Zadání

5. Spočtěte parciální derivace funkce z v bodě $[0,1]$, která je implicitně zadaná rovnicí
$$\frac{x}{z} = \log\frac{z}{y}$$
a splňuje $z(0,1) = 1$.

Řešení

Ačkoliv to v příkladu výslovně nechtějí, pro ilustraci provedeme komplet standardní postup

a) Ověříme podmínky věty o implicitní funkci.
b) Formulujeme závěr.
c) Spočteme derivace.

-------------------- Co to je, implicitně zadaná funkce? --------------------------

Ukázka z hypotetické online debaty mezi kolegou **A** a kolegyní **B.**

A: Ahoj, prosím tě, co je to implicitně zadaná funkce?
B: Ahoj, to je normální funkce, pouze je zadaná implicitně.
A: Jak to myslíš, zadaná implicitně?
B: No, že není na první pohled vidět, jestli je to funkce nebo ne. Je „schovaná“ v rovnici.
A: Jak schovaná? Jak není vidět? Máš nějaký příklad?
B: Jj, podívej se např. na rovnice
$$z = -3x + 2y - 6$$
$$3x + 6 = 2y - z$$
První je (na první pohled zřejmá) funkce z o proměnných x a y, tj. $z(x,y)$. Druhá rovnice je ta samá, pouze popřehazovaná. OK?
A: OK
B: Tak tedy, první rovnice je explicitně zadaná funkce, zadaná tak, jak jsme zvyklí ze všech učebnic (pouze slovo explicitně je nadbytečné, nikdo ho nepoužívá). Druhá rovnice je tatáž funkce, ale implicitně zadaná.

Kdybychom ji viděli poprvé, a někdo by se nás zeptal, jestli tato rovnice určuje implicitně zadanou funkci z = z(x,y), na první pohled bychom to nevěděli. V těch nejjednodušších případech lze vždy vyzkoušet vyjádřit *z* (ekvivalentními úpravami). Pokud se to povede, tak osamostatněním se z „implicitně zadané“ funkce stala „normálně zadaná“. Pak ji můžeme i parciálně derivovat jak chceme.
V komplikovanějších rovnicích to ovšem tak lehké není (např. z rovnice zadané v příkladu bychom proměnnou z vyjádřili stěží). Na ty máme větu VOIF. Stačí ověřit 3 předpoklady věty, a víme, jestli rovnice určuje implicitně zadanou funkci nebo ne.

Teď k výpočtu:

- Máme zadáno

$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\log\frac{z}{y}$ a bod $a=[0,1,1]$

- Máme za úkol:

$$z\overset{?}{=}z(x,y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)=?$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)=?$$

<u>Ověření podmínek VOIF</u>

$$(i)\quad F(0,1,1)=0-\log 1=0$$
$$(ii)\quad F\in C^1(G),\quad a\in G$$
$$(iii)\quad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1)=-1\neq 0$$

Na co si dávat u ověřování podmínek VOIF pozor?

U třetí podmínky **vždy derivujeme podle té proměnné, kterou vyjadřujeme jako implicitní funkci**. Konkrétně, v zadání příkladu máme, že funkce je $z=z(x,y)$, u ověření podmínek tedy <u>musím derivovat podle z</u>.

U druhé podmínky jsem napsal, že funkce je třídy C1. To proto, že v příkladu po nás chtějí spočítat pouze první derivace. **POZOR: jakou derivaci implicitní funkce je v příkladu potřeba spočíst, nejmíň takové derivace musíme hned u ověřování podmínek VOIF napsat, že existují.** Když například máme spočíst druhou derivaci, musíme napsat, že je třídy alespoň C2 (jedná se o typickou chybu, studenti to často nerozlišují a píší jen C1).

TIP: nejprve se podívejte, co je v příkladu potřeba, až pak napište, jestli je funkce třídy C1, C2 nebo i vyšší, podle příkladu.

TIP2: když napíšete, že funkce $F\in C^\infty(R^3)$ (pokud je to pravda), předejdete všem problémům.

Formulace závěru

Ověřili jsme podmínky VOIF. Naše rovnice určuje na okolí bodu $[0,1,1]$ implicitně zadanou funkci $z = z(x, \mathrm{y})$ splňující $z(0,1) = 1$. Tato funkce je třídy C1 (víc nás nezajímalo).

Formální formulace:

Dokázali jsme, že existuje okolí $U \subset R^2$ bodu $[0,1]$ a okolí $V \subset R$ bodu 1 takové, že pro všechny $[x, y]$ z U existuje právě jedno z z V takové, že tato trojice x, y, z splňuje naši rovnici ze zadání příkladu.

- Odteď bychom měli místo z psát $z(x, \mathrm{y})$.

Pro přehlednost budu v dalším výpočtu používat zkrácenou notaci, tj.

- Namísto $z(x, \mathrm{y})$ budu psát stále z
- Derivace budu zapisovat způsobem:
  z'_x = *parciální derivace funkce* $z(x, y)$ *podle proměnné x* (Index vpravo dole určuje, podle které proměnné se derivuje. Kolik čárek = tolikátá derivace).

Tato konvence slouží k přehlednosti výpočtu, stačí vizuálně porovnat $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ a z'_x.

Prosím, pokud je vám milejší pracovat s jiným zápisem, pište, jakkoliv jste zvyklí.

derivování

a) **podle x**

Chci derivovat $\frac{x}{z} - \log \frac{z}{y} = 0$ podle x. Jak na to?

Mnemotechnická pomůcka!

Derivujeme podle x, takže:

a) X je proměnná, podle které derivuji
b) Z je funkcí X, dá se tedy podle X parciálně derivovat
c) Y je konstanta

Derivace

$$\frac{z - xz'_x}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{z'_x}{y} = 0$$

$$\frac{z - xz'_x}{z^2} - \frac{z'_x}{z} = 0$$

Po dosazení $x = 0, \quad \mathrm{y} = 1, \quad \mathrm{z}(0,1) = 1$ máme

$$1 - z'_x = 0$$

$$1 = \frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$$

b) **podle y**

Chci derivovat $\frac{x}{z} - \log\frac{z}{y} = 0$ podle y. Jak na to?

Mnemotechnická pomůcka!

Derivujeme podle y, takže:

d) Y je proměnná, podle které derivuji
e) Z je funkcí Y, dá se tedy podle Y parciálně derivovat
f) X je konstanta

Derivace

$$-\frac{xz'_y}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{z'_y y - z}{y^2} = 0$$

$$-\frac{xz'_y}{z^2} - \frac{z'_y y - z}{zy} = 0$$

Po dosazení $x = 0, \quad \mathrm{y} = 1, \quad \mathrm{z}(0,1) = 1$ máme

$$-z'_y + 1 = 0$$

$$1 = \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$$

Výsledek:

5. $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 1, \; \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 1$