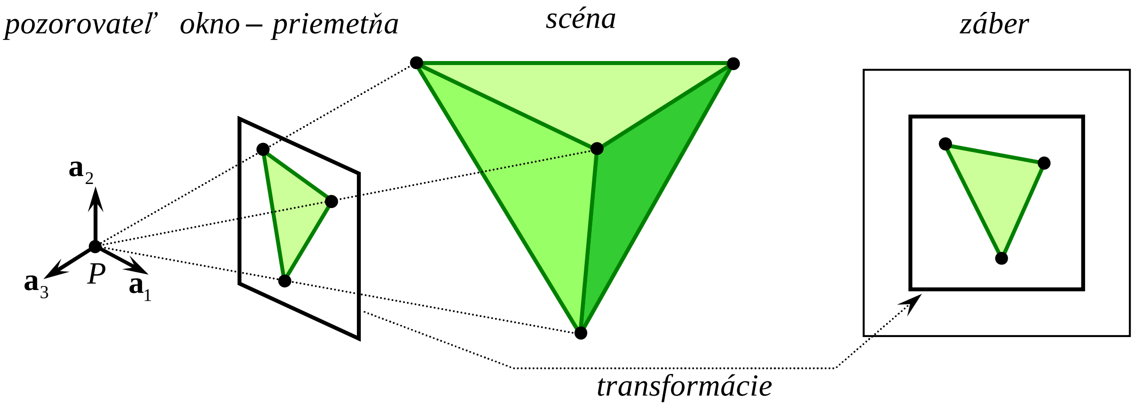
2. ZOBRAZOVACÍ KANÁL

Zobrazovací proces v počítačovej grafike a tiež v mnohých grafických systémoch (napr. v OPEN GL) sa v podstate realizuje v nasledujúcich fázach.

Predpokladáme, že všetky vstupné objekty sú zadané v štandardnej priestorovej karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, ktorú nazveme svetovou súradnicovou sústavou (ak modelár má modely svojich objektov opísané vo svojej vlastnej súradnicovej sústave, musí si ich do tejto pretransformovať).



Obr.1

1. **<u>Konštrukcia súradnicovej sústavy pozorovateľa (snímacej súradnicovej sústavy)</u>** $\langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$.

Konštrukcia si vyžaduje zadanie:

a) súradnice pozorovateľa (kamery), presnejšie jeho oka : $P = [p_1, p_2, p_3]$

b) súradnice cieľového bodu (bodu, na ktorý sa pozerá) : $C = [c_1, c_2, c_3]$

c) bodmi P a C je definovaný tzv. pohľadový vektor $\mathbf{v}$ = C-P, ten reprezentuje smer, ktorým je pozorovateľ P zameraný (prípadne polohu a smer kamery).

Kamera sa však môže okolo priamky - osi PC otáčať. Aby sme fixovali jej „správnu“ polohu aj čo do otočenia, zadáva sa jednotkový vektor $\mathbf{h} = [h_1, h_2, h_3]$, ktorý reprezentuje smer „hore“(vzhľadom na kameru). Tento vektor nemusí byť kolmý na pohľadový vektor (hoci niektorí autori to predpokladajú), no niekedy sa predpokladá, že $\mathbf{h} = \mathbf{e}_3$. Oba tieto predpoklady umožňujú jednoduché vyjadrenie súradníc vektorov $\mathbf{a}_i$, i=1,2,3.

Týmto máme zvolené dva jednotkové vektory:

$$\mathbf{v} = \frac{C-P}{|C-P|} = [v_1, v_2, v_3] = \frac{1}{\sqrt{(c_1-p_1)^2 + (c_2-p_2)^2 + (c_3-p_3)^2}} [c_1-p_1, c_2-p_2, c_3-p_3] \text{ a vektor } \mathbf{h}$$

(ak by vektor reprezentujúci smer „hore“ nebol jednotkový, vydelíme ho jeho dĺžkou).

