1 Klasifikácia bodov krivky.

Nech P_2 je projektívna rovina nad algebraicky uzavretým poľom k a $k[x_0, x_1, x_2]$ k nej prislúchajúca oblasť integrity polynómov. Poznamenajme, že pole sa nazýva algebraicky uzavreté, ak každý polynom s koeficientami z k má v k koreň (napr. pole všetkých komplexných čísiel). Nech $F(x) = F(x_0, x_1, x_2)$ je homogénny polynóm z $k[x_0, x_1, x_2]$ stupňa m.

Definícia 1 *Algebraickou rovinnou krivkou v P_2 (v ďalšom len krivkou) nazývame množinu všetkých bodov $\mathbf{X}$ z P_2, súradnice ktorých spĺňajú algebraickú rovnicu $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Číslo m nazývame stupňom danej algebraickej krivky* ($\deg \mathbf{X}$)

Aký je geometrický význam stupňa krivky? Nech $(a) = (a_0, a_1, a_2), (b) = (b_0, b_1, b_2)$ sú dva rôzne body z P_2 a p priamka prechádzajúca danými bodmi. Nech $(x) = k(a) + l(b)$ sú parametrické rovnice danej priamky. Hľadajme spoločné body priamky p a krivky $\mathbf{X}$. Riešme teda rovnicu $F(k(a)+l(b)) = 0$ v neurčitých k a l.Na polynom $F(x_0, x_1, x_2)$ aplikujme Taylorovu vetu. Vyjadrime Taylorov rozvoj tototo polynómu v okolí bodu $k(a)$ (v sumovaní prebieha i od 0 po 2) :

$$F(k(a) + l(b)) = F(ka) + \frac{1}{1!}\left(\Sigma \frac{\partial F(ka)}{\partial x_i} lb_i\right) + \frac{1}{2!}\left(\Sigma \frac{\partial F(ka)}{\partial x_i} lb_i\right)^2 + ...$$

$$... + \frac{1}{r!}\left(\Sigma \frac{\partial F(ka)}{\partial x_i} lb_i\right)^r + ... + \frac{1}{m!}\left(\Sigma \frac{\partial F(ka)}{\partial x_i} lb_i\right)^m.$$

Pre symbolický zápis $\left(\Sigma \frac{\partial F(ka)}{\partial x_i} lb_i\right)^r$ platí

$$\left(\Sigma \frac{\partial F(ka)}{\partial x_i} lb_i\right)^r = \sum \frac{r!}{r_0! r_1! r_2!} \frac{\partial^r F(ka)}{\partial x_0^{r_0} \partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} (lb_0)^{r_0} (lb_1)^{r_1} (lb_2)^{r_2},$$ pričom suma

prebieha cez všetky usporiadané trojice (r_0, r_1, r_2) pre ktoré $r_0 + r_1 + r_2 = r$.

Keďže polynóm F a každá jeho parciálna derivácia je homogénny, pre poslednú

rovnosť platí

$$\left(\Sigma \frac{\partial F(ka)}{\partial x_i} lb_i\right)^r = k^{m-r} l^r \sum \frac{r!}{r_0! r_1! r_2!} \frac{\partial^r F(a)}{\partial x_0^{r_0} \partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} (b_0)^{r_0} (b_1)^{r_1} (b_2)^{r_2}.$$

Pre Taylorov rozvoj polynómu $F(x)$ v okolí bodu $k(a)$ teda platí :

$$F(k(a)+l(b)) = k^m F(a) + \frac{1}{1!} k^{m-1} l \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i\right) + \frac{1}{2!} k^{m-2} l^2 \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i\right)^2 + ..$$

$$... + \frac{1}{r!} k^{m-r} l^r \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i\right)^r + ... + \frac{1}{m!} l^m \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i\right)^m .(1)$$

Rovnica $F(k(a)+l(b)) = 0$ je teda homogénnou algebraickou rovnicou v neurčitých k a l stupňa m. Táto má práve m riešení (niektoré môžu byť viacnásobné), alebo nekonečne veľa riešení (ak priamka leží na krivke). Teda pre práve m usporiadaných dvojíc (k,l) platí $F(k(a)+l(b)) = 0$ (alebo pre nekonečne veľa). Z posledne povedaného vyplýva platnosť tvrdenia :

Lema 2 *Stupeň algebraickej rovinnej krivky* $\mathbf{X}$ *je rovný počtu spoločných bodov krivky (počítaných s príslušnou násobnosťou) s priamkou vo všeobecnej polohe vzhľadom na* $\mathbf{X}$.

