Západočeská univerzita v Plzni

Systémy a modely

KKY/SM

Semestrální práce

Autor:
Marek Lovčí

6. června 2018

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Obsah

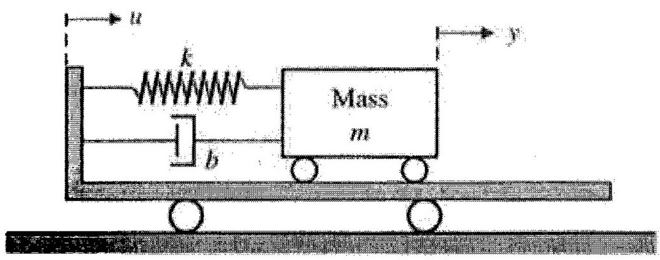
1 Zadání

Zadání č. 10

Model „Hmota na vozíku“

1. Pro daný systém sestavte
   a) model pomocí *SimMechanics*;
   b) model pomocí diferenciálních rovnic (odvoďte Newton-Eulerovou metodou);
   c) linearizovaný model v Simulinku pomocí bloku StateSpace.
2. Porovnejte výsledky všech tří metod pro různé počáteční podmínky.
3. Simulujte chování systému, pokud na něho bude působit síla o velikosti 10 N ve směru vektoru u po dobu 10 sekund.
4. Vykreslete frekvenční charakteristiku systému, jestliže vstupem je působící síla a výstupem poloha hmoty m.
5. Určete alespoň 1 konfiguraci senzorů polohy nebo rychlosti takovou, že systém bude:
   a) pozorovatelný;
   b) nepozorovatelný.

Zadané hodnoty: $m = 10\,kg$, $M = 2\,kg$, $l_{10} = 1\,m$, $k = 5$, $b = 0.7$.



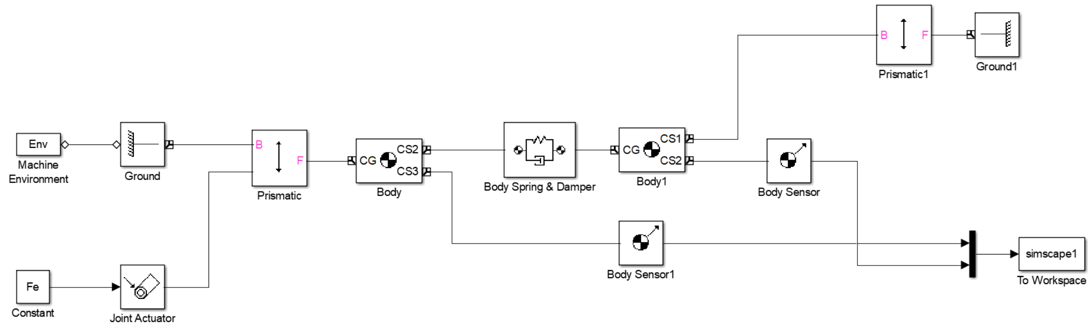
Obrázek 1: Zadaný systém k nasimulování

2 Vypracování

2.1 Sestavení modelů

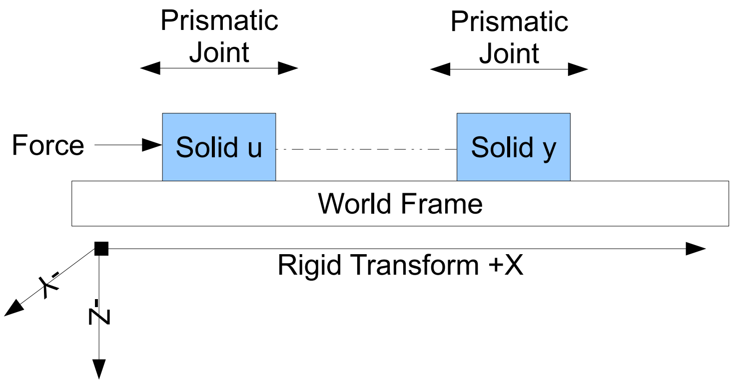
2.1.1 Sestavení modelu pomocí SimMechanics

Model pomocí modulu Simulinku, první generace *SimMechanics*, jsem sestavil následovně.



