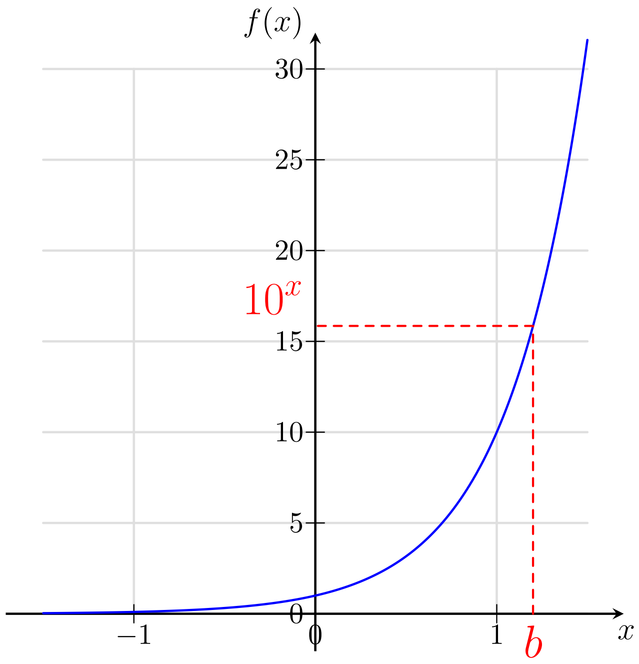
— 3 —

Logarithme décimal

I. Définition

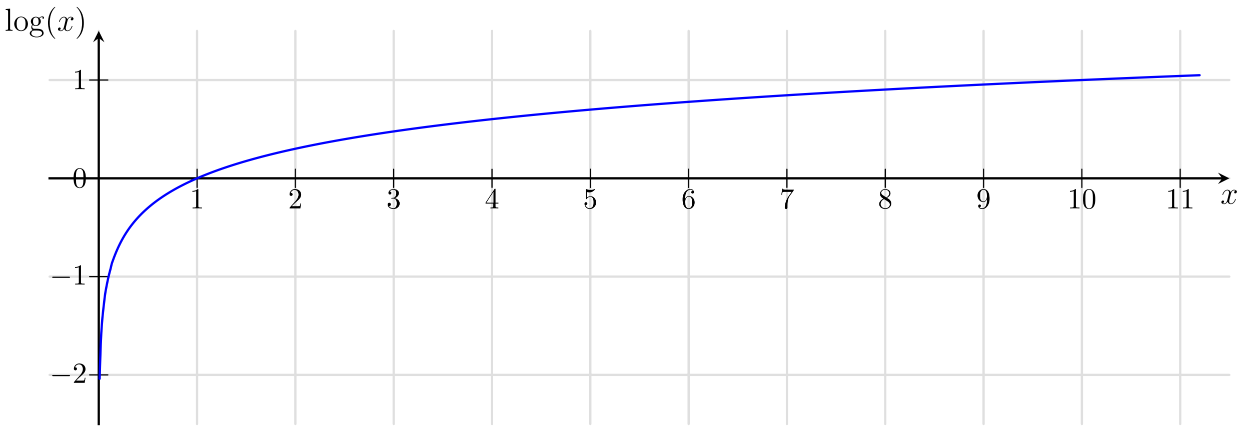
On étudie la fonction exponentielle de base 10 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$.
Imaginons que l'on cherche le nombre x tel que $10^x = 20$, on note ce nombre $\log(20)$.
En général, on a que si $10^x = b$, pour $b > 0$, alors $x = \log(b)$.



Définition 1

On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif b, l'unique nombre réel x tel que $10^x = b$. On note ce nombre $\log(b)$.
On définit alors sur $]0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \log(x)$, appelée **fonction logarithme décimale** et notée log.

II. Étude de la fonction log



Propriété 1

- La fonction log est croissante sur $]0, +\infty[$.
- $\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log(\frac{1}{10}) = -1$.
- Si $x \geq 1$, alors $\log(x) \geq 0$.
- Si $0 < x \leq 1$, alors $\log(x) \leq 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\log(10^x) = x$.
- Pour tout $x > 0$, on a $10^{\log(x)} = x$.

Exemple :

1. $\log(5) \ldots\ldots \log(6)$.
2. $\log(0,8) \ldots\ldots 0$.
3. $\log(10^5) = \ldots\ldots$
4. $\log(1000) = \ldots\ldots = \ldots\ldots$
5. $\log(0,01) = \ldots\ldots = \ldots\ldots$
6. $10^{\log(2,5)} = \ldots\ldots$

III. Propriété algébrique de la fonction log

Propriété 2

Soient $a, b > 0$, on a :

- $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$.

- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$.
- $\log(\frac{1}{b}) = -\log(b)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\log(a^x) = x\log(a)$.

Exemple :

Calculer :

$A = \log(2,5) + \log(4)$ $B = 2\log(3) - \log(4)$ $C = \log(10^7) - \log\left(\frac{1}{2}\right)$

....

....

....

....

Exemple :

On donne que $45 \times 532 = 23940$ et que $\log(45) \approx 1,65$ et $\log(532) \approx 2,73$.

Alors $\log(23940) \approx$ ....

IV. Équations et inéquations

Propriété 3

Soient $a, b > 0$, on a :

- $\log(a) = \log(b)$ si et seulement si $a = b$.
- $\log(a) < \log(b)$ si et seulement si $a < b$.

Exemple :

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$3^x = 5$ $x^{0,1} < 10$

....

....

....

....

....