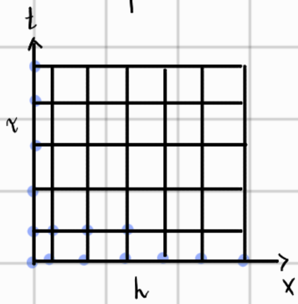
Выжимать

~ Семинар №1 ~

Ур. параболического типа

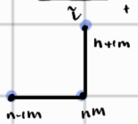
Ур. переноса: $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)$, $c>0$, $u(0,x)=u_0$, $u(t,0)=u_1$



$u(t^n, x^m) = u_m^n$

$u_t' \sim \frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}$ $\quad u_x' \sim \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$ $\quad \boxed{\sigma = \frac{c\tau}{h}}$ число Куранта

$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} + c\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$; $\quad \boxed{u_m^{n+1} = \tau f_m^n + u_m^n + \sigma(u_m^n - u_{m-1}^n)}$



Св-ва: 1) сходимость: $\|[u]_h - u_h\| \le D\tau^{p_1} + Ch^{p_2}$

2) аппроксимация: $\overset{\text{невязка}}{r} = L_h[u]_h - f_h$, $\quad \|r\| \le C\tau^p$

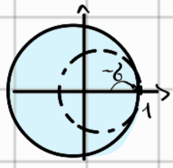
3) устойчивость: спектральный признак: $\boxed{L_h \Delta_h = 0}$ ур. для ошибки, $\Delta_h = u_h^* - u_h$, $\Delta_m^n = \sum_k \lambda_k e^{ikmh}$

лин. оператор

Рассмотрим: $\frac{\hat{u}_m^{n+1} - \hat{u}_m^n}{\tau} + c\frac{\hat{u}_m^n - \hat{u}_{m-1}^n}{h} = f_m^n$ (2) $\quad \left|\frac{\Delta^{n+1}}{\Delta^n}\right| \le 1$, $\lambda_k \le 1$

(2) - (1): $\Delta_m^n = \hat{u}_m^n - u_m^n$, $\quad \frac{\Delta_m^{n+1} - \Delta_m^n}{\tau} + c\frac{\Delta_m^n - \Delta_{m-1}^n}{h} = 0$

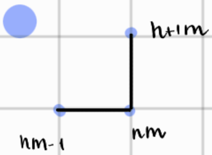
$\Delta_m^n \to \lambda^n e^{ikmh} \to \frac{1}{\tau}(\lambda^{n+1}e^{ikmh} - \lambda^n e^{ikmh}) - \frac{c}{h}(\lambda^n e^{ikmh} - \lambda^n e^{ik(m-1)h}) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda-1}{\tau} + c\frac{1-e^{-ikh}}{h} = 0$, $\lambda = 1 - \sigma(1-e^{-ikh})$, $|\lambda| \le 1$



$\sigma = \frac{\tau c}{h}$ - число Куранта

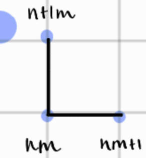
$\boxed{\sigma \le 1}$

$\boxed{\frac{c\tau}{h} \le 1}$ - условие устойчивости



$u_m^{n+1} = u(t^n+\tau, x_m) = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2}u_t'' + o(\tau^3)$; $\quad u_{m-1}^n = u(t_1^n, x_m - h) = u_m^n - h u_x' + \frac{h^2}{2}u_x'' + o(h^3)$

$r_m^n = u_t' + \frac{\tau}{2}u_t'' + o(\tau^2) + c(u_x' - \frac{h}{2}u_x'' + o(h^2)) - f_1$ $\quad r_m^n \sim o(\tau, h)$ или $o(\tau) + o(h)$ или $o(\tau+h)$



$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n$;

Аппроксимация: $r = u_t' + \frac{\tau}{2}u_t'' + o(\tau^2) + c(u_x' - \frac{h}{2}u_x'' + o(h^2)) - f \to r \sim o(\tau, h)$

Устойчивость: $\frac{\lambda-1}{\tau} + c\frac{e^{ikh}-1}{h} = 0 \to \lambda = 1 - \sigma(e^{ikh} - 1)$

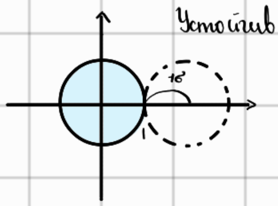
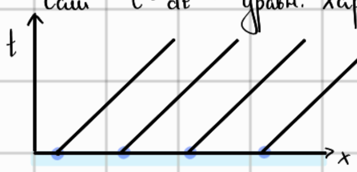
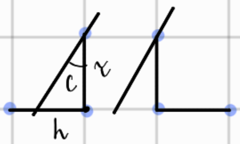


схема неустойчива

Условие Куранта - Фридрихса - Леви для ур. гиперболического типа: $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

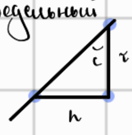
Если $c = \frac{dx}{dt}$ - уравн. характеристики $\quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = 0$ вдоль характеристики $\quad x = x(t)$



