

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Matematyka

Praca magisterska

**Zastosowanie metody Monte
Carlo w wycenie opcji
finansowych**

Marek Śmieja

Promotor: dr hab. Armen Edigarian

Kraków, 2009

Spis treści

Spis treści	i
1 Rynek finansowy i opcje	3
1.1 Ujęcie ekonomiczne	3
1.2 Model matematyczny	4
2 Wycena opcji europejskich przy pomocy metody Monte Carlo	7
2.1 Estymator Monte Carlo i jego związek z wyceną opcji	7
2.2 Estymacja przedziałowa i pomiar błędu	8
2.3 Redukcja wariancji estymatora opcji europejskiej	9
3 Wycena opcji amerykańskich	13
3.1 Opis problemu	13
3.2 Metoda siatki	15
3.3 Wybór gęstości siatkowej	19
3.4 Estymator dolny	20
3.5 Estymator punktowy	23
3.6 Estymacja przedziałowa	24
3.7 Metody redukcji wariancji	25
3.7.1 Wewnętrzna kontrola wariancji	25
3.7.2 Zewnętrzna kontrola wariancji	27
3.8 Złożoność obliczeniowa algorytmu	28
4 Praktyczna wycena opcji amerykańskich	29
4.1 Waniliowa opcja sprzedaży	30
4.2 Opcja kupna ze średnią geometryczną	34
4.3 Opcja kupna z maksimum aktywów	37
4.4 Opcja sprzedaży ze średnią arytmetyczną	40
4.5 Podsumowanie	42

Bibliografia**43**

Wstęp

Problem wyceny opcji jest zagadnieniem bardzo złożonym. W większości modeli matematycznych nie jesteśmy w stanie odpowiedzieć na pytanie, jaka jest prawdziwa wartość opcji. Dlatego w praktyce stosuje się szereg metod numerycznych i statystycznych, aby móc przybliżać właściwą wartość z dużym prawdopodobieństwem. Jedną z najbardziej elastycznych i najłatwiejszych do zastosowania metod jest metoda Monte Carlo. Jej użyteczność w wycenie opcji typu europejskiego jest powszechnie znana, niestety przeniesienie tej teorii na grunt opcji amerykańskich do dziś stanowi wielkie wyzwanie.

Badania dostarczają kilku prac podejmujących problem zaadaptowania metody Monte Carlo do wyceny opcji amerykańskich. Jednym z pierwszych wyników tego typu była metoda drzewa [5]. Niestety jej duża złożoność obliczeniowa, spowodowana koniecznością wykonywania bardzo dużej liczby symulacji, poważnie ogranicza jej praktyczne zastosowania. Kolejną próbą była metoda siatki, która stanowi podstawę mojej pracy. Bardzo dobre efekty, głównie z powodu liniowej złożoności obliczeniowej względem ilości symulowanych ścieżek, daje metoda związana z regresją [10]. Z popularnych prac warto jeszcze wspomnieć o metodzie, sprowadzającej problem wyceny opcji do pewnego problemu dualnego [7].

Celem mojej pracy jest skrótowe przedstawienie metody Monte Carlo w wycenie opcji europejskich oraz dokładne omówienie metody siatki stosowanej do wyceny opcji amerykańskich. Na bazie tej teorii powstał program komputerowy, dołączony do pracy, napisany w języku C++, służący do wyceny różnego rodzaju opcji metodami Monte Carlo.

W pierwszym rozdziale pracy przedstawione jest ekonomiczne pojęcie rynku i opcji oraz zdefiniowany jest matematyczny model, używany w dalszym ciągu pracy. Drugi rozdział podsumowuje najważniejsze dokonania w zastosowaniu metody Monte Carlo w wycenie opcji typu europejskiego. Zdefiniowana jest podstawowa miara błędu, używana w metodzie Monte Carlo oraz zanalizowana jest jedna z najczęściej używanych metod redukcji wariancji - kontrola wariancji. Rozdział trzeci precyzyjnie definiuje metodę siatki. Obok podstawowych narzędzi

dzi tej metody, zaprezentowane są dodatkowe estymatory, takie jak estymator połówkowy czy dwa rodzaje estymatorów punktowych. Ponadto, w tym rozdziale przedstawione są dwie wersje kontroli wariancji dla metody siatki. Rozdział czwarty jest wynikiem moich przemyśleń dotyczących praktycznego zastosowania metody siatki. Podane są w nim cztery przykłady dość zróżnicowanych opcji. Na ich bazie, w ujęciu praktycznym, zanalizowane są estymatory oraz pomocnicze techniki redukcji wariancji, zaprezentowane w rozdziale trzecim.

Rozdział 1

Rynek finansowy i opcje

1.1 Ujęcie ekonomiczne

Rynkiem finansowym w ekonomii określa się ogół warunków, w jakich dochodzi do zawierania transakcji między sprzedawcami, oferującymi towary, jakimi są instrumenty finansowe, a nabywcami, reprezentującymi potrzeby i dysponującymi odpowiednimi funduszami. Instrumentem finansowym jest natomiast umowa regulująca zależności finansowe obu stron. W obrębie rynku wyróżnia się bardzo ważny segment z punktu widzenia matematyki finansowej - rynek instrumentów pochodnych. Transakcje na tym rynku mają na celu zabezpieczanie przed niekorzystnymi zmianami cen instrumentów bazowych, zapewnianie oczekiwanej struktury ryzyka lub realizację większych zysków. Podstawowymi instrumentami finansowymi tego segmentu są kontrakty forward, futures, swap oraz opcje. Najogólniej tę grupę instrumentów finansowych można określić jako kontrakty na instrumenty bazowe.

Najciekawszym z matematycznego punktu widzenia instrumentem pochodnym jest opcja. Wyróżniamy dwa rodzaje opcji: opcje kupna i opcje sprzedaży. Opcja kupna w klasycznym rozumieniu jest kontraktem dającym prawo nabywcy do kupna ustalonej ilości instrumentu podstawowego (czyli instrumentu na jaki opiewa opcja) po określonej cenie wykonania (realizacji) i w określonym czasie. Analogicznie opcja sprzedaży daje prawo nabywcy do sprzedaży ustalonej ilości instrumentu podstawowego po określonej cenie i w określonym czasie. Opcja ma tę przewagę nad kontraktem terminowym, że dla nabywcy jest prawem a nie obowiązkiem i może on skorzystać z tego prawa, jeśli uzna to za korzystne. Takie prawo jednak kosztuje. Cena jaką płaci nabywca opcji jest nazywana ceną opcji lub premią za opcję. W praktyce opcja zostaje zrealizowana, jeśli przewidywana przez nią cena instrumentu bazowego jest korzystniejsza niż cena

oferowana na wolnym rynku w danym czasie. Zysk nabywcy opcji jest wówczas równy odpowiedniej różnicy między ceną rynkową a ceną realizacji opcji, uwzględniając dodatkowo premię za opcję. Z tego względu w wielu wypadkach rozliczenie opcji odbywa się jedynie poprzez wypłatę posiadaczowi opcji sumy pieniężnej, odpowiadającej stosownej różnicy cen, a nie przez faktyczną transakcję, do której opcja w swojej pierwotnej definicji uprawnia.

Ze względu na możliwość wykonania opcje dzielą się na:

- opcje europejskie, które mogą być wykonane tylko w dniu wygaśnięcia
- opcje amerykańskie, które mogą być wykonane w dowolnym momencie od dnia nabycia do terminu wygaśnięcia

Opcje typu amerykańskiego są mniej narażone na manipulacje w okresie bliskim terminowi wygaśnięcia, dlatego też są szerzej rozpowszechnione w świecie.

Transakcje opcyjne mają tę przewagę dla nabywców, że nie muszą oni wносить depozytu zabezpieczającego, angażując więc mniej środków finansowych. Wykorzystując dźwignię finansową, zyski lub straty z handlu opcjami są wyższe niż zyski lub straty z operacji na rynku instrumentów podstawowych. Dla kupującego zysk jaki może uzyskać jest w zasadzie nieograniczony, a maksymalna strata jest równa wysokości premii zapłaconej za opcję. W przypadku wystawcy jest odwrotnie. Jego maksymalny zysk jest równy premii zapłaconej za opcję, a strata może być nieograniczona.

1.2 Model matematyczny

Ustalenie sprawiedliwej ceny opcji - czyli takiej która zarówno nabywcy jak i wystawcy daje możliwość uzyskania równych zysków, nie jest w rzeczywistości możliwe. Dlatego, aby móc w ogóle mówić o sprawiedliwej cenie, prowadzi się rozważania na matematycznych modelach rynku, znacznie upraszczających rynek rzeczywisty. Wyprowadzone w ten sposób wzory, opisujące wartość opcji, należy uznać za przybliżone. Stosując je w praktyce, należy mieć świadomość poczynionych założeń, aby móc odpowiednio modyfikować otrzymane wyniki.

Podam teraz model rynku, na jakim oprę swoje rozważania. Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$, przy ustalonym $T > 0$, filtracją, spełniającą zwykłe warunki tzn. zupełną, prawostronnie ciągłą oraz taką, że F_0 jest dwuelementowe. Miarę P będziemy nazywać miarą rynkową. Rozpatrywany rynek składa się z $n + 1$ instrumentów pierwotnych, których ceny opisane są przez procesy stochastyczne $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T} = \{(S_t^1, \dots, S_t^n)\}_{0 \leq t \leq T}$, $\{B_t\}_{0 \leq t \leq T}$,

adaptowane do filtracji, z ustalonymi wartościami początkowymi S_0 i B_0 . Dodatkowo, niech powyższe procesy będą elementami przestrzeni $L^2(\Omega, F, P)$. Proces B_t interpretujemy jako wartość rachunku bankowego lub wartość obligacji, natomiast proces S_t jako ceny akcji lub innych ryzykownych instrumentów finansowych. Na tak opisanym rynku mogą funkcjonować instrumenty pochodne, które definiujemy następująco:

Definicja 1. (*Instrument pochodny*)

Instrumentem pochodnym typu europejskiego opiewającym na aktywa S_t , nazywamy zmienną losową $h(S_t)$, należącą do przestrzeni $L^2(\Omega, F_T, P)$, natomiast instrumentem pochodnym typu amerykańskiego nazywamy proces stochastyczny $\{h(t, S_t)\}_{0 \leq t \leq T}$, należący do przestrzeni $L^2(\Omega, F_t, P)$, przy $0 < t \leq T$.

Aby sprecyzować co będziemy rozumieć przez cenę instrumentu pochodnego, założmy najpierw, że na rozpatrywanym rynku nie ma możliwości arbitrażu, tzn. nie istnieje strategia finansowa, pozwalająca na zagwarantowanie inwestorowi zysku bez ryzyka poniesienia strat oraz, że na rynku istnieje miara probabilistyczna P^* , równoważna P taka, że zdyskontowana cena akcji $\bar{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$ jest względem niej martynałem. Tę miarę będziemy nazywali miarą martynałową. Wprowadzę teraz pojęcie ceny arbitrażowej, którą będziemy utożsamiać ze sprawiedliwą ceną.

Definicja 2. (*Cena arbitrażowa*)

Ceną arbitrażową instrumentu $h(S_t)$ typu europejskiego w chwili $t \leq T$ o zapadalności w chwili T nazywamy wartość

$$Q_t = E_{P^*}(h(S_T) \frac{B_t}{B_T} | F_t). \quad (1.1)$$

Ceną arbitrażową instrumentu $h(u, S_u)$ typu amerykańskiego w chwili $t \leq T$ o zapadalności w chwili T nazywamy wartość

$$Q_t = \max_{t \leq \tau \leq T} E_{P^*}(h(\tau, S_\tau) \frac{B_t}{B_\tau} | F_t). \quad (1.2)$$

Wartość τ , realizującą powyższe maksimum, będziemy nazywać optymalnym momentem wykonania(zatrzymania).

W dalszym ciągu pracy dla uproszczenia zapisu przyjmujemy, że miara rynkowa pokrywa się z miarą martynałową, to znaczy $P = P^*$. Wartość oczekiwaną dowolnej zmiennej losowej X względem jednej z tych miar będziemy oznaczać przez $E(X)$, natomiast względem innej miary, powiedzmy R , przez

$E_R(X)$. Symbol $h(S_t)$ nie będzie oznaczać zmiennej losowej opisującej wypłatę z instrumentu pochodnego typu europejskiego, lecz zdyskontowaną wypłatę do chwili 0. Podobna uwaga tyczy się instrumentów pochodnych typu amerykańskiego. Symbol $h(t, S_t)$ będzie oznaczał proces stochastyczny, opisujący wypłatę zdyskontowaną do chwili 0. W celu uproszczenia zapisu nie będziemy się też zajmować wycenianiem instrumentów w dowolnej chwili czasowej, lecz w chwili $t = 0$. Tę cenę stosownego instrumentu oznaczać będziemy przez Q . W dodatku przedmiotami wyceny nie będą dowolne instrumenty pochodne lecz opcje.

