Greit, her er løsningsforslag på oppgavene, presentert som om jeg var en grundig mattelærer på Molde VGS:

Løsningsforslag - Arbeidsark Funksjoner - 1T (Revidert)

Oppgave 1: Lineære Funksjoner

a) * **Stigningstallet:** Vi bruker formelen for stigningstall: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Med punktene $(2, 1)$ og $(5, 7)$ får vi: $a = \frac{7-1}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$. **Stigningstallet er 2.**

- **Funksjonsuttrykket:** Vi bruker ettpunktsformelen: $y - y_1 = a(x - x_1)$. Vi kan bruke punktet $(2, 1)$ og stigningstallet $a = 2$: $y - 1 = 2(x - 2)$ $y - 1 = 2x - 4$ $y = 2x - 3$ **Funksjonsuttrykket er $f(x) = 2x - 3$.**

- **Grafen:** For å tegne grafen, kan vi lage en verditabell med noen x-verdier og regne ut tilhørende y-verdier. For eksempel: | x | -1 | 0 | 1 | 2 | |—|—|—|—|—| | y | -5 | -3 | -1 | 1 | Plot punktene i et koordinatsystem og trekk en rett linje gjennom dem.

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Siden dette er en lineær funksjon uten begrensninger, kan vi sette inn alle reelle tall for x. Funksjonsverdien y kan også bli alle reelle tall. **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **(alle reelle tall) Verdimengden:** $V_f = \mathbb{R}$ **(alle reelle tall)**

b) * **Omskriving til $y = ax + b$:** $3x - 2y + 6 = 0$ $-2y = -3x - 6$ $y = \frac{-3x-6}{-2}$ $y = \frac{3}{2}x + 3$

- **Stigningstall og konstantledd: Stigningstallet:** $a = \frac{3}{2}$ **Konstantleddet:** $b = 3$

- **x- og y-skjæringspunkter:** x-skjæringspunkt: Sett $y = 0$ og løs for x: $0 = \frac{3}{2}x + 3$ $-\frac{3}{2}x = 3$ $x = -2$ **x-skjæringspunkt:** $(-2, 0)$

  y-skjæringspunkt: Sett $x = 0$ og løs for y: $y = \frac{3}{2}(0) + 3$ $y = 3$ **y-skjæringspunkt:** $(0, 3)$

- **Grafen:** Vi har nå to punkter på linjen, (-2, 0) og (0, 3). Plott disse i et koordinatsystem og trekk en rett linje gjennom dem.

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Som i deloppgave a): **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f = \mathbb{R}$

c) * **Funksjonsuttrykket:** Parallelle linjer har samme stigningstall. Linjen $y = 2x - 1$ har stigningstall 2, så vår linje har også stigningstall 2. Vi bruker ettpunktsformelen med punktet $(1, 4)$ og $a = 2$: $y - 4 = 2(x - 1)$ $y - 4 = 2x - 2$ $y = 2x + 2$ **Funksjonsuttrykket er $f(x) = 2x + 2$.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Som i deloppgave a): **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f = \mathbb{R}$

Oppgave 2: Andregradsfunksjoner

a) * **Nullpunkter:** Vi setter $f(x) = 0$ og løser andregradslikningen: $x^2 - 4x - 5 = 0$ Vi bruker abc-formelen: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}$ $x = \frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}$ $x = \frac{4\pm\sqrt{36}}{2}$ $x = \frac{4\pm 6}{2}$ $x_1 = \frac{4+6}{2} = 5$ $x_2 = \frac{4-6}{2} = -1$ **Nullpunktene er $x = -1$ og $x = 5$.**

- **Symmetrilinje og toppunkt:** Symmetrilinjen ligger midt mellom nullpunktene: $x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$ **Symmetrilinjen er $x = 2$.**

  Toppunktets x-koordinat er lik symmetrilinjens x-verdi. Vi finner y-koordinaten ved å sette $x = 2$ inn i funksjonsuttrykket: $f(2) = 2^2 - 4(2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$ **Toppunktet er $(2, -9)$.**

- **Skisse av grafen:** Vi har nå tre viktige punkter: nullpunktene $(-1, 0)$ og $(5, 0)$, og toppunktet $(2, -9)$. Siden koeffisienten foran x^2 er positiv, vender parabelen oppover (smiler). Skisser en parabel som går gjennom disse punktene.