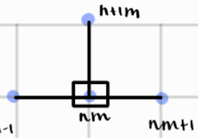


условие КФЛ: характеристика, выпущенная из верхней точки шаблона

предельный случай: условие необходимое, но не достаточное



$\boxed{\frac{c\tau}{h} \le 1}$

Рассмотрим метод неопр. коэф-тов: 

построить схему на шаблоне для $\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$

$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=Au_{m-1}^{n}+Bu_m^n+Cu_{m+1}^n+Du_m^{n+1}$. Разл. в окр. т. nm разложим в р. Тейлора

$$u_m^{n+1}=u_m^n+\tau u_t'+\frac{\tau^2}{2}u_t''+\frac{\tau^3}{6}u_t'''+o(\tau^4)$$

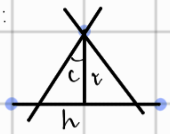
$$u_{m\mp1}^n=u_m^n\pm hu_x'+\frac{h^2}{2}u_x''\pm\frac{h^3}{6}u_x'''+o(h^4)$$

$$\begin{cases} u_m^n: 0=A+B+C+D \\ u_t': 1=\tau D \\ u_x': c=-hA+hC \\ u_t'': 0=\frac{\tau^2}{2}D \text{ - ошибка, против. ур. (1)} \\ u_x'': 0=\frac{h^2}{2}A+\frac{h^2}{2}C \\ u_x''': 0=\frac{h^3}{6}A+\frac{h}{6}C \text{ - противоречие} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=\frac{1}{\tau} \\ A=-C, \quad A=-\frac{c}{2h} \\ C=\frac{c}{2h} \\ B=-A-C-D=-\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

$$-\frac{c}{2h}u_{m-1}^n-\frac{u_m^n}{\tau}+\frac{c}{2h}u_{m+1}^n+\frac{u_m^{n+1}}{\tau}=0, \quad \frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+c\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}=0$$

Невязка: $r_m^n=\frac{\tau^2}{2}Du_t''+\frac{h^3}{6}u'''(c-A)+o(\tau^2)+O(h^3)=\underline{\frac{\tau}{2}u_t''+\frac{ch^2}{6}u_x'''+o(\tau,h^2)}$

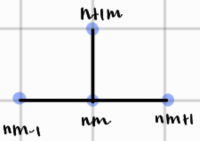
Рассм. условие КФЛ: 

$\frac{|c|\tau}{h}\le1$

Спектр. признак: $\frac{\lambda-1}{\tau}+c\frac{e^{ikh}-e^{-ikh}}{2h}=0$, $\sigma=\frac{c\tau}{h}$, $\lambda=1-\sigma i\frac{e^{ikh}-e^{-ikh}}{2i}=1-i\sigma\sin kh$

$|\lambda|\le1\to|\lambda|^2\le1\to\cancel{1}+\sigma^2\sin^2kh\le\cancel{1}\to$ схема неустойчива

Улучшим св-ва схемы не выходя за рамки шаблона: скорректируем ур-е на главный член погрешности



$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+c\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}-\frac{\tau}{2}u_t''=0, \quad u_{tt}''=-cu_{xt}', \quad u_{tx}''=-cu_{xx}'', \quad \underline{u_{tt}''=c^2u_{xx}''}$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+c\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}-\underbrace{\frac{\tau c^2}{2}\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}}_{\tau\, const\cdot u_{xx}''}=0 \text{ выч. вязкость}$$

Исследуем на устойчивость: $\frac{\lambda-1}{\tau}+c\frac{e^{ikh}-e^{-ikh}}{2h}-\frac{\tau c^2}{2h^2}\underbrace{(e^{ikh}-2+e^{-ikh})}_{-4\sin^2 kh/2}=0$

$$\lambda=1-i\sigma\sin kh-\frac{2\tau^2c^2}{h^2}\sin^2\frac{kh}{2}\to\left|1-i\sigma\sin kh-2\sigma^2\sin^2\frac{kh}{2}\right|\le1, \quad |\lambda|^2\le1$$

$$1-4\sigma^2\sin^2\frac{kh}{2}+4\sigma^4\sin^4\frac{kh}{2}+4\sigma^2\sin^2\frac{kh}{2}\cos^2\frac{kh}{2}\le1\to-1+\sigma^2\sin^2\frac{kh}{2}+\cos^2\frac{kh}{2}\le0\to(\sigma^2-1)\sin^2\frac{kh}{2}\le0, \sigma^2\le1\to\boxed{\frac{|c|\tau}{h}\le1}$$

усл. устойч.

