1 Kužeľosečky - prehľad polohových vlastností (1.časť)

Nech je v Euklidovskej rovine E_2 daná afinná súradnicová sústava. Vieme, že **kužeľosečkou** v E_2 rozumieme množinu všetkých bodov C danej roviny, súradnice ktorých spĺňajú kvadratickú rovnicu

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{1}$$

Zapíšme túto rovnicu v maticovom tvare

$$(xy1)\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Základné vlastnosti kužeľosečky C si odvodíme pomocou analýzy spoločných bodov tejto kužeľosečky s priamkou vo všeobecnej polohe. Nech je priamka p daná bodom $P = [x^P, y^P]$ a vektorom $\overline{u} = [u, v]$, teda jej parametrick0 rovnice sú

$$x = x^P + ut$$
$$y = y^P + vt.$$

Pre výpočet spoločných bodov kužeľosečky C a priamky p dostávame nasledovnú kvadratickú rovnicu v neurčitej t

$$(au^2 + 2buv + cv^2)t^2 + 2((u(ax^P + by^P + d) + v(bx^P + cy^P + e))t+$$
$$a(x^P)^2 + 2bx^Py^P + c(y^P)^2 + 2dx^P + 2ey^P + f = 0. \tag{2}$$

Asymptotickým smerom kužeľosečky C rozumieme smer v rovine (t.j. jednorozmerný podpriestor) s vlastnosťou, že každá priamka s daným smerom má s C spoločný najviac jeden bod. Keďže daný fakt je ekvivalentný s tým, že rovnica (2) má najviac jedno riešenie pri akomkoľvek výbere čísiel x^Pa y^P, je zrejmé prvé tvrdenie tejto časti

($T1$) vektor $\overline{u} = [u, v]$ generuje asymptotický smer v $E_2 \Leftrightarrow au^2+2buv+cv^2 = 0$.

Stredom kužeľosečky C rozumieme jej stred súmernosti, teda bod S s vlastnosťou : ak $S + \overline{u}t \in C$, potom $S - \overline{u}t \in C$. Súradnice bodu S musia teda spĺňať podmienku : rovnica (2) musí mať s koreňom t aj koreň $-t$ pri akejkoľvek voľbe parametrov u, v, musí byť teda rýdzokvadratická. Dostávame teda druhú vlastnosť

($T2$) Bod S je stredom C práve vtedy, keď jeho súradnice spĺňajú systém rovníc

$$\begin{aligned} ax + by + d &= 0 \\ bx + cy + d &= 0 \end{aligned}$$

Singulárnym bodom kužeľosečky C nazývame bod v rovine, ktorý je bodom a zároveň stredom kužeľosečky. Keďže je zrejmá rovnosť

$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f = (ax+by+d)x+(bx+cy+d)y+(dx+ey+f)$,

vyplýva z posledného platnosť tretieho trdenia

($T3$) Bod S je singulárnym bodom C práve vtedy, keď jeho súradnice spĺňajú

$$\text{systém rovníc } \begin{aligned} ax + by + d &= 0 \\ bx + cy + d &= 0 \\ dx + ey + f &= 0 \end{aligned}$$

Je zrejmé, že posledný systém rovníc má riešenie (t.j. kužeľosečka má singulárny bod), len ak determinant

$$D_C = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

Kužeťosečka C, pre ktorú $D_C \neq O$ sa nazýva **regulárna.** Regulárne kužeľosečky teda neobsahujú singulárny bod. V ďalšom budeme pod pojmom kužeľosečka rozumieť regulárnu kužeľosečku. Sústredíme sa najprv na riešenie dotykových úloh.