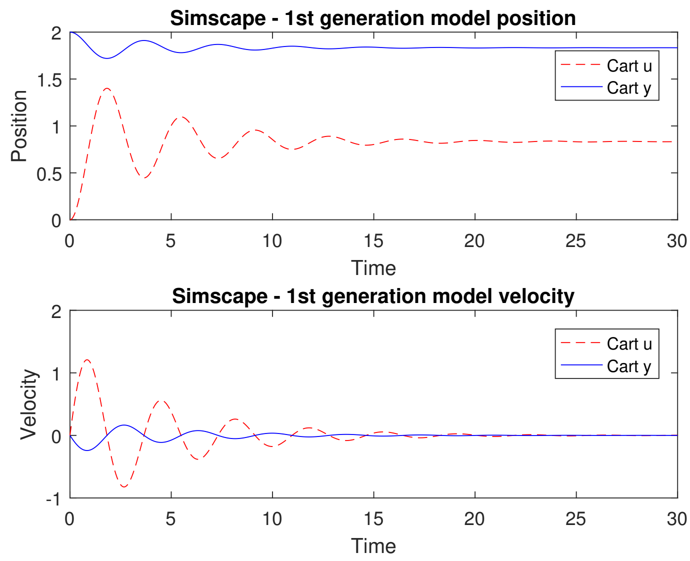
Obrázek 2: Model v SimMechanics

K takovému modelu mě vedla představa zjednodušující zadaný model na následující schéma.



Obrázek 3: Zjednodušení představy zadaného problému

Po odsimulování modelu s nastavenou počáteční podmínkou (pružina natažená na dvojnásobek své délky) získávám následující graf.



Obrázek 4: Odsimulovaný model v SimMechanics s nenulovou počáteční podmínkou

2.1.2 Odvození modelu pomocí diferenciálních rovnic

V této sekci odvodím matematický model za pomocí diferenciálních rovnic, tzv. Newton-Eulerovou metodou. V zadání je souřadnice vozíku o hmotnosti m označena jako y. Absolutní poloha druhého vozíku o hmotnosti M je znázorněna proměnnou u. Určeme si dvě síly: F_E a F_m, kde F_E je síla vnější působící na spodní vozík a F_m je síla, kterou působí horní vozík na spodní. Z Newtonova zákona známe vztah pro sílu $F = m \cdot a$. Z tohoto vyplývá, že součet síly externí a síly F_m musí být roven hmotnosti spodního vozíku vynásobené jeho zrychlením.

$$F_E + F_m = M\ddot{u} \tag{1}$$

Síla F_m je dána součtem sil pružiny a tlumiče, spojující obě tělesa. Síla pružiny je určena tuhostí pružiny k závisející na momentální délce pružiny. Momentální délka pružiny je rovna klidové délce pružiny l_{10} odečtené od rozdílu poloh těles. Síla tlumiče není závislá na rozdíl od pružiny na vlastní délce, nýbrž na rozdílu rychlostí těles takovým tlumičem spojených.

$$F_m = k((y-u) - l_{10}) + b(\dot{y} - \dot{u}) \tag{2}$$

Rovnici 2 lze dosadit do 1, z čehož vzniká rovnice 3. Jelikož platí zákon akce a reakce, tak na horní vozík působí síla opačného směru, než je ta, kterou horní vozík působí na spodní a můžeme napsat rovnici 4.

