KI LaTeX DOKUMENT

Materiały do przedmiotu "Rozwiązywanie zadań odwrotnych"

Metoda różnic skończonych: Przykład transferu ciepła w przypadku jednowymiarowym stacjonarnym z dwoma różnymi materiałami

dr inż. Konrad M. Gruszka,*

Abstract. Ten dokument prezentuje przykład użycia metody różnic skończonych do obliczenia stacjonarnego (niezależnego od czasu) przepływu ciepła w jednowymiarowym materiale złożonym z dwóch części o różnych właściwościach. Problem również opiera się na drugiej zasadzie termodynamiki o równanie przewodnictwa ciepła w stanie stacjonarnym (gdy temperatura w każdym punkcie materiału nie może zmieniać się z czasem).

1. MRS

1.1. Wprowadzenie

W stacjonarnym problemie przewodnictwa ciepła dla przypadku jednowymiarowego, gdzie rozważamy dwa różne materiały połączone ze sobą (np. aluminium i drewno), musimy wziąć pod uwagę różne właściwości termiczne obu materiałów, w szczególności ich różną przewodność cieplną k. W takim układzie, równanie przewodnictwa ciepła w formie jednowymiarowej dla każdego z materiałów można zapisać jako:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

gdzie $k(x)$ jest przewodnością cieplną, która jest funkcją pozycji x i zmienia się w punkcie zetknięcia obu materiałów. To oznacza, że strumień ciepła q jest stały i ciągły w całym materiale:

$$q = -k(x)\frac{dT}{dx} = const.$$

Warunki zetknięcia zakładają ciągłość temperatury i strumienia ciepła na granicy między dwoma materiałami:

- $T_{\text{Al}}(x_{\text{interfejs}}) = T_{\text{drewno}}(x_{\text{interfejs}})$ - ciągłość temperatury na granicy,
- $k_{\text{Al}}\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x_{\text{interfejs}}} = k_{\text{drewno}}\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x_{\text{interfejs}}}$ - ciągłość strumienia ciepła na granicy.

* Katedra Informatyki, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki (kgruszka@icis.pcz.pl)

gdzie:

- $T_{Al}(x)$ i $T_{drewno}(x)$ to rozkłady temperatury odpowiednio w aluminium i drewnie,
- k_{Al} i k_{Wood} to przewodności cieplne aluminium i drewna,
- $x_{interface}$ to pozycja punktu zetknięcia obu materiałów.

Do rozwiązania tego problemu można zastosować metodę analityczną lub numeryczną (np. metodę różnic skończonych), zależnie od szczegółów problemu i dostępnych danych. W podejściu numerycznym, obszar rozpatrywany jest dyskretyzowany, a na granicy między materiałami stosuje się warunki zetknięcia do obliczenia temperatury i gradientu temperatury. Rozwiązanie takiego układu pozwala na określenie rozkładu temperatury w całym obszarze, uwzględniając różnice w przewodności cieplnej materiałów.

2. Rozwiązanie za pomocą MRS

Numeryczne rozwiązanie stacjonarnego problemu przewodnictwa ciepła dla przypadku jednowymiarowego z dwoma różnymi materiałami (np. aluminium i drewno) połączonymi ze sobą można zrealizować za pomocą metody różnic skończonych. Podejście to polega na dyskretyzacji obszaru na małe odcinki (elementy siatki) i przybliżeniu pochodnych różnicami skończonymi. Poniżej przedstawiono kroki, które należy podjąć do rozwiązania tego problemu metodą różnic skończonych:

2.1. Podział na dwa obszary

Dzielimy pręt na dwie części:

- Obszar 1: Aluminium ($0 \leqslant x < x_{int}$)
  - $k = k_{Al}$
  - $\frac{d}{dx}(k_{Al}\frac{dT}{dx}) = 0$
- Obszar 2: Drewno ($x_{int} \leqslant x \leqslant L$)
  - $k = k_{Wood}$
  - $\frac{d}{dx}(k_{Wood}\frac{dT}{dx}) = 0$

Każde z tych równań można rozwiązać osobno, ponieważ w każdym z materiałów kk jest stałe.

2.2. Dyskretyzacja obszaru w MRS

Obszar, w którym rozpatrujemy przewodnictwo ciepła, dzielimy na małe odcinki (siatkę), gdzie każdy punkt siatki odpowiada pewnej lokalizacji w badanym obszarze. Punkt, w którym materiały się zetkną (granica między aluminium a drewnem), również jest jednym z punktów siatki.