Na przestrzeni lat wyprowadzono wzory na ceny wielu rodzajów opcji, w bardzo szczególnych modelach. Najbardziej znanym wynikiem jest formuła Blacka-Scholesa pozwalająca na wycenę waniliowych opcji typu europejskiego. Mankamentem tego modelu są jednak duże ograniczenia, nakładane na proces ceny akcji. Uzyskany wynik można modyfikować, w celu zaadaptowania go do wyceny niektórych egzotycznych opcji. Niestety wzoru nie można przekształcić, w celu zastosowania do wyceny opcji amerykańskich. Przybliżoną cenę waniliowej opcji amerykańskiej można jednak uzyskać na drodze aproksymacji w modelu dwumianowym. Należy jednak przyjąć, że rozpatrywany czas składa się ze skończonej ilości punktów oraz ceny aktywów mogą się zmieniać w bardzo uproszczony sposób - w każdej chwili cena może zmienić się jedynie na dwa sposoby.

Istnieje jednak pewna klasa opcji, dla których te metody nie dają zadowalających rezultatów. Są to mianowicie opcje na więcej niż jeden instrument bazowy. Tę klasę problemów można określić mianem problemów wielowymiarowych. Przykładami mogą być opcje, których wypłata zależy od średniej arytmetycznej wszystkich aktywów albo maksymalnej ceny jednego spośród wszystkich.

Rozdział 2

Wycena opcji europejskich przy pomocy metody Monte Carlo

2.1 Estymator Monte Carlo i jego związek z wyceną opcji

Problem wyceny opcji typu europejskiego, jak już wspomniano, tkwi w obliczeniu wartości

$$Q = E(h(S_T)).$$

Metoda Monte Carlo polega na stworzeniu b niezależnych realizacji S_T w chwili T , powiedzmy $X(1), \dots, X(b)$, następnie obliczeniu dla nich wypłat z h , czyli $h(X(1)), \dots, h(X(b))$, i ich uśrednieniu. Zatem estymator Monte Carlo ceny Q , przy b niezależnych realizacjach, jest równy

$$\hat{Q}_b = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b h(X(i)). \quad (2.1)$$

W ten sposób otrzymujemy stosunkowo łatwą metodę przybliżania ceny opcji typu europejskiego. W odróżnieniu od wcześniej wspomnianych metod, metoda Monte Carlo radzi sobie jednakowo z wyceną opcji na jedno, jak i wiele aktywów bazowych. Nie ma potrzeby czynić dodatkowych założeń, dotyczących rynku z wyjątkiem tego, aby był dany rozkład procesu S_T . Przyjrzyjmy się własnościom estymatora \hat{Q}_b .

Własności 1. *Estymator Monte Carlo ceny Q , instrumentu h , jest:*

- (i) *nieobciążony, to znaczy $E(\hat{Q}_b) = Q$.*
- (ii) *silnie zgodny, to znaczy $\lim_{b \rightarrow \infty} \hat{Q}_b = Q$, prawie na pewno.*

Dowód. (i) Korzystając z faktu, że wszystkie realizacje $h(X(i))$ zostały utworzone z tego samego rozkładu dostajemy:

$$E(\hat{Q}_b) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b E(h(X(i))) = \frac{1}{b} b E(h(X(1))) = Q.$$

(ii) Jako że $h(X(i))$, $i = 1, \dots, b$ są niezależnymi realizacjami tej samej zmiennej losowej oraz $E(|h(X(1))|) < \infty$, to z mocnego prawa wielkich liczb (Chinczyna) wynika zbieżność \hat{Q}_b prawie na pewno. \square

2.2 Estymacja przedziałowa i pomiar błędu

Metoda Monte Carlo jest metodą statystyczną i w zależności od wyboru próbki daje rezultaty bardziej lub mniej zbliżone do prawdziwego wyniku. Naturalnym wydaje się w tym wypadku pomiar popełnianego błędu oraz określenie przedziału ufności dla Q . Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że skoro $h(X(1)), \dots, h(X(b))$ są niezależnymi realizacjami Q , to błąd $\hat{Q}_b - Q$ zbiega według rozkładów do rozkładu $N(0, \frac{\sigma}{\sqrt{b}})$. W praktyce σ nie jest znane, zatem w to miejsce należy przyjąć jego nieobciążony estymator

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{b-1} \sum_{i=1}^b (h(X(i)) - \hat{Q}_b)^2}. \quad (2.2)$$

Wówczas przedział ufności na poziomie $1 - \alpha$ ma postać

$$[\hat{Q}_b - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{b}} \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \hat{Q}_b + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{b}} \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})], \quad (2.3)$$

gdzie $\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})$ oznacza kwantyl standardowego rozkładu normalnego rzędu $\frac{\alpha}{2}$.

Wartość

$$\epsilon_b = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{b}}, \quad (2.4)$$

zwana błędem standardowym, jest kluczowa do określenia efektywności danego estymatora. Widać, że wzrost liczności próbki ma istotny wpływ na błąd standardowy, a co za tym idzie na długość przedziału ufności. Aby zmniejszyć błąd standardowy k razy, licznosc próby musimy zwiększyć k^2 razy.

2.3 Redukcja wariancji estymatora opcji europejskiej

Poprawianie efektywności estymatora poprzez zwiększanie liczności próby jest skuteczną metodą, lecz wiąże się ze znacznym zwiększeniem czasu obliczeń. Jak już było wspomniane - aby zmniejszyć błąd standardowy k razy, musimy zwiększyć licznosc próby k^2 razy, co tylko przy liniowej złożoności algorytmu powoduje kwadratowy wzrost czasu obliczeń. Należy zatem poszukiwać metod redukcji wariancji, które nie wymagają zwiększania liczności próby. Jedną z najczęściej używanych technik jest kontrola wariancji. Jej procedura przedstawia się następująco.

Naszym celem jest obliczenie estymatora zmiennej losowej Q . Symulujemy w tym celu b niezależnych realizacji S_T , powiedzmy $X(1), \dots, X(b)$. Przy ich pomocy obliczamy interesujące nas wypłaty z opcji - $h(X(j))$, a także dodatkowe wartości $v(X(j))$ z pewnej zmiennej losowej v , której wartość oczekiwaną $E[v]$ znamy. Niech wektory $(h(X(j))$ oraz $v(X(j))$), $j = 1, \dots, b$ będą niezależne i o takich samych rozkładach. Wtedy dla dowolnie ustalonego β możemy obliczyć skorygowany estymator Monte Carlo

$$\hat{Q}_b(\beta) = \hat{Q}_b - \beta(\bar{v}_b - E[v]) = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b [h(X(j)) - \beta(v(X(j)) - E[v])], \quad (2.5)$$

gdzie $\bar{v}_b = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b v(x(j))$ (estymator Monte Carlo $E[v]$). Ponieważ \bar{v}_b jest nieobciążonym i zgodnym estymatorem $E[v]$, to dla dowolnie ustalonego β , niezależnego od v , zmodyfikowany estymator $\hat{Q}_b(\beta)$ ma również korzystne własności. Jest nieobciążony

$$E[\hat{Q}_b(\beta)] = E[\hat{Q}_b - \beta(\bar{v}_b - E[v])] = E[\hat{Q}_b] = Q \quad (2.6)$$

oraz zgodny

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \hat{Q}_b(\beta) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \hat{Q}_b - \beta(\bar{v}_b - E[v]) \\ &= Q - \beta E[v - E[v]] \\ &= Q. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Czynnik $\bar{v}_b - E[v]$ odgrywa rolę czynnika korygującego. Naszym zadaniem jest dobranie takiego β , żeby $\hat{Q}_b(\beta)$ miał minimalną wariancję. Obliczając wariancję

skorygowanego estymatora, dostajemy

$$\begin{aligned}
 Var[\hat{Q}_b(\beta^*)] &= Var[\hat{Q}_b - \beta(\bar{v}_b - E[v])] \\
 &= E[(\hat{Q}_b - \beta(\bar{v}_b - E[v]))^2] - E[\hat{Q}_b - \beta(\bar{v}_b - E[v])]^2 \\
 &= E[\hat{Q}_b^2] - 2\beta E[\hat{Q}_b(\bar{v}_b - E[v])] + \beta^2 E[(\bar{v}_b - E[v])^2] - E[\hat{Q}_b]^2 \\
 &= Var[h] - 2\beta(E[hv] - E[h]E[v]) + \beta^2 Var[v] \\
 &= Var[h] - 2\beta Cov[h, v] + \beta^2 Var[v],
 \end{aligned}$$

gdzie $Cov[h, v]$ jest współczynnikiem kowariancji pomiędzy h i v . Współczynnik β minimalizujący wariancję obliczamy, korzystając z rachunku pochodnych. Jako rozwiązanie dostajemy

$$\beta^* = \frac{Cov[h, v]}{Var[v]}. \quad (2.8)$$

Obliczmy iloraz wariancji estymatora skorygowanego i wyjściowego. Mamy:

$$\begin{aligned}
 \frac{Var[\hat{Q}_b(\beta)]}{Var[\hat{Q}_b]} &= 1 - \frac{Cov[h, v]^2}{Var[h]Var[v]} \\
 &= 1 - \rho[h, v]^2,
 \end{aligned}$$

gdzie $\rho[h, v]$ jest współczynnikiem korelacji pomiędzy h i v . Zatem redukcja wariancji jest tym większa im wyższy jest współczynnik korelacji między poszczególnymi zmiennymi losowymi. Otrzymujemy zatem technikę, usprawniającą tradycyjną metodę Monte Carlo, która nie wymaga dużego dodatkowego nakładu mocy obliczeniowej w porównaniu do metody tradycyjnej. W praktyce za v najczęściej przyjmuje się opcję o wypłacie bardzo zbliżonej do badanej opcji, którą można wycenić w sposób analityczny.

Cała procedura, wraz z płynącymi z niej wnioskami, jest możliwa do zastosowania, jeśli β^* jest znane. W praktyce trudno tego oczekiwać, gdyż wyjściowy problem polega na estymowaniu Q . Wówczas za jego estymator przyjmujemy

$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum_{j=1}^b (v(X(j)) - \bar{v}_b)(h(X(j)) - \hat{Q}_b)}{\sum_{j=1}^b (v(X(j)) - \bar{v}_b)^2}. \quad (2.9)$$

Dzieląc licznik i mianownik przez n oraz stosując prawo wielkich liczb, otrzymujemy silną zgodność estymatora $\hat{\beta}^*$ z β^* . Takie $\hat{\beta}^*$ mogliśmy również otrzymać stosując metodę najmniejszych kwadratów do $h(X(j))$ oraz $v(X(j))$. Wówczas rozwiązaniem problemu

$$\min_{\alpha, \beta} \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b [h(X(j)) - (\alpha + \beta v(X(j)))]^2 \quad (2.10)$$

jest para

$$\begin{cases} \hat{\beta}^* &= \frac{\sum_{j=1}^b (v(X(j)) - \bar{v}_b)(h(X(j)) - \hat{Q}_b)}{\sum_{j=1}^b (v(X(j)) - \bar{v}_b)^2}, \\ \hat{\alpha}^* &= \hat{Q}_b - \beta^* \bar{v}_b, \end{cases} \quad (2.11)$$

a skorygowany estymator redukuje się do $\hat{\alpha}^* + \hat{\beta}^* E[v]$.

W wyniku estymacji β^* straciliśmy jednak jedną bardzo istotną własność - nieobciążoność estymatora. Ponieważ teraz $\hat{\beta}^*$ oraz \bar{v}_b nie są niezależne, to formuła (2.6) nie zachodzi. Niezależność można jednak zapewnić przez wykonanie uprzednio pewnej dużej liczby symulacji, w celu wcześniejszego obliczenia $\hat{\beta}^*$, a następnie zastosowanie wyznaczonego współczynnika do właściwej estymacji Q . W ten sposób wszystkie wcześniejsze wnioski są prawdziwe.

