

KI L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X DOKUMENT

Materiały do przedmiotu "Rozwiązywanie zadań odwrotnych"

# Metoda różnic skończonych: Przykład transferu ciepła w przypadku dwuwymiarowym stacjonarnym

dr inż. Konrad M. Gruszka,\*

Abstract. Ten dokument prezentuje przykład użycia metody różnic skończonych do obliczenia stacjonarnego (niezależnego od czasu) przepływu ciepła w dwuwymiarowym materiale jednorodnym. Problem opiera się na drugiej zasadzie termodynamiki o równanie przewodnictwa ciepła w stanie stacjonarnym (gdy temperatura w każdym punkcie materiału nie zmienia się z upływem czasu).

## 1. MRS

1.1. Wprowadzenie—Rozważamy jednowymiarowe, przejściowe (tj. zależne od czasu) równanie przewodzenia ciepła bez źródeł generujących ciepło.

Równanie przewodnictwa ciepła dla 2-wymiarowego, jednorodnego i stacjonarnego (niezależnego od czasu) przypadku można wyrazić w formie równania Laplace'a dla temperatury  $T$ :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Rozwiązanie tego równania metodą różnic skończonych polega na dyskretyzacji przestrzeni na siatkę punktów i zastąpieniu pochodnych różnicami skończonymi. Do rozwiązania równania Laplace'a można użyć np. metody różnic centralnych, gdzie drugą pochodną temperatury w punkcie siatki zastępuje się średnią arytmetyczną temperatur w sąsiednich punktach siatki.

Dla punktu  $(i,j)$  na siatce, przybliżenie drugich pochodnych wygląda następująco:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (3)$$

Gdzie  $\Delta x$  i  $\Delta y$  są odległościami między punktami siatki w kierunkach  $x$  i  $y$ , a  $T_{i,j}$  to temperatura w punkcie  $(i,j)$ .

Po zsumowaniu obu składników i przyrównaniu ich do zera, otrzymujemy równanie iteracyjne, które można rozwiązać numerycznie do momentu, gdy rozwiązanie przestanie

---

\* Katedra Informatyki, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki (kgruszka@icis.pcz.pl)

się znacząco zmieniać.

Zsumowanie obu składników drugiej pochodnej temperatury w punkcie siatki i przyrównanie ich do zera prowadzi do równania iteracyjnego, które można wykorzystać do numerycznego rozwiązania problemu przewodnictwa ciepła. W kontekście metody różnic skończonych dla równania Laplace'a w 2D, równanie iteracyjne przyjmuje postać:

Równanie iteracyjne po uproszczeniu (dla  $\Delta x = \Delta y$ ):

$$T_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (T_{i+1,j}^{(n)} + T_{i-1,j}^{(n)} + T_{i,j+1}^{(n)} + T_{i,j-1}^{(n)}) \quad (4)$$

Gdzie:

- $T_{i,j}^{(n+1)}$  jest nową wartością temperatury w punkcie (i,j) na siatce
- $T_{i+1,j}^{(n)}, T_{i-1,j}^{(n)}, T_{i,j+1}^{(n)}, T_{i,j-1}^{(n)}$  to wartości temperatury w punktach sąsiadujących z (i,j) w poprzedniej iteracji n.
- Wartość  $T_{i,j}(n+1)$  jest ostatecznie obliczana jako średnia arytmetyczna wartości temperatur w czterech sąsiednich punktach.

To równanie iteracyjne jest podstawą dla algorytmu iteracyjnego, który aktualizuje wartości temperatury w każdym punkcie siatki, z wyjątkiem punktów na granicach, które są trzymane na stałym poziomie zdefiniowanym przez warunki brzegowe. Proces iteracyjny kontynuuje się do momentu, aż zmiany wartości temperatury między kolejnymi iteracjami staną się na tyle małe, że można uznać rozwiązanie za zbieżne do stanu stacjonarnego. Kryterium zbieżności może być zdefiniowane na wiele sposobów, np. przez maksymalną dopuszczalną różnicę między wartościami temperatury w dwóch kolejnych iteracjach dla całej siatki.

W praktyce oznacza to, że rozwiązanie równania Laplace'a za pomocą tej metody wymaga powtarzania procesu aktualizacji wartości temperatur w każdym wewnętrznym punkcie siatki, aż do osiągnięcia żądanej dokładności rozwiązania. Jest to podejście proste i intuicyjne, ale może wymagać dużej liczby iteracji, zwłaszcza dla dużych siatek lub w przypadkach, gdzie rozkład temperatury zmienia się w złożony sposób.

Pełne równanie z uwzględnieniem kroków  $\Delta x$  i  $\Delta y$  przed uproszczeniem wygląda następująco:

$$\Delta y^2(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2(T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}) = 0 \quad (5)$$

W równaniu iteracyjnym dla metody różnic skończonych, które przedstawiono wcześniej, założono, że odległości między punktami siatki  $\Delta x$  i  $\Delta y$  są równe dla uproszczenia. Dla równania Laplace'a w 2D przy równych odległościach między punktami siatki w obu kierunkach, składniki te faktycznie upraszczają się, co prowadzi do prostszego wzoru iteracyjnego. Pokażę teraz, jak składniki  $\Delta x$  i  $\Delta y$  są uwzględniane w pełnym równaniu, a następnie jak się one upraszczają do postaci, którą przedstawiłem.

Pełne równanie z uwzględnieniem  $\Delta x$  i  $\Delta y$  dla aproksymacji drugich pochodnych to:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (6)$$

Mnożąc obie strony przez  $\Delta x^2 \Delta y^2$ , otrzymujemy:

$$\Delta y^2(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) + \Delta x^2(T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}) = 0 \quad (7)$$

Gdy  $\Delta x = \Delta y$ , powyższe równanie upraszcza się do:

$$(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) + (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}) = 0 \quad (8)$$

W rezultacie, równanie iteracyjne, które otrzymujemy po uproszczeniu, wygląda następująco:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) \quad (9)$$

To jest dokładnie to równanie iteracyjne, które przedstawiono wcześniej. W tym uproszczeniu zakłada się, że siatka jest jednorodna ( $\Delta x = \Delta y$ ), co jest typowym założeniem dla wielu problemów rozwiązywanych metodą różnic skończonych, w celu uproszczenia obliczeń i algorytmu.

## 2. Podsumowanie

W ramach niniejszych rozważań przedstawiono metodę rozwiązania dwuwymiarowego, jednorodnego i stacjonarnego problemu przewodnictwa ciepła opisanego równaniem Laplace'a. Równanie to, wyrażone jako  $\nabla^2 T = 0$ , zostało rozwiązane numerycznie przy użyciu metody różnic skończonych, która polega na aproksymacji pochodnych cząstkowych drugiego rzędu za pomocą różnic skończonych. W szczególności, zastosowano centralną różnicę, co pozwoliło na zastąpienie ciągłych pochodnych ich dyskretnymi odpowiednikami i przekształcenie problemu ciągłego na układ algebraicznych równań liniowych. Na tej podstawie wyprowadzono równanie iteracyjne, które zostało użyte do numerycznego rozwiązania problemu. Kluczowym założeniem było przyjęcie, że odległości między sąsiednimi punktami siatki w kierunkach x i y są równe, co uprościło postać równania iteracyjnego