Correction - Devoir commun n°2

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 1. **a.** On calcule les premiers termes :

$u_1 = 2 + \dfrac{1}{3} \approx 2,33$ $\qquad u_2 = 2 + \dfrac{8}{9} \approx 2,89$

$u_3 = 3 + \dfrac{16}{27} \approx 3,59$ $\qquad u_4 = 4 + \dfrac{32}{81} \approx 4,40$

b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante.

2. **a.** Pour tout entier naturel n, posons la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : $u_n \leqslant n+3$.

Nous allons procéder par récurrence :

Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0+3=3$, on vérifie bien : $u_0 \leqslant 0+3$

Donc $\mathcal{P}_0$ est bien vraie.

Hérédité : Pour k entier naturel quelconque, on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie.

On a $u_{k+1} = \dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k + 1$.

Par hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant k+3$

En multipliant par un nombre positif : $\dfrac{2}{3}u_k \leqslant \dfrac{2}{3}(k+3)$

Soit $\dfrac{2}{3}u_k \leqslant \dfrac{2}{3}k + 2$

Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre :

$\dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k + 1 \leqslant \dfrac{2}{3}k + 2 + \dfrac{1}{3}k + 1$

Ce qui donne : $u_{k+1} \leqslant k+3 \leqslant k+4$

On a donc $u_{k+1} \leqslant (k+1)+3$, c'est à dire que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés $\mathcal{P}_n$.

Conclusion : Puisque la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire, par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n, on a $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leqslant n+3$.

b. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - u_n = -\dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + \dfrac{3}{3}$

On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$.

c. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$ et donc $n+3-u_n \geqslant 0$.

Ainsi, par ce qui précède ,on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n) \geqslant 0$, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante.

3. **a.** Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :
$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$
Donc $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.
La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

b. On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v :
$v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n = u_n - n$, on en déduit :
$u_n = v_n + n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :
$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Puisque la raison q est strictement comprise entre -1 et 1, on en déduit que la limite de la suite (v_n) est 0, et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite (u_n) est donc $+\infty$, et la suite (u_n) est donc divergente.

Exercice 2 **1**. Calculons $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\-4-3\\-3-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-7\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-2\\6-3\\2-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}$.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On cherche donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$.
En regardant la première coordonnée de chaque vecteur, on nécessairement que $-1\lambda = -3$ et donc $\lambda = 3$.
Or on a $3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\9\\-9\end{pmatrix} \neq \overrightarrow{AB}$. Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et ainsi, A, B et C ne sont pas alignés.

2. Calculons $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1-2\\0-3\\4-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2-1\\3-6\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}$.
Puisque $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, ces vecteurs sont colinéaires et donc (AE) et (CD) sont deux droites parallèles.

3. Pour déterminer si les vecteurs sont coplanaires, on cherche deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD}$.
Tout d'abord, précisons qu'on a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD} &\iff \begin{pmatrix}-3\\-7\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda-4\mu\\3\lambda\\-3\lambda-4\mu\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}-\lambda-4\mu &= -3\\ 3\lambda &= -7\\ -3\lambda-4\mu &= -8\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-\lambda-4\mu &= -3\\ \lambda &= -\dfrac{7}{3}\\ 7-4\mu &= -8\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-\lambda-4\mu &= -3\\ \lambda &= -\dfrac{7}{3}\\ \mu &= \dfrac{15}{4}\end{cases}
\end{aligned}$$

Or si $\lambda = -\dfrac{7}{3}$ et $\mu = \dfrac{15}{4}$, alors $-\lambda - 4\mu = \dfrac{-38}{3} \neq -3$.
On en conclut donc que les vecteurs ne sont pas coplanaires.

4. Puisque les vecteurs ne sont pas coplanaires, ils forment une base et donc, d'après le cours, il existe trois uniques réels x, y et z tels que :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$$

5. Dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ sont $\begin{pmatrix}-3+4\\-7\\-8+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-7\\-4\end{pmatrix}$.

   On reconnaît les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et donc $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{u}$.
   Avec les notations de la question précédentes, on a les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$ dans la nouvelles base : $x = 1$, $y = 0$ et $z = -1$.

Exercice 3 1. La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, si c'était la dérivée d'une fonction, cette fonction serait strictement croissante or aucune des deux autres fonctions n'est strictement croissante. Cette fonction ne peut pas être la dérivée d'une des deux autres, c'est donc la fonction f.

f étant strictement croissante, sa dérivée est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donc la fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}_3$

Et par élimination, $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f'' (On vérifie que f' est croissante sur $]-\infty\ ;\ 4]$ et décroissante sur $[4\ ;\ +\infty[$ ce qui coïncide avec le signe de $f''(x)$ qui est positive sur $]-\infty\ ;\ 4]$ et négative sur $[4\ ;\ +\infty[$.

$\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f''.

$\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction f.

$\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction f'.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$, courbe représentative de la fonction f, au point d'abscisse 4 est égal à $f'(4)$ soit 3 par lecture graphique.

3. Le point d'abscisse 4 de la courbe $\mathcal{C}_2$ est appelé **point d'inflexion**. En effet, on remarque un changement de convexité en ce point. De plus ceci est confirmé par le changement de signe de f'' entre $]-\infty, 4]$ et $[4, +\infty[$, lisible sur à l'aide de la courbe $\mathcal{C}_1$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} -kx = +\infty$ car $k > 0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-kx} = +\infty$ d'où, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \mathrm{e}^{-kx} = +\infty$

et donc, par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-kx}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -kx = -\infty$ car $k > 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-kx} = 0$ d'où, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{-kx} = 1$

et donc, par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-kx}} = 4$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4$

5. Les limites calculées précédemment fournissent deux asymptotes horizontales d'équations :

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad y = 4$$

6. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur ce même intervalle.

g est de la forme $4 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u\ :\ x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-kx}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = -k\mathrm{e}^{-kx}$.

$g' = 4 \times \dfrac{-u'}{u^2}$ donc, pour tout réel x, $g'(x) = 4 \times \dfrac{-(-k\mathrm{e}^{-kx})}{(1+\mathrm{e}^{-kx})^2} = 4k\dfrac{\mathrm{e}^{-kx}}{(1+\mathrm{e}^{-kx})^2}$.

On a donc : $g'(0) = 4k\dfrac{\mathrm{e}^0}{(1+\mathrm{e}^{-k0})^2} = \dfrac{4k}{2^2} = \dfrac{4k}{4} = k$.