Correction - Devoir commun n°4

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 2 exercices indépendants.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, dx$.

1. $I_0 = \int_0^1 x^0 \mathrm{e}^x \, dx = \int_0^1 \mathrm{e}^x \, dx = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$.

2. $I_1 = \int_0^1 x \, \mathrm{e}^x \, dx = \int_0^1 u(x)v'(x)dx$ avec :

$$u(x) = x \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^x$$

Ces deux fonctions sont dérivables et on a :

$$u'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \mathrm{e}^x$$

Ces deux dérivées sont continues, donc on peut utiliser une intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$$

Donc $I_1 = [x \, \mathrm{e}^x] - \int_0^1 \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e} - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0, 1]$ on a $x^n \mathrm{e}^x \geqslant 0$ donc $\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, dx \geqslant 0$. Ensuite,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(x^{n+1} \mathrm{e}^x - x^n \mathrm{e}^x\right) dx = \int_0^1 \left(x^{n+1} - x^n\right) \mathrm{e}^x \, dx$$

Or, pour $x \in [0, 1]$, on a $x^{n+1} \leqslant x^n$ et donc $(x^{n+1} - x^n) \, \mathrm{e}^x \leqslant 0$. Donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

En conclusion, (I_n) est décroissante et positive (donc minorée par 0) donc elle converge.

4. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $[0, 1]$, alors pour $x \in [0, 1]$, on a $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

On en conclut que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e} \, x^n$.

5. Ainsi, on a :

$$I_n = \int_0^1 x_n \, \mathrm{e}^x \, dx \leqslant \int_0^1 \mathrm{e} \, x^n dx = \mathrm{e} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

6. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$, alors par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

7. Par une méthode similaire à celle de la **question 2**, on a :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \mathrm{e}^x \, dx = \left[x^{n+1} \mathrm{e}^x\right] - \int_0^1 (n+1) x^n \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e} - (n+1) \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e} - (n+1) I_n$$

8. On a donc $I_2 = \mathrm{e} - 2I_1 = \mathrm{e} - 2$ et $I_3 = \mathrm{e} - 3(\mathrm{e} - 2) = -2\,\mathrm{e} + 6$.

Exercice 2 **1**. **a.** Puisque les baguettes sortent à 225°C, alors on a que $f(0) = 225$.

b. On note $(E)\ :\ y' + 6y = 150$ et $(H)\ :\ y' + 6y = 0$ l'équation homogène associée.

Les solutions homogènes sont de la forme $y_h\ :\ t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-6t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

L'équation (E) a un second membre constant donc on cherche un solution constante à cette équation. On note y_c une telle solution.

Puisque y_c est constante alors $y_c' = 0$, et comme elle est solution de (E), on a finalement :

$$y_c' + 6y_c = 150 \iff 6y_c = 150 \iff y_c = 25$$

On a donc une solution constante égale à 25. Les solutions de (E) sont donc de la forme :

$$y\ :\ t\ \mapsto y_h(t) + y_c(t) = C\,\mathrm{e}^{-6t} + 25$$

c. D'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > 0$, on a $f(t) = C\,\mathrm{e}^{-6t} + 25$. D'après la question 1, on a $f(0) = 225$, ainsi :

$$f(0) = 225 \iff C\,\mathrm{e}^{-6\times 0} + 25 = 225 = C + 25 = 225 \iff C = 200$$

On a donc $f\ :\ t \mapsto 200\,\mathrm{e}^{-6t} + 25$.

2. On veut vérifier deux faits :

- La fonction f est décroissante.
- La fonction f converge vers 25 en $+\infty$.

Premièrement f est dérivable et pour $t > 0$, on a $f'(t) = -1200\,\mathrm{e}^{-6t} < 0$. Donc f est décroissante. Ensuite, $-6t \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0 + 25 = 25$.

La fonction f vérifie donc les observations réelles.

3. Deux méthodes pour cette question :

- La fonction f est continue et monotone sur $[0, +\infty[$. Puisque $f(0) = 225$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$, alors un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe une unique solution à l'équation $f(t) = 40$.
- On peut simplement résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} f(t) = 40 \iff 200\,\mathrm{e}^{-6t} + 25 = 40 \iff 200\,\mathrm{e}^{-6t} = 15 &\iff \mathrm{e}^{-6t} = \frac{15}{200} \\ &\iff -6t = \ln\left(\frac{3}{40}\right) \\ &\iff t = -\frac{\ln\left(\frac{3}{40}\right)}{6} \approx 0,43 \end{aligned}$$

4. À la fin du programme, la valeur de x est $0,44$. Donc, à partir de $t = 0,44$, on a $f(t) < 40$. Or le temps t est donnée en heure, soit 60 minutes.

Or, $0,44 \times 60 \approx 26,4$ donc le boulanger pourra mettre la baguette en rayon après 27 minutes.