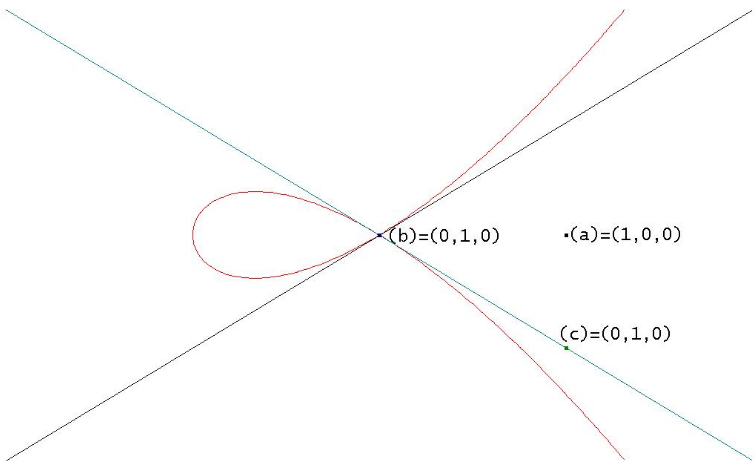
1 Trieda krivky, 1.Plückerov vzorec.

Nech $\mathbf{X}$ je krivka v projektívnej rovine P_2 definovaná rovnicou $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Nech m je stupeň krivky $\mathbf{X}$. V celom nasledujúcom paragrafe budeme predpokladať, že jedinými singulárnymi bodmi krivky $\mathbf{X}$ sú dvojnásobné body, teda uzlové body, resp. body vratu. Cieľom našich úvah je zistiť, koľkonásobným priesečníkom krivky a prvej pláry bodu vo všeobecnej polohe je každý takýto bod. To nám umožní zistiť, koľko dotyčníc je možné viesť k takejto krivke z bodu vo všeobecnej polohe.

Nech teda $(b) = (b_0, b_1, b_2)$ je **uzlovým bodom** krivky $\mathbf{X}$. Vyberme súradnicovú sústavu tak, aby $(b) = (0, 0, 1)$, bod $(c) = (0, 1, 0)$ ležal na jednej z dvoch dotyčníc v bode (b) a bod $(a) = (1, 0, 0)$ neležal ani na krivke ani na dotyčnici v bode (b).



Vypočítajme, koľkonásobým priesečníkom $\mathbf{X}$ a $P^1_{(a)}$ je bod (b). Formu F zapíšme zostupne podľa mocnín premennej x_2, teda

$$F = u_0 x_2^m + u_1 x_2^{m-1} + ... + u_{m-1} x_2 + u_m,\ u_i = u_i(x_0, x_1), \deg u_i = i.$$

Fakt, že bod $(b) = (0, 0, 1) \in \mathbf{X}$ je ekvivalentný s tým, že $u_0 = 0$. Keďže je dvojnásobný (t.j. prvé parciálne derivácie F v ňom sú nulové) je $u_1 = 0$.

Zväzok dotyčníc v bode $(b) = (0,0,1)$ je popísaný rovnicou

$$\varkappa_a \quad : \quad \left(\Sigma \frac{\partial F(b)}{\partial x_i} x_i\right)^2 = 0, \text{ resp.ekvivalentne}$$
$$\varkappa_a \quad : \quad \left(\Sigma \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} b_i\right)^{m-2} = \frac{\partial^{m-2} F(x)}{\partial x_2^{m-2}} = u_2(x_0, x_1) = 0.$$

Kedˇže zväzok dotyčníc v bode (b) má rovnicu $x_0.(ax_0 + bx_1) = 0$ pre určité nenulové $a, b \in k$ (pozri obrázok vyššie), má definujúci polynóm F tvar

$$F = x_0.(ax_0 + bx_1)x_2^{m-2} + ... + u_{m-1}x_2 + u_m.$$

Venujme sa teraz prvej poláre $P^1_{(a)}$bodu $(a) = (1,0,0)$. Táto je podl̆a definície popísaná rovnociu

$$P^1_{(a)} \quad : \quad \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} x_i\right)^{m-1} = 0, \text{ resp.}$$
$$P^1_{(a)} \quad : \quad \left(\Sigma \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} a_i\right) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_0} = (2ax_0 + bx_1)x_2^{m-2} + ... = 0.$$

