Západočeská univerzita v Plzni

Diagnostika a rozhodování

KKY/DR

3. semestrální práce

Autor:
Marek Lovčí

November 25, 2020

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Problém tří dveří

Předmět zadání

Jste účastníkem televizní soutěže „Auto, koza, koza," kde máte před sebou tři zavřené dveře. Za jedněmi je hlavní výhra - zbrusu nové auto. Za zbývajícími jsou ceny útěchy - kozy. Vyčíslete a okomentujte pravděpodobnosti výhry pro různé průběhy soutěže.

Pravidla hry

Pravidla hry jsou následující:

- Na začátku hry hráč bez otevření vybere jedny dveře.
- Moderátor televizní soutěže poté otevře jedny ze zbývajících dveří.
- Pokud moderátor otevřel dveře, za kterými bylo auto, hra nepokračuje a hráč prohrál.
- Pokud za dveřmi byla koza, pak se moderátor zeptá, zda si hráč svou počáteční volbu nerozmyslel.
- Hráč následně může otevřít jedny ze zbývajících dveří - buď s volbou setrvá nebo své rozhodnutí změní. Otevřením dveří s autem hra končí výhrou, otevřením dveří s kozou hra končí prohrou.

Úkoly

- Vyčíslete pravděpodobnost výhry automobilu pro obě strategie (setrvat, změnit) pokud
  1. moderátor otevírá dveře náhodně,
  2. moderátor ví, kde je auto, a otevírá pouze dveře s kozou
- Vyčíslete pravděpodobnosti výhry podle předchozích bodů pokud jsou místo tří dveří k dispozici čtyři (1 auto, 3 kozy).
- Napište simulační program, pomocí kterého vaše závěry ověříte.

Použité nástroje

Simulaci proveďte v prostředí MATLAB, příp. naprogramujte ve vybraném programovacím jazyce.

Co se odevzdá

V referátu ve formátu PDF vyčíslete všechny požadované pravděpodobnosti a slovně komentujte váš **postup** a výsledky experimentů. Spolu s referátem odevzdejte pro posouzení komentovaný programový kód, který byl k řešení použit. Dbejte na splnění všech bodů zadání.

1 Vypracování

Řešeným příkladem je známý *Monty Hall Problem*. V klasické verzi tohoto problému jsou stanoveny 3 předpoklady.

1. Moderátor musí vybrat dveře, které nevybral soutěžící.
2. Moderátor musí otevřít dveře, za kterými se ukrývá koza.
3. Moderátor musí nabídnout soutěžícímu změnit vybrané dveře.

Řešení tohoto problému, ačkoliv možná neintuitivní, tak velice logické si lze snadno odvodit. Představme si, že je nám dáno na výběr ze 100 dveří. Za 99 dveřmi se ukrývají kozy a za právě jedněmi se ukrývá auto. Náhodně vybereme jedny dveře, pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{100}$, že jsme vybrali dveře s autem. Moderátor v následujícím kroku otevře 98 dveří, za kterými se ukrývají kozy. Měly bychom změnit dveře? Ano, měli bychom, protože pravděpodobnost, že jsme vybrali napoprvé správné dveře je velice malá. Teď je nám ale prezentován filtrovaný výběr a mělo by být intuitivně jasné, že je pravděpodobnější, že se auto ukrývá za druhými dveřmi. Takže pokud není naším cílem vyhrát kozu...

1.1 Matematika?

Označme herní dveře $i = \{0, 1, 2\}$ a výherní dveře D.

$$P(D = 0) = P(D = 1) = P(D = 2) = \frac{1}{3} \tag{1}$$

Pozice výherních dveří je náhodná, v případě tří dveří je tedy pravděpodobnost jejich pozice jedna třetina. Dveře vybrané hráčem označme jako C. C obecně není náhodné, učíme $C = 0$. Hráč tedy vybral nulté dveře. Posledním typem dveří je R, dveře "odkryté" (*revealed*). Dle pravidel moderátor nesmí odkrýt dveře které vybral hráč $R \neq C$ a nesmí vybrat dveře, kde se nachází auto $R \neq D$. Bez znalosti D můžeme napsat následující.

$$P(R = 1) = P(R = 2) = \frac{1}{2} \tag{2}$$

Řekněme, že $R = 2$, potom vyvstává otázka, jaká je pravděpodobnost, že $D = 1$. Hledáme tedy $P(D = 1|R = 2)$.

$$P(D = 1|R = 2) = \frac{P(D = 1) \wedge P(R = 2)}{P(R = 2)} \tag{3}$$

$$P(D = 1|R = 2) = \frac{P(R = 2|D = 1)P(D = 1)}{P(R = 2)} \tag{4}$$

Protože $P(D = 1) = \frac{1}{3}$, tak $P(R = 2|D = 1)$ musí být rovno jedné. Někde R být musí a jelikož nemůže být na 0, protože to je hodnota zabraná hráčem a nemůže být na 1, protože to jsme právě stanovili na výherní dveře.

$$P(D = 1|R = 2) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \tag{5}$$

Pravděpodobnost, že se výherní dveře nacházejí za dveřmi $D = 1$ je tedy $\frac{2}{3}$. Obdobně můžeme postupovat pro problém čtyř dveří, se znalostí výsledků se však můžeme na situaci podívat i následovně. Pravděpodobnost výběru správných dveří na první pokus je $\frac{1}{4}$.

Označme $P(V|Z)$ pravděpodobnost výhry v případě, že hráč změní původní vybrané dveře. Budiž $P(VN4)$ pravděpodobností výběru nevýherních dveří ze 4 dveří. Po tom, co moderátor jedny dveře otevře a nabídne hráči změnu, hráč vybírá ze 2 dveří. Pravděpodobnost výberu výherních dveří z těchto dvou zbývajících označme jako $P(VV2)$.

$$P(V|Z) = P(VN4) \cdot P(VV2) \tag{6}$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \tag{7}$$
$$= \frac{3}{8} \tag{8}$$

2 Experimentální výsledky

Tabulka 1 znázorňuje experimentální výsledky pro problém tří dveří.

Změna hráčem	Moderátor volí náhodně	Moderátor volí nevýherní dveře
Ne	0.3322	0.3339
Ano	0.3324	0.6661

Table 1: Výsledné hodnoty pravděpodobností pro MHP 3 dveře pro 100.000 odsimulovaných her

Tabulka 2 znázorňuje experimentální výsledky pro problém čtyř dveří.

Změna hráčem	Moderátor volí náhodně	Moderátor volí nevýherní dveře
Ano	0.2493	0.3740
Ne	0.2492	0.2515

Table 2: Výsledné hodnoty pravděpodobností pro MHP 4 dveře pro 100.000 odsimulovaných her

3 Závěr

Experimentální výsledky potvrzují teorii. Jestliže moderátor volí náhodně, tak je prakticky jedno co hráč udělá, pravděpodobnost výhry je rovna náhodnému výběru. V opačném případě je pro pro hráče, ve variantě výběru tří i čtyř dveří, vhodné zvolit strategii změny původní volby.