Correction - Devoir commun n°3

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 **1**. Chaque question correspond à un expérience « Succès-Échec » où le succès ici correspond au fait de donner une réponse correcte.
Pour chaque question, on a une probabilité de $\frac{1}{4}$ d'obtenir un succès et on répète cette expérience 12 fois lors du concours. Donc $X \sim \mathcal{B}(12; 0,25)$

2. $\mathbb{E}[X] = 0,25 \times 12 = 3$ donc l'élève pourra espérer obtenir 3 réponses correcte en moyenne à son concours.

3. À l'aide de la calculatrice, on obtient $\mathbb{P}(X = 2) = 0,232$.

4. À l'aide de la calculatrice, on obtient $\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 0,842$.

5. On s'intéresse à l'évènement A_k : « L'élève a faux à la question k » pour $1 \geqslant k \geqslant n$ et à l'évènement A : « L'élève n'a aucune réponse correcte ».
On a ainsi $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ et par indépendance des évènements :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Donc si on note B : « L'élève a au moins une réponse correcte », alors $B = \bar{A}$ donc $p_n = \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

6. Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. Donc $p_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

7. On a

$$p_n \geqslant 0,99 \iff 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geqslant 0,99 \iff -\left(\frac{3}{4}\right)^n \geqslant -0,01 \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 0,01$$

Ainsi

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant 0,01 \iff \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \iff n\ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

Avec changement d'inégalité à la fin car $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$. Donc $p_n \geqslant 0,99 \iff n \geqslant 16,01$.
Donc le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$ est $n = 17$.
Ainsi, si le QCM est composé de 17 questions, on une probabilité supérieur à $0,99$ que l'élève ait au moins une réponse correcte.

Exercice 2 **1**. On a $\overrightarrow{AB}(3,-6,3)$ et $\overrightarrow{AC}(4,-5,1)$.

Vérifions s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. En regardant les troisièmes coordonnées, cela donne que $3 = \lambda \times 1$ d'où $\lambda = 3$.

Or $3\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc A, B et C ne sont pas alignés et les points définissent un plan.

2. $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 - 6y + 3z = 0 \\ 4 - 5y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6y - 3z = 3 \\ z = 5y - 4 \end{cases}$$

Or on a :

$$\begin{cases} 6y - 3z = 3 \\ z = 5y - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 6y - 15y + 12 = 3 \\ z = 5y - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} -9y = -9 \\ z = 5y - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ z = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

On a donc que $\overrightarrow{n}(1,1,1)$ est normal au plan (ABC).

Exercice 3 **1**. **a.** g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 \geqslant 1 > 0$$

Donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

b. $g(2) = \ln(2) - 1 \approx -0,31 < 0$ et $g(3) = \ln(3) \approx 0,10 > 0$. g est dérivable donc continue sur $]0,+\infty[$ donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) sur g sur l'intervalle $[2,3]$. Il existe donc $\alpha \in [2,3]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve que $\alpha \approx 2,21$ avec $f(\alpha) \approx 0,003$

c. Puisque g est strictement croissante, on déduit de la question précédente le tableau de signes suivant :

x	0		α		$+\infty$
g	||	$-$	0	$+$	

2. **a.** Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(x) - 2) = -\infty$ donc par produit et somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(x) - 2) = +\infty$ donc par produit et somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

b. Soit $x \in]0,+\infty[$, on réécrit $f(x) = u(x)v(x) + 2$ avec

$$u(x) = 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = \ln(x) - 2$$

u et v sont dérivable sur $]0,+\infty[$, et on a :

$$u'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) + x - 3}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$$

c. Puisque pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$, alors $f'(x)$ a le même signe de $g(x)$; ce qui donne la tableau de variations suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

a. Soit $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x) \\ &= \ln(x) - 2 - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} + 2 - \ln(x) \\ &= \frac{2 - \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

b. Soit $x > 0$, on a $f(x) - \ln(x) = 0 \iff \dfrac{2 - \ln(x)}{x} = 0 \iff 2 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 2 \iff x = e^2$

Ainsi, l'unique point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}$ a pour abscisse e^2 et pour ordonnée $f(e^2) = \ln(e^2) = 2$.