— 8 —

# Succession d'épreuves indépendantes

## I. Succession d'épreuves indépendantes

**Définition 1 : Succession d'épreuves**

Soit $n$ un entier naturel. On considère $n$ épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement $\Omega_1$, $\Omega_2$, ... , $\Omega_n$. L'univers $\Omega$ de la succession de ces $n$ épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$. Les issues de cette succession d'expériences sont les $n$-uplets $(i_1, \ldots, i_n)$ de $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.

**Exemple :**

On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.

- Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont indépendantes.
- L'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes est :

$$\{1;2;3;4\} \times \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$$

- $\{2;5;7\}$, correspond par exemple à l'obtention d'un 2 au premier dé, d'un 5 au deuxième et d'un 7 au troisième.

**Définition 2 : Indépendance mutuelle**

Soit $n$ un entier naturel. On considère $n$ épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement $\Omega_1$, $\Omega_2$, ... , $\Omega_n$.
Les épreuves sont dites mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépen-

dantes) si, pour toute issue $(i_1, i_2, ..., i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$, on a :

$$\mathbb{P}(\{(i_1, i_2, ..., i_n)\}) = \mathbb{P}(\{i_1\}) \times \mathbb{P}(\{i_2\}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\{i_n\}).$$

Autrement dit, la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités de chacune des composantes $i_1$, $i_2$, ..., $i_n$.

**Exemple :**
Dans l'exemple précédent, la probabilité de $\{(2, 5, 7)\}$ est :

$$\mathbb{P}(\{(2, 5, 7)\}) = \mathbb{P}(\{2\}) \times \mathbb{P}(\{5\}) \times \mathbb{P}(\{7\}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{192}$$

## II. Épreuve de Bernoulli

**Définition 3 : Épreuve de Bernoulli**

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues : le succès $S$ et l'échec $\overline{S}$. On note $p \in [0, 1]$ la probabilité de succès, aussi appelé paramètre de l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'échec vaut donc $q = 1 - p$.
Une variable aléatoire $X$ sur cet univers suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ si on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. On écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

**Épreuve de Bernoulli**

| Issue | $S$ | $\overline{S}$ |
|---|---|---|
| Proba | $p$ | $q = 1 - p$ |

**Variable de Bernoulli**

| $k$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = k)$ | $p$ | $q = 1 - p$ |

**Exemple :**
On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si on considère le succès "Obtenir le nombre 6", cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

**Propriété 1**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$. L'espérance, la variance et l'écart-type de $X$ valent respectivement

$$E[X] = p, \quad V(X) = p(1 - p) = pq, \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)} = \sqrt{pq}$$

***Preuve.*** La variable aléatoire $X$ prend les valeurs 0 et 1. De plus $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$. Ainsi,

$$E[X] = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

et

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \mathbb{P}(X = 0) \times (0 - E[X])^2 + \mathbb{P}(X = 1) \times (1 - E[X])^2$$

d'où

$$V(X) = (1-p) \times (-p)^2 + p \times (1-p)^2 = q \times p^2 + p \times q^2 = pq(p+q) = pq.$$

$\square$

**Exemple :**
Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $0,2$.
On a alors $E[X] = 0,2$, $V(X) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,16} = 0,4$.

# III. Loi binomiale

## 1. Schéma de Bernoulli

**Définition 4 : Schéma de Bernoulli**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$ est une succession de $n$ épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, chacune de paramètre $p$.

**Exemple :**
On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On considère comme succès « la pièce tombe sur FACE ». Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$.

**Exemple :**
On lance 42 fois de suite un dé. On considère comme succès « le dé tombe sur 5 ou 6 ». Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 42 et $\frac{2}{3}$.

