Погрешности. Численное дифф.

I. Погрешности:

$\boxed{\text{Физико-матем. модель.}}$ ошибка модели.

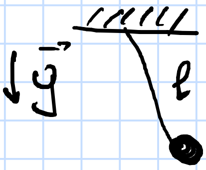
↓

$\boxed{\text{Метод решения}}$ ошибка метода

↓

$\boxed{\text{Реализация}}$ ошибки вычисления

Пример. Ошибок модели:



$$\left.\begin{array}{l} l = const \\ \mu = 0 \end{array}\right\}$$ ошибки модели.

Пример ошибок метода:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

разные методы ↓ разные ошибки.

Пр. ошибок вычисления:

1. + 1. != 2

Ошибки вычисления. Число в ЯК

- одинарная точность (часто 32 бит)
- двойная точность (часто 64 бит)
- четверная точность (часто 128 бит)

Двойная точность (64 бит)

s	f	e

знак s – 1 бит – 1 если отриц., иначе 0

мантисса f – 52 бит. – нормализованное число без 1.

экспонента e – 11 бит. – степень 2 при нормализац.

$$\text{число} = (-1)^s \cdot \{1 + f_{10} \cdot 2^{-52}\}\, 2^{e_{10} - 1023}$$

пример: $-\left(2 + \frac{1}{2^{10}}\right)$ – в память ПК

$<0 \Rightarrow s = 1.$

Нормализуем. $\left(2 + \frac{1}{2^{10}}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2^{11}}\right)$

$e^{10} - 1023 = 1.$ $e_{10} = 1024$

$-\frac{1}{2^{11}} = f \cdot 2^{-52}$ $e_2 = 1\underbrace{0\ldots0}_{\text{10 знаков.}}$

$f_{10} = 2^{41}.$

$$\underbrace{1}_{s}\,|\,\underbrace{0\,|\,1\,0\ldots0}_{f}\,|\,\underbrace{1\,0\ldots0}_{e}$$

1) При сложении 2-х чисел одинакового порядка определяется длиной мантиссы

Точность хранения нормализованного числа: $\underline{2^{-52}}$

Относительная точность хранения числа $2^{-52} \approx 10^{-16}$

Погрешность округления: $\varepsilon_{маш}$: $1 + \varepsilon_{маш} = 1$

$\varepsilon_{маш} = 2^{-52} = 10^{-16}$

2) Погрешность метода.

I.6.4.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

Ряд расходится при $|x| > 1$

Оценим ошибку

$$\ln(1+x) = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(-1)^{\ell+1} x^{\ell}}{\ell} + \ln^{(k+1)}(1+\xi)\frac{x^{k+1}}{k+1!}$$

остаточный член в форм. Лагранжа

ξ

$k!$

$$\varepsilon_{\text{метода}} \leq \frac{|x|^{k+1}}{k+1}$$

$\xi \in (0;x)$, $x > 0$

$\xi \in (x;0)$, $x < 0$

геометрич. прогрессия.

$$1+x = 2^m \cdot z, \quad z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad m \in (-\infty; 1]$$

$$y = \frac{1-z}{1+z} : y \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$$

$$(1+x) = m \ln 2 - 2\left(y + y^3/3 + \dots + \frac{y^{2k-1}}{2k-1}\right)$$

сходится при всех y

$\Downarrow$

при всей области определения x

Дома:

$$\varepsilon_{\text{мет}} \leq \frac{1/3^{2k+1}}{2k}$$

Предельная абсолютная погрешность – оценка сверху реальной погрешности

Пр. N 1.8.3

π - ? ; $a = 3.14$ => $\varepsilon_{\text{метод}} = (\pi - a) \leq \underbrace{0,0016}_{\text{предельная абсолют. погреш.}}$

II Численное дифференцирование

$f(x)$ — вычислить производную в точке x_0

$$f' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \in O(h^p) \quad x \to 0$$

$$|f(x)| \le C h^p \quad \text{в } U_\delta(0)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{1}{2} f''(x_0)\,h^2 + \dots$$

$$f' \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f'' h^2 + \dots}{h} =$$

$$= f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\, h = O(h)$$ — формула с 1-м порядком.

Пусть $f(x)$ известна в точках.

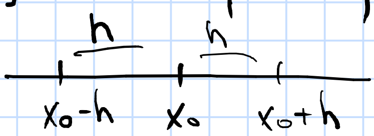
$\underbrace{\{x\}_{i=1}^{n}}_{\text{шаблон}}$ известн, $\{f(x_i)\}_{i=1}^{n}$

найти производную в x_0 $\quad f(x_0) \approx \sum_{i=1}^{N} a_i f(x_i)$

нужно найти a_i; от конкретных коэффиц. зависит ошибка метода.

Поиск $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ при помощи метода неопределенных коэф.

$$\{x_0 - h,\ x_0,\ x_0 + h\}$$



найти $f'(x_0)$

(1) $f'(x_0) \approx A f(x_0-h) + B\cdot f(x_0) + C\cdot f(x_0+h)$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)\,h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$(1) = C\left(f(x_0)+f'(x_0)h+f''(x_0)\frac{h^2}{2}\right)+Bf(x_0)+$$
$$+A\left(f(x_0)-f'(x_0)h+f''(x_0)\frac{h^2}{2}\right)+O(h^3)$$

$$(A+B+C)f(x_0)+(C-A)\{f'(x_0)+(C+A)\frac{h^2}{2}+f''(x_0)\}+O(h^3)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ C-A=\frac{1}{h} \end{cases}$$ т.к. $f(x_0)$ нет в формуле. ф-ла будет работать при таких условиях!

$$+\quad C+A=0 \Rightarrow \begin{cases} A=-1/2h \\ B=0 \\ C=1/2h \end{cases}$$

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$ – центр разности

Порядок метода:

$$f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+O(h^3)-$$
$$-\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+O(h^3)=\frac{f'(x_0)h+O(h^3)}{h}$$
$$<\underline{f'(x_0)+O(h^2)}$$

III Погрешность метода VS Погрешность вычислений.

$\mathcal{E}_{маш}$ VS $\mathcal{E}_{метод}$.

Оценим $\mathcal{E}_{маш}$ и $\mathcal{E}$ метода для центральной разности.

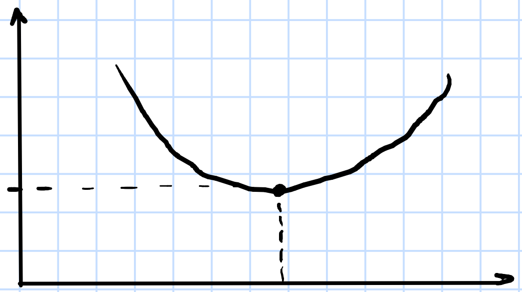
$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Ошибка вычислений : $2 \underset{\text{относит.}}{\varepsilon_{маш}} \cdot f(x_0)/2h \sim$

$\sim \boxed{\dfrac{\varepsilon_{маш}\, f(x_0)}{h}} = \dfrac{E}{h}$

Ошибка метода : $\dfrac{f'''(x_0)}{6} h^2 \sim Mh^2$

Полная ошибка: $\dfrac{E}{h} + Mh^2$

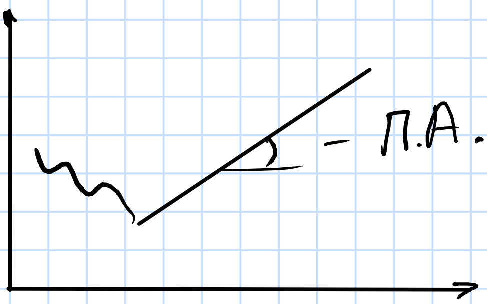


шаг.

Порядок Аппроксимации = 3. (П.А.)

$err = O(h^3) \sim (h^3)$

$\ln(err) = 3 \ln h$



Семинар 2.

Интерполяция

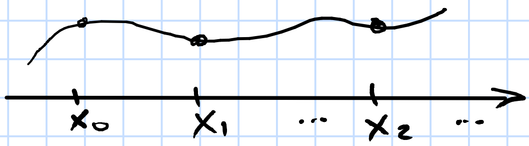
Основа численного интегрир.

I. Задача интерполяции.

Пусть есть функция $f : D \subset \mathbb{R}$

$\{x_i\}_{i=0}^n$ — возрастающий набор точек $\{x_i\}_{i=0}^n \subset D$ — узлы интерполяции

известно $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$



Построить некоторую функцию $P(x) : D \subset \mathbb{R}$

$$\boxed{P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0 \ldots N}$$ — условие интерполяции.

$P(x)$ — интерполянт.

Виды интерполянтов:

1) $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} c_i \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) = x^i$

2) $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \sin(ix) + b_i \cos(ix)$

II. Интерполяция многочленами.

$\{x_i\}_{i=0}^N \quad \{f(x_i)\}_{i=0}^N = 0$

Построим интерполянт в виде:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i x^i$$

$\underline{P(x_i) = f(x_i)} \quad i = 0 \ldots N$ — условие интерполяции.

$$\sum_{k=0}^{N} c_k (x_i)^k = f(x_i) \qquad i = 0 \ldots N$$

↑ СЛАУ на $\{c_i\}_{i=0}^N$

$A_{ik} = (x_i)^k$

$b_i = f(x_i)$ $\qquad A \cdot \underbrace{c}_{\text{неизвестное.}} = b$

Детерминант Вандермонда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \qquad \det A = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{x_i \neq x_j} \quad \forall\, i,j = 0, \; i \neq j.$$

Док-во

Теорема 1

| По правилу Крамера $\exists!$ реш. СЛАУ |

Если $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ попарно различны, следовательно существует и единственный интерполянт степени не выше n

1) Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (вычислительно не оптимальна)

$$\ell_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N} (x - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N} (x_k - x_i)}$$

$$P_L(x) = \sum_{k=0}^{N} \ell_k(x) \underbrace{f(x_k)}_{\text{интерполируемой ф-ии. (ее значения в точках)}} \text{ — известно}$$

$$\boxed{\ell_k(x_j) = \delta_{kj}}$$

2) Интерполяционный многочлен в форме Ньютона;

Опр Разделенная разность нулевого порядка

$f^0(x_k) \overset{def}{=} f(x_k)$; — значение функции в точке

Первого порядка: $f^1(x_k, x_t) \overset{def}{=} \dfrac{f^0(x_t) - f^0(x_k)}{x_t - x_k}$

Второго порядка: $f^2(x_k, x_t, x_e) = \dfrac{f^1(x_t, x_e) - f^1(x_k, x_t)}{x_e - x_k}$

N порядка: $f^n(x_0, \dots, x_n) = \dfrac{f^{n-1}(x_1 \dots x_n) - f^{n-1}(x_0, \dots x_{n-1})}{x_n - x_0}$

$$P_n(x) = f^0(x_0) + f^1(x_0, x_1)(x - x_0) + f^2(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f^n(x_0 \dots x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

В силу единственности $P_N(x) = P_L(x)$

3) Ошибка интерполяции: $\sup\limits_{x \in D} |f(x) - P(x)|$

Th. Пусть $f:[a,b]$ и имеет $N+1$ непрерывных производных, тогда

$$\underset{\substack{\text{степени}\\ N}}{P}(x) - f(x) = \frac{f^{(N-1)}(z)}{(N+1)!} \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}_{\omega(x)} \quad z \in [a, b]$$

зафиксир. $x = x_i$, $i = \overline{0, N}$

Введем функцию.

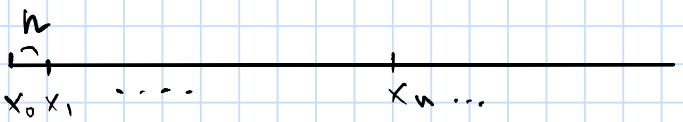
$g(t) = f(t) - P_N(t) - \{f(x) - P_N(x)\} \times \prod\limits_{j=0}^{N} \dfrac{(t - x_j)}{(x - x_j)}$,

Ошибка интерполяции:

$$\sup_{x \in (a,b)} \left| \frac{f^{(N-1)}(x)}{(N+1)!} \right| \cdot \sup_{x \in [a,b]} |\omega(x)|$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \times \dots \times (x - x_n)$$

$[a, b)$ разбит равномерной сеткой.



h – шаг.

Ошибка интерполяции при равномерной сетке:

$$\leq \frac{h^{N+1}}{N+1} \sup_{\xi \in [a,b]} f^{(N+1)}(\xi)$$

Замечание:

$$\sup_{[a,b]} |P_{cr.n}(x) - f(x)| \leq C \cdot \sup_{[a,b]} |\omega(x)|$$

$$C = \sup_{[a,b]} \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \qquad \omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Попробуем уменьшить ошибку $\sup_{[a,b]} |\omega(x)|$ за счет выбора $\{x_i\}_{i=0}^{N}$

$\Downarrow$

Необходимо найти: $\boxed{\min_{(x_0,\ldots,x_n)} \sup_{[a,b]} |\omega(x)|}$

III Полиномы Чебышева

Последовательность полиномов

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_{N+1}(x) = 2x\,T_N(x) - T_{N-1}(x) \quad (\star)$

$\bar{T}_N(x) = \frac{1}{2^{N-1}} T_N(x)$ нормир пол. Чебыш. коэффиц. при старшей степени: 2^{N-1}

magic: $\forall \Theta \in \mathbb{R} \hookrightarrow \cos((n+1)\Theta) = 2\cos\Theta \cdot \cos(n\Theta) - \cos((n-1)\Theta)$

$\Theta = \arccos x \quad |x| \leq 1$

$\Downarrow$

$$\cos((n+1)\arccos x) = 2x\cos(n\arccos x) - \cos((n-1)\arccos x)$$

при $|x| \leq 1$: $\quad T_N(x) = \cos(N\arccos x)$

Свойства

1° $|T_n(x)| \leq 1, \quad |x| \leq 1$

2° корни:

$\cos(N\arccos x) = 0 \Rightarrow x = \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2N}\right); \; m = \overline{1..N}$

$N \cdot \arccos x = \pi m - \pi/2, \; m \in \mathbb{Z}$

Экстремумы

$$\cos(N \arccos x) = \pm 1$$

$$N \arccos x = \pi m$$

$$x = \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right), \ m = 0, .., N_{+1}$$ $N+1$ - экстремум.

Теорема приведенный многочлен Чебышева.

$$\overline{T_N}(x) = \frac{1}{2^{N-1}} \cdot T_N(x)$$

при старшей степени стоит 1.

$\forall$ многочлена $P(x)$ степени не выше N, со старшим коэффициентом 1 выполняется:

$$\sup_{[-1;1]} |\overline{T_N}(x)| \leq \sup_{[-1;1]} |P(x)|$$

Многочлен Чебышева на $[a,b]$

$$T_n(x)_{[a,b]} = (b-a)^N 2^{1-N} T_N\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

аргумент.

Правило

$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)+\ldots+(x-x_N)$ - многочлен на $[a,b]$ со ст. коэф. 1. $\rightarrow$

$\rightarrow$ для уменьшения ошибки интерполяции

$x_0, \ldots, x_N$ — нули многочлена Чебышева на $[a,b]$

IV Устойчивость к ошибкам

$$f(x_i) = f(x_i) + \underbrace{\delta f(x_i)}_{\text{ошибка вычисления функции.}}$$

$$P_{стN}(x) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)\, l_k(x) \leftarrow \text{лагранж}$$

$$P_{стN} + \delta P_{стN} = \sum_{k=0}^{N} \{f(x_k) + \delta(f(x_k)\}\, l_k(x)$$

$$\delta P_{\text{ст}_N}(x) = \sum_{k=0}^{N} \delta f(x_k)\cdot l_k(x)$$

ошибка интерполяции связанная с спец.

$$\sup_{[a,b]} |\delta P_{\text{ст}N}| \le \sup_{[a,b]} |\delta f(x)| \cdot \underbrace{\sup_{[a,b]} \sum_{k=0}^{N} |l_k(x)|}_{L_N}$$

L_N константа Лебега

$$\frac{2^{N-3}}{(N-\frac{3}{2})\sqrt{N-1}} \le L_N \le 2^{N-1}$$

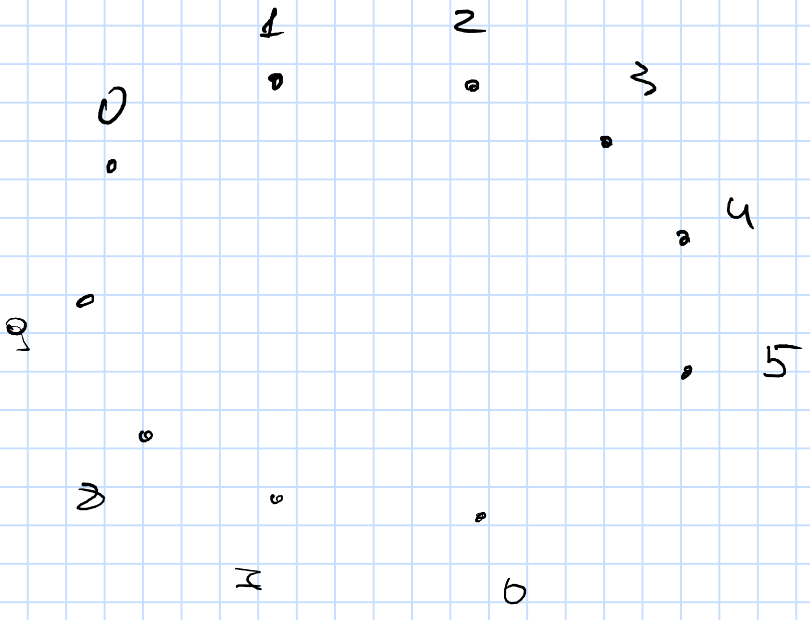
Неустранимая ошибка растет с ростом числа узлов интерпол.

Увеличиваем степень и константа Лебега стремится к бесконечности.

Для узлов расположенных как корни полинома Чебышева. — константа Лебега минимальная

$$L_N \sim \frac{2}{\pi}\ln N$$

V Думать ДАШКОВ!



точки на орбите

$\{t_i\}_{i=1}^{N}$ =

$\boxed{\vec{r}(t), \vec{v}(t)}$ нужно восстановить по $\vec{r}$ в t_i и $\vec{v}$ в t_i

Сплайн кубический

$h = 100$ сек. → ошибка — 10 км

Интерполяция → полиномами

$h = 100$ сек. — 10 см.

Д/З. програм. интерпол. Лагранж. и Ньютона.

Сплайны

> Задание к следующему: построить норм. кубич. сплайн.

I. Проблематика.

Ошибка метода интерполяции

$$|\Delta \text{ метода}| \le \max_{\xi\in[a,b]} \frac{|f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} \cdot \max_{[a,b]} |\omega(x)|$$

$$|\Delta \text{ метода}|_{\substack{\text{равномер.}\\ \text{сетка}}} \le \max_{\xi\in[a,b]} \left|f^{(N+1)}(\xi)\right| \frac{h^{N+1}}{N+1} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$n \to \infty$

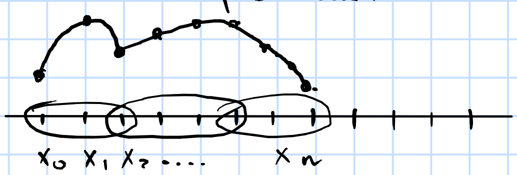
$$|\Delta_{\text{неустранимая}}| \sim \underbrace{L_N}_{} \, |\Delta f|$$

$f \to f + \Delta f$

неточность задания функции

$$L_N \xrightarrow{N\to\infty} \infty \sim \frac{2^{N-3}}{N\sqrt{N}}$$

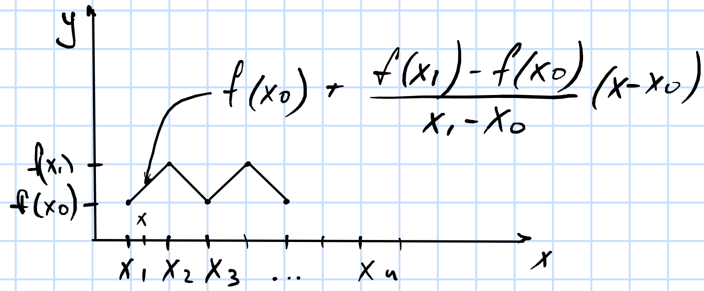
Решение проблемы: строить интерполянты на отдельных участках.



Сплайн - интерполяция на малых отрезках.
Для устранения ошибки Лебега.

II Линейная интерполяция. (линейный сплайн)

$$\begin{cases} \{x_i\}_{i=0}^{N} \text{ - узлы интерполяции.} \\ \{f(x_i)\}_{i=0}^{N} \end{cases}$$



сплайн:

$$S(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \quad x\in[x_i; x_{i+1}]$$

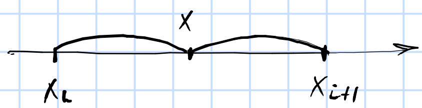
Ошибка метода

$$f(x) - S(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad \xi \in [x_i; x_{i+1}]$$

в случае $x\in[x_i; x_{i+1}]$

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{\max_{[a,b]} |f^{(2)}|}{2!} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$h = \max(x_{i+1} - x_i)$$



Неустранимая ошибка.

$f(x_i) \to f(x_i) + \Delta f(x_i)$

$S(x) \to S(x) + \Delta S(x)$

$$S(x) + \Delta S(x) = f(x_i) + \Delta f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) + \Delta f(x_{i+1}) - (f(x_i) + \Delta f(x_i))}{x_{i+1} - x_i} \times (x - x_i) = S(x) + \Delta f(x_i) + \frac{\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

$x \in [x_i; x_{i+1}]$, то $\Delta S(x) = \Delta f(x_i) + \frac{\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$ — неустр. ошибка.

N 1.8.6

$$|\Delta S(x)| \le |\Delta f(x_i)| + \frac{|\Delta f(x_{i+1})| + |\Delta f(x_i)|}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x_i) \le 3|\Delta f|$$

$$|\Delta f| = \max_i |\Delta f(x_i)|$$

III. Кубический сплайн

Построим интерполирование гладким сплайном

$\{x_i\}_{i=0}^N$ — узлы интерполяции.

$\{f(x_i)\}_{i=0}^N$

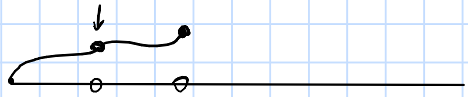
$S(x)$ — кубический сплайн.

$$S_j(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i^j x^i; \quad x \in [x_j; x_{j+1}] \quad j = \overline{0, \dots N-1}$$

на каждом промежутке $[x_j; x_{j+1}]$ N-отрезков. — кубический многочлен.