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Vi kan sette inn alle reelle tall for x. Funksjonsverdien y har en minimumsverdi i toppunktet, og kan gå mot uendelig. **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f = [-9, \infty)$

b) * **Funksjonsuttrykket:** Siden vi kjenner nullpunktene, kan vi skrive funksjonsuttrykket på faktorisert form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ $f(x) = a(x - (-1))(x - 3)$ $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$ Vi vet at funksjonen går gjennom $(0, -6)$. Vi setter inn $x = 0$ og $f(x) = -6$ for å finne a: $-6 = a(0 + 1)(0 - 3)$ $-6 = a(-3)$ $a = 2$ **Funksjonsuttrykket er $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$, eller $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Vi kan sette inn alle reelle tall for x. For å finne verdimengden trenger vi toppunktet. Dette kan vi finne ved å multiplisere ut parantesene i $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$ og få $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, for så å benytte at x-koordinaten til toppunktet er gitt ved $x = \frac{-b}{2a}$. I vårt tilfelle får vi $x = \frac{-(-4)}{2\cdot 2} = 1$. Setter vi $x = 1$ inn i funksjonsuttrykket får vi $f(1) = 2 - 4 - 6 = -8$. Siden $a > 0$, har funksjonen en minimumsverdi i toppunktet. **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f = [-8, \infty)$

c) * **Toppunktet:** Funksjonen er gitt på fullstendig kvadrat-form. Siden $(x-2)^2$ alltid er større enn eller lik null og vi ganger med -1, ser vi at $h(x)$ maksimal når $(x - 2)^2 = 0$, som gir $x = 2$. Da er $h(x) = 4$, så toppunktet er gitt ved **Toppunktet er $(2, 4)$.**

- **Skisse av grafen:** Vi vet at toppunktet er $(2, 4)$. Siden vi har et minustegn foran $(x - 2)^2$, vet vi at grafen vender nedover. Velg gjerne noen x-verdier på hver side av $x = 2$ og regn ut tilhørende y-verdier for å få en mer nøyaktig skisse.

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Vi kan sette inn alle reelle tall for x. Siden parabelen vender nedover (sur munn), har funksjonen en maksimumsverdi i toppunktet. **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f = (-\infty, 4]$

Oppgave 3: Eksponentialfunksjoner

a) * **Funksjonsverdier:** $f(0) = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2$ $f(1) = 2 \cdot 3^1 = 2 \cdot 3 = 6$ $f(-1) = 2 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

- **Skisse av grafen:** Vi har punktene $(0, 2)$, $(1, 6)$ og $(-1, 2/3)$. Siden funksjonen er en eksponentialfunksjon med et veksttall større enn 1, vil den vokse raskt når x øker. Skisser en kurve som går gjennom disse punktene og vokser raskt mot høyre og nærmer seg x-aksen mot venstre.

- **Endring når x øker med 1:** Når x øker med 1, multipliseres funksjonsverdien med veksttallet, som er 3. **Funksjonsverdien tredobles når x øker med 1.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Vi kan sette inn alle reelle tall for x. Funksjonsverdien er alltid positiv og kan nærme seg 0, men aldri bli 0. **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f = (0, \infty)$

b) * **Funksjonsuttrykket:** En generell eksponentialfunksjon er på formen $f(x) = k \cdot a^x$. Vi vet at $(0, 1)$ ligger på grafen, så $f(0) = 1$: $1 = k \cdot a^0$ $1 = k \cdot 1$ $k = 1$ Vi har nå $f(x) = a^x$. Vi vet også at $(2, 9)$ ligger på grafen, så $f(2) = 9$: $9 = a^2$ $a = \pm 3$ Siden vi vanligvis antar at $a > 0$ i eksponentialfunksjoner, er $a = 3$. **Funksjonsuttrykket er $f(x) = 3^x$.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Som i deloppgave a): **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f = (0, \infty)$

c) * **Antall solgte enheter i uke 0:** $S(0) = 50 \cdot 2^0 = 50 \cdot 1 = 50$ **50 enheter selges i uke 0.**

- **Antall solgte enheter i uke 3:** $S(3) = 50 \cdot 2^3 = 50 \cdot 8 = 400$ **400 enheter selges i uke 3.**

- **Antall uker til 400 solgte enheter:** Vi har allerede funnet at det tar 3 uker å selge 400 enheter. Alternativt kan vi løse likningen: $S(x) = 400$ $50 \cdot 2^x = 400$ $2^x = 8$ $2^x = 2^3$ $x = 3$ **Det tar 3 uker.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** I denne konteksten gir det mening at x er et ikke-negativt heltall (vi kan ikke snakke om negative uker). Funksjonsverdien vil også være et heltall, og må være minst 50 siden vi starter med 50 enheter. **Definisjonsmengden:** $D_S = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ **(ikke-negative heltall) Verdimengden:** $V_S = \{50, 100, 200, 400, ...\}$ **(heltall som kan skrives som $50 \cdot 2^x$ for $x \in D_S$)**

Oppgave 4: Blandede Oppgaver

a) * **Skjæringspunkt ved regning:** Vi setter $f(x) = g(x)$: $2x - 3 = -x + 6$ $3x = 9$ $x = 3$ Finner y-koordinaten ved å sette $x = 3$ inn i en av funksjonene:

$f(3) = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3$ **Skjæringspunktet er $(3, 3)$.**