Poznamenajme, že **dotyčnicou** v regulárnom bode kužeľosečky nazývame priamku, ktorá nemá asymptotický smer a má s kužeľosečkou spoločný len tento bod P. Nech teda $P = [x^P,\ y^P]$ je regulárny bod kužeľosečky C.Nájdime dotyčnicu k C v tomto bode, teda hľadajme odpoveď na otázku : Kedy má rovnica (2), v ktorej $au^2 + 2buv + cv^2 \neq 0$ a $a(x^P)^2 + 2bx^Py^P + c(y^P)^2 + 2dx^P + 2ey^P + f = 0$ jediný koreň $t = O$? Odpoveď znie : Práve vtedy, keď $u(ax^P + by^P + d) + v(bx^P + cy^P + e) = 0$. Platí teda štvrté tvrdenie

($T4$) Dotyčnica t_P v regulárnom bode $\begin{aligned} P &= [x^P, y^P] \text{ má parametrické rovnice} \\ x &= x^P - (bx^P + cy^P + e)t \\ y &= y^P + (ax^P + by^P + d)t, \end{aligned}$

resp. všeobednú rovnicu $(ax^P+by^P+d)x+(bx^P+cy^P+e)y+(dx+ey+f) = 0$.

Druhá z dotykových úloh znie : Nech $R = [x^R,\ y^R] \notin C$. Nájdite dotyčnice kužeľosečky C prechádzajúce bodom R. Nech t_P je jedna z týchto dotyčníc s dotykovým bodom P. Sledujme nasledovnú postupnosť ekvivalencií :

$$\begin{aligned} R \quad \in \quad & t_P \Leftrightarrow (ax^P + by^P + d)x^R + (bx^P + cy^P + e)y^R + (dx + ey + f) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (ax^R + by^R + d)x^P + (bx^R + cy^R + e)y^P + (dx + ey + f) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & P \in R \in p_R : (ax^R + by^R + d)x + (bx^R + cy^R + e)y + (dx + ey + f) = 0 \end{aligned}$$

Dostávame tvrdenie : Bod R leží na dotyčnici v bode P, práve vtedy, keď bod P leží na priamke p_R.

Priamku p_R danú rovnicou $(ax^R+by^R+d)x+(bx^R+cy^R+e)y+(dx+ey+f) = 0$ nazývame **polárou** bodu R.

Z doteraz povedaného vyplýva konštrukcia dotyčnice idúcej bodom R, ktorý leží mimo kužeľosečky.Zostrojíme poláru bodu R (táto vždy existuje) a nájdeme jej priesečníky s kužeľosečkou. To sú dotykové body dotyčníc, ktoré prechádzajú bodom R.Je zrejmé, že polára bodu ležiaceho na kužeľosečke je zhodná s dotyčnicou v tomto bode. Navyše horeuvedeneé ekvivalencie implikujú platnosť ďalšieho tvrdenia :

$$(T5) \text{ Nech } R,\ S \text{ sú bodmi } E_2 : R \in p_S \Leftrightarrow S \in p_R$$

Uvedená vlastnosť sa nazýva **polárna združenosť** bodov R a S .

Example 1 *Nájdite dotyčnice ku kužeľosečke* $C : 2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3 = 0$, *ktoré prechádzajú bodom* $R = [3, 4]$.

Riešenie : Kužeľosečka C je regulárna, keďže jej matica je

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ktorej determinant je $-13 \neq 0$.*Stredom danej kužeľosečky je bod* $S = [-\frac{5}{2}\ , -2]$. *Pre poláru bodu R platí :*

$$\begin{aligned} p_R &: \quad (2.3 - 2.4 - 1)x + (-2.3 + 1.4 + 3)y + (-1.3 + 3.4 - 3) = 0, \ \textit{teda} \\ p_R &: \quad -3x + y + 6 = 0. \end{aligned}$$

Pre spoločné body p_R *a* C *(ich prvé súradnice) treba riešiť kvadratickú rovnicu* $x^2 - 4x + 3 = 0$. *Výsledkom sú teda tieto body*

$$\begin{aligned} P_1 &= [1, -3] \\ P_2 &= [3, 3]. \end{aligned}$$

Dotyčnice v týchto bodoch sú hľadané dotyčnice, teda riešením sú priamky :

$$\begin{aligned} t_{P_1} &: \ 7x - 2y - 13 = 0 \\ t_{P_2} &: \ x - 3 = 0 \end{aligned}$$