RNDr. LEO BOČEK, CSc.

ANALYTICKÁ GEOMETRIA KUŽEĽOSEČIEK

pre III. ročník gymnázií
s rozšíreným vyučovaním matematiky

1978
SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATEĽSTVO
BRATISLAVA

HISTORICKÝ ÚVOD

Kužeľosečkami sa zaoberali učenci už v staroveku a za objaviteľa kužeľosečiek považujeme Menechma, ktorý žil okolo roku 350 pr. n. l. Menechmos použil niektoré kužeľosečky pri riešení jedného z klasických problémov geometrie, tzv. delského /podľa mesta Delos/ problému zdvojnásobenia /objemu/ kocky, ktorý nás privádza k riešeniu algebraickej rovnice $2x^3 = a^3$. Menechmos riešil túto úlohu pomocou priesečníkov kužeľosečiek $y = 2x^2$ a $xy = a^3$. Pritom už vedel, že každú kužeľosečku možno dostať ako prienik rotačnej kužeľovej alebo valcovej plochy a roviny. Pojmy „elipsa", „parabola" a „hyperbola" zaviedol vo svojich ôsmich knihách o kužeľosečkách Apollonios z Pergy /okolo roku 200 pr. n. l./, ktorý už poznal združené priemery, asymptoty a ohniská kužeľosečky. Ďalší rozkvet teórie kužeľosečiek nastáva až v 17. storočí n. l. a súvisí s objavmi J. Keplera /1571 - 1630/ a I. Newtona /1643 - 1727/, ktoré sa týkali pohybu planét. Analytická geometria kužeľosečiek sa objavila vlastne so vznikom samotnej analytickej geometrie. Základy tejto teórie vybudoval René Descartes /1596 - 1650/ vo svojom spise Géométrie, v ktorom už nazerá na niektoré algebraické rovnice druhého stupňa ako na rovnice kužeľosečiek. Z latinského prepisu jeho mena /Cartesius/ pochádza pojem karteziánska sústava súradníc. Aj ďalší francúzsky matematik toho obdobia, Pierre de Fermat /1602 - 1665/, napísal krátky spis, v ktorom zachytil počiatky analytickej geometrie. Dielo však vyšlo až po Fermatovej smrti, takže priorita objavu pripadla Descartesovi. Analytická geometria kvadrík sa začína u Leonharda Eulera /1707 - 1783/; úplnú klasifikáciu kvadrík podal Augustin L. Cauchy /1789 - 1857/.

Poznámka. Časti, označené na okraji zvislou čiarou, možno vynechať, prípadne uložiť na samostatné štúdium.

Výslovnosť: Newton - ňjútn, René Descartes - rené dekart, Pierre de Fermat - pjér d ferma, Euler - ojler, Cauchy - koši

I. ZÁKLADNÉ POJMY ANALYTICKEJ GEOMETRIE LINEÁRNYCH ÚTVAROV

1. Karteziánska a lineárna sústava súradníc; rovnica priamky

Pri analytickom štúdiu kužeľosečiek, t.j. pri štúdiu vlastností kužeľosečiek pomocou súradníc, sa opierame o vedomosti, ktoré sme získali v analytickej geometrii lineárnych útvarov. Pripomeňme si stručne tie základné vzťahy, ktoré budeme ďalej potrebovať.

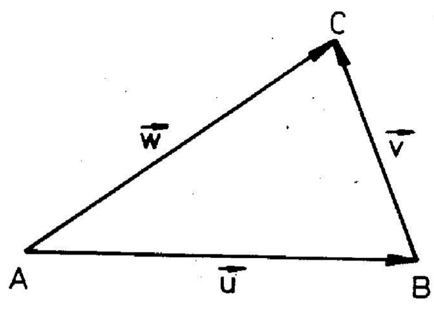
Vieme, že v euklidovskej rovine môžeme sčítať bod A s vektorom $\vec{u}$ zo zamerania roviny a výsledok sčítania je bod B tejto roviny /obr. 1/; výkon zapisujeme v tvare

$$B = A + \vec{u}.$$

Obrátene, bod A spolu s bodom B /v tomto poradí/ určujú práve jeden taký vektor $\vec{u}$, že platí $B = A + \vec{u}$; píšeme

$$\vec{u} = B - A$$

a hovoríme, že vektor $\vec{u}$ je rozdiel bodov B a A. Výkony sčítania bodu a vektora a odčítania bodov spĺňajú dve navzájom ekvivalentné podmienky /obr. 1/:



Obr. 1

$$\left(A + \vec{u}\right) + \vec{v} = A + \left(\vec{u} + \vec{v}\right),$$

$$\left(B - A\right) + \left(C - B\right) = C - A.$$

Ďalej vieme, že ku každým dvom vektorom $\vec{u}$, $\vec{v}$ zo zamerania euklidovskej roviny je priradené reálne číslo $\vec{u}.\vec{v}$, tzv. skalárny súčin daných vektorov, a to tak, že sú splnené podmienky

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u},$$

$$\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right)\,.\,\vec{w} = a\left(\vec{u}\,.\,\vec{w}\right) + b\left(\vec{v}\,.\,\vec{w}\right)$$ /a, b sú reálne čísla/

$$\vec{u} \neq \vec{o} \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0.$$

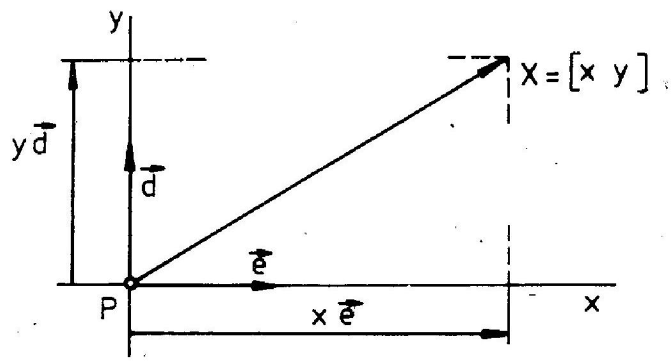
Číslo $\|u\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ je dĺžka vektora $\vec{u}$ a vzdialenosť $\overline{AB}$ bodov A, B sa rovná $\|B - A\|$. Pre uhol γ nenulových vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ platí vzťah

$$\cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Teda nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ sú navzájom kolmé práve vtedy, keď ich skalárny súčin je nulový.

Karteziánska sústava súradníc je v euklidovskej rovine určená bodom P, tzv. začiatkom, a usporiadanou dvojicou $\vec{e}, \vec{d}$ navzájom kolmých vektorov, ktoré sú navyše jednotkové, t. j. majú dĺžku jeden /obr. 2/. Každý vektor $\vec{u}$ zo zamerania danej roviny možno práve jedným spôsobom napísať v tvare

$$\vec{u} = u\vec{e} + v\vec{d};$$



Obr. 2

usporiadanú dvojicu (u, v) reálnych čísel nazývame súradnicami vektora $\vec{u}$ vzhľadom na bázu $\{\vec{e}, \vec{d}\}$ zamerania našej roviny. Každý bod X roviny možno jednoznačne napísať v tvare

$$X = P + x\vec{e} + y\vec{d};$$

týmto vzťahom sa hneď definujú karteziánske súradnice x, y bodu X vzhľadom na zvolenú karteziánsku sústavu súradníc $\{P, \vec{e}, \vec{d}\}$. Kým budeme pracovať len s jednou sústavou súradníc, nebudeme musieť zdôrazňovať, na ktorú sústavu súradnice vzťahujeme, a budeme len stručne písať $\vec{u} = (u, v)$, $X = [x, y]$, pričom súradnice vektorov budeme písať do okrúhlych /malých/ zátvoriek a súradnice bodov do hranatých zátvoriek. Ďalej, ak $\vec{u_0} = (u_0, v_0)$, $X_0 = [x_0, y_0]$, platí

$$\vec{u} \cdot \vec{u_0} = uu_0 + vv_0,$$

$$\overline{XX_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \qquad /1/$$

Pri hľadaní týchto vzorcov sa podstatne využíva skutočnosť, že vektory $\vec{e}$ a $\vec{d}$ sú jednotkové a navzájom kolmé.

Keď je priamka v euklidovskej rovine určená bodom A a nenulovým vektorom $\vec{u}$, možno každý jej bod napísať v tvare

$$X = A + t\vec{u}, \qquad /2/$$

kde t je reálne číslo. Dostávame tak parametrické vyjadrenie priamky. Stručne budeme hovoriť o priamke $(A, \vec{u})$. Stredom úsečky X_1X_2, kde $X_1 = A + t_1\vec{u}$, $X_2 = A + t_2\vec{u}$, je bod

$$X = A + \frac{t_1 + t_2}{2}\vec{u}.$$

Keď $A = [a, b]$, $\vec{u} = (u, v)$ a $X = [x, y]$, môžeme rovnicu /2/ pomocou súradníc prepísať do tvaru

$$x = a + tu, \quad y = b + tv. \qquad /3/$$

Vylúčením parametra t z týchto dvoch rovníc dostaneme neparametrickú rovnicu priamky v rovine

$$v(x - a) - u(y - b) = 0$$

čiže

$$vx - uy - av + bu = 0.$$

Vektor $\vec{v} = (v, -u)$ je zrejme kolmý na vektor $\vec{u}$, pretože $\vec{u} \cdot \vec{v} = uv - vu = 0$. Obrátene, každá rovnica tvaru

$$px + qy + r = 0, \qquad /4/$$

v ktorej aspoň jeden z koeficientov p, q sa nerovná nule, je rovnicou priamky a vektor $\vec{p} = (p, q)$ je na túto priamku kolmý. Rovnica

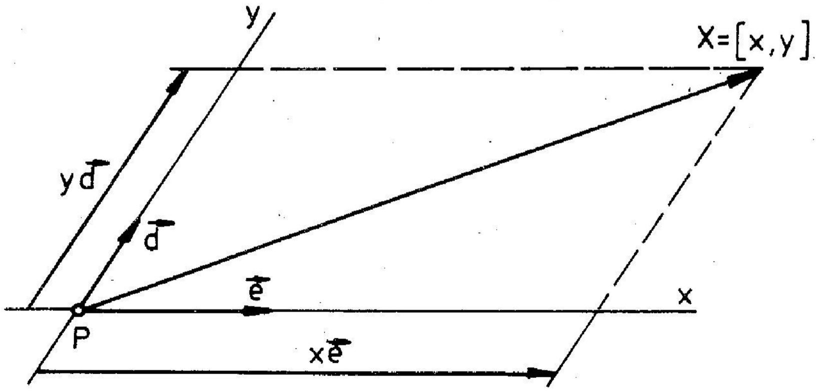
$$p_1x + q_1y + r_1 = 0$$

je rovnicou tej istej priamky práve vtedy, keď existuje také číslo k /$k \neq 0$/, že

$$p_1 = kp,\ q_1 = kq,\ r_1 = kr,$$

čiže keď jedna rovnica je nenulovým násobkom druhej.

Keby sme namiesto predpokladu, že vektory $\vec{e}, \vec{d}$ sú jednotkové a navzájom kolmé, požadovali len ich lineárnu nezávislosť /pozri obr. 3/, bolo by takisto možné napísať každý vektor $\vec{u}$ práve jediným spôsobom v tvare $\vec{u} = u\vec{e} + v\vec{d}$ a každý bod jednoznačne v tvare $X = P + x\vec{e} + y\vec{d}$. Teda aj v tomto prípade by sme dostali navzájom jednoznačné zobrazenie roviny na množinu



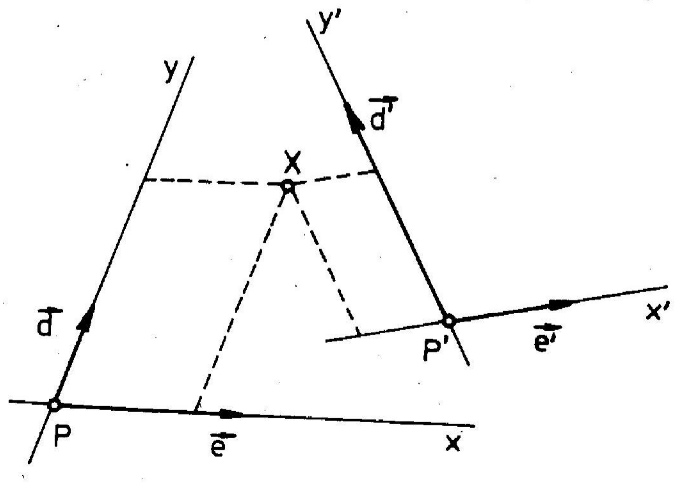
Obr. 3

všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel, t. j. tzv. lineárnu sústavu súradníc, v ktorej rovnako ako v prípade karteziánskej sústavy platí, že priamka je určená alebo parametricky rovnicami /3/, alebo neparametricky rovnicou /4/. V tomto prípade však neplatí tvrdenie, že pri neparametrickom vyjadrení priamky sú koeficienty p, q súradnice vektora kolmého na danú priamku, a takisto nebudú platiť vzorce /1/. Kým sa neskúmajú také vlastnosti geometrických objektov, ktoré súvisia s kolmosťou priamok, vzdialenosťou bodov a vôbec so skalárnym súčinom, stačí brať lineárnu sústavu súradníc. Ostatne v afinnej rovine skalárny súčin vôbec nie je definovaný, a teda nemá vôbec zmysel hovoriť o karteziánskej sústave súradníc; naproti tomu pojem lineárnej sústavy súradníc v tejto rovine má zmysel. Veľmi často budeme teda používať aj také lineárne sústavy súradníc, ktoré nie sú karteziánske.

2. Transformácia sústavy súradníc v rovine

Nech v rovine s pevne zvolenou lineárnou sústavou súradníc $\{P, \vec{e}, \vec{d}\}$ je daná ďalšia lineárna sústava súradníc bodom P' a vektormi $\vec{e}', \vec{d}'$ /obr.4/. Nech vzhľadom na prvú sústavu súradníc bod P' má súradnice $[p, q]$, vektor $\vec{e}'$ súradnice (α, β) a vektor $\vec{d}'$ súradnice (γ, δ). Z lineárnej nezávislosti vektorov $\vec{e}', \vec{d}'$ vyplýva $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Označme súradnice bodu

$X = [x, y]$ našej roviny vzhľadom na druhú sústavu súradníc x', y', teda $X = P' + x'\overrightarrow{e'} + y'\overrightarrow{d'}$. Keď napíšeme túto rovnicu pre jednotlivé súradnice /vzhľadom na prvú sústavu súradníc/, dostaneme rovnice



Obr. 4

$$x = \alpha x' + \gamma y' + p,$$
$$y = \beta x' + \delta y' + q. \qquad /5/$$

To sú transformačné rovnice vyjadrujúce vzťah medzi „novými" súradnicami x', y' a „starými" súradnicami x, y toho istého bodu X. Ak má vektor $\vec{u} = (u, v)$ vzhľadom na druhú sústavu súradníc súradnice (u', v'), tak $u = u'\overrightarrow{e'} + v'\overrightarrow{d'}$ a po napísaní tejto vektorovej rovnice pre súradnice vzhľadom na prvú sústavu súradníc dostaneme

$$u = \alpha u' + \gamma v';$$
$$v = \beta u' + \delta v'. \qquad /6/$$

Podľa týchto rovníc sa transformujú súradnice vektora. Sú to vlastne rovnaké rovnice ako rovnice /5/, len v nich chýbajú absolútne členy.

V prípade, keď obe sústavy súradníc sú karteziánske, vektory $\overrightarrow{e'}$, $\overrightarrow{d'}$ sú jednotkové a navzájom kolmé, a pretože majú vzhľadom na prvú karteziánsku sústavu súradníc súradnice (α, β) a (γ, δ), musí platiť

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = 0.$$

Potom si môžeme zvoliť taký uhol φ, že

$$\alpha = \cos\varphi, \quad \beta = \sin\varphi.$$

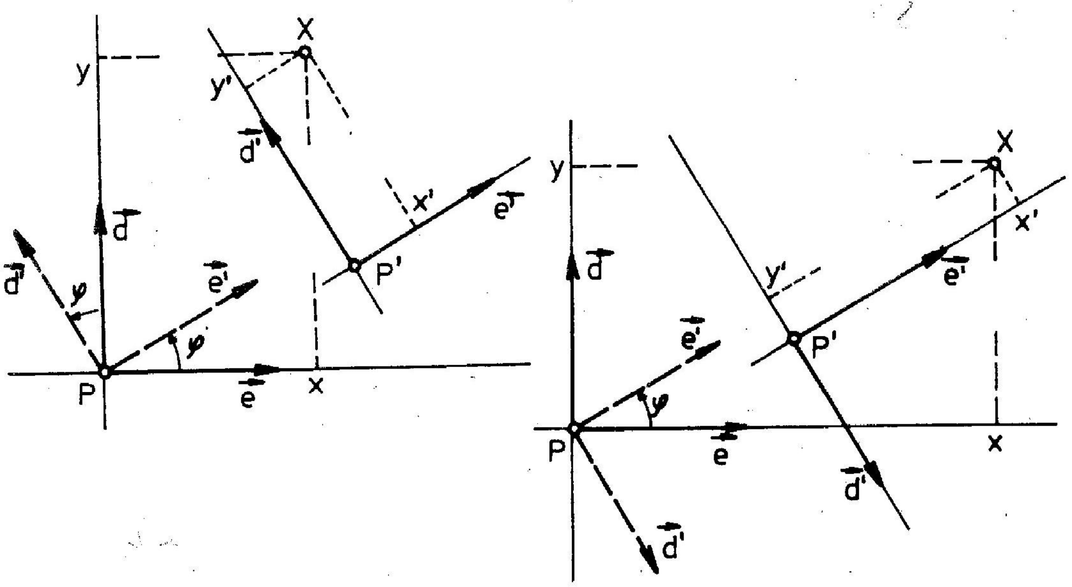
Uhol φ je vlastne orientovaný uhol vektorov $\vec{e}$ a $\vec{e}'$. Ďalej musí platiť $\gamma = -\sin\varphi$, $\delta = \cos\varphi$ alebo $\gamma = \sin\varphi$, $\delta = -\cos\varphi$. Rovnice /5/ majú potom tvar

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + p,$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + q$$

alebo

$$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + p,$$
$$y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + q.$$

To sú špeciálne prípady transformačných rovníc /5/ vyjadrujúce vzťah medzi súradnicami toho istého bodu X vzhľadom na dve karteziánske sústavy súradníc /obr. 5a, b/. Vráťme sa k všeobecnému prípadu /5/ prechodu od jednej lineárnej sústavy súradníc k druhej sústave, ktorý zahŕňa aj posledné dva uvedené prípady. Ak má priamka v rovine vzhľadom na prvú sústavu súradníc rovnicu



Obr. 5a,b

$$ax + by + c = 0$$

/aspoň jedno z čísel a, b sa nerovná nule/, leží bod X = $[x, y]$ na tejto priamke práve vtedy, keď jeho súradnice spĺňajú túto rovnicu. Keď dosadíme za x, y výrazy z rovníc /5/, dostaneme rovnicu

$$(a\alpha + b\beta)\, x' + (a\gamma + b\delta)\, y' + ap + bq + c = 0.$$

Aj tu môžeme povedať, že bod X leží na zvolenej priamke práve vtedy, keď jeho súradnice $[x', y']$ vzhľadom na druhú sústavu súradníc spĺňajú túto rovnicu. Je to teda rovnica tej istej priamky, ale v druhej, „čiarkovanej" sústave súradníc.

Príklad. Bod P' a vektory $\vec{e}'$, $\vec{d}'$ majú vzhľadom na danú lineárnu sústavu súradníc súradnice $P' = [1, 0]$, $\vec{e}' = (1, 0)$, $\vec{d}' = (1, 1)$. Aké súradnice bude mať bod $X = [x, y]$ vzhľadom na sústavu súradníc $\{P', \vec{e}', \vec{d}'\}$?

R i e š e n i e . Keď označíme hľadané súradnice bodu X písmenami x', y', platí

$$X = P' + x'\vec{e}' + y'\vec{d}',$$

a preto

$$x = 1 + x' + y',$$
$$y = y',$$

teda

$$x' = x - y - 1,$$
$$y' = y.$$

Príklad. Napíšte transformačné rovnice vyjadrujúce vzťah medzi súradnicami bodu vzhľadom na dve karteziánske sústavy súradníc, ak druhá sústava vznikne z prvej otočením o uhol 45° okolo spoločného začiatku. Akú rovnicu bude mať vzhľadom na druhú sústavu súradníc priamka, ktorá má vzhľadom na prvú sústavu súradníc rovnicu $x + y = 0$?

R i e š e n i e . Keď použijeme označovanie zavedené v predchádzajúcom texte, potom

$$P' = P = [0, 0] \text{ a } \vec{e}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{d}' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{alebo}$$

$$P' = P = [0, 0] \text{ a } \vec{e}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \vec{d}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

podľa toho, v akom zmysle sme otočili prvú sústavu súradníc o uhol 45°. /Nakreslite si sami príslušný obrázok./ Napísané súradnice bodu a vektorov sa vzťahujú na prvú sústavu súradníc. Potom v prvom prípade je

$$[x, y] = [0, 0] + x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

teda

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y',$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y',$$

v druhom prípade

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y',$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

Priamka $x + y = 0$ má vzhľadom na novú sústavu súradníc v prvom prípade rovnicu $x' = 0$, v druhom prípade rovnicu $y' = 0$.

Cvičenia

1. Ak súradnice bodu $X = [x, y]$ spĺňajú rovnicu $xy = 1$, akú rovnicu spĺňajú jeho nové súradnice x', y', keď nová sústava súradníc vznikla z pôvodnej sústavy otočením o uhol 45°?

2. Napíšte transformačné rovnice pre súradnice toho istého bodu X pri prechode od jednej karteziánskej sústavy súradníc k druhej karteziánskej sústave súradníc, ktorá vznikne z prvej sústavy otočením o uhol 30° okolo spoločného začiatku.

3. Ak má priamka vzhľadom na danú lineárnu sústavu súradníc rovnicu $y = x$, akú rovnicu bude mať vzhľadom na lineárnu sústavu súradníc $\{P', \vec{e}', \vec{d}'\}$, kde $P' = [1, 0]$, $\vec{e}' = (1,0)$, $\vec{d}' = (1, 1)$?

4. Ako si musíte zvoliť novú lineárnu sústavu súradníc, aby priamka $y = 2x - 1$ mala vzhľadom na ňu rovnicu $y' = 0$?

5. Nech vzhľadom na danú sústavu súradníc majú bod P' a vektory $\vec{e}'$, $\vec{d}'$ takéto súradnice: $P' = [0, -1]$, $\vec{e}' = (1, 2)$, $\vec{d}' = (2, -1)$. Napíšte transformačné vzorce medzi súradnicami x, y bodu X vzhľadom na danú sústavu súradníc a jeho súradnicami x', y' vzhľadom na sústavu súradníc $\{P', \vec{e}', \vec{d}'\}$.

II. AFINNÉ VLASTNOSTI KUŽEĽOSEČIEK

1. Definícia kužeľosečky

V ďalšom texte budeme predpokladať, že v euklidovskej alebo afinnej rovine sme si už pevne zvolili lineárnu sústavu súradníc, určenú začiatkom P a vektormi $\vec{e}$, $\vec{d}$. Každá priamka má v tejto sústave súradníc rovnicu tvaru $px + qy + r = 0$ /čísla p, q sa súčasne nerovnajú nule/, teda lineárnou rovnicou - súradnice x, y sa v nej vyskytujú len v prvej mocnine a rovnica neobsahuje ani člen xy. Ako vyzerá v rovine množina tých bodov $X = [x, y]$, ktorých súradnice vzhľadom na pevne zvolenú lineárnu sústavu súradníc vyhovujú rovnici obsahujúcej aj členy s x^2, y^2 alebo xy, teda rovnici, ktorú môžeme napísať v tvare

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0? \qquad /1/$$

Pritom predpokladáme, že aspoň jeden z koeficientov a, b, c sa nerovná nule, aby nešlo o lineárnu rovnicu. Koeficienty pri xy, x a y sme úmyselne napísali v tvare 2b, 2d a 2e, pretože sa to v priebehu ďalších výpočtov ukáže ako veľmi výhodné. Keď vynásobíme maticu $(x, y, 1)$ maticou

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix}$$

dostaneme maticu $(ax + by + d,\ bx + cy + e,\ dx + ey + f)$.

Keď túto maticu vynásobíme sprava maticou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

dostaneme maticu

$$\big((ax + by + d)\ x + (bx + cy + e)\ y + (dx + ey + f)\big) =$$

$$= \left(ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f\right),$$

teda maticu s jedným riadkom a jedným stĺpcom, ktorej jediný prvok sa práve rovná ľavej strane rovnice /1/. Rovnicu /1/ teda môžeme napísať v maticovom tvare takto:

$$(x,\ y,\ 1)\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (0).$$

Je užitočné pripomenúť si, že násobenie matíc je asociatívne.

Ak $px + qy + r = 0$ je rovnica priamky, tvar /1/ má aj rovnica

$$(px + qy + r)^2 = 0,$$

t. j. rovnica

$$p^2x^2 + 2pqxy + q^2y^2 + 2prx + 2qry + r^2 = 0.$$

Súradnice x, y bodu X vyhovujú tejto rovnici práve vtedy, keď bod X leží na priamke $px + qy + r = 0$.

Ak

$$gx + hy + k = 0$$

je rovnica ďalšej priamky, nemôžu sa v rovnici

$$(px + qy + r)(gx + hy + k) = 0, \qquad /3/$$

t. j. v rovnici

$$(pg)x^2 + (ph + qg)\,xy + (qh)y^2 + (pk + rg)\,x + $$
$$+ (qk + rh)\,y + rk = 0$$

súčasne rovnať nule koeficienty pri x^2, xy, y^2. Súradnice bodu $X = [x,\ y]$ vyhovujú tejto rovnici práve vtedy, keď bod X leží buď na priamke $px + qy + r = 0$, buď na priamke $gx + hy + k = 0$. Vidíme, že rovnica /3/ je rovnicou dvoch priamok a rovnica /2/ je jej špeciálnym prípadom, a to rovnicou dvoch splývajúcich priamok. Zvykne sa vravieť, že rovnica /2/ je rovnicou dvakrát počítanej priamky $px + qy + r = 0$.

Iným príkladom rovnice /1/ je rovnica $x^2 + 1 = 0$ alebo rovnica $2x^2 + y^2 + 5 = 0$. Pretože súradnice x, y každého bodu X musia byť reálne čísla /berieme do úvahy len reálny afinný alebo euklidovský priestor/, nevyhovujú týmto dvom posledným rovniciam súradnice žiadneho bodu. Inými slovami, množina všetkých bodov $X = [x,\ y]$, ktorých súradnice spĺňajú rovnicu $x^2 + 1 = 0$, je prázdna; to isté platí aj o rovnici $2x^2 + y^2 + 5 = 0$.

Tvar /1/ má aj rovnica

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0. \qquad /4/$$

V prípade, keď $r = 0$, je to rovnica bodu $M = [m, n]$, pretože len pre $x = m$, $y = n$ platí $(x - m)^2 + (y - n)^2 = 0$. Keď $r \neq 0$ a vybraná sústava súradníc je karteziánska, je rovnicou /4/ určená kružnica so stredom M a polomerom r, pretože ju môžeme podľa /1/ na str. 6 písať ako

$$\overline{XA}^2 = r^2 \text{ alebo } \overline{XA} = |r| .$$

Ukázali sme si niekoľko príkladov rovnice tvaru /1/ a k nim patriace množiny všetkých bodov, ktorých súradnice vyhovujú príslušnej rovnici. Teraz by sme chceli ku každej rovnici tvaru /1/, v ktorej aspoň jeden z koeficientov a, b, c sa nerovná nule, nájsť príslušnú množinu všetkých koreňov tejto rovnice. Táto množina je zrejme nezávislá od toho, či berieme priamo rovnicu /1/ alebo niektorý jej nenulový násobok. Pojem kužeľosečky si zavedieme nasledujúcou definíciou.