Potom súradnicová sústava pozorovateľa (snímacia súradnicová sústava) je určená:

1) začiatkom $P = [p_1, p_2, p_3]$ (bodový pozorovateľ – oko)

2) $\mathbf{a}_3 := -\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad [a_{13}, a_{23}, a_{33}] = [-v_1, -v_2, -v_3]$

3) $\mathbf{a}_1 := \mathbf{v} \times \mathbf{h} = \left[\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ h_2 & h_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ h_1 & h_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} \right]$ t.j. $\mathbf{a}_1 = [a_{11}, a_{21}, a_{31}]$ kde

$a_{11} = v_2 h_3 - v_3 h_2; \quad a_{21} = -v_1 h_3 + v_3 h_1$ a $a_{31} = v_1 h_2 - v_2 h_1$.

4) $\mathbf{a}_2 := \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \left[\begin{vmatrix} a_{23} & a_{33} \\ a_{21} & a_{31} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{33} \\ a_{11} & a_{31} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} \right]$ t.j.

$a_{12} = a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}; \quad a_{22} = a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}$ a $a_{32} = a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}$.

2. <u>Transformácia svetovej súradnicovej sústavy do súradnicovej sústavy pozorovateľa (snímacej súradnicovej sústavy)</u> t.j. $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \quad \to \quad \langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$.

Vieme, že ak bod má súradnice $X = [x_1, x_2, x_3]$ v sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ a súradnice $X = [y_1, y_2, y_3]$ v sústave $\langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$, môžeme zapísať:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pretože

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pričom prvá matica súčinu je maticou posunutia o vektor (p_1, p_2, p_3) (jej inverznou maticou je matica posunutia o vektor $(-p_1, -p_2, -p_3)$) a druhá matica súčinu je ortogonálna (jej inverznou maticou je matica k nej transponovaná). Platí:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 & -p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3) \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3) \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -(a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Táto maticová rovnosť nám umožňuje počítať súradnice bodov v snímacej súradnicovej sústave, ak poznáme ich svetové súradnice.

3. Tretím krokom zobrazovacieho procesu je **premietanie** (rovnobežné alebo stredové) priestoru do roviny – priemetne (pohľadovej roviny). Ako vieme z predchádzajúceho, je účelné zvoliť ju kolmo k tretej súradnicovej osi snímacej súradnicovej sústavy, čiže k vektoru $\mathbf{a}_3$ resp. k vektoru $\mathbf{v}$. Realizácia tohto kroku si vyžaduje znalosť všeobecných zobrazovacích rovníc pre rovnobežné resp. stredové premietanie a ich špeciálnych typov (ortoprojekcie, axonometrie, perspektívy, atď.).

Stredové premietanie: špeciálne, ak priemetňa má v snímacej súradnicovej sústave rovnicu $z=-d$, kde d >0 a stredom premietania je bod $S = P$, tak zobrazovacie rovnice tohto stredového premietania, ako už vieme, sú:

$x'=\dfrac{dx}{-z}=\dfrac{x}{z/(-d)}$; $y'=\dfrac{dy}{-z}=\dfrac{y}{z/(-d)}$; resp. $x'=-x/(z/d)$; $y'=-y/(z/d)$ a špeciálne pre $d=n, \mathbf{a}=[w,0,0], \mathbf{b}=[0,h,0]$ (obr.3):

(1) $\quad x'=(n/w)x/(-z); y'=(n/h)y/(-z)$ a maticou $\mathrm{M_S}=\begin{pmatrix} 1/w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/n & 0 \end{pmatrix}$.