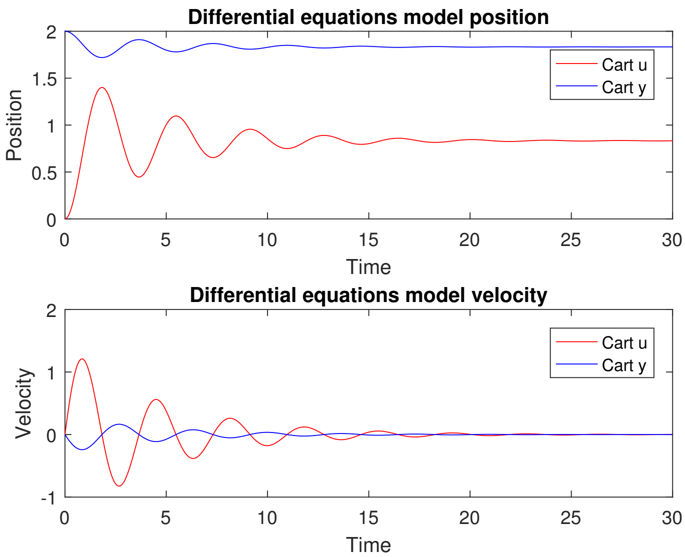
$$F_E + k((y-u) - l_{10}) + b(\dot{y} - \dot{u}) = M\ddot{u} \tag{3}$$

$$-F_m = -k((y-u) - l_{10}) - b(\dot{y} - \dot{u}) = m\ddot{y} \tag{4}$$

Pro snazší vytváření modelu v modulu Simulink stačí vyjádřit nejvyšší derivace, které se v rovnicích vyskytují. V našem případě je taková úprava triviální.

$$\ddot{u} = \frac{1}{M}(F_E + k((y-u) - l_{10}) + b(\dot{y} - \dot{u}))$$
$$\ddot{y} = \frac{1}{m}(-k((y-u) - l_{10}) - b(\dot{y} - \dot{u}))$$

Graf ukazuje výsledek simulace systému s počáteční podmínkou, kdy natažení pružiny je rovno dvojnásobku vlastní klidové délky.



Obrázek 5: Odsimulovaný model v Simulinku s nenulovou počáteční podmínkou

2.1.3 Linearizovaný model

Abychom mohli v MATLABu vytvořit schéma pomocí bloku *StateSpace*, musíme model nejdříve zlinearizovat.

Linearizace se provádí vždy v bodě reprezentující rovnovážný stav. V našem případě je to bod $x(0)$.

$$x(0) = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & y & \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Jako první vytvoříme stavový popis, musíme tedy zavést stavové proměnné. Ty volíme libovolně. Při tomto procesu rovnou určíme časové derivace stavových proměnných.

$$\begin{aligned} x_1 &= u & \dot{x}_1 &= u \\ x_2 &= \dot{u} & \dot{x}_2 &= \frac{1}{M}(F_E + k((y-u) - l_{10}) + b(\dot{y} - \dot{u})) \\ x_3 &= y & \dot{x}_3 &= y \\ x_4 &= \dot{y} & \dot{x}_4 &= \frac{1}{m}(-k((y-u) - l_{10}) - b(\dot{y} - \dot{u})) \end{aligned}$$

Nyní lze vypočítat matice **A**, **B**, **C** a **D**. Matice **A** je maticí dynamiky systému. **B** definuje, jak vstup ovlivňuje stavy systému. **C** je matice výstupu, která říká co je výstupem ze systému. **D** umožňuje, aby systémový vstup přímo ovlivňoval výstup systému. Pro většinu systémů, které jsme během kurzu uvažovali, je matice **D** nulovou maticí.

Pro snazší derivování si zjednodušme nejsložitější výrazy, tedy $\dot{x}_2$ a $\dot{x}_4$.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= F_E\frac{1}{M} + \frac{k}{M}(x_3 - x_1 - l_{10}) + \frac{b}{M}(x_4 - x_2)\\
&= -x_1\frac{k}{M} - x_2\frac{b}{M} + x_3\frac{k}{M} + x_4\frac{b}{M} + F_E\frac{1}{M} - l_{10}\frac{k}{M}\\
\dot{x}_4 &= -\frac{k}{m}(x_3 - x_1 - l_{10}) - \frac{b}{m}(x_4 - x_2)\\
&= x_1\frac{k}{m} + x_2\frac{b}{m} - x_3\frac{k}{m} - x_4\frac{b}{m} + l_{10}\frac{k}{m}
\end{aligned}
$$