Rozdział 3

Wycena opcji amerykańskich

3.1 Opis problemu

W poniższych rozważaniach będziemy pracować na modelu rynku zdefiniowanym w pierwszym rozdziale. Zauważmy na początku, że metody Monte Carlo nie da się zastosować w czasie ciągłym, dlatego interesować nas będą jedynie ceny instrumentów pierwotnych S_t oraz B_t na dyskretnej przestrzeni czasowej, powiedzmy $t = 0, 1, \dots, T$. Dodatkowo założymy, że procesy spełniają własność Markowa względem miary martyngałowej, to znaczy dla dowolnych $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T$ (z ustalonej wcześniej dyskretnej przestrzeni czasowej) oraz dla dowolnego borelowskiego zbioru A zachodzi

$$P(S_{t_k} \in A | S_{t_{k-1}}, \dots, S_{t_1}) = P(S_{t_k} \in A | S_{t_{k-1}}).$$

Założmy, że gęstości $f(t, x, \cdot)$ procesu S_{t+1} pod warunkiem $S_t = x$, zdefiniowane jako

$$P(S_{t+1} \in A | S_t = x) = \int_A f(t, x, u) du, \quad (3.1)$$

dla dowolnego borelowskiego zbioru A , są ciągłe i są znane. Dodatkowo niech $f(t, \cdot)$ oznacza gęstość procesu S_t pod warunkiem ceny w czasie 0, równej S_0 . Problem polega na znalezieniu ceny opcji $h(t, S_t)$ typu amerykańskiego. Z powodu skończonej ilości punktów czasowych problem wyceny ogranicza się do znalezienia

$$Q = \max_{\tau=0, \dots, T} E[h(\tau, S_\tau)]. \quad (3.2)$$

Jednym z możliwych podejść do rozwiązania tego problemu jest zastosowanie procedury programowania dynamicznego. Poruszając się wstecz względem

czasu, szukamy funkcji $Q(t, \cdot)$ określonej następująco

$$\begin{cases} Q(T, x) = h(T, x), \\ Q(t, x) = \max\{h(t, x), C(t, x)\}, \text{ dla } t < T, \end{cases} \quad (3.3)$$

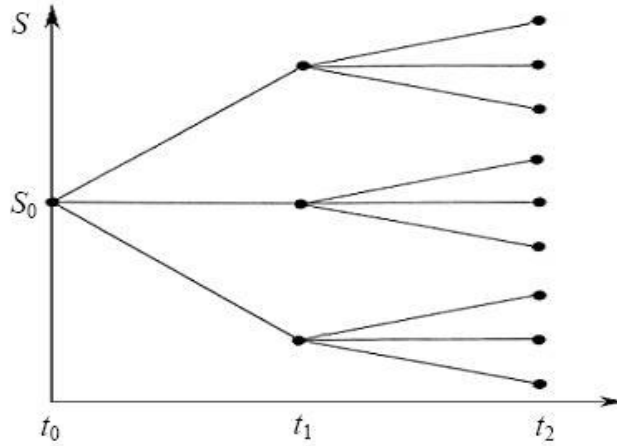
gdzie

$$C(t, x) = E[Q(t+1, S_{t+1}) | S_t = x]. \quad (3.4)$$

Ostatecznie przyjmujemy, że $Q = Q(0, S_0)$. Widać, że cały problem w tej metodzie polega na efektywnym obliczaniu bądź aproksymowaniu $C(t, x)$, dla $t = 0, \dots, T-1$. Można do tego celu zaadoptować klasyczną wersję metody Monte Carlo, dokładnie tak samo jak miało to miejsce w wycenie opcji typu europejskiego. Będąc w czasie $t = 0$, losujemy b wartości z rozkładu o gęstości $f(0, S_0)$, powiedzmy $X_1(i), i = 1, \dots, b$, a następnie przy ich pomocy estymujemy $C(0, S_0)$ jako:

$$\hat{C}(0, S_0) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \hat{Q}(1, X_1(i)),$$

gdzie $\hat{Q}(1, \cdot)$ jest aproksymacją $Q(1, \cdot)$ uzyskaną przy $X_1(1), \dots, X_1(b)$. Jednak, aby znaleźć $\hat{Q}(1, X_1(i))$, należy ponownie dla każdego $X_1(i)$ wylosować kolejne b wartości z rozkładu o gęstości $f(1, X_1(i), \cdot)$. Kontynuujemy procedurę aż do punktu T , gdzie nie trzeba obliczać już wartości czekania, gdyż jest to ostateczny czas zapadalności opcji. Następnie poruszając się wstecz, dostajemy estymator Q ceny opcji $h(t, S_t)$. Tą metodę można określić jako metodę drzewa.



Rysunek 1. Drzewo dla $T = 2$, $n = 1$ oraz $b = 3$.

Algorytm można nieco usprawnić nie losując dla każdego punktu od razu wszystkich cen, lecz losując je pojedynczo, tak tylko aby obliczać wartości czekania, począwszy od punktu T wstecz. W ten sposób ograniczymy znacznie

zapotrzebowanie pamięciowe metody. Jednakże już na pierwszy rzut oka widać, że w miarę wzrostu pośrednich punktów czasowych metoda staje się bardzo nieefektywna, gdyż liczba losowanych punktów wzrasta wykładniczo. To skłania do poszukiwania bardziej efektywnych metod.

3.2 Metoda siatki

Metoda siatki opiera się na podobnym rozumowaniu jak metoda drzewa, lecz omija konieczność losowania tak dużej ilości punktów. Zauważmy, że ceny, wygenerowane do obliczenia jednej warunkowej wartości czekania, mogą zostać także użyte do obliczenia kolejnych.

Metoda siatki ma następującą konstrukcję. Najpierw generujemy siatkę złożoną z niezależnych wektorów $X_t(i)$ dla $t = 1, \dots, T$ oraz $i = 1, \dots, b$. Gęstością, której używamy do tego celu, jest pewna specjalnie wybrana gęstość siatkowa $g(t, \cdot)$. Wymagane jest od niej, aby $g(t, u) > 0$ jeśli $f(t-1, x, u) > 0$, dla pewnych x . Uzyskiwane wyniki są zależne od wyboru gęstości siatkowej, dlatego jej określenie jest kluczowe. Szczegółowy opis jej wyboru zostanie opisany później. W szczególności, skoro S_0 jest dane, przyjmujemy $X_0(1) = S_0$. Następnie dla $i = 1, \dots, b$ definiujemy funkcję $\hat{Q}_b^H(t, \cdot)$ analogicznie jak w metodzie drzewa

$$\hat{Q}_b^H(T, X_T(i)) = h(T, X_T(i)) \quad (3.5)$$

oraz

$$\hat{Q}_b^H(t, X_t(i)) = \max\{h(t, X_t(i)), \hat{C}(t, X_t(i))\}, \text{ dla } t = T-1, \dots, 0, \quad (3.6)$$

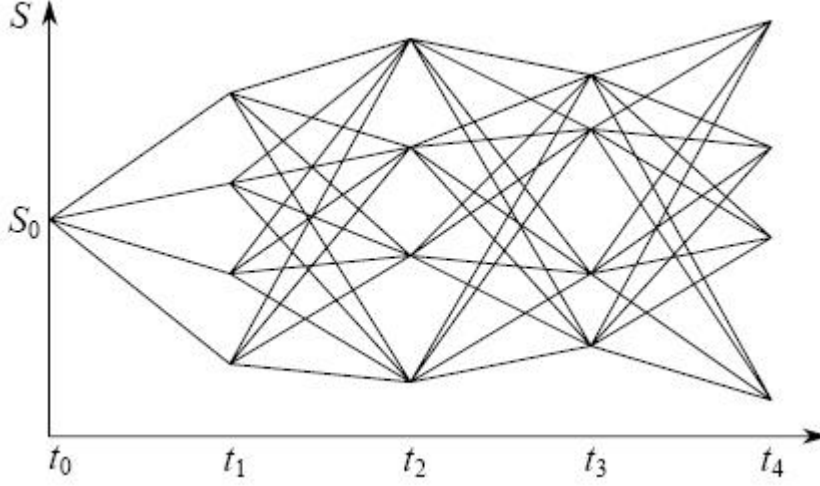
gdzie jednak tym razem

$$\hat{C}(t, X_t(i)) = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{Q}_b^H(t+1, X_{t+1}(j)) \omega(t, X_t(i), X_{t+1}(j)). \quad (3.7)$$

Wartość $\omega(t, X_t(i), X_{t+1}(j))$ będziemy nazywać wagą dołączoną do punktów $X_t(i)$ i $X_{t+1}(j)$. Waga jest w tym przypadku konieczna, gdyż $X_{t+1}(j)$ nie były losowane z gęstości $f(t, X_t(i), \cdot)$. Dla $t = 0$ oraz $i = 1$ otrzymujemy estymator siatkowy Q równy

$$\hat{Q}_b^H = \hat{Q}_b^H(0, S_0). \quad (3.8)$$

Ilustrację siatki przedstawia rysunek:



Rysunek 2. Siatka dla $T = 4$, $n = 1$ oraz $b = 4$.

Zdefiniujmy teraz wagi pomiędzy losowanymi w kolejnych krokach czasowych punktami. Naszym zadaniem jest dobranie wag w ten sposób, aby funkcja $\hat{C}(t, x)$ możliwie dobrze estymowała wartość $C(t, x)$ przy użyciu wszystkich dostępnych informacji z siatki. Główny problem polega na tym, że gęstość przejścia od $S_t = x$ do S_{t+1} wynosi $f(t, x, \cdot)$, podczas gdy punkty siatki zostały wylosowane przy użyciu gęstości $g(t+1, \cdot)$. Zauważmy jednak, że

$$\begin{aligned}
 C(t, x) &= E[Q(t+1, S_{t+1}) | S_t = x] \\
 &= \int_{\Omega} Q(t+1, u) f(t, x, u) du \\
 &= \int_{\Omega} Q(t+1, u) \frac{f(t, x, u)}{g(t+1, u)} g(t+1, u) du \\
 &= E_R[Q(t+1, X_{t+1}(j)) \frac{f(t, x, X_{t+1}(j))}{g(t+1, X_{t+1}(j))}],
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdzie R jest miarą skojarzoną z gęstością g . Ten zapis pokazuje, że jeśli za wagi przyjmiemy

$$\omega(t, x, X_{t+1}(j)) = \frac{f(t, x, X_{t+1}(j))}{g(t+1, X_{t+1}(j))}, \tag{3.10}$$

dla $j = 1, \dots, b$, to $\hat{C}(t, x)$ dobrze aproksymuje $C(t, x)$.

Przyjrzyjmy się własnościom uzyskanego estymatora.

Twierdzenie 1 (Obciążenie estymatora siatkowego). *Dla estymatora siatkowego zachodzi nierówność*

$$E[\hat{Q}_b^H] \geq Q. \quad (3.11)$$

Dowód. Dowód twierdzenia przeprowadzimy indukcyjnie.

W ostatnim możliwym czasie realizacji mamy

$$\hat{Q}_b^H(T, x) = h(T, x) = Q(T, x), \text{ dla każdego } x.$$

Jako założenie indukcyjne przyjmijmy

$$E[\hat{Q}_b^H(t+1, x)] \geq Q(t+1, x), \text{ dla każdego } x.$$

Następnie dostajemy

$$\begin{aligned} E[\hat{Q}_b^H(t, x)] &= E[\max\{h(t, x), \hat{C}(t, x)\}] \\ &\geq \max\{h(t, x), E[\hat{C}(t, x)]\} \\ &= \max\{h(t, x), E[\frac{f(t, x, X_{t+1}(1))}{g(t+1, X_{t+1}(1))} \hat{Q}_b^H(t+1, X_{t+1}(1))]\} \\ &= \max\{h(t, x), E[\frac{f(t, x, X_{t+1}(1))}{g(t+1, X_{t+1}(1))} E[\hat{Q}_b^H(t+1, X_{t+1}(1)) | X_{t+1}(1)]]\} \\ &\geq \max\{h(t, x), E[\frac{f(t, x, X_{t+1}(1))}{g(t+1, X_{t+1}(1))} Q(t+1, X_{t+1}(1))]\} \\ &= \max\{h(t, x), E[Q(t+1, S_{t+1}) | S_t = x]\} \\ &= Q(t, x). \end{aligned}$$

Przy pierwszych trzech przejściach korzysta się kolejno z definicji \hat{Q}_b^H , nierówności Jensena i faktu, że punkty siatki w każdym punkcie czasowym pochodzą z tego samego rozkładu. Czwarte przejście stosuje prawo wieży, a piąte założenie indukcyjne. Kolejny krok to konsekwencja równości

$$E[\frac{f(t, x, X_{t+1}(1))}{g(t+1, X_{t+1}(1))} Q(t+1, X_{t+1}(1))] = \int_{\Omega} f(t, x, u) Q(t+1, u) du,$$

a ostatni wynika z optymalności wykonania. \square

Dzięki tej własności estymator siatkowy jest zaliczany do klasy tak zwanych estymatorów górnych.

Z powyższego twierdzenia nie wynika, jak duże jest obciążenie estymatora siatkowego i czy zmniejsza się ono przy wzroście parametru b . Aby móc częściowo rozwiązać ten problem dodamy kilka dodatkowych założeń, które posłużą nam do sformułowania twierdzenia dotyczącego zbieżności. Dla $t = 1, \dots, T$ oraz $k = 0, 1, \dots, T - t$ oznaczmy

$$R(t, t+k) = (\prod_{i=0}^{k-1} \frac{f(t+i, X_{t+i+1}(1), X_{t+i+1}(1))}{g(t+i+1, X_{t+i+1}(1))}) h(t+k, X_{t+k}(1)).$$

Przyjmijmy dodatkowo, że $\Pi_{i=0}^{-1} = 1$. Dla ustalonego $r > 1$ załóżmy, że są spełnione następujące warunki:

(A.1)

$$E\left[\left(\frac{g(t_1, S_{t_1})}{f(t_1, S_{t_1})}\right)h(t_2, S_{t_2})\right] < \infty ,$$

dla $t_1 = 0, 1, \dots, T$ oraz $t_2 = t_1, \dots, T$.