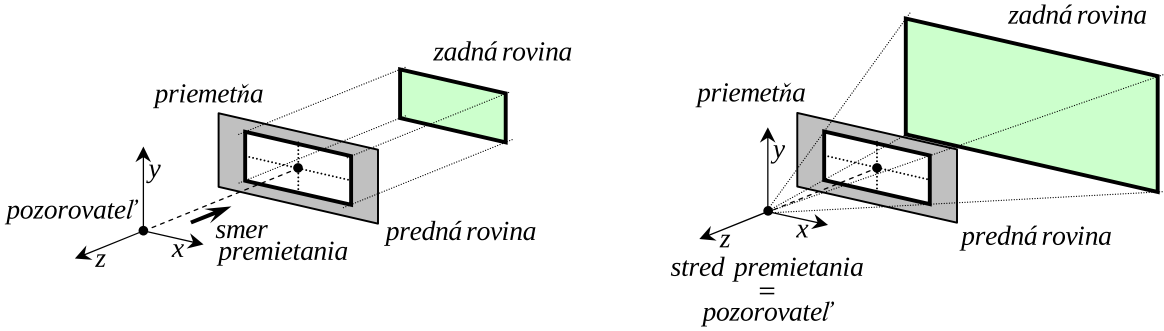
Rovnobežné premietania: na rozdiel od stredových premietaní sú afinnými zobrazeniami a existuje medzi nimi značné množstvo rôznych typov. Asi najjednoduchšie sú ortogonálne (kolmé) premietania, u ktorých premietacie priamky sú rovnobežné s niektorou súradnicovou osou, najčastejšie s treťou osou z.

Táto transformácia zobrazuje body priestoru E^3 do bodov súradnicovej roviny $z = 0$ a to tak, že bodu $X=(x,y,z,1)^T$ priradí bod $X'=(x,y,0,1)^T$. Nás bude zaujímať špeciálny prípad ortoprojekcie do priemetne $z = - n$, ktorá $[x,y,z]\rightarrow[x,y,-n]$ s maticou:

$$\mathrm{M_{ORT}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \mathrm{M_{ORT}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Treba povedať, že hoci súradnica z nie je potrebná pre finálnu kresbu, ale uchováva informáciu o hĺbke, ktorá je užitočná pri odstraňovaní skrytých plôch, zisťovaní ich z-rozsahov a usporiadavaní podľa vzdialenosti od pozorovateľa, a preto ju mnohé programové produkty a grafické systémy uchovávajú. Tento krok zobrazovacieho procesu však nepozostáva len z premietania samotného (afinnej zložky) ale aj z orezávania (rovinného i priestorového) a z tzv. perspektívnej normalizácie.

Pohľadový objem (pohľadové teleso, pohľadový priestor) sa zavádza pri premietaniach preto, aby sme potlačili zobrazovanie takých objektov, ktoré sa nenachádzajú v oblasti nášho záujmu a prípadne sú za chrbtom pozorovateľa. Je to teda časť priestoru ohraničujúca tie objekty, ktoré chceme premietať. Ostatné objekty musia byť pred ďalším spracovaním odstránené alebo odrezané. Pri stredovom premietaní takýmto pohľadovým priestorom je teleso - zrezaný ihlan a pri rovnobežnom premietaní je týmto telesom - kváder.



Obr.2

Oba prípady vidno na obr.2 prevzatom z učebnice Žára: Moderní počítačová grafika. Uhly pri vrchole nezrezaného ihlana by mali zodpovedať šírke záberu kamery, čo síce nie je mnoho, ale ak zohľadníme aj periférne videnie, môžeme za akceptovateľný uhol považovať uhol do 50°. Pri pohľadovom telese dôležitú úlohu má predná (near) a zadná (far) stena, lebo pri orezaní pohľadovým telesom zabezpečujú tieto dve steny odstránenie príliš blízkych objektov brániacich vo výhľade ako aj príliš vzdialených objektov, ktoré sú z hľadiska pozorovateľa nezaujímavé a ich spracúvanie spomaľuje zobrazovací proces.

Na obr. 2 je predná stena - orezávacia rovina totožná s priemetňou. V skutočnosti však priemetňa môže byť umiestnená v ľubovoľnej vzdialenosti od pozorovateľa, pretože v poslednej fáze zobrazovacieho reťazca nasleduje úprava mierky, ktorá okno obsahujúce premietnuté objekty zobrazí do určeného okna na obrazovke počítača.

V záujme zjednodušenia výpočtov v orezávacích algoritmoch sa niekedy v priestore obsahujúcom zobrazované objekty zabezpečí, aby sa pohľadový priestor zmestil do jednotkovej kocky $\langle -1,1\rangle^3$.