<u>Definícia</u>. Nech je daná rovnica /1/ /v ktorej aspoň jedno z čísel a, b, c sa nerovná nule/, prípadne jej ľubovoľný nenulový násobok. Množina všetkých bodov $X = [x, y]$, ktorých súradnice vyhovujú rovnici /1/, sa nazýva <u>kužeľosečka</u>, presnejšie kužeľosečka, ktorá má rovnicu /1/, alebo ktorá je určená rovnicou /1/. Stručne hovoríme o kužeľosečke /1/. Body, ktorých súradnice vyhovujú rovnici /1/, sú body kužeľosečky.

Keď sú dané dve rovnice typu /1/, pri ktorých jedna nie je násobkom druhej, príslušné kužeľosečky budeme považovať za rôzne aj v tom prípade, keď množiny všetkých koreňov oboch rovníc sú totožné. Napr. $x^2 + y^2 = 0$ a $x^2 + 2y^2 = 0$ budeme považovať za rôzne kužeľosečky, hoci množina všetkých koreňov oboch rovníc sa skladá len z bodu $P = [0, 0]$. Teda pod kužeľosečkou máme na mysli celok skladajúci sa z rovnice kužeľosečky /prípadne jej nenulového násobku/ a z množiny všetkých koreňov tejto rovnice.

<u>Poznámka</u>. Keby sme si zvolili inú lineárnu sústavu súradníc, v ktorej by sme súradnice bodu X označili x', y', platili by medzi pôvodnými súradnicami x, y a novými súradnicami x', y' toho istého bodu X vzťahy /5/ zo str. 8. Keby sme dosadili z týchto rovníc za x a y do rovnice /1/, dostali by sme rovnicu

$$a'(x')^2 + 2b'(x'y') + c'(y')^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0, \qquad /1'/$$

v ktorej sme označili

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2,$$
$$b' = a\alpha\gamma + b\alpha\delta + b\beta\gamma + c\beta\delta,$$
$$c' = a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2;$$

podobné vyjadrenie by mali d', e', f'.

Možno ukázať, že aspoň jedno z čísel a', b', c' sa nerovná nule. Súradnice x, y bodu X vyhovujú rovnici /1/ práve vtedy, keď jeho súradnice x', y' spĺňajú rovnicu /1'/. Rovnica /1'/ je teda rovnicou kužeľosečky /1/, ale v novej, čiarkovanej sústave súradníc. Vidíme, že predchádzajúca definícia kužeľosečky pomocou rovnice /1/ nezávisí od výberu sústavy súradníc. Pri prechode na inú lineárnu sústavu súradníc prejde rovnica /1/ zase na rovnicu toho istého typu /takáto rovnica sa nazýva kvadratická/ podobne ako rovnica priamky, teda lineárna rovnica, prejde pri transformácii súradníc na lineárnu rovnicu. Ešte si všimnime, že z rovníc uvedených pre a', b', c' použitím rovníc /6/ zo str. 8 vyplýva rovnosť

$$a'(u')^2 + 2b'u'v' + c'(v')^2 = au^2 + 2buv + cv^2$$

pre každý vektor $\vec{u}$, ktorý má vzhľadom na prvú sústavu súradníc súradnice (u, v) a vzhľadom na druhú sústavu súradnice (u', v').

Ak nevyhovujú rovnici kužeľosečky súradnice žiadneho bodu, kužeľosečka sa volá <u>formálne reálna kužeľosečka</u>, lebo je síce určená rovnicou s reálnymi koeficientmi, ale neobsahuje žiadne reálne body. V opačnom prípade je reč o <u>bodovo reálnej kužeľosečke</u>. Príklad formálne reálnej kužeľosečky je kužeľosečka $x^2 + 1 = 0$.

2. Spoločné body priamky a kužeľosečky

Nech je kužeľosečka daná rovnicou /1/; teda predpokladáme, že aspoň jeden z koeficientov a, b, c sa nerovná nule. Pýtajme sa, či na priamke určenej bodom $M = [m, n]$ a nenulovým vektorom $\vec{u} = (u, v)$ ležia body tejto kužeľosečky, prípadne koľko je takých bodov. Priamka má parametrické vyjadrenie

$$x = m + ut,$$
$$y = n + vt. \qquad /5/$$

Pre každé reálne číslo t dostaneme pomocou rovníc /5/ súradnice x, y nejakého bodu priamky a obrátene, súradnice každého bodu priamky určujú nejaké t.

Našou úlohou je vlastne zistiť, pre ktoré hodnoty parametra t spĺňajú súradnice x, y z rovníc /5/ rovnicu /1/. Dosadíme teda za x a y do /1/ výrazy z rovníc /5/ a dostaneme pre t rovnicu

$$\left(au^2 + 2buv + cv^2\right) t^2 + 2 \left[u\left(am + bn + d\right) + v\left(bm + cn + e\right)\right] t + am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f = 0, \qquad /6/$$

teda rovnicu tvaru

$$At^2 + 2Bt + C = 0.$$

Môžu nastať tieto prípady:

1. $A \neq 0$, $B^2 - AC > 0$,	rovnica má dva rôzne reálne korene, priamka má s kužeľosečkou spoločné práve dva rôzne body.
2. $A \neq 0$, $B^2 - AC = 0$,	rovnica má jeden dvojnásobný koreň, priamka má s kužeľosečkou spoločný práve jeden bod.
3. $A \neq 0$, $B^2 - AC < 0$,	rovnica nemá reálne korene, priamka kužeľosečku nepretína.
4. $A = 0$, $B \neq 0$,	rovnica je lineárna, má jeden koreň, priamka má s kužeľosečkou spoločný práve jeden bod.
5. $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$,	rovnica nemá nijaký koreň, priamka nemá s kužeľosečkou spoločný bod.
6. $A = B = C = 0$,	rovnica je splnená pre každé t, každý bod priamky je aj bodom kužeľosečky, čiže priamka leží celá na kužeľosečke, priamka je časťou kužeľosečky.

Z tohto prehľadu vidíme, že priamka, ktorá má s kužeľosečkou spoločné tri rôzne body, leží celá na kužeľosečke.

<u>Príklad</u>. Nájdite spoločné body priamky $y = 2x - 1$ a kužeľosečky $y - ax^2 = 0$ /$a \neq 0$/. Urobte diskusiu vzhľadom na parameter a.

R i e š e n i e . Najprv si vyberieme nejaké parametrické vyjadrenie danej priamky, napr. $x = t$, $y = 2t - 1$, a dosadíme ho do rovnice kužeľosečky. Pre parameter t spoločného bodu priamky a kužeľosečky dostaneme rovnicu

$$at^2 - 2t + 1 = 0.$$

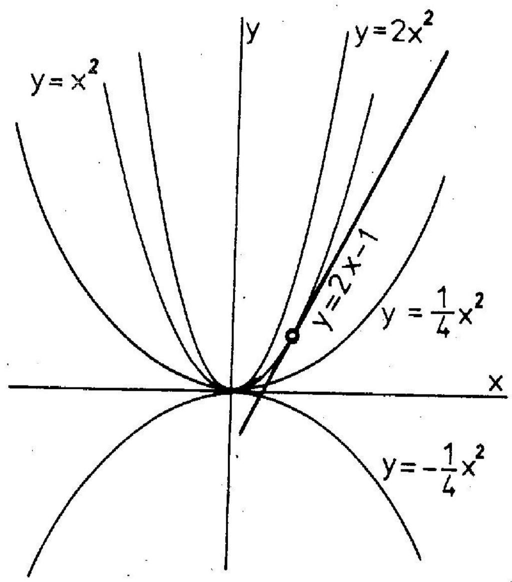
Diskriminant tejto kvadratickej rovnice je $4\left(1 - a\right)$. Pre $a < 1$ má rovnica dva rôzne korene

$$t = \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a} \quad \text{a} \quad t = \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a};$$

priamka má s kužeľosečkou dva rôzne spoločné body so súradnicami

$$\left[\frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}, \frac{2 - a + 2\sqrt{1 - a}}{a}\right], \left[\frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}, \frac{2 - a - 2\sqrt{1 - a}}{a}\right]$$

Pre $a = 1$ dostaneme jediný spoločný bod priamky a kužeľosečky, ktorý má súradnice $[1, 1]$. Keď $a > 1$, priamka nemá s kužeľosečkou nijaký spoločný bod /obr. 6/.



Obr. 6

Príklad. Nájdite spoločné body priamky $y = x + q$ s kužeľosečkou $x^2 - xy + 1 = 0$.

R i e š e n i e . Daná priamka má parametrické vyjadrenie $x = t$, $y = t + q$. Po dosadení týchto výrazov do rovnice kužeľosečky dostávame rovnicu

$$-tq + 1 = 0,$$

ktorej v prípade, keď $q = 0$, nevyhovuje žiadne t, t. j. priamka $y = x$ nemá s kužeľosečkou spoločný bod. Keď $q \neq 0$, dostávame jediný koreň $t = q^{-1}$, ktorým je určený priesečník

$$\left[q^{-1}, \quad q^{-1} + q\right]$$

priamky s kužeľosečkou.

Príklad. Nájdite spoločné body priamky $x - 2y + 1 = 0$ a kužeľosečky $2x^2 - 5xy + 2y^2 + x + y - 1 = 0$.

Riešenie. Parametrické vyjadrenie priamky si zvolíme napr. v tvare $x = -1 + 2t$, $y = t$; po dosadení do rovnice kužeľosečky dostaneme rovnicu $0 = 0$, ktorá je splnená pre každé t. Každý bod danej priamky je aj bodom kužeľosečky.

Cvičenia

6. Nájdite spoločné body kužeľosečky $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ s priamkou

   a/ $5x - y - 5 = 0$,

   b/ $x + 2y + 2 = 0$,

   c/ $x + 4y - 1 = 0$,

   d/ $x - 3y = 0$.

7. Nájdite spoločné body kužeľosečky $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ a priamok prechádzajúcich začiatkom.

8. Nájdite spoločné body priamky $x = p$ a kužeľosečky $x^2 - 2xy + 2x + 3y - 5 = 0$.

9. Aká je vzájomná poloha priamky $x + y + 1 = 0$ a kužeľosečky $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$?

10. V čom pretne priamka rovnobežná s osou x kužeľosečku $xy = 1$?

3. Asymptotické smery kužeľosečiek

Všimnime si teraz koeficient pri t^2 v rovnici /6/. Tento koeficient sa rovná $au^2 + 2buv + cv^2$ a nezávisí vôbec od bodu M, ale len od vektora $\vec{u}$. Kedy sme namiesto vektora $\vec{u}$ vzali jeho ľubovoľný nenulový násobok $\vec{ku} = (ku, kv)$, zväčšil by sa tento koeficient k^2-krát. O nenulových vektoroch $\vec{u}$ a $\vec{ku}$ sa hovorí, že sú to vektory toho istého smeru, alebo že určujú ten istý smer. Potom sa hovorí o smere danom /určenom/ nenulovým vektorom $\vec{u}$. Pod smerom priamky rozumieme smer ľubovoľného nenulového vektora tejto priamky. Môžeme teda povedať, že nulovosť či nenulovosť koeficienta pri t^2 v rovnici /6/ závisí len od smeru zvolenej priamky a nezávisí ani od toho, či sme za rovnicu kužeľosečky vzali rovnicu /1/, alebo jej ľubovoľný nenulový násobok.

To nás oprávňuje zaviesť nasledujúcu definíciu.

- **Definícia.** Smer v rovine, určený nenulovým vektorom $\vec{u} = (u, v)$, sa nazýva asymptotický smer kužeľosečky /1/, ak $au^2 + 2buv + cv^2 = 0$.

Všimnime si ešte, že pri transformácii súradníc prejde rovnica /1/ na rovnicu /1'/, zmenia sa aj súradnice vektora $\vec{u}$, ale hodnota výrazu $au^2 + 2buv + cv^2$ sa nezmení, ako sme si ukázali na str. 15 . Vidíme teda, že definícia asymptotického smeru kužeľosečky nezávisí ani od výberu sústavy súradníc. V ďalšom texte už nebudeme dokazovať nezávislosť zavádzaných pojmov od voľby sústavy súradníc, ale pri všetkých definíciách budeme mať na mysli pevne zvolenú sústavu súradníc.

Hľadajme všetky asymptotické smery kužeľosečky /1/, čiže tie nenulové vektory $\vec{u} = (u, v)$, pre ktoré

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0;$$

to znamená

$$u(au + bv) + v(bu + cv) = 0,$$

teda

$$(au + bv) : (bu + cv) = -v : u.$$

V tejto úmere nevylučujeme prípad, v ktorom súčasne platí $bu + cv = 0$, $u = 0$. Možno povedať, že smer vektora $\vec{u}$ je asymptotickým smerom danej kužeľosečky práve vtedy, keď pre súradnice vektora $\vec{u}$ platí získaná úmera, a táto úmera platí zase práve vtedy, keď existuje také reálne číslo λ, pre ktoré

$$au + bv = -\lambda v,$$
$$bu + cv = \lambda u,$$

teda

$$au + (b + \lambda) v = 0,$$
$$(b - \lambda) u + cv = 0.$$

Po vylúčení u /alebo v/ z týchto rovníc vidíme, že sústava má netriviálny koreň /aspoň jedno z čísel u, v sa nerovná nule/ len vtedy, keď sa výraz $ac - b^2 + \lambda^2$ rovná nule. Pre $ac - b^2 > 0$ nejestvuje také λ, ktoré by vyhovovalo rovnici $ac - b^2 + \lambda^2 = 0$, preto nejestvuje ani asymptotický smer. Keď $ac - b^2 = 0$, rovnica $ac - b^2 + \lambda^2 = 0$ má jediný koreň $\lambda = 0$ a existuje práve jeden asymptotický smer kužeľosečky; súradnice vektora tohto smeru sú určené rovnicami

$$au + bv = 0,$$
$$bu + cv = 0.$$

Nakoniec pre $ac - b^2 < 0$ dostaneme dva rôzne korene $\lambda_1 \neq \lambda_2$ rovnice $ac - b^2 + \lambda^2 = 0$; ku každému z týchto koreňov prislúcha iný asymptotický smer kužeľosečky. Vektory patriace k jednému z týchto smerov sú určené rovnicami

$$au + bv = -v\sqrt{b^2 - ac},$$

$$bu + cv = u\sqrt{b^2 - ac},$$

vektory druhého smeru rovnicami

$$au + bv = v\sqrt{b^2 - ac},$$

$$bu + cv = -u\sqrt{b^2 - ac}.$$

<u>Príklad</u>. Určite asymptotické smery kužeľosečky $x^2 + 4xy + y^2 - 7x - 7 = 0$.

R i e š e n i e. Smer nenulového vektora $\vec{u} = (u, v)$ je práve vtedy asymptotickým smerom danej kužeľosečky, keď platí

$$u^2 + 4uv + v^2 = 0,$$

teda

$$u^2 + 2uv + 2uv + v^2 = 0;$$

po úprave

$$u(u + 2v) + v(2u + v) = 0.$$

Preto musí platiť

$$\begin{aligned} u + 2v &= -\lambda v, \\ 2u + v &= \lambda u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u + (2 + \lambda)v &= 0, \\ (2 - \lambda)u + v &= 0. \end{aligned}$$

Aby táto sústava mala nenulové riešenie, musí sa determinant sústavy, t. j. číslo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 + \lambda \\ 2 - \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (2 - \lambda)(2 + \lambda)$$

rovnať nule, teda $\lambda^2 = 3$. Keď si vyberieme koreň $\lambda = \sqrt{3}$, dostaneme pre príslušný asymptotický smer rovnice

$$u + (2 + \sqrt{3})v = 0,$$

$$(2 - \sqrt{3})u + v = 0,$$

ktoré sú lineárne závislé, lebo jedna je násobkom druhej. Rovniciam vyhovujú súradnice vektora $\vec{u} = (2 + \sqrt{3}, -1)$ a odhliadnuc od nenulových násobkov je to jediný vektor, ktorého súradnice túto v podstate jedinú rovnicu spĺňajú. Druhému koreňu $\lambda = -\sqrt{3}$ prislúcha asymptotický smer určený vektorom $(2 - \sqrt{3}, -1)$.

Iný spôsob riešenia tohto príkladu je nasledujúci. Skúsime, či rovnici $u^2 + 4uv + v^2 = 0$ pre asymptotické smery vyhovuje vektor s druhou súradnicou nulovou, t.j. $v = 0$. Po dosadení $v = 0$ do rovnice pre asymptotické smery dostaneme $u^2 = 0$. To dáva jediný koreň $u = 0$; vektor $\vec{u} = (u, v)$ by bol nulový, ale nulovým vektorom nie je určený nijaký smer. Hľadajme teraz tie vektory $\vec{u} = (u, v)$, ktorých súradnice vyhovujú rovnici pre asymptotické smery danej kužeľosečky a pre ktoré súradnica v sa nerovná nule. Pretože stačí nájsť ľubovoľné nenulové násobky týchto vektorov, môžeme predpokladať $v = 1$; po dosadení tejto hodnoty do rovnice $u^2 + 4uv + v^2 = 0$ dostaneme pre u rovnicu $u^2 + 4u + 1 = 0$, ktorá má korene $u = -2 \pm \sqrt{3}$. Asymptotické smery danej kužeľosečky sú určené vektormi $(-2 + \sqrt{3}, 1)$ a $(-2 - \sqrt{3}, 1)$.

Príklad. Určite asymptotické smery kužeľosečky $xy - 1 = 0$.

R i e š e n i e . Nenulový vektor $\vec{u} = (u, v)$ určuje práve vtedy asymptotický smer našej kužeľosečky, keď $uv = 0$. Tejto rovnici vyhovujú súradnice vektorov $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Smery týchto vektorov sú asymptotickými smermi kužeľosečky $xy = 1$ a sú to jediné asymptotické smery tejto kužeľosečky.

Príklad. Určite asymptotické smery kužeľosečky, ktorá sa skladá z dvoch priamok.

R i e š e n i e . Ak majú priamky, z ktorých sa kužeľosečka skladá, rovnice $px + qy + r = 0$ a $gx + hy + k = 0$, kužeľosečka má rovnicu

$$(px + qy + r)(gx + hy + k) = 0,$$

po úprave

$$pgx^2 + (ph + qg)\,xy + qhy^2 + (pk + rg)\,x + (qk + rh)\,y + rk = 0.$$

Rovnica pre asymptotické smery je

$$pgu^2 + (ph + qg)\,uv + qhv^2 = 0,$$

teda

$$(pu + qv)(gu + hv) = 0.$$

Vektor $\vec{u} = (u, v)$, ktorého súradnice vyhovujú rovnici

$$pu + qv = 0,$$

patrí do smeru priamky $px + qy + r = 0$. Podobne uvažujeme o rovnici $gu + hv = 0$. Asymptotické smery kužeľosečky, ktorá sa skladá z dvoch priamok, sú teda práve smery týchto priamok. Ak sú obe priamky rovnobežné /nevylučujeme totožnosť/, má kužeľosečka jediný asymptotický smer; v opačnom prípade, keď sú obe priamky rôznobežné, kužeľosečka má dva rôzne asymptotické smery.

Cvičenia

11. Určite asymptotické smery kužeľosečky
$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

12. Určite asymptotické smery kužeľosečky
$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

13. Pre ktoré p má kužeľosečka
$x^2 + 2pxy + y^2 - 3 = 0$
práve jeden asymptotický smer?

14. Napíšte rovnicu kužeľosečky, ktorá má smery osí x a y za svoje asymptotické smery.

4. Stred kužeľosečky; singulárny bod kužeľosečky

Všimnime si teraz v rovnici /6/ pre parametre spoločných bodov priamky a kužeľosečky /str. 16 / koeficient pri t. Tento koeficient sa rovná nule bez ohľadu na voľbu vektora $\vec{u} = (u, v)$, ak súradnice bodu M spĺňajú rovnice

$$\begin{aligned} am + bn + d &= 0, \\ bm + cn + e &= 0. \end{aligned} \qquad /7/$$

Potom však bude platiť: Ak je koreňom rovnice /6/ číslo t, je jej koreňom aj číslo $-t$. Preto na kužeľosečke leží pri ľubovoľnom výbere vektora $\vec{u}$ s každým bodom $M + t\vec{u}$ aj bod $M - t\vec{u}$. Bod M je teda stred súmernosti kužeľosečky; nazveme ho stred kužeľosečky. Poznamenajme si ešte, že rovnice /7/ dostačujú na to, aby bod M bol stredom kužeľosečky. Nevieme však, či sú to aj nutné podmienky. Nie je totiž vylúčené, že kužeľosečka má aj iné stredy súmernosti, ako sú body, ktorých súradnice spĺňajú rovnice /7/.

Pre $ac - b^2 \neq 0$ existuje aspoň jeden stred kužeľosečky, ktorý má súradnice

$$x = \frac{be - cd}{ac - b^2}, \quad y = \frac{bd - ae}{ac - b^2}.$$

Aj v prípade, keď $ac - b^2 = 0$ a súčasne $be - cd = 0$, $bd - ae = 0$, má kužeľosečka stred, dokonca celú priamku stredov, pretože vtedy jedna z rovníc

$$ax + by + d = 0,$$
$$bx + cy + e = 0$$

je násobkom druhej. Keď $ac - b^2 = 0$, ale $be - cd$ alebo $bd - ae$ sa nerovná nule, nemá predchádzajúca sústava rovníc riešenie.

Nech bod $M = [m, n]$ je stred kužeľosečky a zároveň bod kužeľosečky, t. j. $am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f = 0$. Vtedy v rovnici /6/ vypadne absolútny člen a rovnica bude mať pre každé u, v koreň $t = 0$, ku ktorému prislúcha bod M. Pre $au^2 + 2buv + cv^2 \neq 0$ je rovnica /6/ kvadratická. Pretože bod M je stred kužeľosečky a zároveň bod kužeľosečky, musí aj druhý priesečník priamky $(M, \vec{u})$ s kužeľosečkou splynúť s bodom M. Koeficient pri lineárnom člene v /6/ sa preto musí rovnať nule, a to pre každý vektor $\vec{u} = (u, v)$, ktorého smer nie je asymptotickým smerom kužeľosečky. Preto musí

$$am + bn + d = 0, \quad bm + cn + e = 0,$$

a pretože

$$am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f =$$
$$= m(am + bn + d) + n(bm + cn + e),$$

musí platiť aj rovnica

$$dm + en + f = 0.$$

Takýto bod sa nazýva singulárny bod kužeľosečky. Je to bod kužeľosečky, ktorý je zároveň stredom kužeľosečky. Bod $X = [x, y]$ je práve vtedy singulárny bod kužeľosečky /1/, keď jeho súradnice vyhovujú rovniciam

$$\begin{aligned} ax + by + d &= 0, \\ bx + cy + e &= 0, \\ dx + ey + f &= 0, \end{aligned} \qquad /8/$$

t. j. keď platí

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Keď je M singulárny bod kužeľosečky, rovnica /6/ má tvar

$$(au^2 + 2buv + cv^2)\, t^2 = 0.$$

Ak $au^2 + 2buv + cv^2 = 0$, je táto rovnica splnená pre každé t; v opačnom prípade je splnená len pre $t = 0$. Tak dostávame nasledujúcu vetu.

Veta. Každá priamka idúca singulárnym bodom kužeľosečky leží buď celá na kužeľosečke /ak smer priamky je asymptotickým smerom kužeľosečky/, buď má s kužeľosečkou spoločný len tento singulárny bod /ak smer priamky nie je asymptotickým smerom kužeľosečky/.

Kužeľosečka, ktorá má singulárny bod, sa teda skladá alebo z dvoch rôznobežiek, alebo z jednej priamky, alebo len z tohto singulárneho bodu, a to podľa toho, či má priamka dva rôzne asymptotické smery, jeden asymptotický smer, alebo vôbec nemá asymptotické smery. Ak sa kužeľosečka skladá z jednej priamky, je každý jej bod singulárny, lebo o.i. je jej stredom.

Príklad. Určite singulárne body kužeľosečky

$$2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

R i e š e n i e . Rovnice /8/ majú v našom prípade tvar

$$2x - 3y - 1 = 0,$$
$$-3x + 5y + 1 = 0,$$
$$-x + y + 1 = 0.$$

Prvým dvom rovniciam vyhovujú len súradnice bodu $[2, 1]$, ktorý je teda stredom danej kužeľosečky. Pretože jeho súradnice vyhovujú aj poslednej rovnici, je to singulárny bod kužeľosečky. A pretože v našom prípade $ac - b^2 = 10 - 9 = 1 > 0$, nemá daná kužeľosečka ani jeden asymptotický smer a bod $[2, 1]$ je jej jediným bodom. Rovnicu kužeľosečky môžeme písať v tvare

$$2\left(x - 2\right)^2 - 6\left(x - 2\right)\left(y - 1\right) + 5\left(y - 1\right)^2 = 0.$$

Po vynásobení číslom 2 dostaneme

$$\left[2\left(x - 2\right) - 3\left(y - 1\right)\right]^2 + \left(y - 1\right)^2 = 0,$$

odkiaľ hneď vidíme, že kužeľosečka obsahuje len bod $[2, 1]$.

Príklad. Určite singulárne body kužeľosečky

$$-x^2 + 4xy - 4y^2 - 2x + 4y - 1 = 0.$$

R i e š e n i e . Matica zostavená zisteným spôsobom z koeficientov kužeľosečky sa v tomto prípade rovná

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 2, & -1 \\ 2, & -4, & 2 \\ -1, & 2, & 1 \end{pmatrix} ;$$

rovnice pre singulárne body sú

$$-x + 2y - 1 = 0,$$
$$2x - 4y + 2 = 0,$$
$$-x + 2y - 1 = 0.$$

Všetky rovnice tejto sústavy sú násobkom prvej rovnice. Množina všetkých singulárnych bodov kužeľosečky je priamka $-x + 2y - 1 = 0$. Rovnicu kužeľosečky môžeme písať v tvare

$$(-x + 2y - 1)^2 = 0.$$

V tomto prípade kužeľosečkou je priamka $-x + 2y - 1 = 0$ počítaná dvakrát.

Cvičenia

15. Určite singulárne body kužeľosečky
$x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0.$

16. Určite f tak, aby kužeľosečka
$2x^2 + 2xy + y^2 + 4y + f = 0$
mala singulárny bod.

17. Nájdite všetky singulárne body kužeľosečky
$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$

18. Napíšte rovnicu kužeľosečky, ktorá má singulárny bod v začiatku sústavy súradníc.

5. Singulárne kužeľosečky

Kým pristúpime k vlastnej téme, zavedieme si jeden dôležitý pojem.

