Sprawozdanie z przedmiotu: METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Marek Greczek, gr. projektowa 2

# Wstęp teoretyczny.

Rozpatrywany problem to przewodzenie ciepła w elemencie dwuwymiarowym w procesie nieustalonym. Proces ten oznacza obliczenie temperatury w węzłach elementu w kilku krokach czasowych. Zjawiska cieplne zachodzące w stanie nieustalonym opisuje równanie Fouriera w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x(t)\frac{dt}{dx}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y(t)\frac{dt}{dy}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_z(t)\frac{dt}{dz}) + (Q - c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}) = 0$$

Rozwiązanie tego równania sprowadza się do zadania polegającego na poszukiwaniu minimum funkcjonału:

$$J = \int_V \frac{1}{2}(k_x(t)(\frac{dt}{dx})^2 + k_y(t)(\frac{dt}{dy})^2 + k_z(t)(\frac{dt}{dz})^2 - 2(Q - c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau})t)dV$$

Przy założeniu, że $k_x(t) = k_y(t) = k_z(t) = k(t)$ dla materiałów izotropowych funkcjonał ma postać:

$$J = \int_V [\frac{k(t)}{2}((\frac{dt}{dx})^2 + (\frac{dt}{dy})^2 + (\frac{dt}{dz})^2 - (Q - c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau})t)]dV$$

Funkcja musi spełniać określone warunki brzegowe na powierzchni rozpatrywanego obszaru. Ponieważ, bezpośrednie dodanie warunków brzegowych nie jest możliwe narzuca się je poprzez dodanie do funkcjonału dwóch całek:

$$\int_S \frac{\alpha}{2}(t - t_\infty)^2 dS + \int_S qtdS$$

Rozwiązanie problemu polega na podzieleniu rozpatrywanego obszaru na elementy i przedstawieniu temperatury wewnątrz elementu, jako funkcji wartości węzłowych zgodnie z zależnością:

$$t = \sum_{i=1}^{n} N_i t_i = \{N\}^T \{t\}$$

Po wstawieniu powyższej zależności do funkcjonału otrzymujemy:

$$J = \int_V [\tfrac{k}{2}((\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial x}\}^T\{t\})^2 + (\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial y}\}^T\{t\})^2 + (\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial z}\}^T\{t\})^2) - (Q - c\rho\tfrac{\partial t}{\partial\tau})\{N\}^T\{t\}]dV + \int_S \tfrac{\alpha}{2}(\{N\}^T\{t\} - t_\infty)^2 dS + \int_S q$$

Minimalizacja funkcjonału sprowadza się do obliczenia pochodnych cząstkowych tego funkcjonału względem wartości węzłowych temperatury $\{t\}$, co prowadzi do następującego układu równań.

$$\frac{\partial J}{\partial\{t\}} = \int_V [k(\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial x}\}^T\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial x}\} + \{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial y}\}^T\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial y}\} + \{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial z}\}^T\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial z}\})\{t\} - (Q - c\rho\tfrac{\partial t}{\partial\tau})\{N\}]dV + \int_S \alpha(\{N\}^T\{t\} - t_\infty)\{N\}d$$

Układ równań zapisujemy w postaci macierzowej:

$$[H]\{t\} + [C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{t\} + \{P\} = 0$$

Gdzie

$$[H] = \int_V k(t)(\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial x}\}^T\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial x}\} + \{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial y}\}^T\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial y}\} + \{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial z}\}^T\{\tfrac{\partial\{N\}}{\partial z}\})dV + \int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS$$

$$[C] = \int_V c\rho\{N\}\{N\}^T dV$$

$$\{P\} = -\int_S \alpha\{N\}t_\infty - \int_V Q\{N\}dV + \int_S q\{N\}dS$$

Rozwiązanie powyższego problemu uzyskujemy rozwiązując układ równań metodą Gaussa.

