

KI L^AT_EX DOKUMENT

Materiały do przedmiotu "Rozwiązywanie zadań odwrotnych"

Metoda różnic skończonych: Przykład transferu ciepła w przypadku jednowymiarowym stacjonarnym jednorodnym

dr inż. Konrad M. Gruszka,*

Abstract. Ten dokument prezentuje podstawowe informacje użycia metody różnic skończonych do obliczenia stacjonarnego (niezależnego od czasu) przepływu ciepła w jednowymiarowym materiale jednorodnym. Zagadnienie opiera się na drugiej zasadzie termodynamiki o równanie przewodnictwa ciepła w stanie stacjonarnym (gdy temperatura w każdym punkcie materiału nie może zmieniać się z czasem).

1. MRS

1.1. Wprowadzenie

W stacjonarnym problemie przewodnictwa ciepła dla przypadku jednowymiarowego, gdzie rozważamy materiał jednorodny, równanie przewodnictwa ciepła przyjmuje poniższą postać:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + q = 0 \quad (1)$$

gdzie:

- k (lub κ) jest przewodnością cieplną materiału jednorodnego
- q to wewnętrzne źródła ciepła (na jednostkę objętości), w przypadku braku źródła wewnętrznego jest równe 0
- T to temperatura,
- x to jednowymiarowa współrzędna przestrzenna.

W takim przypadku zakładamy, że współczynnik przewodzenia ciepła k jest stały oraz nie ma wewnętrznych źródeł ciepła (czyli $q = 0$), to równanie to można uprościć do postaci:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

Do rozwiązania tego problemu można zastosować metodę analityczną lub numeryczną (np. metodę różnic skończonych), zależnie od szczegółów problemu i dostępnych danych. W podejściu numerycznym, obszar rozpatrywany jest dyskretyzowany. Rozwiązanie takiego układu pozwala na określenie rozkładu temperatury w całym rozpatrywanym obszarze jednorodnego materiału.

* Katedra Informatyki, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki (kgruszka@icis.pcz.pl)

2. Rozwiązanie za pomocą MRS

Numeryczne rozwiązanie stacjonarnego problemu przewodnictwa ciepła dla przypadku jednowymiarowego można zrealizować za pomocą metody różnic skończonych. Podejście to polega na dyskretyzacji obszaru na małe odcinki (elementy siatki) i przybliżeniu pochodnych różnicami skończonymi. Poniżej przedstawiono kroki, które należy podjąć do rozwiązania tego problemu metodą różnic skończonych:

2.1. Dyskretyzacja obszaru

Obszar, w którym rozpatrujemy przewodnictwo ciepła, dzielimy na małe odcinki (siatkę), gdzie każdy punkt siatki odpowiada pewnej lokalizacji w badanym obszarze. Siatka ta może być siatką regularną (o równych odstępach między węzłami) lub nieregularną (odległości międzywęzłowe mogą być różne w różnych punktach materiału). W naszym przypadku przyjmujemy siatkę regularną.

2.2. Równanie różnicowe

Dla równania $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ możemy zastosować centralną różnicę skończoną dla drugiej pochodnej. Wtedy dyskretna forma równania przewodnictwa ciepła dla i -tego punktu przyjmuje postać:

$$\frac{(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}))}{\Delta x^2} = 0, \quad (3)$$

gdzie:

- T_i to przybliżona temperatura w punkcie i ,
- Δx to odległość między punktami dyskretnymi,
- i to indeks punktu w dyskretyzowanej dziedzinie.

Jeżeli założymy siatkę regularną w całym obszarze materiału, a krok Δx przyjmiemy za równy jedności, równanie uprości się jeszcze bardziej (łatwo można zauważyć, że Δx^2 jest stałą i nie wpływa zatem na rozwiązanie równania) do postaci:

$$(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) = 0, \quad (4)$$

To równanie można rozwiązać dla całej dyskretyzowanej dziedziny (np. dla ustalonych warunków brzegowych), co ostatecznie daje zestaw równań liniowych. Rozwiązując ten zestaw równań, można uzyskać przybliżone wartości temperatury w każdym punkcie dyskretnym dziedziny.

2.3. Rozwiązanie analityczne

Założmy, że mamy dyskretyzować dziedzinę na 5 punktów siatki, włącznie z dwoma punktami na końcach, gdzie temperatura na lewym końcu $T_0 = 100^\circ \text{C}$, a na prawym końcu $T_4 = 0^\circ \text{C}$. Punkty wewnątrz siatki oznaczamy jako T_1, T_2, T_3 , i dla nich będziemy rozwiązywać równanie. Zakładając stałą różnicę przestrzenną Δx między punktami, możemy zastosować wcześniej wspomniane przybliżenie różnic skończonych dla drugiej pochodnej temperatury.

