Devoir commun n°2

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant n + 3$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère $A(2, 3, 5)$, $B(-1, -4, -3)$, $C(1, 6, 2)$, $D(-2, 3, 1)$, $E(-1, 0, 4)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}(1, -7, -4)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2. Les droites (AE) et (CD) sont-elles parallèles ?

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils coplanaires ?

4. En déduire qu'il existe trois nombres réels uniques x, y et z tels que :

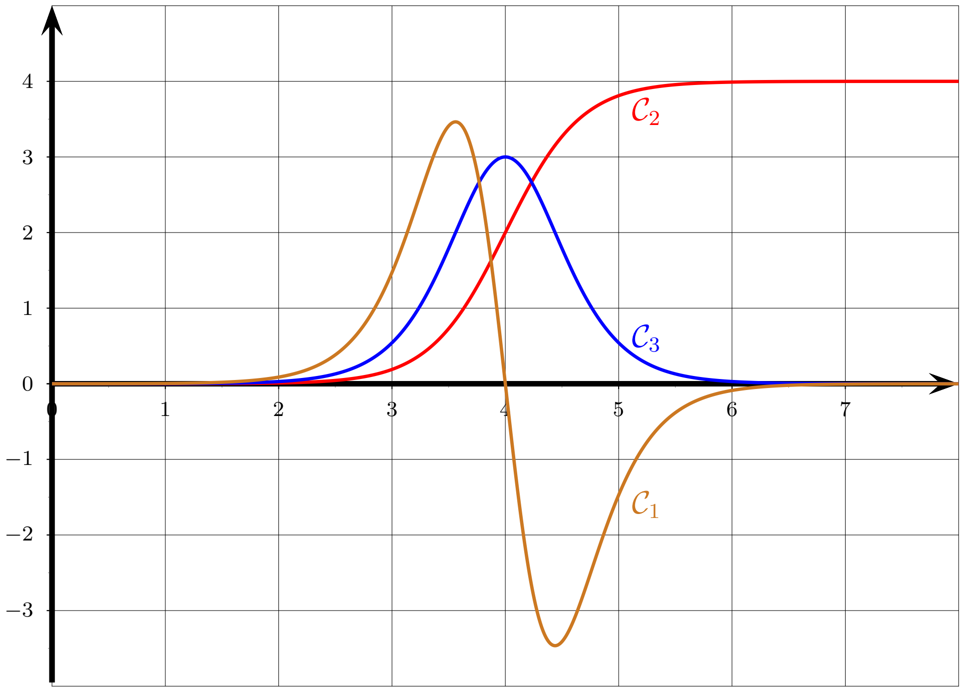
$$\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$$

5. Vérifier que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. En déduire les valeurs des nombres x, y et z de la question précédente. Comment appelle-t-on ces nombres ?

Exercice 3

Le plan est ramené à un repère orthogonal.

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Comment appelle-t-on le point de la courbe $\mathcal{C}_2$ situé au point d'abscisse 4 ?

Soit un réel k strictement positif.

On considère la fonction dérivable g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + \mathrm{e}^{-kx}}.$$

4. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. En déduire les équations de deux asymptotes à la courbe représentative de g.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = 4k\dfrac{e^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}$.

   En déduire la valeur de $g'(0)$.