Évaluation n°3

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 (Question de cours)

1. Donner la forme des solutions de l'équation différentielle $y' - 7y = 0$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire. Donner une expression de $\mathbb{V}(aX + b)$.

Exercice 2

Un cycliste roule sur une route en pente descendante rectiligne et supposée infinie.
On note $v(t)$ sa vitesse à un instant $t \geqslant 0$, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde. On suppose enfin que v est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.

Une modélisation simple permet d'affirmer que v est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad 10y' + y = 30$$

1. Résoudre l'équation homogène associée $(H)\ :\ 10y' + y = 0$.
2. Déterminer une solution constante de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. On suppose que $v(0) = 0$, en déduire l'expression de $v(t)$ pour $t \geqslant 0$.

On considère maintenant la fonction $v\ :\ t \mapsto 30 - 30\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$ définie sur $[0, +\infty[$.

5. Montrer que la fonction v est croissante et concave sur $[0, +\infty[$.
6. Déterminer la limite de v en $+\infty$.
7. À partir de quelle valeur de t la vitesse dépasse-t-elle 15m.s^{-1} ?

Exercice 3

Un sac opaque contient quatre jetons numérotés de 1 à 4, indiscernables au toucher. À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
On note X la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, Y celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et Z celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X, Y, et Z sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

1. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

On note $S = X + Y + Z$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
4. Déterminer $P(S = 4)$.