$$r\sim\cancel{u_t'}+\cancel{\frac{\tau}{2}u_t''}+\frac{\tau^2}{6}u_t'''+o(\tau^3)+c\left(\cancel{u_x'}+\frac{h^2}{6}u_x'''+o(h^4)\right)-\cancel{\frac{\tau}{2}c^2}\left(\cancel{u_x''}+\frac{h^2}{12}u_x^{IV}+o(h^4)\right)$$

$$r=\frac{\tau^2}{6}u_t'''+c\frac{h^2}{6}u_x'''-\frac{\tau^2}{2}c^2\frac{h^2}{12}u_x^{IV}, \quad r=o(\tau^2,h^2,\tau h^2)$$

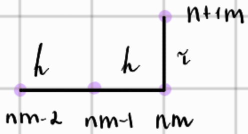
15.02.23

~ Семинар №2 ~

~ Методы построения разностных схем ~

$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $a>0$ $\quad u(0,x)=\varphi_0$, $u(t,0)=\varphi_1$ $\quad$ Все разложения в т. nm!

Построить разностную схему на шаблон: 1) Замена производных на конечные разности



$$\frac{\partial u}{\partial t}\sim\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{u_m^n-u_{m-2}^n}{2h}$$

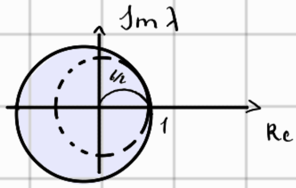
$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\frac{u_m^n-u_{m-2}^n}{2h}=0 \quad \sigma=\frac{\tau a}{h}$$

$$u_m^{n+1}=u_m^n-\frac{\sigma}{2}(u_m^n-u_{m-2}^n)$$

$$u_m^{n+1}=u_m^n+\tau u_t'+\frac{\tau^2}{2}u_t''+\frac{\tau^3}{6}u_t'''+o(\tau^4); \quad u_{m-1}^n=u_m^n-hu_x'+\frac{h^2}{2}u_x''-\frac{h^3}{6}u_x'''+\frac{h^4}{24}u^{IV}+o(h^5)$$

$$u_{m-2}^n=u_m^n-2hu_x'+2h^2u_x''-\frac{4}{3}h^3u_x'''+\frac{2}{3}h^4u_x^{IV}+o(h^5)$$

Аппроксимация: $\tau_m^n = u_t' + \frac{\tau}{2}u_t'' + o(\tau^2) + a(u_x' - hu_x'' + o(h^2)) \sim O(\tau, h)$



Устойчивость: спектральный признак: $\frac{\lambda - 1}{\tau} + a\frac{1 - e^{-2ikh}}{2h} = 0$

$\lambda = 1 - \frac{\sigma}{2}(1 - e^{-2ikh})$ $\frac{\sigma}{2} \le 1$ условие уст: $\frac{\tau a}{2h} \le 1$

2) Метод неопределенных коэффициентов:

$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = A u_m^{n+1} + B u_m^n + C u_{m-1}^n + D u_{m-2}^n$ $A = \frac{1}{\tau}$

$u: 0 = A + B + C + D$ $u_t'': 0 = \frac{\tau^2}{2}A$ – против. 2ну – ошибка $C + 2D = -a/h$, $D = \frac{a}{2h}$

$u_t': 1 = A\cdot\tau$ $u_x'': 0 = \frac{Ch^2}{2} + D\cdot 2h^2$ $C + 4D = 0$, $C = -\frac{2a}{h} \to B = -A - C - D = -\frac{1}{\tau} + \frac{3a}{2h}$

$u_x': a = C\cdot(-h) + D(-2h)$ $u_x''': 0 = -\frac{Ch^3}{6} - D\frac{8h^3}{6}$ – ошибка $-C\frac{h^3}{6} - D\frac{8h^3}{6} = \frac{h^3}{6}\left(\frac{2a}{h} - \frac{8a}{2h}\right) = -\frac{h^2 a}{3}$

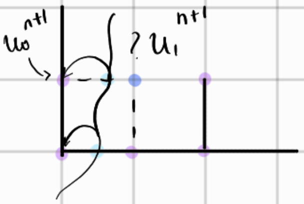
$\frac{u_m^{n+1}}{\tau} - \frac{u_m^n}{\tau} + \frac{3a}{2h}u_m^n - \frac{4a}{2h}u_{m-1}^n + \frac{a}{2h}u_{m-2}^n = 0 \Rightarrow \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\frac{u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 3u_m^n}{2h} = 0 \Rightarrow r = \frac{\tau}{2}u_t'' - \frac{h^2 a}{3}u_x''' + O(\tau^2, h^3)$

$u_t' + au_x' = 0$; $u_{tt}'' + -au_{tx}''$; $u_{tx}'' = -au_{xx}''$ $\to$ $u_t'' = a^2 u_{xx}''$ $-\tau/2 a^2 u_{xx}'' \to \frac{a^2\tau}{2}\frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{h^2}$

Коррекция схемы на главный член погрешности: $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\frac{u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 3u_m^n}{2h} - \frac{\tau}{2}u_t'' = 0$

