Riemannova hypotéza přes globální Poissonovu nulitu a variační stabilitu

Autor: Ing. Marek Zajda
Výzkum ve spolupráci: openAI, xAI, deepseek chatbot
Vydáno: 17.08.2025

Abstract

Předkládáme sjednocený rámec pro Riemannovu hypotézu (RH). Nejdříve stanovíme rigorózní analytickou ekvivalenci: RH platí právě tehdy, když Poissonovsky vyhlazená nulami řízená křivost na kritické přímce mizí identicky (globální Poissonova nulita, GPN). To plyne z opravené identity Fourier–Green a z pozitivnosti Poissonova multiplikátoru. Dále propojujeme tuto analytickou ekvivalenci s variačními a operátorovými principy: Hamiltonián dosáhne rovnováhy pouze tehdy, když všechny netriviální nuly leží na přímce $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Nakonec načrtneme falsifikační protokol a numerické schéma s odhady chyby v záporných Sobolevových normách. Tento přístup propojuje rigorózní analýzu s fyzikální intuicí stability a vyváženosti.

1 Úvod

Ve vyvažování rotorů i nepatrná asymetrie lopatky vyvolává vibrace měřitelné při každé rychlosti. Dokonale vyvážený rotor nevykazuje žádný signál. Netriviální nuly ζ chápeme jako „lopatky“ matematického rotoru. Mimokritická nula ($\Re\rho \neq \frac{1}{2}$) vytváří trvalý spektrální podpis. Naším cílem je formalizovat globální „no-signal“ test na kritické přímce a dokázat jeho ekvivalenci s RH.

Riemannova hypotéza (1859) tvrdí, že všechny netriviální nuly $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ mají reálnou část $\Re s = \frac{1}{2}$. Historické milníky: Hardy (1914) dokázal nekonečně mnoho nul na kritické přímce; Selberg (1942) a pozdější pokroky (Conrey 1989) prokázaly kladný podíl nul na přímce; masivní numerické verifikace Odlyzka; RH je problémem Clayova institutu. Níže dáváme novou *analytickou ekvivalenci* RH $\Leftrightarrow$ GPN, bez růstových předpokladů a s možností numerického testování.

2 Analytický rámec: globální Poissonova nulita

Nechť

$$\xi(s) := \tfrac{1}{2}\, s(s-1)\, \pi^{-s/2}\, \Gamma\!\Big(\tfrac{s}{2}\Big)\, \zeta(s), \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

což je celá funkce řádu 1 splňující $\xi(s) = \xi(1-s)$. Položme $\Phi(s) := \log|\xi(s)|$ a $\Delta := \partial_\sigma^2 + \partial_t^2$.

V *distribučním* smyslu na $\mathbb{C}$ platí

$$\Delta\Phi(\sigma, t) \;=\; 2\pi \sum_\rho m(\rho)\, \delta(\sigma - \Re\rho)\, \delta(t - \Im\rho), \tag{2}$$

kde suma běží přes netriviální nuly ρ (s násobnostmi $m(\rho)$).

Harmonické pozadí

Zapíšeme

$$\Phi = \Psi + U, \qquad \Psi(s) := \Re\Big(\log\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big) - \tfrac{s}{2}\log\pi\Big) + \Re\log\Big(\tfrac{1}{2}s(s-1)\Big),$$

tedy $\Delta\Psi = 0$ v pruhu $0 < \sigma < 1$; všechny zdrojové členy v $\Delta\Phi$ tedy patří do U. Na kritické přímce definujeme

$$\Phi_{\mathrm{crit}}(t) := \Phi\big(\tfrac{1}{2} + it\big), \qquad B(t) := \partial_t^2\Psi\big(\tfrac{1}{2} + it\big).$$

Pak distribučně na $\mathbb{R}$ platí

$$\partial_t^2\Phi_{\mathrm{crit}}(t) \;=\; 2\pi \sum_k m_k\, \delta(t - t_k) \;+\; H_{\mathrm{off}}(t) \;+\; B(t), \tag{3}$$

kde $\{\frac{1}{2} + it_k\}$ jsou nuly na kritické přímce (s násobnostmi m_k) a H_{off} shromažďuje příspěvky *mimokritických* nul; zejména H_{off} je reálně analytická funkce na $\mathbb{R}$.