Determinant matice

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ g, & c, & e \\ h, & k, & f \end{pmatrix}$$

je číslo

$$(ac - bg)\ f - (ae - gd)\ k + (be - cd)\ h;$$

toto číslo symbolicky píšeme v tvare

$$\begin{vmatrix} a, & b, & d \\ g, & c, & e \\ h, & k, & f \end{vmatrix}.$$

Teda platí

$$\begin{vmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{vmatrix} = acf + 2bde - cd^2 - ae^2 - b^2f.$$

Keď má kužeľosečka singulárny bod $M = [m, n]$, vyhovujú jeho súradnice rovniciam /8/, preto $d = -am - bn$, $e = -bm - cn$, $f = -dm - en = (am + bn)m + (bm + cn)n = am^2 + 2bmn + cn^2$ a rovnica kužeľosečky je

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2(am + bn)x - 2(bm + cn)y + am^2 + 2bmn + cn^2 = 0,$$

teda

$$a(x - m)^2 + 2b(x - m)(y - n) + c(y - n)^2 = 0.$$

Okrem toho determinant Δ matice

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix}$$

sa rovná nule, ako sa ľahko presvedčíme, keď dosadíme za d, e, f vypočítané hodnoty $d = -am - bn$ atď.

Obrátene, nech $\Delta = (ac - b^2)f + (bd - ae)e + (be - cd)d = 0$. Rozlíšime dva prípady.

Keď $ac - b^2 \neq 0$, jestvuje práve jeden bod $M = [m, n]$, ktorého súradnice vyhovujú rovniciam

$$am + bn + d = 0,$$
$$bm + cn + e = 0;$$

$$m = \frac{be - cd}{ac - b^2}, \qquad n = \frac{bd - ae}{ac - b^2}.$$

Rovnosť $\Delta = 0$ môžeme potom písať v tvare $dm + en + f = 0$; bod M je singulárny bod kužeľosečky.

Keď $ac - b^2 = 0$, aspoň jedno z čísel a, c sa nerovná nule; nech napr. $a \neq 0$. Označme $\frac{b}{a} = k$, teda $b = ka$. Zo vzťahu $ac - b^2 = 0$ vyplýva $c = kb = k^2a$. Dosadením do $\triangle = 0$ dostaneme $(e - kd)^2 = 0$, t. j. $e = kd$. Vidíme, že druhý riadok matice

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & ka, & d \\ ka, & k^2a, & kd \\ d, & kd, & f \end{pmatrix}$$

je k-násobok prvého riadku a rovnica kužeľosečky má tvar

$$ax^2 + 2kaxy + k^2ay^2 + 2dx + 2kdy + f = 0;$$

po vynásobení nenulovým číslom a ju upravíme na tvar

$$(ax + kay + d)^2 + af - d^2 = 0,$$

t.j.

$$(ax + by + d)^2 + af - d^2 = 0.$$

Pre $af - d^2 > 0$ je to formálne reálna kužeľosečka, pre $af - d^2 = 0$ je to rovnica dvojnásobnej priamky $ax + by + d = 0$ a nakoniec pre $af - d^2 < 0$ sa kužeľosečka skladá z dvoch rôznych rovnobežných priamok súmerne združených podľa priamky $ax + by + d = 0$. V každom z týchto prípadov má kužeľosečka jediný asymptotický smer určený rovnicami

$$au + bv = 0, \quad \text{t. j.} \quad a(u + kv) = 0,$$
$$bu + cv = 0, \quad ak(u + kv) = 0,$$

ktorým vyhovujú súradnice $u = -k$, $v = 1$. Smer vektora $\vec{u} = (-k, 1)$ je však totožný so smerom priamky $x + ky = 0$ rovnobežnej s priamkou $ax + by + d = 0$.

Keby $a = 0$, vtedy $c \neq 0$ a celý postup by bol obdobný.

<u>Definícia</u>. Kužeľosečka, pre ktorú sa determinant $\triangle$ rovná nule, sa nazýva singulárna.

Predchádzajúce úvahy môžeme zhrnúť do nasledujúceho tvrdenia.

<u>Veta</u>. Ak pre singulárnu kužeľosečku $ac - b^2 > 0$, kužeľosečka nemá nijaký asymptotický smer a skladá sa z jediného bodu, ktorý je singulárny. V prípade, keď $ac - b^2 < 0$, singulárna kužeľosečka sa skladá z dvoch rôznobežných priamok, ktoré sa pretínajú v jedinom singulárnom bode kužeľosečky. Smery týchto priamok sú asym-

ptotickými smermi kužeľosečky. Ak pre singulárnu kužeľosečku $ac - b^2 = 0$, jedna z rovníc

$$ax + by + d = 0,$$

$$bx + cy + e = 0$$

je násobok druhej a body, ktorých súradnice vyhovujú týmto rovniciam, vyplnia priamku. Smer tejto priamky je jediným asymptotickým smerom kužeľosečky, ktorá sa skladá alebo z tejto priamky, alebo z dvoch priamok podľa nej súmerne združených, alebo je formálne reálna.

Nech na kužeľosečke s rovnicou /1/ leží celá priamka, určená napr. bodom $M = [m, n]$ a vektorom $\vec{u} = (u, v)$. Rovnica /6/ musí byť potom splnená pre každé t, teda koeficient kvadratického člena, koeficient lineárneho člena aj absolútny člen sa rovná nule:

$$u\left(am + bn + d\right) + v\left(bm + cn + e\right) = 0,$$

$$m\left(am + bn + d\right) + n\left(bm + cn + e\right) + dm + en + f = 0,$$

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0.$$

Bod M je alebo singulárny bod kužeľosečky a determinant Δ kužeľosečky sa vtedy rovná nule, alebo bod M nie je singulárny bod kužeľosečky. Vtedy aspoň jedno z čísel $am + bn + d$, $bm + cn + e$ sa nerovná nule a z prvej rovnice vyplýva $u = -k\left(bm + cn + e\right)$, $v = k\left(am + bn + d\right)$, $k \neq 0$. Dosadením do tretej rovnice a použitím druhej rovnice dostaneme opäť $\Delta = 0$. Teda platí: Keď obsahuje kužeľosečka priamku, je to singulárna kužeľosečka.

Príklad. Kužeľosečka má rovnicu

$$2x^2 + 2xy - 3x - y + 1 = 0.$$

Aká je to kužeľosečka ?

R i e š e n i e . Pri porovnaní so všeobecnou rovnicou kužeľosečky vidíme, že $a = 2$, $b = 1$, $d = -\frac{3}{2}$, $e = -\frac{1}{2}$, $f = 1$, $c = 0$. Singulárne body kužeľosečky sú určené rovnicami

$$2x + y - \frac{3}{2} = 0,$$

$$x - \frac{1}{2} = 0,$$

$$-\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0,$$

odkiaľ vyplýva $x = y = \frac{1}{2}$. Kužeľosečka má jediný singulárny bod $M = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Rovnica asymptotických smerov je $2u^2 + 2uv = 0$. Koreňom $u = 0$ je určený smer vektora $\vec{d} = (0, 1)$, rovnica $u + v = 0$ dáva smer vektora $\vec{v} = (1, -1)$. Vieme, že so singulárnym bodom leží na kužeľosečke celá priamka, ktorá týmto bodom prechádza a ktorej smer je asymptotickým smerom kužeľosečky. Priamka $(M, \vec{d})$ má rovnicu

$$x = \frac{1}{2};$$

priamka $(M, \vec{v})$ má parametrické vyjadrenie

$$x = \frac{1}{2} + t, \quad y = \frac{1}{2} - t$$

a neparametrickú rovnicu

$$x + y = 1.$$

Vynásobením

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \left(x + y - 1\right)$$

dostaneme

$$x^2 - xy - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} .$$

Keď tento výraz dáme na ľavú stranu rovnice, ktorej pravá strana sa rovná nule, dostaneme rovnicu našej kužeľosečky, skladajúcej sa z dvoch rôznobežných priamok.

<u>Príklad</u>. Ukážte, že rovnicou

$$4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 4y + q = 0$$

je pre každé reálne číslo q určená singulárna kužeľosečka. Je to kužeľosečka bodovo alebo formálne reálna ?

R i e š e n i e . Maticový tvar rovnice našej kužeľosečky je

$$(x, \quad y, \quad 1) \begin{pmatrix} 4, & 2, & 4 \\ 2, & 1, & 2 \\ 4, & 2, & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Singulárne body sú určené rovnicami

$$4x + 2y + 4 = 0,$$
$$2x + y + 2 = 0,$$
$$4x + 2y + q = 0.$$

Keď $q = 4$, sú všetky tri rovnice ekvivalentné, kužeľosečka sa skladá z priamky singulárnych bodov $2x + y + 2 = 0$. Pre $q \neq 4$ sú len prvé dve rovnice sústavy ekvivalentné; kužeľosečka je alebo formálne reálna, alebo sa skladá z dvoch rovnobežiek súmerne združených podľa priamky $2x + y + 2 = 0$. Vidíme, že rovnicu našej kužeľosečky môžeme písať v tvare

$$\left(2x + y + 2\right)^2 + q - 4 = 0.$$

Pre $q > 4$ je to kužeľosečka formálne reálna, pre $q < 4$ sa skladá z dvoch rovnobežiek s rovnicami

$$2x + y + 2 + \sqrt{4 - q} = 0,$$
$$2x + y + 2 - \sqrt{4 - q} = 0.$$

<u>Príklad</u>. Kužeľosečka je daná rovnicou

$$p\left(x^2 + y^2\right) + \left(1 + p^2\right) xy + \left(1 + p\right)\left(x + y\right) + 1 = 0.$$

Ukážte, že pre každé p je to singulárna kužeľosečka, a podrobnejšie určite, o akú kužeľosečku ide.

R i e š e n i e . V tomto prípade

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p, & \frac{1 + p^2}{2}, & \frac{1 + p}{2} \\ \frac{1 + p^2}{2}, & p, & \frac{1 + p}{2} \\ \frac{1 + p}{2}, & \frac{1 + p}{2}, & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = p^2 + 2 . \frac{1 + p^2}{2} . \frac{(1 + p)^2}{4} - \frac{(1 + p)^2}{4} p - \frac{(1 + p^2)^2}{4} -$$

$$- \frac{(1 + p)^2}{4} p = \frac{1}{4} \left[4p^2 + \left(1 + p^2\right) \left(1 + p\right)^2 - 2p\left(1 + p\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(1 + p^2\right)^2\right] = 0,$$

teda pre každé p je kužeľosečka singulárna. Ďalej

$$ac - b^2 = p^2 - \frac{(1 + p^2)^2}{4} = -\frac{(1 - p^2)^2}{4} .$$

Pre $p^2 = 1$ má kužeľosečka jediný asymptotický smer, inak ich má vždy dva. Keď $p = 1$, rovnica kužeľosečky má tvar

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2(x + y) + 1 = 0,$$

$$(x + y)^2 + 2(x + y) + 1 = 0,$$

$$(x + y + 1)^2 = 0;$$

kužeľosečka sa skladá len z priamky $x + y + 1 = 0$.

Keď $p = -1$, rovnica kužeľosečky má tvar

$$-x^2 - y^2 + 2xy + 1 = 0,$$

$$(x - y)^2 - 1 = 0,$$

$$(x - y - 1)(x - y + 1) = 0;$$

kužeľosečka sa skladá z dvoch rôznych rovnobežiek. Nakoniec pre $p^2 \neq 1$ musí mať kužeľosečka singulárny bod. Jeho súradnice budú vyhovovať rovniciam

$$px + \frac{1 + p^2}{2}y + \frac{1 + p}{2} = 0,$$

$$\frac{1 + p^2}{2}x + py + \frac{1 + p}{2} = 0,$$

$$\frac{1 + p}{2}x + \frac{1 + p}{2}y + 1 = 0.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme

$$(1 - p)^2x - (1 - p)^2y = 0,$$

t. j.

$$x - y = 0,$$

zatiaľ čo tretiu rovnicu môžeme upraviť na tvar

$$x + y = -\frac{2}{1 + p} .$$

Jediný koreň

$$x = y = -\frac{1}{1+p}$$

posledných dvoch rovníc predstavuje súradnice jediného singulárneho bodu kužeľosečky. Rovnica pre asymptotické smery je

$$p\left(u^2 + v^2\right) + \left(1 + p^2\right) uv = 0,$$

t. j.

$$u\left(pu + \frac{1+p^2}{2}v\right) + v\left(\frac{1+p^2}{2}u + pv\right) = 0.$$

Teda hľadáme také λ, že

$$pu + \frac{1+p^2}{2}v = -\lambda v,$$

$$\frac{1+p^2}{2}u + pv = \lambda u,$$

t. j.

$$pu + \left(\frac{1+p^2}{2} + \lambda\right) v = 0,$$

$$\left(\frac{1+p^2}{2} - \lambda\right) u + pv = 0.$$

Aby táto sústava mala netriviálne riešenie, musí sa determinant sústavy rovnať nule, t. j.

$$p^2 - \frac{(1+p^2)^2}{4} + \lambda^2 = 0,$$

$$\lambda^2 = \frac{(1-p^2)^2}{4},$$

$$\lambda_1 = \frac{1-p^2}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{p^2-1}{2}.$$

Keď dosadíme do predchádzajúcej sústavy za λ koreň λ_1, dostaneme

$$pu + v = 0$$

$$p^2u + pv = 0,$$

teda $v = -pu$; príslušný asymptotický smer je určený vektorom $\vec{u} = (1, -p)$. Podobne pre $\lambda = \lambda_2$ dostaneme pre asymptotický smer rovnice

$$pu + p^2v = 0,$$
$$u + pv = 0;$$

druhý asymptotický smer je určený vektorom $\vec{v} = (-p, 1)$. Kužeľosečka sa skladá z dvoch priamok, ktoré prechádzajú bodom

$$\left[-\frac{1}{1+p}, -\frac{1}{1+p}\right]$$

a ktorých smery sú určené vektormi $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Prvá priamka má rovnicu

$$p\left(x + \frac{1}{1+p}\right) + y + \frac{1}{1+p} = 0,$$

čiže

$$px + y + 1 = 0.$$

Druhá priamka má rovnicu

$$x + py + 1 = 0.$$

Rovnicu kužeľosečky možno písať v tvare

$$(px + y + 1)(x + py + 1) = 0.$$

Cvičenia

19. Ukážte, že rovnicou

$$y^2 - xy - 5x + 7y + 10 = 0$$

je určená singulárna kužeľosečka, a podrobnejšie zistite, o akú kužeľosečku ide.

20. Z ktorých priamok sa skladá kužeľosečka

$$21x^2 + xy - 10y^2 = 0?$$

21. Z ktorých priamok sa skladá kužeľosečka

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0?$$

22. Určite a tak, aby kužeľosečka

$$x^2 + 2ay^2 - x + y = 0$$

bola singulárna. Aká je to vtedy kužeľosečka?

23. Určite p, q tak, aby kužeľosečka

$$x^2 + 2pxy + y^2 + 2x + 2qy - 3 = 0$$

predstavovala dvojicu rovnobežných priamok. Napíšte ich rovnice.

6. Regulárne kužeľosečky. Dotyčnica kužeľosečky

Venujme sa teraz kužeľosečkám, ktoré nie sú singulárne; budeme ich nazývať regulárne. Zatiaľ o každej regulárnej kužeľosečke vieme, že jej determinant $\Delta \neq 0$ a že kužeľosečka nemôže obsahovať priamku. Predpokladajme, že rovnicou /1/ je určená regulárna kužeľosečka, na ktorej leží bod $M = [m, n]$. Vtedy aspoň jedno z čísel $am + bn + d$, $bm + cn + e$ sa nerovná nule a absolútny člen v rovnici /6/ sa rovná nule nezávisle od voľby vektora $\vec{u}$. Aby sa rovnal nule aj koeficient lineárneho člena, je nutné a stačí si zvoliť smer priamky $(M, \vec{u})$ totožný so smerom nenulového vektora $(-bm - cn - e,\ am + bn + d)$, teda

$$u = -bm - cn - e,$$
$$v = am + bn + d.$$

Smer tohto vektora nemôže byť asymptotický smer kužeľosečky, lebo vtedy by celá priamka $(M, \vec{u})$ ležala na kužeľosečke, kužeľosečka by bola singulárna, a to je v rozpore s predpokladom. Rovnica /6/ pre spoločné body priamky $(M, \vec{u})$ a kužeľosečky má preto tvar

$$\left(au^2 + 2buv + cv^2\right) t^2 = 0,$$

pričom $au^2 + 2buv + cv^2 \neq 0$. Preto má jediný /dvojnásobný/ koreň $t = 0$, priamka má s kužeľosečkou spoločný len bod M a smer priamky nie je asymptotický. Taká priamka sa nazýva dotyčnica kužeľosečky, presnejšie dotyčnica kužeľosečky v jej regulárnom bode M. Bod M sa nazýva bod dotyku alebo dotykový bod dotyčnice. Parametrické vyjadrenie dotyčnice má tvar

$$x = m - t\left(bm + cn + e\right),$$
$$y = n + t\left(am + bn + d\right);$$

neparametrická rovnica dotyčnice v bode $M = [m, n]$ je

$$\left(am + bn + d\right) x + \left(bm + cn + e\right) y + dm + en + f = 0.$$

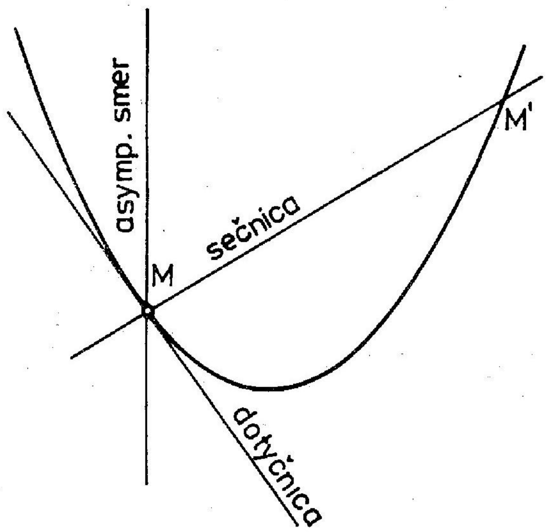
Túto rovnicu dostaneme z predchádzajúcich dvoch rovníc vylúčením parametra t a použitím predpokladu, že bod M je bodom kužeľosečky. V maticovom zápise má tvar

$$(m, \quad n, \quad 1) \begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

alebo aj

$$(x, \quad y, \quad 1) \begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Keď prechádza bodom M regulárnej kužeľosečky priamka iná ako dotyčnica, môžu nastať dva prípady. Smer tejto priamky alebo je, alebo nie je asymptotickým smerom kužeľosečky. V prvom prípade rovnica /6/ pre spoločné body priamky a kužeľosečky má tvar $Bt = 0$, $B \neq 0$, a priamka má s kužeľosečkou spoločný zase len bod M, ale nenazýva sa dotyčnica a odlišuje sa od dotyčnice tým, že jej smer je asymptotický smer kužeľosečky /obr. 7/. V druhom prípade má rovnica /6/ tvar $At^2 + Bt = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, a priamka $(M, \vec{u})$ pretne kužeľosečku v bode M a ešte v ďalšom bode $M' \neq M$. Priamku nazývame <u>sečnica</u> kužeľosečky a úsečku MM' <u>tetiva</u> kužeľosečky. Vidíme, že najviac tri priamky prechádzajúce bodom M ležiacim na kužeľosečke môžu mať s touto regulárnou kužeľosečkou spoločný len bod M: dotyčnica v bode M a dve priamky asymptotických smerov; sú to teda okrem dotyčnice najviac ďalšie dve priamky. Každá iná priamka idúca bodom M je sečnica kužeľosečky. Preto ak má regulárna kužeľosečka aspoň jeden bod, má ich nekonečne mnoho, pretože má nekonečne mnoho sečníc prechádzajúcich týmto bodom. Okrem toho žiadne tri body kužeľosečky nemôžu ležať na jednej priamke, pretože potom by musel byť každý bod priamky bodom kužeľosečky a kužeľosečka by bola singulárna.



Obr. 7

Vieme, že ak bod $M = [m, n]$ spĺňa rovnice

$$\begin{aligned} am + bn + d &= 0, \\ bm + cn + e &= 0, \end{aligned} \qquad /7/$$

je stredom kužeľosečky, ktorá má rovnicu /1/. Obrátene, nech bod $M = [m, n]$ je stred kužeľosečky /1/. To znamená, že s každým bodom $X = [x, y]$, ktorého súradnice vyhovujú rovnici kužeľosečky, budú rovnici kužeľosečky vyhovovať aj súradnice bodu $X' = [x', y']$ súmerne združeného s bodom X podľa stredu M. O súradniciach týchto troch bodov platí

$$\frac{x + x'}{2} = m, \qquad \frac{y + y'}{2} = n$$

Z platnosti /1/ musí teda vyplývať

$$a\left(2m - x\right)^2 + 2b\left(2m - x\right)\left(2n - y\right) + c\left(2n - y\right)^2 + $$
$$+ 2d\left(2m - x\right) + 2e\left(2n - y\right) + f = 0.$$

Keď odčítame od tejto rovnice rovnicu /1/ a výsledok vydelíme štyrmi, dostaneme

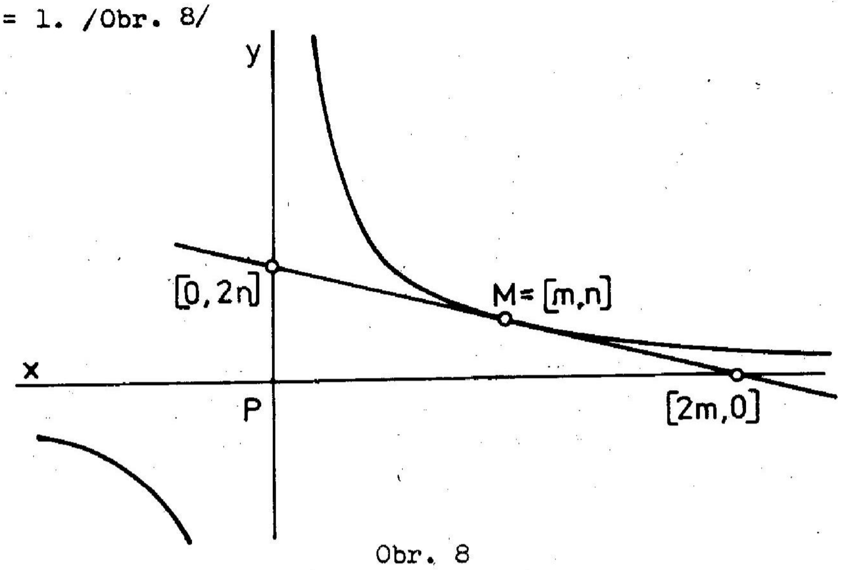
$$-\left(am + bn + d\right) x - \left(bm + cn + e\right) y +$$
$$+ am^2 + 2bmn + cn^2 + dm + en = 0,$$

t. j.

$$\left(am + bn + d\right)\left(x - m\right) + \left(bm + cn + e\right)\left(y - n\right) = 0.$$

Z platnosti rovnice /1/ má vyplývať platnosť tejto rovnice. Ak aspoň jeden z koeficientov $am + bn + d$, $bm + cn + e$ sa nerovná nule, je táto rovnica rovnicou priamky. Každý bod kužeľosečky by musel ležať na tejto priamke. Ako sme však pred chvíľou dokázali, pre regulárnu kužeľosečku s aspoň jedným bodom to neplatí. Preto musia byť splnené rovnice /7/. V prípade regulárnej bodovo reálnej kužeľosečky sú preto rovnicami /7/ určené všetky stredy a toto tvrdenie platí aj pre singulárne bodovo reálne kužeľosečky. Stredom formálne reálnej kužeľosečky je každý bod roviny, pretože prázdna množina je súmerná podľa ľubovoľného bodu.

<u>Príklad</u>. Určite rovnicu dotyčnice kužeľosečky $xy = 1$ v jej bode $[m, n]$, $mn = 1$. /Obr. 8/



Obr. 8

R i e š e n i e. V tomto prípade sa všetky koeficienty v rovnici kužeľosečky rovnajú nule okrem $b = \frac{1}{2}$, $f = -1$. Kužeľosečka je regulárna, pretože $\triangle = \frac{1}{4}$. Hľadaná dotyčnica má rovnicu

$$\frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}my - 1 = 0, \quad \text{t. j.} \quad nx + my - 2 = 0$$

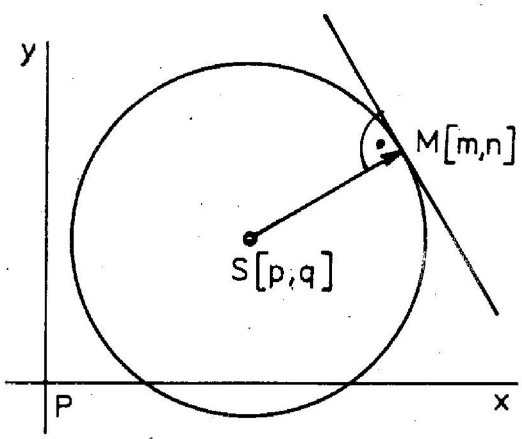
a priamky $x = 0$ a $y = 0$ pretína v bodoch $[0, 2n]$, $[2m, 0]$.

Príklad. Určite dotyčnicu kružnice

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0 \qquad (r > 0)$$

v jej bode $M = [m, n]$. Predpokladáme, že vybraná sústava súradníc je karteziánska.

R i e š e n i e. Daná kružnica má stred v bode $S = [p, q]$ a jej polomer sa rovná r /obr. 9/. Pretože bod M leží na kružnici, platí



Obr. 9

$$(m - p)^2 + (n - q)^2 = r^2$$

a v maticovom tvare má kružnica rovnicu

$$(x, \quad y, \quad 1) \begin{pmatrix} 1, & 0, & -p \\ 0, & 1, & -q \\ -p, & -q, & p^2 + q^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Hľadaná dotyčnica bude mať rovnicu

$$(m, \quad n, \quad 1) \begin{pmatrix} 1, & 0, & -p \\ 0, & 1, & -q \\ -p, & -q, & p^2 + q^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

teda

$$(m - p)x + (n - q)y - pm - qn + p^2 + q^2 - r^2 = 0,$$

čiže

$$(m - p)(x - p) + (n - q)(y - q) = r^2.$$

Vektor $M - S = (m - p,\ n - q)$ je na túto dotyčnicu kolmý, čo je v súlade s našimi vedomosťami o kružnici, že totiž dotyčnica je kolmá na priamku idúcu dotykovým bodom a stredom kružnice.

Príklad. Ukážte, že kužeľosečka

$$x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$$

je regulárna, a nájdite všetky priamky, ktoré prechádzajú bodom $[3, 5]$ kužeľosečky a majú s kužeľosečkou spoločný práve jeden bod.

R i e š e n i e . V tomto prípade

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \\ -1, & 0, & 2 \\ 1, & 2, & -5 \end{pmatrix}$$

a determinant $\triangle$ matice sa rovná -3, teda kužeľosečka je regulárna. Keď vynásobíme prvý riadok matice troma, druhý riadok piatimi a oba výsledky sčítame s tretím riadkom, dostaneme riadok $(-1, -1, 8)$; dotyčnica kužeľosečky v bode $[3, 5]$ má preto rovnicu $-x - y + 8 = 0$. Okrem dotyčnice majú s kužeľosečkou spoločný práve jeden bod aj tie priamky, ktoré prechádzajú bodom $[3, 5]$ a ich smery sú asymptotické smery kužeľosečky. Nenulový vektor $\vec{u} = (u, v)$ určuje asymptotický smer našej kužeľosečky práve vtedy, keď $u^2 - 2uv = 0$; jeden asymptotický smer je určený vektorom $(0, 1)$, druhý vektorom $(2, 1)$. Spolu s bodom $[3, 5]$ určujú tieto dva smery hľadané priamky $x = 3$, $x - 2y + 7 = 0$.

Príklad. Určte všetky stredy kužeľosečky z predchádzajúceho príkladu.