Matici **A** získáme tak, že postupně všechny stavové proměnné derivované podle času zderivujeme parciálně podle všech nederivovaných stavových proměnných. Pro získání matice **B** pak derivujeme ne stavovými proměnnými, nýbrž vstupem systému. **C** je vektor stavových proměnných parciálně derivovaný každou ze stavových proměnných. Nakonec **D** je vektor stavových proměnných derivovaný vstupem.

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} & \frac{k}{M} & \frac{b}{M}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{k}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} F_E
$$

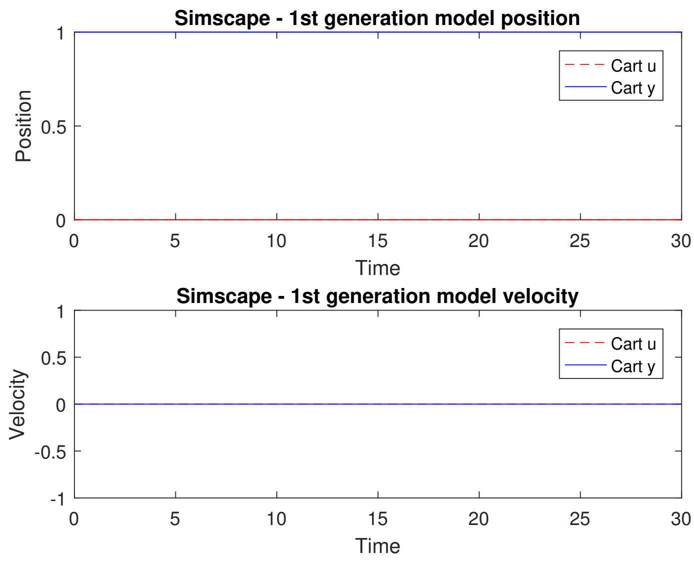
$$
y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} u(t)
$$

Tyto matice můžeme předat jako parametr bloku *StateSpace*, kterému na vstup přijde síla F_E. Jelikož se při přechodu na linearizovaný model vyjadřuje systém v tzv. *přírůstkových souřadnicích*, tak poloha vozíku y je vyjádřena jako odchylka od svého rovnovážného stavu. To znamená, že aby se grafy linearizovaného modelu shodovaly se všemi ostatními, museli bychom k poloze vozíku y přičíst bod, ve kterém proběhla linearizace, tedy přičíst číslo 1.

