— 7 —

Combinatoire et dénombrement

I. Cardinal d'ensembles

1. Réunion disjointe

Exemple : (Rappels des notations)
On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 7; 9; 44\}$. On a $1 \in A$ mais $3 \notin A$.
L'ensemble $B = \{2; 9\}$ est inclus dans A : on note $B \subset A$.
En revanche, l'ensemble $C = \{1; 2; 4; 7\}$ n'est pas inclus dans A puisque 4 est un élément de l'ensemble C mais pas de l'ensemble A.
Par ailleurs, il ne faut pas confondre 2 et $\{2\}$: 2 désigne l'élément alors que $\{2\}$ désigne l'ensemble qui contient un seul élément, 2. On a ainsi $2 \in A$ et $\{2\} \subset A$.
Enfin, $A \cup C = \{1; 2; 4; 7; 9; 44\}$ est l'union de A et C et $A \cap C = \{1; 2; 7\}$ est l'intersection de A et C.

Définition 1

Soit A un ensemble fini, c'est à dire qu'il possède un nombre fini d'éléments.
On appelle **cardinal** de A, noté $\text{Card}(A)$, $\sharp A$ ou $|A|$ le nombre d'éléments de A.

Exemple :
Le cardinal de l'ensemble $A = \{1; 3; \pi; 5; \sqrt{2}\}$ est 5.

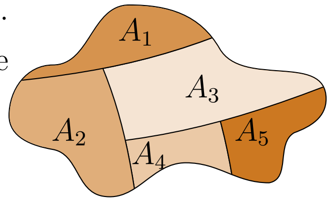
Définition 2

Soient A et B deux ensembles.
Deux ensembles A et B sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun, c'est à dire que $A \cap B = \varnothing$.

Définition 3

Soit Ω un ensemble et A_1, A_2, ..., A_n des sous-ensembles de Ω. On dit que les ensembles A_1, ..., A_n forment une **partition** de Ω si ces ensembles sont deux à deux disjoints et si

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$



Propriété 1

Soient n un entier naturel non nul et A_1, A_2, ..., A_n des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors :

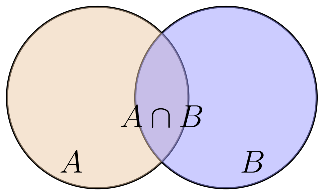
$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$$

Propriété 2 : Formule du crible

Soient A et B des ensembles finis, on a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Si l'on compte le nombre d'éléments de A et que l'on ajoute le nombre d'éléments de B, certains éléments ont alors été compté deux fois : ceux communs à A et B (c'est-à-dire les éléments de $A \cap B$).
En retirant le nombre d'éléments de cette intersection à notre compte, on obtient alors le nombre d'éléments de l'union.



Exemple :

Durant un sortie scolaire, les élèves d'une classe de 30 pouvaient choisir parmi 2 activités : basket ou escalade. 22 ont pris basket et 16 ont pris escalade.
Notons B l'ensemble des élèves ayant pris basket et E l'ensemble des élèves ayant pris escalade. On a alors $\text{Card}(B) = 22$ et $\text{Card}(E) = 16$. De plus, chaque élève ayant choisi au moins 1 activité, on a alors $\text{Card}(B \cup E) = 30$. Or, $\text{Card}(B \cup E) = \text{Card}(B) + \text{Card}(E) - \text{Card}(B \cap E)$.
Ainsi, $\text{Card}(B \cap E) = 16 + 22 - 30 = 8$. 8 élèves ont choisi à la fois le basket et l'escalade ?

2. Produit cartésien

Définition 4

Soient A et B deux ensembles.
On appelle **produit cartésien** de A et B, noté $A \times B$ (A "croix" B), l'ensemble composé des couples $(a; b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exemple :
On considère les ensembles $A = \{2; 5; 9\}$; et $B = \{3; 5\}$.

- Les éléments de $A \times B$ sont $(2; 3)$, $(2; 5)$, $(5; 3)$, $(5; 5)$, $(9; 3)$ et $(9; 5)$.
- Les éléments de $B \times A$ sont $(3 : 2)$, $(3; 5)$, $(3; 9)$, $(5; 2)$, $(5; 5)$, $(5; 9)$.