R i e š e n i e . Pretože ide o bodovo reálnu kužeľosečku, sú všetky jej stredy určené rovnicami /7/, v našom prípade rovnicami

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0, \\ -x \qquad + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Kužeľosečka má jediný stred so súradnicami $x = 2$, $y = 3$.

Cvičenia

24. Určite dotyčnicu kužeľosečky

$x^2 - y^2 = 25$

v jej bode $[13, 12]$.

25. Určite dotyčnicu kužeľosečky $y = x^2$ v jej bode $[1, 1]$.

26. Ktoré priamky idúce začiatkom sústavy súradníc majú s kužeľosečkou

$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y = 0$

spoločný práve jeden bod? Určite stredy tejto kužeľosečky.

27. Napíšte rovnicu dotyčnice kužeľosečky

$5x^2 + 2xy + y^2 = 5$

idúcej bodom $[1, 0]$.

28. Napíšte rovnicu dotyčnice kužeľosečky

$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$

idúcej bodom $T = [?, 1]$ kužeľosečky.

29. Určite dotyčnice kužeľosečky

$x^2 + 2xy - y^2 + 6x = 0$

v jej priesečníkoch s osou x.

30. Napíšte rovnicu regulárnej kužeľosečky, ktorá sa dotýka osi x v začiatku sústavy súradníc.

7. Dotyčnice a asymptoty kužeľosečky. Polára

V predchádzajúcom článku sme odvodili rovnicu dotyčnice kužeľosečky, keď sme poznali dotykový bod M dotyčnice s kužeľosečkou. Teraz by sme chceli nájsť dotyčnice kužeľosečky idúce bodom $R = [r, s]$ aj v tom prípade, keď bod R nie je bodom kužeľosečky /1/. Predpokladajme, že poznáme niektorú dotyčnicu kužeľosečky /1/ idúcu bodom R. Dotykový bod dotyčnice s kužeľosečkou označme $M = [m, n]$. Táto dotyčnica má rovnicu

$$\left(am + bn + d\right) x + \left(bm + cn + e\right) y + dm + en + f = 0,$$

a pretože na nej leží bod R, musí platiť

$$\left(am + bn + d\right) r + \left(bm + cn + e\right) s + dm + en + f = 0, \qquad /9/$$

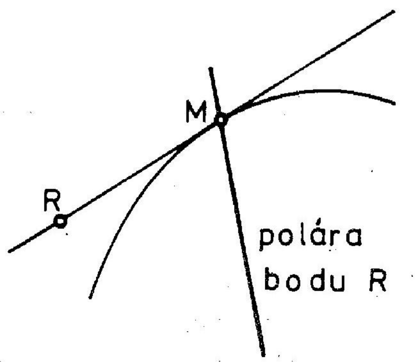
čo možno písať aj v tvare

$$\left(ar + bs + d\right) m + \left(br + cs + e\right) n + dr + es + f = 0. \qquad /10/$$

Aspoň jedno z čísel $ar + bs + d$, $br + cs + e$ sa nesmie rovnať nule, lebo ináč by nemohol existovať bod M spĺňajúci poslednú rovnicu, ledaže by sa rovnal nule aj výraz $dr + es + f$. To by však znamenalo, že R je singulárny bod kužeľosečky, ale regulárna kužeľosečka nemá nijaký singulárny bod. Preto rovnica

$$\left(ar + bs + d\right) x + \left(br + cs + e\right) y + dr + es + f = 0$$

je rovnicou priamky, ktorá sa nazýva polára bodu R vzhľadom na danú kužeľosečku. Body dotyku dotyčníc kužeľosečky idúcich bodom R musia ležať na tejto poláre /obr. 10/. Obrátene, ak bod $M = [m, n]$ kužeľosečky leží na poláre bodu R, je splnená rovnica /10/ totožná s rovnicou /9/, a teda bod R leží na dotyčnici kužeľosečky v bode M. Teda dotykové body dotyčníc kužeľosečky idúcich bodom R ležia na poláre bodu R a obrátene, dotyčnica kužeľosečky v každom bode, ktorý leží na poláre bodu R, prechádza bodom R. Koľko má spoločných bodov polára bodu R s kužeľosečkou /ani jeden, jeden alebo dva/, toľko existuje dotyčníc kužeľosečky prechádzajúcich bodom R.



Obr. 10

Ešte si všimnime, že polára bodu kužeľosečky je dotyčnica kužeľosečky v tomto bode a že predchádzajúce tvrdenie o poláre a dotyčnici možno zovšeobecniť na nasledujúcu vetu, ktorej dôkaz vyplýva z totožnosti rovníc /9/ a /10/.

Veta. Ak bod S leží na poláre bodu R, leží bod R na poláre bodu S.

Príklad. Určite dotyčnice regulárnej kužeľosečky

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$$

idúce začiatkom sústavy súradníc.

Riešenie. Daná kužeľosečka má v maticovom tvare rovnicu

$$\left(x, \quad y, \quad 1\right) \begin{pmatrix} 3, & \frac{7}{2}, & 2 \\ \frac{7}{2}, & 5, & \frac{5}{2} \\ 2, & \frac{5}{2}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ;$$

polára bodu $P = [0, 0]$ má rovnicu

$$\begin{matrix} -5 & 2 & \\ (0, & 0, & 1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 3, & \frac{7}{2}, & 2 \\ \frac{7}{2}, & 5, & \frac{5}{2} \\ 2, & \frac{5}{2}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

čiže

$$2x + \frac{5}{2}y + 1 = 0.$$

Na jej parametrické vyjadrenie použijeme napr. bod $[-3, 2]$ a vektor $\vec{u} = (5, -4)$:

$$x = -3 + 5t,$$
$$y = 2 - 4t.$$

Dosadením do rovnice kužeľosečky dostaneme

$$15t^2 - 16t + 4 = 0.$$

Korene tejto rovnice sú $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{2}{5}$; k nim prislúchajú spoločné body poláry a kužeľosečky

$$M_1 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right], \qquad M_2 = \left[-1, \frac{2}{5}\right].$$

Priamky idúce týmito bodmi a začiatkom sú hľadané dotyčnice, ktorých rovnice sú

$$2x + y = 0, \qquad 2x + 5y = 0.$$

Opíšeme si aj iný spôsob hľadania dotyčníc kužeľosečky idúcich bodom $R = [r, s]$. Hľadáme vlastne taký nenulový vektor $\vec{u} = (u, v)$, že priamka $(R, \vec{u})$ s parametrickým vyjadrením

$$x = r + tu,$$
$$y = s + tv$$

je dotyčnica kužeľosečky. Pre parameter t spoločných bodov tejto priamky s kužeľosečkou /1/ máme známu rovnicu

$$\left(au^2 + 2buv + cv^2\right) t^2 + 2\left[u\left(ar + bs + d\right) + v\left(br + cs + e\right)\right] t + ar^2 + 2brs + cs^2 + 2dr + 2es + f = 0,$$

teda rovnicu

$$At^2 + 2Bt + C = 0.$$

Aby priamka bola dotyčnicou, nesmie jej smer byť asymptotickým smerom kužeľosečky, t. j. $A \neq 0$, a diskriminant tejto kvadratickej rovnice pre t sa musí rovnať nule, teda

$$B^2 - AC = 0.$$

Po dosadení za A, B, C nadobudne táto rovnica tvar

$$u^2\left[(b^2 - ac)\,s^2 + 2\,(bd - ae)\,s + d^2 - af\right] +$$
$$+\,2uv\left[(ac - b^2)\,rs + (ae - bd)\,r + (cd - be)\,s + de - bf\right] +$$
$$+\,v^2\left[(b^2 - ac)\,r^2 + 2\,(be - cd)\,r + e^2 - cf\right] = 0. \qquad /11/$$

Najprv nájdeme tie nenulové vektory $\vec{u} = (u, v)$, ktorých súradnice spĺňajú práve získanú rovnicu /podobne ako sme hľadali asymptotické smery kužeľosečky/. Pre každý taký vektor zisťujeme, či sa $A = au^2 + 2buv + cv^2$ nerovná nule. V kladnom prípade určuje vektor $\vec{u}$ spolu s bodom R dotyčnicu kužeľosečky. Naopak, keby $A = 0$, vyplývalo by z rovnice $B^2 - AC = 0$ aj $B = 0$. Celá priamka nemôže ležať na regulárnej kužeľosečke, a preto $C \neq 0$. Teda priamka $(R, \vec{u})$ nemá s kužeľosečkou ani jeden spoločný bod a jej smer je asymptotický smer kužeľosečky. Taká priamka sa nazýva asymptota kužeľosečky.

Keď zhrnieme predchádzajúce výsledky, vidíme, že priamka idúca bodom R, ktorej smer je určený nenulovým vektorom $\vec{u} = (u, v)$, je dotyčnica alebo asymptota kužeľosečky práve vtedy, keď súradnice vektora $\vec{u}$ vyhovujú rovnici /11/. Pritom je to dotyčnica v prípade $au^2 + 2buv + cv^2 \neq 0$ a asymptota v prípade $au^2 + 2buv + cv^2 = 0$.

Príklad. Riešte spôsobom, ktorý sme práve opísali, predchádzajúci príklad, v ktorom treba nájsť dotyčnice kužeľosečky

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$$

idúce začiatkom sústavy súradníc.

R i e š e n i e . Každá priamka idúca začiatkom má parametrické vyjadrenie

$$x = ut, \; y = vt.$$

Po dosadení týchto výrazov do rovnice kužeľosečky dostaneme rovnicu

$$\left(3u^2 + 7uv + 5v^2\right) t^2 + \left(4u + 5v\right) t + 1 = 0.$$

Diskriminant tejto rovnice je $4u^2 + 12uv + 5v^2$.

Ak majú súradnice u, v nenulového vektora $\vec{u}$ anulovať tento výraz, musí platiť $v \neq 0$ a $u = -\frac{1}{2}v$ alebo $u = -\frac{5}{2}v$.

Diskriminant anulujú len súradnice vektorov $(1, -2)$ a $(5, -2)$ a ich nenulových násobkov. Smer ani jedného z týchto vektorov nie je asymptotickým smerom kužeľosečky, pretože kužeľosečka nijaké asymptotické smery nemá. Každý z týchto vektorov teda určuje so začiatkom sústavy súradníc dotyčnicu kužeľosečky. Tieto dotyčnice majú rovnice

$$2x + y = 0 \quad a \quad 2x + 5y = 0.$$

Príklad. Určite asymptoty a dotyčnice regulárnej kužeľosečky

$$x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$$

idúce bodom $[-2, 1]$.

R i e š e n i e . Parametrické vyjadrenie priamky idúcej bodom $[-2, 1]$ je napr.

$$x = -2 + ut, \qquad y = 1 + vt.$$

Keď dosadíme tieto hodnoty do rovnice kužeľosečky, dostaneme

$$(u^2 - 2uv)\,t^2 + 2\,(4v - 2u)\,t + 3 = 0;$$

podmienka anulovania diskriminantu znamená

$$u^2 - 10uv + 16v^2 = 0.$$

Rovnici vyhovujú /odhliadnuc od možnosti násobenia nenulovým činiteľom/ súradnice vektorov $(8, 1)$ a $(2, 1)$. Rovnica pre asymptotické smery je $u^2 - 2uv = 0$ a vyhovujú jej súradnice druhého vektora; súradnice prvého vektora ju nesplňujú. Vektor $(8, 1)$ určuje s bodom $[-2, 1]$ dotyčnicu, ktorá má rovnicu

$$x - 8y + 10 = 0;$$

vektor $(2, 1)$ určuje s bodom $[-2, 1]$ asymptotu, ktorá má rovnicu

$$x - 2y + 4 = 0.$$

Príklad. Nájdite dotyčnice a asymptoty kužeľosečky

$$xy - 1 = 0$$

idúce bodom $[1, 3]$.

Riešenie. Do rovnice kužeľosečky dosadíme

$$x = 1 + ut, \qquad y = 3 + vt$$

a dostaneme rovnicu

$$uvt^2 + (3u + v)\, t + 2 = 0.$$

Jej diskriminant je

$$9u^2 - 2uv + v^2$$

a nerovná sa nule pre nijaký nenulový vektor (u, v). To znamená, že bodom $[1, 3]$ neprechádza žiadna dotyčnica ani asymptota kužeľosečky $xy = 1$.

Cvičenia

31. Nájdite dotyčnice kužeľosečky

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$

idúce bodom $[3, 4]$.

32. Napíšte rovnice dotyčníc, prípadne asymptot kužeľosečky

$$x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$$

idúcich bodom $[2, 4]$.

33. Určite dotyčnice a asymptoty kužeľosečky

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$$

idúce bodom $[0, 1]$.

34. Nájdite dotyčnice a asymptoty kužeľosečky

$$x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0$$

idúce začiatkom sústavy súradníc. Pri dotyčniciach určite dotykové body.

35. Pre kužeľosečku

$$x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$$

určite asymptoty ako priamky, ktoré majú asymptotický smer a túto regulárnu kužeľosečku nepretínajú.

36. Nájdite dotyčnice a asymptoty kužeľosečky

$$xy - x^2 - 1 = 0$$

idúce bodom $[0, 2]$.

37. Určite rovnicu takej kužeľosečky, ktorá má osi x a y sústavy súradníc za svoje asymptoty.

8. Vnútro a vonkajšok kužeľosečky

Zaoberajme sa teraz otázkou, ktorú sme už v predchádzajúcich konkrétnych príkladoch riešili, a to, koľko dotyčníc /prípadne asymptot/ kužeľosečky /1/ môže prechádzať bodom $R = [r, s]$. To závisí od diskriminantu rovnice /11/ podobne ako pri rovnici pre asymptotické smery, teda od výrazu

$$\left[\left(ac - b^2\right) sr + \left(ae - bd\right) r + \left(cd - be\right) s + de - bf\right]^2 - \\ - \left[\left(b^2 - ac\right) s^2 + 2\left(bd - ae\right) s + d^2 - af\right] \left[\left(b^2 - ac\right) r^2 + \\ + 2\left(be - cd\right) r + e^2 - cf\right],$$

ktorý možno s dostatočnou trpezlivosťou upraviť na tvar

$$- \Delta \left(ar^2 + 2brs + cs^2 + 2dr + 2es + f\right), \qquad /12/$$

kde číslo Δ ako obyčajne označuje determinant matice

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix},$$

a preto sa nerovná nule /lebo berieme do úvahy len regulárne kužeľosečky/. Keď bude výraz /12/ kladný, prechádzajú bodom R dve rôzne dotyčnice alebo asymptoty danej kužeľosečky, presnejšie dve rôzne dotyčnice alebo dve rôzne asymptoty, alebo jedna dotyčnica a jedna asymptota. V tomto prípade sa hovorí, že bod R je <u>vonkajší</u> bod kužeľosečky. Keď bude výraz /12/ záporný, nejestvuje žiadna dotyčnica ani asymptota kužeľosečky, ktorá by prechádzala bodom R. Taký bod sa nazýva <u>vnútorný</u> bod danej kužeľosečky. /Porovnajte túto definíciu vnútorných a vonkajších bodov kužeľosečky s predstavou o vnútorných a vonkajších bodoch kružnice, ktorá je vám známa./ Všetky vnútorné body tvoria tzv. <u>vnútro</u> a všetky vonkajšie body tzv. <u>vonkajšok</u> kužeľosečky. Keď sa výraz /12/ rovná nule, bod R je bod kužeľosečky /$\Delta \neq 0$/ a existuje jediná dotyčnica /a žiadna asymptota/ kužeľosečky, ktorá ním prechádza. Podľa predchádzajúceho textu bod $X = [x, y]$ je práve vtedy

$$\left.\begin{array}{l} \text{vnútorný bod} \\ \text{vonkajší bod} \\ \text{bod} \end{array}\right\} \text{ kužeľosečky s rovnicou /1/, keď má výraz}$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \quad \left\{\begin{array}{l} \text{rovnaké znamienko ako } \Delta \\ \text{opačné znamienko ako } \Delta \\ \text{hodnotu nula.} \end{array}\right.$$

Všimnite si, že pri vynásobení rovnice kužeľosečky záporným číslom sa síce zmení znamienko výrazu $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$, ale zároveň sa zmení znamienko determinantu Δ, takže práve uvedená charakteristika vonkajších a vnútorných bodov kužeľosečky sa zachováva. Zakladá sa to na fakte, že vnútorné /vonkajšie/ body sme definovali geometricky ako body, ktorými neprechádzajú /prechádzajú/ dotyčnice /asymptoty/ kužeľosečky. Každá regulárna kužeľosečka teda rozdeľuje všetky body neležiace na kužeľosečke na vonkajšie a vnútorné body.

Príklad. Ukážte, že kužeľosečka

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2y = 0$$

je regulárna a bod $[1, 1]$ je pre ňu vonkajší bod.

R i e š e n i e . V tomto prípade

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & -1 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = -1.$$

Keď dosadíme do ľavej strany rovnice kužeľosečky $x = 1$, $y = 1$, dostaneme číslo 2. To znamená, že bod $[1, 1]$ je vonkajší bod kužeľosečky.

Cvičenia

38. Ukážte, že v predchádzajúcom príklade sú všetky body priamky $x = 1$ vonkajšie body kužeľosečky.

39. Ktoré body priamky $x + y = 0$ sú vonkajšie body kužeľosečky
$x^2 + 4xy - y^2 + 6y = 0$?

40. Ukážte, že všetky body osi x aj osi y sú vonkajšie body kužeľosečky
$xy - x^2 - 1 = 0$.

41. Pre ktoré čísla a je bod $[a, 3]$ vnútorný bod kužeľosečky
$2xy + x^2 + 1 = 0$?

9. Združené smery a združené priemery kužeľosečky

Nech je opäť rovnicou

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

daná regulárna kužeľosečka a bodom $M = [m, n]$ a nenulovým vektorom $\vec{u} = (u, v)$ priamka, ktorá má parametrické vyjadrenie

$$x = m + ut, \qquad y = n + vt.$$

Pre parameter t spoločného bodu priamky a kužeľosečky platí

$$\left(au^2 + 2buv + cv^2\right) t^2 + 2\left[u\left(am + bn + d\right) + v\left(bm + cn + e\right)\right] t + $$
$$+ am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f = 0. \qquad /6/$$

Predpokladajme, že smer vektora $\vec{u}$ nie je asymptotický smer kužeľosečky, teda

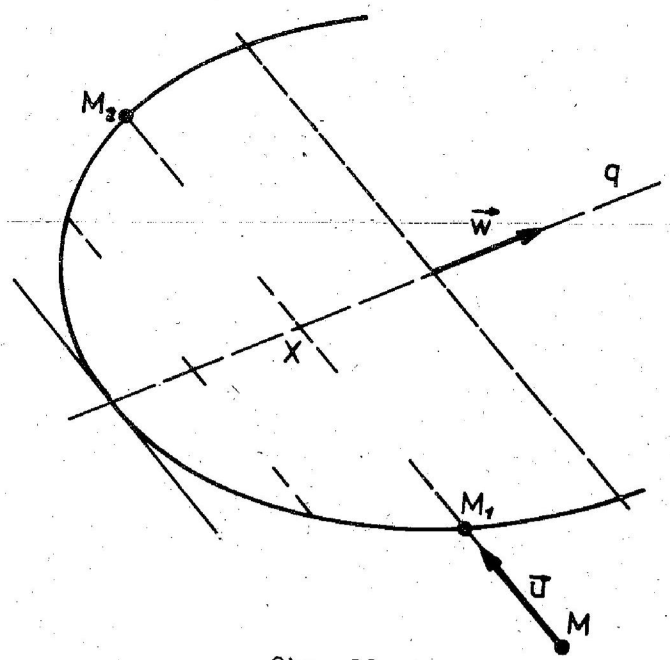
$$au^2 + 2buv + cv^2 \neq 0.$$

Rovnica /6/ pre spoločné body priamky a kužeľosečky je kvadratická rovnica pre neznámu t. Keď bude mať kladný diskriminant, bude mať dva rôzne reálne korene t_1, t_2 a priamka bude mať s kužeľosečkou spoločné dva rôzne body

$$M_1 = M + t_1\vec{u}, \qquad M_2 = M + t_2\vec{u}.$$

/Obr. 11a./ Stred X tetivy M_1M_2 má vyjadrenie

$$X = M + \frac{t_1 + t_2}{2}\vec{u}.$$

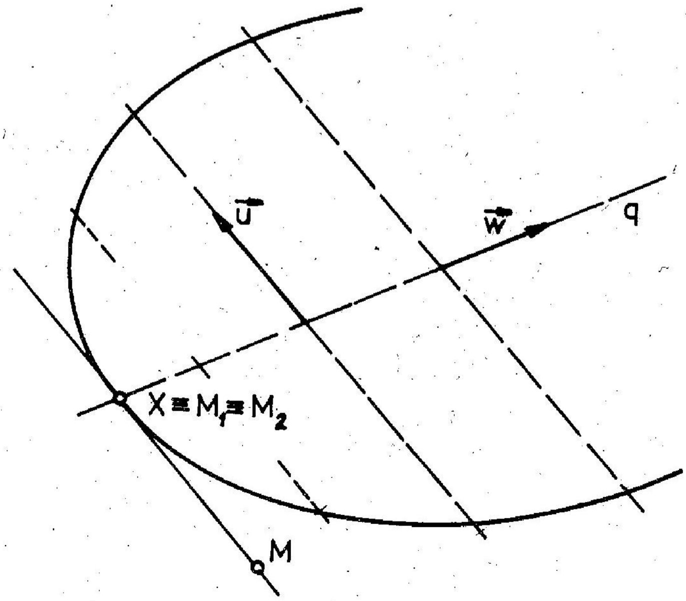


Obr. 11a

Keď bude diskriminant nulový, rovnica /6/ bude mať jeden dvojnásobný koreň $t_1 = t_2$, priamka bude dotyčnica s bodom dotyku

$$M + t_1\vec{u} = M + \frac{t_1 + t_2}{2}\vec{u} .$$

Je to vlastne špeciálny prípad predchádzajúcej situácie, keď M_1 a M_2, a teda aj bod X splývajú do jedného bodu /obr. 11b/.



Obr. 11b

Podľa vlastností koreňov kvadratickej rovnice

$$t_1 + t_2 = \frac{-2\left[u\left(am + bn + d\right) + v\left(bm + cn + e\right)\right]}{au^2 + 2buv + cv^2} .$$

Bod X má teda súradnice

$$x = m + \frac{t_1 + t_2}{2}u =$$

$$= m - u\frac{u\left(am + bn + d\right) + v\left(bm + cn + e\right)}{au^2 + 2buv + cv^2} =$$

$$= -u\frac{du + ev}{au^2 + 2buv + cv^2} + \frac{\left(-mv + nu\right)\left(-bu - cv\right)}{au^2 + 2buv + cv^2} ,$$

$$y = n + \frac{t_1 + t_2}{2}v =$$

$$= n - v\frac{u\left(am + bn + d\right) + v\left(bm + cn + e\right)}{au^2 + 2buv + cv^2} =$$

$$= - v\frac{du + ev}{au^2 + 2buv + cv^2} + \frac{\left(-mv + nu\right)\left(au + bv\right)}{au^2 + 2buv + cv^2} .$$

Aspoň jedno z čísel $au + bv$, $bu + cv$ sa nerovná nule. Inak by totiž bolo $au^2 + 2buv + cv^2 = 0$. Vidíme, že spomenutý stred tetivy leží na priamke s parametrickým vyjadrením

$$x = -u\frac{du + ev}{au^2 + 2buv + cv^2} + t\left(-bu - cv\right),$$

$$y = -v\frac{du + ev}{au^2 + 2buv + cv^2} + t\left(au + bv\right);$$

táto priamka vôbec nezávisí od voľby bodu M. Jej neparametrické vyjadrenie je

$$\left(au + bv\right)x + \left(bu + cv\right)y + du + ev = 0; \qquad /13/$$

maticový tvar tejto rovnice je

$$\left(u, \quad v, \quad 0\right)\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

alebo

$$\left(x, \quad y, \quad 1\right)\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Môžeme teda povedať, že stredy všetkých tetív kužeľosečky rovnobežných s daným nenulovým vektorom $\vec{u} = \left(u, v\right)$ ležia na priamke q, ktorej smer je určený vektorom $\vec{w} = \left(u', v'\right) = \left(-bu - cv, au + bv\right)$. O vektore $\vec{u}$ sme predpokladali len to, že $au^2 + 2buv + cv^2 \neq 0$. Medzi stredy skúmaných tetív môžeme zahrnúť aj dotykové body dotyčníc rovnobežných s vektorom $\vec{u}$. Priamka q sa nazýva <u>priemer</u> kužeľosečky. Hovoríme, že je to <u>priemer združený</u> so smerom vektora $\vec{u}$, alebo že smer vektora $\vec{u}$ je združený s priemerom q. Vektory $\vec{u}$ a $\vec{w}$ sú lineárne nezávislé, čo vyplýva z geometrického významu vektora $\vec{w}$ alebo aj z toho, že determinant zostavený zo súradníc oboch vektorov sa rovná $au^2 + 2buv + cv^2 \neq 0$. Vektor $\vec{u}$ sme vybrali tak, aby jeho smer nebol asymptotický. Aký je smer vektora $\vec{w}$? Určuje alebo neurčuje vektor $\vec{w}$ asymptotický smer? Zistíme to preskúmaním nasledujúceho výrazu:

$$a\left(u'\right)^2 + 2bu'v' + c\left(v'\right)^2 =$$

$$= a\left(bu + cv\right)^2 - 2b\left(bu + cv\right)\left(au + bv\right) + c\left(au + bv\right)^2 =$$

$$= \left(ac - b^2\right)\left(au^2 + 2buv + cv^2\right).$$

1. Keď $ac - b^2 = 0$, smer vektora $\vec{w}$ je asymptotický smer kužeľosečky bez ohľadu na to, ako sme zvolili vektor $\vec{u}$. Všetky priemery kužeľosečky sú rovnobežné s týmto jediným asymptotickým smerom kužeľosečky.

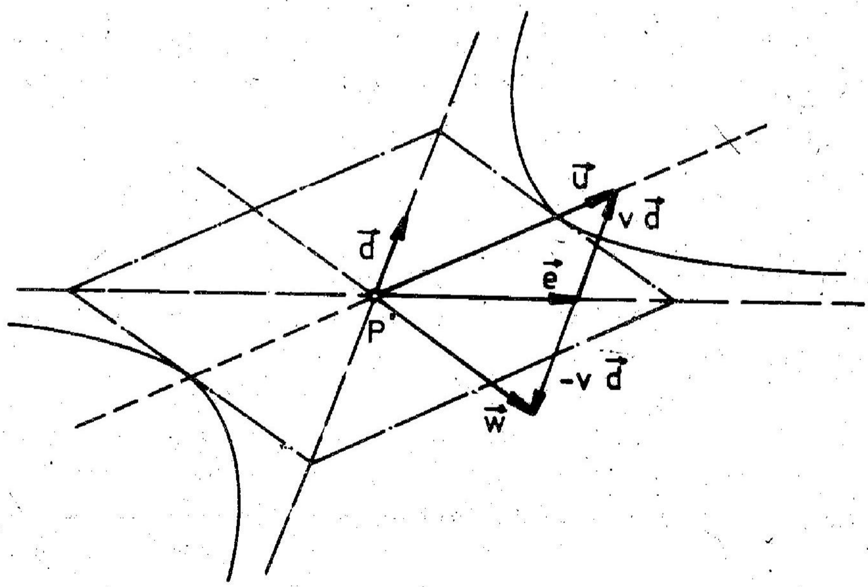
2. Keď $ac - b^2 \neq 0$, smer vektora $\vec{w}$ nie je asymptotický smer skúmanej kužeľosečky. Stredy tetív rovnobežných s vektorom $\vec{w}$ a dotykové body dotyčníc rovnobežných s $\vec{w}$ budú ležať na priamke rovnobežnej s vektorom $\left(-bu' - cv', au' + bv'\right) = \left(b^2 - ac\right)\vec{u}$, teda na priamke rovnobežnej s vektorom $\vec{u}$. Smery určené vektormi $\vec{u} = (u, v)$ a $\vec{w} = (u', v')$ sa nazývajú <u>združené smery</u> kužeľosečky /1/, k nim príslušné priemery kužeľosečky sa nazývajú <u>združené priemery</u>. Stredy tetív kužeľosečky rovnobežných s jedným z týchto priemerov ležia na zvyšujúcom priemere. O súradniciach vektorov $\vec{u} = (u, v)$, $\vec{w} = (u', v')$, ktoré určujú združené smery kužeľosečky, platí

$$auu' + b\left(uv' + vu'\right) + cvv' = 0. \qquad /14/$$

<u>Príklad</u>. Určite priemer kužeľosečky

$xy - 1 = 0$
združený s každým smerom, ktorý nie je asymptotickým smerom kužeľosečky /obr. 12/. Určite všetky dvojice združených priemerov a ukážte, že stredy tetív, rovnobežných s jedným z týchto združených priemerov, ležia na druhom priemere.