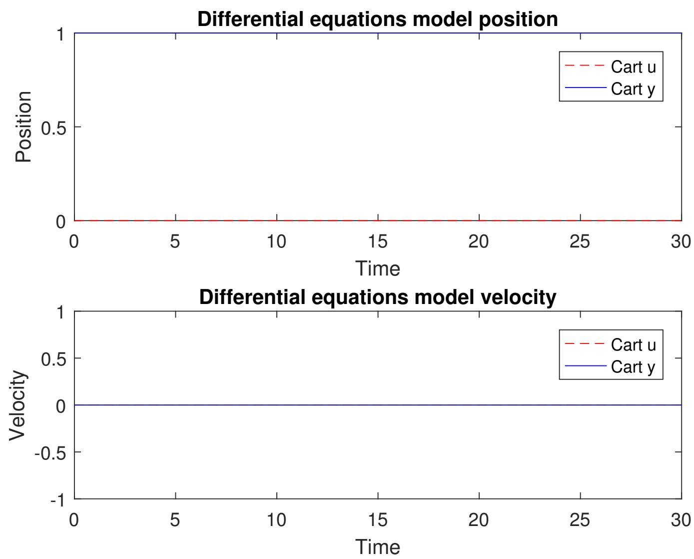
2.2 Srovnání modelů

2.2.1 Počáteční podmínky 1: rovnovážný stav

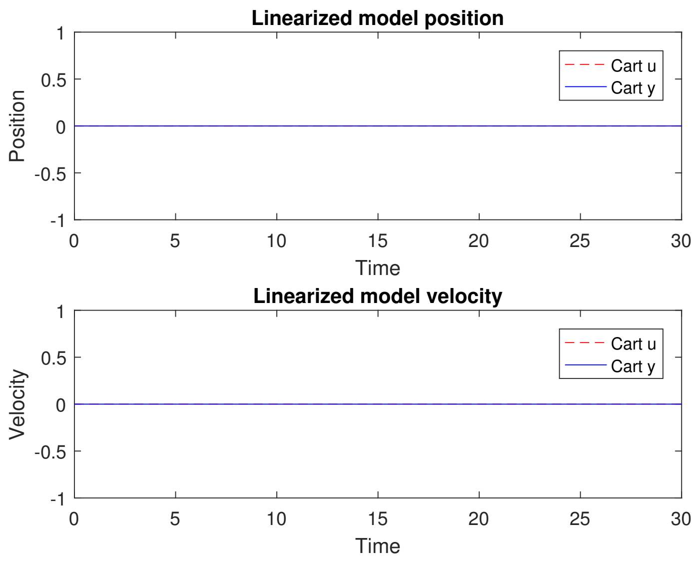
Porovnáním modelů odismulovaných v jejich rovnovážných stavech zjišťujeme, že jsou identické.



Obrázek 6: Odsimulovaný model v SimMechanics v rovnovážném stavu



Obrázek 7: Odsimulovaný model diferenciálních rovnic v rovnovážném stavu

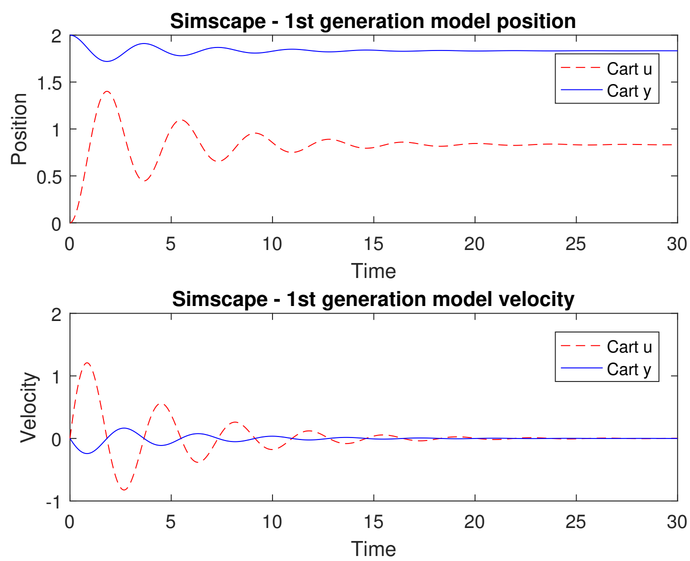


Obrázek 8: Odsimulovaný linearizovaný model v rovnovážném stavu

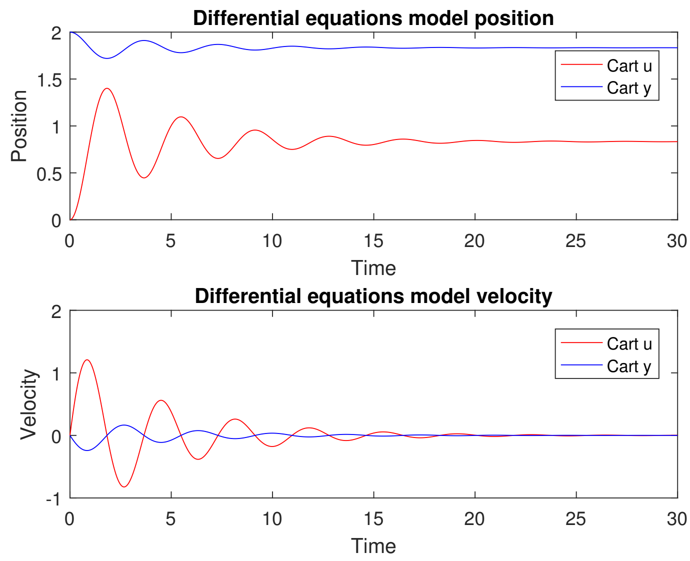
2.2.2 Počáteční podmínky 2: dvojnásobná délka pružiny oproti délce klidové

