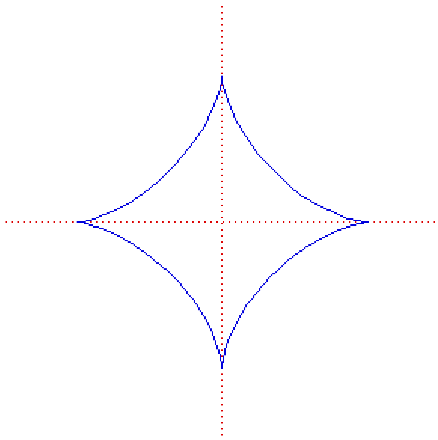
O čom je diferenciálna geometria?

Diferenciálna geometria je najmä o krivkách a plochách všeobecného tvaru, teda krivkách a plochách, ktoré sú zadané ľubovoľnými, nielen algebraickými rovnicami. Skúmame ich pomocou derivácií.

Príkladom takej krivky je povedzme *astroida* s parametrickým vyjadrením

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle:$$



(Obrázok je prevzatý zo stránky http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/%7Ehistory/Curves/Astroid.html)

Krivka sa skladá zo štyroch oblúkov, ktoré sú definované na intervaloch $\langle 0, \pi/2 \rangle$, $\langle \pi/2, \pi \rangle$, ... Číslo a je vzdialenosť začiatku sústavy súradníc od priesečníkov krivky so súradnicovými osami. Vyjadruje „veľkosť“ astroidy.

Okrem iného sa o tejto krivke možno v kurze dozvedieť, že *dotyčnica* v ľubovoľnom bode

$$P(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t), \ t \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi,$$

má parametrické rovnice

$$x = a\cos^3 t - u\cos t$$
$$y = a\sin^3 t + u\sin t$$

(Parametrom na priamke je číslo u, číslo t určuje, v ktorom bode krivky sa dotyčnica počíta.) A trochou analytickej geometrie sa teraz už ľahko môžeme presvedčiť, že astroida má túto zaujímavú vlastnosť:

Na každej dotyčnici astroidy má úsečka ohraničená priesečníkmi dotyčnice so súradnicovými osami rovnakú dĺžku a.

Platí aj obrátené tvrdenie: *Všetky úsečky s dĺžkou $a > 0$, ktorých krajné body ležia na súradnicových osiach, „obaľujú“ astroidu.*

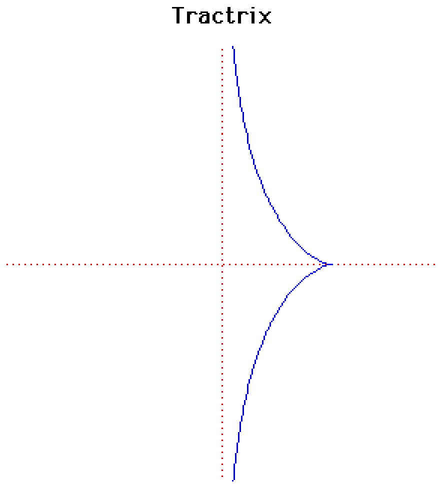
Charakteristickým údajom pre krivku je *krivosť*, ktorá vyjadruje veľkosť jej „zakrivenia“ v jednotlivých bodoch. Ukáže sa, že priamka má v každom bode krivosť rovnú 0 a kružnica s polomerom r má všade rovnakú krivosť $1/r$. Trochu namáhavý výpočet dá, že krivosť astroidy v bode $P(t)$ je číslo

$$k(t) = \frac{1}{3a|\cos t \sin t|}.$$

Teraz sa pomerne ľahko možno bežnými postupmi skúmania priebehu funkcie presvedčiť, že v strede každého zo štyroch oblúkov astroidy je krivosť krivky minimálna a smerom ku krajným bodom oblúka rastie do $+\infty$. Dobre to súhlasí s obrázkom.

Spomeňme ešte jednu zaujímavú krivku, a to *traktrix*. Jej parametrické vyjadrenie je

$$x = a\sin t, \quad y = a[\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t], \quad t \in (0, \pi):$$



(Obrázok je prevzatý zo stránky http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/%7Ehistory/Curves/Tractrix.html)

Krivka sa skladá z dvoch navzájom osovo súmerných oblúkov, ktoré sú určené hodnotami parametra $t \in (0, \pi/2\rangle$ a $t \in \langle \pi/2, \pi)$. Číslo a je vzdialenosť začiatku sústavy súradníc od priesečníku krivky s osou x. Jej dotyčnica má podobnú vlastnosť, akú sme videli pri astroide:

V každom bode traktrixy má úsečka na dotyčnici od bodu dotyku po priesečník s osou y rovnakú dĺžku a.

Traktrix má veľmi zaujímavý vzťah k plochám. V priestore otáčajme „horný“ oblúk traktrix okolo osi y pre všetky hodnoty uhla otáčania v intervale $\langle 0°, 360°\rangle$. Vzniknutá rotačná plocha má tvar „nekonečnej trúby“, ktorá sa neobmedzene zužuje pre y idúce do $+\infty$. Nazýva sa *pseudosféra*. Jej významná vlastnosť je, že má konštantnú krivosť rovnú $-1/a^2$ (tzv. *Gaussovu krivosť*, ktorú budeme v kurze definovať pre ľubovoľnú plochu).

Pre porovnanie s najjednoduchšími plochami, *rovina* má v každom bode Gaussovu krivosť 0, *guľová plocha* s polomerom r má Gaussovu krivosť $1/r^2$. Vidíme teda, že z hľadiska Gaussovej krivosti sa pseudosféra podobá guľovej ploche, ich krivosti sa odlišujú práve znamienkom. Ak do vzorca pre Gaussovu krivosť guľovej plochy dosadíme za r hodnotu $\mathrm{i}a$ (i je imaginárna jednotka z komplexných čísiel), dostaneme Gaussovu krivosť pseudosféry! Táto formálna algebraická hra má mimoriadne dôležitý geometrický obsah. Dá sa totiž dokázať – ide to však ďaleko za rámec kurzu – že na pseudosfére sa realizuje geometria časti Lobačevského neeuklidovskej roviny. (Úsečkou s danými krajnými bodmi v tejto geometrii je najkratšia krivka ležiaca na pseudosfére spájajúca dané body.) V histórii matematiky bola táto vlastnosť pseudosféry dôležitým momentom v procese uznania Lobačevského geometrie ako teoreticky plnohodnotnej alternatívy k bežnej euklidovskej geometrii.

Charakteristickou vlastnosťou Lobačevského planimetrie je nejednoznačnosť rovnobežky: Každým bodom, ktorý neleží na danej priamke, možno viesť (aspoň) dve priamky, ktoré nepretínajú danú priamku. Pre Lobačevského rovinu resp. jej ohraničenú časť možno sformulovať a dokázať nečakané vlastnosti, napríklad

- Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je menší ako priamy uhol.
- Existuje trojuholník, ktorý nemá opísanú kružnicu (lebo osi jeho strán sa nepretnú).