- **Grafisk verifikasjon:** Tegn grafene til $f(x)$ og $g(x)$ i samme koordinatsystem. Du kan for eksempel lage verditabeller for å finne noen punkter på hver linje. Skjæringspunktet mellom linjene skal da være $(3, 3)$.

b) * **Høyde ved $t = 0$:** $h(0) = -5(0)^2 + 10(0) = 0$ **Ballens høyde er 0 meter ved $t = 0$.**

- **Maksimal høyde:** Funksjonen er en andregradsfunksjon, og siden koeffisienten foran t^2 er negativ, vender parabelen nedover. Toppunktet representerer den maksimale høyden. Toppunktets t-koordinat finner vi ved: $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-5)} = 1$ Maksimal høyde: $h(1) = -5(1)^2 + 10(1) = -5 + 10 = 5$ **Ballen når sin maksimale høyde på 5 meter etter 1 sekund.**

- **Når treffer ballen bakken:** Ballen treffer bakken når høyden er 0. Vi løser likningen $h(t) = 0$: $-5t^2 + 10t = 0$ $-5t(t - 2) = 0$ $t = 0$ eller $t = 2$ $t = 0$ er starttidspunktet, så ballen treffer bakken ved $t = 2$. **Ballen treffer bakken etter 2 sekunder.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** I denne konteksten gir det mening at t er mellom 0 og 2 sekunder (tiden fra ballen kastes til den lander). Høyden er mellom 0 og 5 meter. **Definisjonsmengden:** $D_h = [0, 2]$ **Verdimengden:** $V_h = [0, 5]$

c) * **Funksjonsuttrykket:** Vi vet at $f(1) = 5$ og $f(3) = 9$. Vi setter inn i funksjonsuttrykket: $f(1) = a(1) + b = 5$ $f(3) = a(3) + b = 9$ Vi har et likningssett med to ukjente: $a + b = 5$ $3a + b = 9$ Vi kan trekke den første likningen fra den andre: $(3a + b) - (a + b) = 9 - 5$ $2a = 4$ $a = 2$ Setter inn $a = 2$ i den første likningen: $2 + b = 5$ $b = 3$ **Funksjonsuttrykket er $f(x) = 2x + 3$.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Dette er en lineær funksjon uten begrensninger: **Definisjonsmengden:** $D_f = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f = \mathbb{R}$

d) * **Funksjonsuttrykket:** Vi vet at $g(0) = 3$ og $g(1) = 6$. Vi setter inn i funksjonsuttrykket: $g(0) = k \cdot a^0 = 3$ $k \cdot 1 = 3$ $k = 3$ $g(1) = k \cdot a^1 = 6$ $3 \cdot a = 6$ $a = 2$ **Funksjonsuttrykket er $g(x) = 3 \cdot 2^x$.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** Dette er en eksponentialfunksjon: **Definisjonsmengden:** $D_g = \mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_g = (0, \infty)$

e) * **Funksjonsuttrykket for den rette linjen:** Vi bruker formelen for stigningstall: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2$ Vi bruker ettpunktsformelen med punktet $(-1, 5)$ og $a = -2$: $y - 5 = -2(x - (-1))$ $y - 5 = -2x - 2$ $y = -2x + 3$ **Funksjonsuttrykket for den rette linjen er $f(x) = -2x + 3$.**

- **Funksjonsuttrykket for parabelen:** Vi vet at parabelen går gjennom punktene $(-1, 5)$ og $(2, -1)$. Vi setter inn i funksjonsuttrykket $h(x) = x^2 + px + q$: $h(-1) = (-1)^2 + p(-1) + q = 5$ $h(2) = (2)^2 + p(2) + q = -1$ Vi får likningssettet: $1 - p + q = 5$ $4 + 2p + q = -1$ Vi kan omforme den første likningen til $q = 4 + p$ og sette inn i den andre: $4 + 2p + (4 + p) = -1$

$3p+8=-1$ $3p=-9$ $p=-3$ Setter inn $p=-3$ i $q=4+p$: $q=4+(-3)=1$ **Funksjonsuttrykket for parabelen er** $h(x)=x^2-3x+1$**.**

- **Definisjonsmengde og verdimengde:** For den rette linjen: **Definisjonsmengden:** $D_f=\mathbb{R}$ **Verdimengden:** $V_f=\mathbb{R}$

  For parabelen: **Definisjonsmengden:** $D_h=\mathbb{R}$ For å finne verdimengden til parabelen trenger vi toppunktet. Siden $a>0$, har vi en minimumsverdi i toppunktet. x-koordinaten til toppunktet er gitt ved $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-3)}{2\cdot1}=\frac{3}{2}$. Funksjonsverdien i toppunktet er da $h(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+1=\frac{9-18+4}{4}=-\frac{5}{4}$. **Verdimengden:** $V_h=[-\frac{5}{4},\infty)$

Håper dette var grundig og forståelig! Husk at det er viktig å forstå *hvorfor* vi gjør tingene, ikke bare *hvordan*. Spør hvis noe er uklart, og lykke til med øvingen!