BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Lycée Camille Saint-Saëns
Mercredi 5 mars 2025

# MATHÉMATIQUES - SUJET 2

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

*Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3 et une annexe.*
*Il est composé de quatre exercices indépendants*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*
*Tout autre document ou appareil électronique est interdit.*

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

**Tournez la page S.V.P**

**Exercice 1**

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à $0,001$ près.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

**Partie A**

On interroge une personne au hasard et on note les évènements suivants :

- $R$ : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- $J$ : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

**1**. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, en y reportant les données de l'énoncé.

**2**. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

**3**. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est d'environ 0,056.

**4**. En déduire la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans en sachant qu'il n'utilise pas régulièrement les transports en commun.

**Partie B**

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit $X$ la variable aléatoire comptant le nombre les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées. On rappelle que la probabilité qu'une personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun est de 0,17.

**1**. Donner, en justifiant, la loi suivie par $X$ et en donner les paramètres.

**2**. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.

**3**. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
A-t-il raison ? Justifier votre réponse.

**4**. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

**Exercice 2**

L'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ et $C(0, 0, 1)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'aire du triangle $ABC$ représenté en **annexe**.

**1.** **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan $(ABC)$.

**b.** En déduire une équation cartésienne du plan $(ABC)$.

**2.** Dans cette question, on considère la droite $(d)$ par $O$ et orthogonale au plan (ABC).

**a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d$.

**b.** Montrer que la droite $(d)$ coupe le plan $(ABC)$ au point $H$ de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\ ;\ \dfrac{12}{49}\ ;\ \dfrac{36}{49}\right)$.

**c.** Calculer la distance $OH$.

**3.** On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et $h$ est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base. En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

---

**Exercice 3**

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

On admet que $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on note $g'$ sa dérivée.

**1.** Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2}$$

**2.** On donne en **annexe** le tableau de variation de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

**a.** la valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ ;

**b.** les variations de $g$ sur $]0, +\infty[$ ;

**c.** la limite de $g(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**3.** En déduire le tableau de signe de $g(x)$ pour $x \in ]0, +\infty[$.

**Partie B**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x)^2$$

On admet que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ ; on note $f'$ sa dérivée et $f''$ sa dérivée seconde.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = g(x)$.
2. À l'aide de la partie A, déterminer le tableau de variations de $f$ sur $]0,+\infty[$.
3. Toujours à l'aide de la partie A, étudier la convexité de $f$ sur $]0,+\infty[$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse e.
5. En déduire que, pour tout $x \in ]0, \mathrm{e}]$, on a

$$\ln(x)^2 \geqslant \frac{2}{e}x - 1$$

---

**Exercice 4**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. L'absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Astrid et Assia font partie d'un club d'échecs de 20 personnes. Elles doivent former deux groupes de 6 pour représenter le club lors d'un tournoi. Astrid et Assia ne doivent pas être dans le même groupe.
   **Affirmation :** Il y a 17136 groupes possibles.
2. **Affirmation :** il y exactement 3 628 800 nombres entiers comportant exactement 10 chiffres et dont les 10 chiffres sont tous différents.
3. Le jeu de Mastermind se joue à deux joueurs. L'un dispose cinq pions dans cinq trous, les pions étant choisis parmi 8 couleurs, et il peut aussi choisir de laisser une case vide. L'autre joueur doit deviner la disposition choisie par l'autre.
   **Affirmation :** il y 59049 dispositions possibles.
4. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 25}$.
   **Affirmation :** La courbe représentative de $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.
5. Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel non nul $n$ par $u_n = \dfrac{3\cos(n^2)}{n^2}$.
   **Affirmation :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

# ANNEXE

## Exercice 1

| $x$ | $0$ | $1$ | $\mathrm{e}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | ‖ $-\infty$ | $0$ | $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ | $0$ |

## Exercice 2