Concentration et loi des grands nombres

Échantillons et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire d'espérance 4 et de variance 2. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

1. Donner l'espérance et la variance de M_n.
2. Pour quelle valeur de n la variance de M_n est-elle inférieure à 10^{-4} ?

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire d'espérance 4 et de variance 1.

1. Traduire l'inégalité $|X-4| \geqslant 2$ en terme d'intervalle.
2. Donner une minoration de $\mathbb{P}(|X-E(X)| \in]2;6[)$.

Exercice 3 Majorer la probabilité demandée dans les cas suivants.

1. $P(|X-E(X)| \geqslant 2)$, avec $V(X) = 2$.
2. $P(|X-E(X)| \geqslant 20)$, avec $V(X) = 10$.
3. $P(|X-E(X)| \geqslant 7)$, avec $V(X) = 12$.
4. $P(\{X \leqslant 3\} \cup \{X \geqslant 17\})$, avec $E(X) = 10$ et $V(X) = 5$.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire non constante. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Thecbychev, minorer les probabilités $\mathbb{P}(|X-E(X)| < 2\sigma(X))$ et $\mathbb{P}(|X-E(X)| < 3\sigma(X))$.

Exercice 5 En 2018, le trafic moyen quotidien de véhicules sur le réseau autoroutier s'élevait à 24000 voitures, avec une variance de 6000. Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard et la moyenne de véhicules recensés soit supérieure ou égal à 1000, puis à 100.

Exercice 6 On jette 3600 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? sa variance ?
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 7 *(Métropole 2024)*

Un client arrive à une station-service et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2. a. Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

Inégalité de concentration et loi faible des grands nombres

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire d'espérance 5 et de variance 2. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_{100})$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

1. Soit δ un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
   Écrire l'inégalité de concentration pour M_n.
2. En déduire l'entier n à partir duquel on a $\mathbb{P}(|M_n - 5| \geqslant 0,05) \leqslant 0,01$.

Exercice 9 *(Métropole 2024)*

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude.

On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20; 0,615)$.

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.

1. Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
2. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   b. Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.
   c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80

Exercice 10 Une compagnie aérienne exploite un avion ayant une capacité de 200 places. Pour ce vol, une analyse a montré que chaque passager à une probabilité $p = 0,8$ de se présenter à l'embarquement. On suppose que les présences individuelles des passagers à l'embarquement sont indépendantes. La compagnie souhaite vendre davantage de billets que de places disponibles tout en limitant le risque de voir trop de personnes se présenter à l'embarquement.

Soit n un entier strictement supérieur à 200, correspondant au nombre de billets vendus. On note S_n le nombre de personnes se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de S_n ? Que valent son espérance et sa variance ?
2. On suppose que $n < 250$.
   a. Justifier que si $S_n \geqslant 200$, alors $|S_n - 0,8n| \geqslant 200 - 0,8n$.
   b. En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geqslant 200) \leqslant \dfrac{0,16n}{(200-0,8n)^2}$.
   c. Combien de billets la compagnie peut-elle vendre tout en ayant une probabilité inférieure à 5% que plus de 200 clients se présentent à l'embarquement ?

Exercice 11 Un joueur joue à la roulette en misant à chaque fois un euro sur une couleur (rouge ou noir). A chaque partie, il récupère sa mise et gagne un euro avec probabilité $\dfrac{18}{37}$. Sinon, il perd sa mise. Pour tout entier naturel n, on note X_n son gain après n parties et Y_n le nombre de parties gagnés parmi les n premières parties.

1. Quelle est la loi de Y_n ? Que vaut son espérance et sa variance ?
2. Exprimer X_n en fonction de Y_n puis donner son espérance et sa variance.
3. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier n à partir duquel la probabilité que le joueur ait perdu de l'argent après n parties soit supérieure ou égale à 0,95.