1 Kužeľosečky - prehľad metrických vlastností

Nech je v Euklidovskej rovine E_2 daná regulárna kužeľosečka C rovnicou

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f = 0.$$

Vieme, že dvojica združených priemerov danej kužeľosečky je popísaná rovnicami

$$(au + bv)x_1 + (bu + cv)x_2 + (du + ev) = 0,$$

$$v(b^2 - ac)x_1 - u(b^2 - ac)x_2 + \text{absolútny člen} = 0$$

kde $\overline{u} = [u, v]$ je ľubovoľný neasymptotický smer v E_2. Hľadajme odpoveď na otázku, pre ktorý nenulový vektor $\overline{u} = [u, v]$ je odpovedajúca dvojica združených priemerov navzájom kolmá. Poznamenajme, že dvojica navzájom kolmých združených priemerov sa nazýva **osi klužeľosečky.** Zrejme je to práve vtedy, keď existuje nenulové reálne číslo ρ také, že

$$au + bv = \rho u$$

$$bu + cv = \rho v,$$

teda keď pre nenulové ρ má homogénny sytém rovníc

$$(a - \rho)u + bv = 0$$

$$bu + (c - \rho)v = 0. \quad (1)$$

nenulové riešenie. To je však práve vtedy, keď je ρ koreňom rovnice

$$\begin{vmatrix} a - \rho & b \\ b & c - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - (a + c)\rho + ac - b^2 = 0. \qquad (2)$$

Keďže diskriminant uivedenej kvadratickej rovnice je

$$D = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0,$$

existujú vždy dva reálne korene, z ktorých aspoň jeden je nenulový. V opačnom prípade by platilo

$$(a + c) = ac - b^2 = 0,$$

teda by $a = b = c = 0$, čo nie je možné. Nech je teraz uvažovaná kužeľosečka **parabola,** t.j. $ac - b^2 = 0$.Vtedy pre korene rovnice (2) platí

$$\rho_1 = 0, \ \rho_2 = a + c$$

a pre odpovedajúce vektory

$$\overline{u_1} = [-b, a] - \text{asymptotický smer}$$

$$\overline{u_2} = [b, c]$$

Priemer združený so smerom $\overline{u_2} = [b, c]$, teda priamka

$$(ab + bc)x_1 + (b^2 + c^2)x_2 + (db + ec) = 0$$

je os (jediná) paraboly. Jej smer je asymptotický. Nech je teraz kužeľosečka C

elipsa , t.j. $ac - b^2 > 0$. Keby $\rho_1 = \rho_2$, potom by $a = c$ a zároveň $b = 0$. To by však znamenalo, že riešením systému rovníc (1) je akákoľvek nenulová usporiadaná dvojica $[u, v]$, teda každá dvojica združených priemerov je navzájom kolmá. To je prípad špeciálnej elipsy - **kružnice.** Tá je teda charakterizovaná podmienkou $a = c$ a $b = 0$ v definujúcej rovnici. Ak $\rho_1 \neq \rho_2$, existujú práve dve riešenia systému rovníc (1), teda elipsa má práve dve osi. Ak je sledovaná kužeľosečka

hyperbola, t.j. $ac - b^2 < 0$, potom $\rho_1 \neq \rho_2$. V opačnom prípade by $a = c$ a $b = 0$, teda by $ac - b^2 = a^2 > 0$. Každá hyperbola má teda práve jednu dvojicu osí.

Ukážme si teraz cestu, ako transformovať všeobecnú rovnicu kužeľosečky na tzv ohniskový tvar. Nech je teda regulárna kužeľosečka C daná rovnicou

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f \quad = \quad 0 \qquad (3)$$

kde samozrejme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Nech Je to **elipsa** alebo **hyperbola**, t.j. $ac - b^2 \neq 0$. Nech rôznym koreňom $\rho_1 \neq \rho_2$ odpovedajú nasledovné vektory

$$\rho_1 \rightarrowtail [u_1, v_1]$$

$$\rho_2 \rightarrowtail [u_2, v_2]$$

Transformujme súradnicovú sústavu pomocou rovníc

$$x_1 = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$x_2 = v_1y_1 + v_2y_2$$

Po dosadení do rovnice (3) dostávame rovnicu kužeľosečky v novej súradnicovej sústave :

$$\rho_1y_1^2 + \rho_2y_2^2 + 2(du_1 + ev_1)y_1 + 2(du_2 + ev_2)y_2 + f = 0.$$

Využívame pri tom poznatok z lineárnej algebry, že danou transformáciou súradnicovej sústavy prejde kvadratická forma $ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$ na tvar $\rho_1y_1^2+\rho_2y_2^2$.Pokračujme v transformácii súradnicovej sústavy a vyberme novú danú rovnicami

$$y_1 = z_1 - \frac{du_1 + ev_1}{\rho_1}$$

$$y_2 = z_2 - \frac{du_2 + ev_2}{\rho_2}.$$

Po dosadení do poslednej rovnice dostávame

$$\rho_1 z_1^2 + \rho_2 z_2^2 = \Omega, \text{ kde}$$

$$\Omega = \frac{(du_1 + ev_1)^2}{\rho_1} + \frac{(du_1 + ev_1)^2}{\rho_1} - f.$$

Nech je sledovaná kužeľosečka elipsa, teda $\rho_1 . \rho_2 = ac - b^2 > 0$. Keďže v tomto úprípade majú ρ_1 a ρ_2 rovnaké znamienka, posledná rovnica má tvar

$$\frac{z_1^2}{\alpha^2} + \frac{z_2^2}{\beta^2} = \pm 1,$$

čo je ohnisková rovnica elipsy (resp prázdnej množiny pri -1). Nech je teraz sledovaná kužeľosečka hyperbola, teda ρ_1 a ρ_2 Majú rôzne znamienka. Vtedy sledovaná rovnica má tvar

$$\frac{z_1^2}{\alpha^2} - \frac{z_2^2}{\beta^2} = 1$$

(resp vo vymenenom poradí z_1 a z_2), čo je ohnisková rovnica hyperboly. Nech nakoniec sledovaná kužeľosečka je parabola. Vieme, že vtedy medzi koreňmi rovnice (1) a (2) je vzťah

$$\rho_1 = 0 \rightarrowtail [-b, a]$$

$$\rho_2 = a + c \rightarrowtail [b, c]$$

a po transformácii súradnicovej sústavy

$$x_1 = by_1 - by_2$$

$$x_2 = cy_1 + ay_2$$

dostávame (s využitím spomínanného faktu z lineárnej algebry) rovnicu

$$\rho_2 y_1^2 + 2(db + ec)y_1 + 2(ae - db)y_2 = 0.$$

Posledná transformácia

$$y_1 = z_1 - \frac{db + ec}{\rho_2}$$

$$y_2 = z_2 + \frac{1}{2(ae - db)} \left(\frac{(ae - db)^2}{\rho_2} - f \right)$$

prevedie rovnicu paraboly na tvar

$$\rho_2 z_1^2 + \Omega z_2 = 0$$

čo je ohnisková rovnica paraboly.