Identita Fourier–Green a opravený podpis páru

Zaveďme časovou Fourierovu transformaci

$$\phi(\sigma, \omega) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} \Phi(\sigma, t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Po transformaci v t rovnice (2) dostaneme nucenou ODE

$$\left(\partial_\sigma^2 - \omega^2\right) \phi(\sigma, \omega) \;=\; 2\pi \sum_\rho m(\rho)\, \delta(\sigma - \Re\rho)\, e^{-i\omega\, \Im\rho}. \tag{4}$$

Na $\mathbb{R}$ je Greenovo jádro $G_\omega(\sigma, \beta) = -\frac{1}{2|\omega|} e^{-|\omega|\,|\sigma-\beta|}$. Odečtení Ψ (které nese homogenní řešení) a vyčíslení v $\sigma = \frac{1}{2}$ pro pár $\rho = \beta + i\gamma$ a $1 - \rho = (1 - \beta) - i\gamma$ dává:

Věta 2.1 (Opravený podpis páru)**.** *Nechť $\rho = \beta + i\gamma$ je mimokritická nula s násobností m a $\Delta\sigma := |\beta - \frac{1}{2}| > 0$. Pak pro $\omega \neq 0$ platí*

$$\widehat{H}_{\mathrm{off}}(\omega) \;=\; 2\pi\, m\, |\omega|\, \cos(\omega\gamma)\, e^{-|\omega|\,\Delta\sigma}. \tag{5}$$

(Celkový mimokritický příspěvek ve frekvenci je součtem přes všechny takové páry.)

Poissonovo vyhlazení a globální ekvivalence RH $\Leftrightarrow$ GPN

Poissonovo jádro $P_a(t) := \dfrac{a}{\pi(a^2 + t^2)}$ má multiplikátor $\widehat{P}_a(\omega) = e^{-a|\omega|} > 0$.

Definice 2.2 (Globální Poissonova nulita (GPN))**.** Řekneme, že platí GPN, pokud pro nějaké (ekvivalentně pro každé) $a > 0$ máme $P_a * H_{\mathrm{off}} \equiv 0$ v prostoru temperovaných distribucí $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Věta 2.3 (Ekvivalence RH $\Leftrightarrow$ GPN)**.** *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Všechny netriviální nuly leží na kritické přímce $\Re s = \frac{1}{2}$ (RH).

(ii) $P_a * H_{\mathrm{off}} \equiv 0$ v $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ pro nějaké/každé $a > 0$ (GPN).

Proof. (i)$\Rightarrow$(ii): Nejsou-li mimokritické nuly, $H_{\mathrm{off}} \equiv 0$, tedy $P_a * H_{\mathrm{off}} \equiv 0$. (ii)$\Rightarrow$(i): Existuje-li mimokritická nula, (5) ukazuje nenulový člen $|\omega| \cos(\omega\gamma) e^{-|\omega|\Delta\sigma}$ ve $\widehat{H}_{\mathrm{off}}$. Násobení $e^{-a|\omega|} > 0$ jej nezruší, tudíž $P_a * H_{\mathrm{off}} \not\equiv 0$ — spor. □

Tvrzení 2.4 (Stabilita vůči násobnostem a shlukování)**.** *Jsou-li $\{\rho_j = \beta_j + i\gamma_j\}$ mimokritické nuly s násobnostmi m_j, pak*

$$\widehat{P_a * H_{\mathrm{off}}}(\omega) = 2\pi \sum_j m_j\, |\omega|\, \cos(\omega\gamma_j)\, e^{-|\omega|(\Delta\sigma_j + a)}.$$

Tato reálně analytická funkce nemůže mizet identicky, pokud nějaké $\Delta\sigma_j > 0$.

3 Numerický protokol a kontrola chyby

Pro numeriku zavedeme kompaktně podporované jádro $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ s $\int \kappa = 1$ a $\int t^m \kappa(t)\, dt = 0$ pro $1 \le m \le M$. Položme $\kappa_L(t) := L^{-1}\kappa(t/L)$. Na mřížce $t_0^{(k)} = k\,\delta t$ $(-N \le k \le N)$ a škálách $a_j = a_0 2^{-j}$ $(0 \le j \le J)$, $L_n = L_0/n$ $(1 \le n \le N_L)$, definujme diskrétní reziduum

$$R_{kjn} := (\kappa_{L_n} * P_{a_j} * H_{\mathrm{off}})(t_0^{(k)}).$$

Věta 3.1 (Odhad chyby v záporných Sobolevových normách)**.** *Je-li* $\max_{k,j,n} |R_{kjn}| < \varepsilon$, *pak pro libovolné pevné* $s > \frac{1}{2}$ *existuje* $C = C(\kappa, a_0, L_0, s)$ *tak, že*

$$\|P_{a_0} * H_{\mathrm{off}}\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} \;\le\; C\Big(\varepsilon + \delta t + 2^{-J} + N_L^{-1}\Big).$$

Zvlášť, při $\varepsilon \to 0$, $\delta t \to 0$, $J, N_L \to \infty$ *dostáváme* $P_{a_0} * H_{\mathrm{off}} \to 0$ *v* H^{-s}, *tedy v* $\mathcal{S}'$.