Pri matematickom opise sú použité označenia pre výber roviny a polohy bodu v rovine:
n – near, *f* – far, *t* – top, *b* – bottom, *r* – right, *l* – left.

Vráťme sa teraz k stredovému premietaniu určenému stredom P=[0,0,0] a priemetňou z = - n so súradnicovou sústavou $R=[0,0,-n], \mathbf{a}=[w,0,0], \mathbf{b}=[0,h,0]$. Jeho zobrazovacie rovnice

$x' = (n/w)x/(-z); y' = (n/h)y/(-z)$ sa dajú vypočítať dosadením do skôr uvedených vzorcov. Pretože :

$$M_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/w \\ y/h \\ z \\ -z/n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{n}{w} x/(-z) \\ \frac{n}{w} y/(-z) \\ -n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix},$$

$z = -n$ je M_S skutočne maticou tohto premietania.

<u>Pridanie pseudohĺbky</u>. Premietaním sa stráca informácia o hĺbke t.j. informácia o tom ako ďaleko je bod od oka, ktorá je nevyhnutná pre viditeľnosť. Preto pre každý bod X , ktorý premietame, musíme vypočítať tzv. <u>pseudohĺbku</u> , ktorá poskytuje adekvátnu mieru hĺbky pre bod X (presnejšie umožňuje <u>porovnávať</u> jeho vzdialenosť od pozorovateľa so vzdialenosťami iných bodov). Z tohto dôvodu rozšírime pojem premietania takto:

Definícia : Hovoríme, že bod X sa premieta do bodu $X' = (x', y', z') \Leftrightarrow$ ak hodnoty x', y' sú vypočítané podľa (1) a z' je pseudohĺbka bodu X t.j. číslo $z' = (az+b)/(-z)$, kde a, b sú reálne čísla zvolené tak, aby : $-1 \le z' \le 1$ pričom $-1 = z'(-n) \wedge 1 = z'(-f)$, kde $z = -n$ a $z = -f$ sú rovnice prednej resp. zadnej orezávacej roviny zrezaného 4-bokého ihlana, ktorý predstavuje pozorovací priestor stredového premietania.

Vyriešením rovníc $-an + b = -n$ a $-af + b = f$ dostávame: $a = \dfrac{n+f}{n-f}$ a $b = \dfrac{2nf}{n-f} \Rightarrow$

$$z' = z'(z) = -\frac{1}{z}\left[\frac{n+f}{n-f} z + \frac{2nf}{n-f}\right].$$

<u>*Poznámka*:</u> Táto voľba a, b je však užitočná len ak chceme orezať nejaké prečnievajúce objekty. Ak nie pracujeme s parametrami a, b.

Po pridaní pseudohĺbky má naše stredové <u>premietanie</u> tvar:

$$(x', y', z') = \left(\frac{n}{w} x/(-z), \frac{n}{w} y/(-z), (az+b)/(-z)\right) \tag{2}$$

resp.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n/w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n/w)x \\ (n/h)y \\ az+b \\ -z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (n/w)x/(-z) \\ (n/h)y/(-z) \\ (az+b)/(-z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde $a = \dfrac{n+f}{n-f}$ a $b = \dfrac{2nf}{n-f}$, môže, ale nemusí platiť.

K tomu , aby sme boli mohli toto premietanie zapísať v maticovom tvare (čipy grafických kariet dokážu násobiť body maticami hardverovo a preto je táto operácia veľmi rýchla) museli sme prejsť k homogénnym alebo aspoň k rozšíreným afinným súradniciam. Potom môžeme maticami opísať nielen afinné ale i projektívne transformácie priestoru $\overline{E}_3$.

