Devoir Hors Classe n°4

Qualité du devoir	**Note** /5
Non rendu	0
Aucun investissement et/ou soin : travail bâclé !	1
Partie du sujet non traitée ou bâclée	2
Travail correct mais qui aurait mérité plus d'investissement	3
Bon travail mais quelques erreurs et/ou manque de soin	4
Très bon travail, soigneux et détaillé	5

Exercice 1

La méthode de la variation de la constante permet de trouver, dans certains cas, une solution particulière à une équation différentielle. Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée (H) : $y' + y = 0$.
2. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. On cherche alors une fonction C définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b) On rappelle que f est solution de (E).
   En déduire que $C'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ pour tout réel x.
   c) Déterminer une fonction C qui convienne et exprimer une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions (E).

Exercice 2

Le but de cet exercice est d'introduire la notion d'intégrale.

1. On considère la fonction $f \ : \ x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Donner deux primitives F_1 et F_2 de la fonction f.
   b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, donner une expression de $F_1(b) - F_1(a)$ et de $F_2(b) - F_2(a)$.
   c) Que remarque-t-on ? Justifier que cela reste vrai peu importe les primitives choisies.

   Pour une fonction f continue sur $[a, b]$, dont on note F une primitive, on définit :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 x dx$, $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} dx$ et $\displaystyle\int_0^1 e^x dx$