Correction - Évaluation n°2

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exercice 2

1. **a.** Notons d'abord que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) = +\infty$.
On a donc que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

b. Puisque g est dérivable, on peut étudier sa dérivée.
Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2} + 1 = \dfrac{2}{x} + 1 > 0$.
Puisque g' est strictement positive sur $]0,+\infty[$, alors g est croissante sur $]0,+\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{x}\ln(x)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. **En $+\infty$:** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x} = 1 - \dfrac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
En 0 : On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-2}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

b. Puisque g est dérivable, on peut étudier sa dérivée. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{x-(x-2)}{x^2}\ln(x) + \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x) + x - 2}{x^2} = \frac{\ln(x^2) + x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

c. Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ du même signe que $g(x)$ puisque $x^2 > 0$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **a.** Soit $x > 0$, on a $f(x) - \ln(x) = \dfrac{x-2}{x}\ln(x) - \ln(x)$. Ainsi :

$$f(x) - \ln(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln(x) - \ln(x) = \ln(x) - \frac{2}{x}\ln(x) - \ln(x) = -\frac{2}{x}\ln(x)$$

Puisque $x > 0$, on a donc :

$$f(x) - \ln(x) \geqslant 0 \iff -\frac{2}{x}\ln(x) \geqslant 0 \iff \frac{2}{x}\ln(x) \leqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant 1$$

b. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de ln. D'après ce qui précède, on a que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0,1]$, et en dessous de $\mathcal{C}$ sur $[1,+\infty[$.

Exercice 3 **1**. On a $\overrightarrow{AB}(0,3,-1)$ et en comparant la première coordonnée avec celle de $\overrightarrow{u}$, on en déduit que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
On en déduit qu'ils définissent un plan de l'espace.

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \times 1 + 3 \times 2 - 1 \times 1 = 6 - 1 = 5$.

3. D'autre part, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right)$ donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \|\overrightarrow{u}\|}$.
Or $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.
Donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{10}\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{6}}$ et alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) \approx 50^o$

4. On pose $\overrightarrow{n}(x,y,z)$. Ce vecteur est normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3y \\ x + 2y + 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3y \\ x = -5y \end{cases}$$

En prenant $y = 1$, on pose alors $\overrightarrow{n}(-5,1,3)$. Vérifions que $\overrightarrow{n}$ est effectivement normal au plan :

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 3 - 3 \times 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = -5 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 1 = 0$$

Donc $\overrightarrow{n}(-5,1,3)$ est effectivement normal au plan $\mathcal{P}$.