Définition 5

La notion de **produit cartésien** s'étend naturellement à plus de deux ensembles.

- Soit $n \geq 2$, le produit cartésien de n ensembles A_1, A_2, ..., A_n est l'ensemble des n-uplets $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ avec $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.
- Le produit cartésien $A \times A \times ... \times A$ où A apparaît n fois est noté A^n. Ses éléments sont appelés les n-**uplets** de A.

Exemple :
On considère les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 7; 14\}$ et $C = \{1; 3\}$.

- $(1; 7; 3) \in A \times B \times C$ puisque $1 \in A$, $7 \in B$ et $3 \in C$.
- $(3; 7; 7; 3; 14) \in B^5$ puisque 3, 7 et 14 sont dans l'ensemble B.

Propriété 3

Soient A et B des ensembles finis.

- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.
- Plus généralement, soit n un entier naturel, A_1, A_2, ..., A_n des ensembles finis.
$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \ldots \times \text{Card}(A_n)$$
- En particulier, pour tout entier naturel n, on a $\text{Card}(A^n) = [\text{Card}(A)]^n$.

Exemple :
On reprend les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 7; 14\}$ et $C = \{1; 3\}$. On a

- $\text{Card}(A \times B \times C) = 3 \times 3 \times 2 = 18$;
- $\text{Card}(A^4) = 3^4 = 81$.

Remarque :
Le produit cartésien est utilisé pour dénombrer des situations où l'ordre des symboles (chiffres, lettres, signes...) est important et où ces symboles peuvent être utilisés plusieurs fois.

Exemple :
Dans un immeuble, les appartements sont numérotés par leur étage, nombre compris entre 0 et 5, suivi d'une lettre allant de A à E. Combien y'a-t-il d'appartement dans l'immeuble ?
On note $\mathcal{A}_1 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{A; B; C; D; E\}$. Un digicode est un élément de $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Le cardinal de cet ensemble est donc $\text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) = 6 \times 5 = 30$.
Il y a donc 30 appartements dans l'immeuble.

II. Arrangements et permutations

Définition 6

Soit n un entier naturel non nul. On note $n!$ (**factorielle** de n) le produit de tous les entiers de 1 à n. Ainsi, $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.
Par ailleurs, on convient que $0! = 1$.

Exemple :
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad ; \quad \dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56.$

Définition 7

Soit A un ensemble fini de cardinal n et un entier $k \leq n$.
Un k-**arrangement** de A est un k-uplet d'éléments distincts de A.
Lorsque $k = n$, on parle de **permutation** de A.

Exemple :
On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 4; 5; 7; 10\}$.

- $(7; 10; 3)$ est un 3-arrangement de A.
- En revanche, $(7; 10; 1; 7)$ n'est pas un arrangement de A car l'élément 7 y apparaît deux fois.
- $(3; 7; 4; 5; 1; 10)$ est une permutation de A puisque tous les éléments de A y apparaissent.

Propriété 4

Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n.
Le nombre de k-arrangements de A vaut $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
En particulier, le nombre de permutation de A vaut $n!$.

Preuve. Pour construire un k-uplet d'éléments distincts de A, on a n choix pour le premier élément, puis $n-1$ choix pour le deuxième, ..., et enfin $n-(k-1)$ pour le k-ième. Le nombre de k arrangements de A vaut donc :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(k-1)) = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

□

Exemple :
On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$, de cardinal 7.
Le nombre de 3-arrangements de A vaut $7 \times 6 \times 5 = 210$.

Remarque :
Les arrangements sont utilisés pour dénombrer des situations où l'ordre des objets (chiffres, nombres, lettres, signes,...) est important mais où chaque objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

Exemple :
Une course hippique réunit 8 jockeys et leurs chevaux. Le "tiercé dans l'ordre" est un pari qui consiste à deviner les trois premiers chevaux arrivés dans l'ordre. Combien de paris différents est-il possible de réaliser ?
Si on nomme A l'ensemble des chevaux de la course, un tiercé dans l'ordre est un 3-arrangement de A, donc le nombre de paris possible vaut $8 \times 7 \times 6 = 384$.