Projektívne transformácie sú reprezentované maticami typu 4 x 4 a afinné transformácie sú ich špeciálnymi prípadmi keď ich posledný riadok má tvar (0,0,0,1). Miesto termínu projektívna transformácia sa v PG často používa termín perspektívna transformácia.
Všimnime si, že rozšírené stredové premietanie *h* definované maticou:

$$M=\begin{pmatrix} n/w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

je priestorovou transformáciou t.j. zobrazením $\bar{E}_3 \to \bar{E}_3$. Jeho hlavný význam pre počítačovú grafiku spočíva v tom, že umožňuje pomocou pseudohĺbky porovnávať vzdialenosti bodov od pozorovateľa, čo v prípade bodov ležiacich na tom istom lúči umožňuje rozhodnúť o ich viditeľnosti.
Ďalšou jeho výhodou je fakt, že pre vyššie uvedenú voľbu parametrov *a*, *b* zobrazuje viditeľný (ihlanový) priestor do "jednotkovej kocky", presnejšie do kocky $\langle -1,1 \rangle^3$, kde možno veľmi jednoducho orezávať prečnievajúce časti objektov. Podrobná demonštrácia tohto faktu sa nachádza na obrázku 3, kde sú zobrazené všetky vrcholy zrezaného ihlana do príslušných vrcholov jednotkovej kocky. Pred zobrazovaním vrcholov zo zadnej steny, však treba najskôr vypočítať ich súradnice (priesečníky priamky s rovinou *z* = - *f*).
Tretia, snáď najdôležitejšia vlastnosť tejto transformácie vyplýva z nasledujúcej rovnosti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n/w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n/w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim M_S,$$

ktorá je ekvivalentná so vzťahom: $M_S \sim (M_{ORT} \circ M)$. Keďže projektívne transformácie sú určené homogénnymi maticami (akýmkoľvek nenulovým násobkom jednej z nich), vyplýva z posledného vzťahu, že naše stredové premietanie možno rozložiť na kompozíciu priestorovej transformácie *h* a ortoprojekciu do priemetne *z* = - *n*. Toto tvrdenie možno z hľadiska počítačovej grafiky preformulovať takto:

Priestorová transformácia *h* deformuje priestorové objekty len do takej miery, že keď sa na ne pozeráme ortografickou projekciou do roviny *z* = - *n*, vidíme to isté ako keby sme sa pozerali na netransformované objekty pôvodným stredovým premietaním.
Pri niektorých výpočtoch býva užitočné položiť $a = w/h$ (rôzne od skôr definovaného *a*) a $c = 2n/h$ (resp. $c/a = 2n/w$) a maticu M prepísať takto:

Pre <u>stredové premietanie</u> :

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} c/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{f+n}{n-f} & \dfrac{2fn}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ a k nej inverznú maticu $$\mathrm{M}^{-1}=\begin{pmatrix} a/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dfrac{n-f}{2fn} & \dfrac{n+f}{2fn} \end{pmatrix}$$

kde $x/y=a \Rightarrow x=ay; \quad -z/y=\cot g\theta/2=c \Rightarrow y=-z/c$

Potom napr. pre bod z prednej orezávacej roviny: $X\in \; z=-n \Rightarrow y=n/c \Rightarrow X=HPR$,

$x=ay=an/c \Rightarrow X=HR=(an/c;n/c;-n;1)^T$;

$\Rightarrow \mathrm{M}X=(1,1,-1,1)^T$

Pre <u>rovnobežné premietanie</u> býva matica M opísaná ako:

$$\mathrm{M}=S\left(s_x,s_y,s_z\right)T\left(-t_x,-t_{y,}\,-t_z\right)=\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & -t_xs_x \\ 0 & s_y & 0 & -t_ys_y \\ 0 & 0 & s_z & -t_zs_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ a k nej inverzná matica je

$$\mathrm{M}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1/s_y & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1/s_z & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{M}\begin{pmatrix} r \\ b \\ f \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

kde

$s_x=2/(r-l), \quad s_y=2/(t-b), \quad s_z=-2/(f-n)$

$t_x=(r+l)/2, \quad t_y=(t+b)/2, \quad t_z=(f+n)/2$

Na základe vyššie uvedených vzťahov vieme v prípade oboch premietaní – rovnobežného i stredového:

1.Viditeľný (pohľadový) objem príslušnou transformáciou

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}=\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

