KI LaTeX DOKUMENT
Materiały do przedmiotu ”Rozwiązywanie zadań odwrotnych”

Metoda różnic skończonych: Przykład transferu ciepła w przypadku dwuwymiarowym stacjonarnym niejednorodnym

dr inż. Konrad M. Gruszka,*

Abstract. Ten dokument prezentuje przykład użycia metody różnic skończonych do obliczenia stacjonarnego (niezależnego od czasu) przepływu ciepła w dwuwymiarowym materiale niejednoronym. Problem opiera się na drugiej zasadzie termodynamiki o równanie przewodnictwa ciepła w stanie stacjonarnym (gdy temperatura w każdym punkcie materiału nie zmienia się z upływem czasu).

1. MRS

1.1 Wprowadzenie

Rozważamy jednowymiarowe, stacjonarne (tj. niezależne od czasu) równanie przewodzenia ciepła bez źródeł generujących ciepło. Równanie przewodnictwa ciepła dla 2-wymiarowego przypadku można wyrazić w formie równania przedstawionego ponizej:

$$\nabla \cdot (k(x,y) \cdot \nabla T) = 0 \tag{1}$$

Jego rozwinięcie do układu kartezjańskiego przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0 \tag{2}$$

Pierwszy człon opisuje przepływ ciepła w kierunku x. Drugi człon opisuje natomiast przepływ ciepła w kierunku y. Zakładamy tutaj, że k(x,y) może być różne w różnych miejscach materiału. W przypadku gdy $k(x,y)$ było by stałe, to otrzymamy znane Państwu równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Rozwiązanie równania przewodnictwa metodą różnic skończonych polega na dyskretyzacji przestrzeni na siatkę punktów i zastąpieniu pochodnych różnicami skończonymi.

* Katedra Informatyki, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki (kgruszka@icis.pcz.pl)

1.2 Dyskretyzacja pierwszej pochodnej dT/dx

W tym kroku przybliżamy pochodne różnicami skończonymi. Pierwsza pochodna dT/dx w punkcie (i,j) w przybliżeniu jednostronnym:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i+1/2,j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i-1/2,j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \tag{4}$$

1.3 Dyskretyzacja drugiej pochodnej $d/dx(kdT/dx)$

Następnie, obliczamy różnicę pochodnych dla x, czyli:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \approx \frac{k_{i+1/2,j}\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x} - k_{i-1/2,j}\frac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} \tag{5}$$

...i podobnie dla kierunku y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial T}{\partial y}\right) \approx \frac{k_{i,j+1/2}\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta y} - k_{i,j-1/2}\frac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\Delta y}}{\Delta y} \tag{6}$$

Dla materiału o zmiennym współczynniku $k(x,y)$, węzeł (i,j) wymaga uwzględnienia różnych wartości k:

$$\frac{k_{i+1/2,j}(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - k_{i-1/2,j}(T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta x^2} + \frac{k_{i,j+1/2}(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - k_{i,j-1/2}(T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta y^2} = 0 \tag{7}$$

gdzie:
$k_{i+1/2,j} = \frac{k_{i+1,j}+k_{i,j}}{2}$ - uśrednione przewodnictwo między węzłami w kierunku x;
$k_{i,j+1/2} = \frac{k_{i,j+1}+k_{i,j}}{2}$ - uśrednione przewodnictwo między węzłami w kierunku y;

Przekształcając powyższe równanie względem $T_{i,j}$ otrzymujemy:

$$T_{i,j} = \frac{k_{i+1/2,j}T_{i+1,j} + k_{i-1/2,j}T_{i-1,j} + k_{i,j+1/2}T_{i,j+1} + k_{i,j-1/2}T_{i,j-1}}{k_{i+1/2,j} + k_{i-1/2,j} + k_{i,j+1/2} + k_{i,j-1/2}} \tag{8}$$

co implementuje numeryczną wesję równania przewodnictwa cieplnego dla niejednorodnego materiału w 2D.

Jak widać, po drodze, "zgubiliśmy" Δx^2 oraz Δy^2. Oczywiście dokonaliśmy tego przez przemnożenie obu stron równania (7) przez Δx^2 oraz Δy^2, aby usunąć mianowniki, co ostatecznie doprowadziło do równania:

$$k_{i+1/2,j}(T_{i+1,j} - T_{i,j}) + k_{i-1/2,j}(T_{i-1,j} - T_{i,j}) + k_{i,j+1/2}(T_{i,j+1} - T_{i,j}) + k_{i,j-1/2}(T_{i,j-1} - T_{i,j}) = 0 \tag{9}$$

Oczywiście, jeżeli nie stosujemy takiej samej jednorodnej siatki w obydwu kierunkach (x i y) trzeba zastosować pełne równanie ogólne.

