— 13 —

Primitives

I. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 1

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Exemple :

Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^3 + 6$ sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 3x^2$.

Propriété 1 : Admise (pour l'instant)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque :

Certaines fonctions comme la fonction $f : x \longmapsto e^{-x^2}$, sont continues sur $\mathbb{R}$, donc admettent des primitives sur $\mathbb{R}$, mais n'ont pas de primitive « explicite » à l'aide des fonctions usuelles. C'est un résultat **(très)** difficile appelé théorème de Liouville.

Propriété 2

Les primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I.
On définit sur I la fonction g par $g(x) = F_2(x) - F_1(x)$.
Par hypothèse, F_1 et F_2 sont dérivables sur I et on a $F_1' = f$ et $F_2' = f$.
Par conséquent, $g = F_2 - F_1$ est aussi dérivable sur I et $g' = F_2' - F_1' = f - f = 0$.
On en déduit que g est constante sur I. Il existe donc un réel C tel que, pour tout $x \in I$, $g(x) = C$ soit $F_2(x) - F_1(x) = C$ donc $F_2(x) = F_1(x) + C$, d'où le résultat. □

⚠ **Remarque :**
On déduit de ce résultat qu'on ne peut jamais parler de **la** primitive d'une fonction mais plutôt d'**une** primitive puisque il en existe une infinité.

II. Fonctions de référence et propriétés

Voici le tableau des primitives des fonctions de référence :

Fonction f	**UNE** Primitive F	Intervalle I
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{(n+1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0; +\infty[$

Propriété 3

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur un intervalle I alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- λF est une primitive de λf avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

🔎 **Méthode :**
Déterminons une primitive de $f \ : \ x \mapsto x^2 + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. On vérifie que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$: elle est somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2. f admet donc une primitive. Utilisons le tableau vu précédemment :
   Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ et une primitive de $x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 6\sqrt{x}$.

   Donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 6\sqrt{x}$ est une primitive de f

⚠ **Remarque :**
Après avoir déterminer une primitive de notre fonction : **on vérifie !** On dérive la primitive trouvée et on vérifie que l'on retombe bien sur la fonction de départ.

III. Primitives des fonctions de la forme $u' \times (v' \circ u)$

Propriété 4

Soient u et v deux fonctions telles que la fonction $v \circ u$ est définie et dérivable sur un intervalle I. Alors $v \circ u$ est une primitive sur I de $u' \times (v' \circ u)$.

Certaines formes de fonctions sont à reconnaître pour en calculer les primitives :

- Une primitive d'une fonction de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$ où u est une fonction qui ne s'annule pas est $\dfrac{1}{u}$.
- Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où u est une fonction strictement positive est $\sqrt{u}$.
- Une primitive d'une fonction de la forme $u' \mathrm{e}^u$ est e^u.
- Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est une fonction strictement positive est $\ln(u)$.

Exemple :

Déterminons les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Puisque pour $x \in \mathbb{R}$, on a $(x^2+1)^2 \neq 0$, alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet alors des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = x \times \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

On pose $u(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 2x$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont dont de la forme $x \mapsto -\dfrac{1}{2(x^2+1)} + C$, où $C \in \mathbb{R}$.