— 15 —

Sommes de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre, on considère un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.

I. Opérations sur les variables aléatoires

1. Sommes et produits par un réel

Définition 1

Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur Ω. Soit a un réel non nul et b un réel.
La variable aléatoire $aX+b$ est définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $(aX+b)(\omega) = a \times X(\omega)+b$
Ainsi, pour tout réel k, on a $\mathbb{P}(aX+b=k) = \mathbb{P}\left(X = \dfrac{k-b}{a}\right)$.

Exemple :
On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau suivant :

k	-2	3	7
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On note Y la variable aléatoire telle que $Y = 3X - 1$.
Puisque X prend les valeurs -2, 3 et 7, alors Y prend les valeurs -7, 8 et 20.
Par ailleurs, $\mathbb{P}(Y=-7) = \mathbb{P}(3X-1=-7) = \mathbb{P}(X=-2)$.
La loi de Y peut donc être résumée par le tableau ci-contre :

k	-7	8	20
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Exemple :
On considère le jeu suivant : on paye 10 euros puis on lance 4 dés équilibrés à 6 faces, numérotés de 1 à 6. On remporte alors 5 euros par dé qui tombe sur le nombre 6.

Notons X le nombre de 6 obtenus et Y le gain en euros à l'issue de ce jeu. X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{6}$. De plus, on a $Y = 5X - 10$ puisque -10 représente le coût fixe du jeu, et $5X$ le gain par numéro 6 obtenu.
Il est donc facile d'obtenir la loi de Y à partir de celle de X :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

k	-10	-5	0	5	10
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

2. Variables aléatoires indépendantes

Définition 2

Soit n un entier naturel et X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires définies sur Ω.
On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, ... X_n sont mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépendantes) si, pour tous réels x_1, x_2, ..., x_n, on a

$$\mathbb{P}((X = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \ldots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \mathbb{P}(X_2 = x_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

⚠️ **Remarque :**
Une façon de voir la définition précédente est : si l'on considère une succession d'épreuves aléatoires indépendantes, chacune étant reliée à une variable aléatoire réelle, alors ces variables aléatoires sont indépendantes.

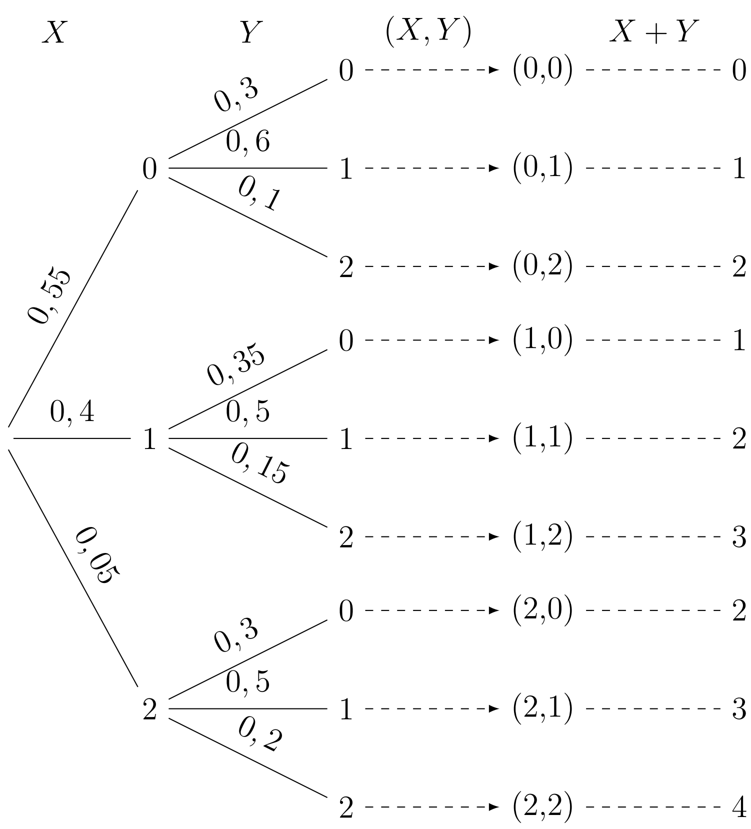
3. Somme de deux variables aléatoires

Définition 3

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω. On appelle « somme de X et Y » la variable aléatoire $Z = X + Y$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

