Nom :

Question de cours :

- Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable.
- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possédant 3 valeurs propres distinctes. Que peut-on dire de A ?

Exercice :

1. Dans les cas suivants, montrer que X est vecteur propre de A et donner la valeur propre associée :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Dans les cas suivants, trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ :

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$ b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = -1$

Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$.

1. Montrer que Q est un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer les racines de Q.
3. En déduire trois valeurs propres de A. Que peut-on en déduire ?
4. Donner une diagonalisation de A.

Exercice :

On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= 5x_n - 4z_n \\ z_{n+1} &= x_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$.

2) Soient $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $PD = AP$ et en déduire que A est diagonalisable.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$.

4) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) En déduire les valeurs de x_n, y_n et z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler la définition de valeur propre.
- Donner un polynôme annulateur pour les matrices d'ordre 2.

Exercice :

1. Dans les cas suivants, montrer que X est vecteur propre de A et donner la valeur propre associée :

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Dans les cas suivants, trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 0$ b) $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -6 \\ -8 & 0 & -7 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$

Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^3 - 2X^2 + 3X$.

1. Montrer que Q est un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer les racines de Q.
3. En déduire trois valeurs propres de A. Que peut-on en déduire ?
4. Donner une diagonalisation de A.

Exercice :

On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -4y_n - z_n \\ y_{n+1} &= x_n - 3y_n - z_n \\ z_{n+1} &= -4x_n + 8y_n + 3z_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$.

2) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $PD = AP$ et en déduire que A est diagonalisable.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$.

4) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) En déduire les valeurs de x_n, y_n et z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler la définition de vecteur propre.
- Soit A une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Soit Q un polynôme annulateur de A, que peut-on dire de $Q(\lambda)$?

Exercice :

1. Dans les cas suivants, montrer que X est vecteur propre de A et donner la valeur propre associée :

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 6 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Dans les cas suivants, trouver un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 3$ b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 2$

Exercice :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 2 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

1. Montrer que Q est un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer les racines de Q.
3. En déduire trois valeurs propres de A. Que peut-on en déduire ?
4. Donner une diagonalisation de A.

Exercice :

On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = -2x_n - 2y_n + 4z_n \\ y_{n+1} & = 2x_n + 4y_n - 2z_n \\ z_{n+1} & = x_n + 4y_n + z_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$.

2) Soient $P = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $PD = AP$ et en déduire que A est diagonalisable.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$.

4) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) En déduire les valeurs de x_n, y_n et z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Commentaire :