$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\frac{u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 3u_m^n}{2h} - \frac{a^2\tau}{2}\frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{h^2}$, $r = \frac{\tau}{2}u_t'' - \frac{h^2 a}{3}u_x''' + O(\tau^2, h^3) - \frac{a^2\tau}{2h^2}(-\cancel{2hu_x'} + \cancel{2hu_x'} + 2h^2u_x'' - h^2u_x'' - \frac{4}{3}h^3u_x''' + \frac{h^3}{3}u_x''' + O(h^4)) =$

$= \frac{\tau}{2}\cancel{(u_t'' - a^2u_{xx}'')} - \frac{h^2 a}{3}u_x''' + O(\tau^2, h^3) + \frac{a^2\tau}{2}hu_x'''$ $r \sim O(\tau^2, h^2, \tau h)$



$u_0^{n+1} = \varphi_0(t^{n+1})$

$u_1^{n+1} = u_0 + hu_x' + \frac{h^2}{2}u_x'' + O(h^3) \to u_t' + au_x' = 0 \to$

$u_t' = -au_x'$, $u_{0t}' = \varphi_{0t}' = -au_x'$, $u_x'|_t = -\frac{\varphi_{0t}'}{a}$ $\varphi_t'' = u_t'' = a^2 u_{xx}''$

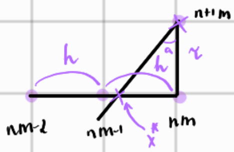
$u_1^{n+1} = \varphi_0(t^{n+1}) - \frac{h}{a}\varphi_{0t}'(t^{n+1}) + \frac{h^2}{2a^2}\varphi_{0tt}''(t^{n+1})$

$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\frac{u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 3u_m^n}{2h} - \frac{a^2\tau}{2}\frac{u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{h^2} = 0$

3) Интерполяционно-характеристические или сеточно-характеристические методы

$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $a > 0$; $a = \frac{dt}{dt}$ – характеристики $x^* = x_m - a\tau$

$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = 0$
← вдоль хар-ки



Рассматриваем нижний слой по времени:

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m
u	u_{m-2}^n	u_{m-1}^n	u_m^n

Построим интерп. полином Ньютона:

x_{m-2}	u_{m-2}^n	$\frac{u_{m-2}^n - u_{m-1}^n}{x_{m-2} - x_{m-1}} = \frac{u_{m-1}^n - u_{m-2}^n}{h}$	$\frac{1}{h}\left(\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} - \frac{u_{m-1}^n - u_{m-2}^n}{h}\right) = \frac{u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_m^n}{2h^2}$
x_{m-1}	u_{m-1}^n	$\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$	
x_m	u_m^n		

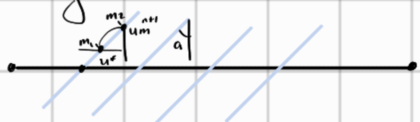
$P_2(x) = u_{m-2}^n + \frac{1}{h}(u_{m-1}^n - u_{m-2}^n)(x - x_{m-2}) + \frac{1}{2h^2}(u_{m-2}^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n)(x - x_{m-2})(x - x_{m-1})$ $x^* = x_m - a\tau = x_{m-2} + 2h - a\tau = x_{m-1} + h - a\tau$

$P_2(x^*) = u_m^{n+1} = u_{m-2}^n + \frac{u_{m-1}^n - u_{m-2}^n}{h}(2h - a\tau) + \frac{1}{2h^2}(u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n)(2h - a\tau)(h - a\tau) =$

$= u_{m-2}^n + 2u_{m-1}^n - 2u_{m-2}^n - \frac{a\tau}{h}(u_{m-1}^n - u_{m-2}^n) + u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n - \frac{3\tau a}{2h}(u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n) + \frac{a^2\tau^2}{2h^2}(u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n)$ $| : \tau$

$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{a}{2h}(4u_{m-1}^n - u_{m-2}^n + 3u_m^n) + \frac{a^2\tau}{2h^2}(u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n) = 0$

Почему $P_2(x^*) = u_m^{n+1}$?



если ур. неоднородное: $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f \xrightarrow{\text{по характеристике}} \frac{du}{d\xi} = f(\xi)$

$$\int_{t_1^n, x^*}^{t_1^{n+1}, x_m} du = \int f(\xi)\,d\xi \qquad u_m^{n+1} - u^* = \int_{t^n, x^*}^{t^{n+1}, x_m} f(\xi)\,d\xi \qquad u_m^{n+1} = u^* + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi)\,d\xi$$

Устойчивость:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} e^{ikh} + \frac{a}{2h}\left(e^{-ikh} - 4 + 3e^{ikh}\right) - \frac{a^2\tau^2}{2h^2}\left(e^{ikh} - 2 + e^{ikh}\right) = 0,$$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $|\lambda|^2 \le 1$

строим границу области $|\lambda|^2 = 1$

$$\lambda = 1 - \frac{\sigma}{2}\left(e^{-2ikh} - 4e^{-ikh} + 3\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(e^{-2ikh} - 2e^{-ikh} + 1\right)$$