R i e š e n i e . Asymptotické smery regulárnej kužeľosečky $xy - 1 = 0$ sú určené vektormi $(1, 0)$ a $(0, 1)$ /pozri príklad na str. 21/. Vezmime nenulový vektor, ktorého smer nie je asymptotický; odhliadnuc od možnosti násobenia nenulovým číslom možno každý taký vektor napísať v tvare $\vec{u} = (1, v)$, $v \neq 0$. Smer združený so smerom vektora $\vec{u}$ je určený vektorom (u', v'), kde $u' = -b - cv = -\frac{1}{2}$, $v' = a + bv = \frac{1}{2}v$, alebo jeho ľubovoľným nenulovým násobkom, napr. vektorom $\vec{w} = (1, -v)$. Priemer združený so smerom vektora $\vec{u}$ má podľa /13/ rovnicu $vx + y = 0$, priemer združený so smerom



Obr. 12

vektora $\vec{w}$ má rovnicu $-vx + y = 0$. Priamky $y - vx = 0$ a $y + vx = 0$ sú dvojicou združených priemerov kužeľosečky $xy - 1 = 0$, $v \neq 0$. Priamka rovnobežná s priamkou $y = vx$ a prechádzajúca bodom $M = [m, n]$ má parametrické vyjadrenie

$$x = m + t, \qquad y = n + vt.$$

Po dosadení týchto výrazov do rovnice kužeľosečky dostaneme kvadratickú rovnicu

$$vt^2 + (mv + n)\,t + mn - 1 = 0,$$

ktorej diskriminant je $(mv - n)^2 + 4v$.

Pre $v > 0$ je diskriminant vždy kladný; pre $v < 0$ je diskriminant nezáporný len vtedy, keď súradnice bodu M spĺňajú nerovnosť

$$(mv - n)^2 \geq -4v,$$

$$|mv - n| \geq 2\sqrt{-v},$$

t. j.

$$mv - n \geq 2\sqrt{-v} \text{ alebo } mv - n \leq -2\sqrt{-v}.$$

Stred tetivy, ktorej krajné body sú priesečníky vybranej priamky s kužeľosečkou, prípadne dotykový bod tejto priamky $(M, \vec{u})$ bude mať súradnice

$$x = m + \frac{-mv - n}{2v} = \frac{mv - n}{2v},$$

$$y = n + \frac{-mv - n}{2v}v = \frac{n - mv}{2},$$

a teda leží na priamke $y = -vx$, ktorej smer je určený vektorom $\vec{w} = (1, -v)$. Obrátene, všetky tetivy rovnobežné s priamkou $y = -vx$ majú stredy na priamke $y = vx$.

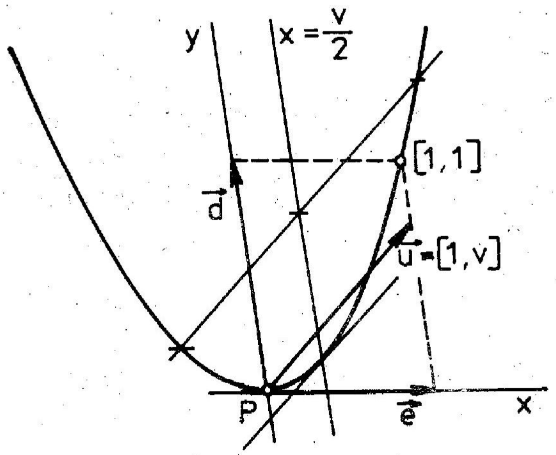
Príklad. Nech je daná kužeľosečka

$$y - x^2 = 0.$$

Ku každému smeru, ktorý nie je asymptotický smer kužeľosečky, zistite združený priemer.

Riešenie /obr. 13/. Kužeľosečka je regulárna, má jediný asymptotický smer určený vektorom $(0, 1)$. Každý iný smer možno určiť vektorom $\vec{u} = (1, v)$. Priemer združený s týmto smerom je podľa /13/ určený rovnicou $-2x + v = 0$; všetky priemery sú rovnobežné s vektorom $(0, 1)$. Priamka rovnobežná s vektorom $\vec{u} = (1, v)$ má rovnicu $y = vx + q$, a ak $4q > -v^2$, priamka pretína kužeľosečku v dvoch bodoch. Prvé súradnice týchto dvoch bodov sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - vx - q = 0.$$



Obr. 13

Stred tetivy určenej týmito bodmi má prvú súradnicu $x = \frac{1}{2}v$, a teda leží na priemere združenom so smerom vektora $(1, v)$. Keď $4q = -v^2$, priamka je dotyčnica a jej dotykový bod má súradnice $x = \frac{1}{2}v$, $y = \frac{1}{4}v^2$. Teda aj tento dotykový bod leží na priemere združenom so smerom priamky $y = vx$.

Z predchádzajúcich príkladov si môžeme odvodiť všeobecný postup, ako nájsť dotyčnice kužeľosečky rovnobežné s daným smerom, ktorý nie je asymptotickým smerom kužeľosečky. Videli sme, že dotykové body týchto dotyčníc ležia na priemere združenom so zvoleným smerom. A podobne ako pri konštrukcii dotyčníc kužeľosečky prechádzajúcich daným bodom možno ukázať, že dotyčnica kužeľosečky v bode kužeľosečky, ktorý leží na priemere združenom so smerom vektora $\vec{u}$, má smer vektora $\vec{u}$.

Príklad. Určite dotyčnice kužeľosečky

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

rovnobežné s osou x.

R i e š e n i e . V našom prípade

$$a = c = d = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad e = \frac{3}{2}, \quad f = -3.$$

Priemer združený so smerom vektora $\vec{d} = (1, 0)$ má rovnicu

$$x + \frac{1}{2}y + 1 = 0,$$

teda $y = -2x - 2$. Musíme určiť spoločné body tohto priemeru a kužeľosečky, čo môžeme urobiť aj tak, že za y dosadíme do rovnice kužeľosečky výraz $(-2x - 2)$. Dostaneme

$$3x^2 + 2x - 5 = 0;$$

korene tejto rovnice sú $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{3}$ a z toho ďalej $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{4}{3}$. Dotykové body dotyčníc rovnobežných s osou x sú body $M_1 = [1, -4]$, $M_2 = \left[-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right]$; rovnice dotyčníc sú $y + 4 = 0$ a $3y - 4 = 0$.

Cvičenia

42. Určite priemer kužeľosečky

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

združený so smerom osi y.

43. Určite dotyčnice regulárnej kužeľosečky

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

rovnobežné s priamkou $3x + 3y - 7 = 0$ a dotykové body týchto dotyčníc.

44. Pre ktorý nenulový vektor $\vec{u} = (u, v)$ je priemer združený so smerom vektora $\vec{u}$ vzhľadom na kužeľosečku

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$$

rovnobežný s vektorom $(1, 1)$?

45. Ukážte, že os y je priemer kužeľosečky

$$2x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Aká je rovnica priemeru združeného s týmto priemerom?

46. Nájdite takú dvojicu združených priemerov regulárnej kužeľosečky

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0,$$

z ktorých jeden je rovnobežný s osou y.

47. Určite dotyčnice kužeľosečky z predchádzajúceho príkladu rovnobežné s osou x.

48. Ukážte, že kužeľosečka

$$x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0$$

je regulárna, a napíšte rovnicu priemeru združeného so smerom priamky $x - 2y = 0$. Nájdite dotyčnice kužeľosečky rovnobežné s touto priamkou.

49. Napíšte rovnice dotyčníc kužeľosečky

$$y^2 - 10x - 2y = 0$$

rovnobežných s priamkou $y = x$.

10. Afinná klasifikácia regulárnych kužeľosečiek

Podobne ako sme v odseku 5 prebrali všetky singulárne kužeľosečky, chceli by sme teraz roztriediť, klasifikovať všetky regulárne kužeľosečky. Majme nejakú lineárnu sústavu súradníc, v ktorej rovnicou

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad /1/$$

je daná regulárna kužeľosečka. Zvoľme si nenulový vektor $\vec{u} = (u, v)$, ktorého smer nie je asymptotický smer tejto kužeľosečky; výraz

$$au^2 + 2buv + cv^2$$

sa teda nerovná nule. Keď si zvolíme namiesto vektora $\vec{u}$ jeho nenulový k-násobok, zväčší sa tento výraz k^2-krát, ale znamienko výrazu sa nezmení ani pri zápornom k. Ak je dané nenulové číslo r, ktoré má rovnaké znamienko ako výraz $au^2 + 2buv + cv^2$, môžeme dokonca predpokladať, že obe čísla sa rovnajú, t.j.

$$au^2 + 2buv + cv^2 = r.$$

Keby to nebolo, nahradili by sme vektor $\vec{u}$ jeho k-násobkom, pričom by sme k vybrali tak, aby

$$k^2\left(au^2 + 2buv + cv^2\right) = r.$$

Ďalej vyberme taký nenulový vektor $\vec{w} = (u', v')$, že smery vektorov $\vec{u}$, $\vec{w}$ sú združené smery danej kužeľosečky, teda

$$auu' + b\left(uv' + vu'\right) + cvv' = 0,$$

t. j.

$$u'\left(au + bv\right) + v'\left(bu + cv\right) = 0.$$

Odhliadnuc od možnosti násobenia nenulovým číslom sa teda vektor $\vec{w}$ rovná vektoru $(-bu - cv,\ au + bv)$, čiže

$$u' = -\lambda\,(bu + cv)\ ,\quad v' = \lambda\,(au + bv),\quad \lambda \neq 0.$$

Potom

$$a(u')^2 + 2bu'v' + c\,(v')^2 = \lambda^2(ac - b^2)\,(au^2 + 2buv + cv^2). \qquad /15/$$

Keď $ac - b^2 > 0$, výrazy $au^2 + 2buv + cv^2$, a $(u')^2 + 2bu'v' + c\,(v')^2$ majú rovnaké znamienka, keď $ac - b^2 < 0$, majú navzájom opačné znamienka. Keď $ac - b^2 = 0$, smer vektora $\vec{w}$ je asymptotický smer kužeľosečky. Pretože sme smer vektora $\vec{u}$ vybrali tak, aby smer nebol asymptotický, sú vo všetkých troch prípadoch vektory $\vec{u}$, $\vec{w}$ lineárne nezávislé. Keď k nim pridáme ľubovoľný bod $M = [m, n]$, môžeme každý bod $X = [x, y]$ napísať jednoznačne v tvare

$$X = M + \xi\,\vec{u} + \eta\,\vec{w},$$

čo pre súradnice znamená

$$\begin{aligned} x &= m + \xi u + \eta u', \\ y &= n + \xi v + \eta v'. \end{aligned} \qquad /16/$$

Čísla ξ, η sú vlastne súradnice bodu X vzhľadom na lineárnu sústavu súradníc $\{M, \vec{u}, \vec{w}\}$ a rovnosti /16/ vyjadrujú vzťah medzi „novými" súradnicami ξ, η a „starými" súradnicami x, y toho istého bodu X. Dosaďme za x a y výrazy z rovností /16/ do rovnice /1/; po dlhšom výpočte dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned} &(au^2 + 2buv + cv^2)\,\xi^2 + \left[a\,(u')^2 + 2bu'v' + c\,(v')^2\right]\eta^2 + \\ &+ 2\left[u(am + bn + d) + v(bm + cn + e)\right]\xi + \\ &+ 2\left[u'(am + bn + d) + v'(bm + cn + e)\right]\eta + \\ &+ am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f = 0, \end{aligned} \qquad /17/$$

ktorá neobsahuje člen s $\xi\,\eta$. Bod X leží na danej kužeľosečke práve vtedy, keď jeho súradnice x, y spĺňajú rovnicu /1/, čo je podmienka ekvivalentná s podmienkou, aby jeho súradnice ξ, η spĺňali rovnicu /17/.

Ďalej sa pokúsime nahradiť vektory $\vec{u}$ a $\vec{w}$ ich vhodnými nenulovými násobkami /čím sa nezmenia smery týchto vektorov/ tak, aby pri súčasnom vhodnom výbere bodu M rovnica /17/ mala čo najjednoduchší tvar. Pritom rozlíšime tri prípady podľa znamienka výrazu $ac - b^2$.

I. $ac - b^2 > 0$.

V tomto prípade existuje práve jeden bod $M = [m, n]$, ktorého súradnice spíňajú rovnice

$$am + bn + d = 0,$$

$$bm + cn + e = 0;$$

tento bod je stred kužeľosečky. Ak si zvolíme práve tento bod M za začiatok novej sústavy súradníc, zmiznú v rovnici /17/ členy s ξ a η a absolútny člen sa rovná

$$am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f =$$

$$= m\left(am + bn + d\right) + n\left(bm + cn + e\right) + dm + en + f =$$

$$= d\frac{be - cd}{ac - b^2} + e\frac{bd - ae}{ac - b^2} + f =$$

$$= \frac{2bed - cd^2 - ae^2 + acf - b^2f}{ac - b^2} = \frac{\Delta}{ac - b^2};$$

Δ je determinant matice

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

a nerovná sa nule, pretože sa zaoberáme len regulárnymi kužeľosečkami. Rovnica /17/ má takýto tvar:

$$\left(au^2 + 2buv + cv^2\right)\xi^2 + \left[a\left(u'\right)^2 + 2bu'v' + c\left(v'\right)^2\right]\eta^2 +$$

$$+ \frac{\Delta}{ac - b^2} = 0. \qquad /18/$$

Pretože predpokladáme, že $ac - b^2 > 0$, tým skôr $ac > 0$ a

$$a\left(au^2 + 2buv + cv^2\right) = \left(au + bv\right)^2 + \left(ac - b^2\right)v^2 > 0.$$

Ďalej musíme svoje úvahy rozvetviť podľa toho, či Δ a $au^2 + 2buv + cv^2$ majú rovnaké alebo opačné znamienka. Pretože $\left(au^2 + 2buv + cv^2\right)a > 0$, rozvetvujeme ďalšie úvahy vlastne podľa znamienka súčinu $a\Delta$.

Ia/ $a\Delta > 0$. V tomto prípade majú čísla Δ, a, $au^2 + 2buv + cv^2$ a podľa /15/ aj číslo $a\,(u')^2 + 2bu'v' + c\,(v')^2$ rovnaké znamienka. Ešte môžeme predpokladať, že vektory $\vec{u}$, $\vec{w}$ sme nahradili takými ich nenulovými násobkami, že

$$au^2 + 2buv + cv^2 = a\,(u')^2 + 2bu'v' + c\,(v')^2 = \frac{\Delta}{ac - b^2}\,.$$

Rovnica /18/ má potom tvar

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0.$$

Tejto rovnici nevyhovuje nijaká dvojica reálnych čísel ξ, η; kužeľosečka je formálne reálna.

Ib/ $a\Delta < 0$. Čísla $au^2 + 2buv + cv^2$, $a\,(u')^2 + 2bu'v' + c\,(v')^2$ majú opačné znamienko ako determinant Δ, a tým opačné aj ako znamienko podielu $\dfrac{\Delta}{ac - b^2}$. Preto môžeme predpokladať, že vektory $\vec{u}$, $\vec{w}$ sme navyše vybrali tak, aby platilo

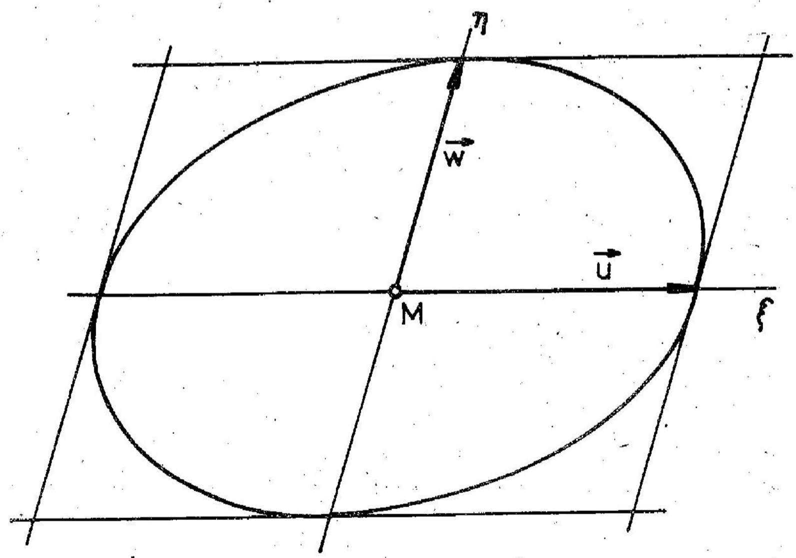
$$au^2 + 2buv + cv^2 = a\,(u')^2 + 2bu'v' + c\,(v')^2 = -\frac{\Delta}{ac - b^2}\,.$$

Rovnica /18/ má potom tvar

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Zdalo by sa prirodzené vyhlásiť, že je to rovnica kružnice, ktorá má stred v novom začiatku M a ktorej polomer sa rovná jednej. O kružnici však môže byť reč len v euklidovskej rovine, lebo definícia kružnice sa opiera o pojem vzdialenosti dvoch bodov alebo o pojem uhla priamok. Aj keby naša afinná rovina bola euklidovská, nová sústava súradníc by nemusela byť karteziánska a potom by rovnicou $\xi^2 + \eta^2 = 1$ nebola určená kružnica. Zatiaľ sa uspokojíme s tým, že túto kužeľosečku nazveme elipsa /obr. 14/. Je to regulárna, bodovo reálna kužeľosečka, ktorej jediný stred je bod M. Pre každý jej bod je

$$|\xi| \leq 1, \quad |\eta| \leq 1.$$



Obr. 14

II. $ac - b^2 < 0$.

Bod M si zvolíme ako v predchádzajúcom prípade. Čísla $au^2 + 2buv + cv^2$ a $a(u')^2 + 2bu'v' + c(v')^2$ majú podľa /15/ navzájom opačné znamienka. Môžeme predpokladať, že prvé z nich má rovnaké znamienko ako Δ. Keby to tak nebolo, vymenili by sme vektory $\vec{u}$, $\vec{w}$. Ďalej môžeme opäť predpokladať, že po vynásobení vektorov $\vec{u}$, $\vec{w}$ vhodnými konštantami

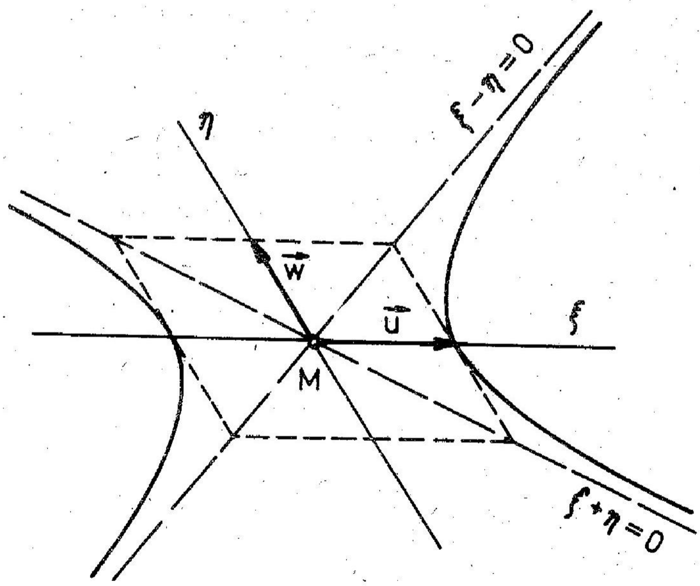
$$au^2 + 2buv + cv^2 = -\frac{\Delta}{ac - b^2},$$

$$a(u')^2 + 2bu'v' + c(v')^2 = \frac{\Delta}{ac - b^2}.$$

Rovnica /18/ má potom tvar

$$\xi^2 - \eta^2 = 1;$$

ide o bodovo reálnu kužeľosečku, ktorá sa nazýva hyperbola /obr. 15/. Pre všetky jej body je $|\xi| \geq 1$. Má jediný stred v bode M. Hyperbola má dva asymptotické smery; sú to smery priamok $\xi - \eta = 0$, $\xi + \eta = 0$. Žiadna priamka, ktorá má asymptotický smer, nemôže byť sečnica hyperboly. Priamky $\xi - \eta = 0$, $\xi + \eta = 0$, ktoré majú asymptotický smer a prechádzajú stredom hyperboly, sú asymptoty hyperboly.



Obr. 15

III. $ac - b^2 = 0$.

Bod M si nemôžeme zvoliť ako v predchádzajúcich prípadoch, pretože sústava rovníc

$$ax + by + d = 0,$$

$$bx + cy + e = 0$$

nemá riešenie; $ac - b^2 = 0$ a zároveň aspoň jeden z determinantov

$$\begin{vmatrix} a, & d \\ b, & e \end{vmatrix} = ae - bd, \qquad \begin{vmatrix} b, & d \\ c, & e \end{vmatrix} = be - cd$$

sa nerovná nule, lebo v opačnom prípade by kužeľosečka bola singulárna. Z týchto podmienok už vyplýva, že $\Delta \neq 0$. Keď si zvolíme bod M na priemere združenom so smerom vektora $\vec{u}$ s rovnicou

$$(au + bv)\,x + (bu + cv)\,y + du + ev = 0,$$

rovnica /17/ bude mať tvar

$$\begin{aligned}(au^2 + 2buv + cv^2)\,\xi^2 + 2\,(du' + ev')\,\eta\ + \\ + am^2 + 2bmn + cn^2 + 2dm + 2en + f = 0,\end{aligned} \qquad /19/$$

pretože smer vektora $\vec{w}$ je jediný asymptotický smer kužeľosečky, a teda jeho súradnice spĺňajú rovnice

$$au' + bv' = 0,$$

$$bu' + cv' = 0.$$

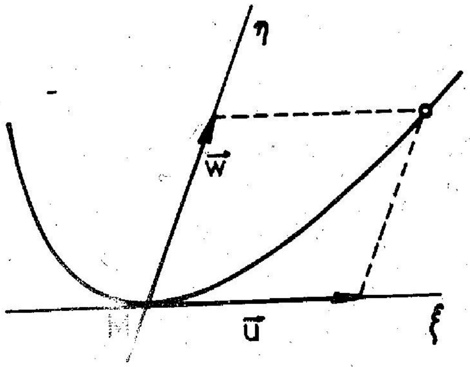
Koeficient $du' + ev'$ sa nesmie rovnať nule, lebo inak by riadky (a, b, d), (b, c, e) boli lineárne závislé a kužeľosečka by bola singulárna. Preto priamka $\xi = 0$, čo je priemer združený so smerom vektora $\vec{u}$, má spoločný bod s kužeľosečkou. Teda bod M si môžeme zvoliť nielen na priemere združenom so smerom vektora $\vec{u}$, ale aj na kužeľosečke. V rovnici kužeľosečky vypadne absolútny člen. Ak si namiesto vektora $\vec{w}$ zvolíme taký jeho vhodný násobok, že

$$2(du' + ev') = -(au^2 + 2buv + cv^2),$$

dosiahneme, že rovnica kužeľosečky v súradniciach ξ, η bude mať tvar

$$\xi^2 - \eta = 0.$$

Táto bodovo reálna kužeľosečka sa nazýva parabola, má jediný asymptotický smer a nemá žiadny stred /obr. 16/.



Obr. 16

Keď zhrnieme klasifikáciu regulárnych kužeľosečiek, dostaneme tento prehľad:

$\Delta \neq 0$, $ac - b^2 > 0$, a $\Delta > 0$ - formálne reálna kužeľosečka;
a $\Delta < 0$ - elipsa;

$\Delta \neq 0$, $ac - b^2 < 0$ - hyperbola;

$\Delta \neq 0$, $ac - b^2 = 0$ - parabola.

Okrem paraboly má každá z týchto kužeľosečiek stred; sú to stredové kužeľosečky. Možno dokázať, že ak sú dané dve regulárne bodovo reálne kužeľosečky /elipsy, paraboly alebo hyperboly/, pri ktorých množiny všetkých ich bodov sú totožné, rovnica jednej kužeľosečky je nenulový násobok rovnice druhej kužeľosečky; ide o totožné kužeľosečky.

<u>Príklad</u>. Určite druh, stred a asymptotické smery kužeľosečky, ktorá má rovnicu

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0.$$

R i e š e n i e . Matica

$$\begin{pmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & e \\ d, & e, & f \end{pmatrix}$$

sa v našom prípade rovná matici

$$\begin{pmatrix} 9, & -2, & 3 \\ -2, & 6, & -4 \\ 3, & -4, & 2 \end{pmatrix};$$

jej determinant je

$$108 + 24 + 24 - 54 - 144 - 8 = -50 \neq 0.$$

Je to regulárna kužeľosečka. Výraz $ac - b^2 = 54 - 4 > 0$, preto kužeľosečka nemá žiadne asymptotické smery. Ďalej $a\Delta = -450 < 0$, z čoho vyplýva, že je to elipsa. Jej stred je určený rovnicami

$$9x - 2y + 3 = 0,$$
$$-2x + 6y - 4 = 0;$$

jeho súradnice sú $x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{3}{5}$.

Príklad. Je daná kužeľosečka

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 2 = 0.$$

Určite jej stred, asymptotické smery a druh.

R i e š e n i e . Opäť si napíšeme maticu koeficientov z rovnice kužeľosečky. Je to matica

$$\begin{pmatrix} 2, & -2, & \frac{3}{2} \\ -2, & 2, & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}, & -\frac{5}{2}, & 2 \end{pmatrix};$$

$$\Delta = 8 + 2.\frac{15}{2} - \frac{9}{2} - \frac{25}{2} - 8 = -2 \neq 0, \quad ac - b^2 = 0.$$

Kužeľosečka je parabola, pretože nemá stred. Asymptotický smer je určený rovnicou $2u - 2v = 0$, je teda určený vektorom $\vec{u} = (1, 1)$.

<u>Príklad</u>. Kužeľosečka má rovnicu

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Zistite, aká je to kužeľosečka.