Условия на коэффициенты.

1. Условие интерпол: $S(x_i) = f(x_i)$; $\forall i = \overline{0,N}$



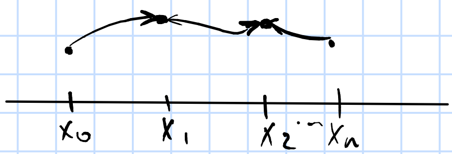
2. $S_0(x_0) = f(x_0)$ (1)
3. $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ — равенство в известных (промежуточных) точках

$j = \overline{0 \dots N-2}$

$2(N-2)$

$2N$ — кол-во условий

4. $S_{N-1}(x_n) = f(x_n)$



неизвестных — $4N$

5. $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$ $N-1$ - условие

Дополнительное условие, для 2-й производной.

еще $N-1$ условие.

Нормальные сплайны: $S_0''(x_0)=0$

„волевое решение" $\longrightarrow$ $S_{N-1}''(x_n)=0$

Дефект сплайна = порядок − степень гладкости

Дефект кубического сплайна = 1.

Алгоритм построения кубического сплайна.

$S_j = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i^j x^i$ − плохо для построения

$\left.\begin{array}{l}\text{хитро записываем}\\ +\,3N \text{ условий}\end{array}\right\} \to$ СЛАУ $N\times N$

Специфический вид СЛАУ:

3-х диагональная СЛАУ

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 & \dots & & & & \\ x & x & x & 0 & \dots & & & \\ 0 & x & x & x & 0 & \dots & & \\ & 0 & x & x & x & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & 0 & x & x & x & \dots & \\ & & & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & x & x & x & 0 \\ & \dots & & & 0 & x & x & x \\ \dots & & & & & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

Метод прогонки для трехдиагональной СЛАУ:

IV Метод прогонки.

$A\vec{y} = \vec{f}$

A − трехдиагонал.

$b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0$

$a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1$

$\vdots$

$a_{N-1} y_{N-2} + b_{N-1} y_{N-1} + c_{N-1} y_N = f_{N-1}$

$a_N y_{N-1} + b_N y_N = f_N$

Выражаем последующую через предыдущую

$$\boxed{y_0 = \frac{f_0}{b_0} - \frac{c_0}{b_0} y_1 \quad ; \quad \alpha_0 = -\frac{c_0}{b_0} \; ; \; \beta_0 = \frac{f_0}{b_0}}$$

Гипотеза: $y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i$

Пусть верно для $y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i$ По методу индукции

Пробуем для $i+1$: $y_i + b_{i+1} y_{i+1} + c_{i+1} y_{i+2} = f_{i+1}$

подставим y_i $\Rightarrow$ $a_{i+1}(\alpha_i y_{i+1} + \beta_i) + b_{i+1} y_{i+1} + c_{i+1} y_{i+2} = f_{i+1}$

$(a_{i+1}\alpha_i + b_{i+1}) y_{i+1} + a_{i+1}\beta_i + c_{i+1} y_{i+2} = f_{i+1}$

$$y_{i+1} = \underbrace{\frac{f_{i+1} - a_{i+1}\beta_i}{a_{i+1}\alpha_i + b_{i+1}}}_{\beta_{i+1}} - \underbrace{\frac{c_{i+1}}{a_{i+1}\alpha_i + b_{i+1}}}_{=\alpha_{i+1}} y_{i+2}$$

В конце:

$$\begin{cases} y_{N-1} = \alpha_{N-1} y_N + \beta_{N-1} \\ a_N y_{N-1} + b_N y_N = f_N \end{cases}$$

$$a_N (\alpha_{N-1} y_N + \beta_{N-1}) + b_N y_N = f_N$$

$$y_N = \frac{f_N - a_N \beta_N}{a_N \alpha_{N-1} + b_N} ; \quad y_{N-1} = \alpha_{N-1} y_N + \beta_{N-1} ; \quad y_{N-2} = \alpha_{N-2} y_{N-1} + \beta_{N-2}$$

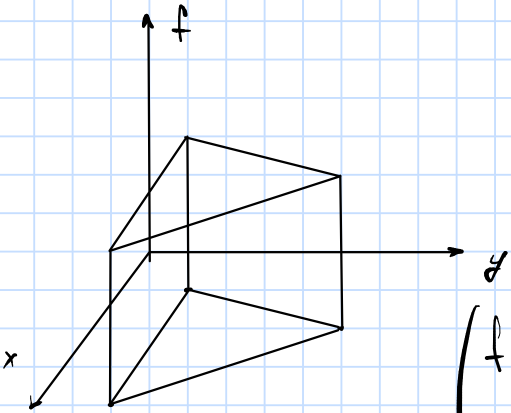
Задачи:

$f(x,y)$

$(x_0, y_0) \to f_0 \quad (x_1, y_1) \to f_1 \quad (x_2, y_2) \to f_2$

Интерполяция в треугольнике

$\{(x_0; y_0)\ (x_1; y_1)\ (x_2; y_2)\}$



$$\begin{pmatrix} f_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} f_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} f_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} f_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} f_1 - f_0 \\ x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} f_2 - f_0 \\ x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} f_1 - f_0 \\ x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} f_2 - f_0 \\ x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = f_0 + t_1 (f_1 - f_0) + t_2 (f_2 - f_0)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

4 точки $\to$ билинейная интерполяция.

Численное интегрирование.

$f(x): [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, интегрируема.

Надо найти: $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ — ?

I. Методы интегрирования. Квадратуры Ньютона-Котеса

1) Метод прямоугольников; (Полином степени 0)

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) \quad ; \quad \xi_k \in [x_k ; x_{k+1}]$$

Центральная точка: $\xi_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$

2) Метод трапеций. (Полином степени 1)

$$\underbrace{P_k(x)}_{\text{интерполянт степени 1.}} = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)\,dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dx + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x-x_k)\,dx$$

$$f(x_k)(x_{k+1}-x_k) + \frac{1}{2}\,\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\cdot(x_{k+1}-x_k)^2 =$$

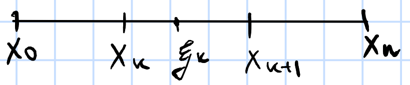
$$= \frac{1}{2}\big(f(x_k) + f(x_{k+1})\big)(x_{k+1}-x_k)$$

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)\,dx = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{2}(x_{k+1}-x_k)}_{\text{СР-ла трапеции.}}$$

3) Метод Симпсона. (Полином 2-й степени)

методом Ньютона.

$$P_k = f(x_k) + f^{(1)}(x_k, \xi_k)(x-x_k) + f^{(2)}(x_k, \xi_k, x_{k+1})(x-x_k)(x-\xi_k)$$



$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)\,dx$$

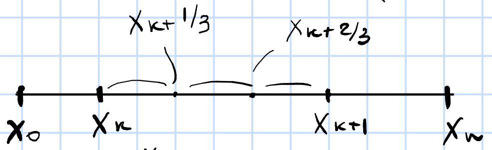
в качестве ξ_k можно взять центральную точку.

$\xi_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ — метод Симпсона с центральной точкой.

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)}{6}\left(f(x_{k+1})+4f(x_{k+1/2})+f(x_k)\right);$$

$$x_{k+1/2}=\xi_k=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}.$$

4) Правило 3/8 (Полином 3-й степени)



$$h_k = x_{k+1}-x_k$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} \underbrace{P_3(x)}_{\text{3-й степени.}}\,dx$$

$$I\approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h_k}{8}\left\{f(x_k)+3f(x_{k+1/3})+3f(x_{k+2/3})+f(x_{k+1})\right\}.$$

Замечание: как строить метод: Приближаем $f(x)$ полиномом.

↓

*Держим в голове феномен Рунге, нельзя сильно увеличивать степень полинома ← Интегрируем интерполянт.

II. Ошибка интегрирования.

1) Метод прямоугольников.

$$I\approx\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\underbrace{x_{k+1}-x_k}_{h_k}$$

Ошибка на одном шаге:

$$\varepsilon_k = \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx}_{\text{точное значение}} - \underbrace{f(\xi_k)h_k}_{\text{приближенное}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k)+f'(\mu)(x-\xi_k) - f(\xi_k)h_k =$$

$\mu\in(\xi_k;x)$

раскладываем

$$= \cancel{f(\xi_k)h_k} + f'(\mu)\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-\xi_k)\,dx - \cancel{f(\xi_k)h_k}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|\varepsilon_k| \leq |f'(\mu)|\cdot\frac{h_k^2}{2}}$$ — локальная ошибка

Глобальная ошибка:

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k \leq \max|f'(x)|(b-a)\frac{h^2}{2}$$

$$h=\max_{k=0\ldots n-1} h_k$$

Метод прямоугольников.

$$|\varepsilon| \le \max |f'| \frac{b-a}{2} h$$

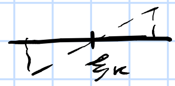
$$h = \max_{k=0\ldots n-1} h_k$$

Метод прямоугольников с центральной точкой

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

$$\varepsilon_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - f(\xi_k) h_k$$

$$f(x) = f(\xi_k) + f'(\xi_k)(x-\xi_k) + \frac{f''(\mu_k)}{2!}(x-\xi_k)^2$$



$$\varepsilon_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) + \underbrace{f'(\xi_k)(x-\xi_k)}_{0} + \frac{f''(\mu_k)}{2}(x-\xi_k)^2\,dx - f(\xi_k)h_k =$$

$$= \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k)\,dx}_{=\cancel{f(\xi_k)h_k}} + \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi_k)\cdot(x-\xi_k)\,dx}_{0} + \frac{f''(\mu_k)}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-\xi_k)^2\,dx - \cancel{f(\xi_k)h_k} =$$

$$= \frac{f''(\mu_k)}{2!}\,\frac{1}{3}\left\{\overset{\frac{h_k^3}{8}}{(x_{k+1}-\xi_k)^3} - \overset{\frac{h_k^3}{8}}{(x_k-\xi_k)^3}\right\} \cdot \frac{f''(\mu_k)}{2}\cdot\frac{2h_k^3}{3\cdot 8} = \frac{f''(\mu_k)}{24}h_k^3$$

$$|\varepsilon| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f''(\mu_k)}{24}h_k^3\right| \le \max_{[a,b]}|f''|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^2 h_k}{24} = \frac{1}{24}\max_{[a,b]}|f''|(b-a)h^2$$

2) **Метод трапеции:**

$$|\varepsilon| \le \frac{1}{12}\max|f''|(b-a)h^2$$

3) **Метод Симпсона** с $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ (центральной точкой)

$$|\varepsilon| \le \frac{b-a}{180}\max_{[a,b]}|f^{(IV)}|h^4$$

4) **Правило 3/8**

$$|\varepsilon| \le \frac{b-a}{6480}\max|f^{(IV)}|h^4$$

Замечание: 1) Методы с четной интерполяцией, позволяют увеличить порядок точности на 1, за счет введения центральной точки.

III Квадратуры Гаусса (одни из самых пиздатых)

$f: [-1;1]$; $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ — ?

В 2 раза пиздаче квадратур Н-К по порядку точности

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f(x_i)$$

c_i – веса

$-1 \le x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n \le 1$

$\{x_i\}$ – разбиение отрезка.

Теорема.

Если: $c_i = \int_{-1}^{1} \frac{\prod_{j=0,\, j\ne i}^{n} (x-x_j)}{\prod_{j=0,\, j\ne i}^{n} (x_i-x_j)}\,dx$; а x_i – нули полиномов Лежандра, то:

$$\left| \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} f(x_k) c_k \right| \le C \max \left| f^{(2n)} \right| h^{2n}$$

IV Правило Рунге. Экстраполяция Ричардсона

1) Вычислим интеграл с шагом h, точности p

$$I_h^p = \underbrace{I^0}_{\text{настоящее значение}} + \underbrace{\underbrace{ch^p}_{\text{главный член ошибки}} + O(h^{p+1})}_{\text{ошибка}} \quad (1)$$

2) Уменьшим шаг вдвое.

$$I_{h/2}^p = I^0 + c\left(\frac{h}{2}\right)^p + O(h^{p+1}) \quad (2)$$

$$(1)-(2): \quad I^p_{h/2} - I^p_h = ch^p\left(\frac{1}{2^p} - 1\right) + O(h^{p+1})$$

$$\underbrace{ch^p}_{\text{главный член ошибки.}} = \frac{I^p_{h/2} - I^p_h}{\left(\frac{1}{2^p} - 1\right)} + O(h^{p+1})$$

Оценка ошибки

$$\varepsilon \approx \left| \frac{I^p_{h/2} - I^p_h}{1 - \frac{1}{2^p}} \right|$$ – способ оценки ошибки

правило Рунге.

$$I^p_{h/2} = I_0 + \frac{1}{2^p} ch^p + O(h^{p+1})$$

$$I_0 = I^p_{h/2} - \frac{1}{2^p} \cdot \frac{I^p_{h/2} - I^p_h}{\left(\frac{1}{2^p} - 1\right)} + O(h^{p+1})$$

$$I_0 = I^p_{h/2} + \frac{I^p_{h/2} - I^p_h}{2^p - 1} + O(h^{p+1})$$

Вычисляем I_0 с точностью $O(h^{p+1})$ – экстраполяция Ричарда

Решение (нелинейных) уравнений.

I Общие понятия итерационных методов

$f(x) = 0$ — уравнение

Метод: $\begin{cases} x_0 \text{ — начальное приближение.} \\ x_{i+1} = \varphi(x_i) \text{ — итерационный процесс} \end{cases}$

Итерационный процесс $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$

приближенные решения.

Опр $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x^*$ x^* — решение.

если так, то метод сходится к решению по аргументу.

Опр Если $|x_i - x^*| \geq |x_{i+1} - x^*|$, то метод называется монотонным

Опр (видов сходимости)

$\exists q \in (0;1)$ и $|x_i - x^*| \leq Cq^i$; $C > 0$, тогда говорят, что метод обладает линейной сходимостью

Если метод сходится быстрее, то сходимость — сверхлинейная

Если медленнее, то — сублинейная.

Пр $|x_i - x^*| \leq \frac{1}{i}$ — сублинейная. 0,5

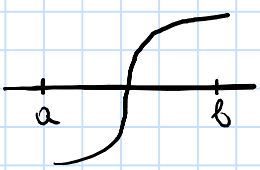
Пр. $|x_i - x^*| \leq q^{2i}$ — сверхлинейная (квадратичная.)
$q \in (0;1)$

II Метод половинного деления. (дихотомия)

Пусть $F: C[a,b]$, имеет единственный корень на $[a,b]$,

$F(a) \cdot F(b) < 0$ — разные знаки на концах.

1) Определяем $c = \frac{b+a}{2}$ — середина отрезка



Если $F(a) \cdot F(c) < 0$, то $[a_1, b_1] = [a, c]$

Если $F(c) \cdot F(b) < 0$, то $[a_1, b_1] = [c, b]$ $x_1 = c$

иначе — c — решение

2) $c_1 = \frac{b_1 + a_1}{2}$ $x_2 = c_1$

$x_1, x_2 \dots \to$ приближенные решения

$|x_1 - x^*| \leq \frac{1}{2}(b-a)$; $|x_2 - x^*| \leq \frac{1}{4}(b-a)$

$\Rightarrow |x_i - x^*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i (b-a)$

Если относительно одной переменной то используем этот метод и не паримся.

Метод золотого сечения. – посмотреть дома.

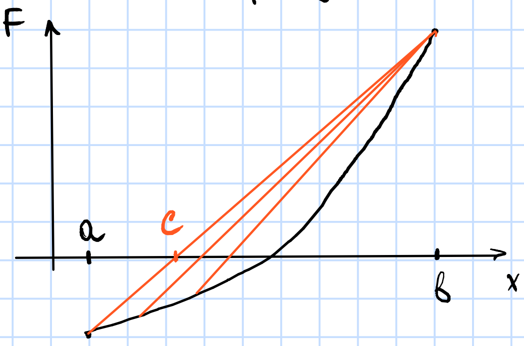
III Метод секущих. (нахуй никому не нужен)

1) $F: C[a,b]$

2) имеет единственный корень

3) $F(a)\cdot F(b)<0$

Иллюстрация:



Проводим прямую с концами $(a;F(a))$ и $(b;F(b))$

$$P(x)=F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$$

Ищем c, $P(c)=0$; $c=\dfrac{aF(b)-bF(a)}{F(b)-F(a)}$

Если: $F(c)\cdot F(a)<0$, то $[a_1,b_1]=[a,c]$, $x_1=\dfrac{a+c}{2}$

$F(c)\cdot F(b)<0$, то $[a_1,b_1]=[c,b]$, $x_1=\dfrac{c+b}{2}$

Иначе c – решение.

Теоретический порядок $cx \to$ квадратичный, на практике $cx \to 1,5$

Не использовать рекурсию! только цикл.

IV Метод простой итерации (самый норм)

$$F(x)=0;\quad \leftarrow \text{сведем каким-то образом}$$
$$\Updownarrow$$
$$x=\varphi(x)$$

Пр: $F(x)=0 \iff \underbrace{x=x+F(x)}_{\varphi(x)}$, $x=\sqrt{x^2+F^2(x)}$, $x=x+\tau F(x)$, $\tau\in\mathbb{R}$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Итерационный процесс: } x_{i+1}=\varphi(x_i)\\ x_0 \text{ – начальное приближение}\end{array}\right\}$ Метод простой итерации.

Опр $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с $L\geq 0$ на отрезке $[a,b] \overset{def}{\iff} \forall x,y\in[a,b] \hookrightarrow |\varphi(x)-\varphi(y)|\leq L|x-y|$

Теорема: Пусть $\varphi(x)$ – липшицева с $L<1$, тогда метод простой итерации сходится линейно.

□ x^* – решение $\hookrightarrow \varphi(x^*)=x^*$; пусть верно для n: $x_{n+1}=\varphi(x_n)$

По индукции:

$|x_i-x^*|\leq L^i|x_0-x^*|$

$|x_0-x^*|=|x_0-x^*|$ – верно

$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-x^*|=$

$=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|\leq L|x_n-x^*|\leq L^{n+1}|x_0-x^*|$

линейная сходимость. ч.т.д. ■

Замечание: чем ближе начальное приближение к решению, тем лучше.

часто монотонный, но не всегда.

V Метод простой итерации с релаксацией

$F(x) = 0$

$\Updownarrow$

$x = x + \tau F(x)$

$x_{i+1} = x_i + \tau F(x_i)$ — МПИ с релаксацией

Сходимость может обеспечиваться за счет выбора параметра τ

Пусть: 1) $F(x) \in C^1[a,b]$

2) корень $\exists!$ на $[a,b]$

Если $F'(x)$ меняет знак на $[a,b]$, то $\varphi'(x) = 1 + \tau F'(x)$

При любом $\tau \neq 0$, $\varphi'(x)$ имеет константу Липшица $\underline{L > 1}$

нельзя гарантировать сходимость.

- $F'(x) \in (-M, -m)$ $M, m \geq 0$

Тогда $\max\limits_{[a,b]} |\varphi'(x)| = \max\limits_{[a,b]} |1 + \tau F'(x)|$

$1 + \tau F(x) \leq 1$, т.к. $F'(x) \leq 0$;

$-1 \leq 1 + \tau F'(x)$ ← достаточно для сходимости.

тогда:

$\max\limits_{[a,b]} |1 + \tau F'(x)| \leq 1 \Rightarrow L \leq 1.$

$F'(x) \geq -\frac{2}{\tau} \iff \boxed{\tau \leq \frac{2}{M}}$

Пусть $F(x) \in C^1[a,b]$:

$\exists!$ корень $F(x^*) = 0$

$F'(x) \leq$, $\forall x \in [a,b]$

$m \leq |F'(x)| \leq M$, $m, M > 0$, тогда МПИ с релаксацией сходится при $0 < \tau < \frac{2}{M}$

$|x_i - x^*| \leq L_i |x_0 - x^*| \leq \max\limits_{[a,b]} |1 + \tau F'(x)|^i |x_0 - x^*|$. — равномерная сходимость.

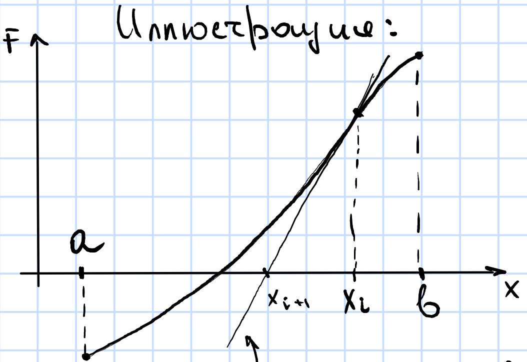
$\boxed{\tau_{\text{оптимальное}} = \frac{2}{M+m}}$

VI Метод Ньютона (самый крутой, но самый нежный)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}$$

x_{i+1} – пересечение Ox с касательной в т. X

Иллюстрация:



касательная в т. X

Метод очень требователен к выбору x_0

нужно выбирать x_0' очень близко к корню.

сходимость квадратичная.

№9.6 Доказать, что $x + 0{,}5 \sin x + a = 0$ имеет 1 корень $\forall a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x + 0{,}5 \cdot \sin x + a$$

$$f'(x) = 1 + 0{,}5 \cdot \cos x > 0 \Rightarrow f - \text{монотонно возрастает.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \Downarrow$$

1 корень

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Утверждение: $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ – метод

x^* – решение, т.е. $x^* = \varphi(x^*)$

$$x_{i+1} - x^* = \varphi(x_i) - \varphi(x^*) = \varphi'(x^*)(x_i - x^*) + \frac{\varphi''(x^*)}{2}(x_i - x^*)^2 + \frac{\varphi'''(x^*)}{6}(x_i - x^*)^3 + \ldots$$

Если: $\varphi'(x^*) = 0$, то метод 2-го порядка

$\varphi''(x^*) = 0$, то метод 3-го порядка.

Без док-ва.

Докажем, что метод Ньютона – 2-й порядок

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}; \quad \varphi(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)};$$

$$\varphi' = 1 - \frac{F' \cdot F' - FF''}{(F')^2}; \quad \varphi'(x^*) = 1 - \frac{(F'(x^*))^2 - \overset{0}{F(x^*)} F''(x^*)}{(F'(x^*))^2} < 1 - 1 = 0.$$

критерии остановки.