(A.2)

$$E[R^r(t_1, t_2)] < \infty ,$$

dla $t_1 = 0, 1, \dots, T$ oraz $t_2 = t_1, \dots, T$.

(A.3)

$$E\left[\left(\frac{f(t, x, X_{t+1}(1))}{g(t+1, X_{t+1}(1))}\right)^q\right] < \infty ,$$

dla dowolnego x , $q \geq 1$ oraz $t = 0, 1, \dots, T-1$.

Dodatkowo dla zmiennej losowej X zdefiniujmy normę w przestrzeni L^p , przy $p \geq 1$, następująco:

$$\|X\|_p = E[|X|^p]^{\frac{1}{p}}.$$

Twierdzenie dotyczące zbieżności ma następującą postać:

Twierdzenie 2. (*Zbieżność estymatora siatkowego*)

Niech $p > 1$. Jeśli dla pewnego $r > p$ zachodzą warunki (A.1)-(A.3), to

$$\|\hat{Q}_b^H(t, x) - Q(t, x)\|_p \rightarrow 0, \text{ gdy } b \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

dla dowolnego x oraz t .

Dowód tego faktu można znaleźć w [4].

Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

Wniosek 1. *Estymator siatkowy jest:*

(i) słabo zgodny

(ii) asymptotycznie nieobciążony.

Dowód. (i) Ze zbieżności estymatora w p -tej normie wynika zbieżność według prawdopodobieństwa, a to oznacza słabą zgodność estymatora.

(ii) Skoro

$$E|\hat{Q}_b^H(0, S_0) - Q|^p \rightarrow 0, \text{ gdy } b \rightarrow \infty,$$

to również

$$E|\hat{Q}_b^H(0, S_0) - Q| \rightarrow 0, \text{ gdy } b \rightarrow \infty.$$

Ostatecznie dostajemy, że

$$E(\hat{Q}_b^H(0, S_0) - Q) \rightarrow 0, \text{ gdy } b \rightarrow \infty,$$

czyli estymator $\hat{Q}_b^H(0, S_0)$ jest asymptotycznie nieobciążony. \square

3.3 Wybór gęstości siatkowej

W poprzednim podrozdziale było wspomniane, że wybór gęstości siatkowej ma duży wpływ na otrzymywane wartości oraz własności estymatora siatkowego. Przeanalizujemy szczegółowo to zagadnienie.

Rozważmy wycenę opcji typu europejskiego za pomocą siatki. Ponieważ europejski charakter opcji nie pozwala nam wykonać opcji wcześniej niż w chwili T , estymator dla poszczególnych momentów czasowych $t < T$ jest równy

$$\hat{Q}_b^H(t, X_t(i)) = \hat{C}(t, X_t(i)) = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{Q}_b^H(t+1, X_{t+1}(j)) \frac{f(t, X_t(i), X_{t+1}(j))}{g(t+1, X_{t+1}(j))}$$

oraz dla $t = T$, estymator pozostaje bez zmian. Ostatecznie estymator Q ma postać:

$$\hat{Q}_b^H = \frac{1}{b^T} \sum_{j_1, \dots, j_T} \prod_{i=1}^T \frac{f(i-1, X_{i-1}(j_{i-1}), X_i(j_i))}{g(i, X_i(j_i))} h(T, X_T(j_T)),$$

gdzie suma ma zakres $j_i = 1, \dots, b$, $i = 1, \dots, T$, a symbol $X_0(j)$, $j = 1, \dots, b$ oznacza to samo co $X_0(1) = S_0$. Czyli jest to średnia z iloczynów wszystkich możliwych wag pomiędzy punktami i końcowych wypłat po wszystkich punktach siatki. Grupując odpowiednie wyrażenia otrzymujemy

$$\begin{cases} \hat{Q}_b^H = \frac{1}{b} \sum_{j_T=1}^b h(T, X_T(j_T)) L(T, j_T), \\ L(T, j_T) = \frac{1}{b^{T-1}} \sum_{j_1, \dots, j_{T-1}} \prod_{i=1}^{T-1} \frac{f(i-1, X_{i-1}(j_{i-1}), X_i(j_i))}{g(i, X_i(j_i))}. \end{cases}$$

Czynnik $L(T, j_T)$ można określić jako wagę wypłaty o numerze j_T . Każde $L(T, j_t)$ ma wartość oczekiwaną równą jeden, więc rozsądne wydaje się w tym przypadku dobranie gęstości siatkowej w ten sposób, aby wagi te miały jak najmniejszą wariancję, najlepiej równo zero. Jeśli rozpiszemy $L(T, j_T)$ jako

$$\frac{1}{b} \sum_{j_1} \frac{f(0, X_0(j_0), X_1(j_1))}{g(1, X_1(j_1))} \cdots \frac{1}{b} \sum_{j_T} \frac{f(T-1, X_{T-1}(j_{T-1}), X_T(j_T))}{g(T, X_T(j_T))},$$

zauważymy, że $L(T, j_T) = 1$, jeśli dla ustalonego j zachodzi

$$\frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \omega(t, X_t(k), X_{t+1}(j)) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \frac{f(t, X_t(k), X_{t+1}(j))}{g(t+1, X_{t+1}(j))} = 1.$$

Dla każdej gęstości siatkowej z tej klasy, $L(T, j_t)$ ma wariancję równą zero. Taką własność spełnia gęstość nazywana średnią gęstością, która jest równa

$$g(t, X_{t+1}(j)) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b f(t+1, X_t(k), X_{t+1}(j)). \quad (3.13)$$

Używając tej gęstości do wyceny opcji europejskiej za pomocą siatki otrzymujemy dokładnie taki sam efekt jak w przypadku wyceny klasyczną metodą Monte Carlo. Jak pokazują przykłady średnia gęstość ma również korzystne własności dla wyceny opcji amerykańskich. Aby wygenerować siatkę przy pomocy gęstości średniej można postępować następująco. Zamiast poszczególnych punktów siatki generujemy całe ścieżki w ten sposób, że dla uprzednio wylosowanego punktu $X_{t-1}(j)$, losujemy dokładnie jednego następnika $X_t(j)$, przy pomocy gęstości przejścia $f(t-1, X_{t-1}(j), \cdot)$. Wówczas jeśli wybierzemy losowy punkt ze zbioru $\{X_t(1), \dots, X_t(b)\}$, będzie to punkt wylosowany z rozkładu o gęstości średniej.

Nie ma oczywiście konieczności używania gęstości średniej jako gęstości siatkowej. Niestety inny wybór często prowadzi do wykładniczego wzrostu wariancji estymatora względem T . Przykładem gęstości siatkowej o tej własności jest

$$g(t, u) = f(t, u). \quad (3.14)$$

Choć intuicyjnie ten wybór na pierwszy rzut oka może wydawać się najrozsądniejszy, wariancja tak uzyskanego estymatora dla większej ilości punktów czasowych może przekreślać jego praktyczną przydatność.

3.4 Estymator dolny

Mając skonstruowany estymator górny, naturalnym jest poszukiwanie estymatora dolnego tzn. takiego aby

$$E[\hat{Q}_b^L] \leq Q. \quad (3.15)$$

Porządane jest również, aby \hat{Q}_b^L , podobnie jak \hat{Q}_b^H , był chociaż asymptotycznie zgodny z Q .

Idea konstrukcji pierwszego z estymatorów - estymatora ścieżkowego, jest taka, żeby nie analizować wszystkich możliwych momentów wykonania i spośród nich wybrać najlepszy, lecz jako optymalny moment wykonania przyjąć pierwszy "korzystny" moment. Przejdźmy do formalnej konstrukcji.

Symulujemy p niezależnych trajektorii procesu S_t (niezależnie od punktów siatki), które oznaczamy przez S_0^k, \dots, S_T^k , dla $k = 1, \dots, p$. Wartość p jest pewną liczbą proporcjonalną do b . Każda z trajektorii S^k pochodzi z rozkładu o gęstości $f(t, x, \cdot)$, czyli rozkładu zmiennej S_{t+1} pod warunkiem $S_t = x$. Dla każdej z tych trajektorii wyznaczamy pierwszy optymalny moment wykonania, czyli

$$\tau^k = \min\{t : h(t, S_t^k) \geq Q(t, S_t^k)\}.$$

Ponieważ w rzeczywistości $Q(t, S_t^k)$ nie jest znane, więc za jego estymator przyjmujemy estymator górny uzyskany za pomocą siatki. Otrzymany w ten sposób estymator τ ma postać

$$\hat{\tau}_b^k = \min\{t : h(t, S_t^k) \geq \hat{Q}_b^H(t, S_t^k)\}. \quad (3.16)$$

Ostatecznie estymator ścieżkowy jest równy średniej obliczonych wartości $h(\hat{\tau}_b^k, S_{\hat{\tau}_b^k}^k)$, dla $k = 1, \dots, p$, czyli:

$$\hat{q}_b^L = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p h(\hat{\tau}_b^k, S_{\hat{\tau}_b^k}^k). \quad (3.17)$$

Otrzymany estymator ścieżkowy cechuje się wymaganymi własnościami, o czym mówią następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3. *(Obciążenie estymatora ścieżkowego)*

Dla estymatora ścieżkowego zachodzi nierówność

$$E[\hat{q}_b^L] \leq Q.$$

Dowód. Każdy estymator ceny Q , dla którego moment wykonania jest wybrany za pomocą innej zasady niż optymalny moment wykonania, ma wartość oczekiwaną mniejszą lub równą prawdziwej cenie. Estymator \hat{q}_b^L jest wybrany za pomocą zasady zdeterminowanej w (3.17), zatem spełnia on nierówność w tezie twierdzenia. \square

Twierdzenie 4. *(Zbieżność estymatora ścieżkowego)*

Niech założenia w twierdzeniu 2 będą spełnione oraz niech zachodzi nierówność $E[h(t, S_t)^{1+\epsilon}] < \infty$, dla dowolnego $t = 1, \dots, T$ i pewnego $\epsilon > 0$. Niech ponadto $P(h(t, S_t) = Q(t, S_t)) = 0$, dla dowolnego $t = 0, \dots, T - 1$. Wtedy zachodzi zbieżność

$$E[\hat{q}_b^L] \rightarrow Q, \text{ gdy } b \rightarrow \infty,$$

co oznacza, że estymator ścieżkowy jest asymptotycznie nieobciążony.

Dowód tego twierdzenia znajduje się w [4].

Mankamentem wyznaczania estymatora ścieżkowego jest fakt, że nie może on być liczony równocześnie z estymatorem siatkowym. Aby go uzyskać, należy mieć już skonstruowaną siatkę wraz wyznaczonym estymatorem siatkowym.

Istnieje jednak alternatywna możliwość uzyskania innego estymatora o podobnych własnościach. Niestety nie ma już pewności, że jest to estymator dolny. Jednak niewątpliwą zaletą estymatora połówkowego - bo o nim mowa, jest fakt,

że może on być liczony równoległe z estymatorem siatkowym lub nawet bez niego. Pomysł polega na równoległym obliczaniu dwóch pomocniczych estymatorów częściowych. Jeśli z wartości pierwszego będzie wynikać, że opcji nie należy wykonywać, to za estymator ceny opcji w danej chwili przyjmujemy wartość drugiego estymatora. Jeśli natomiast wartość pierwszego będzie wskazywać na korzyść wykonania, to za estymator ceny w danej chwili przyjmujemy wypłatę z opcji. Przejdźmy do szczegółów konstrukcji.

Podzielmy zbiór indeksów $I = \{1, \dots, b\}$ na dwa rozłączne podzbiory - A oraz $A' = I/A$. Estymator połówkowy, podobnie jak estymator siatkowy, definiujemy rekurencyjnie:

$$q_b^{LL}(T, x) = h(T, x) \quad (3.18)$$

oraz

$$\hat{q}_b^{LL}(t, x) = \begin{cases} h(t, x), & \text{jeśli } h(t, x) \geq \hat{C}_A(t, x), \\ \hat{C}_{A'}(t, x), & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (3.19)$$

gdzie dla dowolnego podzbioru właściwego $B \subset I$ przyjmujemy

$$\hat{C}_B(t, x) = \frac{1}{|B|} \sum_{l \in B} \hat{q}_b^{LL}(t+1, X_{t+1}(l)) \omega(t, x, X_{t+1}(l)), \quad (3.20)$$

gdzie $|B|$ oznacza liczbę zbioru B .