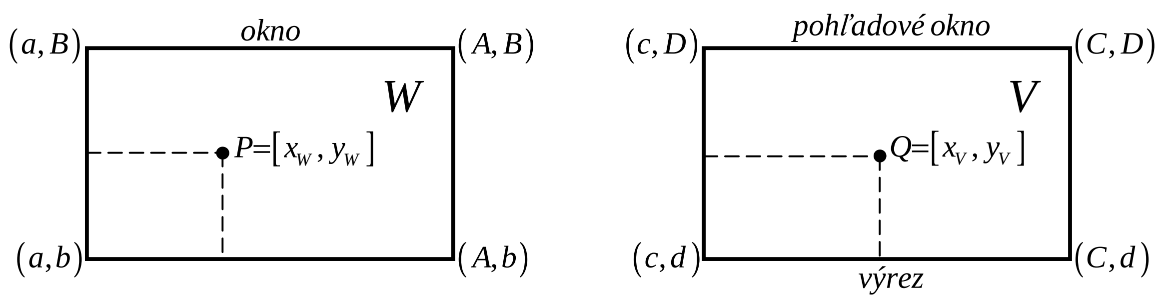
zobraziť do „jednotkovej“ kocky, tj. do kocky, ktorej všetky vrcholy majú všetky súradnice 1 alebo -1, čiže do $\langle -1,1\rangle^3$.

2. Body tohto nového viditeľného telesa čiže body $h(X), X\in \overline{E}_3$ vieme opísať v normalizovaných súradniciach a obrazy $h(O)$ nimi určených objektov efektívne orezávať.

3. Keďže normalizujúca súradnicová sústava aj u stredového premietania vznikla škálovaním mierok na súradnicových osiach snímacej súradnicovej sústavy postupne parametrami $c/a,\ c,\ \dfrac{f+n}{n-f}$ a posunutím začiatku (0,0,0,1) do nevlastného bodu $(0,0,\dfrac{2fn}{n-f},0)$ (pozri

príslušnú maticu M), pôvodné stredové premietanie sa zmenilo na kolmé premietanie v smere osi z do priemetne kolmej k osi z (tak isto ako u rovnobežného premietania). Pre realizáciu vlastného premietania pre oba typy úplne stačí „zabudnúť“ na 3.súradnicu, ale rozumnejšie je ponechať ju tam ako reprezentanta hĺbky, ktorú potrebujeme vedieť pri určovaní viditeľnosti (túto môžeme zisťovať aj v normalizovaných súradniciach, lebo normalizujúca transformácia nemá vplyv na usporiadanie objektov podľa hĺbky).

Posledným krokom zobrazovacieho procesu je:
4.Zobrazenie na pohľadové okno (viewport, záber) – ide o zobrazenie okna W v priemetni (ak tam nie je vytvorené, môžeme zaň považovať min-max box v priemetni obsahujúci priemety všetkých objektov), ktorého ľavý dolný roh má súradnice $[a,b]$ a pravý horný roh súradnice $[A,B]$ na pohľadové okno V na obrazovke, ktorého ľavý dolný roh má súradnice $[c,d]$ a pravý horný – súradnice $[C,D]$. Pretože na obrazovke by sme mali vidieť vernú kópiu toho, čo je v priemetni (zväčšeninu prípadne zmenšeninu), je prirodzené požadovať, aby toto zobrazenie zachovávalo pomery.



Ak bod $P \in W$ sa zobrazí do bodu $Q \in V$, tak z požiadavky zachovávania pomerov vyplýva, že

$$\frac{x_V - c}{C - c} = \frac{x_W - a}{A - a} \quad \wedge \quad \frac{y_V - d}{D - d} = \frac{y_W - b}{B - b} \Rightarrow x_V = c + \frac{C - c}{A - a}(x_W - a) \quad \wedge \quad y_V = d + \frac{D - d}{B - b}(y_W - b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_V = c + s_x(x_W - a)} \quad \wedge \quad \underline{y_V = d + s_y(y_W - b)} \vee \boxed{x_V = s_x x_W + p} \quad \wedge \quad \boxed{y_V = s_y y_W + q} \quad (*)$$

