MAT1110: Obligatorisk oppgave 2, V-2015

Innlevering: Innleveringsfristen er torsdag 30. april 2015, kl.14.30, og innleveringsstedet er 7. etasje i Niels Nenrik Abels hus. Oppgaven skal leveres med en offisiell forside som du finner her:

http://www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/obligforside.pdf

Se for øvrig

http://www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/

for nærmer informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart – besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%.

Alle delspørsmål (punktene 1a), 1b) osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt du har kommet frem til. Er det et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatet derfra i resten av besvarelsen. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har vist at de har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg og gjenspeile din forståelse av stoffet. Alle svar skal begrunnes. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse. Kopiering av andres besvarelser vil bli behandlet som en juksesak og kan få alvorlige konsekvenser.

Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB, må du forklare hvilke kommandoer og rutiner du har brukt, og du må også gjengi MATLABs respons. Det er anledning til å bruke Python istedenfor MATLAB i denne obligen. Du må da selv "oversette" MATLAB-terminologien i oppgaveteksten til tilsvarende Python-terminologi. Vi gjør oppmerksom på at foreleser og gruppelærere bare kan gi begrenset hjelp med Python-spørsmål.

Oppgavesettet handler om temaer og begreper som vi ennå ikke er kommet til i forelesningene, men som vi skal se nærmere på i kapittel 4 og 5. Oppgavene er imidlertid skrevet slik at du kan forstå og løse dem ut ifra det vi har gjennomgått opp til og med seksjon 4.6.

Oppgave 1: Hvis A er en $n \times n$-matrise, kalles en vektor $\mathbf{v}$ en *egenvektor* for A dersom $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og det finnes et tall λ slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Tallet λ kalles da en *egenverdi* for A. Du kan lese mer om egenvektorer og egenverdier i seksjon 4.10 og 4.11 i læreboken, men denne oppgaven er ment å være selvforklarende.

a) La $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ er egenvektorer for A. Hva er de tilhørende egenverdiene λ_1 og λ_2?

b) Vis at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor for en $n \times n$-matrise A med egenverdi λ, så er også $c\mathbf{v}$ en egenvektor med egenverdi λ for ethvert tall $c \neq 0$. Å gange en egenvektor med en konstant, gir oss ikke noen ny informasjon, og derfor regner vi gjerne $\mathbf{v}$ og $c\mathbf{v}$ som "samme" egenvektor.

MATLAB har egne kommandoer for å finne egenverdier og egenvektorer. Hvis du har lagt inn en $n \times n$-matrise A, vil kommandoen `>> [U,V]=eig(A)` returnere to matriser U og V. Søylene i U er egenvektorer til A mens tallene på diagonalen til V er de tilsvarende egenverdiene (alle andre komponenter i V vil være null). Når du bruker kommandoene ovenfor, velger alltid MATLAB egenvektorer som har lengde 1, og U inneholder så mange lineært uavhengige egenvektorer som det er mulig å finne.

c) Bruk MATLAB og kommandoene ovenfor til å finne egenvektorene og egenverdiene til matrisene i punkt a). Sammenlign svarene.

d) La $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Bruk MATLAB og kommandoene ovenfor til å finne egenvektorene og egenverdiene til A. Vis at egenvektorene danner en basis for $\mathbb{R}^3$.

e) La $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bruk MATLAB til å finne egenvektorene og egenverdiene til A. Danner egenvektorene til A en basis i dette tilfellet?

f) La $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Bruk kommandoen `>> [U,V]=eig(sym(A))` til å finne det eksakte uttrykket for egenvektorene og egenverdiene til A (denne kommandoen fungerer bare når A er tilstrekkelig enkel). Utgjør egenvektorene en basis for $\mathbb{R}^4$?

g) Gjenta punkt f) ved å bruke den numeriske kommandoen `>> [U,V]=eig(A)`, og sjekk om MATLAB nå tror at egenvektorene danner en basis for $\mathbb{R}^4$. Kommenter.

Oppgave 2: I denne oppgaven er $f : [0, \pi] \to [0, \pi]$ gitt ved $f(x) = a \sin x$, der a er et tall mellom 0 og π (denne avgrensningen garanterer at f avbilder intervallet $[0, \pi]$ inn i seg selv). Vi skal studere følger $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, der $x_1 \in [0, \pi]$ og $x_{n+1} = f(x_n)$ for $n \geq 1$.

a) Lag et MATLAB-program som regner ut følger av typen $\{x_n\}$. Programmet skal ha tre input-variable a, x, N, der a angir hvilken a-verdi vi bruker i funksjonen f, x angir verdien til det første punktet x_1 i følgen, og N angir hvor mange ledd i følgen vi regner ut. Output skal være vektoren $[x_1, x_2, \ldots, x_N]$.

b) Kjør programmet med $a = 2$, $N = 50$, og tre forskjellige, tilfeldige startverdier i intervallet $[0, \pi]$. Bruk `pi*rand` til å velge en tilfeldig verdi i $[0, \pi]$. Lag en grafisk fremstilling av kurvene. Ser du et mønster?

c) Bruk MATLAB til å plotte grafen til $f(x) = 2 \sin x$ og linjen $y = x$ i samme koordinatssystem. Hvor skjærer de to kurvene hverandre?

d) Gjenta kjøringene fra punkt b), men bruk $a = 2.5$ denne gangen. Hva ser du?

e) La $g(x) = f(f(x)) = 2.5 \sin(2.5 \sin(x))$. Bruk MATLAB til å plotte grafen til $g(x)$ og linjen $y = x$ i samme koordinatssystem. Hvor skjærer de to kurvene hverandre?

f) Gjenta kjøringene fra punkt b) nok en gang, men bruk $a = 3$ denne gangen. Hva ser du? (Det er helt greit å ikke se noe mønster i det hele tatt denne gangen!)

LYKKE TIL!