Dzielimy obszar na N części (mamy N węzłów siatki numerycznej) oznaczając temperatury w węzłach jako:

$$T_0, T_1, T_2, ..., T_{N-1}$$

Każdy wewnętrzny węzeł spełnia równanie różnicowe:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT}{dx}\right) = 0$$

Dyskretyzacja pierwszej pochodnej dT/dx: Przekształcając równanie Fouriera:

$$q = -k(x)\frac{dT}{dx} = const.$$

chcemy aproksymować pochodną dT/dx numerycznie. W tym celu stosujemy pochodną jednostroną do przodu i do tyłu:

$$\frac{dT}{dx} \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \text{ (przód, dla i+1/2)}$$

$$\frac{dT}{dx} \approx \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \text{ (w tył, dla i-1/2)}$$

Wartości $i+1/2$ oraz $i-1/2$ oznaczają środek przedziału między węzłami i i $i+1$ oraz między $i-1$ a i. Podstawiając to do równania:

$$\frac{d}{dx}(k\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}) \approx 0$$

dyskretyzujemy pochodną:

$$\frac{k_{i+1/2}(T_{i+1} - T_i) - k_{i-1/2}(T_i - T_{i-1})}{\Delta x^2} = 0$$

gdzie $k_{i+1/2} i k_{i+1/2}$ są średnimi współczynnikami przewodnictwa między węzłami:

$$k_{i+1/2} = \frac{k_i + k_{i+1}}{2},\ k_{i-1/2} = \frac{k_i + k_{i-1}}{2},$$

Należy tutaj zwrócić uwagę na miejsce złączenie obydwu materiałów. Na granicy między dwoma materiałami musimy zapewnić ciągłość temperatury i strumienia ciepła. W praktyce oznacza to odpowiednie zdefiniowanie przewodności cieplnej na granicy w równaniu różnicowym oraz zastosowanie tych samych wartości temperatury w tym punkcie dla obu materiałów. W naszym przypadku założyliśmy, że na ich styku parametr k opisujący przewodność cieplną jest uśredniany miedzy wartościami na obydwu brzegach tego węzła.

2.3. Finalne równanie różnicowe

Dla każdego punktu siatki wewnątrz każdego z materiałów stosujemy dyskretną formę równania przewodnictwa ciepła. Dla punktu i równanie to będzie miało postać:

$$T_i = \frac{k_{i+1/2}T_{i+1} + k_{i-1/2}T_{i-1}}{k_{i+1/2} + k_{i-1/2}} \tag{2}$$

Uważny czytelnik zapewne zorientował sie, że w równaniu zniknęło Δx. Dzieje się tak w wyniku uproszczenia wynikającego z założenia, że odległość między punktami siatki jest stała. Formalnie, równanie uwzględniające Δx ma następującą postać:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT}{dx}\right) \approx \frac{k_{i+1/2}\frac{T_{i+1}-T_i}{\Delta x} - k_{i-1/2}\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \tag{3}$$

co daje:

$$k_{i+1/2}\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} = k_{i-1/2}\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \tag{4}$$

Przekształcając powyższe, otrzymujemy

$$\frac{k_{i+1/2}(T_{i+1} - T_i) + k_{i-1/2}(T_i - T_{i-1})}{\Delta x^2} = 0 \tag{5}$$

Przemnażając obie strony równania (4) przez Δx^2 aby usunąć dzielenie:

$$k_{i+1/2}T_{i+1} - T_i = k_{i-1/2}T_i - T_{i-1}$$

a następnie przekształcając wztgędem T_i, ostatecznie otrzymujemy

$$T_i = \frac{k_{i+1/2}T_{i+1} + k_{i-1/2}T_{i-1}}{k_{i+1/2} + k_{i-1/2}}$$

2.4. Warunki brzegowe

Standardowo, należy zdefiniować warunki brzegowe na końcach rozpatrywanego obszaru, tj. temperaturę na obu końcach (lub strumień ciepła jeśli jest znany).

3. Przykład rozwiązania

W tym przykładzie, do rozwiązania problemu przewodnictwa ciepła dla dwóch różnych materiałów połączonych ze sobą, użyjemy uproszczonej metody różnic skończonych, zakładając równą odległość między punktami siatki (Δx) i jednowymiarową geometrię. Na granicy między materiałami przyjmiemy średnią algebraiczną przewodności cieplnej, co pozwoli nam na proste zastosowanie metody różnic skończonych. Wzór różnicowy przyjmie postać (2).

Ponizej przedstawiam kod w pythonie, który implementuje MRS 1D w stacjonarnym równaniu przepływu ciepła.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Warunki brzegowe
T_left = 100  # Temperatura na lewym brzegu [°C]
T_right = 0   # Temperatura na prawym brzegu [°C]
N = 100       # Liczba węzłów siatki
k_al=237      # k dla aluminium
k_wood=0.12   # k dla drewna

# Symulacja MRS dla pręta jednorodnego i niejednorodnego
T = np.zeros(N)
T[0] = T_left
T[-1] = T_right

x_interface = N // 2  # Punkt podziału pręta
k = np.array([k_al] * x_interface + [k_wood] * (N - x_interface))  # Współczynnik przewod

for _ in range(10000):
    T_old = T.copy()
    for i in range(1, N - 1):
        # Równanie różnic skończonych z uwzględnieniem różnych k
        T[i] = (k[i+1] * T_old[i+1] + k[i-1] * T_old[i-1]) / (k[i-1] + k[i+1])
```