Dla uproszczenia, ponieważ równanie $\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$ redukuje się do $T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = 0$ (dzięki wyeliminowaniu Δx^2 , które jest stałą i nie wpływa na rozwiązanie równania), równania dla punktów wewnętrznych wyglądają następująco:

$$\begin{cases} \text{Dla } T_1: & T_2 - 2T_1 + 100 = 0 \\ \text{Dla } T_2: & T_3 - 2T_2 + T_1 = 0 \\ \text{Dla } T_3: & 0 - 2T_3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Powyższe równania można rozwiązać analitycznie lub numerycznie. W tym przypadku, ze względu na prostotę, łatwo również zauważyć, że równanie daje liniowy profil temperatury.

2.4. Warunki brzegowe

Należy zdefiniować warunki brzegowe na końcach rozpatrywanego obszaru, np. temperaturę na obu końcach lub strumień ciepła (jeśli jest znany).

3. Przykład rozwiązania numerycznego

Przy numerycznym rozwiązywaniu problemu transferu ciepła w przypadku jednowymiarowym, stacjonarnym będziemy unikać implementowania i bezpośredniego rozwiązywania układów równań. Zamiast tego, posłużymy się metodą iteracyjną której zadaniem będzie obliczenie temperatur w węzłach wewnętrznych siatki punktów nałożonych na materiał. W tym przykładzie, rozkład temperatury jest obliczany iteracyjnie, z warunkami brzegowymi ustawionymi na 100 stopni C na lewym końcu i 0 stopni C na prawym. Wewnętrzne punkty siatki są aktualizowane na podstawie średniej wartości sąsiednich punktów, co odzwierciedla równanie różnic skończonych $T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = 0$. W rzeczywistości, dla takiej prostej konfiguracji, wyniki powinny szybko zbiegać do liniowego gradientu temperatury między dwoma końcami.

Ponizej przedstawiam minimalistyczny kod w pythonie, który implementuje MRS 1D w stacjonarnym równaniu przepływu ciepła.

```
import numpy as np

# Liczba punktów siatki (włącznie z brzegami)
N = 5

# Warunki brzegowe
T_left = 100
T_right = 0

# Inicjalizacja siatki temperatur
T = np.linspace(T_left, T_right, N)

# Iteracja do osiągnięcia stanu stacjonarnego (tutaj przykład z ograniczeniem iteracji)
for _ in range(1000): # Dla uproszczenia używamy stałej liczby iteracji
    for i in range(1, N-1): # Pomijamy punkty na brzegach
        T[i] = (T[i-1] + T[i+1]) / 2 # Metoda różnic skończonych
```

```
print("Rozkład temperatury:", T)
```

Jak zapewne Państwo zauważyli, w powyższym przykładzie w linii oznaczonej komentarzem "**# Metoda różnic skończonych**" zastosowaliśmy inny, jeszcze bardziej uproszczony wzór. Zastosowanie tego wzoru $\frac{(T[i-1]+T[i+1])}{2}$ w kontekście iteracyjnego rozwiązania równania przewodnictwa ciepła za pomocą metody różnic skończonych wynika z kolejnego uproszczenia matematycznego. Spójrzmy na pierwotne równanie różnicowe, które przybliżaliśmy:

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = 0 \quad (6)$$

Równanie to, można przekształcić do formy, w której szukamy T_i w każdej iteracji:

$$-2T_i = -T_{i-1} - T_{i+1} \quad (7)$$

$$T_i = \frac{T_{i-1} + T_{i+1}}{2} \quad (8)$$

Zakładając, że przepływ ciepła jest stacjonarny i że nie ma źródeł ani pochłaniaczy ciepła wewnątrz materiału, gradient temperatury w dowolnym miejscu jest średnią gradientów pochodzących od sąsiednich punktów. W praktyce, ten sposób iteracyjnego obliczania T_i jest prostą formą metody relaksacji, która stopniowo zmierza do równowagi (stabilnego rozkładu temperatur), gdzie różnica temperatur między kolejnymi punktami siatki jest stała, co odpowiada liniowemu profilowi temperatury dla jednowymiarowego przypadku bez źródeł ciepła.

Wykorzystanie $(T[i-1] + T[i+1])/2$ jako metody aktualizacji temperatury w punkcie i opiera się na założeniu, że w stanie równowagi, temperatura w dowolnym punkcie jest średnią temperatur sąsiadujących punktów. Jest to szczególnie efektywne w symulacjach przepływu ciepła, gdzie poszukuje się rozkładu temperatury w stanie stacjonarnym.

W naszym minimalistycznym przykładzie iterujemy zadaną z góry założoną liczbę razy, co jest podejściem najprostrzym. Znacznie lepszym podejściem będzie zastosowanie w tym przypadku koncepcji zbierzości: zamiast iterować X razy lepiej jest sprawdzać jak bardzo wyniki z aktualnej iteracji różnią się od wyników w poprzedniej iteracji i zakończyć pętlę kiedy ta różnica będzie mniejsza niż zadany próg.

4. Podsumowanie

Przedstawiono metodę różnic skończonych (rozwiązanie stacjonarne) dla przypadku jednorodnego pręta jednowymiarowego. Efekt końcowy powinien realizować rozkład liniowy. Aby zaobserwować inny niż liniowy rozkład temperatury należy obserwować pośrednie wartości w trakcie iteracji, przed osiągnięciem stanu zbieżności.