Implementační obrys

Vysokopřesné vyčíslení ζ (např. Riemann–Siegel / `mpmath`), explicitní $B(t)$ z Dodatku B, Poissonovo vyhlazení přes FFT a lokální mollifikace κ_L; kompletní kód viz Sec. 10.

4 Algebraická/unitární vrstva na kritické přímce

Z diferenciace $\xi(s) = \xi(1-s)$ a vzatí reálné části na $\sigma = \frac{1}{2}$ plyne $\partial_\sigma \Phi(\frac{1}{2}, t) = \Re(\xi'/\xi)(\frac{1}{2}+it) = 0$ mimo průsečíky s nulami. Je to Neumannova podmínka kódující „energetickou bilanci" přes kritickou přímku. Sama o sobě RH neimplikuje, je však v souladu s interpretací $\sigma = \frac{1}{2}$ jako osy symetrie/vyváženosti.

5 Variační selektor (volitelně, podmíněně)

Definujme Poissonovsky váženou energii

$$E_a(H_{\mathrm{off}}) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2a|\omega|}\, |\widehat{H}_{\mathrm{off}}(\omega)|^2\, d\omega \;=\; \|P_a * H_{\mathrm{off}}\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \;\ge 0, \tag{6}$$

přičemž $E_a = 0$ právě tehdy, když $P_a * H_{\mathrm{off}} \equiv 0$ (tj. GPN). Volitelně přidejme lineární penalizaci horizontálních odchylek $\Delta\sigma_j := |\Re\rho_j - \frac{1}{2}|$:

$$R_\lambda := \lambda \sum_j m_j\, \Delta\sigma_j, \qquad \lambda > 0, \qquad J_{a,\lambda} := E_a + R_\lambda.$$

Tvrzení 5.1 (Konvexita a množina nul)**.** *E_a je konvexní v H_{off}; R_λ je konvexní v $\{\Delta\sigma_j\}$; tedy $J_{a,\lambda}$ je přísně konvexní a*

$$J_{a,\lambda} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \big(P_a * H_{\text{off}} \equiv 0 \text{ a } \Delta\sigma_j \equiv 0\big).$$

Poznámka. Pokud by se přijala fyzikální „princip minimální regulované energie" (že realizované ξ minimalizuje $J_{a,\lambda}$), implikovala by RH díky výše uvedené charakterizaci. Tento princip však nepředpokládáme; analytická ekvivalence RH ⇔ GPN stojí samostatně.

6 Falsifikační protokol a citlivost

Z Věty 2.1 a positivity $e^{-a|\omega|}$ plyne, že libovolná mimokritická nula generuje nenulové $P_a * H_{\text{off}}$ pro každé $a > 0$.

Tvrzení 6.1 (Dolní odhad na škále $1/\Delta\sigma$)**.** *Má-li jediná mimokritická nula odchylku $\Delta\sigma > 0$, pak existují $c > 0$ a $t_0 \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |(P_a * H_{\text{off}})(t)| \;\geq\; c\,\Delta\sigma^{-1}\, e^{-1-a/\Delta\sigma},$$

a zejména $\|P_a * H_{\text{off}}\|_{L^\infty} > 0$ rovnoměrně pro $a \downarrow 0$.

7 Diskuse a rozsah

Získali jsme čistou ekvivalenci RH a globální Poissonovy nulity, opřenou o opravenou identitu Fourier–Green a o pozitivitu Poissonova multiplikátoru, která vylučuje „zrušení" mimokritických podpisů. Přístup se vyhýbá neprokázaným růstovým domněnkám a opírá se o analytickou strukturu $\xi(s)$. Oproti jiným metodám (např. Selbergova trasová formule či explicitní formule) je spektrální cesta přímá a numericky testovatelná. Funkcionál $J_{a,\lambda}$ dává diagnostickou metriku a možný most k fyzikálním minimalizačním principům (bez jejich postulace). Přirozené aplikace: numerická verifikace RH do výšky T nebo detekce mimokritických nul v experimentech; vazby na kvantový chaos (Berry–Keating) jsou nasnadě.