Poznámka 3 *Keďže* $F(k(a)+l(b)) = F(l(b)+k(a))$*, vyplýva z posledného, že Taylorov rozvoj polynómu* $F(x)$ *v okolí bodu* (ka) *a Taylorov rozvoj polynómu* $F(x)$ *v okolí bodu* (lb) *sa rovnajú. Rovnajú sa teda koeficienty pri tých istých mocninách neurčitých* k *a* l*.Platí teda*

$$\frac{1}{r!}\left(\Sigma\frac{\partial F(a)}{\partial x_i}b_i\right)^r = \frac{1}{(m-r)!}\left(\Sigma\frac{\partial F(b)}{\partial x_i}a_i\right)^{m-r}.$$

Príklad 4 *Nech je v Euklidovskej rovine daná krivka* $\mathbf{X}$ *rovnicou* $x^3+x^2-y^2=0$*, teda v rozšírenej euklidovskej rovine homogénnou rovnicou* $F(x) = x_1^3 + x_0x_1^2 - x_0x_2^2 = 0$*.Hľadajme spoločné body danej krivky s priamkou určenou bodmi* $(a) = (1,-2,0)$ *a* $(b) = (1,2,0)$*. Počítajme parciálne derivácie :* $\frac{\partial F}{\partial x_0} = x_1^2 - x_2^2$, $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_0x_1$, $\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_0x_2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 2x_0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -2x_0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1} = 2x_1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} = -2x_2$*. Rovnica (1) má v našom prípade tvar*

$$F(k(a)+l(b)) = k^3(-4) + k^2l(4.1+8.2+0.0) + \frac{kl^2}{2}(0.1^2 + (-10).2^2 + (-2).0^2 +$$

$$+2.(-4).1.2 + 2.0.1.0 + 2.0.2.0) + \frac{l^3}{6}(0.1^3 + 6.2^3 + 0.0^3 + 3.0.1^2.2 + 3.0.1^2.0 + 3.2.2^2.1 +$$

$$+3.0.2^2.0 + 3.(-2).0^2.1 + 3.0.0^2.2 + 6.0.1.2.0) = 0,$$

teda

$$(-4)k^3 + 20k^2l - 28kl^2 + 12l^3 = 0$$

Po vynásobení poslednej rovnice výrazom $\frac{1}{(-4).l^3}$ *dostávame polynomickú rovnicu tretieho stupňa v neurčitej* $\frac{k}{l}$ *:*

$$(\frac{k}{l})^3 - 5(\frac{k}{l})^2 + 7(\frac{k}{l}) - 3 = 0.$$

Táto má práve tri riešenia $\frac{k}{l} = 1 = \frac{1}{1}$ *dvojnásobný koreň a* $\frac{k}{l} = 3 = \frac{3}{1}$ *jednoduchý koreň.*

Usporiadanej dvojici $(k,l) = (1,1)$ *odpovedá spoločný bod* $k(a)+l(b) = (2.0,0) = (1,0,0)$ *krivky a priamky a usporiadanej dvojici* $(k,l) = (3,1)$ *odpovedá spoločný bod* $k(a)+l(b) = (4,-4,0) = (1,-1,0)$.

Záver : Spoločnými bodmi uvažovanej krivky a priamky sú :

bod (1,0,0) ako dvojnásobný priesečník a

bod (1,-1,0) ako jednoduchý priesečník.

Nech $\mathbf{X}$ je krivka v projektívnej rovine P_2 definovaná rovnicou $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Nech m je stupeň krivky $\mathbf{X}$.

Definícia 5 *Bod* $(a) \in \mathbf{X}$ *nazveme* ***regulárnym*** *bodom* $\mathbf{X}$ *ak*

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_i} \neq 0$$

aspoň pre jedno $i \in \{0, 1, 2\}$. *Bod* $(a) \in \mathbf{X}$ *nazveme* ***singulárnym*** *bodom* $\mathbf{X}$ *ak*

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_i} = 0$$

pre všetky $i \in \{0, 1, 2\}$.*Singulárny bod* $(a) \in \mathbf{X}$ *nazveme* ***r-násobným*** *, ak*

$$\frac{\partial^k F(a)}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} = 0 \text{ pre všetky } k \leq r-1 \text{ a všetky prípustné trojice } (k_0, k_1, k_2)$$

a aspoň pre jednu trojicu (r_0, r_1, r_2) *s* $r_0 + r_1 + r_2 = r$ *platí*

$$\frac{\partial^r F(a)}{\partial x_0^{r_0} \partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2}} \neq 0.$$

Príklad 6 *Vráťme sa k príkladu 4 a nájdime singulárne body krivky z tohoto príkladu Hľadajme teda nenulové riešenia nasledovného systému algebraických rovníc :*

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_0} = x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_0x_1 = 0$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} = -2x_0x_2 = 0.$$

Je zrejmé, že jediným riešením je bod $(a) = (1, 0, 0)$. *Keďže*

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_2^2} = -2,$$

je bod (a) *dvojnásobným bodom krivky* $\mathbf{X}$.

