— 2 —

Géométrie vectorielle dans l'espace

I. Vecteurs de l'espace

Définition 1

Un vecteur de l'espace est un objet mathématiques caractérisé par une direction de l'espace, un sens et une longueur (appelée norme).
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, sens et norme.

1. Translations

Définition 2

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace. La translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation qui, à tout point A, associe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

Propriété 1

Soient A et B deux points de l'espace, $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On note A' et B' les images respectives de A et B par la translation t.
On a alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

Preuve. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Ainsi, on a $t(A) = A'$ et $t(B) = B'$. Or,

$$t(A) = A' \iff \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad t(B) = B' \iff \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{u}$$

D'après la relation de Chasles, on a alors :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$$

□

Définition 3

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel λ tel que

$$\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$$

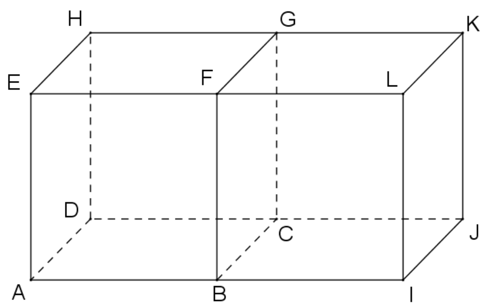
2. Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 4

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle combinaison linéaire de ces vecteurs tout vecteur de la forme $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$, où $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exemple :

On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



On a les égalités de vecteurs suivantes

- $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IJ}$;
- $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{HB}$;
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EI}$.

II. Droites et plans de l'espace

1. Droites de l'espace

Définition 5

Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est une droite.
$(A; \overrightarrow{u})$ est un repère de cette droite. On dit que la droite est dirigé par $\overrightarrow{u}$.

Propriété 2

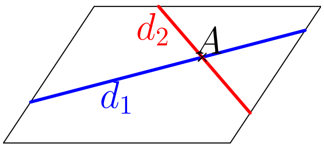
Trois points A, B et C de l'espace deux à deux distinct sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 3

Deux droites respectivement dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

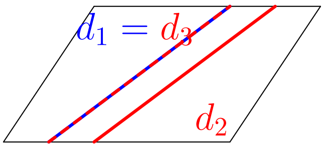
Définition 6 : Position relative de deux droites

Dans l'espace, deux droites peuvent être coplanaires ou non.
Si elles sont coplanaires, alors elles appartiennent à un même plan. Elles peuvent être sécantes ou parallèles (strictement parallèles ou confondues).



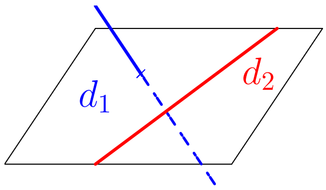
Droites coplanaires

sécantes : un point d'intersection



Droites coplanaires

parallèles : aucun ou une infinité de points d'intersection



Droites non coplanaires :

aucun point d'intersection

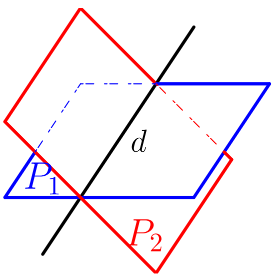
2. Plans de l'espace

Définition 7

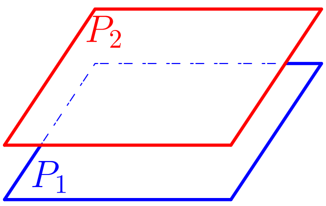
Soient A un point de l'espace, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, avec x et y des réels, est un plan de l'espace.
$(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère du plan. On dit que la droite est dirigé par la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définition 8 : Position relative de deux plans

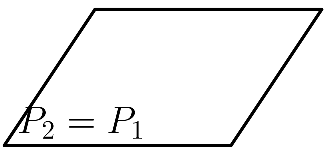
Plans sécants :
un droite d'intersection



Plans parallèles strictement :
aucun point d'intersection



Plans parallèles confondus :
un plan d'intersection



Propriété 4

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Preuve. Soient deux plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ respectivement déterminés par $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(B; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

