Nom :

Question de cours :

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, donner $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a$.
- Soient $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, donner $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Exercice :

1) Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:

a) $S_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 15$ $\qquad S_2 = -1 + 1 + -1 + 1 - 1$ $\qquad S_3 = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \cdots + \sqrt{16}$

2) Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$ $\qquad$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (3k+1)$ $\qquad$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{2-k}$

Exercice :

Vérifier que pour $k \geq 0$, on a : $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k+3}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice :

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler ce qu'est la linéarité de la somme.
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, donner $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a$.

Exercice :

1) Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:

a) $S_1 = 2 + 4 + 6 + \cdots + 20$ $\qquad S_2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 36$ $\qquad S_3 = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{10}$

2) Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2k+1)$ $\qquad$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2k + 3^k)$ $\qquad$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

Exercice :

1) Vérifier que pour $k \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $n \geq 1$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice :

Calculer les produits suivants pour $n \in \mathbb{N}$:

a) $P_1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k$ $\qquad$ b) $P_2 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2k$ $\qquad$ c) $P_3 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler la définition la factorielle de $n \in \mathbb{N}$ à l'aide du symbole $\prod$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, donner $\sum_{k=0}^{n} k$.

Exercice :

1) Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:

a) $S_1 = 3 + 6 + 9 + \cdots + 21$ $\qquad$ $S_2 = -1 + 4 - 9 + \cdots + 36$ $\qquad$ $S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{12!}$

2) Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=1}^{n}(3^k + 3)$ $\qquad$ b) $\sum_{k=2}^{n}(4k+2)$ $\qquad$ c) $\sum_{k=0}^{n} 3^{2k}2^{n-k}$

Exercice :

1) Soit $n \geq 1$, démontrer que $(n+1)! \geq \sum_{k=0}^{n} k!$.

2) Soit $n \geq 1$, calculer $\sum_{k=0}^{n} 2k + \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.

Exercice :

Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour tout $n \geq 1$ par : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Le but est de montrer que $H_n \to +\infty$.

On admet que si $H_n \to l$ où $l \in \mathbb{R}$, alors $H_{2n} \to l$.

1. Écrire $H_{2n} - H_n$ en une unique somme.
2. En déduire que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. Conclure par l'absurde que $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge puis que $H_n \to +\infty$.

Commentaire :