Exemple :
Un supporter de football a étudié le nombre de buts marqués par son équipe au cours d'une saison. On considère un match au hasard de cette équipe et on appelle X le nombre de buts marqué par cette équipe en première mi-temps de ce match et Y le nombre de buts marqués en deuxième mi-temps. Ainsi, $X + Y$ représente le nombre de buts marqués par l'équipe en question au cours du match.
D'après l'étude de ce supporter, on peut construire l'arbre de probabilités suivant :



La variable aléatoire $X + Y$ prend alors les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4.
Il est alors possible d'établir la loi de en s'appuyant sur cet arbre de probabilités.
Par exemple, on a :

$$\mathbb{P}(X+Y=1) = \mathbb{P}(X=0 \cap Y=1) + \mathbb{P}(X=1 \cap Y=0) = 0,55 \times 0,6 + 0,4 \times 0,35 = 0,47$$

La loi de $X + Y$ peut alors être résumée dans le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	0,165	0,47	0,27	0,085	0,01

II. Espérance et variance d'une somme de variables

1. Cas général

Propriété 1

Soient X et Y deux variables aléatoires, a et b deux réels. On a

$$\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Exemple :
On reprend l'exemple précédent de l'étude du supporter dont on avait obtenu les lois suivantes :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0,55	0,4	0,05

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	0,165	0,47	0,27	0,085	0,01

On a alors $\mathbb{E}[X] = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,05 = 0,5$.
De plus, $\mathbb{E}[X+Y] = 1 \times 0,47 + 2 \times 0,27 + 3 \times 0,085 + 4 \times 0,01 = 1,305$.
Or, $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$, ce qui nous permet de déterminer $\mathbb{E}[Y]$:

$$\mathbb{E}[Y] = E[X+Y] - \mathbb{E}[X] = 1,305 - 0,5 = 0,805$$

Le nombre moyen de buts mis en deuxième mi-temps est donc $0,805$.

Remarque :
Dans l'exemple précédent, les variables aléatoires X et Y n'étaient pas indépendantes, et pourtant, l'espérance de la somme pouvait être exprimée comme la somme des espérances. L'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires est toutefois primordiales pour la propriété qui suit.

Propriété 2

Soient X et Y deux variables aléatoires. Soient a et b deux réels.

- $\mathbb{V}(aX+b) = a^2 \times \mathbb{V}(X)$
- Si X et Y sont **indépendantes**, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Remarque :
Attention à ne pas oublier le carré : une variance est toujours positive !
Un exemple classique est : si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(-Y) = \mathbb{V}(X) + (-1)^2\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Exemple :
Toujours dans l'exemple précédente, on peut comparer les variances de X, Y et $X+Y$.
Calculons la variance de X. On rappelle pour cela la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0,55	0,4	0,05

k	0	1	4
$\mathbb{P}(X^2=k)$	0,55	0,4	0,05

Ainsi, $\mathbb{E}[X^2] = 0 \times 0,55 + 1 \times 0,4 + 4 \times 0,05 = 0,6$ donc :

$$\mathbb{V}(X) = 0,6 - 0,5^2 = 0,35$$

De même, $\mathbb{E}[Y^2] = 0 \times 0,32 + 1 \times 0,555 + 4 \times 0,125 = 1,055$ donc :

$$\mathbb{V}(Y) = 1,055 - 0,805^2 = 0,406975$$

Enfin, $\mathbb{E}[(X+Y)^2] = 0 \times 0,165 + 1 \times 0,47 + 4 \times 0,27 + 9 \times 0,085 + 16 \times 0,01 = 2,475$.
On obtient donc $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 = 2,475 - 1,305^2 = 0,771975$.
En particulier, on voit que $\mathbb{V}(X+Y) \neq \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$, ce qui nous assure que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Application à la loi binomiale

Propriété 3

Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Notons $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. La variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètres n et p.

On retrouve alors le résultat connu suivant :

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$\mathbb{E}[X] = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
On considère des variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, ..., X_n suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour tout entier naturel k compris entre 1 et p, on a $\mathbb{E}[X_k] = p$ et $\mathbb{V}(X_k) = p(1-p)$.
On note alors $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. D'après la propriété précédente, on a $S \sim \mathcal{B}(n,p)$.
S et X suivent donc la même loi et ont alors la même espérance et la même variance.
Or, on a $\mathbb{E}[S] = p + p + \ldots + p = np$ et comme les variables X_i sont indépendantes, on a $\mathbb{V}(S) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) = np(1-p)$. $\square$