Makroekonomie II – Seminář 10

Příklad 4

V USA je podíl kapitálu na výstupu 30 % (tj. α), průměrný reálný růst HDP je 3 % p.a., míra depreciace kapitálu je 4 % a poměr K/Y je 2.5 (*tj. stav kapitálu je 2.5 krát vyšší než roční HDP*). Produkční funkce má tvar Cobb-Douglas.

a) Jaká je míra úspor v počátečním rovnovážném stavu?

b) Jaký je mezní produkt kapitálu v počátečním rovnovážném stavu?

c) Předpokládejme, že se zvýší úroková sazba a s ní i míra úspor tak, že ekonomika dosáhne zlatého pravidla kapitálu. Jaký bude v tomto stavu mezní produkt kapitálu? Srovnejme ho s původním rovnovážným stavem.

d) Jaký bude podíl K/Y, když ekonomika dosáhne zlatého pravidla kapitálu?

e) Jaká musí být míra úspor, aby ekonomika dosáhla zlatého pravidla?

Řešení

a) Máme danou Cobb-Douglasovu produkční funkci ve tvaru:

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \tag{1}$$

Z (1) vyjádříme produkční funkci na osobu:

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{L} = K^{\alpha} L^{-\alpha} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = k^{\alpha} = f(k) \tag{2}$$

V rovnovážném stavu platí:

$$\begin{aligned} s \cdot f(k) &= \delta \cdot k \\ s \cdot k^{\alpha} &= \delta \cdot k \\ s &= \delta \cdot k^{1-\alpha} \end{aligned} \tag{3}$$

V rovnici (3) známe δ, α, ale neznáme k. Ze zadání známe poměr mezi kapitálem a HDP:

$$2,5 = \frac{K}{Y} = \frac{K}{K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = \frac{K^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha} = k^{1-\alpha} \tag{4}$$

Dosadíme (4) do (3):

$$s = \delta \cdot k^{1-\alpha} = 0,04 \cdot 2,5 = 0,1 \tag{5}$$

Míra úspor v počátečním rovnovážném stavu je 0,1.

b) Spočítáme mezní produkt kapitálu z produkční funkce (1):

$$MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = \alpha k^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}} \tag{6}$$

Dosadíme (4):

$$MPK = \frac{0,3}{2,5} = 0,12 \tag{7}$$

Mezní produkt kapitálu v počátečním rovnovážném stavu je 0,12.

c) Při dosažení zlatého pravidla dochází k maximalizaci spotřeby c s ohledem na míru úspor, přičemž platí rovnice (3), protože ekonomika je v rovnovážném stavu.

$$\begin{aligned} c &= (1-s)\cdot f(k) = f(k) - s\cdot f(k) = f(k) - \delta\cdot k \\ \max c: \quad \frac{\partial c}{\partial k} &= f'(k) - \delta = 0 \\ f'(k) &= \delta \qquad (8) \\ f'(k) &= \frac{\partial y}{\partial k} = \alpha k^{\alpha-1} = \frac{\partial Y}{\partial K} = MPK \qquad (9) \end{aligned}$$

Z rovnice (6) vyplývá, že $MPK = f'(k)$, a tudíž z (8) a (9) při zlatém pravidle platí, že $MPK = \delta = 0,04$.

Mezní produktu kapitálu je nižší než v původním stálém stavu v části b). Pro Cobb-Douglasovu produkční fuknci platí, že mezní produkt kapitálu je klesající, proto pro zlaté pravidlo je třeba vyšší k a tudíž i vyšší míra úspor s.

d) Pro mezní produkt kapitálu platí z rovníc (6) a (8):

$$\begin{aligned} MPK &= \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}} = \delta \\ k^{1-\alpha} &= \frac{\alpha}{\delta} \qquad (10) \end{aligned}$$

Z rovnice (4):

$$\frac{K}{Y} = k^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{0,3}{0,04} = 7,5 \qquad (11)$$

Při zlatém pravidle je poměr kapitálu a HDP roven 7,5. Jelikož je vyšší k (část c)), je vyšší i tento poměr.

e) Z rovnice (3) a dosazením (10):

$$s = \delta\cdot k^{1-\alpha} = \delta\frac{\alpha}{\delta} = \alpha = 0,3 \qquad (12)$$

Aby ekonomika dosáhla zlatého pravidla, míra úspor musí být 0,3. V původním stavu (část a)) byla míra úspor 0,1, musela se tedy zvýšit, jak plyne z části c).