— 14 —

Équations différentielles

I. Notion d'équation différentielle

Définition 1 : Équation différentielle

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction notée y et qui fait intervenir les dérivées de cette fonction.

Exemple :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{4x-2}$.
f est solution de l'équation différentielle $y' = 4y$.
En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 4\,\mathrm{e}^{4x-2} = 4f(x)$.

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors les solutions de l'équation $y' = f$ sont les primitives de f

Si une solution existe pour une équation différentielle, alors il en existe une infinité. Une équation différentielle est souvent accompagnée de **conditions initiales**, qui vont déterminer une unique solution parmi toutes celles possibles.

Propriété 2

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
L'équation différentielle $y' = f$ ayant pour condition initiale $y(x_0) = y_0$ possède une unique solution. Autrement dit, il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = y_0$.

Exemple :

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Déterminons une solution de $(E)\ :\ y' = f$ telle que $y(0) = 5$.
Si F est une solution (E) (autrement dit, une de primitive de f) sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) = \ln(x^2+1) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
On cherche alors la valeur de C qui vérifie les conditions initiales. On a alors :

$$F(0) = 5 \iff F(x) = \ln(0+1) + C = 5 \iff \ln(1) + C = 5 \iff C = 5$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a donc $F(x) = \ln(x^2+1) + 5$

II. Équation différentielle du premier ordre

1. Équations différentielles homogènes $y' + ay = 0$

Définition 2

Soit a un réel. L'équation $y' + ay = 0$ ayant pour inconnue une fonction dérivable y sur $\mathbb{R}$ s'appelle « équation différentielle **homogène** du premier ordre, à coefficients constants ».

Propriété 3

Soit a un réel. Les solutions l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$ où C est un réel quelconque.
De plus, pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f_0 de cette équation différentielle telle que $f(x_0) = y_0$.

Preuve. • Soit C un réel. Pour tout réel x, on pose alors $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -a \times C\,\mathrm{e}^{-ax} = -af(x)$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) + af(x) = -af(x) + af(x) = 0.$$

f est donc bien solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation $y' + ay = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors $f'(x) + a\,f(x) = 0$. Posons $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ de sorte que g soit dérivable comme produit de fonctions dérivables et que :

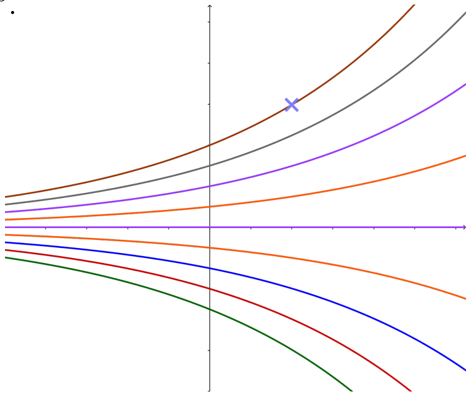
$$g'(x) = f'(x)\,\mathrm{e}^{ax} + a\,f(x)\,\mathrm{e}^{ax} = \mathrm{e}^{ax}(f'(x) + af(x)) = 0.$$

Ainsi, g est constante : il existe un réel C telle que, pour tout réel x, $g(x) = C$, c'est-à-dire $f(x)\,\mathrm{e}^{ax} = C$ et donc $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$. □

Exemple :

Les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $f : x \mapsto C\,\mathrm{e}^{2x}$ où C est un réel.
Cherchons l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(3) = 1$. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = C\,\mathrm{e}^{2x}$.
On a alors $f_0(3) = C\,\mathrm{e}^6$ d'une part et $f_0(3) = 1$ d'autre part. Ainsi, $C = \dfrac{1}{\mathrm{e}^6} = \mathrm{e}^{-6}$.
Finalement, pour tout réel x, on a $f_0(x) = \mathrm{e}^{-6}\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x-6}$.