Nech teraz $(a) \in \mathbf{X}$ je regulárnym bodom krivky $\mathbf{X}$. Sledujme priamku p v P_2 danú rovnicou

$$p : \frac{\partial F(a)}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial F(a)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(a)}{\partial x_2} x_2 = 0.$$

Bod (a) je zrejme bodom tejto priamky (pozri Úloha ....). Nech (b) je ďalším bodom tejto priamky, teda priamka p je určená bodmi (a) a (b). Hľadajme priesečníky priamky p s krivkou $\mathbf{X}$.Rovnica (1) má v tomto prípade tvar

$$F(k(a) + l(b)) = \frac{1}{2!} k^{m-2} l^2 \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i \right)^2 + ... + \frac{1}{m!} l^m \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i \right)^m = 0,$$

kedže

$$F(a) = \Sigma b_i \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} = 0.$$

Usporiadaná dvojica $(k, l) = (1, 0)$ je teda aspoň dvojnásobným riešením poslednej rovnice, teda bod $1(a) + 0(b) = (a)$ je aspoň dvojnásobným priesečníkom priamky p a krivky $\mathbf{X}$.

Definícia 7 *Priamka, ktorá má regulárny bod krivky za priesečník s krivkou aspoň dvojnásobný, sa nazýva* ***dotyčnicou krivky v jej regulárnom bode.*** *Ak je tento priesečník práve dvojnásobný, hovoríme o obyčajnej dotyčnici, trojnásobný - inflexná dotyčnica, r-násobný - dotyčnica r-tého stupňa.*

Predchádzajúcimi úvahami sme dokázali nasledujúcu vetu.

Veta 8 *Krivka* $\mathbf{X}$ *má v regulárnom bode* (a) *práve jednu dotyčnicu* t_a *Jej rovnica je*

$$t_a : \frac{\partial F(a)}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial F(a)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(a)}{\partial x_2} x_2 = 0.$$

Nech teraz $(a) \in \mathbf{X}$ je r-násobným bodom bodom krivky $\mathbf{X}$ a p je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom (a). Nech je p určená bodmi (a) a (b), pričom $(b) \notin \mathbf{X}$. Spoločné body priamky p a krivky $\mathbf{X}$ sa nájdu pomocou riešenia rovnice (1), teda

$$F(k(a) + l(b)) = \frac{1}{r!} k^{m-r} l^r \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i \right)^r + ... + \frac{1}{m!} l^m \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i \right),$$

kedže všetky parciálne deriváce polynómu $F(x)$ stupňa $\leq r - 1$ v bode (a) sú rovné nule. Bod (a) ako spoločný bod p a $\mathbf{X}$ je teda priesečníkom aspoň r-násobným, kedže odpovedá riešeniu $(k, l) = (1, 0)$, ktoré je aspoň r-násobným riešením poslednej rovnice. Kedy je bod (a) priesečníkom aspoň (r+1)-násobným? Práve vtedy keď

$$\left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} b_i \right)^r = 0$$

teda práve vtedy, keď bod (b) je bodom krivky **Y** stupňa r danej rovnicou

$$\mathbf{Y} \ : \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} x_i \right)^r = 0$$

Je zrejmé, že $(a) \in \mathbf{Y}$ (pozri Úloha...........). Ukážeme, že posledá rovnica definuje práve r priamok, teda že **Y** je zjednotením práve r priamok (nie nevyhnutne rôznych). Nech bod $(c) \in \mathbf{Y}$.Teda priamka q určená bodmi (a) a (c) má s krivkou **X** spoločný bod (a) ako priesečník aspoň (r+1)-násobný. To platí pre každý ďalší bod priamky q, teda každý bod priamky q je bodom **Y,** t.j. $q \subset \mathbf{Y}$. Obrátene nech priamka (r) idúca bodom (a) má s **X** spoločný aspoň (r+1)-násobný priesečník - bod (a).Potom ľubovoľný bod (d) priamky (r) je bodom **Y.** Je teda **Y** zjednotením r priamok.

Definícia 9 *Priamka, ktorá má r-násobný bod krivky za priesečník s krivkou aspoň (r+1)-násobný, sa nazýva **dotyčnicou krivky v r-násobnom bode.***

Veta 10 *V r-násobnom bode (a) krivky **X** má krivka práve r dotyčníc. Rovnica tohoto zväzku dotyčníc je*

$$\varkappa_a : \left(\Sigma \frac{\partial F(a)}{\partial x_i} x_i \right)^r = 0.$$

Príklad 11 *Pokračujeme v príklade 4. Bod $(a) = (1,0,0)$ je dvojnásobným bodom krivky **X** : $F(x) = x_1^3 + x_0x_1^2 - x_0x_2^2 = 0$. Rovnica zväzku dotyčníc v bode (a) má tvar*

$$\frac{\partial^2 F(a)}{\partial x_0^2} x_0^2 + \frac{\partial^2 F(a)}{\partial x_1^2} x_1^2 + \frac{\partial^2 F(a)}{\partial x_2^2} x_2^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 F(a)}{\partial x_0 \partial x_1} x_0x_1 + 2\frac{\partial^2 F(a)}{\partial x_0 \partial x_2} x_0x_2 + 2\frac{\partial^2 F(a)}{\partial x_2 \partial x_2} x_1x_2 = 0, \ \textit{teda}$$

$$\varkappa_a : 2x_1^2 - 2x_2^2 = 0.$$

Zväzok dotyčníc v bode $(a) = (1,0,0)$ je teda zjednotenie priamok $x_1 - x_2 = 0$ a $x_1 + x_2 = 0$