1 Rekonštrukcia grafu algebraickej krivky v reálnej rovine.

Nech je algebraická rovinná krivka W daná v reálnej euklidovskej rovine E_2 rovnicou $F(x,y) = 0$. ($F(x,y)$ je polynóm v okruhu polynómov dvoch neurčitých s koeficientami v poli všetkých reálnych čísiel R). **Grafom** krivky W v E_2 rozumieme množinu všetkých bodov v reálnej rovine, súradnice ktorých spĺňajú uvedenú rovnicu. Uvedomíme si, že celú teóriu algebraických rovinných kriviek sme robili nad algebraicky uzavretým poľom. Vieme tiež, že algebraickým uzáverom poľa všetkých reálnych čísiel R je pole všetkých komplexných čísiel C (najmenšie algebraicky uzavreté pole, obsahujúce R). Vlastnosti krivky W musíme teda študovať nad poľom C. Graf krivky W môže byť teda ochudobnený o body s komplexnými súradnicami (nemajúcimi obraz v reálnej rovine).

Na záver nášho kurzu sa pokúsime aplikovať získané poznatky na nájdenie grafu (rekonštrukciu) danej algebraickej rovinnej krivky. Postup riešenia tejto úlohy si zdokumentujeme na konrétnom príklade.

Nech je algebraická rovinná krivka W v E_2 daná rovnicou

$$x^3 + x^2 - y^2 = 0,$$

resp. v rozšírenej euklidovskej rovine $\overline{E_2}$ rovnicou

$$x_1^3 + x_0x_1^2 - x_0x_2^2 = 0.$$

V lekcii ARK 1 sme sa dozvedeli, že jediným singulárnych bodom krivky W je bod $(a) = (1,0,0)$. Pripomeňme, že je to jediné netriviálne riešenie systému rovníc

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_0} = x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_0x_1 = 0$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} = -2x_0x_2 = 0.$$

Je to dvojnásobný uzlový bod so zväzkom dotyčníc daných rovnicami

$$x_1 - x_2 = 0\ ,\ \ x_1 + x_2 = 0,$$

resp.

$$x - y = 0\ ,\ x + y = 0.$$

Ďalším (ľahko identifikovateľným) regulárnym bodom krivky je bod $(b) = (1,-1,0)$.Dotyčnica v ňom má rovnicu

$$t_b : \frac{\partial F(b)}{\partial x_0}x_0 + \frac{\partial F(b)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial F(b)}{\partial x_2}x_2 = 0,\ \text{teda}$$

$$
\begin{aligned}
t_b &: \quad (-1)^2 x_0 + (3(-1)^2 + 2.1.(-1))x_1 = x_0 + x_1 = 0, \text{ resp.} \\
t_b &: \quad x - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

A nakoniec regulárnym bodom krivky W je i jediný "nevlastný" bod $(c) = (0,0,1)$.Dotyčnica v ňom je teda asymptotou grafu. Je to priamka

$$
\begin{aligned}
t_c &: \quad \frac{\partial F(c)}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial F(c)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(c)}{\partial x_2} x_2 = 0, \text{ teda} \\
t_c &: \quad x_0 = 0, \text{ t.j. nevlastná priamka.}
\end{aligned}
$$

Krivka W nemá vlastnú asymptotu.

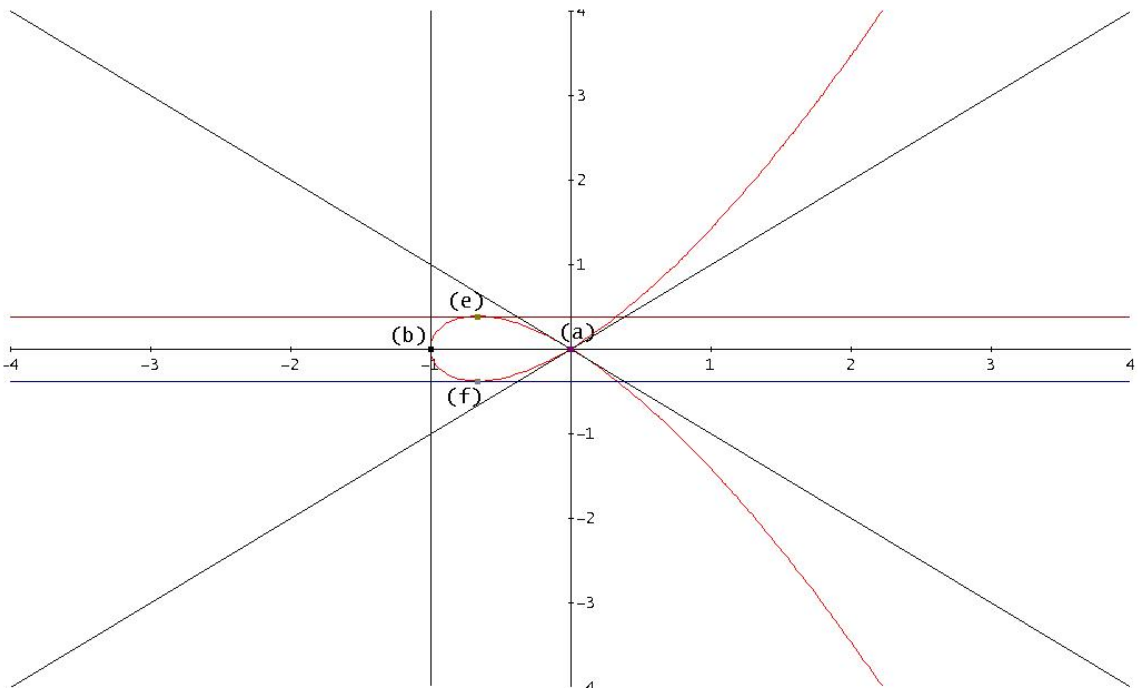
Nájdime teraz dotyčnice k danej krivke, ktoré sú rovnobežné s druhou súradnicovou osou, teda s priamkou $x = 0$. Riešme teda úlohu nájdenia dotyčníc k W v $\overline{E_2}$, ktoré prechádzajú bodom $(d) = (0,1,0)$.Z doteraz uvedeného v teórii vyplýva, že sú to dotyčnice k W v regulárnych priesečníkoch krivky W s prvou polárou bodu (d).Počítajme :

$$
\begin{aligned}
P^1_{(d)} &: \quad \left(\Sigma \frac{\partial F(d)}{\partial x_i} x_i \right)^{m-1} = 0, \text{ teda} \\
P^1_{(d)} &: \quad \left(\Sigma \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} d_i \right) = 3x_1^2 + 2x_0 x_1 = x_1(3x_1 + 2x_0) = 0.
\end{aligned}
$$

V prieniku $P^1_{(d)} \cap W$ sú teda body $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(e) = (1, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3.\sqrt{3}}), (f) = (1, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3.\sqrt{3}})$. Prvý bod je singulárny, dotyčnica v druhom je nevlastná priamka. Jedinými bodmi, ktoré prichádzajú do úvahy sú body (e) a (f). Jednoduchým výpočtom sa presvedčíme, že

$$
\begin{aligned}
t_e &: \quad y - \frac{2}{3.\sqrt{3}} = 0 \\
t_f &: \quad y + \frac{2}{3.\sqrt{3}} = 0
\end{aligned}
$$

Z doteraz uskutočnených výpočtov môžeme rekonštruovať graf uvedenej krivky. Poznamenajme, že uvedená krivka je v literatúre známa pod názvom **strofoida.**



(e)
(b)
(a)
(f)
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-1
-2
-3