- Si les plans sont confondus, ils sont donc parallèles.
- Sinon, supposons qu'il existe tout de même un point M commun à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

On peut alors écrire $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{BM} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$.
On a alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = (x - x')\overrightarrow{u} + (y - y')\overrightarrow{v}$.
Ainsi, $B \in \mathcal{P}$ et donc les plans sont confondus, ce qui est absurde.
On en conclut qu'il n'existe pas de tel point M et que donc les plans sont parallèles. $\square$

Méthode :

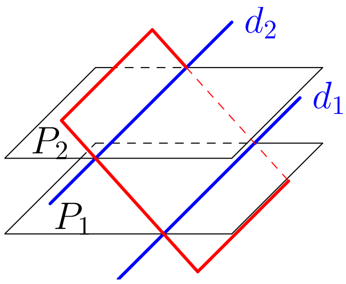
Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

Propriété 5

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.

Preuve. Soient P_1 et P_2 deux plans parallèles.

Soient P_1 et P_2 deux plans parallèles.
Soit $\mathcal{P}$ un plan sécant à P_1 distinct de P_1.
Puisque $\mathcal{P}$ n'est pas parallèle à P_1, alors il ne l'est pas non plus à P_2. Donc $\mathcal{P}$ intersecte P_2.
On note respectivement d_1 et d_2 les droites définies par $d_1 = \mathcal{P} \cap P_1$ et $d_2 = \mathcal{P} \cap P_2$.
Ces droites ne peuvent être sécantes et sont donc parallèles.

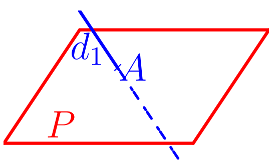


$\square$

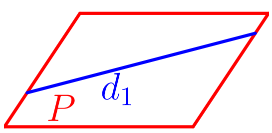
3. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition 9 : Position relative de d'une droite et d'un plan

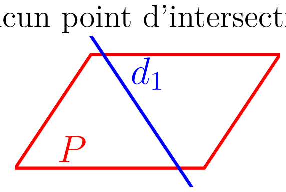
Droite et plan sécants : un point d'intersection



Droite et plan parallèles : droite incluse dans le plan



Droite et plan parallèles : aucun point d'intersection

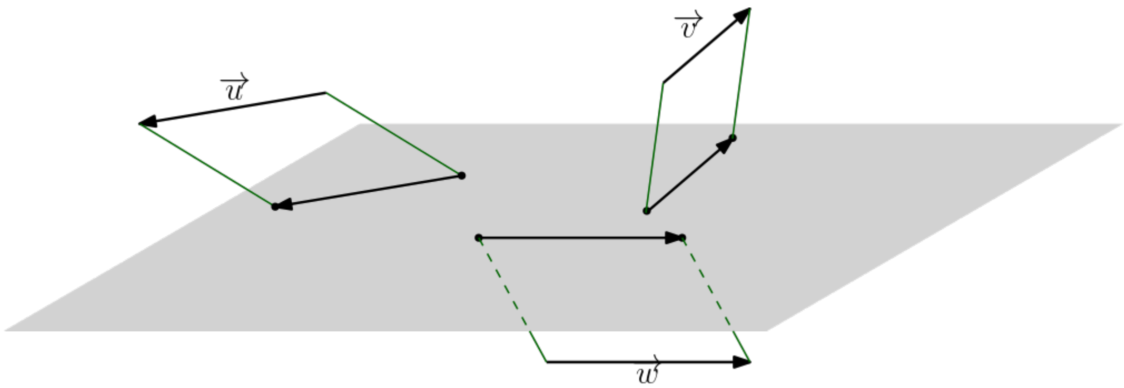


III. Bases et repères de l'espace

1. Vecteurs coplanaires et bases de l'espace

Définition 10

Trois vecteurs sont sont dits coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant au même plan.



