1 Spoločné body algebraických rovinných kriviek. Rezultant.

Nech sú v projektívnej rovine P_2 dané algebraické rovinné krivky $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ rovnicami :

$$\mathbf{X} : F(x_0, x_1, x_2) = 0, \ \ \deg \mathbf{X} = m,$$

$$\mathbf{Y} : G(x_0, x_1, x_2) = 0, \ \ \deg \mathbf{Y} = n.$$

Hľadajme spoločné body týchto kriviek. Bez obmedzenia všeobecnosti môžeme predpokladať že bod $(o_2) = (0, 0, 1)$ nie je bodom žiadnej z uvedených kriviek. Pre definujúce formy F a G to znamená, že majú nasledovný tvar

$$F = u_0 x_2^m + u_1 x_2^{m-1} + ... + u_{m-1} x_2 + u_m, \ u_i = u_i(x_0, x_1), \deg u_i = i, \ u_0 \neq 0,$$

$$G \ = \ v_0 x_2^n + v_1 x_2^{n-1} + ... + v_{n-1} x_2 + v_n, \ \ v_i = v_i(x_0, x_1), \ \deg v_i = i, \ v_0 \neq 0$$

Nech bod $(a) = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, teda trojica (a_0, a_1, a_2) je riešením nasledovnej dvojice homogénnych rovníc

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0 \ \text{ a } G(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Vynásobme prvú rovnicu postupne výrazom $x_2^{n-1}, x_2^{n-2}, ..., x_2, 1$ a druhú rovnicu výrazom $x_2^{m-1}, x_2^{m-2}, ..., x_2, 1$.Dostávame $n + m$ homogénnych rovníc o $n + m$ neurčitých $x_2^{m+n-1}, x_2^{m+n-2}, ..., x_2, 1$ tvaru

$$\begin{aligned}
u_0 x_2^{m+n-1} + u_1 x_2^{m+n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_m x_2^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \\
u_0 x_2^{m+n-2} + u_1 x_2^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots + u_m x_2^{n-2} \ldots\ldots\ldots &= 0 \\
\\
\\
u_0 x_2^m + u_1 x_2^{m-1} + ... + u_{m-1} x_2 + u_m &= 0 \\
v_0 x_2^{m+n-1} + v_1 x_2^{m+n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n x_2^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \\
v_0 x_2^{m+n-2} + v_1 x_2^{m+n-3} + \ldots\ldots\ldots v_n x_2^{n-2} \ldots\ldots\ldots &= 0 \\
\\
v_0 x_2^n + v_1 x_2^{n-1} + ... + v_{m-1} x_2 + v_n &= 0
\end{aligned}$$

Keďže nenulová trojica (a_0, a_1, a_2) je prirodzene riešením aj tohoto systému, je posledný systém rovníc riešiteľný, teda determinant matice systému je rovný nule. Označme tento determinant $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

Definícia 1 *Determinant* $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *nazývame* ***rezultantom*** *kriviek* $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$ *vyhľadom na premennú* x_2.

Platí teda

$$\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & . & . & . & u_m & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & u_0 & u_1 & . & . & . & u_m & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & & & & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & u_0 & . & . & . & u_m \\ v_0 & v_1 & . & . & . & . & v_n & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & v_0 & v_1 & . & . & . & . & v_n & 0 & . & . & 0 \\ . & & & & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & & & & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & v_0 & . & . & . & . & v_n \end{vmatrix}$$

O rezultante kriviek $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ platí nasledujúca veta.

Veta 2 *Rezultant* $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *je alebo identicky rovný nule, alebom je to homogénny polynóm v* x_0, x_1 *stupňa* $m.n$, *teda* $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{R}(x_0, x_1)$.

Dôkaz. Ľubovoľný nenulový člen z $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ má tvar

$$L = u_{r_1 s_1}.u_{r_2 s_2}...u_{r_n s_n}\ .v_{r_{n+1} s_{n+1}}.v_{r_{n+2} s_{n+2}}...v_{r_{n+m} s_{n+m}},$$

pričom $(r_1, ..., r_n, r_{n+1}, ..., r_{n+m})$ je permutácia množiny $(1, ..., n, n+1, ..., n+m)$,$(s_1, ..., r_{n+m})$ je permutácia množiny $(1, ..., n+m)$

Pre stupeň v L vystupujúcich členov platí

$$\deg u_{r_i s_i} = s_i - r_i,\ \ \deg v_{r_{n+i} s_{n+i}} = (s_{n+i} - r_{n+i}) + m,\ \text{teda}$$

$$\deg L = \sum_{i=1}^{n}(s_i - r_i) + \sum_{i=1}^{m}((s_{n+i} - r_{n+i}) + m = m.n$$

■

O význame rezultantu pre hľadanie spoločných bodov kriviek $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ hovorí nasledujúca veta.

