Nom :

Question de cours :

- Donner la définition (par relation de récurrence) d'une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} u_k$?

Exercice :

1. Pour les suites suivantes données de façon explicite, déterminer une relation de récurrence :

a) $u_n = 5n + 4$ b) $v_n = n^2 + 3n + 1$

2. Pour les suites suivantes définies par récurrence, donner une expression de u_n, v_n et w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5u_n$ b) $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 3$ c) $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = 3w_n + 4$

Exercice :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$. (On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < 1$)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Donner alors une expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À l'aide de la question précédente, donner une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice :

Soit $n \geq 1$, démontrer que $(n+1)! \geq \sum_{k=0}^{n} k!$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Donner la définition (par relation de récurrence) d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de valeur initial $u_0 = 5$. Donner u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice :

1. Pour les suites suivantes données de façon explicite, déterminer une relation de récurrence :

a) $u_n = 3n - 2$ b) $v_n = 2n^2 + n - 2$

2. Pour les suites suivantes définies par récurrence, donner une expression de u_n, v_n et w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ b) $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = 2v_n$ c) $w_0 = -1$ et $w_{n+1} = 5w_n - 8$

Exercice :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$. (On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq -2, -4$)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Donner alors une expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À l'aide de la question précédente, donner une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice :

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q=2$ et de valeur initial $u_0=3$. Donner u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r\in\mathbb{R}$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$?

Exercice :

1. Pour les suites suivantes données de façon explicite, déterminer une relation de récurrence :

a) $u_n = 5.3^n$ b) $v_n = n^2+2n+3$

2. Pour les suites suivantes définies par récurrence, donner une expression de u_n, v_n et w_n pour tout $n\in\mathbb{N}$:

a) $u_0=0$ et $u_{n+1}=2u_n$ b) $v_0=5$ et $v_{n+1}=v_n+3$ c) $w_0=3$ et $w_{n+1}=-2w_n+3$

Exercice :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n}$. (On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n\neq 3,6$)

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Donner alors une expression de v_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. À l'aide de la question précédente, donner une expression de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice :

Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour tout $n\geq 1$ par : $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Le but est de montrer que $H_n\to+\infty$.

On admet que si $H_n\to l$ où $l\in\mathbb{R}$, alors $H_{2n}\to l$.

1. Écrire $H_{2n}-H_n$ en une unique somme.
2. En déduire que $H_{2n}-H_n\geq\dfrac{1}{2}$.
3. Conclure par l'absurde que $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge puis que $H_n\to+\infty$.

Commentaire :