Nyní, na rozdíl od předchozího případu, lze pozorovat odlišnosti modelů. Považujme graf vzniklý z diferenciálních rovnic za referenční.

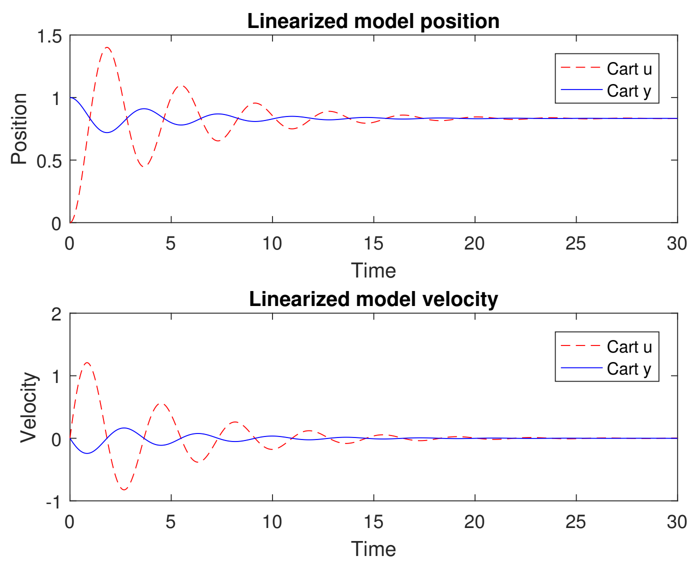
1. SimMechanics: oproti referenčnímu modelu má vozík o hmotnosti m jinou amplitudu křivky polohy i rychlosti.
2. Linearizovaný model: oproti referenčnímu modelu je poloha vozíku o hmotnosti m počítána od hodnoty 1 (ne od hodnoty 2 jako v referenčním modelu).



Obrázek 9: Odsimulovaný model v SimMechanics s nenulovou počáteční podmínkou



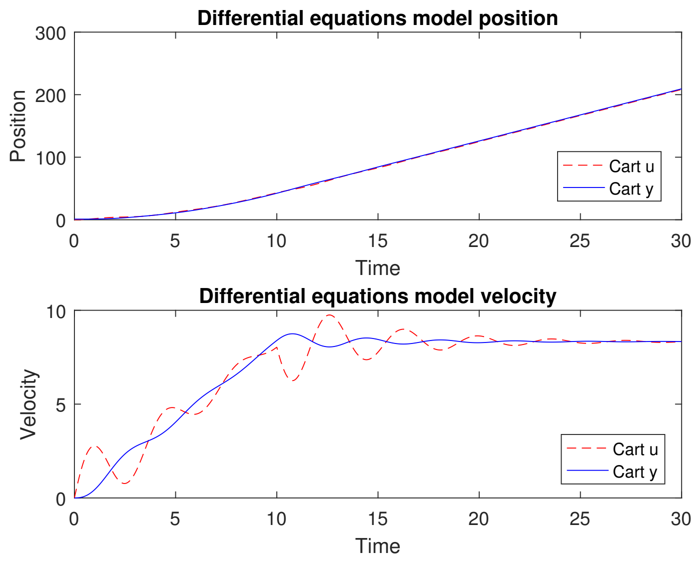
Obrázek 10: Odsimulovaný model diferenciálních rovnic s nenulovou počáteční podmínkou