Własność estymatora połówkowego określa twierdzenie.

Twierdzenie 5. (*Obciążenie estymatora połówkowego*)

Dla dowolnego t oraz x estymator połówkowy q_b^{LL} spełnia nierówność:

$$E[\hat{q}_b^{LL}(t, x)] \leq E[\hat{Q}_b^H(t, x)].$$

Dowód. Teza jest konsekwencją formuły:

$$\begin{aligned} E[\hat{q}_b^{LL}(t, x)] &= h(t, x)P(h(t, x) \geq \hat{C}_A(t, x)) \\ &+ E[\hat{C}_{A'}(t, x)](1 - P(h(t, x) \geq \hat{C}_A(t, x))) \\ &\leq \max\{h(t, x), E[\hat{C}(t, x)]\} \\ &= E[\hat{Q}_b^H(t, x)]. \end{aligned}$$

□

Mimo, że estymator połówkowy nie musi mieć cechy estymatora dolnego, w dalszej części pracy będę go również zaliczał do klasy estymatorów dolnych.

W literaturze można zetknąć się z własnością o wiele mocniejszą. Mianowicie formuluje się czasem twierdzenie, że jeśli gęstość siatkowa jest równa gęstości średniej, to

$$E[\hat{q}_b^{LL}(t, x)] \leq Q(t, x), \text{ dla dowolnego } t \text{ oraz } x.$$

Nie ma jednak ścisłego uzasadnienia tej tezy. Autorzy często powołują się na artykuł autorstwa A. N. Avramidisa, lecz moja próba dotarcia do niego zakończyła się niepowodzeniem. Aby mieć pewność formułowanych twierdzeń, skontaktowałem się z wyżej wymienionym autorem i okazało się, że krótko po publikacji artykuł został wycofany z powodu błędu w dowodzie. Dlatego, żeby uniknąć pochopnych wniosków, przedstawiam nieco słabsze twierdzenie. W następnym rozdziale postaram się zweryfikować numerycznie hipotezę postawioną przez autora.

3.5 Estymator punktowy

Za estymator punktowy można przyjąć dowolny z estymatorów wprowadzonych w poprzednich Podrozdziałach. Jednak trzeba mieć na uwadze, że żaden z nich nie jest nieobciążony i raczej nie przybliży zbyt dobrze ceny opcji. Można jednak przy ich pomocy stworzyć estymator punktowy o mniejszym obciążeniu niż estymatory wyjściowe. Najprostszym rozwiązaniem jest przyjęcie jako estymatora punkowego średniej ważonej estymatora górnego i dolnego. Dlatego pierwszym z wprowadzonych estymatorów będzie estymator \hat{Q}^P zdefiniowany jako

$$\hat{Q}^P = \gamma \hat{Q}^H + (1 - \gamma) \hat{q}^L, \quad (3.21)$$

gdzie γ jest pewną ustaloną liczbą z przedziału $(0, 1)$.

Z uwagi na fakt, że obciążenie estymatora \hat{Q}^H rośnie w każdym z kolejnych kroków czasowych, ustalenie optymalnego γ może być trudne. Oznacza to, że jeśli $\hat{Q}^H(t, x) \geq Q(t, x)$ dla pewnych x oraz t , to dla punktu czasowego $t - 1$ obciążenie będzie wzrastać, biorąc jako punkt odniesienia obliczoną wartość $\hat{Q}^H(t, x)$, a nie prawdziwą wartość $Q(t, x)$. Dlatego przy dużym rozdrobnieniu osi czasu, końcowa wartość \hat{Q}^H może znacznie odbiegać od prawdziwej ceny Q .

Idealnym wyjściem z tej sytuacji byłoby korygowanie wartości estymatora po każdym kroku. Biorąc jednak pod uwagę fakt, że mamy do dyspozycji estymator siatkowy i połówkowy obliczane równolegle oraz, że

$$\begin{cases} E[\hat{Q}^H(t, x)] \geq Q(t, x), \\ E[\hat{Q}^H(t, x)] \geq E[\hat{q}^{LL}(t, x)], \end{cases}$$

możemy w każdym kroku z tych dwóch estymatorów stworzyć jeden. Dla $t = T$, wartości obu estymatorów są równe, więc jako estymator punktowy $\hat{Q}_b^{PP}(T, \cdot)$ przyjmujemy:

$$\hat{Q}^{PP}(T, x) = \hat{Q}^H(T, x) = \hat{q}^{LL}(T, x) = h(T, x). \quad (3.22)$$

W kolejnych krokach estymator punktowy powinien być stosowną średnią ważoną estymatora siatkowego i połówkowego, czyli

$$\hat{Q}^{PP}(t, x) = \gamma \hat{Q}^H(t, x) + (1 - \gamma) \hat{Q}^{LL}(t, x), \quad (3.23)$$

gdzie w kolejnych krokach czasowych wartości $\hat{Q}^H(t, \cdot)$ oraz $\hat{Q}^{LL}(t, \cdot)$ powinny być zastępowane przez $\hat{Q}^{PP}(t, \cdot)$ do obliczenia kolejnych $\hat{Q}^H(t - 1, \cdot)$ oraz $\hat{Q}^{LL}(t - 1, \cdot)$. Takie podejście powinno nieco zniwelować obciążenie pochodzące z estymatorów składowych.

3.6 Estymacja przedziałowa

Jak widać wyznaczenie dobrego estymatora punktowego bywa dosyć trudne. Łatwiejszym zadaniem jest wyznaczenie przedziału ufności dla ceny opcji Q . Dla zachowania ogólności będę używał oznaczeń \hat{Q}^H oraz \hat{Q}^L na oznaczenie górnego i jednego z estymatorów dolnych.

Procedura wygląda następująco. Generujemy N niezależnych siatek i dla każdej z nich obliczamy $\hat{Q}_{(i)}^H$ oraz $\hat{Q}_{(i)}^L$, dla $i = 1, \dots, N$. Indeks dolny oznacza tym razem numer siatki, a nie jak wcześniej jeden z wymiarów siatki. Następnie uśredniamy oba wyniki uzyskując w ten sposób

$$\bar{Q}^H(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{Q}_{(i)}^H, \quad (3.24)$$

$$\bar{Q}^L(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{Q}_{(i)}^L. \quad (3.25)$$

Wówczas przedział ufności dla ceny opcji Q ma postać

$$[\bar{Q}^L(N) - \frac{\sigma(\bar{Q}^L)}{\sqrt{N}} \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}), \bar{Q}^H(N) + \frac{\sigma(\bar{Q}^H)}{\sqrt{N}} \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})], \quad (3.26)$$

gdzie, podobnie jak w Rozdziale 2, $\sigma(\hat{Q})$ oraz $\Phi^{-1}(\alpha)$ są odpowiednio odchyleniem standardowym \hat{Q} i kwantylem rozkładu normalnego rzędu α .

3.7 Metody redukcji wariancji

Dotychczas została przedstawiona ogólna metoda wyceny opcji amerykańskich przy użyciu metody Monte Carlo. Jednak próba zastosowania jej w praktyce może pokazać, że wyniki poszczególnych symulacji różnią się znacznie między sobą. Nie jest to zaskoczenie, gdyż wynik każdej metody statystycznej uzależniony jest od wyboru próby. Za miernik jednolitości wyników, podobnie jak to miało miejsce w przypadku wyceny opcji europejskich, można uznać błąd standardowy (2.4), albo wariancję estymatora. Dla zmniejszenia błędów można zwiększać rozmiar siatki. Jednak w przypadku wyceny opcji amerykańskich duża złożoność obliczeniowa, znacznie przekraczająca złożoność obliczeniową konstrukcji estymatora Monte Carlo opcji europejskiej, powoduje, że metoda szybko staje się bezużyteczna obliczeniowo. Dlatego tu przede wszystkim istotne są pomocnicze techniki redukcji wariancji. Do najpopularniejszych należą dwie odmiany kontroli wariancji - wewnętrzna i zewnętrzna.

3.7.1 Wewnętrzna kontrola wariancji

Wewnętrzna kontrola wariancji ma na celu redukovanie wariancji w każdym z punktów siatki. Może ona zostać zastosowana zarówno do estymatora \hat{Q}^H jak i \hat{q}^L oraz \hat{q}^{LL} (w tym przypadku osobno dla C_A oraz $C_{A'}$). Z uwagi na analogię zastosowania dla każdego z tych estymatorów, metoda zostanie zaprezentowana do zredukowania wariancji estymatora \hat{Q}^H .

Przypuśćmy jak poprzednio, że estymator \hat{Q}_H jest wyliczany przy użyciu siatki złożonej z wektorów $X_t(i)$, dla $t = 1, \dots, T$ oraz $i = 1, \dots, b$. W każdym z punktów siatki obliczana wartość $\hat{Q}^H(t, X_t(i))$ zależy od wartości czekania $\hat{C}(t, X_t(i))$. Wariancję pochodzącą z tego składnika będziemy chcieli zredukować w każdym kroku. Załóżmy, że wiemy jak obliczyć

$$v = E[v(t+1, S_{t+1}) | S_t = X_t(i)],$$

gdzie $\{v(k, S_k)\}_{k=0, \dots, T}$ jest pewnym procesem stochastycznym zależnym od S_t . Przyjmijmy kilka skrótowych oznaczeń

$$\begin{cases} \omega(t, i, j) = \omega(t, X_t(i), X_{t+1}(j)), \\ v(t+1, j) = v(t+1, X_{t+1}(j)), \\ \hat{Q}^H(t+1, j) = \hat{Q}^H(t+1, X_{t+1}(j)). \end{cases} \quad (3.27)$$

Wówczas przy pomocy takiej samej procedury jaką obliczaliśmy $\hat{Q}^H(t, X_t(i))$, obliczamy również \hat{v} , czyli

$$\hat{v} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b v(t+1, j) \omega(t, i, j). \quad (3.28)$$

Na mocy (3.9) dostajemy, że $E[\hat{v}] - v = 0$. Wówczas wartość $E[\hat{v}] - v$ może być użyta do zredukowania błędu $\hat{C}(t, X_t(i))$. Uzyskujemy to przyjmując za $\hat{C}(t, X_t(i))$

$$\frac{\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{Q}^H(t+1, j) \omega(t, i, j) - \beta \left\{ \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b v(t+1, j) \omega(t, i, j) - v \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \omega(t, i, j) \right\}}{\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \omega(t, i, j)}, \quad (3.29)$$

dla ustalonego β . Z powodu konieczności użycia wag, formuła jest nieco bardziej skomplikowana niż ta, zastosowana do skorygowania wariancji estymatora opcji europejskiej.

Ponieważ składnik $\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \omega(t, i, j)$ ma wartość oczekiwaną jeden, to wyrażenie $\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b v(t+1, j) \omega(t, i, j) - v \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \omega(t, i, j)$ ma wartość oczekiwaną równą zero. Dodatkowo mianownik również odgrywa rolę czynnika korygującego. Jeśli jest on większy niż jeden, wartość skorygowanego estymatora zostaje obniżona, a jeśli jest mniejszy niż jeden, podwyższona.

Teraz należy dobrać β tak, aby wariancja skorygowanego estymatora była jak najmniejsza. Aby licznik wzoru (3.29) przybrał taką samą postać jak wyrażenie (2.5) i móc zastosować metodę najmniejszych kwadratów, należałoby przyjąć za wyjściowy estymator $\hat{Q}^H(t+1, j) \omega(t, i, j)$, a za pomocniczy estymator $v(t+1, j) \omega(t, i, j)$. Jednakże uzyskane w ten sposób β wyrażałoby korelację ważonych czynników. Dlatego, aby β wyrażało korelację pomiędzy $\hat{Q}^H(t+1, j)$ i $v(t+1, j)$, szukamy rozwiązania zmodyfikowanego problemu

$$\min_{\alpha, \beta} \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \omega(t, i, j) [\hat{Q}^H(t+1, j) - (\alpha + \beta v(t+1, j))]^2. \quad (3.30)$$

Po zastosowaniu rachunku pochodnych otrzymamy, że rozwiązaniem jest para:

$$\begin{cases} \beta^* = \frac{\sum_{j=1}^b \omega(t, i, j) [v(t+1, j) - v^{avg}(t+1, i)] [\hat{Q}^H(t+1, j) - \hat{Q}^{avg}(t+1, i)]}{\sum_{j=1}^b \omega(t, i, j) [v(t+1, j) - v^{avg}(t+1, i)]}, \\ \alpha^* = \frac{\sum_{j=1}^b \omega(t, i, j) [\hat{Q}^H(t+1, j) - \beta v(t+1, j)]}{\sum_{j=1}^b \omega(t, i, j)}, \end{cases} \quad (3.31)$$

gdzie przyjęte zostały pomocnicze oznaczenia

$$\begin{cases} v^{avg}(t+1, i) = \frac{\sum_{k=1}^b v(t+1, i, k) \omega(t, i, k)}{\sum_{k=1}^b \omega(t, i, k)}, \\ \hat{Q}^{avg}(t+1, i) = \frac{\sum_{k=1}^b \hat{Q}^H(t+1, k) \omega(t, i, k)}{\sum_{k=1}^b \omega(t, i, k)}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Przy takim β^* skorygowany estymator sprowadza się do $\alpha^* + \beta^*v$. W praktycznej wycenie opcji amerykańskich, za $v(t, j)$ najczęściej przyjmuje się opcje typu europejskiego o takiej samej lub bardzo zbliżonej funkcji wypłaty.