R i e š e n i e . $\Delta = 81$, $ac - b^2 = -9$; kužeľosečka je hyperbola. Stred je určený rovnicami

$$3y - 6 = 0,$$
$$3x + 8y - 13 = 0;$$

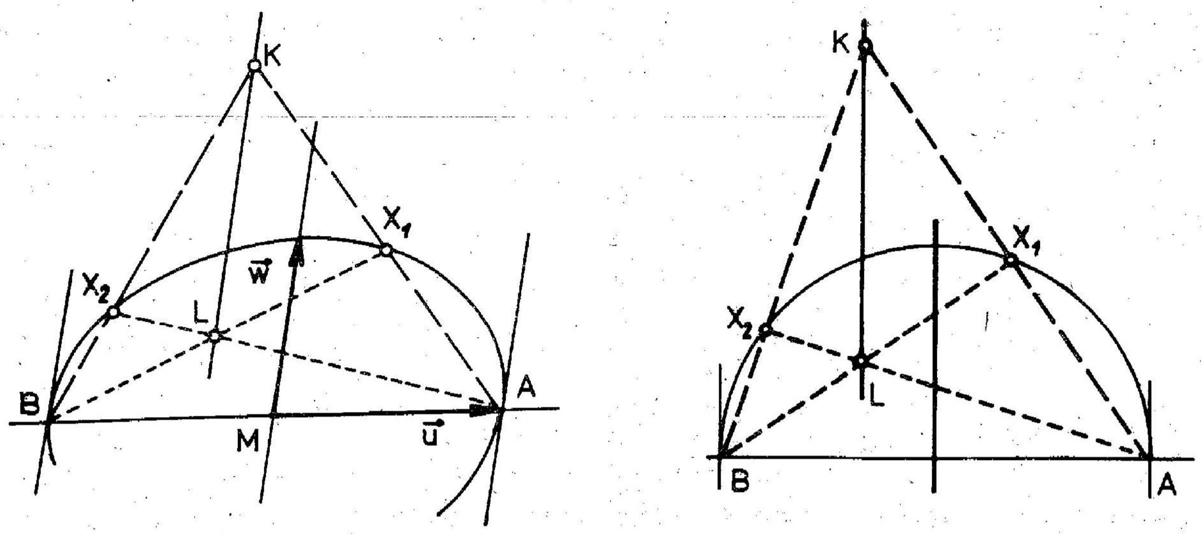
jeho súradnice sú $[-1, 2]$. Rovnica pre asymptotické smery je

$$6uv + 8v^2 = 0;$$

asymptotické smery sú určené vektormi $(1, 0)$ a $(-4, 3)$. Spolu so stredom určujú tieto smery asymptoty hyperboly, ktorých rovnice sú

$$y - 2 = 0 \quad \text{a} \quad 3x + 4y - 5 = 0.$$

Videli sme už, že pre každú elipsu si môžeme zvoliť takú lineárnu sústavu súradníc, vzhľadom na ktorú daná elipsa má rovnicu $x^2 + y^2 = 1$. Stačí zvoliť si nový začiatok M v strede elipsy, ľubovoľný priemer elipsy za os x, priemer s ním združený za os y a na osiach vybrať také vektory $\vec{u}$, $\vec{w}$, aby body $M + \vec{u}$, $M + \vec{w}$ ležali na elipse /obr. 17a/. Nech $X_1 = [x_1, y_1]$, $X_2 = [x_2, y_2]$ sú dva body elipsy rôzne od bodov $A = [1, 0]$ a $B = [-1, 0]$. Nech ďalej X_1 a X_2 nie sú súmerne združené podľa bodu M. Priamky AX_1 a BX_2 sa pretnú v bode



Obr. 17a,b

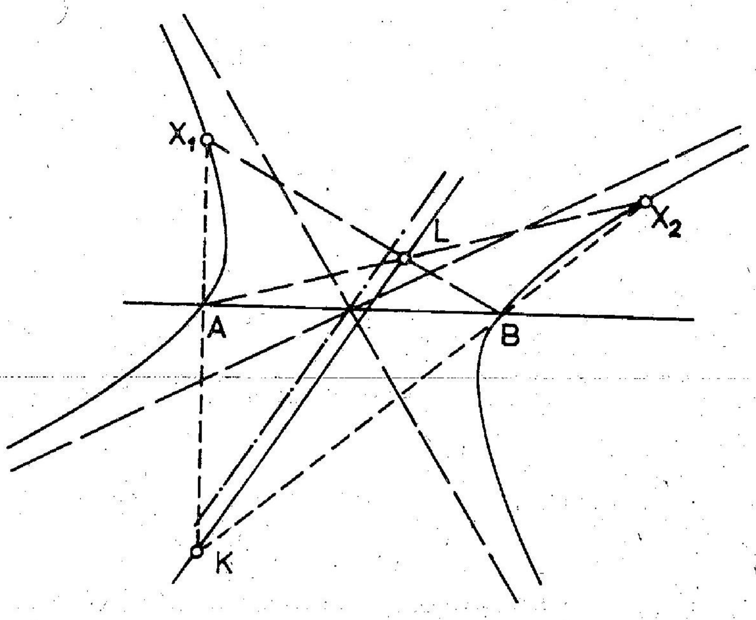
$$K = \left[\frac{y_1x_2 + y_2x_1 + y_1 - y_2}{y_1x_2 - y_2x_1 + y_1 + y_2}, \frac{2y_1y_2}{y_1x_2 - y_2x_1 + y_1 + y_2}\right],$$

priamky AX_2 a BX_1 v bode

$$L = \left[\frac{y_1x_2 + y_2x_1 + y_2 - y_1}{y_2x_1 - y_1x_2 + y_1 + y_2}, \frac{2y_1y_2}{y_2x_1 - y_1x_2 + y_1 + y_2}\right].$$

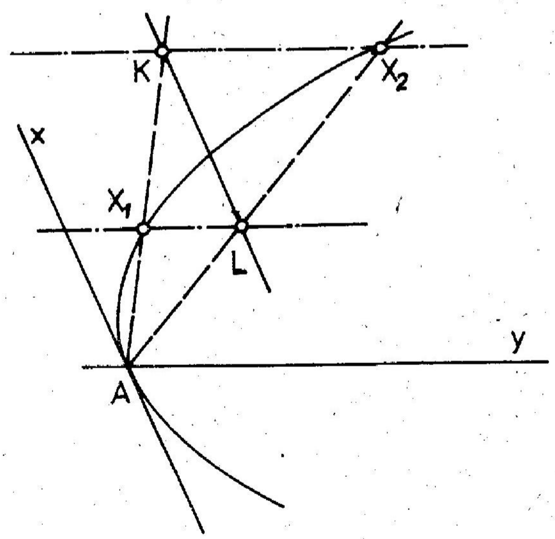
Oba tieto body majú zhodné prvé súradnice. To vyplýva z ich porovnania na základe platnosti rovností $x_1^2 + y_1^2 = 1$ a $x_2^2 + y_2^2 = 1$. Teda spojnica KL je rovnobežná so smerom, ktorý je združený s priemerom AB. To môžeme využiť na konštrukciu ďalších bodov elipsy, keď poznáme krajné body jej jedného priemeru, smer združený s týmto priemerom a jeden ďalší bod elipsy. Pre kružnicu je nám celá táto situácia známa, bod L je priesečník výšok v trojuholníku ABK, body X_1, X_2 sú päty výšok v tomto trojuholníku /obr. 17b/.

Predchádzajúcu úvahu o elipse môžeme úplne automaticky preniesť na hyperbolu, o ktorej môžeme predpokladať, že má rovnicu $x^2 - y^2 = 1$. O súradniciach bodov X_1, X_2 bude platiť $x_1^2 - y_1^2 = 1$, $x_2^2 - y_2^2 = 1$, ostatné zostáva rovnaké ako pri elipse /obr. 18/.



Obr. 18

Nakoniec pri parabole môžeme predpokladať, že sústavu súradníc sme vybrali tak, že rovnica paraboly je $y = x^2$ /obr. 19/. Nech $X_1 = [x_1, y_1]$, $X_2 = [x_2, y_2]$ sú dva body paraboly, pre ktoré $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$; ďalej nech $A = [0, 0]$, K nech je priesečník priamky AX_1 s priamkou, ktorá prechádza bodom X_2 a je rovnobežná s osou y, a obdobne L nech je priesečník priamky



AX_2 s priamkou, ktorá prechádza bodom X_1 a je rovnobežná s osou y. Priamka KL je rovnobežná s osou x. Bod K má totiž súradnice

$$\left[x_2, \frac{y_1 x_2}{x_1}\right], \text{ bod } L \text{ súradnice}$$

$$\left[x_1, \frac{y_2 x_1}{x_2}\right] \text{ a } y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2^2 .$$

Z toho vidieť, že druhé súradnice bodov K, L sa navzájom rovnajú.

Obr. 19

Cvičenia

50. Určite druh týchto regulárnych kužeľosečiek:

a/ $y^2 - 10x - 2y = 0$;

b/ $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 6 = 0$;

c/ $x^2 - 4xy - y^2 + 4x + 1 = 0$;

d/ $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$;

e/ $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

51. V predchádzajúcich prípadoch určite stred kužeľosečky.

52. Pri bodovo reálnych kužeľosečkách z cvičenia 36 určite priemer združený so smerom osi x /pravdaže, ak tento smer nie je asymptotický/.

53. Určite spoločné body priemeru, vypočítaného v predchádzajúcom cvičení, s príslušnou kužeľosečkou.

54. Napíšte rovnice regulárnych kužeľosečiek, ktoré prechádzajú začiatkom a pre ktoré smery osí x a y sú združené smery.

55. Napíšte rovnice tých kužeľosečiek z predchádzajúceho cvičenia, ktoré prechádzajú bodmi $[1, 0]$ a $[0, 1]$.

56. Kedy je kužeľosečka z predchádzajúceho cvičenia elipsa, kedy hyperbola a kedy parabola?

57. Určite druh kužeľosečky

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 100 = 0.$$

58. Určite druh kužeľosečky

$$x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0.$$

59. Ukážte, že rovnicou

$$2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

je určená parabola.

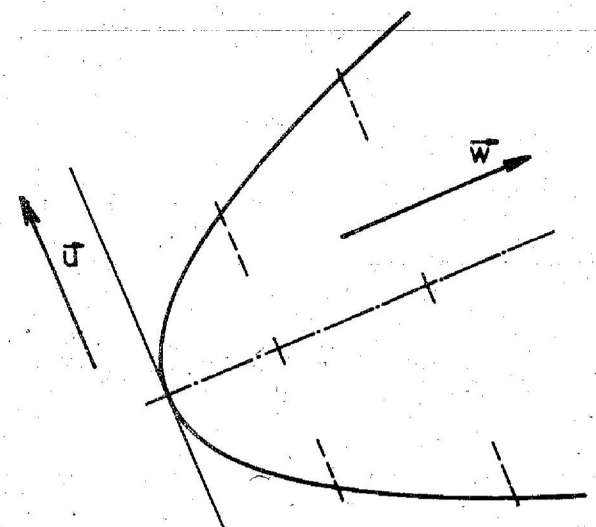
III. METRICKÉ VLASTNOSTI KUŽEĽOSEČIEK

1. Kolmé združené smery kužeľosečky, osi kužeľosečky

V tejto kapitole budeme skúmať aj také vlastnosti kužeľosečiek, ktoré súvisia so skalárnym súčinom, a teda aj so vzdialenosťou bodov, kolmosťou priamok a pod. Preto bude výhodné, keď sústava súradníc bude vždy karteziánska. Predpokladajme, že sme v euklidovskej rovine vybrali pevnú karteziánsku sústavu súradníc a že je daná regulárna kužeľosečka, ktorá vzhľadom na túto sústavu súradníc má rovnicu

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0; \qquad /1/$$

aspoň jedno z čísel a, b, c sa nerovná nule. O tejto kužeľosečke budeme ešte predpokladať, že je bodovo reálna, t. j. že ide o elipsu, hyperbolu alebo parabolu. V predchádzajúcej kapitole sme videli, že stredy tetív kužeľosečky, ktoré sú rovnobežné s nenulovým vektorom $\vec{u} = (u, v)$, ležia na jednej priamke. Táto priamka sa nazýva priemer kužeľosečky združený so smerom vektora $\vec{u}$ a ležia na nej aj dotykové body dotyčníc rovnobežných s vektorom $\vec{u}$. Smer tejto priamky sa nazýva združený smer so smerom vektora $\vec{u}$; smer vektora $\vec{u}$ nesmie byť asymptotický. V opačnom prípade by neexistovali sečnice združeného smeru. Pýtajme sa teraz, či možno vybrať taký vektor $\vec{u}$, aby priemer s ním združený bol naň kolmý. Ak taký priemer existuje, je osou súmernosti kužeľosečky. Nazveme ho os kužeľosečky /obr. 20/. Spoločný bod kužeľosečky s osou kužeľosečky sa nazýva <u>vrchol</u> kužeľosečky. Dotyčnica kužeľosečky idúca vrcholom je kolmá na os, ktorá vrcholom prechádza.



Obr. 20

Vieme, že smer združený so smerom vektora $\vec{u}$ /ktorý nie je asymptotickým smerom kužeľosečky/ je určený nenulovým vektorom $\vec{w} = (-bu - cv,\ au + bv)$. Ak má byť tento vektor kolmý na vektor $\vec{u}$, musí byť nenulovým násobkom vektora $(-v, u)$. Preto hľadáme taký nenulový vektor $\vec{u} = (u, v)$ a také nenulové číslo ϱ, že platí

$$au + bv = \varrho u,$$
$$bu + cv = \varrho v, \qquad /2/$$

čiže

$$(a - \varrho)\, u + bv = 0$$
$$bu + (c - \varrho)\, v = 0.$$

Aby táto sústava homogénnych rovníc mala netriviálne riešenie, musí sa determinant sústavy rovnať nule; tým dostávame pre ϱ nutnú podmienku

$$\varrho^2 - (a + c)\,\varrho + ac - b^2 = 0. \qquad /3/$$

Táto kvadratická rovnica pre neznámu ϱ s nezáporným diskriminantom $D = (a - c)^2 + 4b^2$ má vždy aspoň jeden nenulový koreň. Ináč by platilo $a + c = 0$, $ac - b^2 = 0 \Longrightarrow -a^2 - b^2 = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$, a to by bolo v spore s predpokladom o koeficientoch a, b, c. Ak $ac - b^2 = 0$, jeden koreň je nulový, druhý sa rovná $a + c$. Rovnica /3/ má dvojnásobný koreň len vtedy, keď $b = 0$, $a = c$. Vtedy sú však rovnice /2/ splnené pre každý vektor $\vec{u}$, $ac - b^2 = a^2 > 0$, preto ide o elipsu, ktorej každý priemer je os, teda ide o kružnicu, ako sa ľahko presvedčíme dosadením $b = 0$, $a = c$ do rovnice /1/. Keď vynecháme tento prípad a $ac - b^2 \neq 0$, rovnica /3/ má dva rôzne nenulové korene. Ku každému z nich prislúcha rovnicami /2/ práve jeden smer, ktorého združený priemer je os kužeľosečky. Tieto smery, a teda aj nimi určené osi sú navzájom kolmé. Ak je totiž jeden smer združený s druhým smerom a navyše naň kolmý, je aj druhý smer združený s prvým smerom a kolmý naň. Keď $ac - b^2 = 0$, rovnica /3/ má jeden nenulový koreň, ku ktorému rovnicami /2/ prislúcha jeden smer. Priemer združený s týmto smerom je os paraboly. K nulovému koreňu rovnice /3/ prislúcha rovnicami /2/ asymptotický smer, ku ktorému neexistuje združený priemer. Pretože každú os bodovo reálnej kužeľosečky možno dostať ako priemer združený so smerom, ktorý je na os kolmý, môžeme predchádzajúce úvahy a výpočty zhrnúť do nasledujúcej vety.

> Veta. Každá elipsa, ktorá nie je kružnicou, a každá hyperbola má práve dve navzájom kolmé osi. Každá parabola má práve jednu os, ktorej smer je asymptotický smer paraboly.

Príklad. Je daná kužeľosečka, ktorá vo zvolenej karteziánskej sústave súradníc má rovnicu

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0.$$

Určite druh tejto kužeľosečky, jej stredy, asymptotické smery, osi a vrcholy /t. j. spoločné body osí a kužeľosečky/.

R i e š e n i e . Daná kužeľosečka má v maticovom tvare rovnicu

$$(x,\quad y,\quad 1)\begin{pmatrix} 2, & -6, & 4 \\ -6, & -7, & 3 \\ 4, & 3, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0;$$

$\Delta = -72 - 72 + 112 - 18 = -50.$

Je to regulárna kužeľosečka. Pretože $ac - b^2 = -14 - 36 = -50$, je to hyperbola. Jej stred je určený rovnicami

$$\left.\begin{aligned} 2x - 6y + 4 &= 0 \\ -6x - 7y + 3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S = \left[-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right].$$

Asymptotické smery sú určené rovnicou

$$2u^2 - 12uv - 7v^2 = 0,$$

teda

$$u\,(2u - 6v) + v\,(-6u - 7v) = 0$$

$$2u - 6v = -\lambda v,$$

$$\underline{-6u - 7v = \lambda u,}$$

$$2u + (\lambda - 6)\,v = 0,$$

$$\underline{(-\lambda - 6)\,u - 7v = 0,}$$

$$-14 - 36 + \lambda^2 = 0,$$

$$\lambda = \pm 5\sqrt{2}.$$

Jeden asymptotický smer je určený rovnicou

$$2u + \left(-6 + 5\sqrt{2}\right) v = 0;$$

druhá zo sústavy rovníc

$$\left(-6 - 5\sqrt{2}\right) u - 7v = 0$$

je už násobkom tejto rovnice. Koreň rovnice je /odhliadnuc od možnosti násobenia nenulovým číslom/ $u = -6 + 5\sqrt{2}$, $v = -2$, t. j. $\vec{u}_1 = \left(-6 + 5\sqrt{2}, -2\right)$.

Druhý asymptotický smer je určený rovnicou

$$2u + \left(-6 - 5\sqrt{2}\right) v = 0,$$

a preto je určený vektorom $\vec{u}_2 = \left(-6 - 5\sqrt{2},\ -2\right)$. Asymptota je určená stredom a asymptotickým smerom. Jedna z asymptot má parametrické vyjadrenie

$$x = -\frac{1}{5} - t\left(6 + 5\sqrt{2}\right),$$

$$y = \frac{3}{5} - 2t;$$

jej neparametrické vyjadrenie je

$$2x - \left(6 + 5\sqrt{2}\right)y + 4 + 3\sqrt{2} = 0.$$

Druhá asymptota má rovnicu

$$2\left(x + \frac{1}{5}\right) + \left(-6 + 5\sqrt{2}\right)\left(y - \frac{3}{5}\right) = 0,$$

pretože prechádza bodom S a smer kolmý na jej smer $\vec{u}_1$ je určený vektorom $\left(2,\ -6 + 5\sqrt{2}\right)$. Uvedenú rovnicu môžeme upraviť na tvar

$$2x - \left(6 - 5\sqrt{2}\right)y + 4 - 3\sqrt{2} = 0.$$

Osi kužeľosečky sú tie priemery, ktoré sú kolmé na svoje združené smery. Každý takýto združený smer musí spĺňať rovnice

$$au + bv = \varrho u,$$
$$bu + cv = \varrho v,$$

v našom prípade

$$2u - 6v = \varrho u,$$
$$-6u - 7v = \varrho v,$$

$$(2 - \varrho)\,u - 6v = 0,$$
$$-6u - (7 + \varrho)\,v = 0,$$

$$\varrho^2 + 5\varrho - 50 = 0,$$

$$\varrho_1 = 5,\quad \varrho_2 = -10.$$

$(a-k)(c-k)-s^2=0$
$(2-k)(-7-k)-36=0$
$-14-2k+7k+k^2-36=0$
$k^2+5k-50=0$
$k_1=5$
$k_2=-10$
$(a-k)u+bv=0$
$(2-k)u-6v=0$
$(2-k)u=6v$
$(-2,1)$
$(1,2)$

Prvý takýto smer je určený rovnicou

$$3u + 6v = 0,$$

druhý rovnicou

$$12u - 6v = 0.$$

Teda prvý smer je určený napr. vektorom $\vec{u}_3 = (-2,\ 1)$, druhý vektorom $\vec{u}_4 = (1,\ 2)$. Priemer združený s vektorom $\vec{u}_3$ je na $\vec{u}_3$ kolmý, má teda smer totožný so smerom vektora $\vec{u}_4$ a obrátene. Preto smery vektorov $\vec{u}_3$ a $\vec{u}_4$ sú priamo smery osí, o ktorých navyše vieme, že prechádzajú stredom. Rovnice osí môžeme priamo dostať ako rovnice priemerov združených so smermi vektorov $\vec{u}_3$ a $\vec{u}_4$. Prvá os bude mať rovnicu

$$\left(-2a + b\right) x + \left(-2b + c\right) y + \left(-2d + e\right) = 0,$$
$$-10x + 5y - 5 = 0,$$
$$-2x + y - 1 = 0.$$

Druhá os má rovnicu

$$\left(a + 2b\right) x + \left(b + 2c\right) y + \left(d + 2e\right) = 0,$$
$$-10x - 20y + 10 = 0,$$
$$x + 2y - 1 = 0.$$

Vrcholy dostaneme ako spoločné body osí s kužeľosečkou. Buď si každú z osí vyjadríme parametricky, alebo vyjadrenie jednej neznámej z rovnice osi dosadíme do rovnice kužeľosečky. Napr. pre prvú os je

$$y = 2x + 1;$$

po dosadení tohto vyjadrenia do rovnice kužeľosečky dostávame

$$50x^2 + 20x + 1 = 0,$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 50}}{50} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{10} = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{2}}{10},$$

$$y = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{2}}{5};$$

vrcholy A, B na tejto osi majú súradnice

$$A = \left[-\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5}\right], \qquad B = \left[-\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5}\right].$$

Druhá os hyperbolu nepretína.

Cvičenia

V týchto cvičeniach sa predpokladá, že používaná sústava súradníc je karteziánska.

60. Určite osi a vrcholy kužeľosečky

$$-3y^2 - 4xy - 4x + 4y + 8 = 0.$$

61. Určite osi a vrcholy kužeľosečky

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 28x + 4y + 44 = 0.$$

62. Určite osi, vrcholy a dotyčnice vo vrcholoch kužeľosečky

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0.$$

63. Určite osi kužeľosečky

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0.$$

64. Je daná kužeľosečka

$$x^2 + y^2 + 2bxy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

Aká je to kužeľosečka? Urobte diskusiu vzhľadom na parameter b. V prípade, že je to regulárna a bodovo reálna kužeľosečka, určite jej osi.

65. Napíšte rovnicu kužeľosečky, ktorá má os x za svoju os a začiatok sústavy súradníc za svoj vrchol. /To je tzv. vrcholová rovnica kužeľosečky./

66. Nájdite osi kužeľosečky

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0.$$

67. Nájdite osi kužeľosečky

$$2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

68. Určite osi kužeľosečky
$$x^2 - 12xy - 4y^2 + 5 = 0.$$

69. Napíšte rovnicu kužeľosečky, ktorá má priamky $x + y = 0$ a $x - y = 0$ za svoje osi.

70. Napíšte rovnicu paraboly, ktorá má priamku $x - y = 0$ za svoju os.

2. Metrická klasifikácia kužeľosečiek

Nech je daná regulárna a bodovo reálna kužeľosečka, ktorá vzhľadom na vybranú karteziánsku sústavu súradníc má rovnicu /1/. Pri afinnej klasifikácii kužeľosečiek sa nám vždy podarilo vybrať lineárnu sústavu súradníc $\{M, \vec{u}, \vec{w}\}$ tak, že daná kužeľosečka mala vzhľadom na ňu veľmi jednoduchú rovnicu. Teraz by sme však chceli navyše, aby táto nová sústava súradníc bola karteziánska, rovnako ako sústava, z ktorej sme vychádzali. Teda chceme, aby vektory $\vec{u}, \vec{w}$ boli jednotkové a navzájom kolmé. To nás pri výbere novej sústavy súradníc oproti afinnej klasifikácii obmedzuje a asi sa nám nepodarí vybrať sústavu súradníc tak, aby rovnica elipsy, hyperboly alebo paraboly mala v nej taký jednoduchý tvar ako v prípade afinnej klasifikácie. V prvom rade musíme vybrať vektor $\vec{u} = (u, v)$ tak, aby jeho smer nebol asymptotický a aby smer s ním združený, určený vektorom $\vec{w}$, bol naň kolmý. Musíme ho teda vybrať tak ako pri hľadaní osí kužeľosečky v predchádzajúcom odseku, t. j. tak, aby platili rovnice /2/, do ktorých sme za ρ dosadili nenulový koreň rovnice /3/. Keď dosadíme za ρ do rovníc /2/ druhý koreň rovnice /3/, budú im vyhovovať súradnice vektora $\vec{w}$. Ak totiž $ac - b^2 \neq 0$, smery vektorov $\vec{u}, \vec{w}$ sú združené a navzájom kolmé smery a každý z nich prislúcha k jednému nenulovému koreňu rovnice /3/. Keď $ac - b^2 = 0$, smer vektora $\vec{w}$ je asymptotický smer kužeľosečky, jeho súradnice (u', v') vyhovujú rovniciam $au' + bv' = 0$, $bu' + cv' = 0$, a to sú rovnice /2/, do ktorých sme za ϱ dosadili nulový koreň rovnice /3/. Teda v každom prípade bude platiť

$$au + bv = \varrho_1 u, \qquad au' + bv' = \varrho_2 u',$$

$$bu + cv = \varrho_1 v, \qquad bu' + cv' = \varrho_2 v'.$$

Navyše vektory $\vec{u}$, $\vec{w}$ musia byť jednotkové, t. j. $u^2 + v^2 = 1$, $(u')^2 + (v')^2 = 1$. Potom

$$au^2 + 2buv + cv^2 = u\,(au + bv) + v\,(bu + cv) =$$

$$= \varrho_1 (u^2 + v^2) = \varrho_1,$$

$$a\,(u')^2 + 2bu'v' + c\,(v')^2 = \varrho_2.$$

Ďalej rozlíšime prípad elipsy, hyperboly a paraboly.

I. Elipsa; $ac - b^2 > 0$, a $\Delta < 0$. Bod M si zvolíme ako pri afinnej klasifikácii v strede elipsy. Rovnica elipsy vzhľadom na karteziánsku sústavu súradníc $\{M, \vec{u}, \vec{w}\}$ nadobudne opäť tvar /18/ ako na str. 56; tu to bude

$$\varrho_1 \xi^2 + \varrho_2 \eta^2 + \frac{\Delta}{ac - b^2} = 0.$$

Z $ac - b^2 > 0$ vyplýva $ac > 0$ a z vlastností koreňov kvadratickej rovnice $\varrho_1 + \varrho_2 = a + c$. Preto všetky štyri čísla a, c, ϱ_1, ϱ_2 majú rovnaké znamienka, číslo Δ má opačné znamienko. Keď označíme

$$\alpha^2 = \frac{-\Delta}{(ac - b^2)\,\varrho_1}, \qquad \beta^2 = \frac{-\Delta}{(ac - b^2)\,\varrho_2},$$

rovnica elipsy nadobudne tvar

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1,$$

rovnosť $\alpha^2 = \beta^2 \Longleftrightarrow \varrho_1 = \varrho_2$; vtedy rovnica /3/ má dvojnásobný koreň a skúmaná elipsa je kružnica.

V každom prípade sú oba korene ϱ_1, ϱ_2 rovnice /3/ nenulové. Preto môžeme predpokladať, že sme ϱ_1 vybrali tak, aby $|\varrho_1| \leq |\varrho_2|$, a teda $\alpha^2 \geq \beta^2$.

