Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$.

1) Calculer I_0 .

2) A l'aide d'une intégration par partie, donner la valeur exacte de I_1 .

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0 ; 1]$, $0 \leqslant x^n e^x \leqslant e x^n$.

5) En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

6) En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

7) A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$.

8) Calculer I_2 et I_3 .

Exercice 2 :

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C.
On s'intéresse à l'évolution de la température de la baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+6y=150$.

1a) Préciser la valeur de $f(0)$.
1b) Résoudre l'équation $y'+6y=150$.
1c) En déduire que pour tout réel $t\geqslant 0$, on a $f(t)=200e^{-6t}+25$.

2) Par expérience on observe que la température d'une baguette sortant du four :

- décroît ;
- tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

3) Montrer que l'équation $f(t)=40$ admet une unique solution dans $[0;+\infty[$.

4) Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne le programme suivant :

```
import math

def recherche ():
    x=0
    f=225
    while f>40 :
        x=x+0.01
        f=200*math.exp(-6*x)+25
    return x
```

Remarque : math.exp est la notation de la fonction exponentielle en langage pyhon

Quelle est la valeur de x à la fin du programme ?
Combien de temps, arrondi à la minute près, le boulanger doit-il attendre pour pouvoir mettre les baguettes en rayon ?