Correction - Bac Blanc (Sujet 1)

(Calculatrice autorisée)

Cette évaluation est composée de 4 exercices indépendants.

Exercice 1 **1**. Dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a :

$$I\left(0,\frac{1}{4},1\right),\ J\left(\frac{1}{4},0,1\right),\ K\left(1,0,\frac{1}{4}\right)$$

2. On a $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$, $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},0\right)$, $\overrightarrow{IK}\left(1,-\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$.
Or $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+0=0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IK}=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), il alors est normal à ce plan.

3. Puisque $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK), alors :

$$M(x,y,z)\in(IJK)\iff 1x+1y+1z+d=0$$

Or on a $I\left(0,\frac{1}{4},1\right)\in(IJK)$ donc :

$$0+\frac{1}{4}+1\times1+d=0\iff 1+4+4d=0\iff 4d=-5\iff d=-\frac{5}{4}$$

Finalement : $M(x,y,z)\in(IJK)\iff x+y+z-\frac{5}{4}=0\iff 4x+4y+4z-5=0$.
Le plan (IJK) a pour équation cartésienne $4x+4y+4z-5=0$.

4. On a $\overrightarrow{BC}(0,1,0)$ et $B(1,0,0)$. Donc une représentation paramétrique de (BC) est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

5. Puisque $L\in(BC)$, les coordonnées de $L(x,y,z)$ vérifient qu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Or $L\in(IJK)$ donc $4x+4y+4z-5=0$. En remplaçant, on a :

$$4\times1+4t+4\times0-5=0\iff 4t+4-5=0\iff 4t-1=0\iff t=\frac{1}{4}$$

Les coordonnées de L sont donc $\left(1,\frac{1}{4},0\right)$.

6. Soit $M\left(\frac{1}{4},1,0\right)$. Comme L $\in (IJK)$, il suffit de vérifier que M est aussi un point de ce plan, soit d'après le résultat de la question 4. :
$4x_{\text{M}}+4y_{\text{M}}+4z_{\text{M}}-5=4\times\frac{1}{4}+4\times 1+4\times 0-5=4+1-5=0$ donc M $\left(\frac{1}{4};1;0\right)\in$ (IJK).
Conclusion : les points I, J, K, L et M sont coplanaires.

Exercice 2

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)=\ln(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x=+\infty$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$,$f'(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^{x}\times\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{x}+1}+\dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{4\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}=\dfrac{-4+\mathrm{e}^{x}+1}{4\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$
Donc $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-3}{4\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)}$

3. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $4(e^{x}+1)>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{x}-3$. Or :

$$\mathrm{e}^{x}-3\geqslant 0\iff\mathrm{e}^{x}\geqslant 3\iff x\geqslant\ln(3)$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4.
- $f(2)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right)+\frac{1}{4}\times 2\approx 0,63$ donc $f(2)<1$.
- $f(5)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-5}\right)+\frac{1}{4}\times 5\approx 6,25$ donc $f(5)>1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ admet une solution sur $\alpha\in[2,5]$. De plus, $\ln(3)\approx 1,1$ donc $[2\ ;\ 5]\subset\,]\ln(3)\ ;\ +\infty[$, et donc la fonction f est strictement croissante sur $[2\ ;\ 5]$. Ainsi, la solution α est unique. À l'aide de la calculatrice, on trouve que $3\leqslant\alpha\leqslant 4$.

Partie B

1. **a.** Pour tout réel x :

- $\mathrm{e}^{x}>0$;
- $\mathrm{e}^{x}>0$ donc $\mathrm{e}^{x}+1>0$ donc $\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{2}>0$.

Donc $f''(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^{2}}>0$.

b. Pour tout réel x, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe ; sa courbe représentative est donc située au-dessus de toutes ses tangentes, donc au-dessus de Δ.

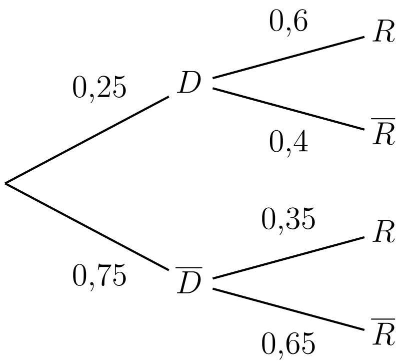
De plus, comme la fonction f est convexe, sa courbe représentative entre les points M et N est située en-dessous de la sécante (MN).

Donc la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ \alpha]$, est à l'intérieur du quadrilatère $MNPQ$.

Exercice 3

Partie A

1.



2. $\mathbb{P}\left(\overline{D} \cap R\right) = \mathbb{P}\left(\overline{D}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = 0,2625$.

3. On a de même $\mathbb{P}(D \cap R) = \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

   D'après la loi des probabilités totales :

   $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(D \cap R) + \mathbb{P}\left(\overline{D} \cap R\right) = 0,15 + 0,2625 = 0,4125$.

4. Il faut trouver $\mathbb{P}_R\left(\overline{D}\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(R \cap \overline{D}\right)}{\mathbb{P}(R)} = \dfrac{0,2625}{0,4125} \approx 0,64$.

Partie B

1. Les tirs sont indépendants et à chaque tir la probabilité de le réussir est égale à 0,35 : la variable aléatoire X égale au nombre de réussites suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

2. On a $\mathbb{E}[X] = np = 10 \times 0,35 = 3,5$. En moyenne, Stéphanie réussira $3,5$ tirs sur 10.

3. À l'aide de la calculatrice, on a $\mathbb{P}(X \geqslant 6) \approx 0,095$.

Exercice 4

1. On doit choisir 6 maillots parmi les 11 disponibles.

   Il y a donc $\dbinom{6}{11} = 462$ possibilités : l'affirmation est **fausse**.

2. Un mot correspond à un 3-arrangement dans un échantillon de 8 lettres.

   Il y a donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités : l'affirmation est **vraie**.

3. Pour décrire une main avec un carré, il faut déterminer la valeur des carte (c'est à dire la valeur des 4 cartes de même valeur) et la dernière carte. Il y a 8 valeurs possibles pour le carré en lui-même. Une fois ces 4 cartes déterminées, il reste $32 - 4 = 28$ possibilité pour la dernière carte. Il y a donc $8 \times 28 = 224$ carrés possibles : l'affirmation est **vraie**.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or $\dfrac{-1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: l'affirmation est **fausse**.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \frac{-3x^2\left(1 - \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}\right)}{2x^2\left(\dfrac{1}{2x^2} + 1\right)} = \frac{-3\left(1 - \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}\right)}{2\left(\dfrac{1}{2x^2} + 1\right)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{-3}{2} \times 1 = \frac{-3}{2}$$

Donc f admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -\dfrac{3}{2}$: l'affirmation est **fausse**.