Domáca úloha 1

Dôkaz rovnice pre refrakciu lúča

Marek Kružliak

March 16, 2014

1 Použité vzťahy a vlastnosti

(1) Snellov zákon: $\eta_1 \sin\theta_1 = \eta_2 \sin\theta_2$
(2) Veta pre sínus a cosínus: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
(3) Uhol medzi dvoma vektormi: $\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}$
(4) Vektory vystupujúce v rovnici sú jednotkové: $|\bar{n}| = |\bar{\omega}| = |\bar{\omega}_r| = 1$
(5) Uhly θ_1 a θ_2 sú v intervale $< 0, 90 >^\circ$

Na tieto vzťahy sa budeme odkazovať neskôr v texte.
Lom lúča je znázornený na obrázku 1 na strane 3.

2 Dôkaz

Výsledný vektor $\bar{\omega}_r$ sa pokúsime získať skladaním dvoch vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$:

$$\bar{\omega}_r = \bar{u} + \bar{v} \tag{6}$$

Vektor $\bar{u}$ môžeme získať aj takto:

$$\bar{u} = -\cos\theta_2 \bar{n} \tag{7}$$

Kde $\cos\theta_2 = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{\omega}_r|} = |\bar{u}|$, keďže platí (4) a $-\bar{n}$ nám určuje smer vektora $\bar{u}$. Vektor $\bar{n}$ už poznáme a preto nám stačí dopočítať už len $\cos\theta_2$.

Z (2) a (5) vieme, že:

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} \tag{8}$$

Ďalej nám teda stačí vypočítať $\sin\theta_2$, na čo nám poslúži Snellov zákon.

$$\sin\theta_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \sin\theta_1$$

Na základe (2) a (5):

$$\sin\theta_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \sqrt{1-\cos^2\theta_1} \tag{9}$$

Z (3) vieme vypoočítať $\cos\theta_1$:

$$\cos\theta_1 = \frac{\bar{\omega}\cdot\bar{n}}{|\bar{\omega}|\cdot|\bar{n}|}$$

A keďže platí (4):

$$\cos\theta_1 = \bar{\omega}\cdot\bar{n} \tag{10}$$

Po doplnení $\cos\theta_1$ do (9), $\sin\theta_2$ do (8) a $\cos\theta_2$ do (7) získame vektor $\bar{u}$ takto:

$$\bar{u} = -\left(\sqrt{1-\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 (1-(\bar{\omega}\cdot\bar{n})^2)}\right)\bar{n} \tag{11}$$

Teraz nám už en stačí získať vektor $\bar{v}$.
Vďaka (4) vieme, že $\sin\theta_1 = |\bar{q}|$ a $\sin\theta_2 = |\bar{v}|$. Po doplnení do (1) získame rovnicu:

$$|\bar{v}| = \frac{\eta_1}{\eta_2}|\bar{q}|$$

Kedže $\bar{v} \parallel \bar{q}$ a majú opačný smer, tak platí:

$$\bar{v} = -\frac{\eta_1}{\eta_2}\bar{q} \tag{12}$$

Vektor $\bar{q}$ možno získať ako rozdiel vektorov $\bar{\omega}$ a $\bar{p}$:

$$\bar{q} = \bar{\omega} - \bar{p} \tag{13}$$

Kde vektor $\bar{p}$ má smer rovnaký ako $\bar{n}$ a jeho velkosť je $\cos\theta_1$. Vďaka týmto faktom a rovnici (10) získavame, že:

$$\bar{p} = (\bar{\omega}\cdot\bar{n})\bar{n} \tag{14}$$

Po doplnení $\bar{p}$ do (13) a následne $\bar{q}$ do (12) získame vektor $\bar{v}$ takto:

$$\bar{v} = -\frac{\eta_1}{\eta_2}(\bar{\omega} - (\bar{\omega}\cdot\bar{n})\bar{n}) \tag{15}$$

Po dosadení (15) a (11) do (6) získame výsledný vektor:

$$\bar{\omega}_r = -\frac{\eta_1}{\eta_2}(\bar{\omega} - (\bar{\omega}\cdot\bar{n})\bar{n}) - \left(\sqrt{1-\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 (1-(\bar{\omega}\cdot\bar{n})^2)}\right)\bar{n} \tag{16}$$

A to je to, čo sme chceli dokázať.

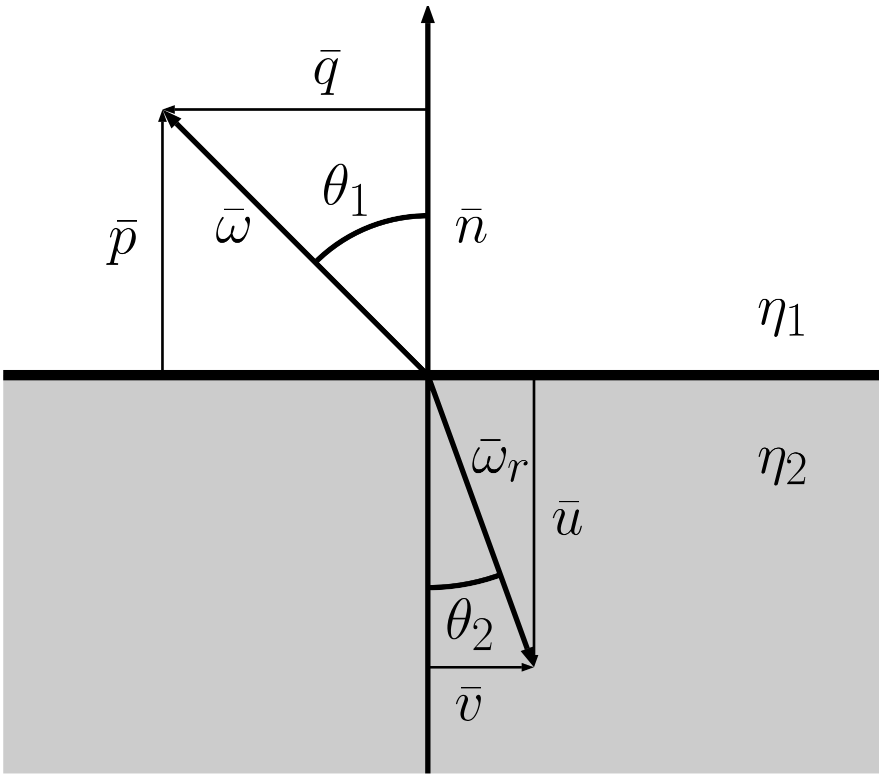

Figure 1: Refrakcia lúča. (Pomocný obrázok k dôkazu)