Nom :

Question de cours :

- Donner une primitive pour chacune des fonctions suivante : a) $x \mapsto e^{-3x}$ b) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
- Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$. Que vaut $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

Exercice :

Pour les intégrales suivantes, dire si elles convergent, et dans le cas échéant, donner leur valeur :

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{t^2}dt$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} 2e^t dt$ c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{3}{t}dt$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} te^{t^2}dt$

Exercice :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout $a \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ converge et préciser sa valeur. On notera $I(a)$ cette valeur.

2) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Soit $n \geq 1$, on pose maintenant $J_n(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} t^n f(t)dt$ pour $a \geq 0$.

3) Pour tout $n \geq 1$, montrer que cette intégrale converge et donner une relation entre $J_{n+1}(a)$ et $J_n(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.

On note maintenant $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt$.

4) En admettant que ces intégrales converge, déduire de la question précédente une relation entre J_n et J_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt$ converge pour tout $n \geq 1$ et donner sa valeur.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Donner une primitive pour chacune des fonctions suivante : a) $x \mapsto x^2 - 3x + 9$ b) $x \mapsto xe^{x^2}$
- Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice :

Pour les intégrales suivantes, dire si elles convergent, et dans le cas échéant, donner leur valeur :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}dt$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} (6t^2+2)dt$

Exercice :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(t)}{t} \text{ si } t > 1 \\ 0 \text{ si } t \leq 1 \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout $a \geq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ converge et préciser sa valeur. On notera $I(a)$ cette valeur.

2) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

3) On pose maintenant $J(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{f(t)}{t}dt$ pour $a \geq 1$. Montrer que cette intégrale converge et calculer sa valeur à l'aide d'une intégration par parties.

4) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Donner une primitive pour chacune des fonctions suivante : a) $x \mapsto \dfrac{5}{x}$ b) $x \mapsto \dfrac{2}{x}\ln(x)$
- Rappeler le théorème d'intégration par parties.

Exercice :

Pour les intégrales suivantes, dire si elles convergent, et dans le cas échéant, donner leur valeur :

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{t^2}dt$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)dt$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |t|\, dt$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

Exercice :

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \dfrac{6t+3}{(3t^2+3t+1)^2}$

a) Montrer que pour tout $a \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ converge et préciser sa valeur.

b) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(t) = \begin{cases} \ln(t) \text{ si } t > 1 \\ 0 \text{ si } t \leq 1 \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $a \geq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} g(t)dt$ converge et préciser sa valeur. On notera $I(a)$ cette valeur.

b) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Commentaire :