22.02.23

~ Семинар №3 ~

Системы ур. гиперболического типа

Пример: система ур. акустики: $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$; $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial v}{\partial x} = f$; $\frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = g$; $u(0,x) = u_0$ $\quad v(0,x) = v_0$ $\quad a = const > 0$

$\frac{\partial V}{\partial t} + A\frac{\partial V}{\partial x} = F$ $\qquad A = \Omega_\Lambda^{-1}\Lambda\Omega_\Lambda$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \Omega^{-1}\Lambda\Omega\frac{\partial V}{\partial x} = F \,\big|\cdot\Omega$ слева

собств. векторы-строки $\omega A = \lambda\omega$

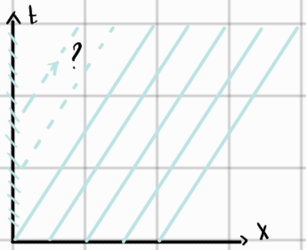
(левая система)

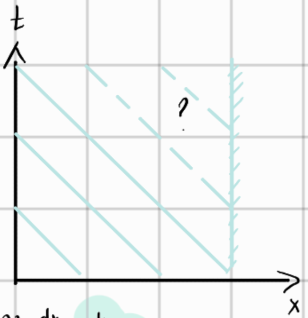
$\frac{\Omega\partial u}{\partial t} + \Lambda\Omega\frac{\partial u}{\partial x} = \Omega F \Rightarrow z = \Omega V$ – инварианты Римана

$\frac{\partial z}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial z}{\partial x} = G$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\frac{\partial z_1}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial z_1}{\partial x} = g_1$, $\frac{\partial z_2}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial z_2}{\partial x} = g_2$

$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial z_i}{\partial x} = g_i$ пусть $\lambda_i > 0$

$\lambda_i > 0 \Rightarrow$ граничные условия слева





$\lambda_i < 0$

Инвариант Римана: $z = \Omega V$; $\frac{\partial z_i}{\partial t} + \lambda_i\frac{\partial z_i}{\partial x} = g_i$; $\lambda_i = \frac{dx}{dt}$; $\frac{\partial z_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} = g_i$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a^2 = 0 \quad ; \quad \lambda = \pm a$$

$\lambda_1 = a$ $\quad (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} = 0$ $\quad -ax_1 + x_2 a = 0$ $\quad \omega_1 = (1\ \ 1)$

$\lambda_2 = -a$ $\quad (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = 0$ $\quad \omega_2 = (1\ \ -1)$

$z = \Omega V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \end{pmatrix}$ $\quad \hookrightarrow$ $\frac{\partial z_1}{\partial t} + a\frac{\partial z_1}{\partial x} = f + g$ $\quad \hookrightarrow$ граничное условие слева

$\frac{\partial z_2}{\partial t} - a\frac{\partial z_2}{\partial x} = f - g$ $\quad \hookrightarrow$ граничное условие справа

$z_1(t,0) = \psi_1 \iff u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t)$; $\qquad z_2(t,1) = \psi_2(t) \iff u(t,1) - v(t,1) = \psi_2(t)$

Задача из К/р

$\frac{\partial V}{\partial t} + A\frac{\partial V}{\partial x} = F$ $\qquad x \in [0,1]$ $\qquad V(0,x) = V_0$, $\quad V = (u, v)^T$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 48 & 12 \end{pmatrix}$

1) Показать, что система гиперболическая

2) Выбрать корр. постановку:

1. $5u(t,0) = \alpha(t)$ ✗
2. $u(t,1) = \beta(t)$ ✗
3. $8u(t,0) + 2v(t,0) = \beta(t)$ ✓
4. $9u(t,1) + 6v(t,1) = \beta(t)$ ✗

Определение: Система ур. вида (*) наз. гиперболической, если собственное значение матрицы A – вещест.

1) $\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 32-\lambda & 8 \\ 48 & 12-\lambda \end{pmatrix} = 32\cdot 12 - 44\lambda + \lambda^2 - 8\cdot 48 = \lambda(\lambda-44) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 44 \Rightarrow$ система гиперболическая

2) δ_2 и δ_4 нах. на правой гр. $\to$ не подходят

$\lambda_1 = 0 \quad (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 48 & 12 \end{pmatrix} = 0 \qquad 2x_1 + 3x_2 = 0 \qquad \omega_1 = (-3, 2)$

$\lambda_2 = 44 \quad (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -12 & 8 \\ 48 & -32 \end{pmatrix} = 0 \qquad x_1 - 4x_2 = 0 \qquad \omega_2 = (4, 1)$

$\Rightarrow z = \Omega U = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3u+2v \\ 4u+v \end{pmatrix}$