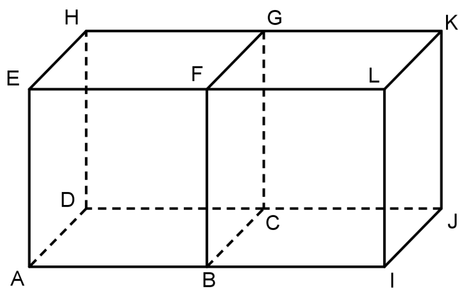
Propriété 6

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des nombres réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$

Exemple :

On considère la figure suivante :



Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires. En effet, on a $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{FG}$.

Définition 11

On appelle base de l'espace un triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires.

Propriété 7

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace, il existe un **unique** triplet de réels (x, y, z) tel que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
(x, y, z) sont appelées les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Preuve. • **Existence :** Soient $\vec{w}$ un vecteur de l'espace, O un point de l'espace et M le point tel que $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.
Soit d la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{k}$.
Cette droite coupe le plan $\mathcal{P} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ en un point M' et on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MM'}$.
Or $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires donc il existe un unique réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$.
De plus, puisque M' est dans le plan $\mathcal{P}$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Finalement $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MM'} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, c'est à dire : $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- **Unicité :** Supposons qu'il existe deux écritures possibles de $\vec{w}$:

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

On a donc : $\quad (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$
Supposons qu'une des coordonnées est différente. Par exemple que $z \neq z'$.
Alors $z - z' \neq 0$ et $\vec{k} = \dfrac{x - x'}{z - z'}\vec{i} + \dfrac{y - y'}{z - z'}\vec{j}$.
Or, ceci implique que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont coplanaires, ce qui est absurdes.
Donc toutes les coordonnées sont égales, c'est à dire que $(x, y, z) = (x', y', z')$. □

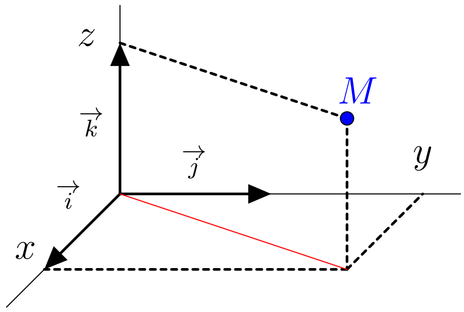
2. Repères de l'espace

Définition 12

Un repère de l'espace est défini par la donnée d'un point O de l'espace et d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace.

⚠ **Remarque :**

- O est appelé **origine** du repère.
- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ fournit les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M.
- La décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ fournit les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.



Propriété 8

On considère les points $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Propriété 9

On considère les points $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$.
Les coordonnées du du milieu I de $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemple :

On considère les points $A(1, -1, 2)$ et $B(3, 1, -4)$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \\ -4-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+(-1)}{2}, \dfrac{-1+1}{2}, \dfrac{2+(-4)}{2}\right)$. Donc $I(0, 0, -1)$.

Propriété 10

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Les coordonnées du vecteur $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$.

Méthode :

Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils coplanaires ?

Premièrement, on peut remarquer que les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}$.

Alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu \\ 4\lambda + \mu \\ -7\lambda + 5\mu \end{pmatrix}$.

Il faut donc résoudre le système $\begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ 4\lambda + \mu & = & 6 \\ -7\lambda + 5\mu & = & 3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ 4\lambda + \mu & = & 6 \\ -7\lambda + 5\mu & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2\lambda \\ 4\lambda + 2\lambda & = & 6 \\ -7\lambda + 10\lambda & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2\lambda \\ 6\lambda & = & 6 \\ 3\lambda & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2 \\ \lambda & = & 1 \\ \lambda & = & 1 \end{cases}$$

Vérifions ensuite que les valeurs trouvées pour λ et μ conviennent.

Les coordonnées de $\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$ sont en effet $\begin{pmatrix} 2 + 2 \times (-1) \\ 4 + 2 \times 1 \\ -7 + 2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont donc coplanaires.