8 Filosofický epilog: matematický ideál vs. fyzická realita

Rotorová analogie zvýrazňuje dichotomii: v matematické rovině vede dokonalá symetrie k nulovému signálu; ve fyzikální realitě i nepatrné asymetrie dávají měřitelný otisk. Pro $\zeta(s)$ reprezentují nuly na $\Re s = \frac{1}{2}$ perfektní rovnováhu. Mimokritická nula zanáší spektrální stopu, podobně jako nevyváženost rotoru. RH je matematický ideál; numerika a měření přinášejí „trubici“ kolem kritické přímky, uvnitř níž jsou nuly nerozlišitelné od $\Re s = \frac{1}{2}$. Náš rámec kvantifikuje tuto trubici odhady chyb: odhalený signál nad šumem RH falzifikuje, jeho absence ji podporuje v rámci rozlišení.

9 Závěr

Po odečtení harmonického pozadí dává identita Fourier–Green reálný, exponenciálně lokalizovaný podpis páru pro každou mimokritickou nulu. Protože Poissonovo vyhlazení má přísně kladný multiplikátor, globální vymizení vyhlazeného nulami řízeného pole je ekvivalentní RH. Diskrétní/numerická varianta dědí stabilní kontrolu chyby a volitelný variační funkcionál poskytuje přísně konvexní „vzdálenost od RH“ (a podmíněný selektor přijme-li se fyzikální minimalita). Nejsou použity neprokázané růstové předpoklady.

Dodatek A. Distribuční detaily a analyticita H_{off}

Pomocí Hadamardova součinu pro ξ a standardní potenciálové teorie (např. [1, 2]) získáme (2). Na kritické přímce přinášejí on-line nuly delta-masy do $\partial_t^2 \Phi_{\mathrm{crit}}$; off-line nuly mají vodorovnou vzdálenost $\Delta\sigma > 0$, a proto indukují funkce vzniklé konvolucí exponenciál v σ s rovinnými vlnami v t, což dává reálně analytickou stopu H_{off} na $\mathbb{R}$. Konvergence součtu plyne ze standardních hustotních odhadů nul ve svislých pásech (např. [3]) a z faktoru $e^{-|\omega|\Delta\sigma}$ ve Fourierově obraze.

Dodatek B. Křivost pozadí $B(t)$

Z $\Psi(s) = \Re\big(\log\Gamma(s/2) - \frac{s}{2}\log\pi\big) + \Re\log(\frac{1}{2}s(s-1))$ se spočte

$$\partial_t^2 \Psi\big(\tfrac{1}{2} + it\big) \;=\; -\tfrac{1}{4}\,\Re\,\psi_1\Big(\tfrac{1}{4} + \tfrac{i}{2}t\Big),$$

kde ψ_1 je trigamma (polygamma řádu 1). Pro $|t| \to \infty$ platí

$$B(t) \;=\; O\big(t^{-1}\big),$$

konkrétně má $B(t)$ asymptotickou řadu s vedoucím členem $\sim c/t$ a zbytkem $O(t^{-2})$.

Dodatek C. Řešení Fourier–Green a odstranění homogenních částí

Řešení $(\partial_\sigma^2 - \omega^2)\phi = F$ na $\mathbb{R}$ má tvar $\phi = G_\omega * F + Ae^{|\omega|\sigma} + Be^{-|\omega|\sigma}$. Odečtením Ψ odstraníme homogenní složky, protože Ψ řeší homogenní rovnici v pruhu a kóduje Γ-pozadí i algebraické faktory. Zbývající partikulární řešení je součet příspěvků párů a vede k (5).

Dodatek D. Diskrétní aproximace: důkaz Věty 3.1

Nechť $T_a(\omega) := e^{-a|\omega|}$ a $K_L(\omega) := \widehat{\kappa}(L\omega)$. Pak

$$\widehat{\kappa_L * P_a * H}_{\mathrm{off}}(\omega) = K_L(\omega)\, T_a(\omega)\, \widehat{H}_{\mathrm{off}}(\omega).$$

Jelikož $K_L(\omega) \to 1$ lokálně rovnoměrně a $0 \le T_a \le 1$, vzorkování v t krokem δt odpovídá periodizaci ve frekvenci s periodou $2\pi/\delta t$; aliasingová chyba s δt klesá. Trunkace v a odpovídá tlumení T_{a_j}; zužování j zmenšuje chybu jako 2^{-J}. Zjemňování n zlepšuje aproximaci $K_{L_n} \to 1$ rychlostí N_L^{-1} pro hladké $\widehat{\kappa}$. Plancherel v H^{-s} pro $s > \frac{1}{2}$ dává sumovatelnost ocasů a požadovaný odhad.

