Successions d'épreuves aléatoires - Loi binomiale

Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Exercice 1 On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde à chaque fois la face du dessus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres pairs ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 au premier lancer mais de ne pas en obtenir au deuxième et troisième lancer ?

Exercice 2 Dans un parking, on regarde au hasard une des voitures stationnées. Pour chacune des épreuves suivantes, préciser s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

1. On regarde si le véhicule est électrique.
2. On regarde la couleur du véhicule.
3. On vérifie si l'immatriculation se termine par un Z.
4. On regarde la longueur du véhicule en centimètre.
5. On regarde si la longueur du véhicule est inférieur ou égale a 450cm

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$.

1. Résumer la loi de probabilité de X dans un tableau.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Sachant que la variance de X est égale à $\frac{6}{49}$, déterminer les valeurs possibles de p.

Exercice 5 Un lycée présente n candidats au recrutement dans une école, où n est un entier naturel non nul. On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

1. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
2. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Loi binomiale

Exercice 6 Pour chacune des situations suivantes, dire si la variable aléatoire suit ou non une loi binomiale. Si c'est le cas, préciser ses paramètres.

1. On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de fois où la pièce où l'on obtient PILE.
2. On lance simultanément 5 dés équilibrés à 6 faces, numérotées de 1 à 6 ainsi que 3 dés équilibrés à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On note X le nombre de faces 3 obtenues.
3. On lance simultanément 5 dés équilibrés à 6 faces, numérotées de 1 à 6 ainsi que 3 dés équilibrés à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On note X le nombre de faces 5 obtenues.
4. D'après un sondage, 65% des Français se rendent au restaurant au moins une fois par mois. On interroge 30 Français au hasard et on note X le nombre de Français qui vont au restaurant au moins une fois par mois dans cet échantillon. On suppose que ce tirage peut être assimilé à un tirage avec remise.
5. Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions. Pour chaque question, une seule réponse est correcte et l'élève en choisit une au hasard, indépendamment de ses autres réponses. On note X le nombre de réponses correctes à l'issue du questionnaire.
6. Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions. Pour chaque question, une seule réponse est correcte et l'élève en choisit une au hasard, indépendamment de ses autres réponses. Une réponse correcte rapporte 3 points, une réponse fausse en retire 1. On suppose que l'élève répond à toutes les questions et on note X le nombre de points de cet élève à l'issue du questionnaire.
7. On répète 10 fois l'opération suivante : on lance simultanément 3 pièces de monnaie équilibrée. Sur ces 10 expériences, on note X le nombre de fois où les 3 pièces de monnaie sont tombées du même côté.

Exercice 7 X suit $\mathscr{B}(6; 0,4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :

1. $P(X=2)$
2. $P(X=0)$
3. $P(X \leqslant 4)$
4. $P(X \leqslant 6)$
5. $P(X>3)$
6. $P(X \geqslant 5)$

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=0,39$. Déterminer l'entier k pour lequel la probabilité $P(X=k)$ est maximale.

Exercice 9 Lamine joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est 0,65.
Il décide de jouer sept parties. On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

1. a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
   b. Calculer l'espérance et la variance de X.
   c. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ?
   d. Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ?
2. Il décide de changer le niveau de difficulté en « expert » et la probabilité qu'il gagne une partie contre l'ordinateur devient 0,05. Il décide de jouer à nouveau une série de sept parties contre l'ordinateur. Quelle est la probabilité qu'il en gagne au moins une ?

Exercice 10 Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7% des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   e. Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(X \leqslant n) \geqslant 0,9$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On suppose que $E[X]=3,36$ et $\sigma(X)=1,68$.
Calculer $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5)$. On donnera une réponse arrondie au dix-millième.

Exercice 12 Une urne contient un très grand nombre de boules rouges et de boules noires, indiscernables au toucher. On note p la proportion de boules rouges dans cette urne. On tire 20 fois, et avec remise, une boule dans cette urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

On effectue un tel tirage et on obtient alors 5 boules rouges. À partir de cette information, on souhaite déterminer la proportion de boules rouges dans l'urne en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance : cette méthode consiste à déterminer la valeur de p pour laquelle la probabilité $\mathbb{P}(X=5)$ est maximale.

2. Exprimer $\mathbb{P}(X=5)$ en fonction de p.
3. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on note $f(x)=x^5(1-x)^{15}$. On admet que la fonction f ainsi définie est dérivable sur $[0;1]$.
   a. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x)=-5x^4(4x-1)(1-x)^{14}$.
   b. En déduire que f admet un maximum sur $[0;1]$ en une valeur que l'on précisera.
4. Conclure à l'aide des résultats précédents.