1) по аргументу $|x_i - x^*| < \varepsilon$, ε – задаем сами

$|x_i - x_{i+1}| < \varepsilon$ (по приращению)

2) по функции: $|F(x_i)| < \varepsilon$

3) Линейная сходимость.

$$|x_i - x^*| \leq q^i |x_0 - x^*|$$

$$q \sim \frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_i - x_{i-1}|}; \quad |x_i - x^*| \sim \frac{|x^i - x^{i-1}|}{1 - q} < \varepsilon$$

в методе Ньютона $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_i+\Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$

Семинар 7

Нелинейные системы уравнений

$F(x)=0$ – уравнение – в прошлый раз

$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ число уравнений равно числу неизвестных

I Нормы векторов

Пусть $\vec{x}$ – элемент $\mathcal{L}$ линейного пространства, тогда

норма $\vec{x}$ $(\|\vec{x}\|)$ – число $(\mathbb{R})$, удовл. свойствам:

1) $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
2) $\|\vec{x}\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$ $\quad \|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$\{e_1, e_2 \dots\}$ – ОНБ

$$\vec{x} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \underset{\text{в мире}}{\|x\|_\infty} = \underset{\text{на Физтехе}}{\|x\|_1} = \max |x_i| \;;$$

$$\underset{\text{в мире}}{\|x\|_1} = \underset{\text{на ФТ}}{\|x\|_2} = \sum_{i=0}^{N-1} |x_i| \;; \qquad \underset{\text{в мире}}{\|x\|_2} = \underset{\text{на ФТ}}{\|x\|_3} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2}$$

В мире – по нормам Гёльдера; на ФТ – по рейтингу употребления.

II Нормы матриц

Сопряженная норма матрицы

$\|\vec{x}\|$ – норма вектора (столбца)

Сопряженная норма матрицы с нормой вектора.

$\|A\| = \sup\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|A \cdot \vec{x}\|$, можно доказать, что сопряженная норма является нормой.

$$\|A\|_\infty = \|A\|_1 = \max_i \sum_{j=0}^{N-1} |a_{ij}|$$

макс. по строкам.

$$\|A\|_1 = \|A\|_2 = \max_j \sum_{i=0}^{N-1} |a_{ij}|$$

по столбцам

в мире

$$\underbrace{\|A\|_2}_{\text{в мире.}} = \|A\|_3 = \sqrt{\lambda_{max}(A \cdot A^T)}$$

III Метод простых итераций для системы.

$$\vec F(\vec x) = \vec 0 \iff \vec x = \vec\varphi(\vec x)$$

Итерационный процесс $\vec x_{i+1} = \vec\varphi(\vec x_i)$ $\quad x_0$ - начальное приближ.

Теорема

Если $\vec\varphi(\vec x) \in C^1(\Omega)$, и $\forall \vec x \in \Omega \longmapsto \left\| \frac{\partial\vec\varphi}{\partial \vec x}(x) \right\| < 1$ (матрица Якоби), тогда

при $\vec x_0 \in \Omega$ и $\vec x^* \in \Omega$ МПИ сходится к решению с линейной скоростью $\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\|_\Omega \le q < 1$.

IV Метод Ньютона

$$\vec x_{i+1} = \vec x_i - J^{-1} \cdot \vec F(\vec x); \quad J(x) = \frac{\partial \vec F}{\partial \vec x}(\vec x) \text{ - матрица Якоби}$$

Задачка:

$$\begin{cases} xy - x^2 = 1.03 \\ -2x + y^2 = 1.98 \end{cases} \qquad x_{k+1} = \sqrt[3]{\frac{y_k^2 - 1,98}{2}} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_k = x_k + \frac{1,03}{x_k}$$

$$\vec x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad \vec\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\frac{y_k^2 - 1.98}{2}} \\ x + \frac{1,03}{x} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec\varphi}{\partial\vec x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{3}\left(\frac{y^2 - 1,98}{2}\right)^{-2/3} y$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 1 - \frac{1,03}{x^2}; \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0;$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{y^2 - 1,98}{2}\right)^{-2/3} \\ 1 - \frac{1,03}{x^2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \|J\|_1 = \max\left(\left|1 - \frac{1,03}{x^2}\right|, \frac{y}{3}\left(\frac{y^2 - 1,98}{2}\right)^{-2/3} \right)$$

$x > 1$

$y > 2$

$x \geq 1$, $y \geq 2$, то $\|J\|_1 < 1$ $\qquad \Omega: \; x \in [1,2], \; y \in [2,3]$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega \longmapsto \|J\|_1 < 1 \Rightarrow \text{метод сходится.}$$

Оценить количество итераций

$$\|\vec x_{i+1} - \vec x\| = \|\vec\varphi(x_i) - \vec\varphi(\vec x^*)\| \le \max \|J\| \cdot \|\vec x_i - \vec x^*\| \le \max_\Omega \|J\|^i \cdot \|\vec x_0 - x^*\|$$

матрицы.

начальная ошибка

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_i} = \frac{1}{(\max\|J\|)^i} \sim 10^{-4} \text{ (по задаче)}$$

ошибка на i шаге

$$i = \log_{\max\|J\|} 10^4$$

МПИ с релаксацией: $x_{i+1} = x_i + \tau \vec{F}(\vec{x})$; $\tau < \frac{2}{M}$ – условие сходимости.

$M = \max\limits_{\Omega} \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|$

КР

1) Метод неопределенных коэффициентов и погрешности.

$x_{i-1} \overset{h}{\frown} x_i \overset{h}{\frown} x_{i+1}$ – шаблон.

$f''(x)$ – ? с наивысшим порядком

$$f''(x_i) = A f(x_{i-1}) + B f(x_i) + C f(x_{i+1})$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i) h^2 + O(h^3)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i) h^2 + O(h^3)$$

$f''(x_i) = f''$

$-\frac{1}{6} f''' h^3$ $\qquad$ $\frac{1}{6} f''' h^3$

$$A\left(f - f'h + \frac{1}{2} f'' h^2\right) + Bf + C\left(f + f'h + \frac{f'' h^2}{2}\right)$$

$$(A+B+C) f + (C-A) f'h + (A+C)\frac{h^2}{2} f'' + O(h^3) \approx f''$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ C-A = 0 \\ (A+C)\frac{h^2}{2} = 1 \end{cases}$$ СЛАУ.

$A = \frac{1}{h^2}$; $B = -\frac{2}{h^2}$; $C = \frac{1}{h^2}$

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2} =$$

$$= \frac{f''(x_i) h^2 + O(h^4)}{h^2} = f''(x_i) + O(h^2)$$

Алгоритм:

1) Разложили $f(x_{i+1}), f(x_{i-1})$
2) Подставим A, B, C
3) Подставим разложение с известными A, B, C => нашли порядок.

$$f'' = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2}; \quad \varepsilon_{\text{арифм}} \sim \frac{\varepsilon_{\text{маш}} \cdot 3|f|}{h^2}$$

$\varepsilon_{\text{маш}} \approx 10^{-16}$

$$\varepsilon_{\text{метода}} \sim \frac{1}{12}\max|f^{(IIII)}|\, h^2.$$

2) Вычислить производную по шаблону с наивысшим порядком точности.

- Построить интерполянт (с помощью разд. разностей)

$x_i \;—\; x_{i+1} \;—\; x_{i+2} \;—\; x_{i+3} \;—\; x_{i+4}$

- Продифференцировать.

③. f - задана таблицей

x					
f					

Найти x при котором $f = a$

Построить интерполянт $\underline{x \text{ от } f}$! (обрат. функции)

④. Интерполянт в узлах Чебышева

⑤ Квадратура Гаусса

⑥ Метод простой итерации

⑦ Метод Ньютона

⑧. Несобственные интегралы и формулы Ньютона - Котеса.

Квадратуры Гаусса.

$\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ - узлы

$\{f(x_i)\}_{i=0}^{N-1}$

$\int_a^b f(x)\,dx$ - ?

$$f \approx \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\, \varphi_i(x)$$

интерпол. Лагранжа

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\, \varphi_i(x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \cdot c_i}; \quad c_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx$$

найти ← квадратура (то есть c_0 c_1

если в качестве точек взять корни полинома Лежандра то получится квадратуры Гаусса

Квадратура Гаусса точна для полиномов $2N-1$ степени, где N - кол-во узлов.

Стадийность - кол-во раз вычисления функции.

Жесткие задачи.

I Неявный метод Рунге - Кутты

c_1	a_{11}	....	a_{1s}
$\vdots$	$\vdots$		
c_s	a_{s1}	....	a_{ss}
	b_1	...	b_s

S - стадийность (для неявных методов)

– табл. Бутчера; $\vec{k}_i = \vec{f}\left(t_n + c_i h;\ \vec{y}_n + h\sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij}\vec{k}_j\right)$

$\{\vec{y}_n, t_n\} \xrightarrow[\text{методы } h\text{-шаг}]{\text{через}} \{\vec{y}_{n+1}, t_{n+1}\}$

$i = 1, \dots s$

система (МПИ, G-S, Ньютона)

$y_{n+1} = y_n + h\sum\limits_{i=1}^{s} b_i \vec{k}_i$

Устойчивость?

метод -> ур-ние Долвиста; $y_{n+1} = R(z)\, y_n$, $z = \lambda h$

$\dot{u} = \lambda u$

$\Omega = \{ z \,|\, |R(z)| \le 1 \}$ - область устойчивости.

Методы Р-К: $R(z) = \dfrac{\det(E - Az + eb^T z)}{\det(E - Az)}$; $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Явные методы Р-К:

$E - Az = E - \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} z$; $\det(E - Az) = 1$; $R(z)$ - полином.

Для неявных методов $R(z) = \dfrac{\text{полином}}{\text{полином}}$ - дробно-рациональная функция.

X 7.1

$\dot{y}_1 = 1000\left(y_1 - \dfrac{y_1^3}{3}\right) + y_2$; точка равновесия $y_1 = y_2 = 0$

$\dot{y}_2 = -y_1$

линеаризованная матрица якоби:

$J_{лин} = \begin{pmatrix} 1000 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

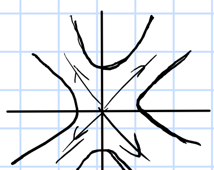
показ жестк.: $\dfrac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|} = \varkappa$

$\lambda_{12}: (1000 - \lambda)(-\lambda) + 1 = 0$

$\lambda^2 - 1000\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{10^3 \pm \sqrt{10^6 - 4}}{2}$

$\lambda_1 = 10^3$

$\lambda_2 = 10^{-3}$



- узел расходящ.

X 7.5

c_1, c_2	$a_{11}, a_{12} / a_{21}, a_{22}$	
γ	γ	0
$1-\gamma$	$1-2\gamma$	γ
	$1/2$	$1/2$

$\| b_1, b_2$

1) Исследовать на порядок аппроксимац. (метод Р-К)

2) Исследовать на устойчивость. L-уст (асимпт.); A-устойч.

Условие на порядок:

Дополн. условие Кутты: $\sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i$

$\gamma = \gamma + 0$ - верно.

1П: $\sum b_i = 1$ - выпол.

2П: $2\sum\limits_{i=0}^{s}\sum\limits_{k=1}^{s} b_i a_{ik} = 1$

$\Updownarrow$ усл. Кутты

$2\sum\limits_{i=1}^{s} b_i c_i = 1$ - верно

3П: $3\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{s}\sum\limits_{l=1}^{s} b_i a_{ik} a_{il} = 3\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{s} b_i a_{ik} c_i = 1$; $1-\gamma = 1 - 2\gamma + \gamma$

$6\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{s}\sum\limits_{l=1}^{s} b_i a_{ik} a_{kl} \Rightarrow$

условие на 3 пор:

$3\gamma^2 - 3\gamma + 0{,}5 = 0$

$\gamma = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

3) A-устойчивость

$$R(z) = \frac{\det(E - Az + eb^T z)}{\det(E - Az)}; \quad A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 1-2\gamma & \gamma \end{pmatrix}: \quad E - Az = \begin{pmatrix} 1-\gamma z & 0 \\ -z+2\gamma z & 1-\gamma z \end{pmatrix}$$

$$\det(E - Az) = (1-\gamma z)^2$$

$$E - Az + eb^T z = \begin{pmatrix} 1-\gamma z & 0 \\ -z+2\gamma z & 1-\gamma z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma z + z/2 & z/2 \\ 2\gamma z - z/2 & 1-\gamma z + z/2 \end{pmatrix}$$

$$\det(E - Az + eb^T z) = \left(1-\gamma z + z/2\right)^2 - \frac{z}{2}\left(2\gamma z - \frac{z}{2}\right) =$$

$$= 1 + \gamma^2 z^2 + \frac{z^2}{4} - 2\gamma z + z - \gamma z^2 - \gamma z^2 + z^2/4 = 1 + z(1-2\gamma) + z^2\left(\gamma^2 - 2\gamma + \frac{1}{2}\right)$$

$$R(z) = \frac{1 + z(1-2\gamma) + z^2(\gamma^2 - 2\gamma + \frac{1}{2})}{(1-\gamma z)^2};$$

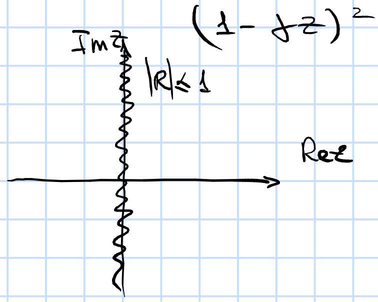
обл. устойч: $\Omega: \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \le 1\}$

A-устойч: лев. полуплоск $\subset \Omega$

$\Updownarrow$

A уст, если $\forall y \in \mathbb{R}$ $|R(iy)| \le 1$

$z = iy$



L-уст: $R(z) \xrightarrow[Re(z) \to \infty]{} 0$

$$|z| \gg 1; \quad R(z) \sim \frac{z^2(\gamma^2 - 2\gamma + \frac{1}{2})}{\gamma^2 z^2};$$

$\gamma \ne 0$ L уст $\Leftrightarrow$ $\gamma^2 - 2\gamma + \frac{1}{2} = 0$

Знаменатель как z^2

Числитель как z

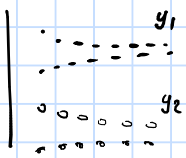
$\lim\limits_{Re z \to \infty} R(z) = 0$ $(\gamma - 1)^2 = 1/2$ $\gamma = 1 \pm \sqrt{2}/2$

$\gamma = 0$: $1 + z + \frac{z^2}{2} \underset{Re z \to \infty}{\not\to} 0$

№ 7.4

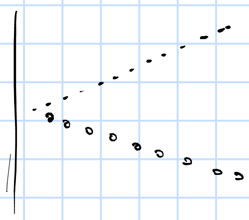
$$\dot{y}_1 = 98 y_1 + 198 y_2$$
$$\dot{y}_2 = -99 y_1 - 199 y_2$$

явные методы – нечетных порядков:



$C_1 \dot{y} + C_2 = 0$

четный



нечетный метод (1 поряд):

паразитная 2-я производная.

схема = уравн + $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{h}{2}$ – дает гармонич. колеб или sh исч.

$\partial \ddot{y} - C_1 \dot{y} + C_2 = 0$ – ошибка метода.

№ 7.13

Таблица Бутчера.

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	0
$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	0

Условия Кутты $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$ $\quad c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + 0$

$a_{11} = \frac{1}{2} - \sqrt{3}/6$ $\quad a_{22} = 0 \Rightarrow a_{22} = 0$

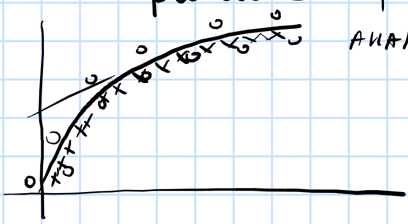
однократно неявно диагональ $\Rightarrow$ $a_{11} = 0$

1п: $b_1 + b_2 = 1$ $\quad b_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + (1 - b_1) = 1/2$ --- $b_1 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3(1-\sqrt{3})}$

$b_2 = 1 - b_1 \Rightarrow$

2п: $2\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = 1$. $\quad b_2 = 1 - b_1$

Опр Метод монотонный если дает монотонное численное решение, при монотонном аналитическом



аналит. реш.

x – реш. монотонным методом

o – не монотонным. методом

Для монотонности достаточно, чтобы

$R(z) > 0$, при $z = (x; 0)$ $x < 0$

II Многошаговые методы:

1. Методы Адамса (неявные)

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}) \\ \vec{u}(0) = u_0 \end{cases}$$

Пусть известно решение в $\{t_n, t_{n-1}, \dots t_{n-k}\}$
$$t_n \to y_n, \quad t_{n-1} \to y_{n-1} \quad \dots$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$$

интерполируем: $f(\xi, y(\xi))$ → по узлам $t_n, t_{n-1}, \dots t_{n-k}$ явные методы Адамса

→ по узлам t_{n+1}, t_n, t_{n-k} .. неявные.

Неявные методы Адамса

1П: $y_{n+1} = y_n + h f_{n+1}$

2П: $y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n\right)$

3П: $y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{5}{12} \underbrace{f_{n+1}}_{\text{содержит } y_{n+1}} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1}\right)$

Формулы дифференцирования назад (ФДН)

Построим интерполянт $y(t)$ в точках:

$\{y_{n+1}, y_n \dots y_{n-k}\}$, приравняем $y'(t_k) = f(t_k, y_k)$
$(k = n+1, n, n-1 \dots)$

формула дифференцирования назад.

ФДН:

1П: $y_{n+1} = y_n + h f_{n+1}$

2П: $\frac{3}{2} y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = h f_{n+1}$

Барьер Далквиста: любой A-устойчивый многошаговый метод должен иметь порядок выше 2-го

I Устойчивость методов

План исследования на устойчивость

Схема $\longrightarrow$ ур-ние Далквиста: $\dot{y} = \lambda y$, $z = \lambda \cdot h$ (шаг)

Найти оператор перехода

$y_{n+1} = R(z) y_n$

(многошаговые методы)

$y_n \to e_n$

$e_{n+1} = R(z) e_n$

$e_n = R(z) e_{n-1}$

$R(z)$ - функция устойчивости (оператор перехода)

$R(z)$

$\Omega : \{ z \in \mathbb{C} \; \{ |R(z)| \leq 1 \} \}$

$R(z) = e^{i\varphi}$ — число с модулем 1

$\Downarrow$

$z(\varphi)$

$\downarrow$

граница области устойчивости

X 7.12

$4\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - 3\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_n$ явный многошаговый метод.

Далквиста: $\dot{y} = \lambda y$: $f_n = \lambda y_n$

$\dot{y} = f(t; y)$

$y_{n+1} = R^2 y_{n-1}$; $y_n = R y_{n-1}$

$\Downarrow$

$$\frac{4R^2 - 1}{2h} - 3\frac{R^2 - R}{h} = \lambda R \quad \Big| \cdot 2h$$

$$4R^2 - 1 - 6(R^2 - R) = 2zR$$

$-2R^2 + R(6 - 2z) - 1 = 0$

$\Downarrow$

R, решить $|R(z)| \leq 1$

$z = \frac{-2R^2 + 6R - 1}{2R}$

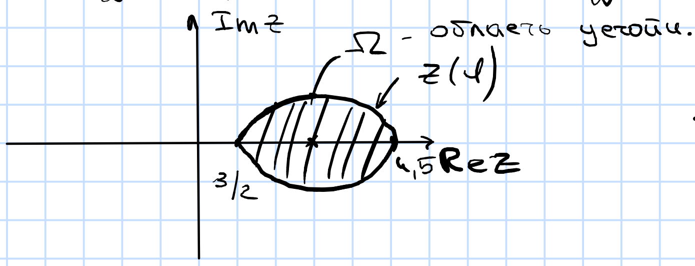
$z = -R + 3 - \frac{1}{2R}$

$R = e^{i\varphi}$ - граница области устойчивости.

$z = -e^{i\varphi} + 3 - \frac{1}{2} e^{-i\varphi}$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$

$z = -\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi + 3 - \frac{1}{2}(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi) = 3 - \frac{3}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sin\varphi$



Пробная точка: $z = 3$

$-2R^2 + R(6 - 2z) - 1 = 0$

$-2R^2 - 1 = 0$

$2|R^2| = 1 \Rightarrow |R^2| = \frac{1}{2} \Rightarrow$ при $z = 3$ $R \leq 1$

устойчива внутри

Задачка:

$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_{n+1}$ — неявный Эйлер.

Ур-ние Далквиста $\dot{y} = \lambda y$

$\dot{y} = f(t, y) \Rightarrow f = \lambda y \,;\; f_{n+1} = \lambda y_{n+1}$

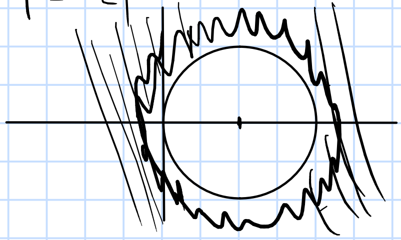
$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \lambda y_{n+1}$ $\quad y_{n+1} - y_n = z \cdot y_{n+1}$ $\Rightarrow y_{n+1}(1-z) = y_n$

$y_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{R(z)} y_n$

$\Downarrow$

$|R(z)| \leq 1$

$\left|\frac{1}{1-z}\right| \leq 1 \Rightarrow |1-z| \geq 1$ — Ω



— По другому пути

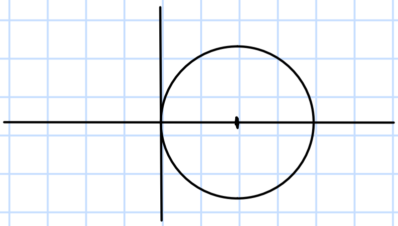
$y_{n+1} = R y_n$

$\frac{R y_n - y_n}{h} = \lambda R y_n \Rightarrow R - 1 = zR$

$R = e^{i\varphi}$ — граница обл. устойч.

$\frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi}} = z \Leftrightarrow z = 1 - e^{i\varphi}$

$z = 1 - \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ окр. с центр. 1



Где?

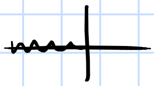
$z = 1/2$ $\quad R - 1 = \frac{1}{2} R$

$\frac{1}{2} R = 1 \Rightarrow R = 2$ $\quad z = \frac{1}{2}$ — неуст.