Le théorème précédent signifie que si l'on regarde l'ensemble des courbes des fonctions solutions de l'équation $y' = ay$ et que l'on s'intéresse à un point du plan, il existe une unique courbe qui passe par ce point. En particulier, toute fonction solution qui s'annule n'est autre que la fonction nulle.



2. Équation différentielle $y' + ay = b$, avec b réel

Définition 3

Soit a et b deux réels. L'équation $y' + ay = b$ ayant pour inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ s'appelle « équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants et à second membre constant ».

Propriété 4

Soient a et b deux réels. Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.
De plus, pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(x_0) = y_0$.

Méthode :

On cherche à résoudre l'équation $(E) \ : \ y' - 5y = -2$.

1. On détermine les solutions de l'équation homogène associée $(H) \ : \ y' - 5y = 0$.
   Ce sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{5x}$ où C est un réel.
2. On cherche une solution constante k à l'équation de départ $y' - 5y = -2$.
   La dérivée d'une fonction constante étant nulle, on a alors $-5k = -2$ et donc $k = \dfrac{2}{5}$.
3. Les fonctions solutions de l'équation $y' = 5y - 2$ sont donc les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-5x} + \dfrac{2}{5}$ où C est un réel.

On souhaite déterminer l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(7) = 12$. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = C\,\mathrm{e}^{-5x} + \frac{2}{5}$.
Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f_0(x) = C\,\mathrm{e}^{-5x} + \frac{2}{5}$ et donc :

$$f_0(7) = C\,\mathrm{e}^{-35} + \frac{2}{5} = 12 \iff C = \frac{58}{5}\,\mathrm{e}^{35}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f_0(x) = \frac{58}{5}\,\mathrm{e}^{-5x+35} + \frac{2}{5}$.

On retient que pour une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, on a :

$\boxed{\text{SOLUTION GÉNÉRALE = SOLUTION HOMOGÈNE + SOLUTION CONSTANTE}}$

3. Équation différentielle $y' + ay = g$, où g est une fonction

Définition 4

Soit a un réel non nul et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. L'équation $y' = ay + g$ s'appelle « équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre ».

Propriété 5

Soit a un réel non nul et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Soit φ une solution particulière de cette équation. Alors f est solution de l'équation $y' + ay = g$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$.
Autrement dit, toute solution de l'équation $y' + ay = g$ est de la forme $f + \varphi$, où f est solution de l'équation $y' + ay = 0$ et φ est **UNE** solution de l'équation $y' + ay = g$.

La méthode pour résoudre ce genre d'équations différentielles est totalement similaire à celle vue précédemment. La nouvelle difficulté réside dans le fait de trouver une solution particulière. En pratique, il faut déjà trouver une forme adaptée à la fonction g.
Au lycée, les fonctions g rencontrées seront presque tout le temps des polynômes.

🔎 **Méthode :**

On cherche à résoudre l'équation $(E)\ :\ y' - 2y = -6x^2 + 13$.

1. On détermine les solutions de l'équation homogène associée $(H)\ :\ y' - 2y = 0$.
   Ce sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{2x}$ où C est un réel.
2. On cherche une solution particulière φ à l'équation de départ $y' - 2y = -6x^2 + 13$.
   En regardant le second membre, on pose $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ pour $x \in \mathbb{R}$, avec a, b, c des réels à déterminer. Ainsi on a :

$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) = 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c)$$

On a donc :

$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) = -6x^2 + 13 \iff -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = -6x^2 + 13$$

En identifiant les coefficients, on a :

$$\begin{cases} -2a = -6 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = -5 \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $\varphi(x) = 3x^2 + 3x - 5$.

3. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$ sont les fonctions f définies pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{2x} + 3x^2 + 3x - 5$, avec $C \in \mathbb{R}$.

On retient que pour une équation différentielle de la forme $y' + ay = g$, on a :

$$\boxed{\text{SOLUTION GÉNÉRALE} = \text{SOLUTION HOMOGÈNE} + \text{SOLUTION PARTICULIÈRE}}$$