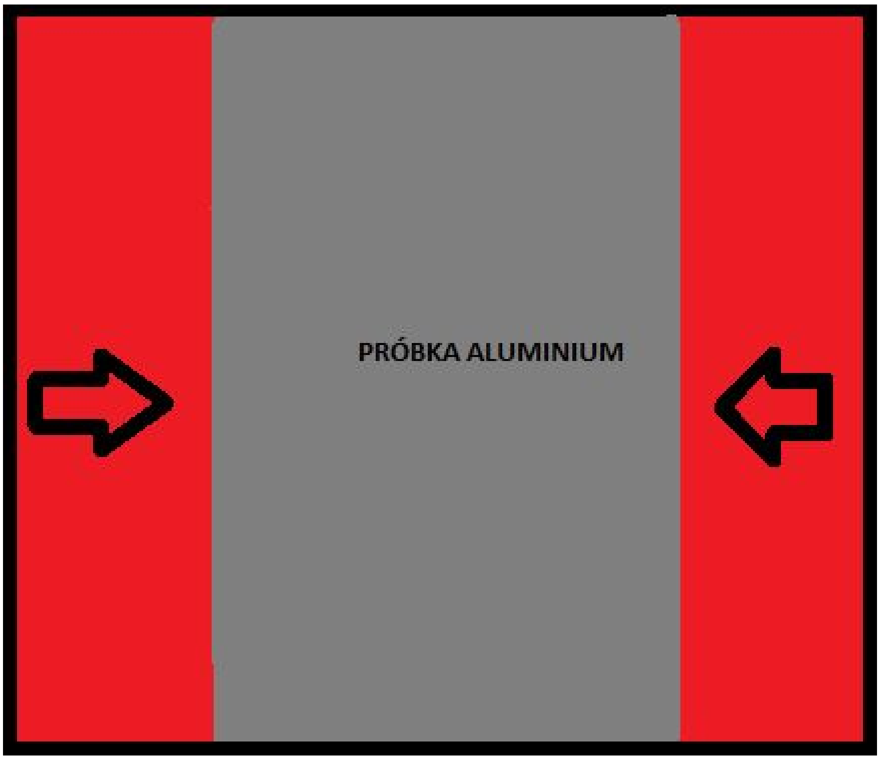
# Wybrany problem.

Problem który wybrałem polega na zbadaniu jak szybko wybrany materiał nagrzeje się do temperatury topnienia. Dla porównania postanowiłem zasymulować nagrzewanie w dwóch przypadkach:

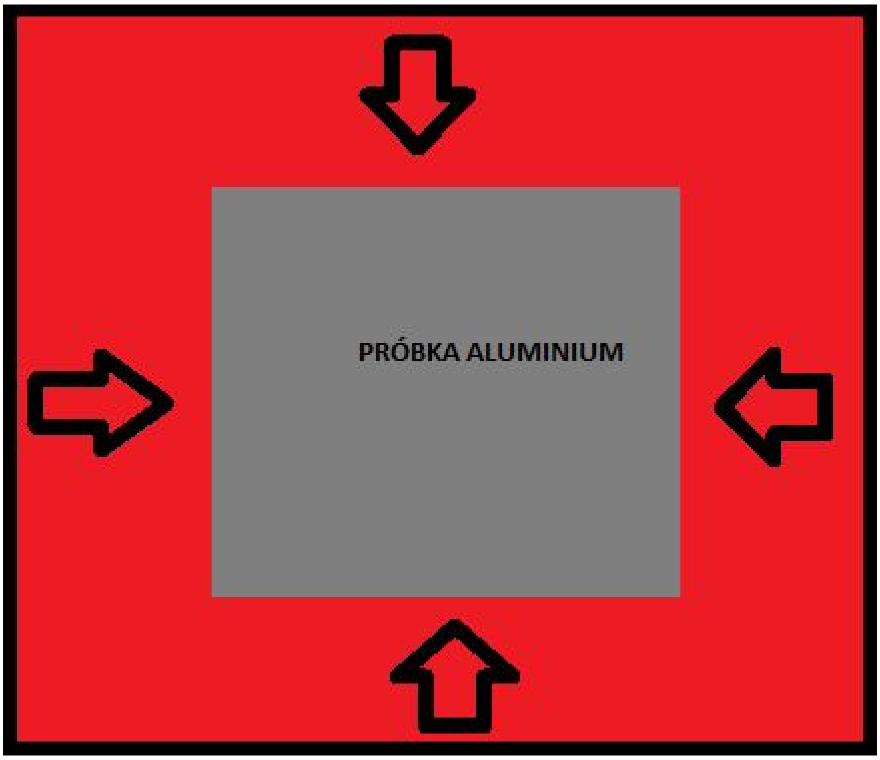
- Nagrzewanie o stałej temperaturze z dwóch przeciwległych stron
- Nagrzewanie o stałej temperaturze z 4 stron

Wybrany przeze mnie materiał to aluminium.

