Équations différentielles

Notion d'équation différentielle

Exercice 1 Montrer que $f : x \mapsto e^{3x} + 1$ est solution de l'équation différentielle $y' = 3y - 3$.

Exercice 2 Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est solution de l'équation différentielle $(1+x)y' + y = 0$ sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 3 Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est solution de l'équation différentielle $y' = y(1-y)$.

Exercice 4 Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = 2$
2. $y' = 1 - 2x$
3. $y' = 5x - 3$
4. $y' = x^2$
5. $y' = x^3$
6. $y' = 3x^2 + 2x + 1$

Exercice 5 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x^3}$ définies sur $]0; +\infty[$.

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 6 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique solution f de l'équation différentielle homogène donnée telle que $f(x_0) = y_0$.

1. $y' - 8y = 0$ avec $x_0 = -2$ et $y_0 = -7$
2. $y' - 2y = 0$ avec $x_0 = 2$, $y_0 = 3$
3. $y' + 4y = 0$ avec $x_0 = -1$, $y_0 = -5$
4. $y' = -7y$ avec $x_0 = 0$, $y_0 = 2$
5. $3y' + 2y = 0$ avec $x_0 = 1$, $y_0 = 3$
6. $y' - 9y = 0$ avec $x_0 = 47$, $y_0 = 0$

Exercice 7 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 4y + 1$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée $y' = 4y$.
2. Déterminer une solution constante de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Déterminer l'unique solution f_0 de (E) telle que $f_0(3) = 5$.

Exercice 8 On considère l'équation différentielle $(E) : (y')^2 - y^2 = 0$.
Déterminer l'unique solution f de (E) qui est strictement positive, strictement décroissante et telle que $f(0) = 1$.

Exercice 9 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique solution f de l'équation différentielle donnée telle que $f(x_0) = y_0$.

1. $y' - 3y = 2$ avec $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$
2. $2y' = 5y - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 2$
3. $y' - 4y = 8$ avec $x_0 = 11$ et $y_0 = -2$

Exercice 10 Dans chacun des cas suivant, déterminer une équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel et dont la fonction f est une solution.

1. $f : x \mapsto -3e^{\frac{x}{2}}$
2. $f : x \mapsto -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$
3. $f : x \mapsto 2e^{3-2x}$
4. $f : x \mapsto \pi e^{\pi + x}$

Exercice 11 On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 4y + 3x - 1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (H).
2. Soit φ une solution de (E) et f une fonction. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de (H).
3. Montrer que $v : x \mapsto -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{16}$ est solution de l'équation différentielle $y' = 4y + 3x - 1$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

Exercice 12 On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée (H) : $y' + y = 0$.
2. Soit φ une solution de (E) et f une fonction. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de (H).
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ est solution de l'équation (E).
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 13 On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + y = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x/2}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H) : $2y' + y = 0$
2. Soit φ une solution de (E) et f une fonction. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de (H).
3. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $f : x \mapsto (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{-x/2}$ soit solution de l'équation (E)
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 14 Une colonie de 2000 bactérie est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. on admet que l'évolution en fonction du temps t en heure ($t \geqslant 0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle (E) : $N'(t) = 3N(t) - 0,005\,(N(t))^2$.
Pour déterminer $N(t)$, on se propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction N ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et on définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.
   Déterminer $g'(t)$.
2. Montrer que N est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de (E') : $y' = -3y + 0,0005$.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.
5. Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.

Approfondissement

Exercice 15 La méthode de la variation de la constante permet de trouver, dans certains cas, une solution particulière à une équation différentielle. Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée $y' + y = 0$.
2. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. On cherche alors une fonction C définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b. On rappelle que f est solution de (E). En déduire que $C'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ pour tout réel x.
   c. Déterminer une fonction C qui convienne.
   d. Réciproquement, montrer que la fonction f trouvée est bien solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions (E).

Exercice 16 L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables telles que, pour tous réels a et b, on a (E) : $f(a+b) = f(a)f(b)$.

1. Déterminer les solutions constantes de ce problème.
2. On suppose désormais que f est une solution de (E) non constante.
   a. Justifier que $f(0) = 1$.
   b. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(a+x)$.
   Justifier que g est dérivable et que pour tous réels a et x, on a $g'(x) = f(a)f'(x)$.
   En déduire que $f'(a+x) = f(a)f'(x)$ et que $f'(a) = f(a)f'(0)$.
   c. En déduire toutes les solutions de (E).