3.7.2 Zewnętrzna kontrola wariancji

Zewnętrzna kontrola wariancji polega na redukcji wariancji dla końcowych estymatorów, zarówno górnych jak i dolnych. Opiera się ona na analogicznym rozumowaniu jak kontrola wewnętrzna. Najpierw przeprowadzę opis dla estymatora górnego.

Generujemy N niezależnych siatek, a następnie przy ich pomocy wyznaczamy N estymatorów $\hat{Q}_{(i)}^H$, $i = 1, \dots, N$. Przypuśćmy znowu, że wiemy jak obliczyć

$$u(0, S_0) = E[u(T, S_T)], \quad (3.33)$$

dla pewnego procesu $u(t, S_t)$. Równoległe z wyznaczaniem $\hat{Q}_{(i)}^H$, obliczamy $\hat{u}_{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, używając do tego celu wygenerowanych siatek. Końcowy skorygowany estymator górny jest zdefiniowany jako

$$\hat{Q}^H(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{Q}_{(i)}^H - \beta \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{u}_{(i)} - u \right). \quad (3.34)$$

Współczynnik β wyznaczamy analogicznym sposobem jak robiliśmy to dla estymatora w równaniu (2.5).

Dla estymatora połówkowego procedura wygląda dokładnie tak samo, natomiast niewielka różnica pojawia się w przypadku estymatora ścieżkowego. Ponieważ zatrzymanie estymatora ścieżkowego następuje w pewnym nieustalonym wcześniej momencie, to wartość u również należy obliczyć w tej samej chwili.

3.8 Złożoność obliczeniowa algorytmu

Opiszmy krótko złożoność obliczeniową algorytmu wyznaczenia estymatora siatkowego, połówkowego i ścieżkowego.

Wygenerowanie siatki wymaga nTb operacji. Ponieważ dla ustalonego punktu siatki, w przypadku estymatora siatkowego i połówkowego, wartość czekania jest obliczana przy pomocy wszystkich punktów z chwili następnej oraz unikalnych dla danych punktów wag, to całość wymaga nb operacji. Wszystkich punktów w ustalonej chwili jest b , a punktów czasowych T , co daje łącznie nTb^2 działań.

Wyznaczenie estymatora ścieżkowego wymaga porównywalnego nakładu mocy obliczeniowej. Dla każdego generowanego punktu ścieżki, wartość czekania, jak wcześniej, obliczamy używając b punktów siatki oraz unikalnych wag. W pesymistycznym przypadku, każda ścieżka ma długość T , więc łącznie wykonamy ponownie nTb^2 operacji.

Ostatecznie złożoność algorytmu wynosi $O(nTb^2)$. Jest to duża złożoność, gdyż zazwyczaj będziemy dążyli do zwiększania parametru b , co wpłynie bardzo niekorzystnie na czas obliczeń. Dla porównania złożoność obliczeniowa metody Monte Carlo dla opcji europejskich to zaledwie $O(nb)$.

Rozdział 4

Praktyczna wycena opcji amerykańskich

Wszystkie przykłady w tym rozdziale będą bazowały na wielowymiarowym modelu rynku typu Blacka-Scholesa. Oznacza to, że proces ceny akcji opisany jest równaniem

$$dS_t^k = S_t^k[r dt + \sigma_k dW_t^k], \text{ dla } k = 1, \dots, n, t \in [0, T],$$

gdzie r jest stopą wolną od ryzyka, σ_k jest odchyleniem standardowym k -tego aktywa, a W_t^k , $k = 1, \dots, n$, są niezależnymi procesami Wienera względem miary martyngałowej. Zakładamy zatem, że ceny poszczególnych akcji są od siebie niezależne. Założenie to nie jest konieczne, lecz będę je stosował dla ułatwienia wyceny. Wówczas $\ln \frac{S_{t_i}^k}{S_{t_{i-1}}^k}$ ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $(r - \frac{\sigma_k^2}{2})(t_i - t_{i-1})$ oraz odchyleniem standardowym $\sigma_k \sqrt{t_i - t_{i-1}}$. Proces ceny obligacji jest natomiast dany przez

$$B_t = \exp(rt).$$

Aby można było zastosować metodę siatki do przedstawionego modelu, zakładamy, że opcję amerykańską można wykonać w chwilach $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_d = T$. Gęstością siatkową będzie gęstość średnia zdefiniowana w (3.13). Ponadto parametr γ używany w definicji estymatorów punktowych (3.21), (3.22), (3.23) będzie wynosił 0,5.

Przedstawione przykłady mają za zadanie zobrazować działanie metody siatki oraz technik pomocniczych opisanych w rozdziale poprzednim. Przede wszystkim przyjrzymy się zbieżności i obciążeniu estymatorów. Zastanowimy się, który z estymatorów dolnych daje lepsze wyniki oraz czy w ogóle estymator połówkowy

może być stosowany jako estymator dolny. Postaramy się zbadać przydatność estymatorów punktowych i przedziałów ufności. Rozstrzygniemy również jaki wpływ na uzyskiwane wyniki ma kontrola wariancji. Cechy te zostaną zweryfikowane na czterech przykładach opcji o dość różnych własnościach.

4.1 Waniliowa opcja sprzedaży

Waniliowa opcja sprzedaży jest klasycznym przykładem, gdzie ceny opcji typu europejskiego i amerykańskiego różnią się między sobą. Jest to opcja na jedno aktywo, której funkcja wypłaty ma postać

$$\max\{0, K - S_t\},$$

gdzie K jest ustaloną ceną realizacji. Bardzo dobre przybliżenie ceny opcji typu amerykańskiego można uzyskać stosując technikę drzewa dwumianowego. W tym przykładzie porównamy rzeczywistą cenę z cenami wyznaczonymi przez poszczególne estymatory. Przyjrzymy się również błędom standardowym tych estymatorów. Dodatkowo zbadamy zależność tych wartości od ilości punktów czasowych, pozwalających na wykonanie opcji.

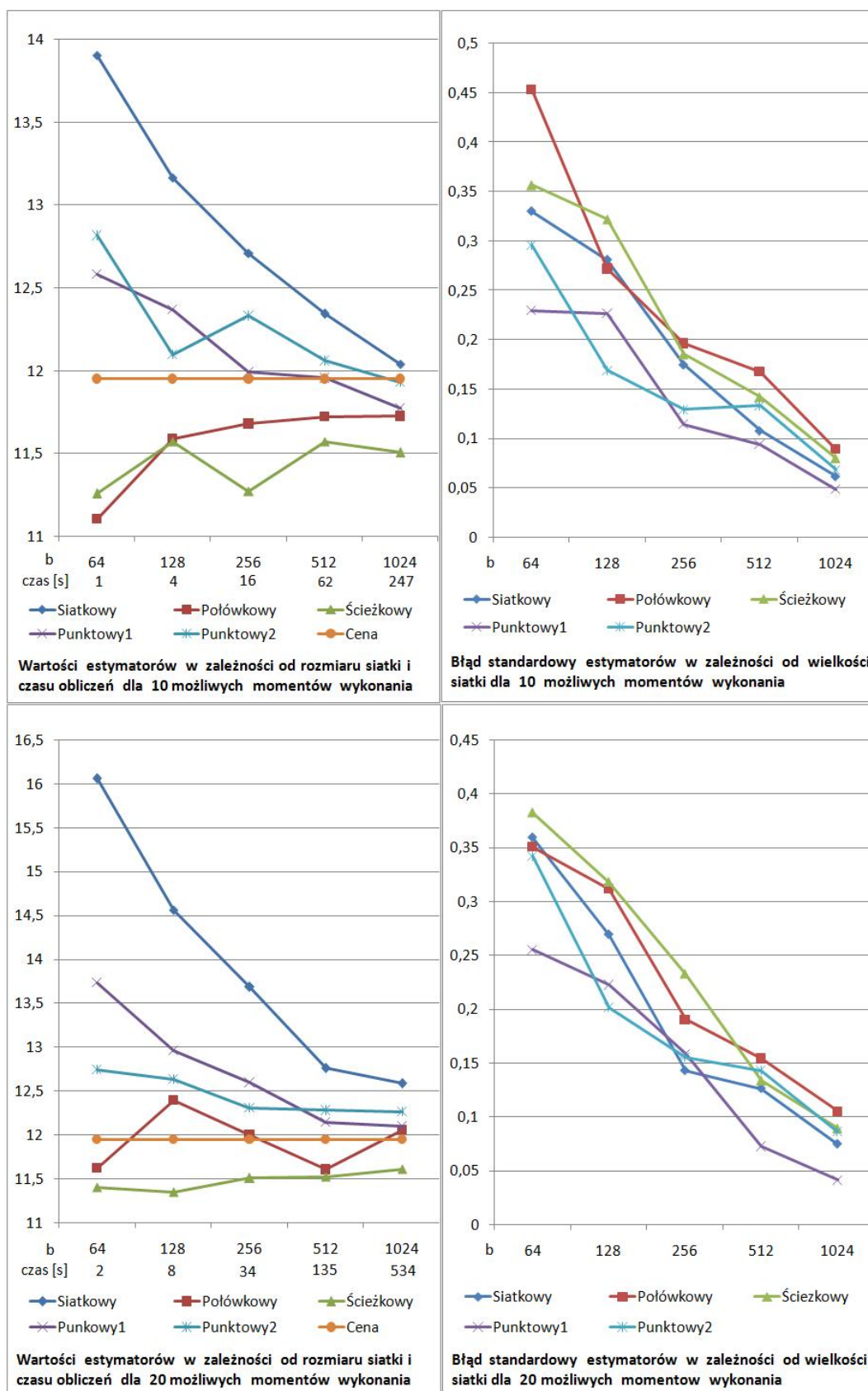
Parametry badanej opcji są następujące:

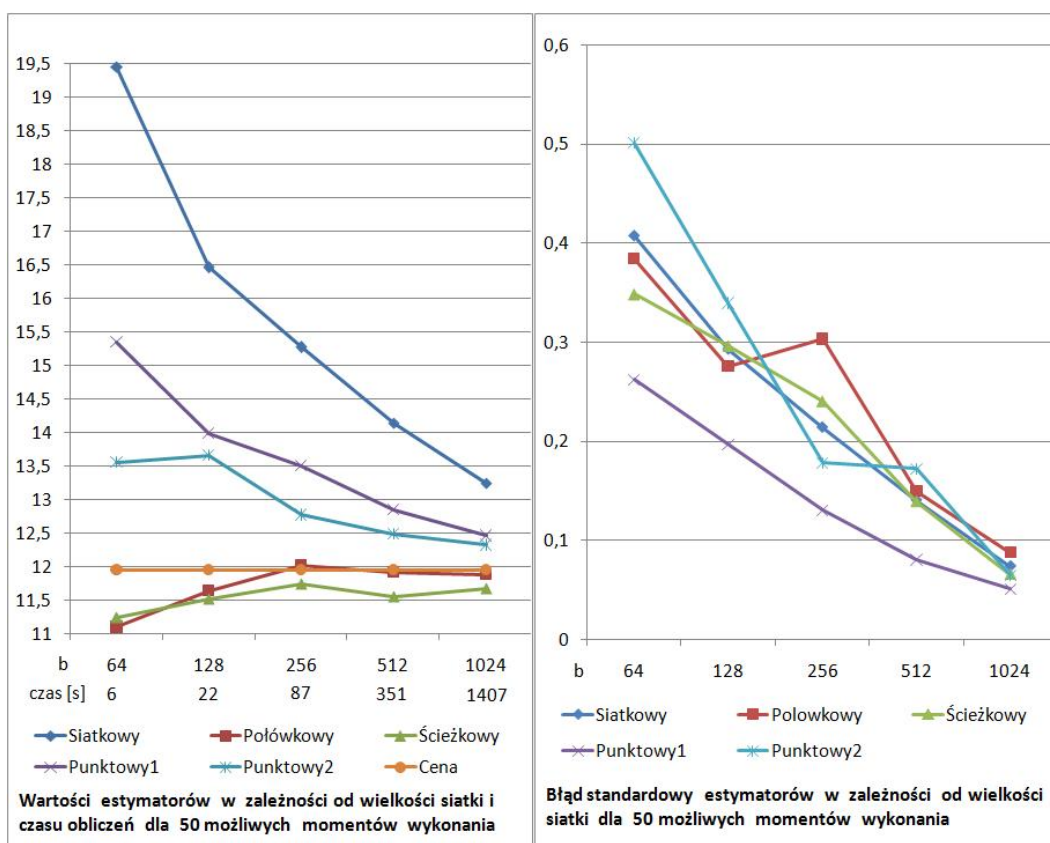
- początkowa cena akcji - $S_0 = 100$.
- odchylenie standardowe - $\sigma = 40\%$.
- stopa wolna od ryzyka - $r = 10\%$.
- cena realizacji - $K = 100$.
- czas trwania opcji - $T = 1$ rok.