δ_1 не подходит тк там только u

Тогда для δ_3: $z_2(t,0) = \frac{p(t)}{2}$ – корректное граничное условие

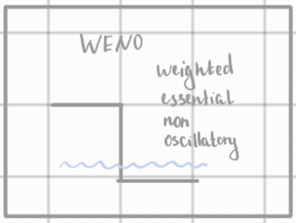
Задача

Задана система ур. гиперболического типа: $\frac{\partial u}{\partial t} + 4\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial v}{\partial x} = f$; $\frac{\partial v}{\partial t} + 5\frac{\partial u}{\partial x} - 4\frac{\partial v}{\partial x} = g$; $u(0,x) = u_0(x)$, $v(0,x) = u_1(x)$, $0 \le x, t \le 1$

1) Предложить числ. решение, исследовав вопрос постановки ГУ

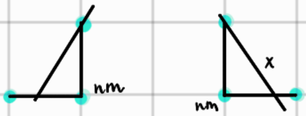
2) Исследовать предл. решение на спектральную устойчивость

Схема Куранта-Изаксона-Риса (КИР):
- $\lambda > 0 \quad \frac{\lambda+|\lambda|}{2} = \lambda \quad \frac{\lambda-|\lambda|}{2} = 0$
- $\lambda < 0 \quad \frac{\lambda+|\lambda|}{2} = 0 \quad \frac{\lambda-|\lambda|}{2} = \lambda$



$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \overbrace{\frac{\lambda+|\lambda|}{2}}^{\ge 0}\frac{\partial z_i}{\partial x} + \overbrace{\frac{\lambda-|\lambda|}{2}}^{\le 0}\frac{\partial z_i}{\partial x} = f_i$$

$$\frac{z_m^{n+1} - z_m^n}{\tau} + \frac{\lambda+|\lambda|}{2}\cdot\frac{z_m^n - z_{m-1}^n}{h} + \frac{\lambda-|\lambda|}{2}\,\frac{z_{m+1}^n - z_m^n}{h} = f$$



такое происходит, когда знак λ меняется

$A = \Omega^{-1}\Lambda\Omega \qquad |\Lambda|$ - матрица с $|\lambda_i|$ на диагонали $\qquad |A| = \Omega^{-1}|\Lambda|\Omega$ - обозначение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \Omega^{-1}\Lambda\Omega\frac{\partial U}{\partial x} = F; \qquad \frac{\Omega\,\partial U}{\partial t} + \Lambda\Omega\frac{\partial U}{\partial x} = \Omega F \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\tau}(U_m^{n+1} - U_m^n) + \frac{\Omega}{2h}(\Lambda + |\Lambda|)(U_m^n - U_{m-1}^n) + \frac{\Omega}{2h}(\Lambda - |\Lambda|)(U_{m+1}^n - U_m^n) = \Omega F$$

$$\frac{\Omega}{\tau}(U_m^{n+1} - U_m^n) + \Lambda\Omega\frac{1}{2h}(U_m^n - U_{m-1}^n + U_{m+1}^n - U_m^n) + |\Lambda|\Omega\frac{1}{2h}(U_m^n - U_{m-1}^n - U_{m+1}^n + U_m^n) = \Omega F$$

$$\frac{\Omega}{\tau}(U_m^{n+1} - U_m^n) + \Lambda\Omega\frac{1}{2h}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) - |\Lambda|\Omega\frac{h}{2}\frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2h} = \Omega F \ \Big|\ \Omega^{-1}$$

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + \Omega^{-1}\Lambda\Omega\frac{1}{2h}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) - \Omega^{-1}|\Lambda|\Omega\frac{h}{2}\frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2h} = F$$

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + A\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} - |A|\frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2h} = f$$

2) Спектральная устойчивость: $U_m^n \to \psi\lambda^n e^{ikmh}$, где $\|\psi\| = 1$ заменим

$$E\frac{\psi\lambda^{n+1}e^{ikmh} - \psi\lambda^n e^{ikmh}}{\tau} + A\frac{\psi\lambda^n e^{ik(m+1)h} - \psi\lambda^n e^{ik(m-1)h}}{2h} - |A|\frac{1}{2h}\left(\psi\lambda^n e^{ik(m+1)h} - 2\psi\lambda^n e^{ikmh} + \psi\lambda^n e^{ik(m-1)h}\right) = 0$$

$$\psi\lambda^n e^{ikmh}\Big(E\cdot\frac{\lambda-1}{\tau} + A\underbrace{\frac{e^{ikh} - e^{-ikh}}{2h}}_{\frac{i\sin kh}{h}} - |A|\underbrace{\frac{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}{2h}}_{-\frac{2}{h}\sin^2\frac{kh}{2}}\Big) = 0$$

det матр. = 0

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\tau} + \frac{4i\sin kh}{h} + 2|a_{11}|\frac{\sin^2 kh/2}{2} & 0 - \frac{3i}{h}\sin kh + \frac{2|a_{12}|}{h}\sin^2\frac{kh}{2} \\ 0 + \frac{5i\sin kh}{h} + |a_{21}|\frac{2}{h}\sin^2\frac{kh}{2} & \frac{\lambda-1}{\tau} - \frac{4i}{h}\sin kh + |a_{22}|\cdot\frac{2}{h}\sin^2\frac{kh}{2} \end{pmatrix}$$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 5 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -16 + \lambda^2 + 15 = 0 \to \lambda = \pm 1$;