To równanie iteracyjne jest podstawą dla algorytmu iteracyjnego, który aktualizuje wartości temperatury w każdym punkcie siatki, z wyjątkiem punktów na granicach, które są trzymane na stałym poziomie zdefiniowanym przez warunki brzegowe. Proces iteracyjny najczęściej kontynuuje się do momentu, aż zmiany wartości temperatury między kolejnymi iteracjami staną się na tyle małe, że można uznać rozwiązanie za zbieżne do stanu stacjonarnego. Kryterium zbieżności może być zdefiniowane na wiele sposobów, np. przez maksymalną dopuszczalną różnicę między wartościami temperatury w dwóch kolejnych iteracjach dla całej siatki.

W równaniu iteracyjnym dla metody różnic skończonych, które przedstawiono wcześniej, założono, że odległości między punktami siatki Δx i Δy są równe dla uproszczenia. Dla równania w 2D przy równych odległościach między punktami siatki w obu kierunkach, składniki te faktycznie upraszczają się, co prowadzi do prostszego wzoru iteracyjnego. Pokażę teraz, jak składniki Δx i Δy są uwzględniane w pełnym równaniu.

1.4 Równania dla problemu z niejednakowymi siatkami ($\Delta x \neq \Delta y$)

Podobnie jak poprzednio rozpoczynamy od przybliżeń dla pierwszych pochodnych dT/dx różnicami skończonymi:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i+1/2,j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2}} \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i-1/2,j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2}} \tag{11}$$

oraz dla kierunku y:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{i,j+1/2} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y_{j+1/2}} \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{i,j-1/2} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1/2}} \tag{13}$$

Zwróćmy uwagę, że tym razem w mianowniku Δx oraz Δy są indeksowane. Oznacza to, że można wprowadzić nie tylko siatkę o różnych wielkościach w obydwu osiach, ale również zmieniać jej gęstość w środku materiału.

Pełne równanie z uwzględnieniem Δx i Δy dla aproksymacji drugich pochodnych to:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \approx \frac{k_{i+1/2,j}\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2}} - k_{i-1/2,j}\frac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2}}}{\frac{1}{2}(\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2})} \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial T}{\partial y}\right) \approx \frac{k_{i,j+1/2}\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta y_{j+1/2}} - k_{i,j-1/2}\frac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1/2}}}{\frac{1}{2}(\Delta y_{j+1/2} + \Delta y_{j-1/2})} \tag{15}$$

W takim przypadku (gdy $\Delta x \neq \Delta y$) końcowe rówanie sprowadza się do postaci:

$$T_{i,j} = \frac{\frac{k_{i+1/2,j}T_{i+1,j}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2,j}T_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2}} + \frac{k_{i,j+1/2}T_{i,j+1}}{\Delta y_{j+1/2}} + \frac{k_{i,j-1/2}T_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1/2}}}{\frac{k_{i+1/2,j}}{\Delta x_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2,j}}{\Delta x_{i-1/2}} + \frac{k_{i,j+1/2}}{\Delta y_{j+1/2}} + \frac{k_{i,j-1/2}}{\Delta y_{j-1/2}}} \tag{16}$$

To jest dokładnie to samo równanie iteracyjne, które przedstawiono wcześniej lecz uwzględniające różne, niejednakowe siatki.

2. Podsumowanie

W ramach niniejszych rozważań przedstawiono metodę rozwiązania dwuwymiarowego, niejednorodnego, stacjonarnego problemu przewodnictwa ciepła. Równanie to zostało rozwiązane numerycznie przy użyciu metody różnic skończonych, która polega na aproksymacji pochodnych cząstkowych drugiego rzędu za pomocą różnic skończonych. W szczególności, zastosowano centralną różnicę, co pozwoliło na zastąpienie ciągłych pochodnych ich dyskretnymi odpowiednikami i przekształcenie problemu ciągłego na układ algebraicznych równań liniowych. Na tej podstawie wyprowadzono równanie iteracyjne, które zostało użyte do numerycznego rozwiązania problemu.