Dodatkowo do wyceny używamy następujących narzędzi:

- ilość siatek - $N = 20$.
- ilość momentów wykonania - $d = 10, 20, 50$.
- wielkości siatek - $b = 64, 128, 256, 512, 1024$.

Cena uzyskana z drzewa dwumianowego wynosi 11,95. Uzyskane ceny, błędy standardowe oraz czasy obliczeń zamieszczone są na kolejnych wykresach.





Rysunek 3. Wykresy po lewej stronie obrazują wartości estymatorów a także prawdziwą cenę opcji, a po prawej ich błędy standardowe.

Wnioski:

- Z wykresów jasno wynika, że wszystkie analizowane estymatory, dla wszystkich wartości d są zbieżne do prawdziwej ceny opcji, przy wzroście parametru b .
- Największe obciążenie związane jest z estymatorem siatkowym. Dla niewielkich siatek oraz dużych wartości d wartość tego estymatora diametralnie odbiega od prawdziwej ceny.
- Spośród estymatorów dolnych, lepszym przybliżeniem prawdziwej wartości jest estymator półówkowy. Należy jednak zwrócić uwagę, że jego wartość czasem nieznacznie przekracza prawdziwą cenę. Może to świadczyć o tym, że nie jest to prawdziwy estymator dolny, ale może to być tylko rzadkie zdarzenie nie przeczące badanej własności. Estymator ścieżkowy zachowuje się adekwatnie do wymaganej od niego własności.

- Oba estymatory punktowe są zbieżne od góry do prawdziwej ceny. Jest to wynik tego, że oba są mocno związane z estymatorem siatkowym, który jest mocno obciążony. Drugi estymator punktowy wykazuje nieco mniejsze obciążenie, prawdopodobnie dlatego gdyż jego wartość jest korygowana już od początku konstrukcji. Natomiast wartość pierwszego estymatora punktowego jest obliczana dopiero po wyznaczeniu końcowych składowych estymatorów.
- Wzrost liczby możliwych chwil do wykonania opcji znacząco wpływa na zwiększenie obciążenia estymatora siatkowego, a co za tym idzie obu estymatorów punktowych. Wartości estymatorów dolnych nie różnią się zbyt wiele przy zmianie parametru d . Wartość $d = 10$ jest wystarczająca do uzyskania zadowalających wartości, gdyż w każdym z przypadków estymatory są zbieżne do porównywalnej wartości, a wzrost liczby możliwych chwil wykonania opcji wpływa jedynie niekorzystnie na szybkość zbieżności.
- Błędy standardowe wszystkich badanych estymatorów zbiegają do zera niezależnie od wielkości parametru d . Różnice pomiędzy estymatorem górnym, a dwoma dolnymi są nieznaczne, choć można zauważyć, że estymator siatkowy cechuje się mniejszą wartością błędu. Zdecydowanie najniższą wartość błędu ma pierwszy estymator punktowy.
- Czasy obliczeń dla różnych wartości parametru d jednoznacznie wskazują na fakt, że algorytm jest liniowy względem ilości możliwych chwil do wykonania. Widać również kwadratową złożoność względem wielkości siatki. Dwukrotny wzrost wartości b powoduje czterokrotny wzrost czasu obliczeń. Powoduje to, że dla dużych siatek obliczenia dyskwalifikują ten algorytm w praktycznym zastosowaniu. Dlatego warto używać mniejszych siatek oraz poszukiwać pomocniczych technik redukcji wariancji.

4.2 Opcja kupna ze średnią geometryczną

Amerykańska opcja kupna ze średnią geometryczną jest opcją, którą można bardzo łatwo wycenić analitycznie. Po pierwsze, jej cena jest równa analogicznej opcji typu europejskiego. Po drugie, europejska opcja o takiej wypłacie jest łatwa do analitycznej wyceny. Wynika to z faktu, że iloczyn zmiennych losowych o rozkładzie lognormalnym ma rozkład lognormalny. Dlatego problem jej wyceny można sprowadzić do problemu wyceny zwykłej waniliowej opcji, a następnie rozwiązać stosując formułę Blacka-Scholesa.

Funkcja wypłaty badanej opcji jest następująca:

$$\max\{0, \Pi_{i=1}^n (S_t^k)^{\frac{1}{n}} - K\},$$

gdzie n jest liczbą akcji na jakie opiewa opcja. Z powodów podanych powyżej wynika, że bardzo łatwo zastosować w tym przypadku metody redukcji wariancji. Dlatego na tym przykładzie zanalizujemy korzyści i zagrożenia płynące z zastosowania techniki wewnętrznej i zewnętrznej kontroli wariancji. Zarówno w przypadku kontroli wewnętrznej jak i zewnętrznej, funkcją kontrolującą będzie europejska opcja kupna ze średnią geometryczną.

Przyjmujemy następujące parametry opcji:

- ilość akcji - $n = 5$.
- początkowa cena akcji - $S_0^1 = 80$, $S_0^2 = 90$, $S_0^3 = 100$, $S_0^4 = 110$, $S_0^5 = 120$.
- odchylenie standardowe akcji - $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 25\%$, $\sigma_3 = 10\%$, $\sigma_4 = 40\%$, $\sigma_5 = 20\%$.
- stopa wolna od ryzyka - $r = 5\%$.
- cena realizacji - $K = 100$.
- czas trwania opcji - $T = 1$ rok.

Dodatkowo do wyceny używamy następujących narzędzi:

- ilość siatek - $N = 15$.
- ilość momentów wykonania - $d = 6$.
- wielkości siatek - $b = 64, 128, 256, 512, 1024$.

Cena uzyskana na drodze analitycznej wynosi 5,125. Tabela przedstawia zestawienie obliczonych wartości.

	Zastosowana technika			
b	Bez kontroli	Zewnętrzna	Wewnętrzna	Zew. i wew.
Estymator siatkowy				
64	7,419 (0,318)	7,304 (0,123)	5,754 (0,070)	5,796 (0,052)
128	7,123 (0,156)	7,129 (0,083)	5,461 (0,068)	5,565 (0,026)
256	6,969 (0,115)	6,855 (0,036)	5,363 (0,022)	5,408 (0,020)
512	6,695 (0,094)	6,658 (0,038)	5,273 (0,024)	5,256 (0,011)
1024	6,324 (0,073)	6,299 (0,016)	5,227 (0,012)	5,219 (0,009)
Estymator połówkowy				
64	3,763 (0,208)	3,276 (0,147)	4,830 (0,123)	5,034 (0,092)
128	3,942 (0,129)	3,941 (0,081)	4,860 (0,057)	5,011 (0,049)
256	4,258 (0,115)	4,117 (0,081)	5,062 (0,042)	5,016 (0,035)
512	4,446 (0,060)	4,348 (0,060)	4,980 (0,026)	5,019 (0,031)
1024	4,610 (0,054)	4,495 (0,040)	5,028 (0,015)	5,036 (0,017)
Estymator ścieżkowy				
64	4,331 (0,175)	4,459 (0,108)	4,920 (0,254)	5,124 (0,001)
128	4,202 (0,134)	4,520 (0,077)	4,800 (0,156)	5,107 (0,012)
256	4,865 (0,128)	4,755 (0,063)	4,835 (0,116)	5,116 (0,008)
512	4,580 (0,082)	4,880 (0,043)	4,986 (0,079)	5,125 (0,001)
1024	4,832 (0,041)	4,892 (0,046)	5,054 (0,064)	5,125 (0,001)
Estymator punktowy 1				
64	5,875 (0,201)	5,882 (0,081)	5,337 (0,142)	5,460 (0,026)
128	5,663 (0,131)	5,824 (0,052)	5,131 (0,082)	5,336 (0,015)
256	5,917 (0,066)	5,805 (0,030)	5,099 (0,063)	5,262 (0,011)
512	5,638 (0,071)	5,769 (0,026)	5,129 (0,043)	5,190 (0,005)
1024	5,578 (0,044)	5,596 (0,028)	5,141 (0,032)	5,172 (0,004)
Estymator punktowy 2				
64	4,758 (0,121)	5,165 (0,197)	5,192 (0,117)	5,31 (0,076)
128	5,318 (0,219)	5,189 (0,119)	5,028 (0,062)	5,28 (0,039)
256	5,248 (0,108)	5,28 (0,073)	5,165 (0,032)	5,139 (0,022)
512	5,316 (0,073)	5,443 (0,08)	5,128 (0,025)	5,121 (0,015)
1024	5,429 (0,048)	5,325 (0,044)	5,107 (0,013)	5,103 (0,015)

Tabela 1. Wartości i błędy standardowe (podane w nawiasach) poszczególnych estymatorów w zależności od wielkości siatki oraz zastosowanej techniki kontroli wariancji.

Wnioski:

- Przykład dobitnie pokazuje, że dla opcji na wiele akcji obciążenie estymatorów jest tak duże, że bez zastosowania pomocniczych technik, wartości estymatorów znacznie odbiegają od oczekiwanych. Należy podkreślić, że parametr d wynosi zaledwie 6, co powinno korzystnie wpłynąć na uzyskiwane wartości. Potwierdza się również zdecydowanie największe obciążenie estymatora siatkowego.
- Zastosowanie jedynie zewnętrznej kontroli wariancji dość słabo niweluje błąd standardowy. Najlepszy efekt uzyskujemy dla estymatora siatkowego.
- Wewnętrzna kontrola wariancji daje doskonały efekt w przypadku estymatora siatkowego i połówkowego, a także związanego z nimi drugiego estymatora punktowego. Niestety technika ta, zastosowana samodzielnie, powoduje wzrost błędu estymatora ścieżkowego.
- Połączenie obu technik daje zadowalającą poprawę dla wszystkich rodzajów estymatorów. Należy zaznaczyć, że estymator ścieżkowy już dla $b = 64$ wykazał błąd standardowy równy 0,001, a jego wartość różniła się od prawdziwej również zaledwie o 0,001. Pokazuje to, że tylko połączenie obu technik wpływa korzystnie na poprawę efektywności tego estymatora.
- Spośród estymatorów dolnych, estymator ścieżkowy zachowuje się o wiele lepiej od estymatora połówkowego przy zastosowaniu obu technik redukcji wariancji.
- Jeśli chodzi o estymatory punktowe, to drugi jest o wiele bardziej uniwersalny. Przy braku użytych technik pomocniczych lub zastosowaniu tylko jednej, jego wartość już dla bardzo niewielkich siatek jest dość zbliżona do prawdziwej ceny. Spowodowane jest to faktem przytoczonym już w poprzednim przykładzie. Mianowicie na etapie konstrukcji obciążenia obu składowych estymatorów znoszą się wzajemnie. Należy jednak zauważyć, że charakteryzuje się on wyższym błędem standardowym niż pierwszy estymator punktowy. Innym problemem jest dobór optymalnego γ . Nie będę tutaj podejmował szczegółowo tej kwestii, choć widać, że w przypadku pierwszego estymatora punktowego wybór tego parametru jest nietrafiony.

4.3 Opcja kupna z maksimum aktywów

Na tym przykładzie postaramy dokładnie zbadać wpływ funkcji kontrolującej na poprawę efektywności estymacji. Jako funkcję kontrolującą użyjemy opcji waniliowej na najdroższą w danym momencie akcję. Nie jest to na pewno najefektywniejsza kontrola wariancji. Niemniej jednak warto ją zastosować, aby móc się przekonać o efektach płynących z trochę słabszej kontroli niż miało to miejsce w poprzednim przykładzie.

Funkcja wypłaty opcji kupna na maksimum z n aktywów, ma postać:

$$\max\{0, \max_{i=1,\dots,n} S_t^i - K\}.$$

Zbadamy dwie opcje, różniące się nieznacznie, bo tylko cenami akcji na jakie opiewają. Postaramy się dostrzec różnicę w wynikach dla obu przypadków. Tym razem przyjrzymy się estymatorom punktowym oraz przedziałom ufności. Opcje mają następujące parametry:

- ilość akcji - $n = 3$.
- początkowa cena akcji
 1. $S_0^1 = 90, S_t^2 = 90, S_t^3 = 90$.
 2. $S_0^1 = 60, S_t^2 = 80, S_t^3 = 100$.
- odchylenie standardowe akcji - $\sigma_k = 20\%, k = 1, 2, 3$.
- stopa wolna od ryzyka - $r = 2\%$.
- cena realizacji - $K = 100$.
- czas trwania opcji - $T = 1$ rok.