1) А ты А-устойчивый? — Да, потому что {лев. полупл} $\in \Omega$

2) Ты $A(\alpha)$ устойчивый? — Да

3) Ты L-устойчивый $\quad R(z) = \frac{1}{1-z} \longrightarrow 0$
$\mathrm{Re}\, z \to -\infty$
$\mathrm{Im}\, z = 0$



Да.

4) Ты монотонный

$R(z) \geq 0$

$z = x + 0i$, $x < 0$

$R(z) = \frac{1}{1-z}$; $z = x < 0$

$R(z) = \frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow$ Я монотонный

W-методы
и мет. Розенброка
Неявный метод
Гира
— в химии.

Метод. Радеева - Алексеева,
для баллистики.

X 7.7.

исслед. на A устойчивость

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = hf_n \qquad z=\lambda h$$

Ур-ние Далквеста: $\dot y = \lambda y \quad f=\lambda y \quad f_n = \lambda y_n$

$$y_n = R^2 y_{n-2};\ y_{n-1} = R y_{n-2} \quad \to \left(\frac{3}{2}R^2 - 2R + \frac{1}{2}\right)\cancel{y_{n-2}} = \overbrace{h\lambda}^{z} R^2 \cancel{y_{n-2}}$$

$$3R^2 - 4R + 1 = 2zR^2$$

2-й способ z через $R = e^{i\varphi}$

$$z = \frac{3}{2} - 2\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\frac{1}{R^2} = \frac{3}{2} - 2e^{-i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-2i\varphi} = \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + 2i\cos\varphi + \frac{1}{2}\cdot\cos 2\varphi - \frac{1}{2}i\sin 2\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + 2i\sin\varphi + \cos^2\varphi - \frac{1}{2} - i\sin\varphi\cdot\cos\varphi = 1 - 2(\cos\varphi - i\sin\varphi) +$$

$$+\cos\varphi(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1 + (\cos\varphi - 2)(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$R^2 - 4R + 1 = 0$$
$$D = 16 - 4 = 12$$
$$R = 2 \pm \sqrt{3}$$

A устойч — ДА; L-уст $z = -x \quad x > 0$

$$(3+2x)R^2 - 4R + 1 = 0$$

$$R_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3+2x)}}{2(3+2x)} \qquad x \to +\infty, \quad \mathrm{Re}\, z \to -\infty$$

$\Downarrow$

L-устойч.

Без монотонности.

3драи

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1}) \qquad \dot y = f(t, y), \quad f_n = f(t_n, y_n)$$

Ур-ние Далквеста: $\dot y = \lambda y$; $f_n = \lambda y$ $\quad f_{n+1} = \lambda y_{n+1}$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{\lambda}{2}(y_n + y_{n+1}) \iff y_{n+1} - y_n = \frac{z}{2}(y_{n+1} + y_n) \qquad z = \lambda h$$

$$y_{n+1}\left(1 - \frac{z}{2}\right) = \left(1 + \frac{z}{2}\right)y_n$$

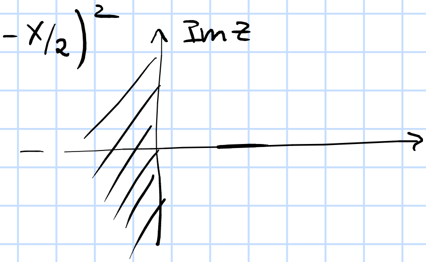
$$y_{n+1} = \left(\frac{1 + z/2}{1 - z/2}\right)y_n \Rightarrow R(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

$$R(z) \le 1 \Rightarrow \frac{1 + z/2}{1 - z/2} \le 1 \Rightarrow |1 + z/2| \le |1 - z/2|$$

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \le \left(1 - x/2\right)^2$$

$$x \le -x$$

$$2x \le 0$$



$f \to f_{ot}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

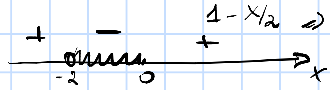
$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot h = z$

λ $\frac{\partial f}{\partial y}$

1) A устой +
2) A (α) +
3) Не L устойч.
4) Монотонность

$z = -x,\ x > 0$

$R(x) = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}$ не монот.



Линейная II Краевая задача.

$$\ddot{\vec y} = A\vec y + \vec f, \quad t\in(0;L)$$

A – const матрица

$\vec f = f(t)$

Граничные условия: $R\cdot\vec y(0) + S\vec y(L) = \vec g$

R, S – матриц. const ; $\vec g$ – вектор const

Общее решение

$$\vec y = \vec y_{\text{част неодн}} + \sum_{k=1}^{N}\mu_k \vec y_k$$

$\{y_k\}_{k=1}^{N}$ – ФСР

численно $\begin{cases}\dot{\vec y}_k = A\vec y_k \\ \vec y(0) = \vec e_k\end{cases}$ $\quad \vec e_k = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix} - k$

↓

ЛНЗ решения – ФСР

$\vec y_{\text{частное}}$: $\begin{cases}\ddot{y}_ч = Ay_ч + \vec f \\ y_ч(0) = \vec 0\end{cases}$ – численно

$$R\left(\vec y_{\text{част неодн}}(0) + \sum_{k=1}^{N}\mu_k \vec y_k(0)\right) + S\left(\vec y_{\text{част}}(L) + \sum_{k=1}^{N}\mu_k \vec y_k(L)\right) = \vec g$$

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(R\vec y_k(0) + S\vec y_k(L)\right) = \vec g - R y_{\text{частн.}}(0) - S y_{\text{частн}}(L)$$

$$\underbrace{\Big(\underbrace{R\vec y_1(0) + S\vec y_1(L)}_{\text{столбец}},\ \underbrace{R\vec y_2(0) + S\vec y_2(L)}_{\text{столбец}},\ \dots\Big)}_{G}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_N\end{pmatrix} = \vec g - R\vec y_{\text{част неодн}}(0) - S\vec y_{\text{част неодн}}(L)$$

Решение $\exists! \iff \det G \neq 0$

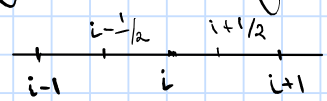
Если краев. задача неустойчива по Ляпунову, то решать с обратного конца не от $(0;t)$ а $(t;0)$

Семинар, подготовка к КР.

Решение краевых задач

1. $\begin{cases}\ddot{\vec y} = A\vec y + \vec f(t) \quad t\in(0;L) \\ R\vec y(0) + S\vec y(L) = \vec g\end{cases}$ – линейная краевая задача

2. $\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(g(x)\dfrac{dy}{dx}\right) + q(x)\dfrac{dy}{dx} + p(x) = 0 \\ y(0) = Y_1\ ;\ y(L) = Y_2\end{cases}$ – Задача Штурма-Лиувилля



Введем сетку $\{x_i\}_{i=0}^{N}$

$x_0 = 0$; $x_n = L$

$x_i = x_0 + ih$

$h = \dfrac{L-0}{N}$

$g_i = g(x_i)$

$q_i = q(x_i)$

$p_i = p(x_i)$

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{1}{h}\left\{g_{i+1/2}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+1/2} - g_{i-1/2}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-1/2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{g_{i+\frac12}\cdot\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - g_{i-\frac12}\cdot\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right\}$$

второй порядок апроксимации.

Дискретизация уравнения — второй порядок апроксимации.

$$\frac{1}{h}\left[g_{i+1/2}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - g_{i-1/2}\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right] + q_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + p_i y_i + f_i = 0$$

ГУ: $y_0 = Y_0$; $y_N = Y_1$

Прогонка

2 – N-1 строки

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & & & & Y_0 \\ x & x & x & 0 & \dots & & \\ 0 & x & x & x & 0 & \dots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 1 & Y_1 \end{array}\right)$$

Общий вид ГУ (ГУ 3-го рода)

$$\begin{cases} A_0 y(0) + B_0 y'(0) = C_0 \\ A_1 y(L) + B_1 y'(L) = C_1 \end{cases}$$

ГУ 3-го рода

$A_i^2 + B_i^2 \neq 0 \quad i = 0, 1$

$y'(0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$ – 1-й порядок

3 способа повышения порядка:

1) $y'(0)$ апроксимировать по большему кол-ву точек

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \approx y'(0) + O(h^2)$$

портит прогонку

исправляем при помощи элемент. преобразований.

2) $\frac{y_1 - y_0}{h} = y'(0) + y''(0)\frac{h}{2}$

$y''(0)$ – выражаем из уравнения.

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - y''(0)\frac{h}{2} \approx y'(0) + O(h^2)$$

3) Добавление фиктивного узла

-1 0 1

В нуле справедливо уравнение

$$\begin{cases} \left(g_{0.5}\frac{y_1 - y_0}{h} - g_{-0.5}\frac{y_0 - y_{-1}}{h}\right)\frac{1}{h} + q_0 y'(0) + p_0 y(0) \\ \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = y'(0) \end{cases}$$

2-й порядок

II Нелинейная краевая задача

$$\begin{cases} \ddot{\vec{y}} = f(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}) \\ \vec{y}(0) = \vec{X}_0 \\ \vec{y}(L) = \vec{Y}_1 \end{cases}$$

Метод стрельбы:

ставим задачу Коши:

параметр.

$$\begin{cases} \ddot{\vec{y}} = f(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(0) = Y_0 \\ \dot{\vec{y}}(0) = \alpha \end{cases} \Rightarrow \text{решаем численно} \Rightarrow \vec{y}(t, \vec{\alpha})$$

$$F(\alpha) = \vec{y}(L, \vec{\alpha}) - \vec{Y}_1$$

Что сделали

$\alpha \to F(\vec{\alpha})$ Хочу, чтобы $\vec{F}=\vec{0}$, тогда $y(L,\alpha)-Y_1$ - удовлетвор краевой задачи.

Осталось решить систему уравнений: $\vec{F}(\alpha)=\vec{0}$

при решении $\vec{\alpha}^*$ - $y(t,\alpha^*)$ - удовлетвр. краевой задач.

Метод квазилинеаризации (линеаризации, Ньютона)

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y(0)=Y_0 \\ y(L)=Y_1 \end{cases}$$

Выбрать начальное приближение $y_0(x)$ - известная функция близкая к решению

$y_{решение}=y_0(x)+\vartheta(x)$ малая добавка

$$y''=f(x,y_0(x)+\vartheta(x),\ y_0'(x)+\vartheta'(x))$$

$$y''+\vartheta''=f(x,y_0(x),y_0'(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0(x),y_0'(x))\vartheta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\vartheta'(x)$$

$$\begin{cases} \vartheta''=\frac{\partial f}{\partial y}(\dots)\vartheta+\frac{\partial f}{\partial y'}(\dots)\vartheta'+f(\dots)-y_0(x) \\ \vartheta(0)=Y_0-y_0(0) \\ \vartheta(L)=Y_1-y_1(L) \end{cases}$$

$\Rightarrow \vartheta(x)$ - новое приближ. решения

Линеаризов. краевой задача.

$y_1(x)=y_0(x)+\vartheta(x)$

после этого, повторение процесса и придем к решению.

XI 8.1

a) $y''-(10+x)y=xe^{-x}$ $x\in(0;10)$

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \qquad \vec{u}'=\begin{pmatrix} y' \\ (10+x)y+xe^{-x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (10+x) & 0 \end{pmatrix}\vec{u}+\begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-x} \end{pmatrix}$$

$\vec{u}'=A(x)\vec{u}+f(x)$ - найти общее решение

Ищем 1 решение: $\begin{cases} \vec{u}'=A(x)\vec{u}+\vec{f}(x) \\ \vec{u}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ $\to$ численно

Ищем 2 решение $\begin{cases} u'=A(x)\vec{u}+\vec{f}(x) \\ \vec{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ $\Rightarrow \vec{u}_2(x)$

ФСР $\begin{cases} y_1=u_1(x)[0] \\ y_2=u_2(x)[0] \end{cases}$ $\leftarrow$ первая строчка

$$\vec{u}_1(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2(x)=\begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (10+x) & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A-\lambda E| = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 10+x & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10 - x$ $\quad$ а) $\lambda = \pm\sqrt{10+x}$

б) $\lambda = \pm i\sqrt{10-x}$

XI 8.2

$$\begin{cases} y'' + (y')^2 - 8e^{y-x} + 23 = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$y_0(x) = x$

найти следующее приближение

$y'' = f(x, y, y')$

$f = 8e^{y-x} - 23 - (y')^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 8e^{y-x}$

$\frac{\partial f}{\partial y'} = -2y'$

$f(x, y_0(x), y_0'(x)) = 8 - 23 - 1 = -16$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 8 \qquad \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = -2$

$y = y_0(x) + \vartheta(x)$

$\underbrace{y_0''}_{0} + \vartheta'' = f(x, y_0(x), y'(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y'(x)) \cdot \vartheta + \frac{\partial f}{\partial y'}(\ldots)\vartheta'$

$\vartheta'' = -16 + 8\vartheta - 2\vartheta' \qquad \vartheta'' + 2\vartheta' - 8\vartheta = -16$

$\vartheta(0) = y(0) - y_0(0) = 0 \qquad$ ч.р. $\vartheta_ч = 2 \qquad \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \to -4,\ 2$

$\vartheta(1) = \underbrace{y(1)}_{=1} - \underbrace{y_0(1)}_{=1} = 0$

$\vartheta = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x} + 2$

$\vartheta(0) = 0$

$c_1 + c_2 + 2 = 0$

$\vartheta(1): \frac{c_1}{e^4} + c_2 e^2 + 2 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-4} & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{e^2 - e^{-4}}\begin{pmatrix} e^2 & -1 \\ -e^{-4} & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{e^2 - e^{-4}}\begin{pmatrix} e^2 & -1 \\ -e^{-4} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} e^2 - 1 \\ 1 - e^{-4} \end{pmatrix}\frac{1}{e^2 - e^{-4}}$

$\vartheta(x) = \frac{-2(e^{-2} - 1)}{e^2 - e^{-4}} - \frac{2}{e^2 - e^{-4}}(1 - e^{-4})e^{2x} + 2$

$y_1(x) = x + \vartheta(x)$

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 8 & 6\\ 2 & -2 & 2\\ -11 & -8 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \qquad [0;L]$$

для корректной постановки условия в 0 и L

изучаем спектр системы

$$|A-\lambda E| = \begin{pmatrix}8-\lambda & 8 & 6\\ 2 & -2-\lambda & 2\\ -11 & -8 & -9-\lambda\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -3 \qquad V_1 = \begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \qquad V_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -2 \qquad V_3 = \begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

$S = \{\vec V_1, \vec V_2, \vec V_3\}$ — матрица перехода к базису из собственных векторов.

В базисе $\{\vec V_1, \vec V_2, \vec V_3\}$

$$\begin{pmatrix}\dot{\tilde x}\\ \dot{\tilde y}\\ \dot{\tilde z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & & \\ & 2 & \\ & & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\\ \tilde z\end{pmatrix}$$

$\tilde x = c e^{-3t} \Rightarrow$ на $\tilde x$ нужно оставить условие в 0

$\tilde y = c_2 e^{2t}$

чтобы exp ↓ нужно ставить условие в L

$\tilde z = c_3 e^{-2t}$ — условие в нуле

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - g(x)u = -f(x)\\ k(0)u'(0) = 0\\ -k(1)u'(1) = u(1)\\ k(x) = e^x\\ g(x) = e^x\\ f(x) = \sin x\end{cases}$$

Дискретизация уравнения

$$\frac{1}{h}\left\{k_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - k_{i-1/2}\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right\} - g_i u_i = -f_i$$

Аппроксимация 2-го порядка.

Г.У: $\begin{cases}u'(0) = 0\\ u(1) + e\,u'(1) = 0\end{cases}$

1 способ: $u'(0) = 0 \Rightarrow \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2h} = 0 + O(h^2)$

Аналогично:

$u'(1) \approx A u_N + B u_{N-1} + C u_{N-2}$

$$\begin{cases}A + B + C = 0\\ -Bh - C2h = 1\\ B\frac{h^2}{2} + C2h^2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A = 3/2h\\ B = -4/2h\\ C = 1/2h\end{cases}$$

$$u'(1) = \frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} + O(h^2)$$

$$u_N + e\frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} = 0$$

2 способ: $u''k(x) + k'u' - gu = -f(x)$

$$u'' = \frac{-f(0) - k'(0)u'(0) + g(0)u(0)}{k(0)} = \frac{0 - 1u'(0) + 1u(0)}{} = -u'(0) + u(0)$$

$$u'(0) = \frac{u_1 - u_0}{h} = u'(0) + u''(0)\cdot\frac{h}{2} + u'''(\xi)\frac{h^2}{6}$$

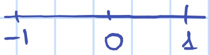
Заменю на следующее: $u'(0) \approx \frac{u_1 - u_0}{h} - u_0''\frac{h}{2} = u'(0) + u'''(\xi)\frac{h^2}{6} = O(h^2)$

$$u_0''\frac{h}{2} = \Big(-u'(0) + \underbrace{u(0)}_{=u_0}\Big)\frac{h}{2}$$

$$u'(0) = 0 \to \frac{u_1 - u_0}{h} - u_0\frac{h}{2} = 0$$

второй порядок.

3 способ:



$$\left(k_{1/2}\frac{u_1 - u_0}{h} - k_{-1/2}\frac{u_0 - u_{-1}}{h}\right)\frac{1}{h} + q_0 u_0 = -f_0$$

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \underbrace{u'(0)}_{=0} + O(h^2)$$

$$u_{-1} = u_1; \quad \underbrace{\left(k_{1/2}\frac{u_1 - u_0}{h} - k_{-1/2}\frac{u_0 - u_1}{h}\right)\frac{1}{h} + q_0 u_0 = -f_0}$$

1.02.2022.

Уравнения в частных производных.

Эллиптические

Гиперболические

параболическое

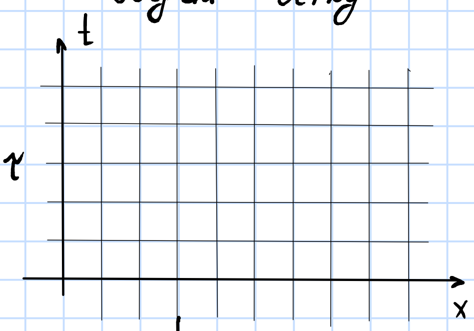
I. Уравнения в частных производных.

Ставим дифференциальную задачу.

дифф. опер. $L(u) = f$

Пример: $L(u) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} \end{cases} : \quad f = \begin{cases} 0 \\ u_0(x) \end{cases}$ u – точное решение;

Введем сетку



h - шаг.

Сетка τ - по времени.

$\{ t_n \mid t_n = t_0 + n\tau \}$

$\{ x_m \mid x_m = x_0 + m h \}$

Введем z - проекция на сетку.

Введем разностную задачу:

$L_h(y) = f_h$; y - решение разностной задачи.

$$L_h(y) \begin{cases} \dfrac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} - a^2 \dfrac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2} \\ y_m^0 \end{cases}$$

Опр. Сходимость

Разностное решение y сходится к такому u с порядком p по пространству и k по времени, если

$$\| y_{h,\tau} - z \| \le C_1 h^p + C_2 \tau^k$$

Опр. аппроксимация.

$\Gamma_{h,\tau} = L_{h,\tau}(z) - f_{h,\tau}$ $\qquad \| \Gamma_{h,\tau} \| \le C_1 h^p + C_2 \tau^k$

порядок p - по пр-ву; k - по времени.

Опр. Устойчивость

y_1, y_2 - решения возмущенной задачи.

$L_{h,\tau}(y_1) = f_{h,\tau} + \delta_1$

Теорема

Аппроксимация + Устойчивость => сходимость

Пример исследования на аппроксимацию.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{схема: } \begin{cases} \dfrac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} - a^2 \dfrac{T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n}{h^2} \\ u_m^0 = u_0(x_m) \end{cases}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x)$$

Шаблон

Подставим z

$$\Gamma_{\tau,h} = \begin{cases} \dfrac{z_m^{n+1} - z_m^n}{\tau} - a^2 \dfrac{z_{m+1}^n - 2z_m^n + z_{m-1}^n}{h^2} \\ \underbrace{z_m^0 - u_0(x_m)}_{=0} \end{cases}$$

$$z_m^{n+1} = u(t_{n+1}, x_m) = u(t_m; x_m) + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{\partial^2 u}{2\partial t^2}(\xi)\tau^2$$

$$z_m^n = u(t_n, x_m)$$

$$z_{m+1}^n = u(t_n, x_{m+1}) = u(t_n, x_m) + \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi)h^4$$

Подставим.

$$\Gamma_{\tau,h} = L_{\tau,h}(z) - f_{\tau,h} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\tau + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi)\tau^2 - a^2 \dfrac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + \frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi)\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2)}{h^2} \\ 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_{\tau,h} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi)\tau - \dfrac{h^2 a^2}{24}\left(\dots\right) \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{\tau,h} = C_1\tau + C_2 h^2$$

1 порядок по времени.