## 2. Loi binomiale

**Définition 5 : Loi binomiale**

Soit $n$ un entier naturel et $p$ un réel compris entre 0 et 1. On considère un schéma de Bernoulli à $n$ épreuves de paramètre $p$. On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. On dit que $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.
On écrit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

**Exemple :**

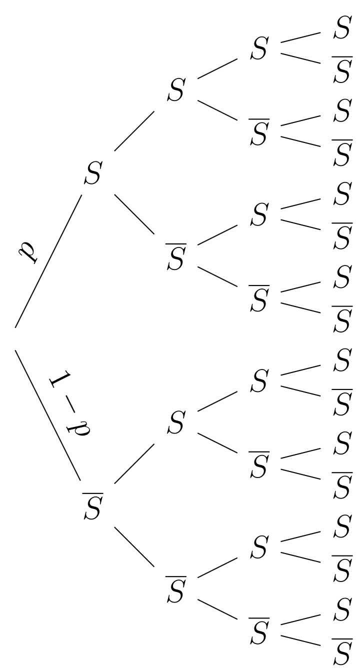
On lance une pièce équilibrée 5 fois de suite et on appelle $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenus.

- On a bien des épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques ;
- Ces épreuves sont au nombre de 5.
- Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (ici, la probabilité d'obtenir FACE) vaut $\frac{1}{2}$.

Ainsi, $X$ suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$.

**Exemple :**

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $p$. Ce schéma peut se traduire par l'arbre suivant :




Les chemins menant à deux succès sont $SS\overline{S}\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\overline{S}S$, $\overline{S}\overline{S}SS$, $\overline{S}S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS\overline{S}$. De plus,

- $\mathbb{P}(SS\overline{S}\overline{S}) = p \times p \times (1-p) \times (1-p) = p^2(1-p)^2$ ;
- $\mathbb{P}(S\overline{S}S\overline{S}) = p \times (1-p) \times p \times (1-p) = p^2(1-p)^2$ ;
- $\mathbb{P}(S\overline{S}\overline{S}S) = p \times (1-p) \times (1-p) \times p = p^2(1-p)^2$ ;
- $\mathbb{P}(\overline{S}\overline{S}SS) = (1-p) \times (1-p) \times p \times p = p^2(1-p)^2$ ;
- $\mathbb{P}(\overline{S}S\overline{S}S) = (1-p) \times p \times (1-p) \times p = p^2(1-p)^2$ ;
- $\mathbb{P}(\overline{S}SS\overline{S}) = (1-p) \times p \times p \times (1-p) = p^2(1-p)^2$.

On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue de ce schéma. On a donc

$$\mathbb{P}(X=2) = 6p^2(1-p)^2.$$

En modifiant cette écriture, on a en réalité

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2} p^2(1-p)^{4-2}.$$

**Propriété 2**

Soit $n$ un entier naturel, $p$ un réel compris entre 0 et 1 et $X$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Pour tout entier naturel $k$ inférieur ou égal à $n$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

***Preuve.*** On considère un schéma de Bernoulli de paramètre $p$ à $n$ épreuves.

L'ensemble des issues aboutissant à $k$ succès correspond à l'ensemble des $n$-uplets de $\{S;\overline{S}\}$ ayant exactement $k$ fois la lettre $S$ : d'après la chapitre sur le dénombrement, il y en a $\binom{n}{k}$.
Or, chacune de ces issues a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ : chacun des $k$ succès a une probabilité de $p$ et chacun des $n-k$ échecs a une probabilité $1-p$.
Ainsi, $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. □

**Exemple :**
On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le nombre 4 ?
On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 obtenus. $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ (le nombre de lancers) et $p=\frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 4, en un lancer). On cherche donc la probabilité de l'événement $X=2$, c'est-à-dire "obtenir exactement 2 succès".

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{3}{2}\times p^2\times(1-p)^{3-2}=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{75}.$$

## 3. Espérance, variance, écart-type

**Propriété 3**

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. L'espérance, la variance et l'écart-type de $X$ valent respectivement

$$E[X]=np,\quad V(X)=np(1-p)=npq,\quad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{npq}$$

**Exemple :**
Un élève répond au hasard et de manière indépendante à un QCM de 20 questions. Chaque question laisse le choix entre 4 propositions dont une seule est correcte.
On note $X$ le nombre de bonnes réponses de l'élève. $X$ désigne donc le nombre de succès (bonnes réponses) d'un schéma de Bernoulli à 20 épreuves, chaque épreuve ayant une probabilité de succès de $\frac{1}{4}$. $X$ suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(20,\frac{1}{4}\right)$.
Ainsi, $E[X]=20\times\frac{1}{4}=5$. L'élève peut espérer avoir 5 bonnes réponses.