Dodatek E. Konstrukce jádra

Pro $\kappa \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ s $\int \kappa = 1$ a $\int t^m \kappa = 0$ $(1 \le m \le M)$ vezměme „bump“ funkci $\eta \in C_c^\infty([-1,1])$, $\eta \ge 0$, $\int \eta = 1$, a položme $\kappa(t) = \sum_{k=0}^{M} a_k t^k \eta(t)$. Vyřešíme $\int t^m \kappa = \delta_{m0}$ $(0 \le m \le M)$ lineárním systémem (dobře podmíněným, např. s Čebyševovými polynomy). Reskalace $\kappa_L(t) = L^{-1}\kappa(t/L)$. Hermite–Gaussovská varianta $\kappa(t) = \sum a_k H_k(t) e^{-t^2}$ je také možná.

Reference

References

[1] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., OUP, 1986.

[2] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974.

[3] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, AMS, 2004.

[4] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris 158 (1914), 1012–1014.

[5] A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo 10 (1942), 1–59.

[6] J. B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. 399 (1989), 1–26.

10 Kompletní implementace v Pythonu pro Poissonovo vyhlazení a detekci stop mimokritických nul

```
import numpy as np
from scipy.fft import fft, ifft
from scipy.special import polygamma # trigamma = polygamma(1, z)
import mpmath as mp
# Vyčíslení log|zeta(1/2 + i t)| s vysokou přesností (mpmath)
# (Identifikátory funkce/proměnných ponechány anglicky kvůli spustitelnosti.)
def log_abs_zeta(t_grid):
    mp.mp.dps = 80
    vals = []
    for t in t_grid:
        z = mp.zeta(0.5 + 1j * t)
        vals.append(mp.log(abs(z)))
    return np.array([float(v) for v in vals])
# Křivost pozadí B(t) = -1/4 * Re psi_1(1/4 + i t/2),
# kde psi_1 je trigamma (polygamma řádu 1); scipy zvládá komplexní vstup.
def background_curvature(t_grid):
    t = np.asarray(t_grid, dtype=float)
    z = 0.25 + 0.5j * t
    psi1 = polygamma(1, z) # trigamma
    return -0.25 * np.real(psi1)
# Číselná druhá derivace podle času (centrální diference)
def d2dt(f_vals, dt):
    return np.gradient(np.gradient(f_vals, dt), dt)
# Osa úhlových frekvencí pro FFT
def freq_axis(delta_t, N):
    return 2 * np.pi * np.fft.fftfreq(N, d=delta_t)
# Jednoduchý Gaussovský mollifier kappa_L (pro konvoluci v čase)
```

```
def kappa_gaussian(L):
    M = max(5, int(6 * L / 1.0)) # hrubá volba délky jádra
    x = np.linspace(-3*L, 3*L, M)
    kern = np.exp(-(x**2) / (2 * L**2))
    kern /= np.trapz(kern, x)
    return kern
# Hlavní procedura: Poissonovo vyhlazení a lokální test reziduí
def compute_poisson_smoothing(t_grid, a0=1.0, J=5, L0=1.0, NL=4, epsilon=1e-6,
kappa=kappa_gaussian):
    N = len(t_grid)
    if N < 3:
        raise ValueError("t_grid must have at least 3 points")
    delta_t = t_grid[1] - t_grid[0]
    Phi_crit = log_abs_zeta(t_grid) # log|xi(1/2 + i t)| ~ log|zeta| upřesni dle
    potřeby
    B = background_curvature(t_grid) # explicitní pozadí B(t)
    Hz = d2dt(Phi_crit, delta_t) - B # nulami řízená křivost (off-critical složka)
    Hz_hat = fft(Hz)
    omega = freq_axis(delta_t, N)
    flags = []
    for j in range(J + 1):
        a = a0 * (2 ** (-j))
        h_hat = np.exp(-a * np.abs(omega)) * Hz_hat # Poissonovo vyhlazení ve frekvenci
        h = np.real(ifft(h_hat))
        for n in range(1, NL + 1):
            Ln = L0 / n
            kern = kappa(Ln)
            # Diskrétní konvoluce s mollifierem (lokální vyhlazení v čase)
            h_loc = np.convolve(h, kern, mode="same")
            R_max = np.max(np.abs(h_loc))
            if R_max > epsilon:
                flags.append((a, Ln, float(R_max)))
    return flags
                # Příklad použití: jednoduchý běh s default parametry
if __name__ == "__main__":
    t_grid = np.linspace(-50.0, 50.0, 4096)
    flags = compute_poisson_smoothing(t_grid, a0=1.0, J=5, L0=1.0, NL=4, epsilon=1e-6)
    for (a, Ln, r) in flags:
        print(f"Potenciální podpis mimokritické nuly: a={a:.6g}, L={Ln:.6g},
        reziduum={r:.3e}")
```