2. порядок по пр-ву

$y_m^n \to \lambda^n e^{im\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ Если $\|\lambda\| \le 1$, $\forall \alpha$, то схема устойчива

спектральное разложение

Пример. $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} - a^2 \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} = f(y_m^n)$

$y_m^n \to y_m^n + e_m^n$ и сокращаю y.

$$\frac{(y_m^{n+1} + e_m^{n+1}) - (y_m^n + e_m^n)}{\tau} - a^2 \frac{\cancel{(\ldots)} e_{m+1}^n - 2e_m^n + e_m^n}{h^2} = f(y_m^n + e_m^n) = f(y_m^n) + \frac{\partial f}{\partial u} e_m^n$$

Уравнение на эволюцию ошибки.

$$\frac{e_m^{n+1} - e_m^n}{\tau} - a^2 \frac{e_{m-1}^n - 2e_m^n + e_{m-1}^n}{h^2} = \frac{\partial f}{\partial u} e_m^n$$

Разложим e_m^n в спектр и исследуем одну компоненту

$$e_m^n \to \lambda^n e^{im\alpha}$$

Для простоты: $f \equiv 0$ $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{im\alpha} - \lambda^n e^{im\alpha}}{\tau} - a^2 \frac{\lambda^n \left(e^{i(m+1)\alpha} - 2e^{im\alpha} + e^{i(m-1)\alpha}\right)}{h^2} = 0 \Big/ \lambda^n e^{im\alpha}$$

Сокращаем

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - a^2 \frac{2\cos(\alpha) - 2}{h^2} = 0;$$

$$\lambda = 1 - 2 \frac{\tau}{h^2} a^2 (1 - \cos\alpha)$$

$= C_0$ (число Куранта для ур-ния теплопроводности)

$\lambda = 1 - 2C_0(1 - \cos\alpha)$; $|\lambda| \le 1 \iff C_0 \le 1/2$ — схема устойчива

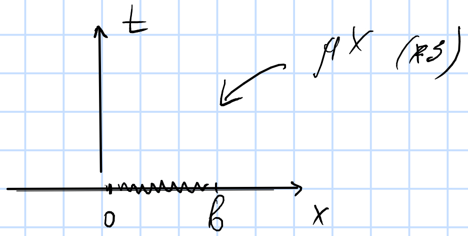
Уравнения гиперболического типа

1) Уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$$

Задача Коши для ур-ния переноса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x), & t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$



$\xi = x + at$

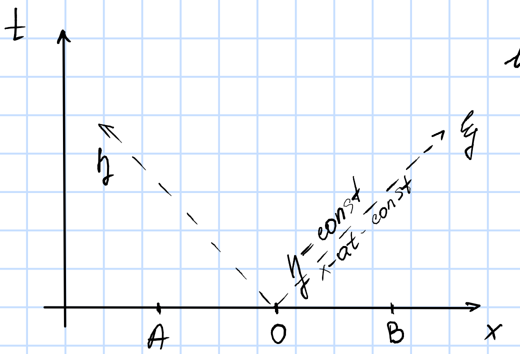
$\eta = x - at$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} a - \frac{\partial u}{\partial \eta} a$$

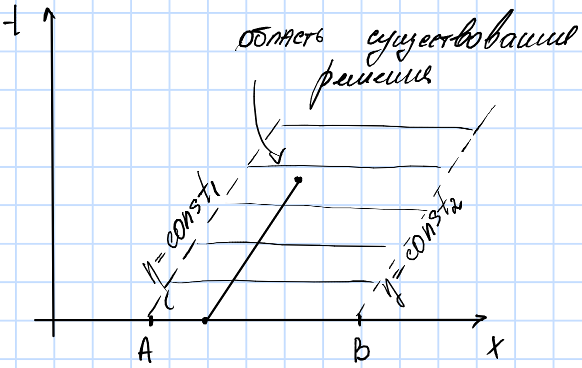
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$2a \frac{\partial u}{\partial \xi} = f\left(\frac{\xi-\eta}{2a}; \frac{\xi+\eta}{2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2a} f\left(\frac{\xi-\eta}{2a}; \frac{\xi+\eta}{2}\right)$$



$$u_2 = u_1 + \int_1^2 \frac{1}{2a} f(\dots)\, d\xi$$



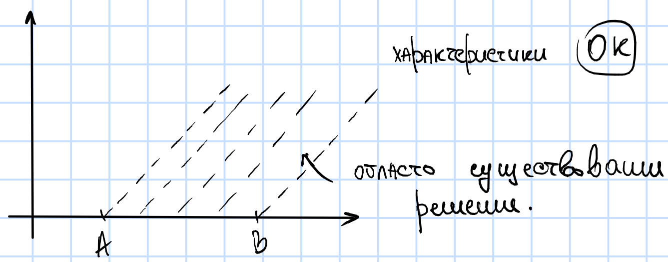
η − const − характеристика

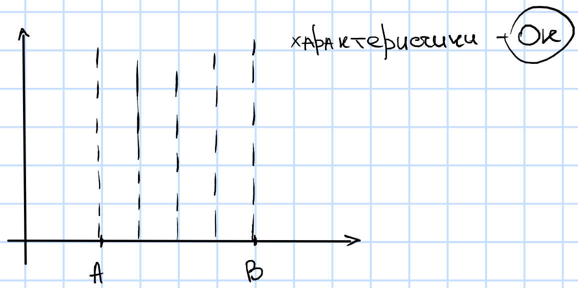
$u_2 = u_1 + \frac{1}{2a}\int f(\dots)\, d\xi$ − изменение решения вдоль характеристики.

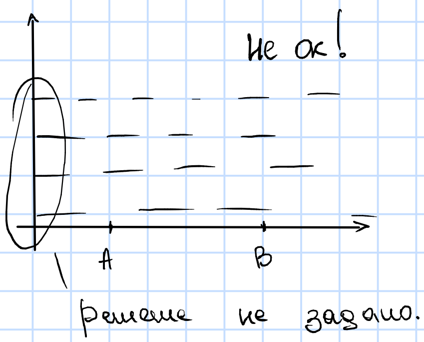
Вдоль характеристики известно изменение u. Его называют инвариантом Римана

Если $f \equiv 0$, то u − не изменяется вдоль характеристик.

Замечание







$\vec{n}$ − нормаль (A; B)

Если $\vec{n}$ − перпендикулярна характеристике, то решение невозможно определить.

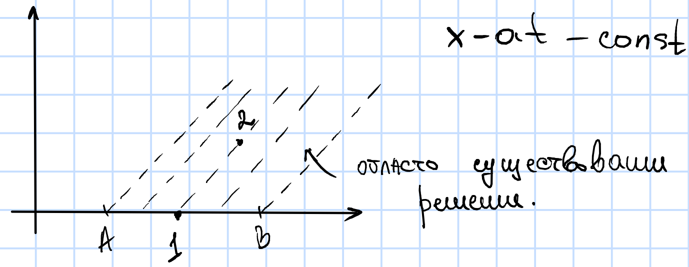
Семинар 2.

I Повторение

① $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x)$ − линейное ур-ние переноса.

$u|_{t=0} = u_0(x)$ $\quad x \in (A, B)$

$t = \frac{\xi-\eta}{2a}$; $\quad x = \frac{\xi+\eta}{2}$



$$u_2 = u_1 + \int_1^2 \frac{1}{2a} f\left(\frac{\xi-\eta}{2a}; \frac{\xi+\eta}{2}\right) d\xi$$

II Системы линейных гиперб. ур-ний.

$u = u(t, x)$ − вектор решений.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + G\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = f(t, x)$$

$u|_{t=0} = u_0(x)$ $\quad x \in (A; B)$

Опр: Система называется гиперболической если матрица G имеет ОНБ из левых собственных векторов.

Опр: $\vec{W}$ - левый собственный вектор для матрицы G, если:

1) $W \neq 0$

2) $\vec{W}^T \cdot G = \lambda \vec{W}^T$

левый С.О- правый для транспонированной.

$\{\vec{W_1}, \dots, \vec{W_n}\}$ - ОНБ из левых собств. векторов.

$S = \{\vec{W_1} \dots \vec{W_n}\}$ - матрица перехода

Λ - матр. диагон. вида $\Lambda = (S^T)^{-1} G S^T$; $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots \lambda_n)$

$G = S^T \Lambda (S^T)^{-1}$

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + G \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{f}(t,x) \,|\, S^T$; $\quad S^T \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + S^T G \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{\tilde{f}}(t,x)$

$\vec{\tilde{f}} = S^T \vec{f}$; $\quad \vec{V} = S^T \cdot \vec{u}$ - новые переменные

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + S^T G (S^T)^{-1} S^T \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{\tilde{f}}$ $\qquad \Lambda = S^T G (S^T)^{-1}$

$G = (S^T)^{-1} \Lambda (S^T)$

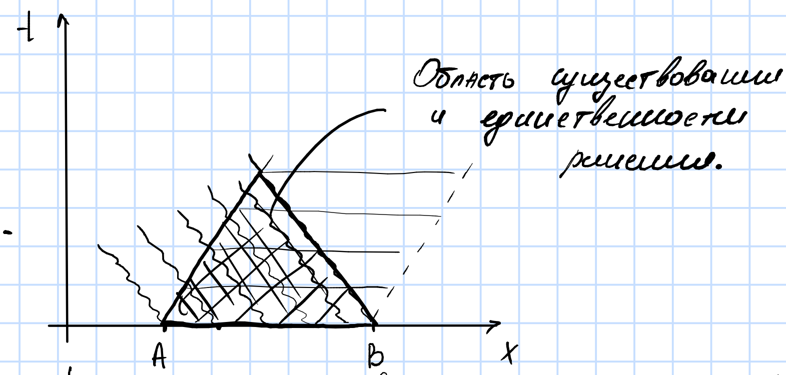
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{\tilde{f}} \iff \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} = \tilde{f} \\ \vdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial V_n}{\partial x} = \tilde{f}_n \end{cases}$$

Характеристики:

$x - \lambda_i t - const$, $\quad i = 1 \dots n$

Если $\vec{f_i} \equiv 0$, то

V - не меняется вдоль характеристики - инвариант Римана.



Решение существует, когда характеристики не являются касательными к области начальных условий.

III Гиперболические системы — общий случай

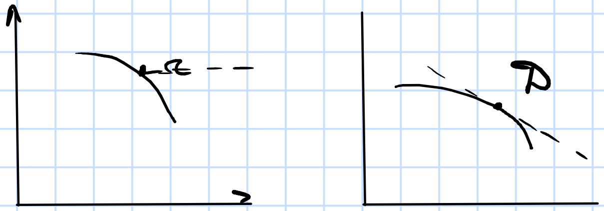
$\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ — неизвестная функция.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec u}{\partial t} + \dfrac{\partial \vec F(\vec u)}{\partial x} = \vec f(t,x) \\ \vec u\big|_{\Omega} = u_0 \end{cases}$$

$$G = \frac{\partial \vec F}{\partial \vec u} \Rightarrow \frac{\partial \vec u}{\partial t} + G(\vec u)\frac{\partial \vec u}{\partial x} = \vec f(t,x)$$

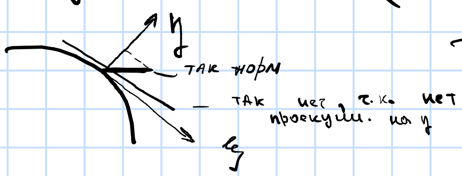
Система наз. гиперб. в точке, если G в этой точке имеет базис из собств. векторов.

- В точке поверхности введем $\vec V = S^T \vec u$ (т.е мы нашли ОНБ для G)
- Для каждой $\vec V_i$ $i=1..n$, отобразим характеристики.



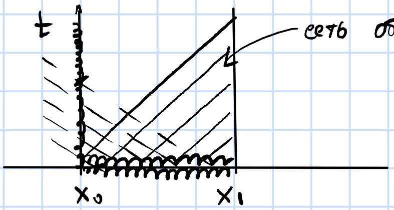
Если точка на поверх. нач. услов. в нач. касательн. содержит характ. направлен, то решение либо не существует, либо не единственно.

Как пучеб: $\Omega \ni (x,t)$ сделаем локальную замену: $(x,t) \to (\xi;\eta)$



Перепишем ур-ние: $f\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}; \frac{\partial u}{\partial \xi}; u, \xi, \eta\right)$

Ограниченная задача



$$\frac{\partial \vec u}{\partial t} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \frac{\partial \vec u}{\partial x} = \vec f$$

a) $u_1(0;x) = \varphi_0(x)$

$u_2(0;x) = \varphi_1(x)$

$u_2(t;0) = \psi(t)$

корректны ли такие Г.У.

1) Сведем к характеристич. виду: $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow G^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

Получим левые С.В.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda_1 = 1, \ \lambda = -3 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\lambda = -3: \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

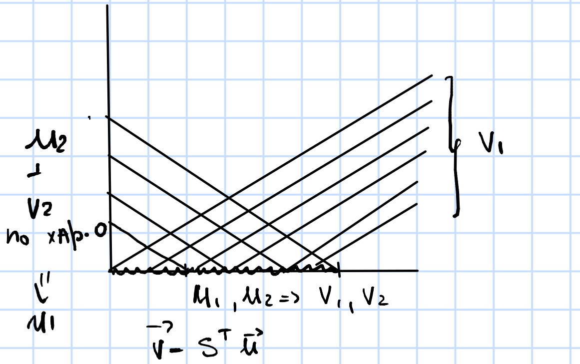
$$S = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{13} \\ 1 & \sqrt{13} \end{pmatrix} \qquad S^T = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ \sqrt{13} & \sqrt{13} \end{pmatrix} \qquad \vec V = S^T \vec u = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 5u_1 + u_2 \\ \sqrt{13}u_1 + \sqrt{13}u_2 \end{pmatrix}$$

Инвариант Римана: 1) $V_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(5u_1 + u_2)$; характеристика: $x - 1t = const$

2) $V_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}(\sqrt{13}u_1 + \sqrt{13}u_2)$; $x + 3t = const$ — хар.

$$S^T G (S^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{13} & -1 \\ -\sqrt{13} & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4\sqrt{13}} = \frac{1}{4\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3\sqrt{13} & -3\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{13} & -1 \\ -\sqrt{13} & 5 \end{pmatrix} =$$

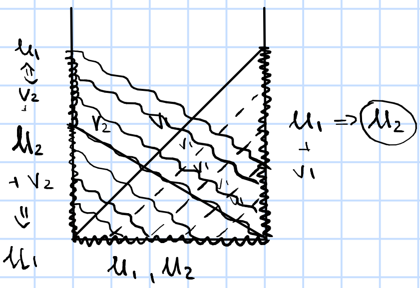
$$= \frac{1}{4\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{13} & 0 \\ 0 & -12\sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$



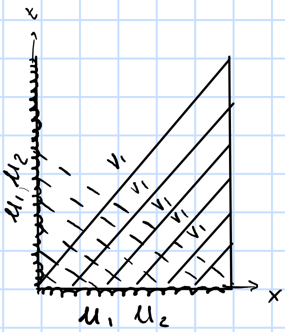
$\vec{v} = S^T \vec{u}$

Справа:

$u(0, x)$
$u_2(0, x)$
$u_1(t, 1)$
$u_2(t, 0)$



и еще: в) $u_1(0; x)$
$u_2(0; x)$
$u_1(t; 0)$
$u_2(t; 0)$

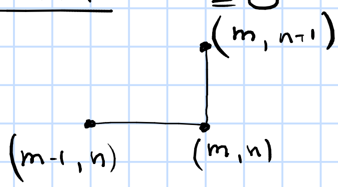


Семинар 3. 15.02.22.

I. Уголки

Линейное ур-ние переноса: $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

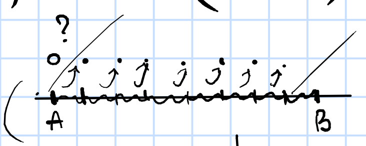
Схема (левый уголок): $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$



Если ввести число куранта:

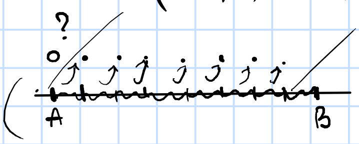
$C_0 = \frac{a\tau}{h}$; $u_m^{n+1} = (1 - C_0) u_m^n + C_0 u_{m-1}^n$

1) без Г.У.



нельзя определить

2) с ГУ



из Г.У.

Апроксимация „уголка" – 1 по пространству, 1 по времени

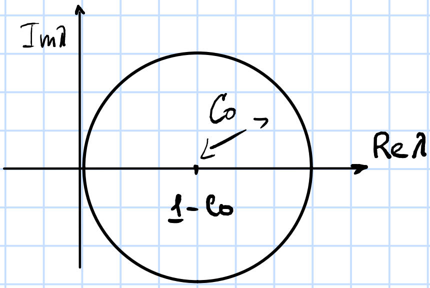
Устойчивость $u_m^n \to \lambda^n e^{im\alpha} \Rightarrow \frac{\lambda^{n+1} e^{im\alpha} - \lambda^n e^{im\alpha}}{\tau} + \frac{a\lambda^n}{h}\left(e^{im\alpha} - e^{i(m-1)\alpha}\right) = 0$

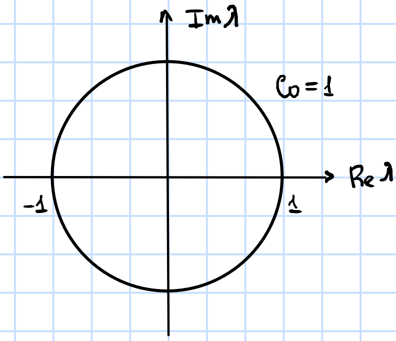
$\overline{\lambda^n e^{im\alpha}}$

$\lambda - 1 + C_0 (1 - e^{-i\alpha}) = 0 \leftarrow \frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{a}{h}(1 - e^{-i\alpha}) = 0$

$\lambda = 1 - C_0 (1 - \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$

– окружность с центром $(1 - C_0)$ и радиусом C_0

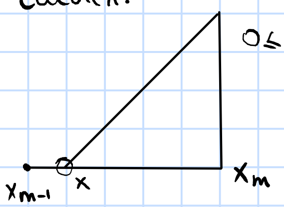




Условие устойчивости:

$|\lambda| \le 1 \Leftrightarrow 0 \le Co \le 1$

Смысл:



$0 \le Co \le 1$

$$u_m^{n+1} = (1-Co)\,u_m^n + Co\,u_{m-1}^n$$

интерполяция линейн. в точку.

Правый уголок:

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{h} = 0$$

Аппроксимация: 1 по пр.-ву
1 по времени.

$0 \ge Co \ge -1$ при $\operatorname{tg}\alpha$ характеристик < 0

левый для $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

Схема: Куранта-Изаксона-Рисса (КИР)

сама решает все в зависимости от $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} + \frac{a+|a|}{2}\,\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h} + \frac{a-|a|}{2}\,\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{h} = 0$$

Аппроксимация: 1 по пр-ву ; 1 по времени.

Условие устойчивости: $-1 \le Co \le 1$.

Обобщение схемы КИР для линейных систем.

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0}$; S – матрица перехода к ОНБ из левых собст. вект.

$\vec{W} = S^T \vec{u}$

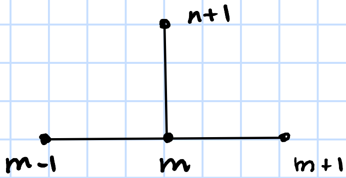
$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \Lambda\,\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0 \quad : \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$$

$$\frac{\vec{w}_m^{n+1}-\vec{w}_m^n}{\tau} + \frac{\Lambda+|\Lambda|}{2}\,\frac{\vec{w}_m^n-\vec{w}_{m-1}^n}{h} + \frac{\Lambda-|\Lambda|}{2}\,\frac{\vec{w}_{m+1}^n-\vec{w}_m^n}{h} = \vec{0}$$

$$|\Lambda| = \operatorname{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$$

II Схема Лакса - Вендрафофа.

Прогноз (худший)



$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + a\,\frac{u^n_{m+1} - u^n_{m-1}}{2h} = 0$$

Апроксимации: 1 по врем.

2. по пр-ву.

Устойчивость:

$$u^n_m \to \lambda^n e^{im\alpha}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + i a \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i\, h} = 0 \Rightarrow \quad \lambda - 1 + i\,Co \sin\alpha = 0$$

$$\lambda = 1 - i\,Co \sin\alpha$$

Схема не устойчива. $\Leftarrow \quad |\lambda| = \sqrt{1 + Co^2 \cdot \sin^2\alpha} > 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Хуета!

Новая схема: Метод неопределенных коэффициентов.

$$u^{n+1}_m = A\, u^n_{m-1} + B\, u^n_m + C\, u^n_{m+1}$$

$$u^{n+1}_m = u^n_m + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3)$$

$$u^n_{m-1} = u^n_m - \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3);$$

$$u^n_{m+1} = u^n_m + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + O(h^3)$$

$$u^n_m + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\tau^2 + O(\tau^3) = (A+B+C)\,u^n_m + \frac{\partial u}{\partial x} h (C-A) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{h^2}{2}(C+A) + O(h^3)$$

$$(A+B+C-1)\,u^n_m - \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} h\,(C-A) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\tau^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{h^2}{2}(C+A) + O(h^3) - O(\tau^3) = 0$$

$$A+B+C = 1 \qquad (3)$$

$$h(C-A) = -a\tau \Rightarrow C - A = -Co \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\tau^2}{2}a^2 + \frac{h^2}{2}(C+A) = 0 \Rightarrow C + A = Co^2 \qquad (2)$$

$$(1,2) \to \begin{cases} C = \dfrac{Co^2 - Co}{2} \\ A = \dfrac{Co^2 + Co}{2} \end{cases} \qquad (3):\ B = 1 - (A+C) = 1 - Co^2$$

$$u_m^{n+1} = (1-C_0^2)\,u_m^n + \frac{C_0^2 - C_0}{2}\,u_{m+1}^n + \frac{C_0^2 + C_0}{2}\,u_{m-1}^n$$

$$u_m^{n+1} - u_m^n + C_0\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2} + C_0^2\,\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{2}$$

$$\underbrace{\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}}_{\text{предоидущ. схема}} - \underbrace{\frac{a^2\tau^2}{2}\,\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}}_{\text{искусств. вязкость}} = 0$$

Аппроксимация: 2 по пр-ву и 2 по времени.

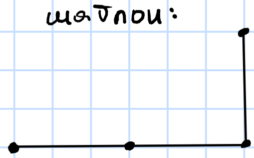
Устойчивость: $\lambda = \cos\alpha + i\cdot C_0\cdot\sin\alpha$; $|\lambda| = \sqrt{\cos^2\alpha + C_0^2\sin^2\alpha}$

$|\lambda| \le 1 \iff |C_0| \le 1$ — условие устойчивости.

Задачка:

XII 7.4. $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

шаблон:

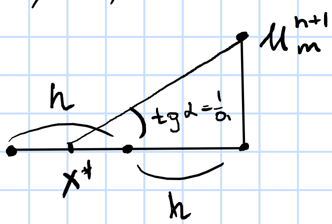


1) XII 7(3) построить схему наивысшего порядка при помощи метода неопр. коэфф.

Помнить!: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2) Построить схему с помощью сеточно-характеристического способа:

Как?:



$u_m^{n+1} = \underbrace{u(x^*)}$ — интерполяция + перенос по характеристике

$$x^* = x_m^n - a\cdot x$$

$$u(x^*) = u_{m-2}^n + P_{разд}(u_{m-1}^n, u_{m-2}^n)(x^* - x_{m-2}^n) + P_{разд}(u_m^n, u_{m-1}^n, u_{m-2}^n)(x^* - x_{m-2}^n)(x^* - x_{m-1}^n)$$

$P_{разд}$ — разд. разн.

$$x^* - x_{m-2}^n = x_m^n - a\tau - x_{m-2}^n = (2h - a\tau) = h(2 - C_0)$$

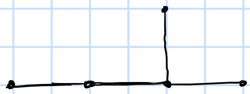
$$x^* - x_{m-1} = x_m^n - a\tau - x_{m-1}^n = h - a\tau = h(1 - C_0)$$

$$u(x^*) = u_{m-2}^n + \frac{u_{m-1}^n - u_{m-2}^n}{h}\,h(2 - C_0) + \frac{u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n}{2h^2}\,h^2(1 - C_0)(2 - C_0)$$

$$u_m^{n+1} = u(x^*)$$

Схема монотонна, если при движении по времени монотонный профиль переходит в монотонный.