III. Combinaisons d'un ensemble fini

Définition 8

Une **partie** ou **combinaison** d'un ensemble fini A est un ensemble inclus dans A.
L'ensemble des parties de A est noté $\mathcal{P}(A)$.

Exemple :
Soit $A = \{1; 2; 3\}$. Les parties de A sont $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$ et $\{1; 2; 3\}$.
Elles sont au nombre de 8
Attention à ne pas oublier l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble complet A lui-même en établissant cette liste.

Propriété 5

Soit A un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties de A est 2^n.

Preuve. On note $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ Pour créer une partie P de A, il suffit de choisir quels éléments de A sont, ou ne sont pas, dans P.
On associe à chaque éléments a_i de A, un nombre : 0 si $a_i \notin P$ et 1 si $a_i \in P$.
Ainsi, on a autant de partie de A que de n-uplets de $\{0, 1\}$, c'est à dire 2^n. □

Définition 9

Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel n.
Le nombre de combinaisons à k éléments de A est noté $\binom{n}{k}$ et se lit "k parmi n".

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux

Exemple :
Soit $A = \{1 : 2 : 3 : 4 : 5\}$. Les parties à deux éléments de A sont $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 4\}$, $\{1; 5\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$, $\{2; 5\}$, $\{3; 4\}$, $\{3; 5\}$ et $\{4; 5\}$. Il y en a 10 : ainsi, $\binom{5}{2} = 10$.
Attention, l'ordre n'a pas d'importance lorsque l'on parle de partie d'un ensemble : le sous-ensemble $\{1; 2\}$ est le même que le sous-ensemble $\{2; 1\}$.

Propriété 6

Soient n et k deux entiers naturels.
Si $k < n$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, et sinon, $\binom{n}{k} = 0$. .

Exemple :
Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$.
Le nombre de parties de A à deux éléments vaut $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{24}{2 \times 2} = 6$.
Ces parties sont $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 4\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$ et $\{3; 4\}$.

Propriété 7

Soient n un entier naturel non nul et $0 \leq k \leq n$.

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$.

- $\dbinom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.
- $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n-0} = \dbinom{n}{n}$ et $\dbinom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$.
- $\dbinom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$.

□

Remarque :

Les combinaisons sont utilisées pour dénombrer les situations où l'ordre des objets n'est pas important - lorsque l'on tire simultanément plusieurs personnes ou objets au hasard par exemple - et qu'un objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

Exemple :

A la belote, on utilise un jeu de 32 cartes. Chaque carte est déterminé par sa couleur (Pique, Trèfle, Carreau, Coeur) et sa valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Pour le premier tour de distribution, chaque joueur reçoit 5 cartes, que l'on appelle une main. Combien existe-t-il de mains possibles ?

L'ordre de distribution des cartes n'a pas d'importance ici, il suffit donc de calculer $\dbinom{32}{5} = 201376$

Propriété 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. On a alors

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Cette relation s'appelle la relation de Pascal.

Preuve (Avec la formule)**.** : On a

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

On multiplie le premier quotient par $\dfrac{k}{k}$ et le second par $\dfrac{n-k}{n-k}$, ce qui donne

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times (n-k)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{k! \times (n-k-1)! \times (n-k)}$$

Or, $k \times (k-1)! = k!$, $(n-k-1) \times (n-k) = (n-k)!$. Ainsi,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Méthode :

La relation de Pascal permet de construire récursivement les coefficients binomiaux. Ces coefficients peuvent être arrangés en triangle et forment ce que l'on appelle le triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Dans ce triangle, on démarre avec un 1 en haut à gauche. Pour compléter chaque cellule, on ajoute alors le nombre au-dessus avec le nombre en haut à gauche. Les cases vides se voient assigner la valeur 0. On peut alors lire les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ dans ce triangle.

Propriété 9

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Preuve. Soit A un ensemble fini de cardinal n. Pour tout entier naturel $k \leq n$, on note A_k les partie de A de cardinal k. Ainsi : $\text{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$ et les A_k sont disjoints deux à deux. Donc :

$$2^n = \text{Card}(\mathcal{P}(A)) = \text{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$\square$