# 1 Kužeľosečky - prehľad polohových vlastností (2.časť)

Ďalšou zaujímavou vlastnosťou súvisiacou s kužeľosečkami sú združené smery (resp. priemery). Nech je daná kužeľosečka $C$ (regulárna) rovnicou (1). Nech $\overline{u} = [u, v]$ generuje neasymptotický smer v rovine. Nech $R = [x^R,\ y^R]$ je ľubovoľný bod v $E_2$ a $p = R + t\overline{u}$ je priamka so smerovým vektorom $\overline{u}$ idúca bodom $R$.Predpokladajme, že priamka $p$ pretína kužeľosečku v dvoch rôznych bodoch $P_1$ a $P_2$, ktoré odpovedajú parametrom $t_1$ a $t_2$ na priamke $p$. Je známe, že pre stred $X$ tetivy $P_1P_2$ platí

$$X = R + \frac{t_1 + t_2}{2}\overline{u}.$$

Keďže parametre $t_1$ a $t_2$, definujúce spoločné body $p$ a $C$ sú riešenia rovnice (2), pre parameter bodu $X$ na $p$ platí

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{u(ax^R + by^R + d) + v(bx^R + cy^R + e)}{au^2 + 2buv + cv^2}.$$

Nechávame na čitateľovi dôkaz skutočnosti, že pre súradnice $x$, $y$ bodu $X$ plaí :

$$\begin{aligned} x &= -u\alpha + (-bu - cv)\beta \\ y &= -v\alpha + (au + bv)\beta, \end{aligned}$$

kde $\alpha = \frac{du+ev}{au^2+2buv+cv^2}$ a $\beta = \frac{-rv+su}{au^2+2buv+cv^2}$, teda skutočnosť, že bod $X$ leží na priamke $q_{\overline{u}}$danej parametricky

$$\begin{aligned} x &= -u\alpha + (-bu - cv)t \\ y &= -v\alpha + (au + bv)t, \end{aligned}$$

resp. všeobecnou rovnicou

$$q_{\overline{u}} : (au + bv)x + (bu + cv)y + (du + ev) = 0$$

Vidíme, že uvedená skutočnosť platí pre ľubovoľný výber bodu $R$, teda platí pre stredy všetkých rovnobežných tetív. Priamku $q_{\overline{u}}$ nazývame **priemerom kužeľosečky $C$ združeným so smerom $\overline{u}$**.Dokázali sme teda tvrdenie

($T6$) Stredy všetkých tetív kužeľosečky rovnobežných s vektorom $\overline{u}$ ležia na priemere kužeľosečky združenom so smerom $\overline{u}.$

K ľubovoľnému neasymptotickému smeru v rovine existuje teda priemer združený s týmto smerom. Označme smerový vektor tejto priamky ako $\overline{w}.$ Je zrejmé, že

$$\overline{w} = [-bu - cv, au + bv].$$

Pokiaľ tento smer nie je asymptotický, vieme k nemu nájsť združený priemer. Kedy je teda smer generovaný vektorom $\overline{w}$ asymptotický? Práve vtedy, keď

$$a(-bu-cv)^2+2b(-bu-cv)(au+bv)+c(au+bv)^2=0$$

teda práve vtedy, keď

$$(ac-b^2)(au^2+2buv+cv^2)=0$$

teda práve vtedy, keď $ac-b^2=0$ (keďže smer generovaný vektorom $\overline{u}=[u,v]$ nie je asymptotický).

Nech teraz $ac-b^2\neq 0$, teda smer generovaný vektorom $\overline{w}$ nie je asymptotický. Hľadajme priemer kužeľosečky $C$ združený s týmto smerom. Z doteraz povedaného vyplýva, že

$$q_{\overline{w}}:(a(-bu-cv)+b(au+bv))x+(b(-bu-cv)+c(au+bv))y+$$

$$+d(-bu-cv)+e(au+bv)=0,$$

teda

$$q_{\overline{w}}:v(b^2-ac)x-u(b^2-ac)y+\text{absolútny člen}=0,$$

teda

$$q_{\overline{w}}:vx-uy+\text{absolútny člen}=0,$$

keďže $ac-b^2\neq 0$. Je teda vektor $\overline{u}$ smerovým vektorom priemeru $q_{\overline{w}}$.