## Graficzna prezentacja omawianego problemu:




Ilustracja nagrzewania próbki z 2 kierunków




Ilustracja nagrzewania próbki z 4 kierunków

## Dane wejściowe do programu.

| | |
|---|---|
| **SZEROKOŚĆ ELEMENTU** | **0,1[m]** |
| **DŁUGOŚĆ ELEMENTU** | **0,1[m]** |
| **ILOŚĆ WĘZŁÓW WSZERZ** | **10** |
| **ILOŚĆ WĘZŁÓW WZDŁUŻ** | **10** |
| **POCZĄTKOWA TEMPERATURA W WĘZŁACH** | **20[°C]** |
| **TEMPERATURA NAGRZEWANIA** | **1100[°C]** |
| **WSP. PRZEWODZENIA CIEPŁA** | **200**[ $\frac{W}{m*°C}$ ] |
| **WSP. PRZENIKANIA CIEPŁA** | **25**[ $\frac{W}{m^2*°C}$ ] |
| **CIEPŁO WŁAŚCIWE MATERIAŁU** | **900** [ $\frac{J}{kg*°C}$ ] |
| **GĘSTOŚĆ** | **2720**[ $\frac{kg}{m^3}$ ] |

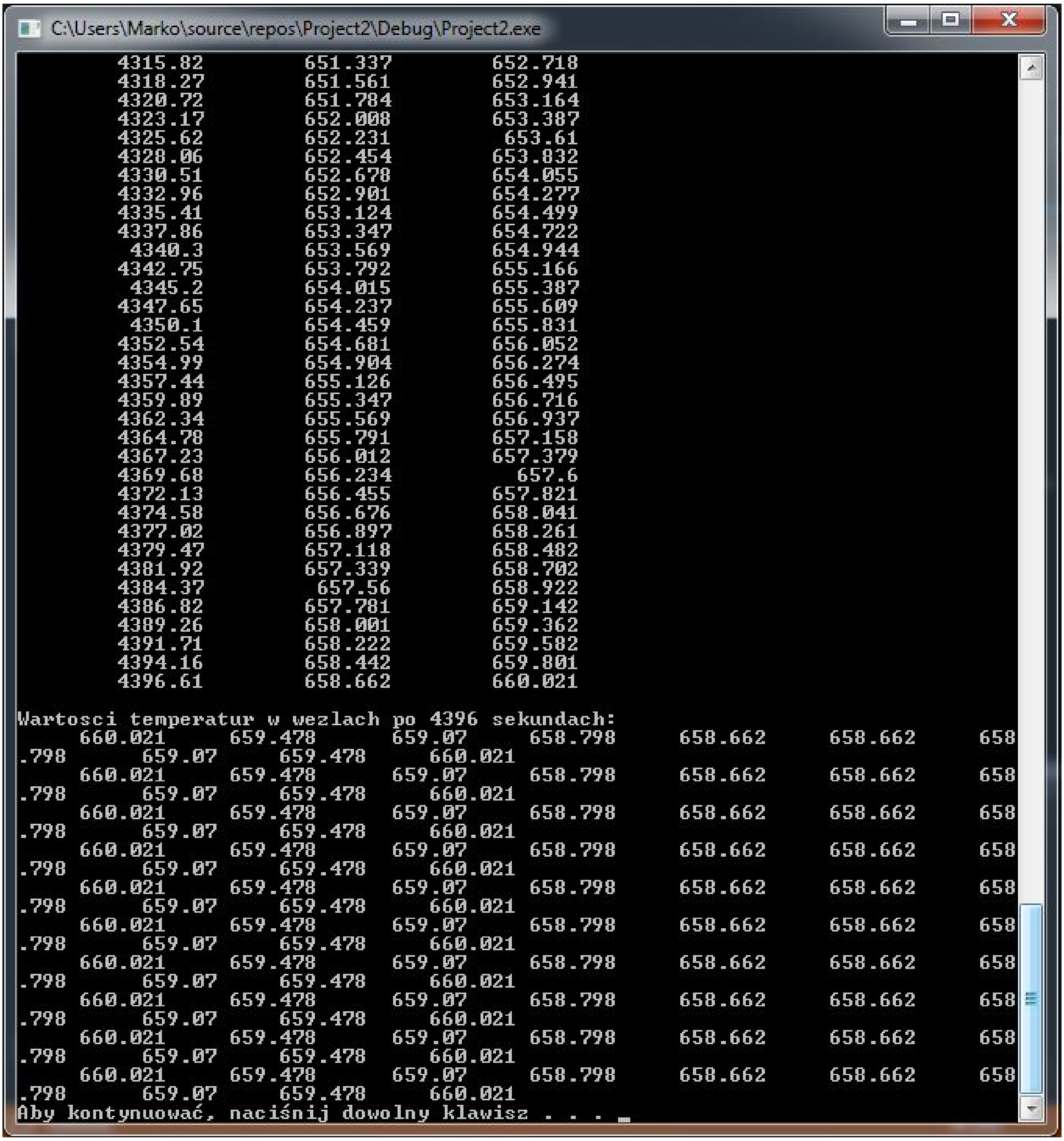
Czas stabilnego rozwiązania obliczyłem ze wzoru:

