

# Domácí úkoly LAL1

6. prosince 2024

## Úkol 1

Uvažujme prostor  $\mathbb{C}^{2,2}$ , jeho standardní bázi  $\mathcal{E} = (\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3, \mathbb{E}_4)$  a báze  $\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4)$  a  $\mathcal{Y} = (\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \mathbb{Y}_3, \mathbb{Y}_4)$ , kde

$$\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{X}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a

$$(\mathbb{Y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{Y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{Y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{Y}_4)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dále definujme matice  $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{2,2}$  a  $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{2,2}$  jako

$$(\mathbb{A})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{B})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1. Najděte  $\mathbb{A}$ .
2. Najděte  $(\mathbb{B})_{\mathcal{Y}}$ .
3. Najděte  $(\mathbb{E}_1)_{\mathcal{X}}$ .
4. Najděte  $(\mathbb{E}_2)_{\mathcal{Y}}$ .
5. Najděte bázi prostoru  $\mathbb{C}^{2,2}$  obsahující  $\mathbb{X}_1, \mathbb{Y}_2, \mathbb{E}_3$ .

## Úkol 2

Nechť  $P \subset \mathbb{R}^5$  a  $Q \subset \mathbb{R}^5$ , kde

$$P = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$$

a

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 - 3x_5 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

1. Platí  $P \subset Q$  ?
2. Najděte dimenzi a bázi  $P \cap Q$ ,  $P \cup Q$  a  $P + Q$ , pokud jsou to dobře definované prostory.
3. Najděte doplněk  $Q$  do  $\mathbb{R}^5$ .

### Úkol 3

Nechť  $A : \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathcal{P}_5$  (kde  $\mathcal{P}_5$  označíme prostor reálných polynomů stupně nejvýše 4 s přidáním nulového polynomu) takové, že  $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, t \in \mathbb{R}$  platí

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} \alpha + \beta i \\ \gamma + \delta i \end{pmatrix} \right) (t) &= (\alpha + \beta) + (\alpha + 4\beta - 2\gamma - \delta) t + \\ &+ (\gamma - \beta) t^2 + (2\alpha + \gamma + \delta) t^3 + (\alpha + \delta) t^4. \end{aligned}$$

1. Ukažte, že  $A$  je lineární zobrazení.
2. Najděte hodnotu, defekt a jádro  $A$ .
3. Určete, zda je  $A$  monomorfní, epimorfní a izomorfní.
4. Popište množinu všech řešení  $\vec{x}$  rovnice

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (A\vec{x})(t) = 3 - t + t^2 + 9t^3 + 5t^4.$$