Если $\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \omega_1 = (5\ {-3})$

Если $\lambda = -1 \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \omega_2 = (1\ {-1})$

$\Omega = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det\Omega = -5 + 3 = -2$

$\Omega^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$|A| = \Omega^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Omega = \Omega^{-1}\Omega = E$

$$\left(\frac{\lambda-1}{\tau}+\frac{4i\sin kh}{h}+\frac{2}{h}\sin^2\frac{kh}{2}\right)\left(\frac{\lambda-1}{\tau}-\frac{4i\sin kh}{h}+\frac{2}{h}\sin^2\frac{kh}{2}\right)-\frac{15}{h^2}\sin^2 kh=0 \;\Big|\cdot\tau^2 \quad \text{и} \quad \sigma=\frac{\tau}{h}$$

$$(\lambda-1)^2+\frac{4\tau}{h}\sin^2\frac{kh}{2}(\lambda-1)+\frac{4\tau^2}{h^2}\sin^4\frac{kh}{2}+\frac{16\tau^2}{h^2}\sin^2 kh-\frac{15\tau^2}{h^2}\sin^2 kh=0$$

нужно потребовать, чтобы $|\lambda|\le 1 \to$ усл. уст.

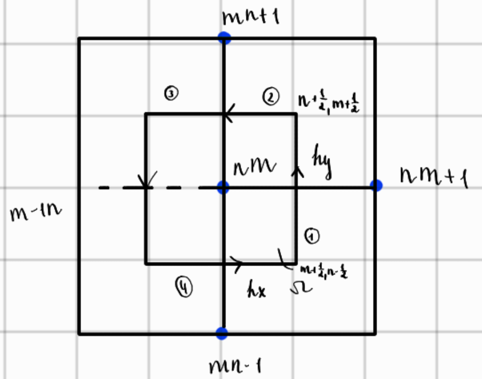
выходят решения на диск

1.03.23

~ Семинар №4 ~

Интегро-интерп. метод

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f$$



1) Выбираем элементарный объем, содерж. точку (x_m, y_n) Ω
Нужно, чтобы область, за искл. границ можно было заменить объемами без перекрытия

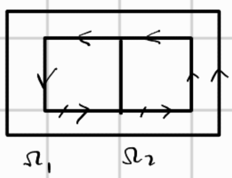
2) В Ω интегрируем наше уравнение

$$\iint_\Omega \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy=\iint_\Omega f\,dxdy$$

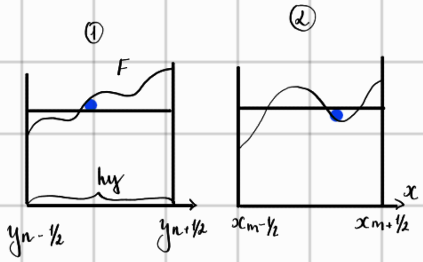
3) Переходим к интегралам от границ $\Omega: \partial\Omega$

Выбираем напр. обхода. Важно, чтобы оно было одним и тем же во всех ячейках:

$$\oint_{\partial\Omega_1} f\,d\partial\Omega+\oint_{\partial\Omega_2} f\,d\partial\Omega=\oint_{\partial(\Omega_1+\Omega_2)} f\,d\Omega$$



4) Используем ф-лу Грина: $\boxed{\iint_\Omega\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial\Omega} L\,dy+M\,dx}$



Получим:

$$\iint_\Omega\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)dxdy=\oint_{\partial\Omega}-u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}dy+u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

5) Переходим к интегралам по граням: $\int_{\partial\Omega}=\int_①+\int_②+\int_③+\int_④$

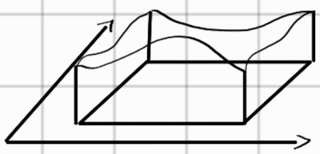
6) Расчитаем интегралы на гранях: ①: $\int_①\left(-u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}dy+u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{dx}_{0}\right)=\int_{y_{n-1/2}}^{y_{n+1/2}}\underbrace{-u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}}_{F}dy\approx\left[-u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{m+1/2,n}\int_{y_{n-1/2}}^{y_{n+1/2}}dy=-\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{m+1/2,n}h_y$

②: $\int_②-u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{dy}_{0}+u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}dx=\int_{x_{m+1/2}}^{x_{m-1/2}}u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}dx\approx\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{m,n+1/2}\int_{x_{m+1/2}}^{x_{m-1/2}}dx=\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right][-h_x]$

③: $\int_③=\int_{y_{n+1/2}}\left(-u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\approx\left[-u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{m-1/2,n}(-h_y)$ и ④: $\int_④\approx\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{m,n-1/2}\cdot h_x$