```python
# Wykres porównawczy
x = np.linspace(0, 1, N)
plt.plot(x, T, '--', label="Niejednorodny pręt")
plt.xlabel("Pozycja w pręcie")
plt.ylabel("Temperatura [°C]")
plt.legend()
plt.show()
```

Przedstawiony kod w Pythonie, rozwiązuje jednowymiarowy, stacjonarny problem przewodnictwa ciepła z użyciem metody różnic skończonych dla układu składającego się z dwóch różnych materiałów (w tym przypadku aluminium i drewna), które są ze sobą połączone. Oto szczegółowy opis działania tego kodu:

- Inicjalizacja parametrów symulacji: Kod rozpoczyna się od zdefiniowania podstawowych parametrów, takich jak liczba punktów siatki N, przewodności cieplne dla aluminium k_al i drewna k_wood, temperatury na końcach obszaru T_left i T_right, oraz lokalizacji punktu zetknięcia obu materiałów x_interface.
- Tworzenie siatki temperatur i przewodności cieplnych: Następnie, tworzona jest liniowa siatka temperatur T, która wstępnie jest zainicjowana zerami między T_left a T_right. Tworzony jest również wektor przewodności cieplnych k, który zawiera wartości przewodności dla aluminium i drewna, odpowiednio przypisane do punktów siatki po obu stronach punktu zetknięcia.
- Proces iteracyjny: Kod wchodzi w główną pętlę iteracyjną, która ma za zadanie aktualizować wartości temperatur w każdym punkcie siatki do momentu, aż rozwiązanie osiągnie zbieżność. Zbieżność jest oceniana na podstawie normy maksimum (nieskończoność) różnicy między wartościami temperatur w kolejnych iteracjach; iteracje są kontynuowane do momentu, gdy ta różnica spadnie poniżej zadanej tolerancji tolerance.
- Aktualizacja temperatur: W każdej iteracji, dla każdego wewnętrznego punktu siatki (oprócz skrajnych punktów, które mają na stałe przypisane wartości T_left i T_right), obliczana jest nowa wartość temperatury na podstawie średniej ważonej temperatur w sąsiednich punktach. Używana jest tutaj uproszczona metoda, która zakłada liniową zależność przewodności cieplnej i równy udział sąsiednich punktów. Dla każdego punktu, średnia przewodność cieplna między nim a jego sąsiadami jest używana do obliczenia nowej wartości temperatury.
- Warunek stopu: W tym prostym przykładzie iterujemy X razy. należy założyć dużą liczbę iteracji np 10^4 kroków.
- Wizualizacja wyników: Na koniec, rozkład temperatury jest wizualizowany za pomocą wykresu, który pokazuje, jak temperatura zmienia się wzdłuż rozpatrywanego obszaru.

W przedstawionym kodzie, wyrażenie T.copy() tworzy głęboką kopię tablicy T, co oznacza, że tworzy ono nową, niezależną tablicę z dokładnie takimi samymi wartościami jak oryginalna tablica T. Operacja ta jest używana do zapamiętania stanu tablicy z temperaturami przed rozpoczęciem aktualizacji jej wartości w danej iteracji.

Gdy używamy metody różnic skończonych do iteracyjnego rozwiązywania równań różniczkowych częściowych, często musimy porównywać wartości z obecnej iteracji z wartościami z poprzedniej iteracji, aby sprawdzić zbieżność lub obliczyć nowe wartości. Użycie .copy() zapewnia, że mamy niezmieniony zestaw wartości z poprzedniej iteracji do tych porównań, ponieważ bez .copy(), zmiany wprowadzane do T w trakcie iteracji bezpośrednio modyfikowałyby także wartości w T_old, jeśli obie zmienne wskazywałyby na tę samą tablicę w pamięci (co miałoby miejsce przy użyciu przypisania bez metody .copy(), np. T_old = T). To z kolei prowadziłoby do nieprawidłowych obliczeń, ponieważ algorytm iteracyjny polega na porównywaniu nowych wartości z tymi z poprzedniego kroku iteracyjnego, które powinny pozostać niezmienione w trakcie całej iteracji.

4. Podsumowanie

Przedstawiono metodę różnic skończonych (rozwiązanie stacjonarne) dla przypadku pręta jednowymiarowego złożonego z dwóch materiałów o różnych współczynnikach k. Isotne jest aby w prawidłowy sposób rozłożyć współczynnik k na granicy obu materiałów. Efekt końcowy jest zblizóny do materiału jednorodnego, aby zaobserwować większe zmiany należy obserwować pośrednie wartośi w trakcie iteracji, przed osiągnięciem stanu zbieżności.