Линейная схема: $u_n^{n+1} = \sum_k \alpha_k u_{m-k}^n$



1) Определение монотонности по Фридрихсу:

Схема монотонна, если $\alpha_k \geqslant 0 \quad \forall k$

2) Определение монотонности по Годунову:

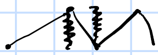
Если профиль был возрастающий, то он должен перейти в возрастающий.

убыв -> убыв;
$$\begin{cases} y^n_{m+1} \geqslant y^n_m \Rightarrow y^{n+1}_{m+1} \geqslant y^{n+1}_m \\ y^n_{m+1} \leqslant y^n_m \Rightarrow y^{n+1}_{m+1} \leqslant y^{n+1}_m \end{cases}$$

3) Опред. монотонности: Хартену (TVD - условие)

$$\sum_m \left| y^n_{m+1} - y^n_m \right| \geqslant \sum \left| y^{n+1}_{m+1} - y^{n+1}_m \right|$$

сумма всех перепадов.



<u>Th Годунова</u>: Не существует монотонных линейных схем с порядком >1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u^{n+1}_m - u^n_m}{\tau} + a\,\frac{u^n_m - u^n_{m-1}}{h} = 0$$

В тейлора:

$$\frac{u^n_m + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\tau^2 + O(\tau^3) - u^n_m}{\tau} + a\cdot\frac{u^n_m - u^n_m + \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + O(h^3)}{h} = 0$$

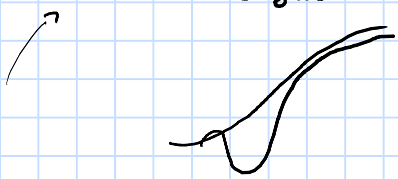
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\tau - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad = O(h^2) + O(\tau^2)$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - из ур-ния; $\quad \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a^2\tau - ha) = O(h^3) + O(\tau^3)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{2h}(Co - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O(h^2) + O(\tau^2)$$

Член $\frac{a}{2h}(Co - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - схемная вязкость

сглаживание зависит от вязкости:



Поправки с четными производными называются диссипативными, а с нечетными - дисперсионные

Гибридные схемы – способ построить монотонную схему с высоким порядком аппроксимации:

Рассмотрим шаблон

$$u_m^{n+1} = \sum_k a_k u_{m+k}^n, \quad k = -2, -1, 0, 1$$

Условия на 1 порядок:

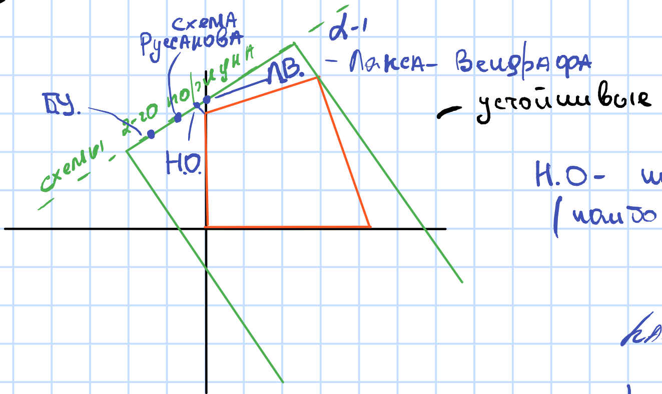
$$\begin{cases} \alpha_{-2} + \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_{-2} + \alpha_{-1} - \alpha_1 = C_0 \end{cases}$$ – выбор 2 коэффициентов определяет схему 1-го порядка

Условие 2-го порядка:

$$\begin{cases} \text{Условия 1-го} \\ 4\alpha_{-2} + \alpha_{-1} + \alpha_1 = C_0^2 \end{cases}$$ – выбор 1 коэфф. определяет схему.

Условия 3-го порядка:

$$\begin{cases} \text{Условия 2-го} \\ 8\alpha_{-2} + \alpha_{-1} - \alpha_1 = C_0^3 \end{cases}$$ – всего одна схема;



Н.О. – наименее осциллирующая схема 2-го пор. (наиболее монотонна)

Как составить гибридную схему:

1) y_m^{n+1} – вычисляем по Русанову
→ решение монотонно (по Годунову)
→ иначе y_m^{n+1} вычисляем по Л.В

Если не получилось по Русанову (в точке) тогда пробуем другую схему, понижая порядок.

Нелинейные гиперболические уравнения:

Система нелиней. и. Г.У: $\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{x})$

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{u})$ – вектор потоков

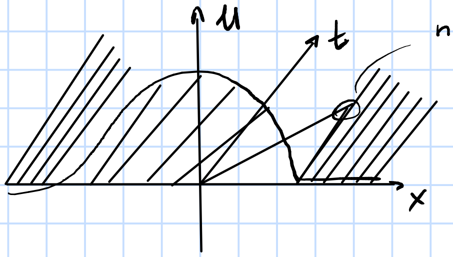
Пр. системы ур-ний газовой динамики.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{u})}{\partial x} = 0$$ – нелинейное ур-ние переноса.

I. Уравнение Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ в дивергентной форме $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{u^2}{2}\right)}{\partial x} = 0$$

$F(u) = u^2/2$

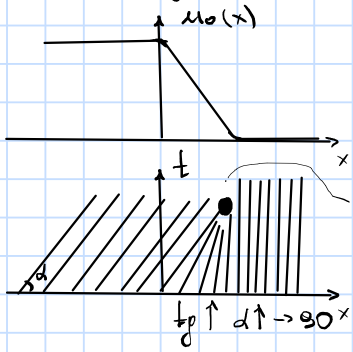


пересечение характерист.
и градиентная катастрофа и характерист. $x + ut = const$

решение не однозначно.

Ур-ие Хопфа порождает не гладкие решения даже при бесконечно гладких начальных условий (пр: ударная волна)

Пример:



$x - ut - const$ — характ.

пересечение.

Исследуются решение в слабой форме.

т.к. негладкие решения не удовлетворяют ур-нию, т.к. оно дифференциальное.

II Слабая форма уравнения.

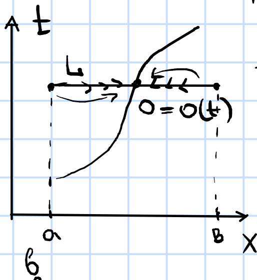
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar F(\bar u)}{\partial x} = 0$$ | проинтегрируем $\iint dx\,dt$; $x \in (a,b)$, $t \in (t_1, t_2)$

$$\int_{x_1}^{x_2} (u(t_2,x) - u(t_1,x))dx + \int_{t_1}^{t_2} \{ f(u(t,x_2)) - f(u(t,x_1)) \} dt = 0$$

ур-ия в слабой форме допускают разрывы.

В области гладкости слабая форма эквивалентна дифференциальному уравнению.

В области разрывов:



— Разрыв (проекция)

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)\,dx + f(u(t,b)) - f(u(t,a)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u\,dx = \frac{d}{dt}\left(\int_a^{\sigma(t)} u\,dx + \int_{\sigma(t)}^b u\,dx\right) = \int_a^{\sigma(t)} u'_t\,dx + \int_{\sigma(t)}^b u'_t\,dx + u_L(t,\sigma(t))\frac{d\sigma(t)}{dt} - u_2(t,\sigma(t))\frac{d\sigma(t)}{dt}$$

$x \to \sigma(t) + 0$ $\quad$ $x \to \sigma(t) - 0$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = S$$ — скорость разрыва

$b \to o(t)+0$

$f(u(t,b)) \to f_R$

$a \to o(t)-0$

$f(u(t,a)) \to f_L$

$\Big\}$ потоки по решениям слева и справа

$$S(u_L - u_R) + \underbrace{\int_{a}^{o(t)} + \int_{o(t)}^{b}}_{\to 0} + f_R - f_L = 0 \qquad S(u_R - u_L) = f_R - f_L$$

ур-ие Рейнкена-Гюгонио.

Для ур-ия Хопфа:

$$f = \frac{u^2}{2}: \quad S = \frac{u_R^2 - u_L^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{u_R + u_L}{2}$$ — скорость разрыва

Все хорошо, но нюанс: в дифференциальной форме решений не было, а теперь бесконечно много

Пример:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2)}{\partial x} = 0 \to \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2u^3/3\right) = 0 \to \frac{\partial u_1}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

В слабой форме:

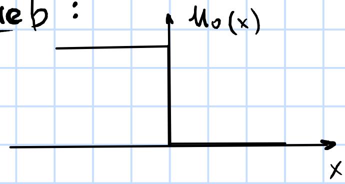
Разная скорость распр.

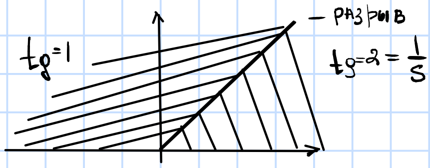
$$\left\{ \begin{aligned} S_1 &= \frac{u_R + u_L}{2} \\ S_2 &= \frac{2}{3}\,\frac{u_R^2 + u_R u_L + u_L^2}{u_R + u_L} \end{aligned} \right\}$$

в дифференциальной форме решения бы совпадали, а в слабой — нет. Слабая форма порождает неединственность решений.

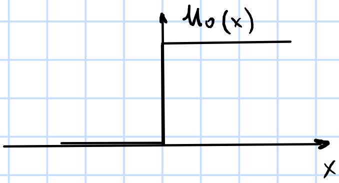
Пример:

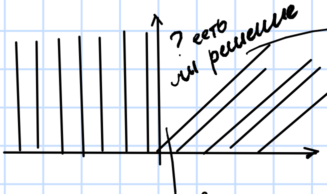
(1).





для Хопфа

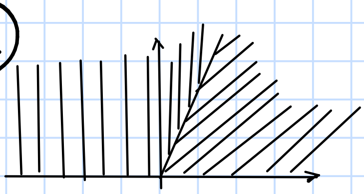


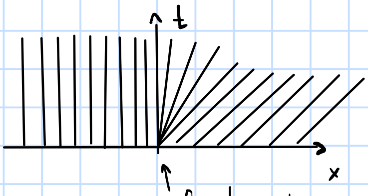


→ в дифф. форме нет.

↓ в слабой форме есть

(2.)



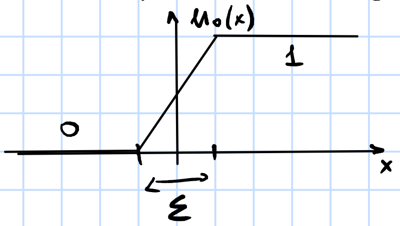


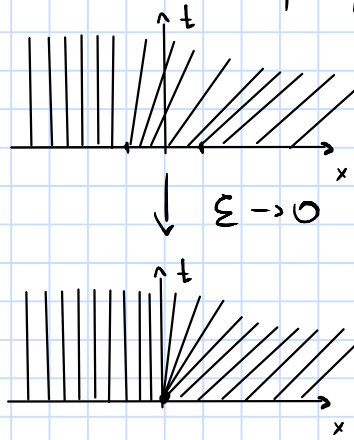
↑ веер характеристик.

(1) Ударных волн разрежения нет, характеристики не могут начинаться на разрыве и уходить в бесконечность.

в слабой форме так можно, но мы запрещаем это.

Математическое обоснование выбора решения.





Веер волн разрежения непрерывно зависит от начальных условий.

Семинар 15.03.22.

КР 16.03 10:45 Б. Хим

① Какие из предлож. условий соответствуют корректной постановке задачи?

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 8\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 12\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad x, t \in (0;1)$$

а) $u(0,x) = \varphi(x)$; $v(0,x) = \psi(x)$; $u(t,0) = \varphi_1(x)$

б)

в)

г)

Решение существует во всей области и единственно.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0}; \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем базис из левых собственных векторов для A

Л.С.В для A <=> П.С.В для A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 12 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 24 - 11\lambda + \lambda^2 - 24 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 11) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \quad \lambda = 11$$

$\underline{\lambda=0}$: $(A^T-\lambda E)v=0 \iff \begin{pmatrix} 8-0 & 12 \\ 2 & 3-0 \end{pmatrix} \sim (2\ \ 3);\ v_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda=11}$: $(A^T-\lambda E)v=0 \iff \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \sim (1\ \ -4);\ v_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

S - матрица перехода к ОНБ из $\underline{\text{С.В}}$

Нормируем

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S=\begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

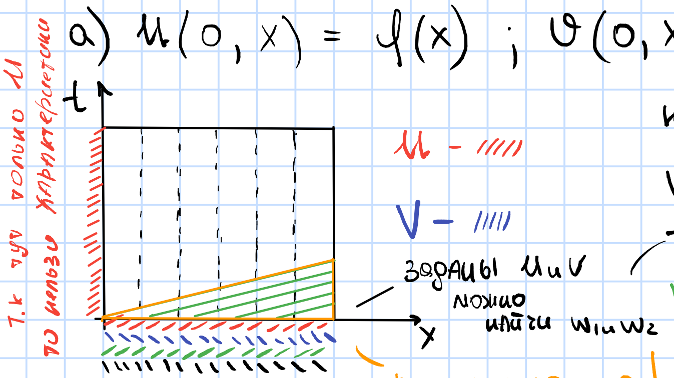
$$\vec{w}=S^T\vec{u}: \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}}(-3u+2v) \\ \frac{1}{\sqrt{17}}(4u+v) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t}+\underset{\lambda_1}{0}\,\dfrac{\partial w_1}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t}+\underset{\lambda_2}{11}\,\dfrac{\partial w_2}{\partial x}=0 \end{cases}$$

Характеристический вид системы.

Домножили исходную систему на S^T и привели A к диагональному виду.

а) $u(0,x)=\varphi(x);\ v(0,x)=\psi(x);\ u(t,0)=\varphi_1(x)$



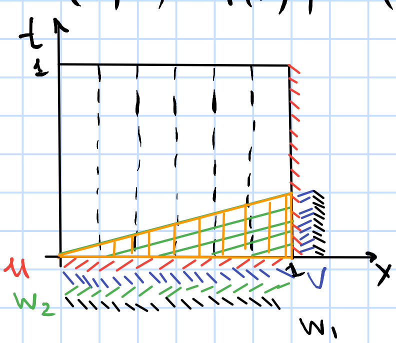
на нижней линии:

$w_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3u+2v);\ \lambda_1=0$ $\qquad x-\lambda_1 t$ - const, x - const

$w_2=\frac{1}{\sqrt{17}}(4u+v);\ \lambda_2=11$ $\qquad x-\lambda_2 t$ - const, $x-11t$ - const, $t=\frac{x}{11}+\text{const}$

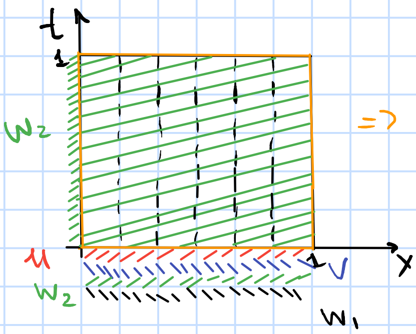
решение определимо только в треугольнике, а надо во всем квадрате - постановка $\underline{\text{не}}$ корректна.

б) $u(0,x)=\varphi(x);\ v(0;x)=\psi(x);\ u(t,1)=\xi(t)$



Аналогично! $\underline{\text{Не}}$ корректно.

б) $u(0,x)=f(x)$; $v(0;x)=\psi(x)$; $\underbrace{\{4u+v\}(t;0)}_{\sqrt{17}\,w_2(t,0)=\xi(t)}=\xi(t)$



$\Rightarrow$ w_1 и w_2 определены в любой точке

$\Downarrow$

Решение определено везде

$\Downarrow$

Задача корректна.

② Составить ур-ние характеристик и определить решение задачи в точке $(1;10)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\sqrt{xt}\,\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & t,x>0 \\ u(x,0)=0 & x>0 \end{cases}$$

1) Характеристики:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$x-\lambda t=c$$

$$\frac{dx}{dt}=\lambda$$

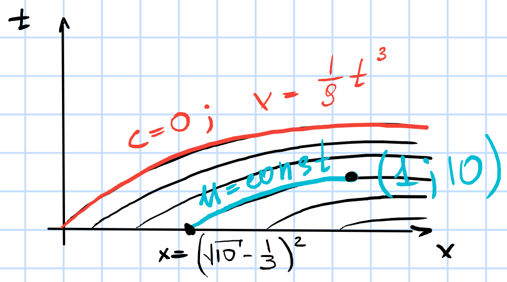
$\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{xt}$ – ур-ние характеристик.

$\downarrow$ интегрируем

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{t}\,dt$$

$$2\sqrt{x}=\frac{2}{3}t^{3/2}+\tilde{c}$$

$\boxed{\sqrt{x}=\frac{1}{3}t^{3/2}+c}$ – семейство характеристик.



$t=1$
$x=10$

Найдем характеристику, проходящую через т. $(1;10)$

$\sqrt{10}=\frac{1}{3}+c \Rightarrow c=\sqrt{10}-\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\sqrt{x}=\frac{1}{3}t^{3/2}+\left(\sqrt{10}-\frac{1}{3}\right)}$

пересекает ось Ox в т.

$$\sqrt{x}=\left(\sqrt{10}-\frac{1}{3}\right)$$

$$x=\left(\sqrt{10}-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$u\begin{pmatrix} t=1 \\ x=10\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} t=0 \\ x=\left(\sqrt{10}-\frac{1}{3}\right)^2\end{pmatrix} \circledcirc$$

$$\circledcirc\ u_0\left(x=\left(\sqrt{10}-\frac{1}{3}\right)^2\right)=\left(\sqrt{10}-\frac{1}{3}\right)^2$$

решение
$t=1$; $x=10$

$$\frac{dx}{dt}=$$

③ Исследовать схему на апроксимацию и устойчивость.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

1) Апроксимации

По Тейлору: $u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_1)\tau^2$

$$u_{m+1}^n = u_m^n + \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_2)h^3$$

$$u_{m-1}^n = u_m^n - \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_3)h^3$$

$$\frac{\cancel{u_m^n} + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_1)\tau^2 - \cancel{u_m^n}}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi)$$

$$\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = \frac{u_m^n + \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi)h^3}{2h}$$

$$\frac{-\cancel{u_m^n} + \frac{\partial u}{\partial x}h - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x}(\xi_3)h^3}{} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{12}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_2) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_3)}_{\text{не ушли}}\Bigg)$$

Схема $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_1) + \frac{ch^2}{12}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_2) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_3)\right)$

Схема = уравн + $O(\tau) + O(h^2)$ => 1 порядок по времени.
2 порядок по пр-ву

2) Устойчивость:

$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$; $u_m^n \to \lambda^n e^{im\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\alpha} - \lambda^n e^{im\alpha}}{\tau} + c\,\frac{\lambda^n\{e^{i(m+1)\alpha} - e^{i(m-1)\alpha}\}}{2h} = 0 \quad \Big/\lambda^n e^{im\alpha}$$

$\frac{\lambda - 1}{\tau} + c\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2h}\right) = 0$; $\frac{\lambda-1}{\tau} + c\,\frac{\cos\alpha}{h} = 0$;

$= \cos\alpha$

$\lambda = 1 + \underbrace{\left(\frac{c\tau}{h}\right)}_{= C_0} \cos\alpha$

$\lambda = 1 + C_0 \cos\alpha$

$\boxed{c > 0}$

Спектральная устойч. $|\lambda| \leq 1$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha = 0$; $\lambda = 1 + C_0 > 1$ – схема не устойчива

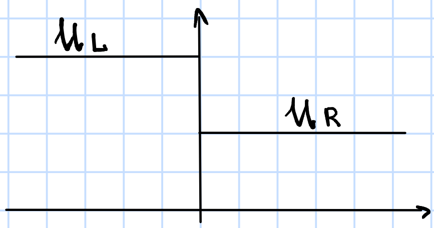
$u^n_{m,k} \to \lambda^n e^{i(m\alpha + k\beta)}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

4) Написать дискретизацию потоков на границе ячеек $f(u_{i+0,5})$ для ур-ния:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0; \quad f(u) = \frac{u^2}{2} + u$$

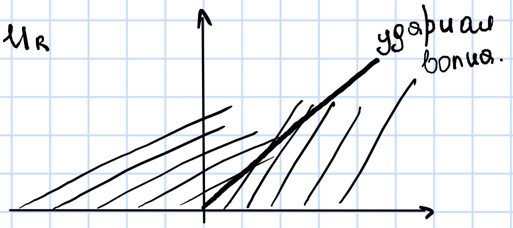
Метод Годунова:

1) Задача о распаде разрыва:



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u+1)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$u_L > u_R$



$u_L = 1$ $\quad x - 2t$ – const

$t = \frac{x}{2} + c$

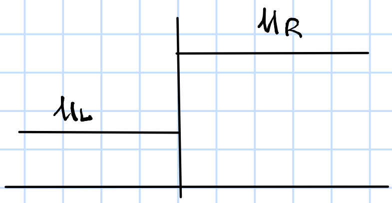
$u_R = 0$ $\quad x - t = c$

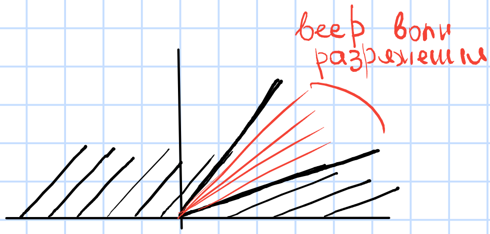
$t = x + c$

Скорость: $S = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{u_R^2}{2} + u_R - \frac{u_L^2}{2} - u_L}{u_R - u_L} = \frac{u_R + u_L}{2} + 1.$

$$\boxed{u_L > u_R \quad u = \begin{cases} u_L, & x < St \\ u_R, & x > St \end{cases}}$$

$u_L \leq u_R$





Автомодельное решение – $u = f(x/t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u+1)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\cancel{f'}\left(-\frac{x}{t^2}\right) + (f+1)\cancel{f'}\frac{1}{t} = 0$$

$f' = 0$ – не устраивает

$$-\frac{x}{t} + (f+1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f = \frac{x}{t} - 1$$ – автомодельное.

$$u = \begin{cases} u_L, & x < (u_L+1)t \\ x/t - 1, & (u_L+1) \leq \frac{x}{t} \leq (u_R+1) \\ u_R; & x > (u_R+1)t \end{cases}$$

Общее решение:

$$u \xrightarrow{u_L > u_R} \begin{cases} u_L, & \frac{x}{t} < S = \frac{u_R + u_L}{2} + 1 \\ u_R, & x/t \geq S = \frac{u_R + u_L}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{u_L \leq u_R} \begin{cases} u_L, & x/t < (u_L + 1) \\ \frac{x}{t} - 1, & (u_L+1) \leq \frac{x}{t} \leq (u_R + 1) \\ u_R; & \frac{x}{t} > (u_R + 1) \end{cases}$$

$$f(u_{i+0,5}) = f\left(u\left(\frac{x}{t} = 0\right)\right) = \frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{u}$$

$$\tilde{u} \xrightarrow{u_i < u_{i+1}} \begin{cases} u_i, & 0 < S \\ u_{i+1}, & 0 \geq S \end{cases} \qquad S = \frac{u_{i+1} + u_i}{2} + 1.$$

$$\xrightarrow{u_i \geq u_{i+1}} \begin{cases} u_i, & 0 < u_i + 1 \\ -1, & u_i + 1 \leq 0 \leq u_{i+1} + 1 \\ u_{i+1}, & 0 > u_{i+1} + 1 \end{cases}$$

N6. $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = f \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = g \end{cases}$$

$$\frac{\vec{u}_m^{n+1} - \vec{u}_m^{n-1}}{2\tau} + A\frac{\vec{u}_m^n - \vec{u}_{m-1}^n}{h} = \vec{F}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{F}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

S – матрица перехода к базису из л.с.в. A

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & -\sqrt{10} \end{pmatrix}\frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = \tilde{\vec{F}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\vec{W}_m^{n+1} - \vec{W}_m^{n-1}}{2\tau} + \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & -\sqrt{10} \end{pmatrix}\frac{\vec{W}_m^n - \vec{W}_{m-1}^n}{h} = \tilde{\vec{F}}$$

$$|A - \lambda E| \to \lambda = \pm\sqrt{10}$$

$$\begin{cases} \frac{W_m^{n+1} - W_m^{n-1}}{2\tau} + \sqrt{10}\,\frac{W_m^n - W_{m-1}^n}{h} = \tilde{F}_1 \\ \frac{W_m^{n+1} - W_m^{n-1}}{2\tau} - \sqrt{10}\,\frac{W_m^n - W_{m-1}^n}{h} = \tilde{F}_2 \end{cases}$$

– если это устойчиво, то устойчива и первоначальная схема.

$$\frac{\lambda^2 - 1}{2\tau} + \sqrt{10}\,\lambda\,\frac{1 - e^{-\alpha i}}{h} = 0 \qquad \frac{\lambda^2 - 1}{2} + Co\,\lambda(1 - e^{-\alpha i}) = 0;$$

$$\lambda^2 - 1 + 2\lambda Co(1 - e^{-\alpha i}) = 0$$

Ур-ния Параболического типа.

