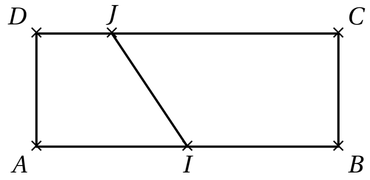
Orthogonalité et distances dans l'espace

Produit scalaire dans l'espace



Exercice 1 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$.
Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC}$.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$
3. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$
4. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$

Exercice 2 On considère trois points A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 3 Est-il possible d'avoir 3 points de l'espace A, B et C tels que $AB = 3$, $BC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$?

Exercice 4 Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Dans cet exercice, on veut prouver que $\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)^2 \leq \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$ mais sans utiliser que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, en utilisant uniquement les propriétés du produit scalaire.
Pour tout réel t, on pose $P(t) = \left\|\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\right\|^2$.

1. Montrer que $P : t \mapsto P(t)$ est un polynôme du second degré.
2. Que peut-on dire sur le signe de P ? Et donc sur sont discriminant ?
3. En déduire l'inégalité. *(Elle est appelée : Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Exercice 5 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$.

1. Que vaut $2\vec{u} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w})$?
2. Que vaut $(3\vec{v} - 2\vec{u}) \cdot (4\vec{w} + \vec{u})$?

Exercice 6 On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

Exercice 7 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 7$. Que valent $||\vec{u} + \vec{v}||$ et $||\vec{u} - \vec{v}||$?

Exercice 8 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 4$ et $||u \vec{-} v|| = 5$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 9 Soit A, B et C trois points de l'espace tel que $AB + BC = AC$. Montrer que ces points sont alignés.

Base orthonormée

Exercice 10 L'espace est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormé. Montrer que $\overrightarrow{u}(1,5,-9)$ et $\overrightarrow{v}(3,3,2)$ sont orthogonaux.

Exercice 11 L'espace est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2,5,1)$, $B(3,1,2)$, $C(8,2,x)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Pour quelle valeur du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 12 L'espace est muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
3. Calculer les longueurs AB et AC.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie eu degré près.

Exercice 13

1. Interpréter le script python suivant. Que renvoie la fonction `norme(4,3,0)`.

```python
from math import sqrt
def norme(x,y,z):
  N=sqrt(x**2+y**2+z**2)
  return N
```

2. Compléter le script python suivant afin qu'il renvoi la distance entre deux points de l'espace.

```python
from math import sqrt
def distance(x1,y1,z1,x2,y2,z2):
    D = norme(........,........,........)
    return D
```

Exercice 14 Quelle est la distance entre deux sommets opposés d'un cube de coté a ?

Exercice 15 On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}\,(1,0,1)$, $\vec{v}\,(0,1,1)$ et $\vec{w}\,(1,1,0)$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
2. Soit λ un réel et $\vec{V} = \vec{v} + \lambda\vec{u}$. Déterminer la valeur de λ pour que $\vec{V}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.
3. Soit μ_1 et μ_2 deux réels et $\vec{W} = \vec{w} + \mu_1\vec{V} + \mu_2\vec{u}$. Déterminer les valeurs de μ_1 et μ_2 pour que le vecteur $\vec{W}$ soit orthogonal aux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{u}$.
4. En déduire une base orthonormée de l'espace différente de $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Ce procédé pour construire une base orthonormée à partir d'une base qui ne l'est pas est appelé procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Orthogonalité

Exercice 16 On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère $A(2,5,1)$, $B(3,2,3)$ et $C(3,6,2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 17 On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Quelle est la nature du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?
2. Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$.
4. Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 18 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1,2,1)$, $B(3,4,1)$, $C(4,-1;6)$ et $D(6,1,6)$. Montrer que $ABDC$ est un rectangle.

Exercice 19 On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ $et\,\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Montrer que $\vec{u}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

Exercice 20 L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3,-2,-2)$, $B(1,3,-8)$ et $C(-2,0,4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n}\,(2,2,1)$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).