Dodatkowo do wyceny używamy następujących narzędzi:

- ilość siatek - $N = 15$.
- ilość momentów wykonania - $d = 6$.
- wielkość siatki - $b = 512$.

Mimo, że na pierwszy rzut oka opcje różnią się tylko początkowymi cenami akcji, to różnica w wycenie przy zastosowaniu kontroli wariancji jest duża. W wypadku pierwszej opcji kontrola przez aktywo w danym momencie najdroższe bywa czasem zawodne, bo ceny akcji będą się nawzajem przeplatać. Dlatego

kontrola będzie w wielu momentach nieefektywana. W drugim przypadku natomiast trzecia akcja powinna zazwyczaj być najdroższa. Skutkiem tego jest to, że wycena tej opcji będzie bardzo zbliżona do wyceny zwykłej waniliowej opcji, a to jest stosunkowo łatwy problem.

Ponieważ mamy doczynienia z opcją kupna, to cena amerykańskiej i europejskiej opcji powinny być równe. Do wyznaczenia ceny europejskiej opcji kupna stosujemy metodę Monte Carlo z kontrolą wariancji oraz użyciem 10 milionów symulacji. Metoda, zastosowana do pierwszej opcji, dała wynik 10,57, przy błędzie standardowym równym 0,003, natomiast cena drugiej opcji wyniosła 9,88, przy błędzie standardowym 0,001.

Tabele przedstawiają zestawienie obliczonych wartości.

Wnioski:

- Przy braku kontroli wariancji przedziały ufności dla obu opcji są dosyć długie. Powoduje to, że opieranie się na takich wynikach może wprowadzić potencjalnych inwestorów w błąd. Podobnie sprawa ma się w przypadku estymatorów punktowych. Niepewne wyniki potwierdzają dość wysokie wartości błędów standardowych w obu przypadkach.
- Obserwując zmianę błędu standardowego pomiędzy przypadkiem z brakiem kontroli wariancji oraz sytuacją z zastosowaniem tej techniki, należy stwierdzić, że hipoteza postawiona przed eksperymentem była słuszna. Dla estymatora siatkowego drugiej opcji błąd standardowy zmalał ośmiokrotnie, kiedy dla pierwszej opcji tylko niespełna trzykrotnie. Podobnie sytuacja wygląda analizując zachowanie pozostałych estymatorów. Widać więc, że wybór funkcji kontrolującej ma istotny wpływ na uzyskiwane wyniki. Inną kwestią jest, że dla pewnych typów opcji bardzo łatwo wybrać funkcję kontrolującą, a dla innych nie.
- Wszystkie wygenerowane przedziały zawierają prawdziwą cenę opcji. Biorąc pod uwagę stopień obciążenia estymatorów, analizowany w poprzednich przykładach, prawdziwa cena, przy braku kontroli wariancji, znajduje się bliżej dolnego końca przedziału. Po zastosowaniu kontroli natomiast mieści się ona blisko środka.
- Estymator ścieżkowy wyznacza lepszą granicę ceny niż estymator połówkowy.
- Przy braku kontroli wariancji kierowanie się wartościami estymatorów punktowych musi być uzupełnione pewną rezerwą. Ich wartości są jak już zauważyliśmy nieco wyższe od prawdziwych. Po zastosowaniu kontroli wa-

riancji, można dość pewnie wskazać dobre przybliżenie prawdziwej ceny opcji. Nieco lepiej zachowuje się pierwszy estymator punktowy, lecz różnice w ich wartościach i błędach są tak niewielkie, że można spokojnie przyjąć dowolną z tych wartości. Zauważmy jeszcze, że błąd standardowy dla drugiej opcji jest wyraźnie niższy niż dla pierwszej, co również potwierdza postawioną wcześniej hipotezę.

b	Przedział ufności		Błąd standardowy		
	Połówkowy	Ścieżkowy	Siatkowy	Połówkowy	Ścieżkowy
Pierwsza opcja - 10,57 (0,003)					
Brak kontroli wariancji					
512	[9,322 - 12,295]	[10,008 - 12,295]	0,087	0,16	0,115
Kontrola wariancji					
512	[10,275 - 10,648]	[10,485 - 10,648]	0,037	0,056	0,07
Druga opcja - 9,88 (0,001)					
Brak kontroli wariancji					
512	[9,033 - 11,527]	[9,283 - 11,527]	0,147	0,135	0,14
Kontrola wariancji					
512	[9,792 - 9,986]	[9,789 - 9,986]	0,018	0,033	0,029

Tabela 2. *Przedziały ufności dla cen opcji opisanych powyżej oraz błędy standardowe estymatorów. Lewy koniec przedziału bazuje na estymatorze o nazwie takiej jak kolumna, a prawy zawsze na estymatorze siatkowym.*

b	Wartość estymatorów punktowych		Błąd standardowy estymatorów	
	Punktowy 1	Punktowy 2	Punktowy 1	Punktowy 2
Pierwsza opcja - 10,57 (0,003)				
Brak kontroli wariancji				
512	11,18	10,836	0,069	0,142
Kontrola wariancji				
512	10,6	10,49	0,043	0,045
Druga opcja - 9,88 (0,001)				
Brak kontroli wariancji				
512	10,398	10,266	0,107	0,114
Kontrola wariancji				
512	9,899	9,792	0,02	0,029

Tabela 3. *Estymatory punktowe dla cen opcji opisanych powyżej oraz ich błędy standardowe.*

4.4 Opcja sprzedaży ze średnią arytmetyczną

Zarówno dla europejskiej jak i amerykańskiej opcji ze średnią arytmetyczną nie istnieją wzory analityczne pozwalające wycenić ich wartość. W odróżnieniu od poprzednich przykładów jest to pierwszy problem, dla którego warto szukać nowego sposobu wyceny, gdyż będzie on miał rzeczywiste zastosowanie. Naszym zadaniem będzie wycenienie amerykańskiej opcji tego typu na pięć akcji. Funkcja wypłaty dla opcji ze średnią arytmetyczną na n aktywów ma postać:

$$\max\{0, K - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_t^k\}.$$

W tym przypadku naturalne wydaje się przyjęcie jako funkcji kontrolującej europejskiej opcji ze średnią geometryczną. Bazując na poprzednich przykładach oraz uzyskanych na drodze symulacji przedziałach ufności i estymatorach punktowych, postaramy się wyznaczyć dobre przybliżenie prawdziwej wartości tej opcji.

Badana opcja:

- ilość akcji - $n = 5$.
- początkowa cena akcji - $S_0^k = 100$, $k = 1, \dots, 5$.
- odchylenie standardowe akcji - $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 30\%$, $\sigma_3 = 40\%$, $\sigma_4 = 50\%$, $\sigma_5 = 60\%$.
- stopa wolna od ryzyka - $r = 5\%$.
- cena realizacji - $K = 100$.
- czas trwania opcji - $T = 2$ lata.

Dodatkowo do wyceny używamy następujących narzędzi:

- ilość siatek - $N = 15$.
- ilość momentów wykonania - $d = 6$.
- wielkości siatek - $b = 64, 128, 256, 512$.

Tabele przedstawiają zestawienie obliczonych wartości. Cena europejskiej opcji o takiej samej funkcji wypłaty, uzyskana na drodze aproksymacji metodą Monte Carlo, wynosi 6,45 przy błędzie standardowym 0,001. Nie należy się tą ceną sugerować zbyt, ale warto mieć ją również na uwadze.

b	Przedział ufności		Błąd standardowy		
	Półówkowy	Ścieżkowy	Siatkowy	Półówkowy	Ścieżkowy
64	[7,229 - 8,573]	[7,181 - 8,573]	0,075	0,167	0,111
128	[7,421 - 8,299]	[7,141 - 8,299]	0,066	0,103	0,111
256	[7,431 - 7,995]	[7,267 - 7,995]	0,04	0,063	0,079
512	[7,414 - 7,786]	[7,233 - 7,786]	0,018	0,025	0,068

Tabela 4. Przedziały ufności dla ceny opcji opisanej powyżej oraz błędy standardowe estymatorów w zależności od wielkości siatki. Lewy koniec przedziału bazuje na estymatorze o nazwie takiej jak kolumna, a prawy zawsze na estymatorze siatkowym.

b	Wartość estymatorów punktowych		Błąd standardowy estymatorów	
	Punktowy 1	Punktowy 2	Punktowy 1	Punktowy 2
64	7,913	8,392	0,066	0,079
128	7,765	7,856	0,067	0,093
256	7,67	7,812	0,048	0,068
512	7,558	7,74	0,032	0,027

Tabela 5. Estymatory punktowe dla ceny opcji opisanej powyżej oraz błędy standardowe estymatorów w zależności od wielkości siatki.

Ocena:

- Przeglądając się estymatorom punktowym wyraźnie widać ich obciążenie górne, które w miarę wzrostu b jest stopniowo niwelowane. Błąd standardowy dla $b = 512$ jest jeszcze dość wysoki w porównaniu z błędami obserwowanymi w poprzednich przykładach, więc można przypuszczać, że szacowana cena opcji będzie trochę niższa niż 7,56 (wartość uzyskana z estymacji pierwszym estymatorem punktowym).
- Obserwując przedziały ufności można dojść do podobnego wniosku. Przy stałej wartości lewych krańców, obserwujemy stopniowe obniżanie się wartości prawego krańca. Błąd standardowy wskazuje na niezbyt pewną wartość prawego końca. Uwaga tyczy się w nieco mniejszym stopniu lewych końców.
- Biorąc pod uwagę fakt, że w poprzednich przykładach pierwszy estymator punktowy oraz przedział ufności z estymatorem ścieżkowym lepiej przybliżały prawdziwe wartości opcji ale również to, że lewy koniec przedziału z estymatorem półówkowym nie przekraczał prawdziwej ceny opcji, można szacować, że opcja kosztuje około 7,5.

4.5 Podsumowanie

Z zaprezentowanych przykładów jasno wynika, że metoda siatki może być stosowana w praktyce. Metoda dostarcza wielu narzędzi służących do oszacowania właściwej ceny. Dlatego wybór prawdziwej wartości opcji powinien być poprzedzony gruntowną analizą wszystkich uzyskanych wyników.

Z powodu dużej złożoności obliczeniowej oraz wysokiego stopnia obciążenia estymatorów (głównie siatkowego), należy używać niewielkich siatek oraz stosować dostępne metody redukcji wariancji. Wyniki uzyskane w ten sposób są bardzo zbliżone do wzorcowych.

Na przykładach mogliśmy się przekonać, że przedział generowany z użyciem estymatora ścieżkowego zazwyczaj lepiej przybliża prawdziwą cenę. Niemniej jednak estymator połówkowy prawdopodobnie też jest estymatorem dolnym, a wyniki uzyskane przy jego użyciu są dość dobre. Oba estymatory punktowe są zbieżne od góry do właściwej wartości. Z powodu wyższości estymatora ścieżkowego nad połówkowym, pierwszy estymator punktowy daje nieco lepsze wyniki.

Należy jednak pamiętać, że precyzyjne wyniki obarczone niewielkim błędem, można jedynie uzyskać, stosując odpowiednie metody redukcji wariancji. Jeśli zdecydujemy się na kontrolę wariancji, należy dobrze zastanowić się nad wyborem funkcji kontrolującej.

Bibliografia

- [1] A. N. Avramidis, P. Hyden, *Efficiency improvements for pricing American options with a stochastic mesh*, Winter Simulation Conference 1999, 344-350.
- [2] P. P. Boyle, A. W. Kolkiewicz, K. S. Tan, *Improved Simulation Methods for Pricing High-Dimensional American Derivatives*, Mathematics and Computers in Simulation, volume 62, 3-6, 2003, 315-322.
- [3] P. P. Boyle, A. W. Kolkiewicz, K. S. Tan, *Pricing American Derivatives Using Simulation: A Biased Low Approach*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [4] M. Broadie P. Glasserman, *A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options*, Journal of Computational Finance, vol. 7, 35-72, 2004.
- [5] M. Broadie P. Glasserman, *Pricing American-style securities using simulation*, Journal of Economic Dynamics and Control 21 (1997) 1323-1352.
- [6] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [7] M. B. Haugh, L. Kogan, *Pricing American Options: A Duality Approach*, Operations Research, 2001.
- [8] J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, *Matematyka finansowa, Instrumenty pochodne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006.
- [9] M. Karaś, *Wykład z analizy stochastycznej z zastosowaniami w finansach na Uniwersytecie Jagiellońskim*. 2008.
- [10] F. A. Longstaff, E. S. Schwartz, *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, The Review of Financial Studies, 14 (2001), 113-147.
- [11] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.