Sommes de variables aléatoires

Opérations sur les variables aléatoires

Exercice 1 On considère la variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-3	-1	2	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\ldots$

1. Compléter ce tableau avec la probabilité manquante.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = X+2$.
3. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = 2X-1$.

Exercice 2 On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un univers Ω dont on donne les lois de probabilités ci dessous.

k	-4	1	20
$\mathbb{P}(X=k)$	0,1	0,35	0,55

k	-2	5
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,27	0,73

1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X+Y$. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Z ?
2. Peut-on déterminer la loi de probabilité de Z à partir des données de l'énoncé ? Si oui, donner cette loi.

Exercice 3 On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants.

k	1	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\ldots$

et

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\ldots$

1. Compléter ces tableaux avec les probabilités manquantes.
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $Z = 2X$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(X+Y=5)$?
4. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $W = X+Y$
5. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $A = 3X-2Y$.

Exercice 4 *(Asie 2022)*

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking. Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5% de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 200)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros. Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.
   On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet et C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.
   On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	$\ldots$

   a. Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus.

b. Exprimer C en fonction de Y puis donner la loi de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
c. Calculer l'espérance de C à l'euro près.
d. Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Espérance et variance d'une somme de variables

Exercice 5 Soient X et Y deux variables aléatoire indépendantes telles que $E(X) = 3$, $E(Y) = -5$, $V(X) = 1$ et $V(Y) = 2$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_1 = 2X + 3Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_1
2. On considère la variable aléatoire $Z_2 = 4X - 2Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_2.
3. On considère la variable aléatoire $Z_3 = 3Y - 2X + 7$. Donner l'espérance et la variance de Z_3.

Exercice 6 On dit qu'une variable aléatoire X est centrée si son espérance est nulle et réduite si sa variance vaut 1. Montrer que pour toute variable aléatoire X non constante et admettant une espérance et une variance, la variable $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(\mathbb{X})}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Exercice 7 On lance trois pièces de monnaies et on regarde sur quels côtés elles tombent.

1. On note X le nombre de FACE obtenus. Construire le tableau résumant la loi de X.
2. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si les trois pièces tombent du même côté et 0 sinon.
   a. Quelle est la loi de Y ? On précisera la valeur du ou des paramètres(s).
   b. Que vaut l'espérance de Y ?
3. Le jeu consiste à miser deux euros. Si les trois pièces tombent sur les mêmes faces, on reprend sa mise et on remporte cinq euros supplémentaires. Sinon, on perd la mise. On note Z la variable aléatoire qui détermine le gain algébrique du joueur.
   a. Justifier que $Z = 7Y - 2$
   b. En déduire l'espérance de Z. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 8 Une urne contient 100 jetons parmi lesquels 10 sont gagnants. Pour jouer à la loterie, un joueur doit payer 10 euros et tire au hasard et successivement deux jetons, en remettant entre temps le jeton tiré. Chaque jeton gagnant tiré lui rapporte 20 euros.

1. On note X le nombre de jetons gagnants tirés. Quelle est la loi de X ?
2. Que vaut l'espérance de X ?
3. On note Y le gain algébrique d'un joueur. Expliquer pourquoi $Y = 20X - 10$.
4. En déduire l'espérance de Y. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 9 On considère les deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont données ci-dessous.

k	2	1	-1
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

et

k	1	2	-2
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

1. Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X et Y.
2. On propose le jeu suivant : 8 boules sont dans une urnes. On mise un euro et on tire une de ces boules au hasard. 5 sont perdantes, 2 font gagner 2 euros et 1 fait gagner 3 euros. Quelle variable aléatoire permet de modéliser ce jeu ?
3. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?
4. Proposer une expérience aléatoire correspondant à la variable aléatoire Y.
5. On réalise deux fois le jeu correspondant à la variable X et trois fois celui correspondant à la variable Y. On note Z le gain algébrique de cette successions de jeu. Sans déterminer précisément la loi de Z, dire si ce jeu est avantageux pour le joueur ou non.