraction rationnelle (une fraction avec des polynômes au numérateur et au dénominateur) en somme de fractions plus "simple" (avec des polynômes de degrés plus petits).
La technique générale est assez difficile donc on se contente d'un exemple :

🖊 **Exemple :**

On veut décomposer la fraction $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

On multiplie cette équation par l'un des dénominateur (ici $(x-1)$) :

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} \iff \frac{1}{(x+2)} = a + \frac{b(x-1)}{x+2}$$

Si on évalue cette nouvelle égalité en $x = 1$, on a donc :

$$\frac{1}{3} = a$$

En multipliant l'égalité de départ par $(x+2)$ et en évaluant en -2, on trouve $b = \dfrac{1}{-3}$.
Ainsi, $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{1}{3(x+2)}$

III. Factorisation

Le but est de généraliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

Propriété 1

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k n^{n-1-k} = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Exemple :

Déterminons la limite de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x-1}$ lorsque x tend vers 1. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a :

$$f(x) = \frac{x^4-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1} = x^3+x^2+x+1$$

Ainsi, on a que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1+1+1+1 = 4$.

IV. Binôme de Newton

Propriété 2

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple :

En choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on a que :

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

V. Trigonométrie

Propriété 3 : Formules d'addition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

Remarque :

- La preuve de la première formule suffit à retrouver les autres. En effet, il suffit s'utiliser que $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$ pour passer du cosinus au sinus.

• Pour la preuve de la première formule, la façon naturelle de le faire est la visualisation géométrique ou alors le calcul matriciel. On ne la démontre pas ici.

Propriété 4 : Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Preuve. On applique les formules d'addition avec $b = a$. □

Corollaire 1 : Réduction du carré

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Preuve. On utilise la propriété précédente et l'égalité $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$. □

Exemple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{2}dx = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2a)}{4}\right]$$

On trouve alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{4} = \frac{\pi}{4}$

VI. Suites arithmético-géométriques

Définition 2

Une suite arithmético-géométrique est une suite numérique définie par une relation de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Méthode :

1. La fonction associée à notre suite récurrente est $f : x \mapsto ax + b$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
   On cherche le point fixe de f, c'est à dire le réel l tel que $l = al + b$.
2. On pose $v_n = u_n - l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut facilement vérifier que cette suite est géométrique.
3. On donne la forme explicite de (v_n) et on utilise que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n + l$ pour donner la forme explicite de (u_n).

Exemple :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$.

On cherche l tel que $l = 4l - 6$:

$$l = 4l - 6 \iff -3l = -6 \iff l = 2$$

On pose maintenant $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 6 - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2) = 4v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 4. De plus $v_0 = u_0 - 2 = 2$ Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 2 \times 4^n$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n + 2 = 2 \times 4^n + 2$

VII. Méthode du pivot de Gauss

Voir le lien suivant : https://www.mathieu-mansuy.fr/pdf/PCSI5-chapitre7.pdf.