Priemery $q_{\overline{u}}$ a $q_{\overline{w}}$ nazývame **združenými priemermi kužaľosečky** $C$. Z doteraz povedaného vyplýva nasledovný záver.

Ak $ac-b^2=0$ a vektor $\overline{u}=[u,v]$ nie je asymptotický. Potom priemer $q_{\overline{u}}$ združený so smerom $\overline{u}$ má asymtotický smer a všetky priemery sú teda rovnobežné s týmto smerom.

Ak $ac-b^2\neq 0$ a vektor $\overline{u}=[u,v]$ nie je asymptotický. Potom priemer združený so smerom $\overline{u}$ má smer generovaný vektorom $\overline{w}$ (ktorý nie je asymptotický) a priemer združený so smerom $\overline{w}$ je rovnobežný s vektorom $\overline{u}$.

Jedno zaujímavé využitie združených priemerov súvisí s dotykovými úlohami. Majme teda kužeľosečku $C$ danú rovnicou (1) a neasymptotický smer $\overline{u}$. Hľadajme dotyčnicu danej kužeľosečky rovnobežnú s vektorom $\overline{u}$. Zozstrojme priemer $q_{\overline{u}}$ združený s týmto smerom a prienik tejto priamky s kužeľosečkou $C$. Takýto bod je stredom tetivy rovnobežnej s vektorom $\overline{u}$. Keďže táto tetiva je jediný bod, je priamka idúca týmto bodom a rovnobežná s vektorom $\overline{u}$ dotyčnicou danej kužeľosečky.

**Prklad 1** *Nájdite dotyčnice kužeľosečky $C:x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0$ rovnobežné s sou x (teda vektorom $\overline{u}=[1,0]$).*

*Riešenie : Matica danej kužeľosečky je*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

*teda kužeľosečka je regulárna. Nájdime asymptotické smery, teda riešme rovnicu*

$$u^2 + uv + v^2 = 0,$$

*resp.*

$$(\frac{u}{v})^2 + \frac{u}{v} + 1 = 0.$$

*Vidíme, že také reálne* $u, v$ *neexistujú, kužeľosečka teda nemá asymptotické smery. Hľadajme dotyčnice so smerovým vektorom* $\overline{u} = [1, 0]$. $q_{\overline{u}} : x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$ *je priemer združený so smerom* $\overline{u}$. *Pri hľadaní spoločných bodov* $q_{\overline{u}}$ *a* $C$ *riešim nasledovnú kvadratickú rovnicu :*

$$3x^2 + 2x - 5 = 0.$$

*Vidíme, že prvými súradnicami spoločných bodov sú* $-\frac{5}{3}$ *a* 1. *Spoločnými bodmi* $q_{\overline{u}}$ *a* $C$ *sú teda body*

$$R_1 = [1, -4] \text{ a } R_2 = [-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}]$$

*a dotyčnice v nich sú priamky dané všeobecnými rovnicami*

$$y + 4 = 0 \quad a \quad 3y - 4 = 0.$$

*To sú teda dotyčnice kužeľosečky* $C$ *so smerovým vektorom* $\overline{u} = [1, 0]$.

Z doteraz povedaného môžeme urobiť záver, týkajúci sa klasifikácie regulárnych kužeľosečiek.

Nech $\mathbf{ac - b^2 = 0}$. Táto kužeľosečka má jediný asymptotický smer a nemá stred. Takúto regulárnu kužeľosečku nazýveme **parabola.**

Nech $\mathbf{ac - b^2 > 0}$. Táto kužeľosečka nemá asymptotický smer a má jediný stred. Takúto regulárnu kužeľosečku nazýveme **elipsa.**

Nech $\mathbf{ac - b^2 < 0}$. Táto kužeľosečka má dva rôzne asymptotické smery a má jediný stred. Takúto regulárnu kužeľosečku nazýveme **hyperbola.**