I. Линейное ур-ние теплопроводности:

1) Математическая постановка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$$

Задача Коши для ограниченной области

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) & A < x < B \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in (A,B) \end{cases}$$

Г.У $\to$

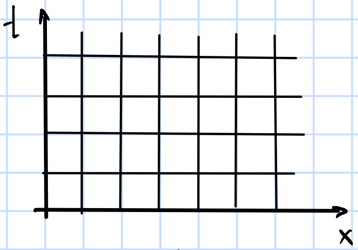
$$\begin{aligned} u(t,A) &= u_1(t) \\ u(t,B) &= u_2(t) \end{aligned}$$ – условия Дирихле.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t,A) &= u_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,B) &= u_2(t) \end{aligned}$$ – условия Неймана.

$$\begin{cases} \alpha(t)u(t,A) + \beta(t)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,A) = \gamma(t) \\ \tilde{\alpha}(t)u(t,B) + \tilde{\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,B) = \tilde{\gamma}(t) \end{cases}$$ – Смешанный тип условий.

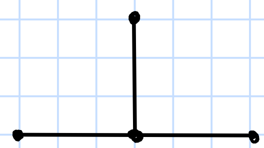
$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \qquad \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 \neq 0$$

Явная схема:



h – шаг по пр-ву

t – по времени.



n – по времени   m – по пр-ву:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a(t^n, x_m)\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + f(t^n, x_m)$$

Аппроксимация:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{1}{2}\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi)$$

$$u_{m\pm1}^n = u^n \pm \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi)$$

Подставим

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{\cancel{u_m} + \frac{\partial u}{\partial t}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t}(\xi)\tau^2 - \cancel{u_m}}{\tau} = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_+)\frac{h^4}{24} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_-)\frac{h^4}{24}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_+) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_-)\right)$$

$$L(u) = f = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f}_{=0} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi) - a\frac{h^2}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_+) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_-)\right) = O(\tau) + O(h^2)$$

1 - по времени

2 - по пр-ву.

Устойчивость:

$u_m^n \to \lambda^n e^{im\alpha}$ $\qquad f \to 0$

$$\frac{(\lambda-1)}{\tau} = a\frac{e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha}}{h^2} = a\frac{2\cos\alpha - 2}{h^2} = -\frac{a}{h^2}4\sin^2(\alpha/2)$$

$\lambda = 1 - \frac{a\tau}{h^2}4\sin^2(\alpha/2)$; $\quad C_0 = \frac{a\tau}{h^2}$

$\Downarrow$

$\lambda = 1 - C_0 4\cdot\sin^2(\alpha/2)$ $\qquad -1 \leq \lambda \leq 1$

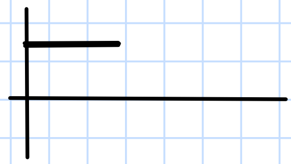
$-1 \leq 1 - C_0 4\cdot\sin^2(\alpha/2)$

$C_0 4\cdot\sin^2(\alpha/2) \leq 2$

$C_0 \leq \frac{1}{2}$ — условие устойчивости для явной схемы

Дискретизация Г.У.

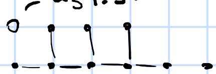
Условия общего типа на границе



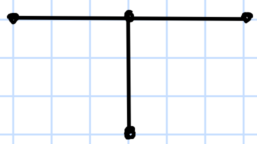
Явная дискретизация

Дирихле: $u_0^{n+1} = u_1(t^{n+1})$

Нейман: $\frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} = u_1(t^{n+1})$



III Неявная схема



$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a(t^n, x_m)\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f(t^{n+1}, x_m)$$

Аппроксимация: 1-й по времени; 2-по пр-ву)

Устойчивость:

$u_m^n \to \lambda^n e^{im\alpha}$; $f \to 0$

$\frac{\lambda-1}{\tau} = a\lambda\frac{e^{i\alpha}-2+e^{-i\alpha}}{h^2}$ $\qquad C_0 = \frac{a\tau}{h^2}$; $\lambda - 1 = C_0\lambda 4\cdot\sin^2(\alpha/2)$

$\lambda = \frac{1}{1 + C_0 4\cdot\sin^2(\alpha/2)}$ — всегда < 1 => Схема абсолютно устойчива.

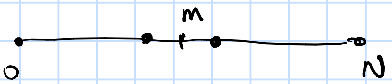
$C_0 = C_0(t, x) = \dfrac{a(t^n, x_m)\tau}{h^2}$

Схема $\Leftrightarrow$ $(1+2C_0)\,u_m^{n+1} - C_0\,u_{m+1}^{n+1} - C_0\,u_{m-1}^{n+1} = u_m^n + f(t^n; x_m)$

для $m = 1, \dots, N-1$

где $N+1$ – размер сетки от $(0$ до $N)$

справедливо ур-ние



$C_0\,u_{m-1}^{n+1} + (1+2C_0)\,u_m^{n+1} - C_0\,u_{m+1}^{n+1} = u_m^n + f(t^{n+1}; x_m)$

Что получается

$N+1$ – неизвестных : $u_0^{n+1}, \dots, u_N^{n+1}$)

$N-1$ – ур-ние

$+$ Г.У – 2 ур-ния

$\Rightarrow$ Определенная система.

Г.У. Дирихле: $u_0^{n+1} = \mu_1(t^{n+1}) = \mu_1$

СЛАУ: $u_N^{n+1} = \mu_2(t^{n+1}) = \mu_2$

$$
\begin{array}{l}
\text{Г.У} \to \\
m = 1 \\
\\
\\
m = N-1 \\
\text{Г.У} \to
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-C_0 & 1+2C_0 & -C_0 & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & -C_0 & 1+2C_0 & -C_0 & \\
0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mu_1 \\
u_1^n + f(t^{n+1}, x_1) \\
\\
\\
u_{N-1}^n + f(t^{n+1}, x_{N-1}) \\
\mu_2
\end{pmatrix}
$$

– трехдиагональная слау с диагональным преобладанием

Г.У. Смешанного типа:

$\gamma(t^{n+1}) = \alpha(t^{n+1})\,u_0^{n+1} + \beta(t^{n+1})\dfrac{(u_0^{n+1} - 4u_1^{n+1} + 3u_2^{n+1})}{2h}$

2 порядок

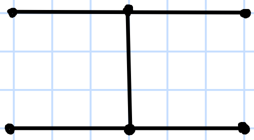
$\left\{\alpha(t^{n+1}) + \dfrac{\beta}{2h}\right\} u_0^{n+1} - \dfrac{\beta\, 4u_1}{2h} + \dfrac{\beta\, 3u_2}{2h} = \gamma(t^{n+1})$

При помощи элемент. преобраз, можно свести к трехдиаг. для прогонки

СЛАУ

ГУ $\to$ $\alpha + \dfrac{\beta}{2h}$

IV Схема Кранка – Николсон $(a - const)$



- Абсолютно устойчива
- Аппрокс: 2 – по врем и пр-ву

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{a}{2}\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{a}{2}\frac{u_{m+1}^{n} - 2u_m^{n} + u_{m-1}^{n}}{h^2} + \frac{f(t^{n+1}, x_m)}{2} + \frac{f(t^n; x_m)}{2}$$

Семинар. 29.03.22.

Устойчивость граничных условий:

Пример:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(t,x) & x \in (0,1) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} - \beta \left. u\right|_{x=0} = f(t), & t > 0 \end{cases}$$

Правое Г.У.

Предлагается дискретизация:

$$\begin{cases} \frac{u_m^n - u_m^n}{\tau} - a\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h} - g(t^n, x_m) = 0 \\ \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} - \beta u_0^{n+1} = f(t^{n+1}) \end{cases}$$

... Н.У. Г.У. ..

Устойчивость по начальным условиям : $Co \le \frac{1}{2}$ (с предыдущ. сем)

Устойчивость по левому Г.У.

Ошибка эволюционир. $\to \lambda^n e^{im\varphi}$

$u_n^m \to \lambda^n e^{im\varphi}$

φ – удовлетворяет Г.У (не обязательно действит)

Подставим в Г.У. $(u_m^n \to \lambda^n e^{im\varphi}, f \to 0)$

$$\frac{\lambda^n e^{i\varphi} - \lambda^{n+1}}{h} - \beta\lambda^{n+1} = 0$$

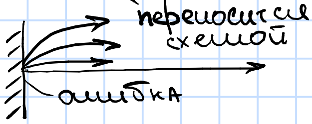
$$e^{i\varphi} - 1 - \beta h = 0$$

$$\underline{e^{i\varphi} = 1 + \beta h} \leftarrow \varphi \text{ – удовл. Г.У.}$$

Устойчивость Г.У.

Найдем λ соответств. этому φ

(как'ая схема потянет ошибка



Выразим λ из схемы с учетом $e^{i\varphi}=1+\beta h$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\lambda-1}{\tau}-a\frac{e^{i\varphi}-2+e^{-i\varphi}}{h^2}=0 \quad \leftarrow \text{из схемы}\\ &e^{i\varphi}=1+\beta h\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda=\frac{a\tau}{h}\left[1+\beta h-2+\frac{1}{1+\beta h}\right]+1$$

$$\lambda\approx 1+Co\left[1+\beta h-2+1-\beta h+\frac{(\beta h)^2}{2}+\dots\right]=1+Co\frac{(\beta h)^2}{2}>1$$

$|\lambda|>1$ — Г.У. неустойчивы при любом Co.

---

② Возьмем правое Г.У

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=5\\ \dots \text{ Н.У. \dots Г.У}\end{cases} \longrightarrow \quad \text{Дискретизация} \quad \begin{cases}\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-a\dfrac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2}=0\\ \dfrac{u_M^{n+1}-u_{M-1}^{n+1}}{h}=5 \quad \dots\end{cases}$$

$u^n_{M+m}=\lambda^n e^{im\varphi}$ $\quad m=0,-1,-2\dots$

$u^{n+1}_{M-1}=\lambda^{n+1}e^{i(M-1)\varphi}$

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{iM\varphi}-\lambda^{n+1}e^{i(M-1)\varphi}}{h}=0 \Rightarrow 1-e^{-i\varphi}=0 \Rightarrow \boxed{e^{-i\varphi}=1}$$

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi}-\lambda^n e^{im\varphi}}{\tau}=a\frac{e^{i(m+1)\varphi}-2e^{im\varphi}+e^{i(m-1)\varphi}}{h^2}\lambda^{n+1}=0 \;\Big/\lambda^n e^{im\varphi}$$

$$\frac{\lambda-1}{\tau}-a\frac{e^{i\varphi}-2+e^{-i\varphi}}{h^2} \qquad e^{-i\varphi}=1.$$

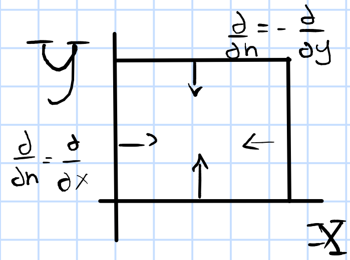
$$\frac{\lambda-1}{\tau}-a\underbrace{\frac{1-2+1}{h^2}}_{=0}\lambda=0 \qquad \lambda=1 \Rightarrow \text{схема устойчива.}$$

Замечание:

Устойчивость $\Rightarrow$ { Устойчивость по Нейману; Устойчивость по Г.У.

Уравнение теплопроводности в 2D

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\,\Delta u & \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ (x,y) \in (0, X) \times (0, Y) = \Omega \\ \alpha\, u\big|_{\partial\Omega} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \gamma \\ u\big|_{t=0} = u_0(x,y) \end{cases}$$

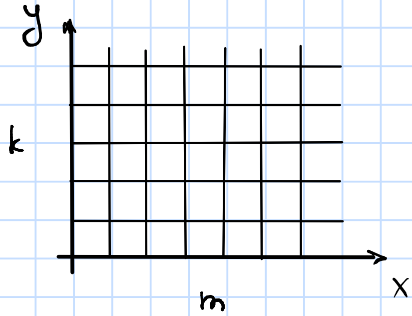


Дискретизация:

τ - шаг по времени

h_x - шаг по x

h_y - шаг по y



$$(m,k) \to (\underbrace{m \cdot h_x}_{x_m}, \underbrace{k \cdot h_y}_{y_k})$$

I Явная схема

$$\frac{u^{n+1}_{m,k} - u^n_{m,k}}{\tau} = a\,\frac{u^n_{m+1,k} - 2u^n_{m,k} + u^n_{m-1,k}}{h_x^2} + a\,\frac{u^n_{m,k+1} - 2u^n_{m,k} + u^n_{m,k-1}}{h_y^2} + f(t^n, x_m, y_k)$$

+ дискретизация Г.У.

Апроксимация 1) по t

2) по пр-ву

Устойчивость: $u^n_{m,k} \to \lambda^n e^{im\alpha} e^{ik\beta}$

$f \to 0$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = a\,\frac{2\cos\alpha - 2}{h_x^2} + a\,\frac{2\cos\beta - 2}{h_y^2}$$

$$\lambda = 1 - 4\,Co_x \sin^2(\alpha/2) - 4\,Co_y \sin^2(\beta/2)$$

$$Co_x = \frac{a\tau}{h_x^2}; \quad Co_y = \frac{a\tau}{h_y^2};$$

устойч $\Leftrightarrow$ $|\lambda| \le 1$ $\qquad 4\,Co_x \sin^2(\alpha/2) + 4\,Co_y \sin^2(\beta/2) \le 2$

$$Co_x + Co_y \le 1/2$$

$$h_x = h_y \Rightarrow Co_x = Co_y = Co$$

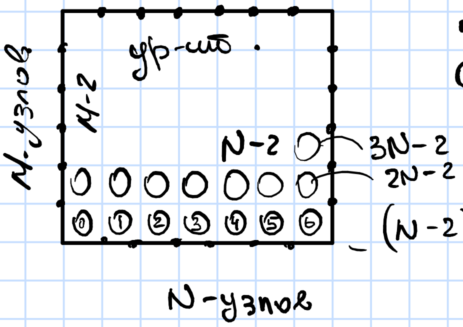
$$\boxed{Co \le 1/4}$$

II Неявная схема

$$\frac{u^{n+1}_{m,k} - u^{n}_{m,k}}{\tau} = a\,\frac{u^{n+1}_{m+1,k} - 2u^{n+1}_{m,k} + u^{n+1}_{m-1,k}}{h_x^2} + a\,\frac{u^{n+1}_{m,k+1} - 2u^{n+1}_{m,k} + u^{n+1}_{m,k-1}}{h_y^2} + f(t^{n+1}, x_m, y_k)$$

$$u^{n+1}_{m,k}(1 + 2Co_x + 2Co_y) + Co_x\,u^{n+1}_{m+1,k} + Co_x\,u^{n+1}_{m-1,k} + Co_y\,u^{n+1}_{m,k+1} + Co_y\,u^{n+1}_{m,k-1} = u^{n}_{m,k} + f(t^{n+1}, x_m, y_n)$$

Г.У. Дирихле



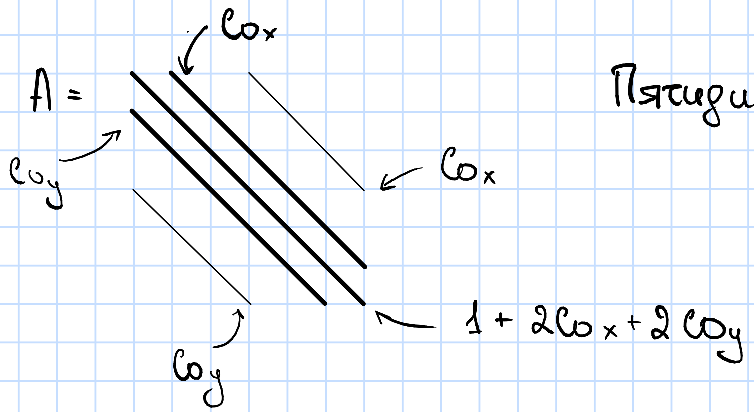
• – решение известно из Г.У.
O – нет решения

$(N-2)(M-2)$ – уравнений $\Rightarrow$ СЛАУ

$x = (u_0, u_{N-2}, \dots, u_{(M-2)(N-2)})$

Ур-ния вида $A\vec{x} = \vec{b}$ – СЛАУ.

$$A = \begin{array}{r} \\ (0;0) \\ \\ \vdots \\ N-1: \\ (M-1)(N-1) \end{array} \begin{pmatrix} & & N-1 & N & \dots & \text{всего } (M-1)(N-1) \\ [1+2Co_x+2Co_y] & [Co_x] & \dots [Co_y] & & & \\ [Co_x] & [1+2Co_x+2Co_y] & [Co_x]\ \vdots & [Co_y] & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ Co_y & \dots\dots\dots & [1+2Co_x+2Co_y] & [Co_x] & & \ddots \\ \dots & & & & & \end{pmatrix}$$



Пятидиагональная матрица

III СЛАУ

$\|x\|$ – норма вектора

$\|A\|$ – норма матрицы подчиненная норме вектора

$\varkappa = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ – число обусловленности

Если A – симметричная и положительно определена, то

$\varkappa = \dfrac{\lambda(max)}{\lambda(min)}$ λ – собственные значения X

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda(A^T A)}$

Смысл числа обусловленности

$Ax = b$ – исходная система

$\tilde{A}$ – зашумленная матрица $\hat{A} = A + \Delta A$ – зашумление } компьютерн. арифмет.

$\tilde{b}$ – зашумл. прав. часть $\tilde{b} = b + \Delta b$ – зашумлен

$\hat{x} = x^* + \Delta x$

x^* – решение исходной сист.

$\hat{x}$ – решение зашумл. системы

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\varkappa(A)}{1 + \varkappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left\{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right\}$$

Свойство: $\varkappa \geqslant 1$ $\quad 1 = \|A^{-1} \cdot A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$

Чем больше $\varkappa$, то тем больше зашумление влияют на решение.

Итерационный процесс с начальным приближением x_0 – правило позволяющее получить x^i – i-ое приближение к решению.

Опр Итерационный процесс сходится к решению СЛАУ x^* если $\|x^i - x^*\| \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$

Опр Итерационный процесс сходится линейно, если $\exists q < 1$ и $\exists A > 0$, что $\|x^i - x^*\| \leq A q^i$

Опр $Ax = b \iff x = Px + C$

$x^{i+1} = Px^i + C$ – простейший итерационный процесс.

Th Если $\|P\|<1$ итерационный процесс сходится линейно из любого x^0

$$\|x^{i+1} - x^*\| = \|Px^i + c - x^*\| = [Ax^* = b;\ x^* = Px^* + c] =$$
$$= \|Px^i + c^i - Px^* - c\| = \|P(x^i - x^*)\| = \|P^i(x^0 - x^*)\| \le$$
$$\le \underbrace{\|P^i\|}_{q<1} \cdot \|x^0 - x^i\|$$

Доказано.

Th Основная Th об простейших итерационных процессах.