7) Вычислим интеграл от правой части: $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \to$ если есть возможность определяется аналитически

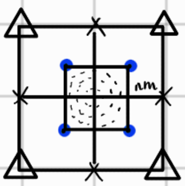
$\to$ если нет такой возможности, то численно



$$\iint_\Omega f\,dxdy\approx f_{mn}\iint dxdy=f_{nm}h_xh_y$$

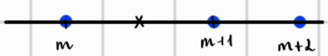
$$-\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{m+1/2,n}h_y-\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{m,n+1/2}h_x+\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{m-1/2,n}h_y+\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{m,n-1/2}h_x=f_{nm}h_xh_y \;\Big|:\Omega=h_xh_y$$

$$-\frac{\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{m+1/2,n}-\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{m-1/2,n}}{h_x}-\frac{\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]-\left[u^{5/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{m,n-1/2}}{h_y}=f_{nm}$$



8) $[u^{5/2}]_{m+1/2,n}$: 1. Константная интерполяция $[u^{5/2}]_{m+1/2,n}\approx u_{mn}^{5/2}$

2. Линейная интерполяция: $[u^{5/2}]_{m+1/2,n}=\frac{u^{5/2}_{m+1n}+u^{5/2}_{mn}}{2}$ или $[u^{5/2}]_{m+\frac12 n}=\left(\frac{u_{m+1n}+u_{mn}}{2}\right)^{5/2}$



3. Кубическая интерполяция: $u_{m+1/2,n}\approx\underset{\sim}{A}u_m+\underset{\sim}{B}u_{m+1}+\underset{\sim}{C}u_{m+2}=\frac38u_m+\frac68u_{m+1}-\frac18u_{m+2}$

раскладываем в ряд Тейлора в окр. $x_{m+1/2}, y_n$

$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{m+1/2\,n} \approx \frac{u_{m+1\,n}-u_{m\,n}}{h_x}$ – со 2-м порядком точности в т. $x_{m+1/2,\,n}$

$$-\left[\left(\frac{3}{8}u_m+\frac{6}{8}u_{m+1}-\frac{1}{8}u_{m+2}\right)^{5/2}\left(\frac{u_{m+1\,n}-u_{m\,n}}{h_x}\right)-\left(\frac{3}{8}u_{m-1}+\frac{6}{8}u_m-\frac{1}{8}u_{m+1}\right)^{5/2}\frac{u_m-u_{m-1}}{h_x}\right]\frac{1}{h_x}$$

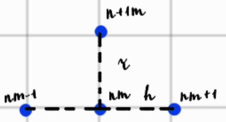
$$-\left[\left(\frac{3}{8}u_n+\frac{6}{8}u_{n+1}-\frac{1}{8}u_{n+2}\right)^{5/2}\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{h_y}\right)-\left(\frac{3}{8}u_{n-1}+\frac{6}{8}u_n-\frac{1}{8}u_{n+1}\right)^{5/2}\frac{u_n-u_{n-1}}{h_y}\right]\frac{1}{h_y}=f_{mn}$$

Задача

Какая задача и с каким порядком приближается разностной схемой: $\frac{y_m^{n+1}-\frac{1}{2}(y_{m+1}^n-y_{m-1}^n)}{\tau}+\alpha\frac{y_{m+1}^n-y_{m-1}^n}{2h}=f_m^n,\quad y^0=\varphi(x_m)$

а) при $\frac{\tau}{h}=\tau=\text{const}$

б) при $\frac{\tau}{h^2}=\tau=\text{const}$



Раскладываем в ряд Тейлора в окр. т. n,m: $u_m^{n+1}=u^n+\tau u_t'+\frac{\tau^2}{2}u_t''+\frac{\tau^3}{6}u_t'''$

$u_{m\pm1}^n=u_m\pm h u_x'+\frac{h^2}{2}u_x''\pm\frac{h^3}{6}u_x'''+O(h^4)$

Составляем невязку: $r_m^n=y+\tau y'+\frac{\tau^2}{2}y_t''+\frac{\tau^3}{6}y_t'''-(y+\frac{h^2}{2}y''+O(h^2))+\alpha(y_x'-\frac{h^2}{6}y_x'''-f=y_t'+\frac{\tau}{2}y_t''+\frac{\tau^2}{6}y_t'''-\frac{h^2}{2\tau}y_x''+\alpha y_x'-\frac{\alpha h^2}{6}y_x-f$

$y_t'+\alpha y_x'=f$ – искомое ур-е с точностью $O(\tau,\frac{h^2}{2\tau},h^2)$

а) $y_t'+\alpha y_x'=f$ с точн. $O(\tau,h)$

б) $y_t'+\alpha y_x'=f$ – не аппроксимируется, получаем ур-е: $y_t'-\frac{1}{2\tau}y_x''+\alpha y_x'=f$ точн. $O(\tau,h^2)$