Obrázek 11: Odsimulovaný linearizovaný model s nenulovou počáteční podmínkou

2.3 Simulace se silou působící na soustavu

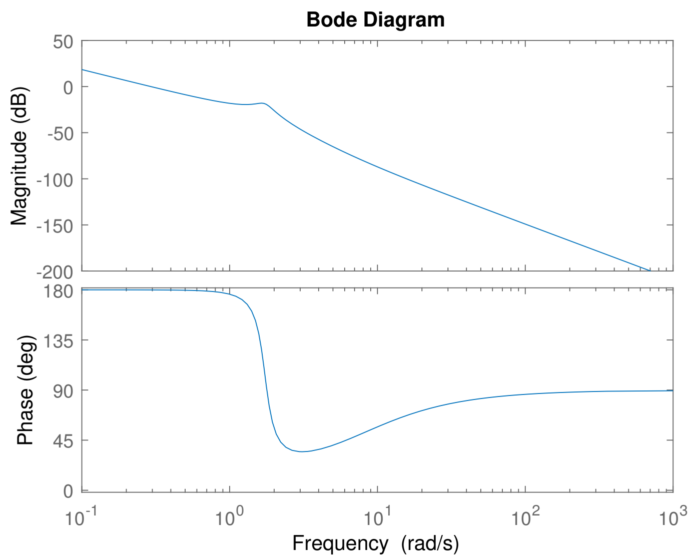
Při působení externí síly o velikosti 10 N po dobu 10 sekund a při zanedbání tření se systém rozpohybuje v kladném směru jedné ze souřadných os. Rychlosti vozíků se po určitém čase ustálí na stejných hodnotách a celá soustava se rozpohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem.



Obrázek 12: Chování modelu založeného na diferenciálních rovnicích s působící silou o velikosti 10 N po dobu 10 sekund

2.4 Frekvenční charakteristika

K vykreslení frekvenční charakteristiky nejdříve převedeme model vyjádřený pomocí diferenciálních rovnic na přenosovou funkci. Frekvenční charakteristika je závislost zesílení na frekvenci vstupního harmonického signálu. Jako vstup máme uvažovat působící externí sílu o velikosti 10 N a jako výstup polohu vozíku o hmotnosti m.



Obrázek 13: Frekvenční charakteristika

2.5 Pozorovatelnost a nepozorovatelnost

Pro zjištění, jestli je systém pozorovatelný, či nikoliv potřebujeme znát hodnost matice pozorovatelnosti $O = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$, ve které je n hodnost matice $\mathbf{A}$. Jestliže je hodnost matice pozorovatelnosti rovna hodnosti matice **A**, tak je systém pozorovatelný.

V zadaném modelu je určení pozorovatelnosti celkem intuitivní. Jestliže budu znát polohu alespoň jednoho z vozíků, tak systém bude pozorovatelný. Jestliže budu znát jen jejich rychlost (ať už jednoho, či obou) tak nebudu schopen systém pozorovat.

V programu MATLAB určím hodnost matice **O** pomocí příkazu `rank(obsv(A, C))`.

2.5.1 Konfigurace senzorů pozorovatelného systému

Takto sestavená matice **C** odpovídá konfiguraci, kdy je v systému umístěn 1 senzor snímající polohu vozíku u o hmotnosti M. Hodnost matice O je 4, systém je pozorovatelný.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5.2 Konfigurace senzorů nepozorovatelného systému

Takto sestavená matice **C** odpovídá konfiguraci, kdy jsou v systému umístěny 2 senzory snímající rychlosti obou vozíků. Hodnost matice O je 3, systém je nepozorovatelný.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Závěr

V semestrální práci jsme si vyzkoušeli vytvořit několik modelů zadaného fyzikálního systému. Modely jsme porovnali a prozkoumali jeho vlastnosti. Došli jsme k závěru, že při zanedbání tření a dodání vnější energie či při nenulových počátečních rychlostech systém diverguje, vozíky se pohybují do nekonečna.