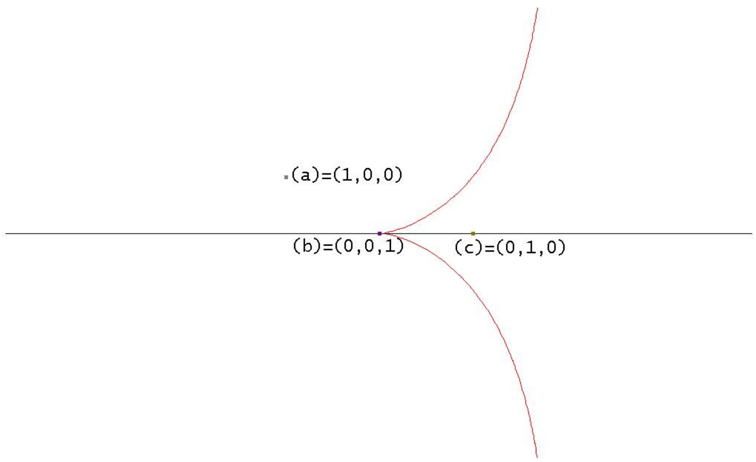
Bod $(b) = (0,0,1) \in \mathbf{X} \cap P^1_{(a)}$. S využitím Bezoutovej vety vypočítajme jeho násobnosť v tomto prieniku. Bod (b) je dvojnásobným bodom krivky $\mathbf{X}$ podl̆a predpokladu. Kedˇže

$$\frac{\partial^2 F(b)}{\partial x_0^2} = 2a \neq 0$$

teda jedna prvá parciálna derivácia definujúceho polynómu poláry $P^1_{(a)}$ v bode (b) je rôzna od nuly, je bod (b) regulárnym bodom prvej poláry bodu (a). Z doteraz odvodeného vyplýva, že dotyčnice ku krivke $\mathbf{X}$ v bode (b) sú popísané rovnicami $x_0 = 0$ a $ax_0 + bx_1 = 0$ a jediná dotyčnica k $P^1_{(a)}$ v bode (b) rovnicou $2ax_0 + bx_1 = 0$. Krivky $\mathbf{X}$ a $P^1_{(a)}$ nemajú teda v bode (b) spoločnú dotyčnicu. Na základe Bezoutovej vety teda platí

Veta 1 *Uzlový bod krivky (majúcej len dvojnásobné singularity) je dvojnásobným priesečníkom danej krivky a prvej poláry bodu, ktorý neleží na krivke ani na dotyčnici v tomto dvojnásobnom bode.*

Nech teraz bod $(b) = (b_0, b_1, b_2)$ je **bodom vratu** krivky $\mathbf{X}$. Vyberme súradnicovú sústavu opäť tak, aby $(b) = (0,0,1)$, bod $(c) = (0,1,0)$ ležal na



dvojnásobnej dotyčnici v bode (b) a bod $(a) = (1, 0, 0)$ neležal ani na krivke ani na dotyčnici v bode (b) (pozri obrázok nižšie).

Úvahou identickou z predchádzajúcej časti sa dopracujeme k poznaniu,že polynóm F má v takejto situácii tvar

$$F = x_0^2.x_2^{m-2} + ... + u_{m-1}x_2 + u_m.$$

a prvá polára bodu (a) je daná rovnicou

$$P^1_{(a)} : \left(\Sigma \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} a_i\right) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_0} = 2x_0 x_2^{m-2} + ... = 0$$

Je teda bod $(b) \in \mathbf{X} \cap P^1_{(a)}$ dvojnásobným bodom $\mathbf{X}$, regulárnym bodom $P^1_{(a)}$, pričom $\mathbf{X}$ a $P^1_{(a)}$ majú v bode (b) jednu spoločnú dotyčnicu. Platí teda

Veta 2 *Bod vratu krivky* $\mathbf{X}$ *(majúcej len dvojnásobné singularity) je trojnásobným priesečníkom danej krivky a prvej poláry bodu, ktorý neleží na krivke ani na dotyčnici v tomto dvojnásobnom bode.*

Keďže počet spoločných bodov krivky $\mathbf{X}$ stupňa m a prvej poláry bodu je $m(m-1)$, na základe doteraz dokázaného je platné tvrdenie

Veta 3 *Počet regulárnych priesečníkov krivky* $\mathbf{X}$ *stupňa* m *(majúcej len dvojnásobné singularity) s prvou polárou bodu vo všeobecnej polohe je*

$$m(m-1) - 2u - 3v$$

kde u označuje počet uzlových bodov a v počet bodov vratu krivky **X**.

Označme písmenom t počet dotyčníc vedených ku krivke **X** stupňa m (majúcej len dvojnásobné singularity) z bodu vo všeobecnej polohe vzhľadom na **X**. Číslo t sa nazýva **trieda krivky** X. Záverom doteraz dokázaných faktov je teda nasledujúci **1. Plückerov vzorec :**

Veta 4

$$t = m(m-1) - 2u - 3v$$