1 Polárne vlastnosti algebraických rovinných kriviek

Nech $\mathbf{X}$ je krivka v projektívnej rovine P_2 definovaná rovnicou $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Nech m je stupeň krivky $\mathbf{X}$.

Definícia 1 *r-tou polárou bodu $(a) \in P_2$ vzhľadom ku krivke $\mathbf{X}$ nazveme krivku $P^r_{(a)}$ definovanú rovnicou*

$$\left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} x_i\right)^{m-r} = 0.$$

Je teda prvá polára bodu (ak existuje) krivkou stupňa $n-1$, druhá stupňa $n-2$, ..., $(m-1)$-polára je priamkou. Tiež je zrejmé, že r-tá polára bodu $(a) \in P_2$ existuje práve vtedy, keď aspoň jedna $(m-r)$-tá parciálna derivácie polynómu F v bode (a) je nenulová. Z tohoto faktu a definície poláry vyplývajú niektoré zaujímavé fakty týkajúce sa existencie polár.

(V1).V regulárnom bode krivky $\mathbf{X}$ existujú poláry všetkých stupňov.

(V2).V ľubovoľnom bode $(a) \in P_2, (a) \notin \mathbf{X}$ existujú poláry všetkých stupňov.

(V3).V s-násobnom bode $(a) \in \mathbf{X}$ existujú poláry stupňa $r = 1, 2, ..., m-s$. Tvrdenie vyplýva z faktu, že v s-násobnom bode (a) krivky $\mathbf{X}$ sú všetky parciálne derivácie F stupňa 1 až $s-1$ nulové a aspoň jedna parciálna derivácia stupňa s (a podobne stupňa $s+1$ až $m-1$) nenulová. Existujú teda len poláry $P^1_{(a)}, P^2_{(a)}, ..., P^{m-s}_{(a)}$.

Nasledujúce dve lemy deklarujú dve významné vlastnosti polár.

Lema 2 *r-tá polára bodu $(a) \in P_2$ vzhľadom ku krivke $\mathbf{X}$ (ak existuje) obsahuje všetky singulárne body krivky $\mathbf{X}$ stupňa $\geq r+1$.*

Dôkaz. Nech existuje r-tá polára bodu $(a) = (a_1, a_2, a_3) \in P_2$, teda krivka

$$P^r_{(a)} : \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} x_i\right)^{m-r} = 0.$$

Nech $(b) = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{X}$ je singulárny bod stupňa $\geq r+1$, teda všetky parciálne derivácie F v bode (b) stupňa r (a menej) sú nulové. Teda platí identita

$$\left(\Sigma \frac{\partial F(b)}{\partial x_i} a_i\right)^{r} = 0.$$

Keďže

$$\frac{1}{r!}\left(\Sigma \frac{\partial F(b)}{\partial x_i} a_i\right)^{r} = \frac{1}{(m-r)!}\left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i\right)^{m-r}$$

vyplýva z posledného rovnosť

$$\left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i\right)^{m-r} = 0,$$

teda bod (b) je bodom poláry $P^r_{(a)}$. ■

Dôsledok 3 *Prvá polára bodu (ak existuje) obsahuje všetky singulárne body krivky.*

Lema 4 *Bod (b) je z $r-$tej poláry bodu (a) práve vtedy, keď bod (a) je z $(m-r)-$tej poláry bodu (b).*

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z faktu

$$\left(\Sigma\frac{\partial F(b)}{\partial x_i}a_i\right)^r = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\Sigma\frac{\partial F(a)}{\partial x_i}b_i\right)^{m-r} = 0$$

ako dôsledku identity uvedenej v poznámke 3. ■

Relácia z poslednej lemy sa nazýva **polárnou združenosťou** bodov vzhľadom ku krivke $\mathbf{X}$. Ďalšie využitie polarity súvisí s dotyčnicami v regulárnych bodoch krivky. Uvedomíme si, že $(m-1)-$polára regulárneho bodu krivky je dotyčnociu v tomto bode.

Nech teraz $(a) \in P_2$, $(a) \notin \mathbf{X}$ a $(b) \in P^1_{(a)} \cap \mathbf{X}$ je regulárnym bodom $\mathbf{X}$. Keďže

$$(b) \in P^1_{(a)}, \text{ je zároveň } (a) \in P^{m-1}_{(b)},$$

teda bod (a) leží na dotyčnici ku krivke $\mathbf{X}$ v jej regulárnom bode (b).Platí teda

Lema 5 *Regulárny bod $(b) \in \mathbf{X}$ je dotykovým bodom dotyčnice vedenej z bodu (a) ku $\mathbf{X}$ práve vtedy, keď platí*

$$(b) \in P^1_{(a)} \cap \mathbf{X}.$$

Poznámka 6 *Keďže* $\deg P^1_{(a)} = m-1$, *na základe Bezoutovej vety platí*

$$\#(P^1_{(a)} \cap \mathbf{X}) = m.(m-1)$$

a toto číslo označuje hornú hranicu počtu regulárnych bodov krivky $\mathbf{X}$ v prieniku $P^1_{(a)} \cap \mathbf{X}$ a teda hornú hranicu počtu dotyčníc, vedených z bodu ku krivke stupňa m. O presnom počte týchto dotyčníc sa dozvieme neskôr.