Nom :

Question de cours :

- Décrire la loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$. Donner ensuite son espérance et sa variance.
- Rappeler la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète infinie, en prenant soin de rappeler dans quel contexte celle-ci est définie.

Exercice :

1. On lance successivement une pièce truquée ayant une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ de tomber sur pile et on note T l'instant du premier pile. Quelle loi suit T, donner son espérance et sa variance.
2. On lance 5 fois, de manière successive, une pièce truquée ayant une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ de tomber sur pile et on note X le nombre de pile. Quelle loi suit X, donner son espérance et sa variance.

Exercice :

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivants des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. On pose $Z = X + Y$.

On admet que pour $n \geq 0$, on a $\mathbb{P}(X+Y=n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$.

1. Montrer que Z suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre. *Indication : Penser au binôme de Newton.*
2. Indépendamment de la question précédente, donner $\mathbb{E}[Z]$. Ce résultat est-il cohérent avec celui de la question 1.
3. Calculer $\mathbb{V}[X+Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$.

Exercice :

On définit une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n > 0$, on a $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{1}{2^n}$.

On rappelle que pour tout $x \in [0,1[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

1. Que vaut $\mathbb{P}(X=0)$?
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Décrire la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner ensuite son espérance et sa variance.
- Rappeler la définition de la variance d'une variable aléatoire discrète infinie, en prenant soin de rappeler dans quel contexte celle-ci est définie.

Exercice :

1. On lance 10 fois, de manière successive, un dé numéroté de 1 à 6 et on note X le nombre de 6. Quelle loi suit X, donner son espérance et sa variance.
2. On lance successivement un dé numéroté de 1 à 6 et on note T l'instant du premier 6. Quelle loi suit T, donner son espérance et sa variance.

Exercice :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice :

On considère deux urnes contenant des boules numérotées de 1 à 4. L'urne A contient deux boules notées 1, quatre boules notées 2, une boule notée 3 et une boule notée 4. L'urne B contient quatre boules notées 1, deux boules notées 2, deux boules notées 3 et ne contient aucune boule notée 4. L'expérience consiste à lancer une pièce équilibrée : si on tombe sur pile, alors on pioche une boule dans l'urne A et si on tombe sur face, dans l'urne B. On note X le résultat de la pièce ($X = 0$ si pile et $X = 1$ si face) et Y le numéro de la boule piochée.

1) Écrire un tableau à double entrée décrivant le couple de variable aléatoire (X, Y).
2) Donner les lois marginales de (X, Y). En déduire $\mathbb{E}[Y]$.
3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Donner la loi de $Z = XY$ et en déduire la covariance de (X, Y).

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Décrire la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Donner ensuite son espérance et sa variance.
- Rappeler le théorème de transfert.

Exercice :

1. On considère une urne remplie de 2 boules noires et 8 boules blanches. On tire successivement et avec remise des boules dans l'urne et on note T le premier instant où l'on tire une boule noire. Quelle loi suit T et donner son espérance et sa variance.
2. On considère une urne remplie de 2 boules noires et 8 boules blanches. On tire de manière successive et avec remise 6 boules dans l'urne et on note X le nombre de boules noires. Quelle loi suit X et donner son espérance et sa variance.

Exercice :

On se donne deux variables aléatoire X, Y indépendante suivant la même loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.
On note $Z = \max(X, Y)$.
1. Exprimer l'évènement $[Z \leq n]$ à l'aide de $[X \leq n]$ et $[Y \leq n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire $\mathbb{P}(Z \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z \leq n) - \mathbb{P}(Z \leq n-1)$. Déterminer $\mathbb{P}(Z = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Vérifier l'on a bien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = n) = 1$.

Exercice :

Soit X une variables aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{3^n}$.

On rappelle que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

1. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Commentaire :