Nom :

Question de cours :

- Rappeler la définition d'une densité de probabilité.
- Rappeler la densité de probabilité associée à la loi uniforme sur $[a, b]$, où $a < b$. Rappeler ensuite l'espérance et la variance d'une telle variable aléatoire.

Exercice :

Répondez aux questions pour chacune des fonctions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } 1 \leq x \leq e \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que cette fonction est une densité.

2. Soit X admettant cette fonction comme densité.

a) Donner la fonction de répartition de X.

b) Donner $\mathbb{P}(X > 2)$, $\mathbb{P}(X < 1)$ et $\mathbb{P}(0 < X \leq 2)$.

Exercice :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

1. X admet-elle une densité ? Si oui, donner son expression.

2. Rappeler l'espérance de X. Calculer cette espérance à la main.

3. On pose $Z = X + 1$. Donner la fonction de répartition de Z et en déduire une densité.

Exercice :

Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on pose les variables aléatoires suivantes :

a) $X = 2U$ b) $Y = -\dfrac{\ln(1-U)}{2}$

Pour chacune de ces variables aléatoires, donner la fonction de répartition, en déduire une densité et identifier une loi usuelle.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Si X admet une densité de probabilité f, donner cette définition sous forme d'intégrale.
- Rappeler la densité de probabilité associée à la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Rappeler ensuite l'espérance et la variance d'une telle variable aléatoire.

Exercice :

Répondez aux questions pour chacune des fonctions réelles suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } x < 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que cette fonction est une densité.

2. Soit X admettant cette fonction comme densité.

a) Donner la fonction de répartition de X.

b) Donner $\mathbb{P}(X \leq 2)$, $\mathbb{P}(X > 1)$ et $\mathbb{P}(2 < X \leq 4)$.

Exercice :

Soient X, Y deux variables aléatoire à densité de loi exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. On note $Z = \max(X, Y)$.

1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Écrire l'évènement $[Z \leq t]$ en fonction des évènements $[X \leq t]$ et $[Y \leq t]$.

2) Donner alors la fonction de répartition de Z en fonction de celles de X et Y.

3) En déduire finalement la fonction de répartition de Z.

4) Donner alors une densité de probabilité de Z.

Exercice :

Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on pose les variables aléatoires suivantes :

a) $X = 2U + 1$ b) $Y = -\ln(1 - U)$

Pour chacune de ces variables aléatoires, donner la fonction de répartition, en déduire une densité et identifier une loi usuelle.

Commentaire :

Nom :

Question de cours :

- Rappeler la définition de l'espérance d'une variable aléatoire X admettant une densité f. Donner une formule similaire pour $\mathbb{E}[X^2]$.
- Rappeler la densité de probabilité associée à la loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Rappeler ensuite l'espérance et la variance d'une telle variable aléatoire.

Exercice :

Répondez aux questions pour chacune des fonctions suivantes :

et $\quad g(x) = \begin{cases} 2e^{-2t} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2+12}{32} \text{ si } |x| \leq 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Montrer que cette fonction est une densité.

2. Soit X admettant cette fonction comme densité.

a) Donner la fonction de répartition de X.

b) Donner $\mathbb{P}(X \leq 2)$, $\mathbb{P}(X > 0)$ et $\mathbb{P}(-2 < X \leq 1)$.

Exercice :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,2])$.

1. X admet-elle une densité ? Si oui, en donner un expression et une représentation graphique.

2. Rappeler l'espérance de X. Calculer cette espérance à la main.

3. Donner la fonction de répartition de X.

Exercice :

Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on pose les variables aléatoires suivantes :

a) $X = U + 3$ b) $Y = -\ln(U)$

Pour chacune de ces variables aléatoires, donner la fonction de répartition, en déduire une densité et identifier une loi usuelle.

Commentaire :