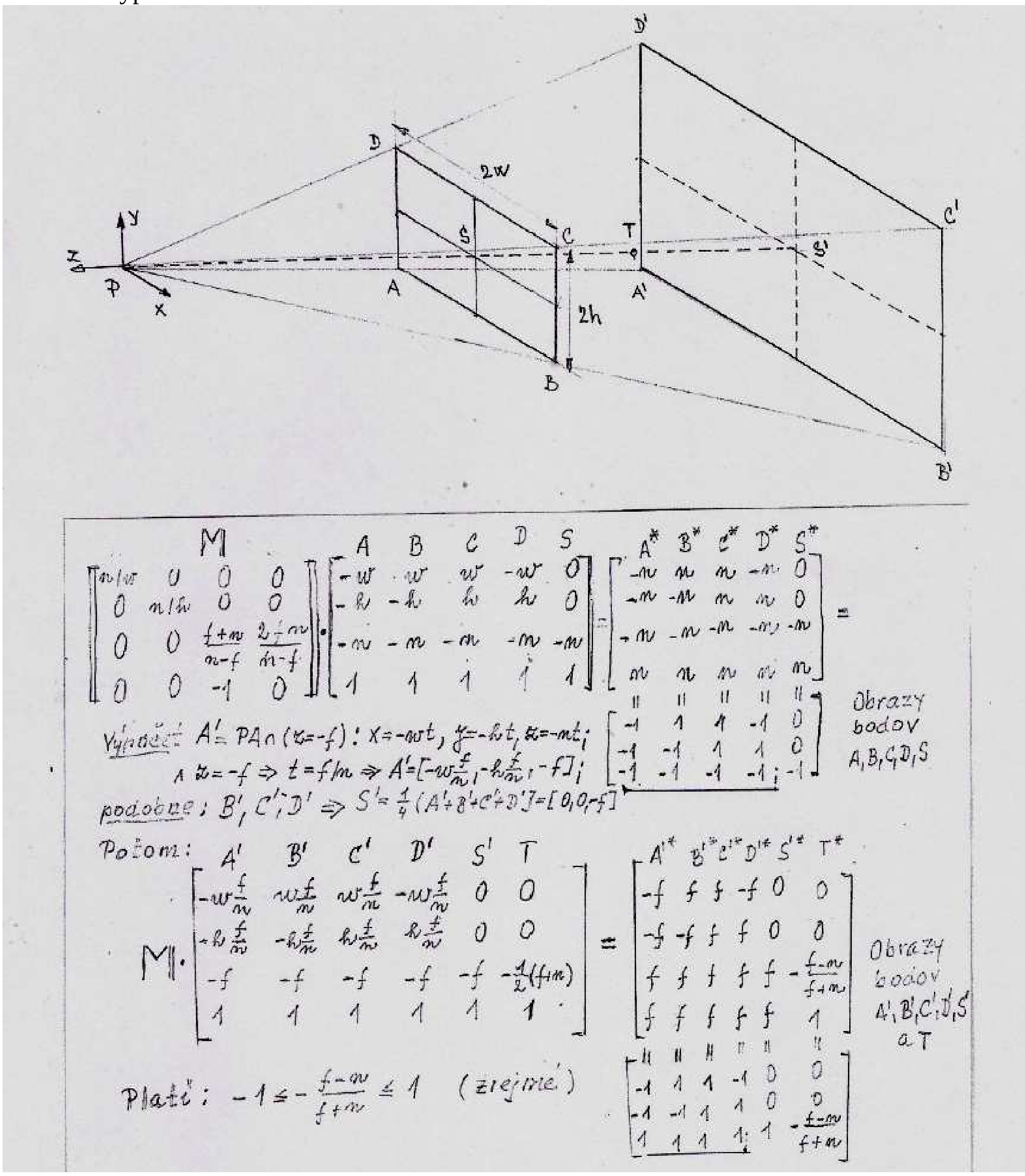
kde $p = c - s_x a$ a $q = d - s_y b$.

Tieto vzťahy možno pomocou matíc zapísať nasledovne:

$$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & p \\ 0 & s_y & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Ide o kompozíciu škálovania určeného maticou $\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a následného posunutia o vektor $(p, q, 1)^T$ určeného maticou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ilustrácia výpočtu:



Obr.3.