II. Hyperbola; $ac - b^2 < 0$, korene ϱ_1, ϱ_2 majú opačné znamienka; korene očíslujeme tak, aby ϱ_1 mal rovnaké znamienko ako Δ. Bod M si zvolíme opäť v strede hyperboly.
Rovnica hyperboly bude

$$\varrho_1 \xi^2 + \varrho_2 \eta^2 + \frac{\Delta}{ac - b^2} = 0.$$

Keď označíme

$$\alpha^2 = \frac{-\Delta}{(ac - b^2)\varrho_1}, \qquad \beta^2 = \frac{-\Delta}{(ac - b^2)\varrho_2},$$

môžeme rovnicu hyperboly upraviť na tvar

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1.$$

III. Parabola; $ac - b^2 = 0$. Nech ϱ je nenulový koreň rovnice /3/, $\vec{u}$ jednotkový vektor, ktorého súradnice vyhovujú rovniciam /2/. Bod M si zvolíme ako pri afinnej klasifikácii na kužeľosečke a na priemere združenom so smerom vektora $\vec{u}$. Tento priemer je os paraboly, teda bod M je vrchol paraboly. Parabola bude mať v nových súradniciach /podobne ako pri afinnej klasifikácii/ rovnicu

$$\varrho \xi^2 + 2(du' + cv')\eta = 0;$$

u', v' tu označujú súradnice jednotkového vektora $\vec{w}$, ktorého smer je asymptotickým smerom kužeľosečky. Tým je vektor $\vec{w}$ - odhliadnuc od znamienka - - určený. Znamienko si zvolíme tak, aby $(du' + cv')\varrho < 0$. Parabola má potom rovnicu

$$\xi^2 = 2\alpha\eta, \quad \alpha > 0,$$

Na záver môžeme výsledky zhrnúť takto: Keď je v euklidovskej rovine daná regulárna bodovo reálna kužeľosečka, môžeme vybrať takú karteziánsku sústavu súradníc, v ktorej rovnica kužeľosečky má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad /a^2 \geq b^2/$$

alebo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alebo

$$x^2 = 2py$$

/čísla a, b, p sú kladné/

podľa toho, či kužeľosečka je elipsa, hyperbola alebo parabola.

Pravdaže, čísla a, b v týchto rovniciach nie sú tie isté ako rovnako označené koeficienty v rovnici /1/.

Príklad. **Predstavme si v začiatku karteziánskej sústavy súradníc pevný bod /Zem/ s hmotnosťou M, ktorý priťahuje ďalší hmotný bod** /družicu/ s hmotnosťou m silou, ktorej veľkosť sa podľa gravitačného zákona rovná kMm/r^2; k tu označuje gravitačnú konštantu a r okamžitú vzdialenosť družice od Zeme. Použitím druhého Newtonovho zákona /sila sa rovná súčinu hmotnosti a zrýchlenia/ sa pomocou diferenciálneho počtu odvodí, že družica sa pohybuje alebo po priamke prechádzajúcej začiatkom, alebo po kužeľosečke, ktorá má rovnicu

$$\left(1 + Ax + By\right)^2 = D^2\left(x^2 + y^2\right), \quad D > 0.$$

Pritom výraz

$$E = \frac{kMm}{2D}\left(A^2 + B^2 - D^2\right)$$

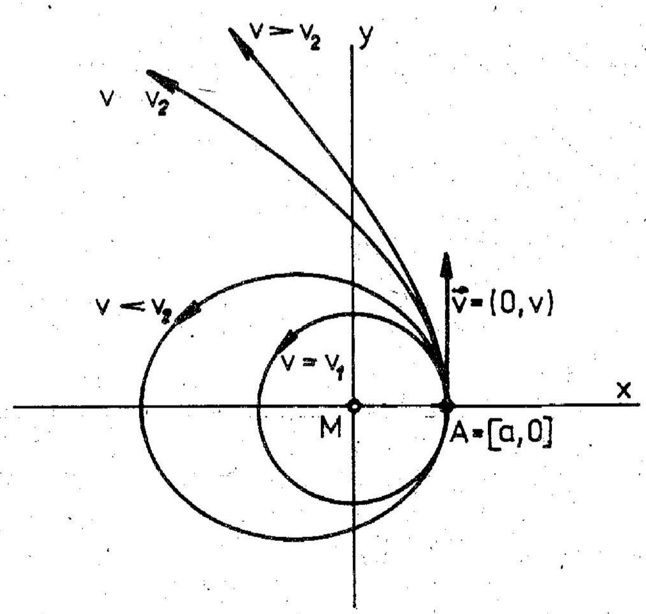
vyjadruje celkovú energiu družice, t.j. súčet jej kinetickej a potenciálnej energie. Potenciálnu energiu berieme tak, aby bola záporná a blížila sa k nule, keď sa hmotný bod neohraničene vzďaľuje. - Určite druh kužeľosečky, po ktorej sa družica pohybuje.

R i e š e n i e .

$$\triangle = \begin{vmatrix} A^2 - D^2, & AB, & A \\ AB, & B^2 - D^2, & B \\ A, & B, & 1 \end{vmatrix} = D^4 ;$$

kužeľosečka je regulárna, $ac - b^2 = D^2\left(D^2 - A^2 - B^2\right) = -2D^3 \cdot \frac{E}{kMm}$.
Ak je celková energia kladná, kužeľosečka je hyperbola, pre $E = 0$ je to parabola a pre $E < 0$ je to elipsa, lebo vtedy je aj $A^2 - D^2$ záporné číslo. Keď $A = B = 0$, zmení sa táto elipsa na kružnicu.

Príklad. Predpokladajme, že v predchádzajúcom príklade družica má v bode $A = [a, 0]$ rýchlosť určenú vektorom $\vec{v} = (0, v)$ /pozri obr. 21/.



Obr. 21

Vtedy sa družica pohybuje po kužeľosečke, ktorá má rovnicu

$$\left(1 + \frac{kM - av^2}{v^2a^2}\,x\right)^2 = \frac{k^2M^2}{v^4a^4}\left(x^2 + y^2\right).$$

Určite druh tejto kužeľosečky za predpokladu, že $v \neq 0$.

R i e š e n i e . Rovnicu kužeľosečky upravíme na tvar

$$\frac{2kM - v^2a}{v^2a^3}x^2 + \frac{k^2M^2}{v^4a^4}y^2 - 2\frac{kM - v^2a}{v^2a^2}x - 1 = 0.$$

Ďalej

$$\Delta = -\left(\frac{k^2M^2}{v^4a^2}\right)^2 \text{ ; kužeľosečka je regulárna.}$$

Súčin koeficientov pri x^2 a y^2 má rovnaké znamienko ako výraz $2kM - v^2a$ a koeficient pri xy sa rovná nule. Ak $v^2a = 2kM$, kužeľosečka je parabola. Príslušná začiatočná rýchlosť $v_2 = \sqrt{\frac{2kM}{a}}$ sa nazýva druhá kozmická rýchlosť zodpovedajúca vzdialenosti a. Družica s touto rýchlosťou /rozumie sa začiatočnou rýchlosťou/ odletí z dosahu zemskej príťažlivosti po oblúku paraboly. Pre $v^2a > 2kM$ je kužeľosečka hyperbola a aj v tomto prípade družica unikne z vplyvu zemskej príťažlivosti. Keď $v^2a < 2kM$, družica bude obiehať po elipse, lebo $\Delta < 0$. Táto elipsa je v prípade, keď $v_1 = \sqrt{\frac{kM}{a}}$, kružnica, rýchlosť v je konštantná a nazýva sa prvá kozmická rýchlosť.

Cvičenia

71. Ktorými bodmi roviny prechádzajú navzájom kolmé dotyčnice alebo asymptoty kužeľosečky

$$ax^2 + by^2 = 1, \quad ab \neq 0?$$

72. Ktorými bodmi roviny prechádzajú navzájom kolmé dotyčnice paraboly, ktorá má rovnicu

$$y^2 = 2px?$$

73. Z fyziky vieme, že pohyb strely /vo vákuu/ je zložením priamočiareho rovnomerného pohybu a rovnomerne zrýchleného pohybu a že v čase t po opustení hlavne sa strela nachádza v bode, ktorého súradnice sú

$$x = tv \cos \alpha, \quad y = tv \sin \alpha - \tfrac{1}{2}gt^2;$$

v je začiatočná rýchlosť strely, α je uhol výstrelu /s vodorovnou rovinou/, g je gravitačná konštanta, začiatok sústavy súradníc je v ústí hlavne atď. Strela sa pohybuje po parabole, ktorá má rovnicu

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Určite vrchol tejto paraboly. Ukážte, že pri pevnej začiatočnej rýchlosti v a premenlivom uhle výstrelu α vrcholy získaných parabol ležia na elipse, ktorá má rovnicu

$$x^2 + 4y^2 - \frac{2v^2}{g} y = 0.$$

74. Ukážte, že hmotný bod oscilujúci v rovine tak, že v čase t má súradnice $[\sin t, \ \sin(t + \beta)]$, sa pohybuje po kužeľosečke, ktorá má rovnicu

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos\beta = \sin^2\beta .$$

Aká je to kužeľosečka?

75. Pri deformácii rovinného prostredia nech bod $[x, y]$ prejde do bodu $[px + qy, \ rx + sy]$. Čo vytvárajú všetky body, ktoré pri tejto deformácii prejdú do bodov kružnice

$$x^2 + y^2 = 1?$$

Ktoré body prejdú do bodov hyperboly

$$x^2 - y^2 = 1?$$

3. Ohniskové vlastnosti kužeľosečiek

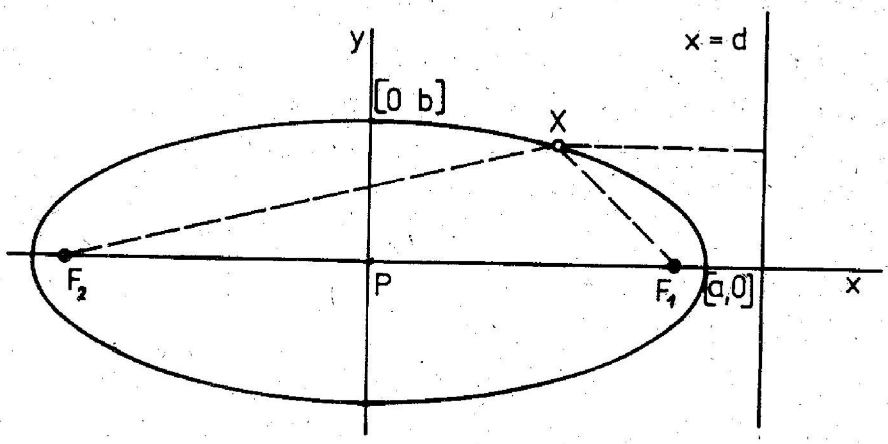
Keď má elipsa rovnicu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 \geq b^2,$$

body

$$F_1 = \left[\sqrt{a^2 - b^2},\ 0\right], \qquad F_2 = \left[-\sqrt{a^2 - b^2},\ 0\right]$$

sa nazývajú ohniská elipsy /obr. 22/.



Obr. 22

Súčet vzdialeností ľubovoľného bodu $X = [x, y]$ od bodov F_1, F_2 sa rovná 2a práve vtedy, keď

$$\sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} + \sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} = 2a,$$

t. j.

$$x^2 + y^2 + a^2 - b^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + a^2 - b^2)^2 - 4x^2\,(a^2 - b^2)} = 2a^2,$$

teda práve vtedy, keď

$$x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2$$

a zároveň

$$(a^2 - b^2)^2 - 4x^2\,(a^2 - b^2) + (x^2 + y^2)^2 + 2\,(x^2 + y^2)\,.$$
$$.\,(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)^2 + (x^2 + y^2)^2 - 2\,(x^2 + y^2)\,(a^2 + b^2)\,,$$

čo po úprave dáva

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Zo vzťahu $\overline{XF}_1 + \overline{XF}_2 = 2a$ teda vyplýva, že X je bod elipsy. Obrátene, ak X je bod elipsy,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$x^2 \leqq a^2 \text{ , } y^2 \leqq b^2, \text{ a preto } x^2 + y^2 \leqq a^2 + b^2;$$

to sú podmienky ekvivalentné s podmienkou $\overline{XF}_1 + \overline{XF}_2 = 2a$. Možno teda povedať, že elipsa je množina všetkých tých bodov, ktoré majú od oboch ohnísk elipsy konštantný súčet vzdialeností. Keď obe ohniská splynú do jedného bodu, dostaneme kružnicu.

Označme $\sqrt{a^2 - b^2} = e$ a $d = \frac{a^2}{e}$. Samozrejme, musíme predpokladať, že táto elipsa nie je kružnicou $/a^2 > b^2/$. Potom $e < a < d$. Pomer vzdialenosti bodu $X = [x, y]$ od ohniska $F_1 = [e, 0]$ k jeho vzdialenosti od priamky $x = d$ sa rovná číslu $\varepsilon = \frac{e}{a}$ práve vtedy, keď

$$\frac{(x - e)^2 + y^2}{(x - d)^2} = \frac{e^2}{a^2}$$

t. j. keď

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

teda opäť práve vtedy, keď X je bod elipsy.

Pre hyperbolu /obr. 23/ s rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

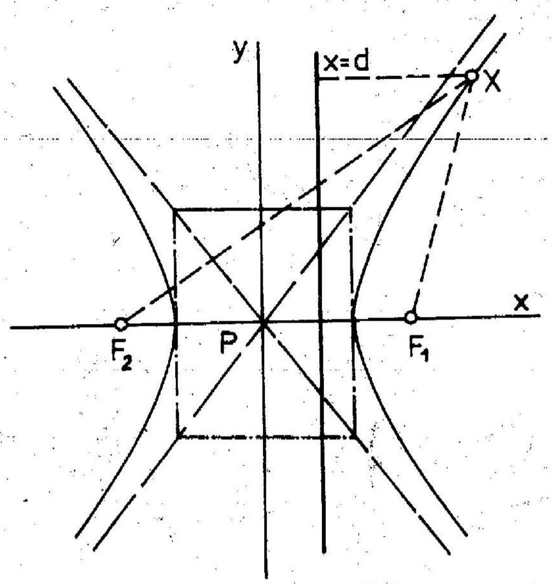
definujeme ohniská takto:

$$F_1 = [e, 0], \quad F_2 = [-e, 0];$$

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$. Podobne ako pri elipse sa dokáže, že bod $X = [x, y]$ je práve vtedy bod hyperboly, keď

$$|\overline{XF}_1 - \overline{XF}_2| = 2a,$$

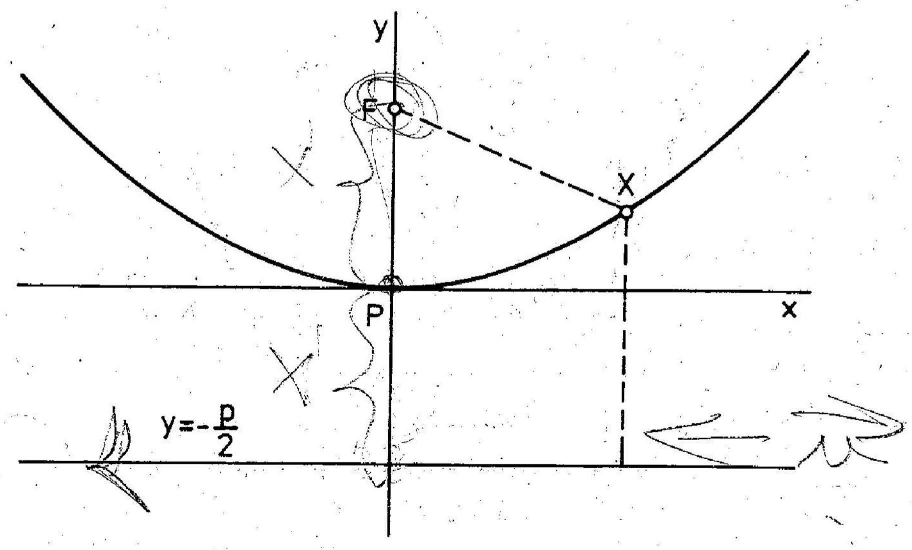
alebo aj práve vtedy, keď pomer vzdialenosti bodu X od ohniska F_1 k vzdialenosti bodu X od priamky



Obr. 23

$$x = \frac{a^2}{e} = d < a$$

sa rovná $\frac{e}{a} > 1$.



Obr. 24

Pre parabolu /obr. 24/ s rovnicou

$$x^2 = 2py$$

definujeme len jedno ohnisko

$$F = \left[0, \frac{p}{2}\right].$$

Ľahko sa ukáže, že parabola $x^2 = 2py$ je množina všetkých takých bodov $X = [x, y]$, pre ktoré vzdialenosť od ohniska sa rovná vzdialenosti od priamky $y = -\frac{p}{2}$. Totiž

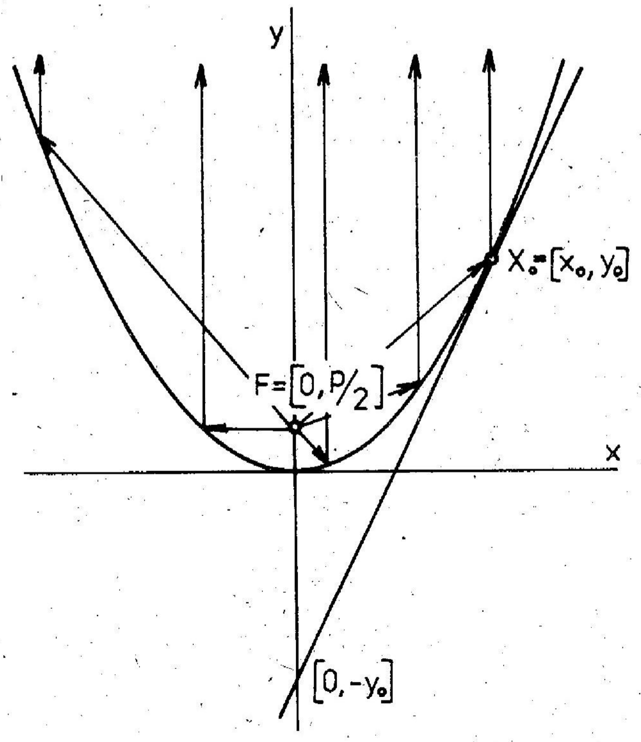
$$\overline{XF} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

a vzdialenosť bodu X od priamky $y = -\frac{p}{2}$ sa rovná $\left|y + \frac{p}{2}\right|$.

Preto $\overline{XF} = \left|y + \frac{p}{2}\right| \Longleftrightarrow x^2 = 2py$.

Tieto výsledky ukazujú, že každú regulárnu bodovo reálnu kužeľosečku /s výnimkou kružnice/ môžeme dostať ako množinu všetkých takých bodov, pre ktoré pomer vzdialenosti od pevného bodu a vzdialenosti od pevnej priamky, neprechádzajúcej pevným bodom, je konštantný; označme tento pomer ε. Keď $\varepsilon < 1$, kužeľosečka je elipsa /nie kružnica/, $\varepsilon = 1$ dáva parabolu a pre $\varepsilon > 1$ dostávame hyperbolu.

Príklad. Ukážte, že lúče vychádzajúce z ohniska paraboly sa od paraboly odrážajú do smeru osi paraboly /obr. 25/.



Obr. 25

R i e š e n i e . Môžeme predpokladať, že parabola má rovnicu

$$x^2 = 2py;$$

ohnisko paraboly je v bode $F = \left[0, \frac{p}{2}\right]$. Nech $X_0 = [x_0, y_0]$ je ľubovoľný bod paraboly; teda platí

$$x_0^2 = 2py_0.$$

Dotyčnica paraboly v bode X_0 má rovnicu

$$xx_0 = py + py_0.$$

Priamka FX_0 má rovnicu

$$\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) x - x_0 \left(y - \frac{p}{2}\right) = 0$$

a rovnobežka s osou paraboly idúca bodom X_0 má rovnicu

$$x = x_0.$$

Keď bod X_0 je rôzny od vrcholu paraboly $/x_0 \neq 0/$, priamka FX_0 a spomenutá rovnobežka s osou paraboly sú rôzne priamky a ich osi súmernosti dostaneme ako množinu všetkých bodov, ktoré majú od oboch priamok rovnaké vzdialenosti. Preto osi majú rovnice

$$\frac{\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) x - x_0 y + x_0 . \frac{p}{2}}{\sqrt{\left(y_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + x_0^2}} = \pm \ (x - x_0),$$

teda

$$\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) x - x_0 y + x_0 . \frac{p}{2} = \pm \left(y_0 + \frac{p}{2}\right) \ (x - x_0) .$$

Jedna z osí má teda rovnicu

$$p\ (x - x_0) + x_0 \ (y - y_0) = 0,$$

druhá

$$2y_0 x - x_0 \ (y + y_0) = 0.$$

Keď vynásobíme túto rovnicu zlomkom $\frac{p}{x_0}$, dostaneme rovnicu dotyčnice paraboly v bode X_0, ktorá pretína os y v bode $[0, -y_0]$. Tým sme dokázali tvrdenie pre každý lúč, ktorý neprechádza vrcholom paraboly. Dokazované tvrdenie však platí aj pre vrchol paraboly, pretože vrchol leží na osi paraboly a odrazený lúč takisto.

Táto zaujímavá vlastnosť paraboly nachádza časté uplatnenie v technike. Vysielacie a prijímacie antény rádiolokátorov majú tvar častí rotačného paraboloidu, teda plochy, ktorá vznikne rotáciou /otáčaním/ paraboly okolo jej osi. Lúče vychádzajúce z ohniska paraboly sa odrážajú do lúčov rovnobežných s osou paraboly, pri prijímacích anténach ide o opačný jav. To isté platí o paraboloidických zrkadlách reflektorov a pod.

Cvičenia

Sústava súradníc je vždy karteziánska.

76. Ukážte, že lúče vychádzajúce z jedného ohniska elipsy sa od elipsy odrážajú do druhého ohniska. Vyslovte a dokážte obdobné tvrdenie pre hyperbolu.

77. Dokážte, že súčin vzdialeností ohnísk elipsy od ľubovoľnej dotyčnice elipsy je konštantný. To isté tvrdenie dokážte o hyperbole.

78. Určite množinu všetkých bodov, ktoré majú od osi x k-krát väčšiu vzdialenosť ako od bodu $[0, 1]$; $k > 0$.

79. Ktorými bodmi roviny prechádzajú dve rôzne a navzájom kolmé dotyčnice kužeľosečky

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 28x + 4y + 44 = 0?$$

80. Ukážte, že kužeľosečka z predchádzajúceho cvičenia je množina všetkých bodov, ktoré majú od bodu $[3, 0]$ a od priamky $x + 2y - 1 = 0$ rovnaké vzdialenosti.

81. Ukážte, že kužeľosečka

$$\left(1 + Ax + By\right)^2 = D^2\left(x^2 + y^2\right),$$

kde $D \neq 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ /pozri príklad na str. 74/, je množina všetkých bodov, ktoré majú od začiatku a od priamky

$$1 + Ax + By = 0$$

konštantný pomer vzdialeností. Určite tento pomer.

4. Grafické riešenie algebraických úloh

Keď máme riešiť sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi x, y, z ktorých jedna je kvadratická rovnica a druhá lineárna rovnica, je to z geometrického hľadiska vlastne úloha nájsť spoločné body kužeľosečky a priamky. Grafickou metódou môžeme teda danú sústavu rovníc riešiť takto:

1. Načrtneme si kužeľosečku, ktorá má za svoju rovnicu danú kvadratickú rovnicu.
2. Načrtneme si priamku, ktorá má za svoju rovnicu danú lineárnu rovnicu.
3. Odmeriame /približne/ súradnice spoločných bodov kužeľosečky a priamky.

Ukážeme si to na príklade.

Je daná sústava rovníc

$$x^2 + xy + 2y^2 + 2x - 6y - 16 = 0,$$
$$x - 2y - 2 = 0.$$

Aby sme mohli načrtnúť kužeľosečku určenú touto kvadratickou rovnicou, bolo by dobré poznať jej stred, osi, vrcholy a pod. Aby sme si to uľahčili, najprv si výhodne upravíme danú sústavu rovníc tak, aby kvadratická rovnica neobsahovala člen s xy. To dosiahneme tak, že k danej kvadratickej rovnici pričítame vhodný násobok danej lineárnej rovnice, v našom prípade napr. jej $(-y)$-**násobok.** Tak dostaneme sústavu rovníc

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 4y - 16 = 0,$$
$$x - 2y - 2 = 0,$$

ktorá je ekvivalentná s pôvodnou sústavou rovníc. Prvú rovnicu upravíme na tvar

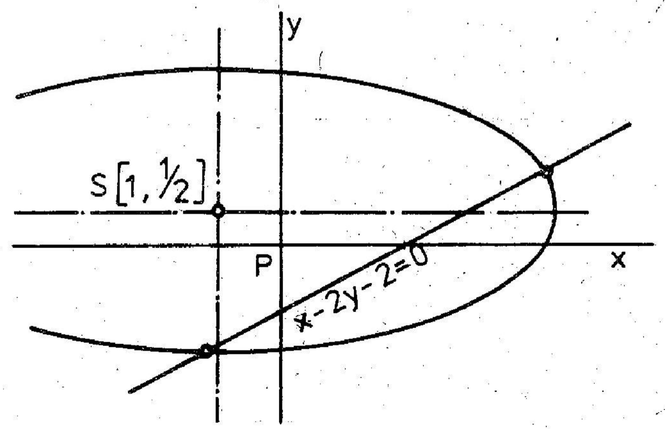
$$\left(x + 1\right)^2 + 4\left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 18;$$

to je rovnica elipsy so stredom $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ a osami rovnobežnými s osami x, y. Určíme si ešte vrcholy tejto elipsy; to sú body

$$\left[-1 \pm 3\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[-1, \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}\right].$$

To nám umožňuje načrtnúť elipsu /obr. 26/. Keď narysujeme ešte priamku

$$x - 2y - 2 = 0,$$



Obr. 26

môžeme približne určiť priesečníky priamky a kužeľosečky a súradnice týchto priesečníkov. Samozrejme, táto metóda nachádza svoje uplatnenie skôr v zložitejších príkladoch. V našom prípade by bolo jednoduchšie vyjadriť x z druhej rovnice a dosadiť ho do prvej; dostali by sme presné riešenie sústavy v tvare

$$(x, y) = \left(1 + \sqrt{5}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \text{ a } (x, y) = \left(1 - \sqrt{5}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right).$$

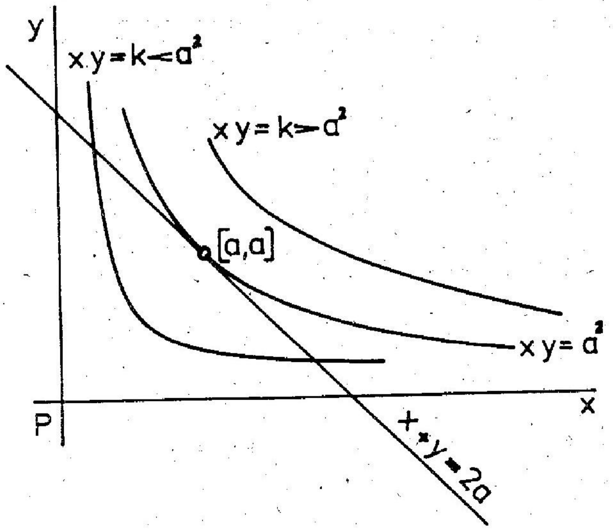
Grafickú metódu riešenia možno použiť aj pri riešení sústavy dvoch rovníc, z ktorých každá je kvadratická; dokonca v tomto prípade je grafická metóda opodstatnenejšia. Geometricky tu ide o určenie spoločných bodov dvoch kužeľosečiek. V tomto prípade si však nemôžeme upraviť sústavu tak, aby v oboch rovniciach zmizol člen s xy, a musíme najprv zistiť osi príslušných kužeľosečiek, vrcholy, prípadne ďalšie ich vlastnosti.