$$Asr = \frac{k}{C_w * \rho}$$

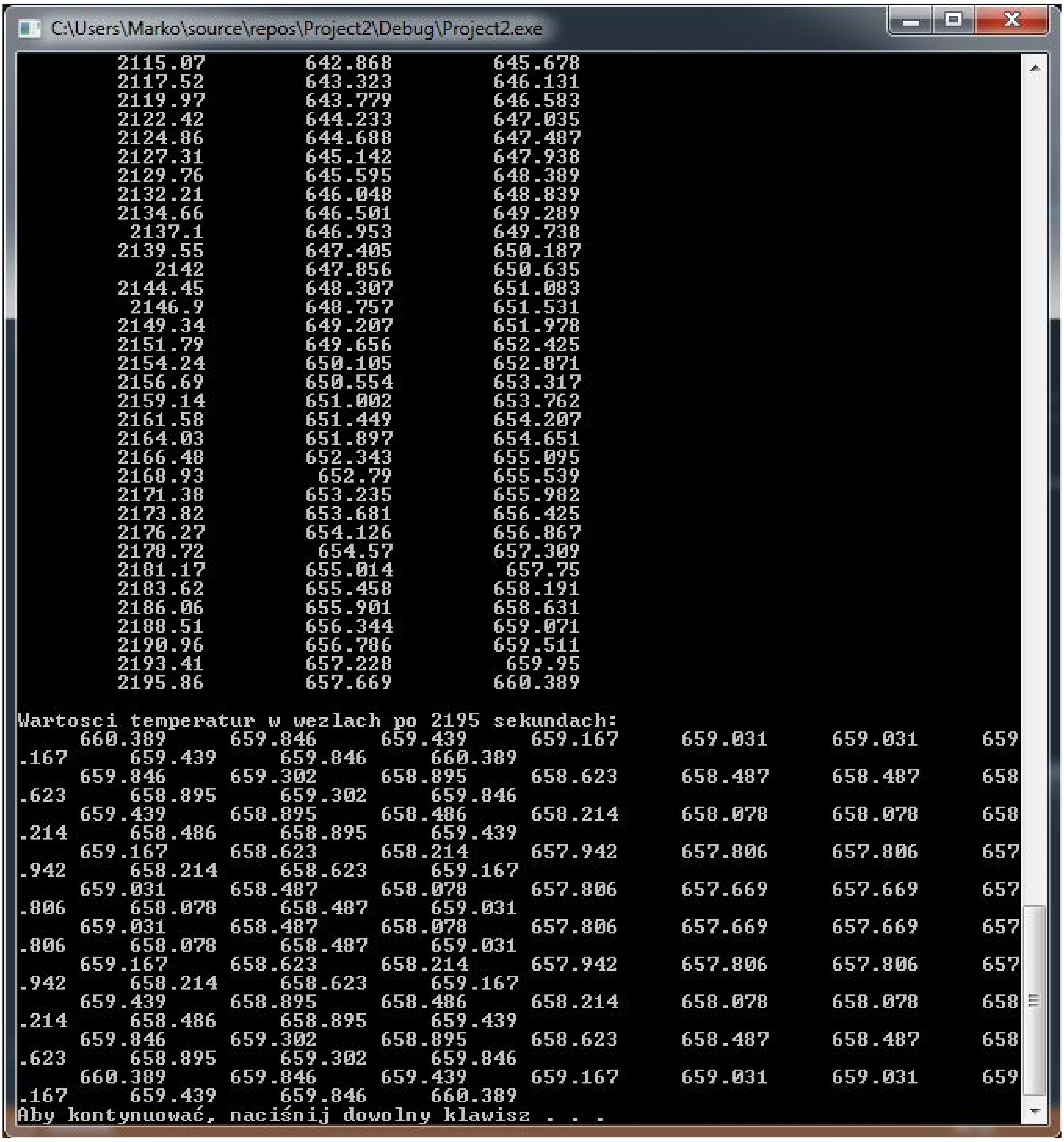
$$\Delta\tau = \frac{\left(\frac{B}{nB}\right)^2}{0.5 * Asr}$$