Veta 3 *Ak bod* $(a) = (a_0, a_1, a_2)$ *je spoločným bodom kriviek* $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$, *potom* $\mathbf{R}(a_0, a_1) = 0$. *Ak* $\mathbf{R}(b_0, b_1) = 0$ *pre určité* $b_0, b_1 \in k$, *potom existuje* $b_2 \in k$ *také, že pre bod* $(b) = (b_0, b_1, b_2)$ *platí* $(b) \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$.

Dôkaz. Prvá časť vety je dokázaná vyššie.Nech teraz $\mathbf{R}(b_0, b_1) = 0$ pre určité $b_0, b_1 \in k$. Existuje preto nenulová $n + m$ tica $(k_1, k_2\ ,...,k_n, k_{n+1}, ..., kn + m)$ prvkov poľa k, že platí :

$$k_1 u_0 + ...\ .... + k_{n+1} v_0 .... \quad = \quad 0$$

$$k_1 u_1 + k_2 u_0. + ... + k_{n+1} v_1 + k_{n+2} v_o .... \quad = \quad 0$$

$$.$$

$$k_n u_n + ... + k_{n+m} v_m = 0$$

Vynásobme postupne prvú rovnicu členom x_2^{m+n-1}, druhú členom x_2^{m+n-2}, poslednú jednotkou a takto vynásobené ich spočítajme. Po jednoduchých úpravách dostávame

$$F(b_0, b_1, x_2)(k_1 x_2^{n-1} + ... + k_n) = -G(b_0, b_1, x_2)(k_{n+1} x_2^{m-1} + ... + k_{n+m})$$

Polynóm $F(b_0, b_1, x_2)$ (jednej neurčitej x_2 stupňa m nad algebraicky uzavretým poľom) sa dá vyjadriť ako súčin m (nie nutne rôznych) lineárnych činiteľov. Každý z nich musí vystupovať aj v rozklade polynómu na pravej strane rovnosti, teda minimálne jeden v rozklade polynómu $G(b_0, b_1, x_2)$. Existuje teda prvok $b_2 \in k$ taký, že $F(b_0, b_1, b_2) = G(b_0, b_1, b_2) = 0$. ∎

Príklad 4 *Hľadajme spoločné body strofoidy a paraboly, teda algebraikých rovinných kriviek daných rovnicami (nehomogénnymi, resp. homogénnymi)*

$$\begin{aligned} X &: \; x^3 + x^2 - y^2 = 0, \quad x_1^3 + x_0 x_1^2 - x_0 x_2^2 = 0 \\ Y &: \; x^2 - y = 0, \quad x_1^2 - x_0 x_2 = 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že bod $(0, 1, 0) \notin \mathbf{X}$ $(\notin \mathbf{Y})$*. Môžeme teda vyjadriť rezulnant* $\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *vzhľadom na premennú* x_1*.*

$$\mathbf{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & 0 & -x_0x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 & x_0 & 0 & -x_0x_2^2 \\ 1 & 0 & -x_0x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_0x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_0x_2 \end{vmatrix} = (x_0x_2)^2(x_0^2 - 3x_0x_2 + x_2^2).$$

Koreňmi rezultantu sú teda nasledovné dvojice (x_0, x_2)*.*

$$\begin{aligned} &(1, 0) - \textit{dvojnásobný} \\ &(0, 1) - \textit{dvojnásobný} \\ &(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) - \textit{jednoduchý} \\ &(1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) - \textit{jednoduchý} \end{aligned}$$

Koreňom rezultantu odpovedajú spoločné body kriviek $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$ *s príslušnými násobnosťami. Spoločnými bodmi kriviek* $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$ *sú teda body :*

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0) - \textit{dvojnásobný} \\ &(0, 0, 1) - \textit{dvojnásobný} \\ &(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) - \textit{jednoduchý} \\ &(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) - \textit{jednoduchý} \end{aligned}$$

Vidíme, že krivky $\mathbf{X}$ *a* $\mathbf{Y}$ *(tretieho a druhého stupňa) majú spoločných práve 6 bodov. Tento výsledok platí všeobecne. Dôkaz nasledovnej vety (Bezoutovej) urobíme neskoršie metódami lokálnej algebry.*

Veta 5 *(Bezoutova veta). Dve rovinné algebraické krivky stupňov m a n, ktoré nemajú spoločnú súčasť, majú spoločných práve $m.n$ bodov, ak sa každý bod počíta s príslušnou násobnosťou. Priesečník, ktorý je na jednej krivke r-násobný, na druhej $s-$.násobný a v ktorom majú krivky spoločných h dotyčníc, je priečníkom $(r.s+h)-$ násobným.*