Простейший итерационный процесс сходится из любого x^0

$$\Updownarrow$$

все собственные значения P по абсолютной величине <1

$$\|x^{i+1} - x^*\| \le \|P^i\| \cdot \|x^0 - x^*\|$$

Существует матрица S : $P = S^{-1} \Lambda S$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_k \end{pmatrix}$$

жорданова клетка

$$P^i = S^{-1}\Lambda S \ ; \quad P^i = S^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_k^i \end{pmatrix} S$$

$$\Lambda^i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^i \underset{\text{клетки}}{\overset{\text{k-размер}}{=}} \begin{pmatrix} \lambda^i & C_i^1 \lambda^{i-1} & \cdots & C_k^i \lambda^{i-k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_i^1 \lambda^{i-1} \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

IV Метод Якоби

$$A = L + D + U$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} ; \quad D - diag ; \quad U = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть D - невырожден.

$$(L + U + D)x = b$$
$$Dx = -(L+U)x + b$$
$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

$$x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{P} x + \underbrace{D^{-1}b}_{c}$$

$$x^{i+1} = -D^{-1}(L+U)x^i + D^{-1}b$$

Метод Якоби

Теорема:

Метод сходится $\iff |\lambda(P)| < 1$

$|\lambda(-D^{-1}(L+U))| < 1$

корни $\det(-D^{-1}(L+U) - \lambda I) = 0$ меньше 1 по модулю.

$$\det(D^{-1}(L+U) - \lambda I) = \underbrace{(-1)^n}_{\neq 0} \underbrace{\det D^{-1}}_{\neq 0} \det((L+U) - \lambda D) = 0$$

Метод сходится $\iff$ корни $\det((L+U) - \lambda D) = 0$ меньше 1 по модулю.

A имеет строгое диагональное преобладание, если

$$\|a_{ii}\| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i$$

$$\|A\|_1 = \max \sum_j |a_{ij}|$$

Теорема: Пусть A имеет строгое диагональное преобладание, тогда метод Якоби сходится линейно.

Док-во

$P = D^{-1}(L+U)$

строка матрицы P

$$-\left(\frac{a_{i1}}{a_{ii}} \quad \frac{a_{i2}}{a_{ii}} \quad \dots \quad \underset{ij}{0} \quad \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}} \quad \dots \quad \frac{a_{i,n}}{a_{ii}}\right)$$

$$\sum |\text{всех элементов в строке}| = \sum_{j \neq i} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 1$$

$$\|P\|_1 < 1.$$

V Метод Гаусса-Зейделя

$A = (L + D + U)$

D - невырожденная.

$(L + D + U)x = b$

$(L + D)x = b - Ux$

$X = -(L+D)^{-1}Ux + (L+D)^{-1}b$

$$X^{i+1} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{P} x^i + \underbrace{(L+D)^{-1}b}_{C}$$

Метод Г.-З. сходится, если матрица положит. опр. и симметрич. - достат. услов.

VI Метод простой итерации.

$Ax = b$

$x = x - \tau(Ax - b) \quad \tau \in \mathbb{R}$

$x^{i+1} = x^i - \tau(Ax^i - b)$

$x^{i+1} = \underbrace{(I - \tau A)}_{P} x^i + \tau b$

МПИ сходится $\Leftrightarrow$ корни уравнения $\det(P - \lambda I) = 0$ не превосходят по абсолютн. велич. 1.

$\ulcorner \det(I - \tau A - \lambda I) = \det(-\tau A + (1-\lambda) I)$

$(-\tau)^n \det\left(A - \frac{1-\lambda}{\tau} I\right) = 0$

$\lambda(A)$ собств. знач. A.

$\lambda(A) = \frac{1-\lambda}{\tau} \qquad \lambda = 1 - \tau \cdot \lambda(A) \lrcorner$

МПИ сходится тогда и только тогда

$|1 - \tau \lambda(A)| < 1$ собств. знач. $\boxed{A - \text{(положит. опр. и симм.)}}$

Если $\exists$ собств. числа с разным знаком действительных частей, то $\forall \tau$

Семинар.

Методы решения СЛАУ

$Ax = b$ - СЛАУ

$\Updownarrow$

$x = Px + C \qquad x^{i+1} = Px^i + C$ - Простейший итерационный процесс.

Th Простейший итерационный процесс сходится к решению из любого x^0

$\Updownarrow$

$|\lambda(p)| < 1 \qquad \lambda(p)$ - собств. числа $p \in \mathbb{C}$

Ошибка на i итерации: $\epsilon^i = x^i - x^*$

$P = I - \tau A \Rightarrow$ симметрич $\Rightarrow$ существует базис из собственных векторов.

I. Оптимальный выбор τ

$x^{i+1} = x^i - \tau(Ax^i - b) \qquad A$ - положит. опр и симметр.

$\epsilon^i = x^i - x^* = (P)^i \epsilon^0$

$P = E - \tau A$

<u>МПИ:</u> $\epsilon^1 = P\epsilon^0 \qquad \{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ - ОНБ из с.в. A

$$\varepsilon^1 = (E - \tau A)\varepsilon^0$$

$$\varepsilon^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j$$

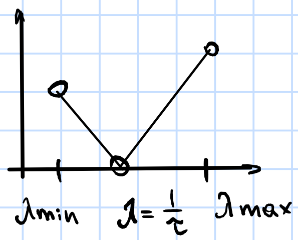
$$\varepsilon^1 = (E - \tau A)\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j \rightarrow \varepsilon^1 = \sum_{j=1}^{n} (1-\tau\lambda_j)\,\alpha_j \vec{e}_j$$

$$\|\varepsilon^1\| \le \max |1-\tau\lambda|$$

$$\lambda = \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$$

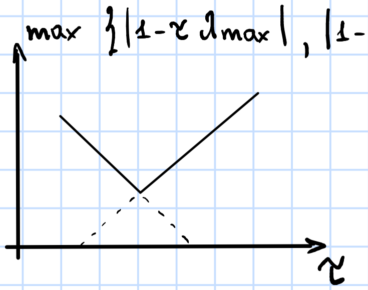
$$\|\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j}_{\varepsilon^0}\| = \max_{\lambda} |1-\tau\lambda|\,\|\varepsilon^0\|$$

Выберем τ так, чтобы $\max\limits_{\lambda} |1-\tau\lambda|$ было минимальным



$|1-\tau\lambda|$ $\quad \max\limits_{\lambda} |1-\tau\lambda| = \max\{|1-\tau\lambda_{max}|, |1-\tau\lambda_{min}|\}$

Выберем τ так, чтобы $\max\{|1-\tau\lambda_{max}|, |1-\tau\lambda_{min}|\}$ было минимальным.



$$|1-\tau\lambda_{min}| = |1-\tau\lambda_{max}|$$

$$1-\tau\lambda_{min} = \tau\lambda_{max} - 1$$

$$\tau(\lambda_{min} + \lambda_{max}) = 2$$

$$\boxed{\tau = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}} < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

$\tau < \frac{2}{\lambda_{max}}$ ← условие сходимости

II Еще один простейший метод (SOR)

$$x^{i+1} = (D+\omega L)^{-1} \cdot \{\omega b - [\omega U + (\omega-1)D]\,x^i\}$$

ω – параметр $\in \mathbb{R}$

при $\omega = 1$ – метод Гаусса – Зейделя

$\omega \in (0;2)$; ω можно варьировать

поиск ω оптимальной – сложная задача.

III Чебышевское ускорение для МПИ

Можно ли в МПИ выбирать τ на каждой итерации разным? и как выбирать τ оптимально?

Пусть МПИ:

$$x^{i+1} = x^i - \tau_i (A x^i - b)$$

разная для разных итераций

$\varepsilon^i = P^i \varepsilon^{i-1}$ – обычно

$$\varepsilon^i = \left\{ \prod_{j=1}^{i} (E - \tau_i A) \right\} \varepsilon^0 \quad ; \quad P = E + \tau_j A$$

$\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ – ОНБ из С.В. A

$$\varepsilon^i = \prod_{j=1}^{i} (E - \tau_j A) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e}_k$$

$$\varepsilon^i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\prod_{j=1}^{i} (1 - \tau_j \lambda_k)}_{\text{полином } p(\lambda)} \vec{e}_k$$

τ_j – величины, обратные корням.

$$\|\varepsilon^i\| \leq \max_{\lambda \in [\lambda_{min}; \lambda_{max}]} \left| \prod_{j=1}^{i} (1 - \tau_j \lambda) \right| \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{e}_k \right\|$$

Выбрать $\tau_1, \dots \tau_i$ так, чтобы $\max\limits_{\lambda \in [\lambda_{min}; \lambda_{max}]} \left| \prod\limits_{j=1}^{i} 1 - \tau_j \lambda \right|$ было минимал.

τ_j – обратные корни полинома Чебышева на отр $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$

$$(\tau_i)^{-1} = \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2} + \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi (2j - 1)}{2j} \right)$$

то есть, сначала выбирают кол-во итераций i, потом корни, потом $x^{j+1} = x^j - \tau_j (A x^i - b)$

Замечание: метод хуйни (мы не знаем λ_{min} и λ_{max})

Как оценить:
- Степенной метод
- Аналитич. оценка
- круги Гершгорина...

Как определить i (кол-во итераций)? :

$$\|\epsilon^i\| \leq 2\left(\frac{\sqrt{\varkappa}-1}{\sqrt{\varkappa}+1}\right)^i \|\epsilon^0\|$$

$\varkappa$ - число обусловленности A

$$\varkappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Если сделали i итераций, но невязка большая $\left| \overline{\underline{r = Ax - b}} \right|$ то restart

<u>Замечание</u> Метод неустойчив - машинная арифметика - дает шизец.

Переупорядочивание Чебышева:

кол-во итераций: $i = 2^r$ - должно быть степенью двойки.

Пусть известна перестановка для $i = 2^r$

для $\underline{\underline{i = 2^{r+1}}}$ она следующая: $n(k)$ заменяется на

$n(k)$, $2^{r+1} + 1 - n(k)$

$i = 0$: $\{1\}$ ~ один корень полинома

$r = -1$

$i = 1$: $\{1\}$

$r = 0$

$\{1, 2\}$

$i = 2$: $\{1, 2\}$

$r = 1$

$\{1, 4, 2, 3\}$

$i = 8$: $1, 4, 2, 3$

$r = 2$

$\{1, 8, 4, 5, 2, 7, 3, 6\}$

Берем τ_j (обратные корни в найденном порядке)

Замечание: не знаем λ и все хуево.

Метод сопряженных градиентов - самый лучший для СЛАУ где A - положит. опр. симм. матрица

Как решать СЛАУ

Матрица положит. опред. и симметрич?

CG – метод сопр. град.

$$\|error^i\| \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{æ}-1}{\sqrt{æ}+1}\right)^i \|error^i\|$$

$æ = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$; $error^i = x^i - x^*$

Матрица произвольного вида?

BiCGstab
(breakdown → restart
(перезапуск с новыми нач. прибл.)
неточн. сходится.
если за N итераций не было breakdown то метод сходится в точной арифметике.

GS

GMRES
не доказана оценка сходим.

За N итераций (N^2 – размер матр) метод сойдется в точной арифмет.

Предобуславливание:

$Ax = b$ – надо решить

$M_L A x = M_L b$ M_L – невырождена ;

$M_L A M_R y = M_L b$ M_R – невырождена.

$M_R y = x$

1) M_R и M_L подбираются так :

- число обусловленности $M_L A M_R$ меньше чем у A (увелич. скор. сход.)
- $M_R y = x$ умножается быстро
- Если A – разреженная матрица, то $M_L A M_R$ – тоже разреженная.
- Если A имеет интересные свойства (n^+ опред., симметр) то $M_L A M_R$ – хотелось бы чтобы она тоже имела эти свойства.

2) Разреж. матрицы – посчитать.

- LIL
- CSR – класс – его чаще всего используют.
- DOC

– ленточные матрицы.

M_L и M_R – левый и правый предобуславлеватели

3) Примеры

(3.1) Предобусл. Якоби

$A = (L + D + U)$ D – невырождена.

$Ax = b \iff D^{-1} A x = D^{-1} b$ – только левый предобуславл.

Если A – симметр и + определен., то $(D^{-1}A)$ – обладает такими же свойствами

Умножение на диагональную матрицу выполняется быстро.

$\boxed{\text{Идеальный предобуславливатель – обратная матрица.}}$

(3.2) LU – предобусл.

$A = (LU)$

$L = \begin{pmatrix} \times & & 0 \\ \times & \times & \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$ – нижнетреугол.

$U = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times \\ & 1 & \times \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ – верхнетреуг.

$$\begin{cases} \underbrace{L^{-1} A U^{-1}}_{E} y = L^{-1} b \\ U^{-1} y = x \\ Ux = y \end{cases}$$

LU – разложение $O(N^3)$ – дорого!

$\downarrow$ выход

ILU – Incomplete LU (не полное)

Записывают в матрицы L и U элементы только в том случае, если в матрице A на этом месте стояли ненулевые элементы.

Если матрица A – симметричная, то LU разложение вырождается в разложение Холецкого.

Разл. Холецкого: $U = L^T$ – предобуславливатель Холецкого. ознакомиться самостоятельно.

5.) $M_L A M_R$ – на прямую не вычисляется – смотри конкретный алгоритм

2D ур-ние теплопроводности

Задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ \text{Г.У.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \ \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx} u^{n+1/2} + \Lambda_{yy} u^n + f \\ ② \ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_{xx} u^{n+1/2} + \Lambda_{yy} u^{n+1} + f \end{cases}$$

$O(\tau, h^2)$ - 2 по пр-ву 1 по вр.

$$\Lambda_{xx} u^{n+1/2} = \frac{u^{n+1/2}_{m+1,k} - 2u^{n+1/2}_{m,k} + u^{n+1/2}_{m-1,k}}{h^2}$$

$$\Lambda_{yy} u^n = \frac{u^n_{m,k+1} - 2u^n_{m,k} + u^n_{m,k-1}}{h^2}$$

Устойчивость:

①. $u^{n+1/2}_{m,k} \to \lambda^{n+1/2} e^{i(m\alpha + k\beta)}$; $f \to 0$

$$\frac{\lambda^{n+1/2} - \lambda^n}{\tau/2} = \frac{\lambda^{n+1/2} \cdot 2(\cos\alpha - 1)}{h^2} + \frac{\lambda^n \, 2(\cos\beta - 1)}{h^2}$$

$$\sqrt{\lambda} - 1 = \frac{\tau}{h^2}(\cos\alpha - 1)\sqrt{\lambda} + \frac{\tau}{h^2}(\cos\beta - 1)$$

$C_0 = \frac{\tau}{h^2}$; $\sqrt{\lambda}\,(1 - C_0(\cos\alpha - 1)) = 1 + C_0(\cos\beta - 1)$

$$\lambda = \left(\frac{1 - C_0(1 - \cos\beta)}{1 + C_0(1 - \cos\alpha)}\right)^2 \leq \frac{1 - C_0(1-1)}{1 + C_0(1-1)} = 1.$$

$$0 < \lambda \leq 1$$

Аналогично во втором $|\lambda| \leq 1$.

Если размер сетки N => кол-во неизвестных N^2

В лоб: СЛАУ: $N^2 \times N^2$

Этот способ: 2 СЛАУ (каждая $N^2 \times N^2$) но обе трехдиагонал. — прогонка.

Замечание: иногда в ① и ② случае $\lambda > 1$, тогда нужно рассматривать устойчивость в другой схеме в комплексе.

Нелинейное ур-ние теплопроводности в 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Явная схема: $$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} = \frac{\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n_{m+1/2} - \left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n_{m-1/2}}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{k(u^n_{m+1/2})\frac{u^n_{m+1}-u^n_m}{h} - k(u^n_{m-1/2})\frac{u^n_m-u^n_{m-1}}{h}\right\}$$

как апроксимировать k ?

① Линейной интер: $k(u^n_{m+1/2}) = \frac{k(u^n_{m+1})+k(u^n_m)}{2}$

② Линейн. интер. (вл2) $k(u^n_{m+1/2}) = k\left(\frac{u^n_{m+1}+u^n_m}{2}\right)$

③ По потоку

$u^n_{m+1} \geq u^n_m$, то $k(u^n_{m+1/2}) = k(u^n_{m+1})$

$u^n_{m+1} < u^n_m$, то $k(u^n_{m+1/2}) = k(u^n_m)$

④ Против потока

$u^n_{m+1} \geq u^n_m \Rightarrow k(u^n_{m+1/2}) = k(u^n_m)$

$u^n_{m+1} < u^n_m \Rightarrow k(u^n_{m+1/2}) = k(u^n_{m+1})$

I Апроксимация

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left(k\left(\frac{u^n_{m+1}+u^n_m}{2}\right)\cdot\frac{u^n_{m+1}-u^n_m}{h} - k\left(\frac{u^n_m+u^n_{m-1}}{2}\right)\cdot\frac{u^n_m-u^n_{m-1}}{h}\right)$$

$$k\left(\frac{u^n_{m+1}+u^n_m}{2}\right) = k\left(u^n_{m+1/2} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{m+1/2}\frac{h}{2}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{m+1/2}\frac{h}{2}} + O(h^2)\right) =$$

$$= k(u^n_{m+1/2} + O(h^2)) = k(u^n_{m+1/2}) + k\big|_{m+1/2}\cdot O(h^2)$$

k

Семинар.

Эллиптические ур-ния

I Постановка:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f(\vec{x}) & x \in \Omega \\ \alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g & \vec{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

$\exists \vec{x} \in \partial\Omega : \alpha(\vec{x}) \neq 0$

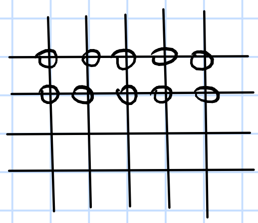
II Линейная эллиптическая задача на кв. сетке с условием Дирихле.

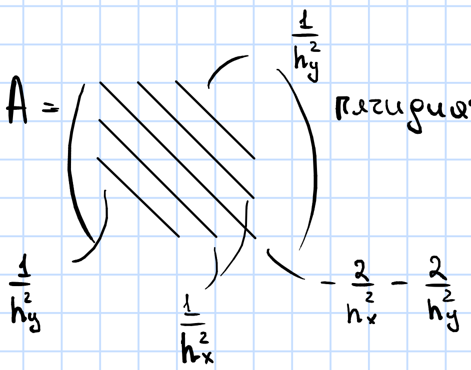
$$\begin{cases} \Delta u = f(\bar{x}); & x \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Дискретизация

$$\frac{u_{m+1,k} - 2u_{m,k} + u_{m-1,k}}{h_x^2} + \frac{u_{m,k+1} - 2u_{m,k} + u_{m,k-1}}{h_y^2} = \tilde{f}(x_m, y_k)$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ \vdots \\ u_{N-2,K-2} \end{pmatrix} \qquad A\vec{u} = \vec{b} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} f(x_1,y_1) \\ f(x_2,y_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}, y_{K-2}) \end{pmatrix}$$





пятидиагональная

Матрица A — симметричная положит. определенная

Метод сопр. градиентов. — CG

Предобуславливание — неполное Холецкого

$æ \sim \dfrac{1}{\left(\frac{h}{L}\right)^2}$ $\quad$ h — размер сетки.

III Метод установления

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + f, & \bar{x} \in \Omega \\ \alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = g; & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

При $t \to \infty$ процесс устанавливается (не всегда)

$$\frac{\partial}{\partial t} \to 0 \qquad \begin{cases} \Delta u = f \\ \alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{\vec u^{n+1} - \vec u^n}{\tau}}_{\frac{\partial}{\partial t}} = -\underbrace{A\vec u}_{\Delta u} + \underbrace{\vec b}_{f}$$

– явное. сходится для ур-ния теплопроводн.

$$\vec u^{n+1} = \bar u^n - \tau A \bar u^n + \tau \vec b$$

$$\vec u^{n+1} = (I - \tau A)\vec u^n + \tau b$$

↑

МПИ для СЛАУ

Метод установления эквивалентен МПИ для СЛАУ.
(оптимальный τ – обратные корни полинома Чебышева)

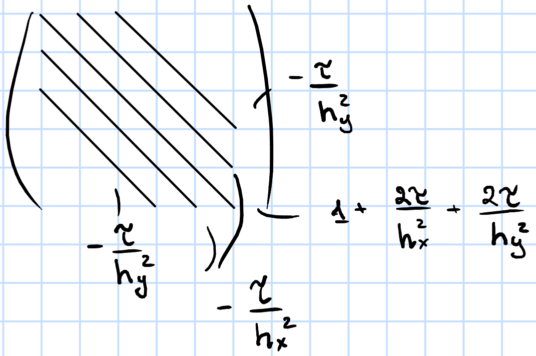
Но все равно хуже чем CG

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A\bar u^{n+1} - b$$ – неявный метод установления.

$$(I + \tau A)\, u^{n+1} = u^n - \tau b$$

У этой СЛАУ больше диагональное преобладание и меньшее число обусловленности.

СЛАУ с матрицей $I + \tau A$



Многосеточный метод.

AMG – алгебр. многосет. метод.

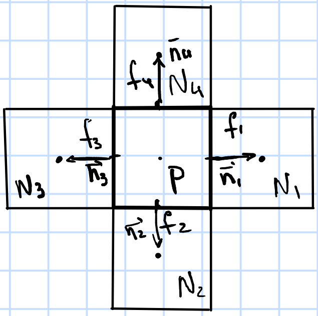
Линейные эллиптич. задачи Лапласа решаются преобразованием (Фурье)

Сведение дифф. ур-ний к алгебраической.

Линейная. эллипт. – Фурье! Только линейн!

Нелинейн. GAMK

VI Дискретизация Δu на неструктурир. сетке.



$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$$

$$\iiint\limits_V \Delta u \, dV = \iint\limits_{\partial V} \nabla u \cdot d\vec{S} \approx \sum_i (\nabla u)_{f_i} \Delta \vec{S}_i$$

$$(\Delta u)_P = \sum_i (\nabla u)_{f_i} \frac{\Delta \vec{S}_i}{V} = \left[\Delta \vec{S}_i = \vec{n}_i \cdot \Delta S^{h} \right] =$$

$$= \sum (\nabla u)_{f_i} \cdot \vec{n}_i \frac{\Delta S_i^{\,h}}{V = h^2} = \sum_i \underbrace{(\nabla u)_{f_i} \vec{n}_i}_{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_i}} \frac{1}{h} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial n_i} \frac{1}{h} =$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial n_i} = \frac{u_{N_i} - u_P}{h} ; \quad \frac{\partial u}{\partial n_i} = \frac{u_P - u_{N_i}}{h} \quad i = 2, 3 \right] =$$

$$= \sum_i \frac{u_{N_i} - u_P}{h^2} = \frac{u_{N_4} - 2u_P + u_{N_2}}{h^2} + \frac{u_{N_1} - 2u_P + u_{N_3}}{h^2}$$