Poznámka na záver. Analytická geometria kužeľosečiek sa často používa v rôznych úlohách aplikovanej matematiky. Už zisťovanie lokálneho maxima alebo minima funkcie nás privádza k úlohe určiť druh kužeľosečky $ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0$.

Základná úloha nelineárneho programovania je určenie maxima funkcie $f(x, y)$, v ktorej dvojice čísel x, y sú viazané nerovnosťami tvaru $g(x, y) \leqq 0$, a aspoň jedna z funkcií f, g je kvadratická. Ukážeme si to na veľmi jednoduchom príklade.

Máme určiť strany x, y pravouholníka tak, aby jeho obvod neprevyšoval $4a$ a aby jeho obsah bol čo najväčší.

Pre strany pravouholníka platia teda nerovnosti $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x + y \leqq 2a$; máme určiť maximum funkcie xy. Uvedené nerovnice ohraničujú v rovine trojuholník /obr. 27/, krivky $xy = k$ sú hyperboly pre $k \neq 0$, $xy = 0$ je dvojica priamok. Naša úloha sa transformuje na úlohu nájsť tie



Obr. 27

hyperboly $xy = k$, ktoré majú so spomenutým trojuholníkom spoločný bod, a z nich zistiť tie, ktoré prislúchajú k maximálnemu číslu k. V našom prípade to je hyperbola $xy = a^2$, ktorá má s trojuholníkom spoločný bod $[a, a]$. Hľadaný pravouholník je štvorec so stranou a.

Ďalšie aplikácie analytickej geometrie kužeľosečiek nachádzame napr. v mechanike, kde určenie hlavných smerov napätia a deformácie je vlastne úloha nájsť osi kužeľosečky a pod.

IV. K V A D R I K Y

1. Základné vlastnosti kvadrík

Nech je v trojrozmernom euklidovskom alebo afinnom priestore daná karteziánska alebo lineárna sústava súradníc. Obdobne, ako sme v rovine definovali kužeľosečku, definujeme v priestore kvadriku ako množinu všetkých bodov $X = [x, y, z]$, ktorých súradnice vzhľadom na danú sústavu súradníc vyhovujú rovnici

$$ax^2 + 2bxy + 2gxz + cy^2 + 2hyz + jz^2 +$$
$$+ 2dx + 2ey + 2kz + f = 0; \qquad /1/$$

v tejto rovnici aspoň jeden z koeficientov a, b, g, h, j, c sa nerovná nule.

Príklady kvadrík:

a/ $(ax + by + cz + d)(px + qy + rz + s) = 0$;

$ax + by + cz + d = 0$ a $px + qy + rz + s = 0$

sú rovnice rovín. Kvadrika sa skladá z týchto dvoch rovín, ktoré môžu aj splynúť.

b/ $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$,

kde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. S každým bodom $[x_0, y_0, 0]$, ktorého súradnice vyhovujú tejto rovnici, vyhovujú rovnici aj súradnice každého bodu $[x_0, y_0, z]$, kde z je ľubovoľné číslo. Teda s každým bodom X kvadriky leží na kvadrike aj celá priamka, ktorá prechádza bodom X rovnobežne s osou z. Kvadrika je valcová plocha, ktorej určujúca krivka je kužeľosečka $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ v rovine $z = 0$.

c/ $ax^2 + 2bxy + 2gxz + cy^2 + 2hyz + jz^2 = 0$.

S každým bodom $X = [x_0, y_0, z_0]$ tejto kvadriky vyhovujú rovnici kvadriky aj súradnice každého bodu $[tx_0, ty_0, tz_0]$, teda s každým bodom X kvadriky, rôznym od začiatku, leží na kvadrike celá priamka spájajúca bod X so začiatkom. Kvadrika je kužeľová plocha.

d/ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0$

je v karteziánskej sústave súradníc rovnica guľovej plochy so stredom $[x_0, y_0, z_0]$ a polomerom r v prípade, keď $r > 0$; ak $r = 0$, celá kvadrika sa skladá z jediného bodu.

Keď je daná kvadrika, ktorá má rovnicu /1/, a priamka, ktorá má parametrické vyjadrenie

$$x = m + ut, \qquad y = n + vt, \qquad z = p + wt,$$

môžeme spoločné body priamky a kvadriky hľadať rovnako, ako sme hľadali spoločné body priamky a kužeľosečky. Pre parametre spoločných bodov kvadriky a priamky dostaneme aj teraz rovnicu v tvare

$$At^2 + 2Bt + C = 0;$$

diskusia o počte spoločných bodov priamky a kvadriky je rovnaká ako pri kužeľosečke.

Cvičenia

82. Určite spoločné body osi x a kvadriky, ktorá má rovnicu /1/. Kedy leží celá os x na kvadrike /1/?

83. Čo je množina všetkých spoločných bodov kvadriky

$$xy + yz + xz = 0$$

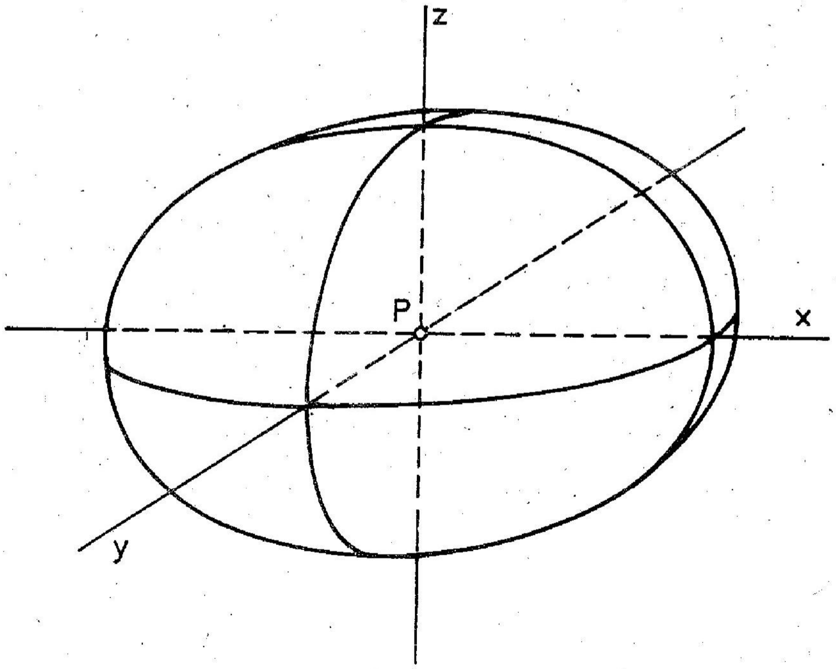
s rovinou $z = k$?

2. Regulárne kvadriky

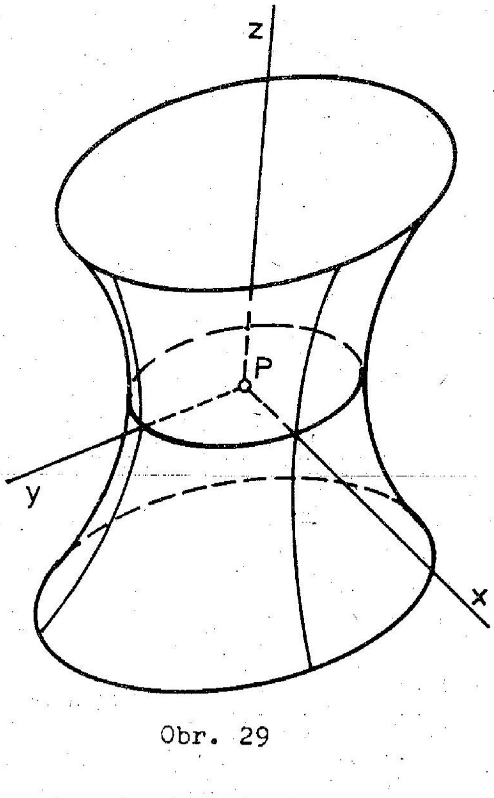
Rovnako ako pri kužeľosečkách môžeme aj pri kvadrikách definovať formálne reálne a bodovo reálne kvadriky. Jediný bod, dvojica rovín /rôznych alebo splývajúcich/, valcová plocha a kužeľová plocha sú tzv. singulárne bodovo reálne kvadriky. Ostatné bodovo reálne kvadriky sú regulárne. Karteziánsku sústavu súradníc možno vždy vybrať tak, že daná regulárna bodovo reálna kvadrika bude mať vzhľadom na túto sústavu súradníc jednu z nasledujúcich rovníc:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$ kvadrika sa nazýva elipsoid /obr. 28/;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$ kvadrika sa nazýva jednodielny **hyperboloid** /obr. 29/;



Obr. 28

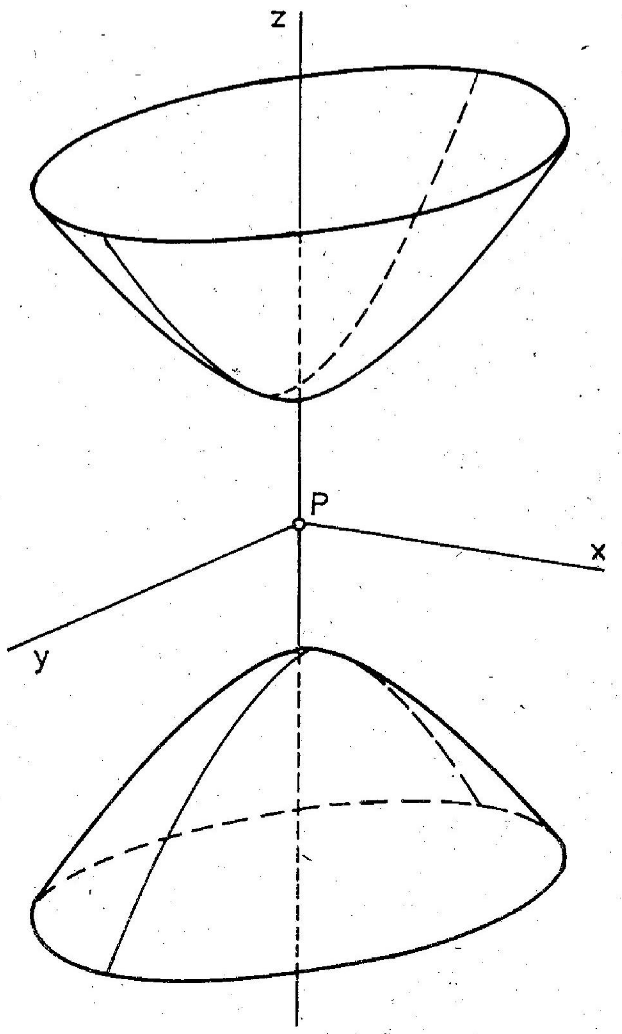


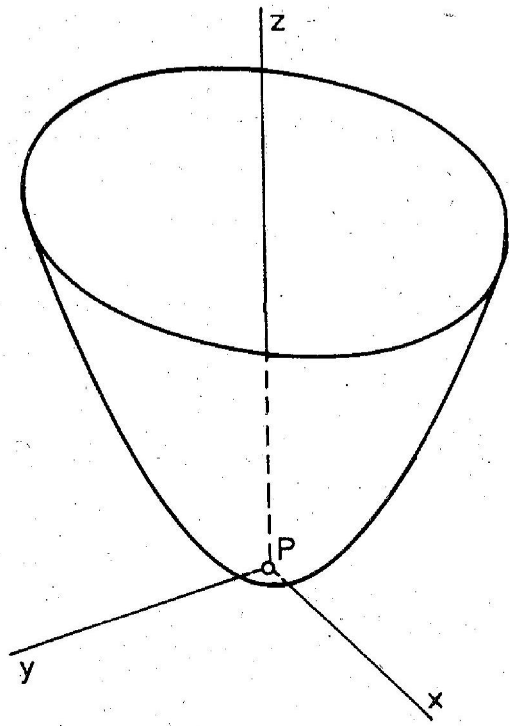
Obr. 29

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$ kvadrika sa nazýva dvojdielny hyperboloid /obr. 30/;

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2};$$ kvadrika sa nazýva eliptický paraboloid /obr. 31/;

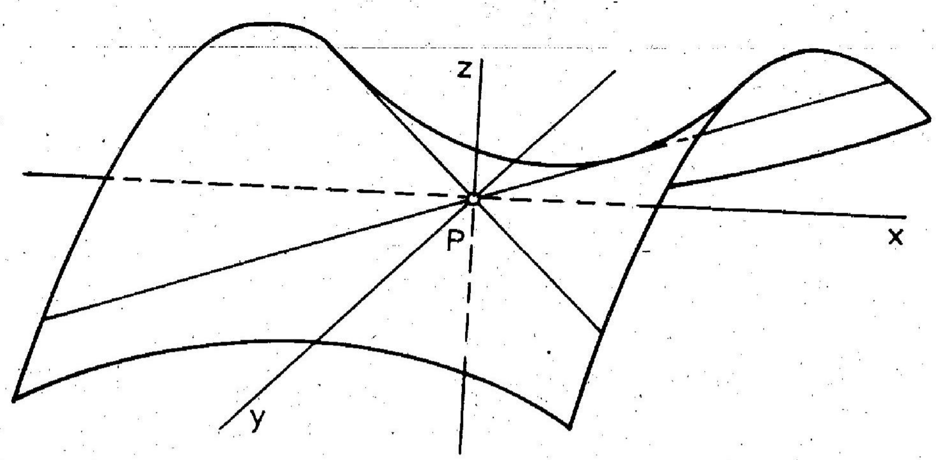
$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2};$$ kvadrika sa nazýva hyperbolický **paraboloid** /obr. 32/.





Obr. 30

Obr. 31



Obr. 32

/Lineárnu sústavu súradníc možno vybrať dokonca tak, že v predchádzajúcich rovniciach bude $a^2 = b^2 = c^2 = 1$./

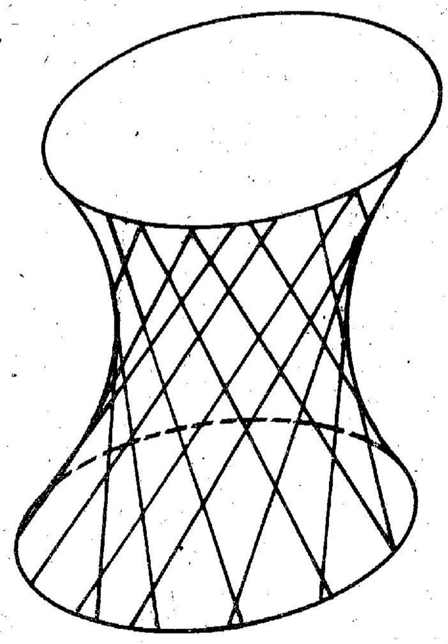
Ak v predchádzajúcej rovnici elipsoidu vzhľadom na karteziánsku sústavu súradníc $a^2 = b^2$, ide o rotačný elipsoid, ktorý vznikne otáčaním elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ okolo osi z. Podobne jednodielny hyperboloid s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ je rotačný; vznikne rotáciou hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ okolo osi z. Rotačný dvojdielny hyperboloid s rovnicou $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ vzniká zase rotáciou hyperboly $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ okolo osi z. Nakoniec otáčaním paraboly $z = \frac{x^2}{a^2}$, $y = 0$ okolo osi z vznikne rotačný paraboloid /eliptický/ s rovnicou $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$. Hyperbolický paraboloid nemôže byť rotačný.

3. Priamkové regulárne kvadriky

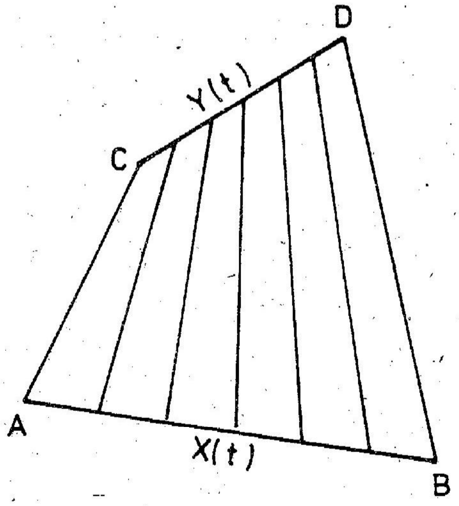
Nech jednodielny hyperboloid je daný rovnicou $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ vzhľadom na vhodnú lineárnu sústavu súradníc. Nech $M = [m, n, p]$ je bod tohto hyperboloidu; vtedy $m^2 + n^2 = 1 + p^2 \neq 0$. Nenulový vektor $\vec{u} = (pm - n, pn + m, m^2 + n^2)$ spolu s bodom M určuje priamku $(M, \vec{u})$, ktorá má parametrické rovnice

$$x = m + t\,(pm - n),$$
$$y = n + t\,(pn + m),$$
$$z = p + t\,(m^2 + n^2).$$

Keď dosadíme z týchto rovníc vyjadrenie súradníc do rovnice hyperboloidu, dostaneme rovnicu, ktorá je splnená pre každé číslo t; celá priamka $(M, \vec{u})$ leží na hyperboloide. Ten istý výsledok by sme dostali, keby sme vzali priamku $(M, \vec{v})$, kde $\vec{v} = (pm + n, pn - m, m^2 + n^2)$. Každým bodom jednodielneho hyperboloidu prechádzajú teda dve rôzne priamky /vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ sú totiž lineárne nezávislé/, ktoré ležia celé na hyperboloide. Preto hovoríme, že jednodielny hyperboloid je regulárna priamková kvadrika /obr. 33/. To isté platí o hyperbolickom paraboloide, ako si to ukážeme v cvičení.



Obr. 33



Obr. 34

Príklad. Nech sú v priestore dané štyri body A, B, C, D, ktoré neležia v jednej rovine /obr. 34/. Lineárnu sústavu súradníc môžeme vybrať tak, že bod A je jej začiatok, bod B má súradnice $[1, 0, 0]$, bod C má súradnice $[0, 1, 0]$ a bod D súradnice $[0, 0, 1]$. Úsečka AB má parametrické vyjadrenie $x = t$, $y = z = 0$, $0 \leq t \leq 1$; podobne úsečka CD bude mať parametrické vyjadrenie $x = 0$, $y = 1 - t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 1$. Ukážte, že všetky body všetkých úsečiek, ktoré majú krajné body $X(t) = [t, 0, 0]$ a $Y(t) = [0, 1 - t, t]$, ležia na kvadrike, ktorá má rovnicu

$$xy - (1 - x - y - z)\, z = 0.$$

R i e š e n i e . Úsečka $X(t)\, Y(t)$ má parametrické vyjadrenie

$$x = t - st, \quad y = s - st, \quad z = st,$$

kde parameter s prebieha uzavretý interval $\langle 0, 1 \rangle$. Keď dosadíme vyjadrenia súradníc z týchto rovníc do rovnice kvadriky $xy = z\,(1 - x - y - z)$, dostaneme rovnicu, ktorá je splnená pre každé t a každé s. Možno ukázať, že táto kvadrika je hyperbolický paraboloid. Používa sa v technickej praxi napr. pri konštrukcii strechy, ktorá má obsahovať dve mimobežné hrany AB a CD. Takisto druhá priamková regulárna kvadrika, jednodielny hyperboloid, má uplatnenie v stavebníctve; ako príklad možno uviesť vežové chladiarne, ktoré sú časťami jednodielneho rotačného hyperboloidu. Priamkové regulárne kvadriky sa používajú v stavebníctve najmä pre svoje dobré statické vlastnosti a jednoduchú konštrukciu.

Cvičenia

84. Ukážte, že ak bod $M = [m, n, p]$ leží na hyperbolickom paraboloide $z = x^2 - y^2$, leží na tejto kvadrike aj celá priamka $(M, \vec{u})$, kde $\vec{u} = (1, 1, 2m - 2n)$, a celá priamka $(M, \vec{v})$, kde $\vec{v} = (1, -1, 2m + 2n)$.

85. Čo je množina spoločných bodov roviny $z = 0$ a kvadriky, ktorá má rovnicu

$$xy = z\,(1 - x - y - z)?$$

V Ý S L E D K Y   C V I Č E N Í

1. $x'^2 - y'^2 = 2$ alebo $x'^2 - y'^2 = -2$.

2. $2x = x'\sqrt{3} - y'$, $2y = x' + y'\sqrt{3}$ alebo $2x = x'\sqrt{3} + y'$, $2y = -x' + y'\sqrt{3}$.

3. $x' + 1 = 0$.

4. Je nutné a stačí zvoliť si P' a vektor $\vec{e}'$ na priamke $y = 2x - 1$.

5. $x = x' + 2y'$, $y = 2x' - y' - 1$.

6. a/ $[1, 0]$, $[\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}]$; b/ žiadne; c/ $[1, 0]$; d/ $[\frac{1}{2}, \frac{1}{6}]$.

7. Priamka $x = 0$ nepretína kužeľosečku, priamka $y = kx$ ju pretína v prípade $k(4 - k) \geq 0$ v bodoch $[t, kt]$, kde $t^2(1 - 2k - 2k^2) + 2(1 + k)t + 1 = 0$.

8. Pre $2p \neq 3$ $[p, (p^2 + 2p - 5)/(2p - 3)]$; $x = \frac{3}{2}$ kužeľosečku nepretína.

9. Priamka je časťou kužeľosečky.

10. $y = q$ $(q \neq 0)$ v bode $[q^{-1}, q]$, os x nepretína kužeľosečku.

11. $(2 \pm \sqrt{2}, 2)$.

12. $(3, 1)$, $(1, -1)$.

13. Pre $p = 1$ smer $(1, -1)$, pre $p = -1$ smer $(1, 1)$.

14. $2bxy + 2dx + 2ey + f = 0$.

15. $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

16. $f = 8$.

17. Všetky body priamky $x + y + 1 = 0$.

18. $ax^2 \pm 2bxy + cy^2 = 0$.

19. Rôznobežky $y + 5 = 0$, $y - x + 2 = 0$.

20. $3x - 2y = 0$, $7x + 5y = 0$.

21. Rôzne rovnobežky $x + y + 1 \pm \sqrt{5} = 0$.

22. $2a + 1 = 0$; rôznobežky $x - y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

23. $p = q = 1$: dve rovnobežky $x + y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$; $p = q = -1$: rovnobežky $x - y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$.

24. $13x - 12y = 25$.

25. $y + 1 = 2x$.

26. $y = 0$, $x + 2y = 0$; nemá stred.

27. $5x + y - 5 = 0$.

28. $T = [-1, 1]$; $9x + 2y + 7 = 0$; $T = [2, 1]$, $9x + 10y - 28 = 0$.

29. $x = 0$, $x + 2y + 6 = 0$.

30. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ey = 0$, $ae \neq 0$.

31. $7x - 2y - 13 = 0$, $x = 3$.

32. $x = 2$ - asymptota, $x - 3y + 10 = 0$ - dotyčnica.

33. Neexistujú.

34. $x + y = 0$, $3x + y = 0$, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

35. $x = 2$, $x - 2y + 4 = 0$.

36. $x = 0$ - asymptota, $y = 2$ - dotyčnica s dotykovým bodom $[1, 2]$.

37. $2bxy + f = 0$, $bf \neq 0$.

39. $x > 0$ alebo $x < -\frac{3}{2}$.

41. $a^2 + 6a + 1 < 0$.

42. $-x + 2y + 1 = 0$.

43. $x + y - 1 = 0$, $[1, 0]$; $3x + 3y + 13 = 0$, $\left[-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right]$.

44. $v = 0$.

45. $-x + y + 1 = 0$.

46. $4x + 5y + 3 = 0$, $y = 1$.

47. $y = 1 \pm \frac{2}{7}\sqrt{10}$.

48. $5y - 4 = 0$; dotyčnice neexistujú.

49. $-5x + 5y - 18 = 0$.

50. a/ Parabola; b/, c/ hyperbola; d/ formálne reálna; e/ elipsa.

51. a/ Nemá stred; b/ $[2, 3]$; c/ $\left[-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right]$; d/ každý bod je stred;
e/ $[-1, -1]$.

52. a/ Smer osi x je asymptotický; b/ $x - 2 = 0$; c/ $x - 2y + 2 = 0$;
e/ $3x - y + 2 = 0$.

53. b/ Žiadne; c/ $[0, 1]$, $\left[-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$; e/ $\left[-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, -1 \pm \sqrt{3}\right]$.

54. $ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey = 0$, $cd^2 + ae^2 \neq 0$.

55. $dx(x - 1) + ey(y - 1) = 0$, $ed(e + d) \neq 0$.

56. $ed > 0$ - elipsa, $ed < 0$ - hyperbola; parabola to nemôže byť.

57. Elipsa.

58. Hyperbola.

60. $y = 2x - 6$, $2x + 4y - 1 = 0$, $\left[\frac{5\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{5}}, \frac{-\sqrt{5} \pm 1}{\sqrt{5}}\right]$.

61. Parabola, $2x - y - 6 = 0$, $\left[\frac{14}{5}, -\frac{2}{5}\right]$.

62. Parabola, $x - y + 2 = 0$, $[-2, 0]$, $x + y + 2 = 0$.

63. Každá priamka idúca bodom $[-3, -4]$.

64. $b = 0$ - bod; $b = -1$ - parabola; $b = 1$ - formálne reálna a singulárna; $0 < b < 1$ - regulárna formálne reálna; $-1 < b < 0$ - elipsa; $b^2 > 1$ - - hyperbola; $(b + 1)(x + y) + 2 = 0$, $x - y = 0$; v prípade paraboly je osou len druhá priamka.

65. $y^2 = 2px + qx^2$, $p \neq 0$.

66. $2x + 4y - 1 = 0$, $2x - y - 6 = 0$.

67. $y = 1$.

68. $2x + 3y = 0$, $-3x + 2y = 0$.

69. $a(x^2 + y^2) + 2bxy + f = 0$, $f(a^2 - b^2) \neq 0$.

70. $a(x - y)^2 + 2d(x + y) + f = 0$, $ad \neq 0$.

71. Práve bodmi kružnice $x^2 + y^2 = (a + b)/ab$ pre $(a + b) \cdot ab > 0$.

72. Práve bodmi priamky $2x + p = 0$.

73. Vrchol $[v^2 \cdot \sin\alpha \cos\alpha/g, v^2 \sin^2\alpha/2g]$.

74. Elipsa pre $\beta \neq k\pi$, kde k je celé číslo, ináč priamka $x + y = 0$ alebo $x - y = 0$.

75. Elipsu pre $ps - rq \neq 0$, ináč dve rovnobežné priamky, pokiaľ aspoň jedno z čísel p, q, r, s sa nerovná nule; všetky body hyperboly pre $ps - rq \neq 0$, ináč dve rovnobežné priamky alebo prázdna množina.

78. $k^2x^2 + (k^2 - 1)y^2 - 2k^2y + k^2 = 0$.

79. Práve bodmi priamky $x + 2y - 1 = 0$.

81. $\sqrt{A^2 + B^2}/|D|$.

82. $ax^2 + 2dx + f = 0$, $a = d = f = 0$.

83. $(x + k)(y + k) = k^2$; hyperbola pre $k \neq 0$, osi x a y pre $k = 0$.

85. Osi x a y.

O B S A H