Gdzie:
B – szerokość elementu
nB – ilość węzłów po szerokości
k – przewodność cieplna materiału
$C_w$ – ciepło właściwe materiału
ρ - gęstość materiału

# Wyniki symulacji.




Końcowy rozkład temperatur po 4397[s]
(symulacja nagrzewania z 2 przeciwnych kierunków).



```
C:\Users\Marko\source\repos\Project2\Debug\Project2.exe
        2115.07          642.868          645.678
        2117.52          643.323          646.131
        2119.97          643.779          646.583
        2122.42          644.233          647.035
        2124.86          644.688          647.487
        2127.31          645.142          647.938
        2129.76          645.595          648.389
        2132.21          646.048          648.839
        2134.66          646.501          649.289
         2137.1          646.953          649.738
        2139.55          647.405          650.187
           2142          647.856          650.635
        2144.45          648.307          651.083
         2146.9          648.757          651.531
        2149.34          649.207          651.978
        2151.79          649.656          652.425
        2154.24          650.105          652.871
        2156.69          650.554          653.317
        2159.14          651.002          653.762
        2161.58          651.449          654.207
        2164.03          651.897          654.651
        2166.48          652.343          655.095
        2168.93           652.79          655.539
        2171.38          653.235          655.982
        2173.82          653.681          656.425
        2176.27          654.126          656.867
        2178.72           654.57          657.309
        2181.17          655.014           657.75
        2183.62          655.458          658.191
        2186.06          655.901          658.631
        2188.51          656.344          659.071
        2190.96          656.786          659.511
        2193.41          657.228           659.95
        2195.86          657.669          660.389

Wartosci temperatur w wezlach po 2195 sekundach:
     660.389     659.846     659.439     659.167     659.031     659.031     659
.167     659.439     659.846     660.389
     659.846     659.302     658.895     658.623     658.487     658.487     658
.623     658.895     659.302     659.846
     659.439     658.895     658.486     658.214     658.078     658.078     658
.214     658.486     658.895     659.439
     659.167     658.623     658.214     657.942     657.806     657.806     657
.942     658.214     658.623     659.167
     659.031     658.487     658.078     657.806     657.669     657.669     657
.806     658.078     658.487     659.031
     659.031     658.487     658.078     657.806     657.669     657.669     657
.806     658.078     658.487     659.031
     659.167     658.623     658.214     657.942     657.806     657.806     657
.942     658.214     658.623     659.167
     659.439     658.895     658.486     658.214     658.078     658.078     658
.214     658.486     658.895     659.439
     659.846     659.302     658.895     658.623     658.487     658.487     658
.623     658.895     659.302     659.846
     660.389     659.846     659.439     659.167     659.031     659.031     659
.167     659.439     659.846     660.389
Aby kontynuować, naciśnij dowolny klawisz . . .
```

Końcowy rozkład temperatur po 2196[s] (symulacja nagrzewania z 4 kierunków).

# Wnioski.

Po przeprowadzeniu symulacji mogłem bardzo szybko zauważyć różnice między dwoma powyższymi wynikami symulacji. materiał nagrzewany z dwóch stron uzyskał oczekiwaną temperaturę po ok. 73 min, natomiast nagrzewanie z czterech stron zakończyło się po ok. 37 min. Różnica miedzy przeprowadzonymi symulacjami była znacząca, wyniosła 36 min. Ponadto w wynikach zauważalne są różnice temperatur w węzłach. Temperatury w węzłach położonych na zewnątrz są większe niż w tych wewnątrz materiału. Można to uzasadnić tym, że transfer ciepła przebiegał z zewnątrz do środka materiału.