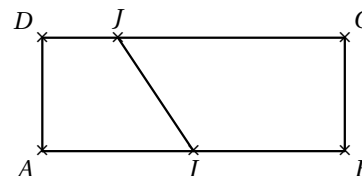


Orthogonalité et distances dans l'espace

Produit scalaire dans l'espace

Exercice 1 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{4DJ} = \overrightarrow{DC}$. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$
3. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$
4. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$



Exercice 2 On considère trois points A , B et C tels que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$. Déterminer la mesure de l'angle \widehat{BAC} .

Exercice 3 Est-il possible d'avoir 3 points de l'espace A , B et C tels que $AB = 3$, $BC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$?

Exercice 4 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Dans cet exercice, on veut prouver que $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$ mais sans utiliser que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, en utilisant uniquement les propriétés du produit scalaire. Pour tout réel t , on pose $P(t) = \|\vec{u} + t\vec{v}\|^2$.

1. Montrer que $P : t \mapsto P(t)$ est un polynôme du second degré.
2. Que peut-on dire sur le signe de P ? Et donc sur son discriminant?
3. En déduire l'inégalité. (Elle est appelée : Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Exercice 5 Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$ et $\|\vec{u}\| = 4$.

1. Que vaut $2\vec{u} \cdot (3\vec{v} - 2\vec{w} + 4\vec{w})$?
2. Que vaut $(3\vec{v} - 2\vec{u}) \cdot (4\vec{w} + \vec{u})$?

Exercice 6 On considère trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur \vec{u} est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

Exercice 7 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 7$. Que valent $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|$?

Exercice 8 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 5$. Montrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Exercice 9 Soit A , B et C trois points de l'espace tel que $AB + BC = AC$. Montrer que ces points sont alignés.

Base orthonormée

Exercice 10 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Montrer que $\vec{u}(1, 5, -9)$ et $\vec{v}(3, 3, 2)$ sont orthogonaux.

Exercice 11 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2, 5, 1)$, $B(3, 1, 2)$, $C(8, 2, x)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}
2. Pour quelle valeur du réel x les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont-ils orthogonaux?

Exercice 12 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$, $C(-1; 1; 1)$.

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
3. Calculer les longueurs AB et AC .
4. En déduire une mesure de l'angle \widehat{BAC} arrondie eu degré près.

**Exercice 13**

1. Interpréter le script python suivant. Que renvoie la fonction `norme(4,3,0)`.

```
1 from math import sqrt
2 def norme(x,y,z):
3     N=sqrt(x**2+y**2+z**2)
4     return N
```

2. Compléter le script python suivant afin qu'il renvoie la distance entre deux points de l'espace.

```
1 from math import sqrt
2 def distance(x1,y1,z1,x2,y2,z2):
3     D = norme(.....)
4     return D
```

**Exercice 14** Quelle est la distance entre deux sommets opposés d'un cube de coté a ?

Exercice 15 On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}(1, 0, 1)$, $\vec{v}(0, 1, 1)$ et $\vec{w}(1, 1, 0)$.

1. Montrer que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires.
2. Soit λ un réel et $\vec{V} = \vec{v} + \lambda \vec{u}$. Déterminer la valeur de λ pour que \vec{V} et \vec{u} soient orthogonaux.
3. Soit μ_1 et μ_2 deux réels et $\vec{W} = \vec{w} + \mu_1 \vec{v} + \mu_2 \vec{u}$. Déterminer les valeurs de μ_1 et μ_2 pour que le vecteur \vec{W} soit orthogonal aux vecteurs \vec{v} et \vec{u} .
4. En déduire une base orthonormée de l'espace différente de $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Ce procédé pour construire une base orthonormée à partir d'une base qui ne l'est pas est appelé procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Orthogonalité



Exercice 16 On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère $A(2, 5, 1)$, $B(3, 2, 3)$ et $C(3, 6, 2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.



Exercice 17 On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Quelle est la nature du repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$?
2. Déterminer les coordonnées des points F , D , B et H dans ce repère.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs \vec{DF} et \vec{BH} .
4. Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires?



Exercice 18 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1, 2, 1)$, $B(3, 4, 1)$, $C(4, -1, 6)$ et $D(6, 1, 6)$. Montrer que $ABDC$ est un rectangle.



Exercice 19 On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère le plan \mathcal{P} passant par O et dirigé par les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 . Montrer que \vec{u} est normal au plan \mathcal{P} .



Exercice 20 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3, -2, -2)$, $B(1, 3, -8)$ et $C(-2, 0, 4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n}(2, 2, 1)$. Montrer que \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) .



Exercice 21 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère $\vec{u}(2, 0, -1)$ et $\vec{v}(1, -1, 1)$.

1. Montrer que \vec{u} et \vec{v} définissent un plan de l'espace.
2. Déterminer un vecteur \vec{n} normal à ce plan.